

Leandro Roza Livramento

**Q-BALLS E Q-SHELLS COMPACTAS EM MODELO TIPO
CPN**

Dissertação submetida ao Programa
de Pós Graduação em Física para a
obtenção do Grau de Mestre em Física.
Orientador
Universidade Federal de Santa Cata-
rina: Prof. Dr. Pawel Klimas

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Livramento, Leandro Roza
Q-balls e Q-shells Compactas em Modelo Tipo CPN /
Leandro Roza Livramento ; orientador, Pawel Klimas -
Florianópolis, SC, 2017.
80 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação Multidisciplinar em Saúde.

Inclui referências

1. Saúde. 2. Soluções compactas. 3. Q-ball. 4. Q-shell.
5. CPN. I. Klimas, Pawel. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação Multidisciplinar
em Saúde. III. Título.

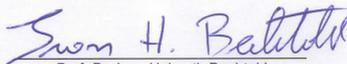
Q-balls e Q-shells Compactas em Modelo Tipo CPN

Leandro Roza Livramento

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de **MESTRE EM FÍSICA**, na área de concentração de **Física Matemática e Teoria de Campos** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.



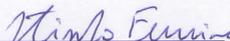
Prof. Dr. Pawel Klimas
(UFSC - orientador)



Prof. Dr. Ivan Helmuth Bechtold
(UFSC/FSC - Coordenador do Programa)



Prof. Dr. Pawel Klimas
(UFSC - presidente)



Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira
(membro externo) - UFSC/USP



Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli
(membro titular) - UFSC/FSC



Prof. Dr. Paulo Juliano Liebgott
(membro titular) - UFSC/FSC

Prof. Dr. Celso de Camargo Barros Junior
(membro suplente) - UFSC/FSC

A minha família, por sempre estarem ao meu lado.

À Zaza e a Talita, por todo carinho e apoio.

Aos amigos, por fazem meu trajeto muito mais divertido.

Aos professores que me auxiliaram a tornar-me o meu melhor.

AGRADECIMENTOS

Dedico esse trabalho à minha família, seja pelo carinho e apoio que sempre fizeram prevalecer na adversidade, seja por compartilhar elogios e provocações nos muitos almoços e cafés. À minha mãe que teve a paciência de me ensinar a ler e escrever e sempre tentou dar a mim e aos meus irmãos o que havia de melhor. Com certeza foi com você que eu aprendi a dar o meu melhor e não nunca desistir. Grato também por comer minhas gororobas e dizer que estava bom.

À minha namorada Talita tenho a mais profunda gratidão, pois nada paga o sentimento de saber que se é amado profundamente. Grato também pelas massagens, lanches e aquilo que eu sonhará, uma pessoa incrível para contar em todos os momentos. Te amo!

À Pituca e Grande, por mostrarem que eu poderia ser mais na vida. Poderia ser o cara que pica as frutas e abre o portão para darem voltinhas. Ser mais é cuidar e se sentir bem sendo simples.

À meus amigos Antônio, Guilherme e Wagner fico grato pelas longas conversas estimulantes que além de nutrir o intelecto fizeram perdurar o ânimo e a sanidade.

Grato ao Antônio da pós que resolve com eficiência todos os problemas possíveis e ao pessoal da astro que nunca deixou faltar café.

À meus professores, a qual a instrução foi essencial para a construção do meu saber. Em especial ao meu orientador Paweł, por me transmitir parte de sua excelência em física e determinação. Por dizer que não sabe quando não sabe, mas aparecer com a resposta no dia seguinte. Fez-me ver que ciência e trabalho árduo andam lado a lado.

Grato ao Luiz pela prestatividade e pela oportunidade de continuar meu trabalho no novo âmbito do doutorado.

Grato aos desenvolvedores do Mathematica, sem vocês eu estaria conferindo os cálculos desse trabalho até agora.

Agradeço em especial à minha tia Zaza por todo carinho, acolhimento e apoio, desde minha mais antiga e vaga lembrança.

Grato a todos por terem acreditado em mim!

Don't panic!

(The Hitchhiker's Guide to the Galaxy,
1979)

RESUMO

Mostramos que o modelo CP^N com número ímpar de campos escalares complexos e um potencial em forma V possui soluções compactas de energia finita em forma de Q-balls e Q-shells. As soluções foram obtidas em $d = 3$ dimensões espaciais e uma dimensão temporal. Q-balls aparecem em $N = 1$ e $N = 3$ enquanto Q-shells são presentes para todos os valores ímpares superiores de N . A energia dessas soluções se comporta como $E \sim |Q_t|^{5/6}$ onde Q_t é a carga de Noether. Esta dependência entre carga e energia assegura a estabilidade das soluções compactas encontradas nesse modelo.

ABSTRACT

We show that the CP^N model with odd number of complex scalar fields and V-shaped potential possesses a finite energy compact solutions in the form of Q-balls and Q-shells. The solutions were obtained in $d = 3$ spatial dimensions and one time dimensions. Q-balls appear for $N = 1$ and $N = 3$ whereas Q-shells are present for all higher odd values of N . The energy of these solutions behaves as $E \sim |Q_t|^{5/6}$ where Q_t is the Noether charge. This dependency between charge and energy ensures the stability of the compact solutions found in this model.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 15 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 19 |
| 3 | O MODELO | 25 |
| 4 | Q-BALLS E Q-SHELLS COMPACTAS EM MODELOS TIPO CP^{2L+1} | 29 |
| 4.1 | O ANSATZ | 29 |
| 4.2 | ENERGIA E QUANTIDADES CONSERVADAS | 30 |
| 4.3 | EXPANSÃO NO CENTRO | 31 |
| 4.3.1 | Caso $l=0$ | 32 |
| 4.3.2 | Caso $l=1$ | 33 |
| 4.3.3 | Caso $l=2$ | 34 |
| 4.4 | EXPANSÃO NA BORDA | 34 |
| 4.5 | SOLUÇÕES NUMÉRICAS | 35 |
| 4.6 | ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES | 47 |
| 5 | O MODELO LIMITE | 49 |
| 5.1 | SOLUÇÃO EXATA | 49 |
| 5.2 | SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO APROXIMADA PARA $L = 0$ (CP^1) | 51 |
| 5.3 | SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO APROXIMADA PARA $L = 1$ (CP^3) | 53 |
| 5.4 | SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO APROXIMADA PARA $L = 2$ (CP^5) | 55 |
| 5.5 | ENERGIA E CARGAS | 57 |
| 6 | CONCLUSÕES | 59 |
| | REFERÊNCIAS | 61 |
| | APÊNDICE A – Equações de movimento | 65 |
| | APÊNDICE B – Equação puramente radial | 79 |

1 INTRODUÇÃO

Não-linearidades em teorias físicas formam um obstáculo sério para formulação exata e obtenção das soluções analíticas. Muitas técnicas de integração, como por exemplo o método das funções de Green, não se aplicam a modelos não-lineares. Por outro lado, existe uma grande necessidade de lidar com teorias não-lineares pois elas descrevem as interações fundamentais baseadas nos grupos não-abelianos. Um exemplo clássico é a descrição da interação forte baseada nos campos de Yang-Mills. A dificuldade principal na descrição da interação forte vem do fato da constante de acoplamento depender da energia. No regime de altas energias a constante de acoplamento é pequena e pode servir como um parâmetro perturbativo. Em particular, a descrição deste setor é bem sucedida em abordagem baseada na técnica de diagramas de Feynman. Por outro lado, no regime de energias baixas a constante de acoplamento cresce e o cálculo perturbativo não pode mais ser aplicado.

A quantização de teoria de Yang-Mills fortemente acoplada é uma tarefa extremamente difícil. Como alternativa a esse tipo de procedimento, estuda-se os modelos clássicos tratados como modelos efetivos da teoria quântica. Modelos desse tipo são conhecidos como modelos de Skyrme-Faddeev (SF) e suas modificações (FERREIRA; KLIMAS, 2010). Modelo de Skyrme-Faddeev foi imensamente estudado em contexto de sólitons topológicos. Em particular, foram encontradas várias soluções numéricas e também soluções exatas tipo vórtex (FERREIRA; KLIMAS; ZAKRZEWSKI, 2011a), (FERREIRA; KLIMAS; ZAKRZEWSKI, 2011b), (FERREIRA; KLIMAS; ZAKRZEWSKI, 2011c).

Uma outra possibilidade é o estudo de soluções não-topológicas. O primeiro passo para esse tipo de estudo pode ser dado considerando apenas o termo quadrático do modelo SF estendido e verificando se tais soluções podem ser construídas. Posteriormente pode ser investigado um modelo completo através da inclusão dos termos quárticos. Nesse trabalho, vamos lidar apenas com modelo quadrático, isto é, com uma versão de modelo CP^N . Levando em conta que as soluções não-topológicas tipo Q-ball foram encontradas em modelo de baby-Skyrme (ADAM et al., 2009) vamos adotar aqui um procedimento similar. Existem duas semelhanças principais entre soluções consideradas nesse trabalho e soluções encontradas em (ADAM et al., 2009). A primeira semelhança é a dependência temporal dos campos dada por fator exponencial $e^{i\omega t}$. A segunda semelhança é que o potencial escolhido tem forma de V na região de mínimos. As soluções encontradas são

não-topológicas, compactas de raio e possuem energia finita.

Soluções não topológicas formam uma classe de configurações de campo que satisfazem as mesmas condições de borda do que a solução de vácuo, ou seja, existe uma única solução de vácuo que também é a solução da borda. Diferente das soluções topológicas, sua variedade de vácuo é não degenerada, contudo, para serem estáveis é necessário uma lei de conservação aditiva associada com a transformação contínua de simetria da ação (LEE; PANG, 1992). Os *sólitons* não topológicos satisfazem as mesmas condições de borda no infinito do que a solução de vácuo, enquanto as soluções *compactas* atingem as condições de vácuo a valores finitos das coordenadas espaciais, ou seja, são não triviais apenas dentro de um suporte finito e compacto, como é o caso das soluções do tipo Q-ball e Q-shell. Estas soluções compactas são chamadas simplesmente de *compacton* e descrevem campos escalares que atingem seu vácuo a uma distância finita, tendo um tamanho finito. Desde que sua densidade de energia localizada seja finita dentro do suporte e nula fora, a energia total é finita, portanto a solução é fisicamente aceitável.

Q-balls e Q-shells são soluções de campos escalares espacialmente localizadas e não singulares, cuja existência depende de um fator $e^{i\omega t}$ no ansatz. A dependência temporal é crucial, pois sem ela o teorema de Derrick's implicaria na instabilidade das soluções (DERRICK, 1964). As soluções Q-balls foram inicialmente chamadas “particlelike solutions” (ROSEN, 1968) ou “droplets” (WERLE, 1977).

Compactons aparecem em muitos modelos de teoria de campos, seja com os termos cinéticos padrão, como em nosso modelo, ou não padrão (derivadas a potências de ordem mais alta) (ROSENAU; HYMAN, 1993), (DUSUEL; MICHAUX; REMOISSENET, 1998), (ADAM et al., 2008), (BAZEIA; LOSANO; MENEZES, 2014). A família de modelos de teoria de campos com soluções com suporte compacto, na presença de termos cinéticos padrão, tem sido recentemente proposta em (ARODZ; KLIMAS; TYRANOWSKI, 2005). Modelos deste tipo possuem um característico potencial em forma V em mínimos, cujas derivadas laterais pela esquerda e pela direita diferem no mínimo. Isso permite que as soluções sejam não triviais de um lado do mínimo e triviais no mínimo, fazendo com que esse potencial possa suportar a existência de compactons. De fato, isso ocorre no modelo signum-Gordon complexo, que é um exemplo clássico de potencial em forma V, onde foram encontradas soluções do tipo Q-ball compacta (ARODZ; LIS, 2009). Outra abordagem interessante para Q-balls compactas foi recentemente proposta em (BAZEIA et al., 2016), onde ao contrário do modelo signum-Gordon, a segunda derivada do potencial pode ser arbitrariamente alta na vizinhança do

mínimo.

Todas as soluções do tipo Q-ball presentes em (ARODZ; LIS, 2009) correspondem a campo escalar proporcional a uma função perfil f que depende apenas da coordenada radial r e desaparece no mínimo, *i.e.* toma seu valor de vácuo nulo fora de uma região $[0, R)$, para algum R positivo finito. As soluções Q-ball tem simetria esférica e são diferentes do vácuo apenas dentro de uma casca esférica, enquanto sua estabilidade, como solução não topológica, depende da conservação de uma carga Q , justificando seu nome. Soluções Q-shell são configurações de campo similares as Q-balls, também com simetria esférica, mas que possuem valores diferentes do vácuo apenas dentro de uma casca esférica, ou seja, apenas em alguma região (R_1, R_2) , com $0 < R_1 < R_2$ finito. Tais configurações foram obtidas para a eletrodinâmica escalar descrita pelo modelo signum-Gordon acoplado ao campo eletromagnético (ARODZ; LIS, 2009) e também para o modelo baby-Skyrme com potencial adequado (ADAM et al., 2009). Em ambos os casos citados, as soluções Q-ball e Q-shell compactas contém somente um campo escalar. Contudo, muitos modelos físicos são parametrizados por mais de um campo escalar o que leva a necessidade de generalização.

Neste trabalho nos mostraremos como soluções Q-ball e Q-shell podem ser obtidas em um grupo importante e especial destes modelos - o modelo CP^N , com número ímpar N de campos escalares complexos. O capítulo 2 contém uma breve revisão teórica, em particular, sobre o modelo SF estendido, modelo baby-Skyrme e sobre soluções compactas do tipo Q-ball e Q-shell. No capítulo 3 definimos o modelo tratado nesse trabalho, o modelo CP^N com potencial em forma V na região de mínimos. No capítulo 4 são analisadas soluções compactas encontradas nesse modelo e sua estabilidade. No capítulo 5 apresentamos a construção soluções exatas da equação aproximada para $N = 1, 3$ e 5 , que justificam o comportamento encontrado numericamente na região $\omega \gg 1$. Por fim, no capítulo 6 se apresentam as considerações finais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O modelo CP^N padrão é um modelo 3+1 dimensional no espaço alvo CP^N definido pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{CPN} = M^2(D_\mu \mathcal{Z})^\dagger D^\mu \mathcal{Z} \text{ onde } \mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{N+1}) \in \mathcal{C}^{N+1} \quad (2.1)$$

é um vetor complexo que satisfaz a condição $\mathcal{Z}^\dagger \mathcal{Z} = 1$ e $D^\mu \mathcal{Z} \equiv \partial_\mu \mathcal{Z} - (\mathcal{Z}^\dagger \cdot \partial_\mu \mathcal{Z})$. O modelo CP^N também pode ser parametrizado em termos de um conjunto de N campos escalares complexos u_i introduzidos a partir de $\mathcal{Z} = (1, u_1, \dots, u_N)/\sqrt{1 + u^\dagger \cdot u}$. A razão de parametrizar em termos da variável X , chamada de *variável principal*, ao invés de \mathcal{Z} , é a futura generalização para o modelo Skyrme-Faddeev estendido, definido por

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{M^2}{2} \text{Tr} (X^{-1} \partial_\mu X)^2}_{\text{modelo } CP^N} + \underbrace{\frac{1}{e^2} \text{Tr} (X^{-1} \partial_\mu X X^{-1} \partial_\nu X)^2}_{\text{termo de Skyrme}} + \underbrace{\frac{\beta}{2} [\text{Tr} (X^{-1} \partial_\mu X)^2]^2 + \gamma [\text{Tr} (X^{-1} \partial_\mu X X^{-1} \partial_\nu X)^2]}_{\text{outros termos quárticos}} \quad (2.2)$$

O primeiro termo junto ao segundo (termo de Skyrme) formam o modelo SF padrão, e a segunda linha é a extensão introduzida por Ferreira (FERREIRA; KLIMAS, 2010). As equações de movimento do modelo SF estendido são

$$\partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - \frac{C_{\mu\nu}}{1 + u^\dagger \cdot u} [(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial^\nu u_i + (u^\dagger \cdot \partial^\nu u) \partial^\mu u_i] = 0 \quad (2.3)$$

onde

$$C_{\mu\nu} \equiv M^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{4}{e^2} [(\beta e^2 - 1) \tau_\rho^\rho \eta_{\mu\nu} + (\gamma e^2 - 1) \tau_{\mu\nu} + (\gamma e^2 + 2) \tau_{\nu\mu}], \quad (2.4)$$

$$\tau_{\mu\nu} \equiv -\frac{4}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \partial_\nu u^\dagger \cdot \Delta^2 \cdot \partial_\mu u, \quad \Delta_{ij}^2 \equiv (1 + u^\dagger u) \delta_{ij} - u_i u_j^*, \quad (2.5)$$

onde $i = 1, 2, \dots, N$.

O modelo (2.2) possui soluções exatas tipo vórtex. Tais soluções foram encontradas em (FERREIRA; KLIMAS; ZAKRZEWSKI, 2011a), (FER-

REIRA; KLIMAS; ZAKRZEWSKI, 2011b) e ainda no mesmo ano em (FERREIRA; KLIMAS; ZAKRZEWSKI, 2011c). Os vórtices existem em setor integrável do modelo $\partial_\mu u_i \partial^\mu u_j = 0$ onde em adição as constantes de acoplamento satisfazem a relação $\beta e^2 + \gamma e^2 = 2$. Tais soluções tem a forma do produto $u(z)v(y_\pm)$, onde $z := x^1 \pm ix^2$ e $y_\pm := x^3 \pm x^0$ são as coordenadas do cone de luz. Estas soluções do tipo vórtex aparecem no modelo sem potencial. A presença de potencial de interação permite estender soluções do tipo vórtex ao setor não-integrável (ADAM et al., 2009).

Soluções do tipo vórtex (exatas e numéricas) possuem energia finita por unidade de comprimento, no entanto a energia total do sistema é infinita. Isto sugere que soluções com energia total finita devem ser procuradas de forma diferente. Uma das possibilidades é explorar a classe de soluções não-topológicas tipo Q-ball. As soluções deste tipo foram encontradas em um modelo análogo, o modelo baby-Skyrme (BS) em 2+1 dimensões com potencial em forma V (ADAM et al., 2009). Levando em conta a semelhança entre soluções encontradas em (ADAM et al., 2009) e os resultados obtidos no presente trabalho, vamos descrever abaixo as principais características do modelo e das soluções compactas Q-balls e Q-shells encontradas em (ADAM et al., 2009).

O modelo BS é definido pela densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \vec{n})^2 - \beta [\partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}]^2 - V(\vec{n}), \quad (2.6)$$

$$V \equiv \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (1 - n^3)^{1/2} \quad (2.7)$$

onde $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$ é um isovetor cujo domínio é o espaço-tempo de Minkowski (2+1) dimensional e β e λ são constantes de acoplamento positivas. Este modelo pode ser expresso em termo da projeção esférica do campo escalar complexo u

$$\vec{n} = \frac{1}{1 + |u|^2} (u + \bar{u}, -i(u - \bar{u}), 1 - |u|^2). \quad (2.8)$$

A lagrangiana pode ser reescrita em termos de u e seu conjugado \bar{u}

$$\mathcal{L} = 4 \frac{u_\mu \bar{u}^\mu}{(1 + |u|^2)^2} - 8\beta \frac{(u_\mu \bar{u}^\mu)^2 - u_\mu^2 \bar{u}_\nu^2}{(1 + |u|^2)^4} - \lambda \frac{|u|}{\sqrt{1 + |u|^2}}, \quad (2.9)$$

onde os índices em subscrito representam derivadas parciais em relação

as coordenadas espaciais x^μ , $\forall \mu \in \{t, r, \phi\}$. A dependência de t e ϕ da equação de movimento é desacoplada através do ansatz

$$u = e^{i(\omega t + n\phi)} f(r) \quad (2.10)$$

onde ω é um parâmetro real, $n \in \mathbb{Z}$, e $f(r)$ é uma função positiva definida. Esse ansatz reduz a equação de movimento a uma equação puramente radial

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \left[r f' \left(1 + \frac{8\beta f^2 \left(\frac{n^2}{r^2} - \omega^2 \right)}{(1+f^2)^2} \right) \right] + f \left(1 + \frac{8\beta f'^2}{(1+f^2)^2} \right) \left(\frac{n^2}{r^2} - \omega^2 \right) + \\ \frac{2f}{1+f^2} \left[f'^2 - f^2 \left(\frac{n^2}{r^2} - \omega^2 \right) \right] + \underbrace{\text{sgn}(f) \sqrt{1+f^2}}_{\text{contribuição de } V(\vec{r})} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde se usou a definição $\text{sgn } f = 1, \forall f > 0$ e $\text{sgn } f = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Integrando a densidade de energia \mathcal{H} em \mathbb{R}^2 se obtém a energia total

$$\begin{aligned} E = 2\pi \int_0^\infty r dr \mathcal{H} = 2\pi \int_0^\infty r dr \left(\frac{4}{(1+f^2)^2} \left[f'^2 + f^2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \omega^2 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{32\beta f^2 f'^2}{(1+f^2)^4} \left(\frac{n^2}{r^2} + \omega^2 \right) + \frac{\lambda f \text{sgn } f}{\sqrt{1+f^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

O vácuo corresponde a $f = 0$. A contribuição do potencial em forma V é proporcional a função sinal de f , ou seja, a contribuição desaparece quando f é nulo, o que corresponde a solução de vácuo. Quando f é não nulo a contribuição do potencial é não nula, ou seja, apesar de ele não contribuir no vácuo, se ao entorno do vácuo a função for não trivial, ele contribui com um termo constante em primeira ordem

$$0 < f \ll 1 \Rightarrow \text{sgn}(f) \sqrt{1+f^2} \approx 1 + \mathcal{O}(f^2). \quad (2.13)$$

A solução trivial é solução da Eq. (2.11), onde $\text{sgn } f = 0$. Na região em que a solução é não trivial $\text{sgn } f = 1$. A solução completa é obtida conectando a solução da região não trivial, chamada *suporte* de f , com a solução trivial fora do suporte. As soluções encontradas são do tipo Q-ball e Q-shell compactas.

Soluções são ditas compactas quando a solução atinge seu valor de vácuo a valores finitos das coordenadas espaciais, ou seja, fora de uma região compacta a solução tem seu valor de vácuo. Se a densidade de energia (\mathcal{E}) for nula fora do suporte ($\text{sup } f$) e finita dentro, a energia total $E = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E} r dr = 2\pi \int_{\text{sup } f} \mathcal{E} r dr$ deve ser finita, já que o integrando é finito e o intervalo de integração é compacto.

Se a solução de vácuo for trivial ($f_{\text{vácuo}} = 0$), a equação de movimento depender de apenas de uma função radial $f(r)$ positiva definida (que sempre tem simetria esférica, pois só depende de r) e o suporte for

1. $\text{sup } f(r) = [0, R)$ ou $(0, R)$ onde R é finito, a solução é dita *Q-ball compacta*. Em duas dimensões espaciais esse suporte corresponde com um disco sem borda, enquanto em três dimensões corresponde com o interior de uma esfera.
2. $\text{sup } f(r) = (R_1, R_2)$, onde $0 < R_1 < R_2$ finito, a solução é dita *Q-shell compacta*. Em duas dimensões espaciais esse suporte corresponde com um anel, enquanto em três dimensões corresponde com uma casca esférica.

Tais soluções compactas já podiam ser esperadas, pois tanto potências em forma V , como a presença do fator $e^{i\omega t}$ no ansatz são típicos de soluções do tipo Q-ball e Q-shell compactas. Com esse ansatz as equações de movimento se reduziram a uma única equação radial, ou seja, o ansatz desacopla a dependência da função radial $f(r)$ das demais coordenadas t e ϕ nas equações de movimento. Então, $f(r)$ tem simetria radial (apesar de u não ter), e f é do tipo Q-ball ou Q-shell compacta.

As simetrias da Lagrangiana de um modelo de soluções compactas estão associadas a quantidades conservadas (cargas) representadas pela letra Q , justificando o nome Q-ball e Q-shell. A relação entre cargas e energia determina a estabilidade das soluções.

Seria interessante generalizar o potencial (2.7) para N campos em 3+1 e introduzi-lo no modelo estendido SF, a fim de encontrarmos soluções de energia finita. Ao lidar com vários campos complexos vamos precisar um ansatz adequado. Para reduzir as equações de movimento a uma simples equação radial podemos escolher campos u_i na forma seguinte¹

$$u_m(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.14)$$

¹porposta por L. A. Ferreira.

onde l é fixo, $-l \leq m \leq l$ e $Y_l^m(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos. No capítulo 4 apresentamos a forma completa do ansatz em 3+1 dimensões que permite obter as soluções do tipo Q-ball e Q-shell.

3 O MODELO

Estudamos o modelo 3+1 dimensional no espaço CP^N , com a introdução de potencial. CP^N é um espaço simétrico (HELGASON, 1978) que pode ser escrito em termos do espaço quociente $CP^N = SU(N+1)/SU(N) \otimes U(1)$ onde subgrupo $SU(N) \otimes U(1)$ é invariante sobre o automorfismo involutivo ($\sigma^2 = 1$). Uma boa parametrização do espaço CP^N é dada em termos da *variável principal* X definida por

$$X(g) := g\sigma(g)^{-1}, \quad g \in SU(N+1), \quad (3.1)$$

que satisfaz $X(gk) = X(g)$ para $\sigma(k) = k$, onde $k \in SU(N) \otimes U(1)$. Neste trabalho, investigamos o modelo definido pela densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{M^2}{2} \text{Tr} (X^{-1} \partial_\mu X)^2 - \mu^2 V(X) \quad (3.2)$$

onde M tem dimensão de massa e o potencial $V(X)$ será definido a seguir. Sem potencial, esse modelo corresponde ao modelo CP^N padrão, um caso limite do modelo Skyrme-Faddeev estendido, onde $e \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0$. Assumimos a representação $(N+1)$ -dimensional no qual $g \in SU(N+1)$ é parametrizado por um conjunto de N campos escalares complexos u_i como segue

$$g \equiv \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} \Delta & iu \\ iu^\dagger & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{ij} \equiv \vartheta \delta_{ij} - \frac{u_i u_j^*}{1 + \vartheta}, \quad \vartheta \equiv \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u}. \quad (3.3)$$

Segue-se que a variável principal (3.1) toma a forma

$$X(g) = g^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{N \times N} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\vartheta^2} \begin{pmatrix} -u \otimes u^\dagger & iu \\ iu^\dagger & 1 \end{pmatrix}$$

A Lagrangiana (3.2) torna-se mais simples se expressa em termos de $\tau_{\nu\mu}$

$$\mathcal{L} = -M^2 \eta^{\mu\nu} \tau_{\nu\mu} - \mu^2 V \quad (3.4)$$

onde

$$\tau_{\nu\mu} := -4 \frac{\partial_\mu u^\dagger \cdot \Delta^2 \cdot \partial_\nu u}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \quad \text{e} \quad \Delta_{ij}^2 = \vartheta^2 \delta_{ij} - u_i u_j^*. \quad (3.5)$$

A variação com respeito a u_i^* fornece um conjunto de equações de movimento acopladas. O termo que contém a derivada segunda pode ser

separado depois de se multiplicar a inversa de Δ_{ij}^2 , *i.e.* por $\Delta_{ij}^{-2} = \frac{1}{1+u^\dagger \cdot u}(\delta_{ij} + u_i u_j^*)$, que dá (ver apêndice A.1)

$$\partial_\mu \partial^\mu u_i - 2 \frac{(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial_\mu u_i}{1 + u^\dagger \cdot u} + \frac{\mu^2}{4M^2} (1 + u^\dagger \cdot u) \sum_{k=1}^N \left[(\delta_{ik} + u_i u_k^*) \frac{\delta V}{\delta u_k^*} \right] = 0. \quad (3.6)$$

Assim como o potencial em forma V na região de mínimos (2.7) dado para um único campo escalar complexo u no modelo baby-Skyrme (2.9), podemos propor um potencial de mesma forma para N campos complexos escalares tomando

$$V(X) := \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbb{1} - X)]^{1/2} = \sqrt{\frac{u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u}}, \quad (3.7)$$

que desaparece quando $u_i = 0$, *i.e.* $X = \mathbb{1}$.

O potencial (3.7) generaliza o potencial (2.7), para N campos escalares complexos 3 + 1 dimensionais, sendo equivalente para $N = 1$ (um único campo). Nesse caso particular (CP^1), o potencial em forma V suporta a existência de soluções compactas topológicas e não topológicas no modelo baby-Skyrme 2+1 dimensional. Nele foram encontrados soluções do tipo Q-Ball compactas cuja energia é finita. Como buscamos soluções com energia finita no modelo tipo CP^N , talvez esse potencial, juntamente com um ansatz adequado, possa levar à solução desejada. Conforme o apêndice A.1, a equação do movimento se reduz a

$$\partial_\mu \partial^\mu u_i - 2 \frac{(u^\dagger \cdot \partial^\mu u) \partial_\mu u_i}{1 + u^\dagger \cdot u} + \frac{\mu^2}{8M^2} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger \cdot u}} \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u} = 0. \quad (3.8)$$

A densidade de Hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 u_i)} \partial_0 u_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 u_i^*)} \partial_0 u_i^* - \mathcal{L} \\ &= -M^2 \left(\tau_{00} + \sum_{a=1}^3 \tau_{aa} \right) + \mu^2 V \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde o índice a representa as coordenadas cartesianas x^a . Definimos as

coordenadas adimensionais (t, r, θ, ϕ)

$$x^0 = r_0 t, \quad x^1 = r_0 r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r_0 r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r_0 r \cos \theta, \quad (3.10)$$

onde r_0 é um parâmetro constante com dimensão de comprimento. Este pode ser escolhido como $r_0 \equiv M^{-1}$. A densidade de Hamiltoniana adimensional H é definida como $H := \mathcal{H}/M^4$ e se lê

$$H = - \left[\tau_{tt} + \tau_{rr} + \frac{1}{r^2} \left(\tau_{\theta\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \tau_{\phi\phi} \right) \right] + \tilde{\mu}^2 V, \quad (3.11)$$

onde $\tilde{\mu}^2 = \mu^2/M^4$. Consequentemente, uma energia adimensional total é dada por uma integral sobre \mathbb{R}^3

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} H dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta. \quad (3.12)$$

A parametrização em termos dos campos u_i fixa uma simetria global $U(N+1)$ no modelo para $SU(N) \otimes U(1)$. O subgrupo $U(1)^N$ é dado pelo conjunto de transformações

$$u_i \rightarrow e^{i\alpha_i} u_i, \quad \forall i \in 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

onde os α_i formam um conjunto de N parâmetros contínuos reais e independentes. Pelo teorema de Noether, a essas $2l+1$ simetrias devem estar associadas $2l+1$ quantidades conservadas (veja apêndice B.2). Conforme o apêndice A.4, as cargas estão relacionadas a integrais sobre \mathbb{R}^3 de correntes conservadas J_μ^i associadas com a simetria (A.37). Podemos definir a corrente adimensional $\tilde{J}_\mu^i = M^{-3} J_\mu^i$, onde

$$\tilde{J}_\mu^i = - \frac{4i}{(1 + u^\dagger u)^2} \sum_{j=1}^N \left[u_i^* \Delta_{ij}^2 \tilde{\partial}_\mu u_j - \tilde{\partial}_\mu u_j^* \Delta_{ij}^2 u_i \right] \quad (3.14)$$

e $\tilde{\partial}_\mu := r_0 \partial_\mu = M^{-1} \partial_\mu$ são derivadas em relação as coordenadas curvilíneas adimensionais $\tilde{x}^\mu := r_0^{-1} x^\mu$. As correntes devem satisfazer a equação da continuidade $\partial^\mu J_\mu^{(i)} = 0$. Integrando essa equação em $[t', t''] \times \mathbb{R}^3$ descobrimos que, quando os componentes espaciais das correntes de Noether desaparecem no infinito espacial, então as cargas

$$Q_t^{(i)} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 J_t^{(i)} \quad (3.15)$$

são conservadas. Tais cargas são fundamentais na análise da estabilidade de soluções não-topológicas (veja seção 4.6).

4 Q-BALLS E Q-SHELLS COMPACTAS EM MODELOS TIPO CP^{2L+1}

4.1 O ANSATZ

No caso do espaço CP^{2l+1} , $l = 0, 1, \dots$, os campos u_i podem ser parametrizados por harmônicos esféricos que formam a representação finita das autofunções da parte angular do operador de Laplace. Por conveniência rotulamos $2l+1$ campos escalares complexos como u_{-l}, \dots, u_l ao invés de $u_1, u_2, \dots, u_{2l+1}$. Consideramos o ansatz

$$u_m(t, r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{i\omega t}, \quad (4.1)$$

onde l é fixo e $-l \leq m \leq l$. Nosso ansatz (4.1) acrescenta uma dependência temporal ao ansatz (2.14), onde o termo $e^{i\omega t}$ é compatível com ansatz de modelos com soluções do tipo Q-ball e Q-shell compactas, como o ansatz (2.10) dado em modelo Baby-Skyrme com potencial (2.7). O fator $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$ foi escolhido por conveniência, já que $\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{2l+1}{4\pi}$. Isso faz com que $u^\dagger \cdot u = f^2(r)$ dependa somente da coordenada radial r , sem nenhum fator multiplicativo que dependa de l . Similarmente, muitas outras expressões se anulam ou dependem apenas da coordenada radial (veja apêndice B.1)

$$u^\dagger \cdot \partial_t u = i\omega f^2 \quad u^\dagger \cdot \partial_r u = f' f \quad u^\dagger \cdot \partial_\theta u = 0 \quad u^\dagger \cdot \partial_\phi u = 0.$$

Além disso, a parte angular do primeiro termo de (3.8) contribui com um termo proporcional a $L^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m$, onde o operador L^2 é definido em eq. (A.30). Segue-se que a equação do movimento (3.8) se reduz a uma equação diferencial ordinária na variável r

$$f'' + \frac{2}{r} f' + \left(\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f - \frac{2f}{1+f^2} (f'^2 + \omega^2 f^2) = \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \operatorname{sgn}(f) \sqrt{1+f^2}, \quad (4.2)$$

onde se define $\operatorname{sgn}(f) := 1, \forall f > 0$ e $\operatorname{sgn}(0) := 0$.

4.2 ENERGIA E QUANTIDADES CONSERVADAS

A energia total adimensional do nosso modelo pode, em virtude do ansatz (4.1), ser dada por

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 H(r). \quad (4.3)$$

onde $H(r)$ tem a forma

$$H(r) = \frac{4}{(1+f^2)^2} \left[f'^2 + \left(\omega^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} (1+f^2) \right) f^2 \right] + \tilde{\mu}^2 \frac{f \operatorname{sgn}(f)}{\sqrt{1+f^2}}. \quad (4.4)$$

A contribuição dos termos τ_{tt} , $\tau_{\theta\theta}$ e $\tau_{\phi\phi}$, calculados a partir de (3.6), à energia total pode ser expressada em termos de cargas $Q_t^{(m)}$ e $Q_\phi^{(m)}$, onde $m = -l, \dots, l$, conforme o apêndice B.2. Elas são quantidades conservadas associadas as simetrias (A.37) providas da conservação das duas únicas componentes não nulas das correntes (3.14) em termos das coordenadas (t, r, θ, ϕ) , nomeadas

$$\tilde{J}_t^{(m)}(r, \theta) = 8\omega \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{f^2}{(1+f^2)^2} (P_l^m(\cos \theta))^2, \quad (4.5)$$

$$\tilde{J}_\phi^{(m)}(r, \theta) = 8m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{f^2}{1+f^2} (P_l^m(\cos \theta))^2, \quad (4.6)$$

onde representamos o índice $i = 1, \dots, 2l+1$ por um mais adequado, $m = -l, \dots, l$. Claramente, estas correntes são conservadas, *i.e.* $\tilde{\partial}^\mu \tilde{J}_\mu^{(m)} = 0$, pois $\tilde{J}_r^{(m)} = 0 = \tilde{J}_\theta^{(m)}$ e as componentes não nulas $\tilde{J}_t^{(m)}$ e $\tilde{J}_\phi^{(m)}$ não dependem de t e ϕ . Como ambas as componentes $\tilde{J}_t^{(m)}$ e $\tilde{J}_\phi^{(m)}$ são independentes do tempo, podemos introduzir um conjunto de cargas conservadas correspondentes a estas componentes

$$Q_t^{(m)} := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \tilde{x} \tilde{J}_t^{(m)}(r, \theta) = \omega \frac{16\pi}{2l+1} \int_0^\infty dr r^2 \frac{f^2}{(1+f^2)^2}, \quad (4.7)$$

$$Q_\phi^{(m)} := \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \tilde{x} \frac{\tilde{J}_\phi^{(m)}(r, \theta)}{r^2} = m \frac{48\pi}{2l+1} \int_0^\infty dr \frac{f^2}{1+f^2} \quad (4.8)$$

onde a relação de ortogonalidade padrão das funções associadas de Legendre foram usadas $\int_{-1}^1 dx (P_l^m(x))^2 = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$. Essas fórmulas nos

permitem reescrever uma parte da expressão da energia total (4.3) em termos de $Q_t^{(m)}$ e $Q_\phi^{(m)}$

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left(\frac{4f'^2}{(1+f^2)^2} + \tilde{\mu}^2 \frac{f \operatorname{sgn}(f)}{\sqrt{1+f^2}} \right) + \sum_{m=-l}^l \left(\omega Q_t^{(m)} + m Q_\phi^{(m)} \right), \quad (4.9)$$

onde usamos $\sum_{m=-l}^l m^2 = \frac{1}{3}l(l+1)(2l+1)$. Note que a carga Q_t aparece naturalmente como integração da equação de continuidade no hipervolume $[t', t''] \times \mathbb{R}^3$. Esta carga tem o mesmo valor para todos os valores de m . Vamos nos referir a esta quantidade conservada chamando-a carga de Noether enquanto as quantidades conservadas $Q_\phi^{(m)}$ vamos chamar simplesmente de cargas.

4.3 EXPANSÃO NO CENTRO

A função $f(r)$ pode ser representada em série de potência em $r = 0$

$$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k. \quad (4.10)$$

Substituindo a série (4.10) na equação de movimento (4.2) nos obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k r^{k-2} = 0, \quad (4.11)$$

onde todos os b_k devem ser nulos, para que o polinômio acima seja identicamente nulo. Os três primeiros coeficientes b_k tem a forma

$$\begin{aligned} b_0 &= l(l+1)a_0, \\ b_1 &= (l-1)(l+2)a_1, \\ b_2 &= (l-2)(l+3)a_2 + \frac{s\mu^2}{8} \sqrt{1+a_0^2} + \left[\frac{2(a_1^2 + a_0^2 \omega^2)}{1+a_0^2} - \omega^2 \right] a_0. \end{aligned}$$

A equação polinomial (4.11) só pode ser satisfeita se escolhermos a_k de maneira a anular todos os coeficientes b_k , tornando a série identicamente nula. A dependência de l , que determina o número de campos complexos escalares u_i nas equações de b_k , fazem com que as soluções tenham diferentes formas para $l = 0$, $l = 1$ e $l \geq 2$. Por serem qualitativamente diferentes, temos que estudar cada caso separadamente.

4.3.1 Caso $l=0$

Para $l = 0$, a equação (4.11) é satisfeita independente do valor de a_0 , ou seja, $l = 0 \Rightarrow b_0 = 0, \forall a_0 \in \mathbb{R}$. Devido a positividade de f , o coeficiente do termo dominante da expansão sempre deve ser positivo, no caso, a_0 deve ser um parâmetro livre positivo. Para satisfazer (4.11) também devemos ter $a_1 = 0$. Observamos que para algum n fixo ímpar e $a_1 = a_3 = \dots = a_{n-2} = 0$ e coeficiente b_n tem forma $b_n = a_n(l - n)(l+1+n)$, ou seja, para anular (4.11) em ordem n precisamos escolher também $a_n = 0$. Então todos os coeficientes dos termos de ordem par superior a $\mathcal{O}(r^1)$ podem ser determinados em termos de a_0, ω, μ e os de ordem ímpar são nulos, ou seja, $a_{2j} = a_{2j}(a_0, \omega, \mu)$ e $a_{2j+1} = 0, \forall j \in \mathbb{N}$. A solução começa um valor a_0 e primeira derivada nula no centro. Expandindo $f(r)$ em torno de $r = 0$ temos

$$f(r) = a_0 + \left[\frac{\tilde{\mu}^2}{48} \sqrt{1 + a_0^2} - \frac{a_0(1 - a_0^2\omega^2)}{6(1 + a_0^2)} \right] r^2 + \mathcal{O}(r^4). \quad (4.12)$$

Para cada escolha do coeficiente a_0 a expansão de f no centro fica inteiramente determinada, já que $\tilde{\mu}^2$ é fixo. Munidos dos coeficientes dessa expansão podemos, através do método descrito na seção 4.5, integrar numericamente a equação de movimento (4.2), e obter f . Desta forma, se torna conhecido se a f e f' tem alguma irregularidade como, por exemplo, singularidade ou descontinuidade. Então, o valor de a_0 determina se a função f é regular em \mathbb{R}_+ , ou seja, se é analítica e injetiva nessa região. Tal propriedade é útil, pois grandezas como a densidade de energia (4.4) dependem de f e f' . Basta f ser descontínua em um ponto para que f' seja singular e, conseqüentemente, H seja singular nesse ponto, levando a uma energia total infinita.

A análise numérica mostra que se a função for crescente na origem, ela cresce infinitamente com o aumento de r . $f'(0) = 0$ indica que $r = 0$ é um ponto crítico, e que o termo dominante que determina o comportamento com r é o termo de segunda ordem. Então, para que a função decresça e atinja a condição de borda temos que f deve ter um máximo local no centro o que implica em

$$a_2 = \frac{\tilde{\mu}^2}{48} \sqrt{1 + a_0^2} - \frac{a_0(1 - a_0^2\omega^2)}{6(1 + a_0^2)} < 0,$$

$$\frac{\tilde{\mu}^2}{8a_0} (1 + a_0^2)^{3/2} < 1 - a_0^2\omega^2 \Leftrightarrow \omega > \frac{1}{a_0} \sqrt{1 - \frac{\tilde{\mu}^2}{8a_0} (1 + a_0^2)^{3/2}}. \quad (4.13)$$

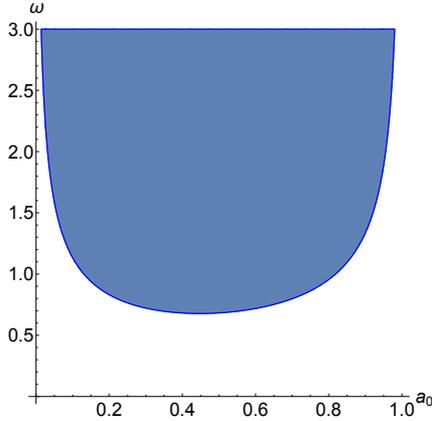


Figura 1 – Região $a_2 < 0$ em função de a_0 e ω para o caso $l = 0$ onde tomamos adicionalmente $\tilde{\mu} = 1$.

A região $a_2 < 0$ vista na Fig.1 sugere que existe um valor mínimo ω_m de ω abaixo do qual não existe solução do tipo compacton. Note que a borda da Fig.1 não determina o valor de ω_m , mas impõe uma limitação para os valores de ω . O valor exato de ω_m para cada valor de l pode ser obtido numericamente achando soluções da equação (4.2), para ω cada vez menores até que não haja mais solução.

A partir da expansão de $f(r)$ podemos utilizar (4.4) para determinar a expansão da hamiltoniana $H(r)$ em torno de $r = 0$ e observamos que ela não se anula no centro

$$H(r) = a_0 \left[\frac{\tilde{\mu}^2}{\sqrt{1+a_0^2}} + \frac{4a_0\omega^2}{(1+a_0^2)^2} \right] + \mathcal{O}(r^2) \quad (4.14)$$

4.3.2 Caso $l=1$

Para $l = 1$ a equação (4.11) é satisfeita com $a_0 = 0$ e é independente de a_1 . Então a_1 é o parâmetro livre e $a_n = a_n(a_1, \omega, \mu), \forall n > 1$. Os três coeficientes dos termos de menor ordem são

$$a_2 = \frac{\tilde{\mu}^2}{32}, \quad a_3 = \frac{a_1}{10}(2a_1 - \omega^2), \quad a_4 = \frac{\tilde{\mu}^2}{576}(12a_1^2 - \omega^2). \quad (4.15)$$

A solução começa na origem com primeira derivada não nula, ou seja, tem comportamento linear dominante na origem. Assim como no caso

$l = 0$, a densidade de energia também não se anula no centro

$$H(r) = 12a_1^2 + 2\tilde{\mu}^2 a_1 r + \left[\frac{7}{128} \tilde{\mu}^4 - 8a_1^4 \right] r^2 + \mathcal{O}(r^3). \quad (4.16)$$

Note que H será nulo no centro, de acordo com (4.4), se e somente se $f(0) = f'(0) = 0$. Como em $f^{(l=0)}(0) \neq 0$ e $f^{(l=1)}(0) \neq 0$ a densidade de energia no centro não atinge o valor de vácuo no centro para $l = 0, 1$. Isso não é necessário para termos soluções compactas do tipo Q-ball, pois nesse caso existe uma única borda em $r = R$ onde a função deve atingir seu valor de vácuo para que a energia total seja finita.

4.3.3 Caso $l=2$

Para $l \geq 2$ a equação (4.11) é satisfeita se, e somente se, $a_0 = a_1 = 0$. Isso implica que para $l = 2$ o coeficiente $b_2 = \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \neq 0$ e a equação do movimento não pode ser satisfeita, ou seja, não há solução não trivial na vizinhança do centro. Se $l \geq 3$, para termos $b_2 = 0$ devemos tomar $a_2 = -\frac{\mu^2}{8(l-2)(l-3)} < 0$, mas a_2 é o coeficiente não nulo de menor ordem de f , então ele determina o comportamento dominante de f na vizinhança do centro onde f seria negativa, violando a positividade definida de f . Conclui-se que para $l \geq 2$ a única solução possível na vizinhança da origem é a solução trivial, pertencente ao vácuo. Se houver solução não trivial, ela deve sair do vácuo a algum valor finito de $r = R_1$, e voltar ao vácuo em algum outro valor finito $r = R_2$. Para entender o comportamento dessa classe de soluções é necessário analisar o comportamento nas bordas.

4.4 EXPANSÃO NA BORDA

A solução de vácuo $f(r) = 0$ assegura que fora do suporte a função se conecta ao estado de energia nula. Para que a densidade de energia (4.4) seja contínua $f(r)$ e $f'(r)$ devem ser contínuos. Como solução de vácuo é identicamente nula (tem todas as derivadas nulas) a solução dentro do suporte deve se conectar com a(s) borda(s) com $f(R) = f'(R) = 0$, onde R é o raio do compacton no caso $l = 0, 1$ e R_1 ou R_2 no caso $l \geq 2$. Expandindo em torno da borda, onde a função e

sua primeira derivada são nulas, f pode ser representada por

$$f(r) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k (R-r)^k. \quad (4.17)$$

Substituindo essa equação na equação do movimento (4.2) podemos determinar os coeficientes A_k em termos do raio do compacton

$$A_2 = \frac{\tilde{\mu}^2}{16}, \quad A_3 = \frac{\tilde{\mu}^2}{24R}, \quad A_4 = \frac{\tilde{\mu}^2}{192R^2} [l(l+1)+8-R^2\omega^2]. \quad (4.18)$$

Podemos observar que apenas os A_k para $k \geq 4$ dependem de l , ou seja, as soluções tem comportamento predominantemente quadrático em torno da borda, independente de l . O mesmo ocorre para a expansão da densidade de energia na(s) borda(s)

$$H(r) = \frac{\tilde{\mu}^2}{8} (R-r)^2 + \frac{\tilde{\mu}^4}{6R} (R-r)^3 + \frac{\tilde{\mu}^4}{96R^2} [4l(l+1) + 26 - R^2\omega^2] (R-r)^4 + \dots \quad (4.19)$$

que também depende explicitamente de l só nos termos de ordem quártica ou superior. A_2 em (4.18) só depende de $\tilde{\mu}$ e todos os A_k para $k \geq 3$ dependem também de R , ou seja, R é um parâmetro livre e $A_k = A_k(R, \tilde{\mu})$, para $k \geq 3$. Em particular, para $l \geq 2$, $R = R_1$ e $R = R_2$ são parâmetros livres, mas não são independentes. Para que ambas as condições de borda sejam satisfeitas, pode-se variar numericamente R_1 ou R_2 em uma das bordas até que satisfaça as condições de contorno da outra borda (veja seção 4.5). Nesse trabalho, escolhermos variar R_1 , sendo ele o único parâmetro livre para $\forall l \geq 2$. Então, tais soluções devem ser não triviais somente em uma região (R_1, R_2) , sendo do tipo Q-shell compactas.

4.5 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Nos adotamos o ‘shooting method’ para integrar a equação radial (4.2). Ele consiste em variar (chutar) os parâmetros livres até que se atinja a condição de contorno. No nosso caso, escolhermos variar os parâmetros livres no centro $r = 0$ para $l = 0, 1$ e em $r = R_1$ até que se atinjam as condições de borda em $r = R$, onde R representa o raio do compactom no caso $l = 0, 1$ e R_2 para $l \geq 2$. Também poderíamos, variar o parâmetro R até que se satisfizessem as condições de centro ($l = 0, 1$) ou da primeira borda ($l \geq 2$). Para cada valor de l , temos

um único parâmetro livre, a_0, a_1, R_1 ($l = 0, 1$ e $l \geq 2$ respectivamente), a ser variado até que se atinja a condição de borda $f(R) = f'(R) = 0$.

Variando o parâmetro livre temos 4 classes numéricas de soluções:

1. Soluções que crescem indeterminadamente com r , tendo energia infinita.
2. Soluções que ultrapassam o eixo r sem satisfazer a condição de borda, isto é, se tornam negativas violando a positividade de $f(r)$.
3. Soluções que oscilam sobre uma reta paralela ao eixo r , tendo energia total infinita.
4. Soluções que satisfazem a condição de borda, isto é, para algum valor finito de R atingem $f(R) = f'(R) = 0$ e conectam a solução não trivial com $f(r) = 0, \forall r > R$, tendo densidade de energia contínua e energia total finita.

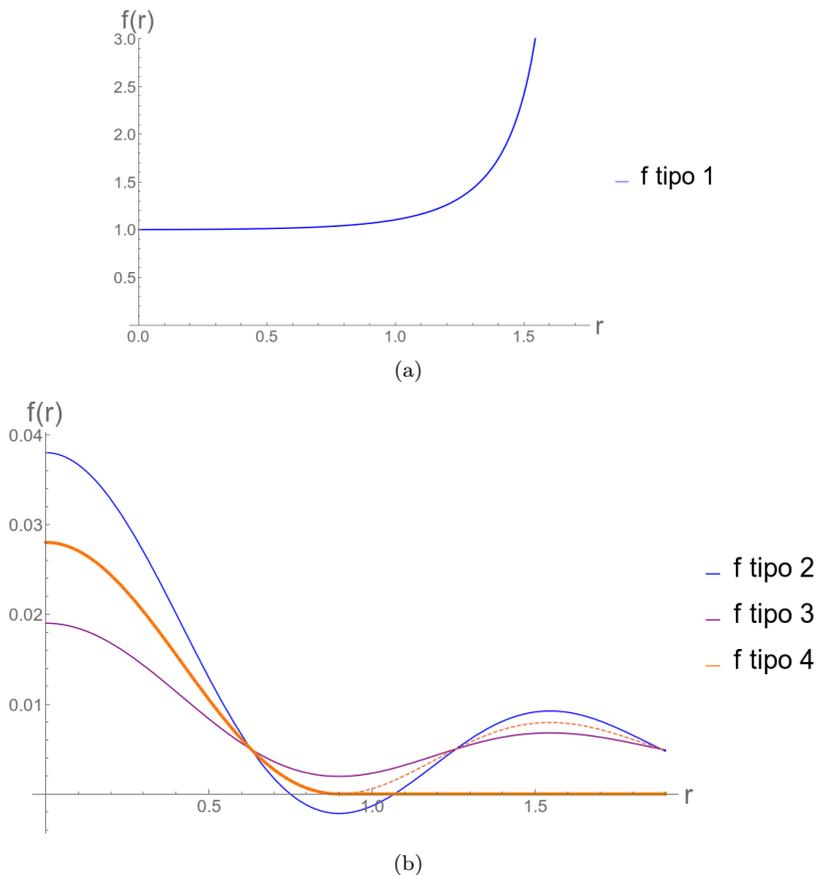


Figura 2 – Para $l=0$: Em (a) solução tipo 1. Em (b), de cima para baixo no centro, solução tipo 2, tipo 4 e tipo 3, respectivamente.

A única solução física possível é a do tipo 4. Podemos observar numericamente que

1. Para $l = 0$, f deve ser monotonicamente decrescente, tendo dois pontos críticos, um no centro $r = 0$ e o outro na borda (mínimo absoluto, vácuo). Então a condição de borda só pode ser satisfeita no segundo ponto crítico (segundo menor valor de r tal que $f'(r) = 0$), ou seja, no primeiro mínimo com $r \neq 0$.
2. Para $l = 1$, a solução não tem ponto crítico no centro, mas numericamente observamos que ela tem um único máximo local e

um único mínimo local que também é mínimo absoluto (vácuo). Então a condição de borda também só pode ser satisfeita no segundo ponto crítico, ou seja, no primeiro mínimo para $r \neq 0$.

3. Para $l \geq 2$, a solução tem um mínimo em $r = R_1$, um máximo local, e outro mínimo local e absoluto, tendo 3 pontos críticos ao invés de 2. Então a condição de borda só pode ser satisfeita no terceiro ponto crítico, ou seja, no primeiro mínimo para $r \neq R_1$.

Fixo um valor de ω , para cada escolha do valor do parâmetro livre (a_0, a_1, R_1) nos integramos numericamente a equação radial e determinamos numericamente o segundo menor valor de r para $l = 0, 1$, ou o segundo menor valor de $r > R_1$ para $\forall l \geq 2$, tal que $f'(r) = 0$. Tal valor de r é representado por \bar{R} e deve corresponder a um valor de mínimo local. O valor de $f(\bar{R})$ é utilizado para modificar o chute inicial, de forma a escolhermos o parâmetro livre que faça $f(\bar{R}) \rightarrow 0$. Paramos de variar o parâmetro livre quando $|f(\bar{R})| < 10^{-6}$, e tomamos a solução encontrada como solução numérica.

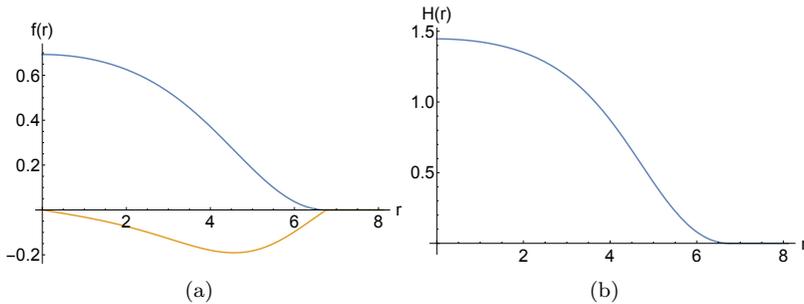


Figura 3 – Para $l = 0$ e $\omega = 1.0$: Em (a), de cima para baixo, a função radial $f(r)$ e sua derivada $f'(r)$. Em (b) e a densidade de energia $H(r)$.

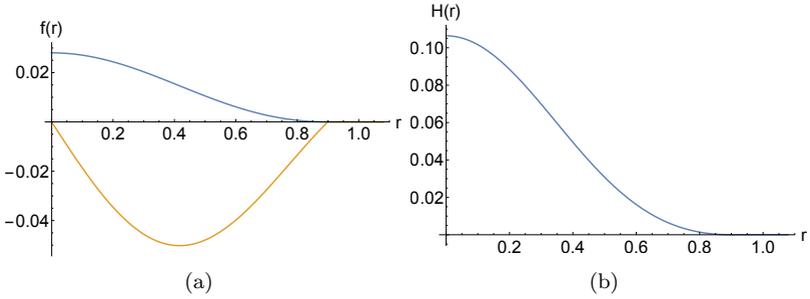


Figura 4 – Para $l = 0$ e $\omega = 5.0$: Em (a), de cima para baixo, a função radial $f(r)$ e sua derivada $f'(r)$. Em (b) e a densidade de energia $H(r)$.

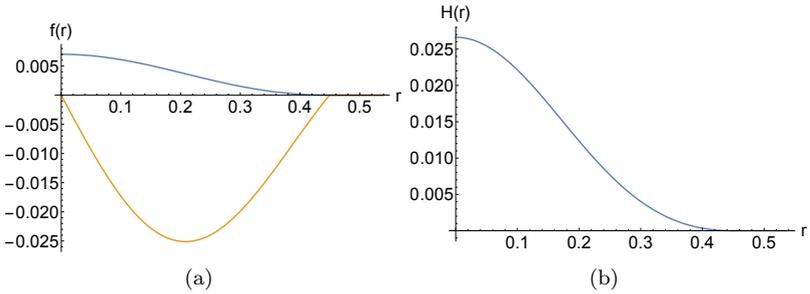


Figura 5 – Para $l = 0$ e $\omega = 10.0$: Em (a), de cima para baixo, a função radial $f(r)$ e sua derivada $f'(r)$. Em (b) e a densidade de energia $H(r)$.

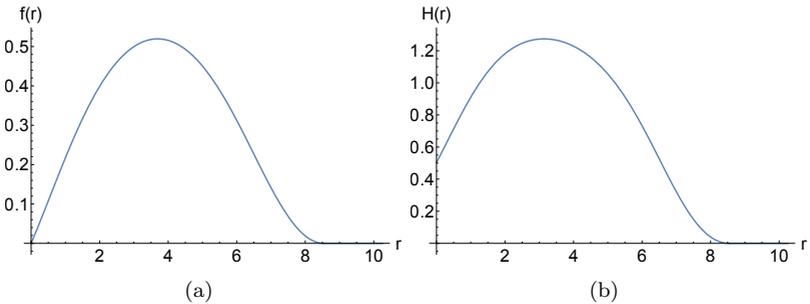


Figura 6 – Para $l = 1$ e $\omega = 1.0$: Em (a) a função radial $f(r)$ e em (b) a densidade de energia $H(r)$.

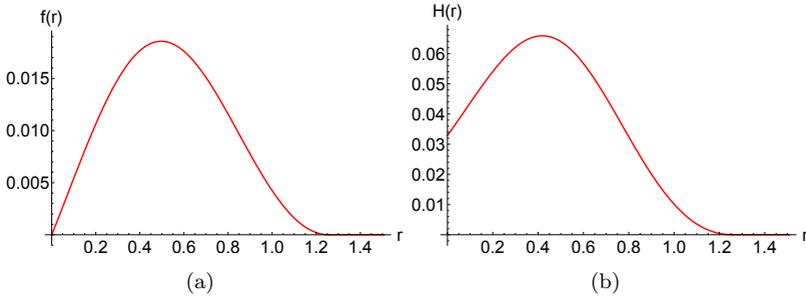


Figura 7 – Para $l = 1$ e $\omega = 5.0$: Em (a) a função radial $f(r)$ e em (b) a densidade de energia $H(r)$.

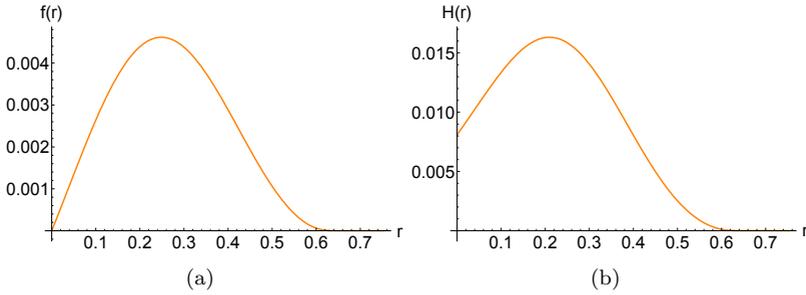


Figura 8 – Para $l = 1$ e $\omega = 10.0$: Em (a) a função radial $f(r)$ e em (b) a densidade de energia $H(r)$.

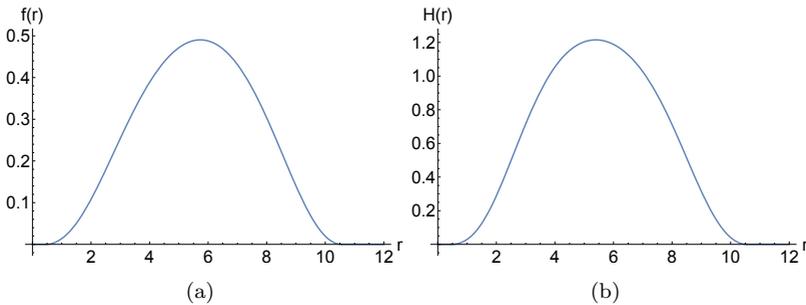


Figura 9 – Para $l = 2$ e $\omega = 1.0$: Em (a) a função radial $f(r)$ e em (b) a densidade de energia $H(r)$.

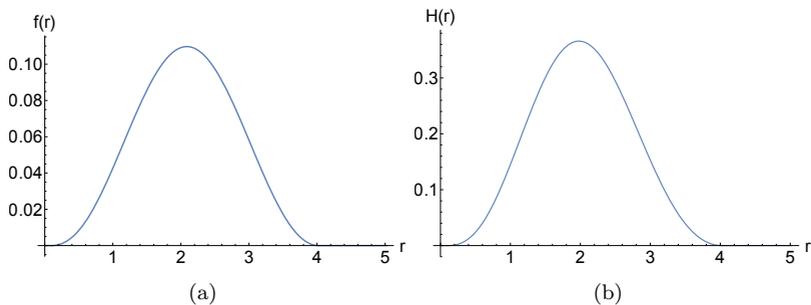


Figura 10 – Para $l = 2$ e $\omega = 2.0$: Em (a) a função radial $f(r)$ e em (b) a densidade de energia $H(r)$.

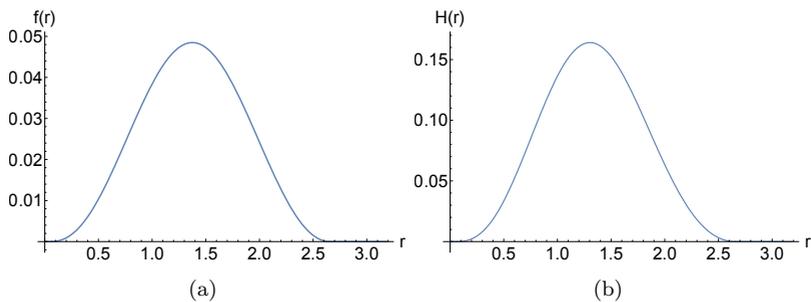


Figura 11 – Para $l = 2$ e $\omega = 3.0$: Em (a) a função radial $f(r)$ e em (b) a densidade de energia $H(r)$.

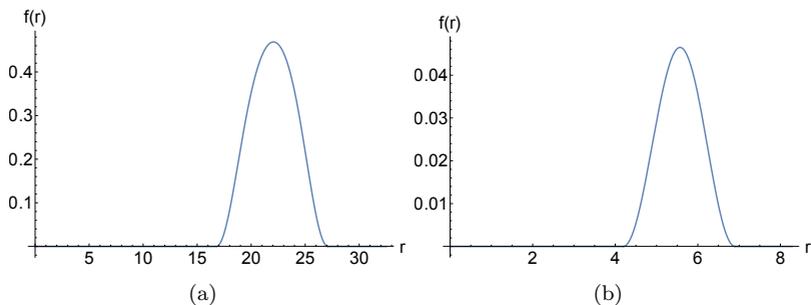


Figura 12 – A função radial $f(r)$ para $l = 10$ e (a) $\omega = 1.0$, (b) $\omega = 3.0$.

Das Fig.3 à 12 podemos perceber que o raio do compacton R no caso $l = 0, 1$ e a largura do compacton $\delta R := R_2 - R_1$ no caso $l \geq 2$, diminui com o aumento de ω . O mesmo ocorre para f e $|f'|$ cujos valores máximos decrescem rapidamente com o aumento de ω . Como a densidade de hamiltoniana depende de f e f' , já era previsto que ela decresceria, como se vê nas figuras, mas como o intervalo de integração é dado pelo raio do compacton, a energia total deve diminuir ainda mais rapidamente com o aumento de ω , já que o raio diminui. Esse comportamento independe do valor de l , e pode ser visto nas figuras abaixo para diferentes valores de ω .

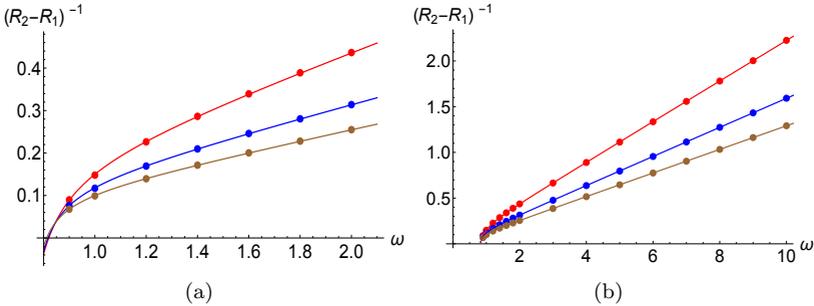


Figura 13 – A inversa da largura do compactom $\delta R := R_2 - R_1$ em dependência de ω para (de cima para baixo) $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$. O raio interno $R_1 \equiv 0$ para $l = 0$ e $l = 1$.

Na região de $\omega \gg 1$, $\delta R^{-1}(\omega)$ é aproximadamente linear, conforme a Fig.13 (b). Da análise numérica, não foi possível encontrar soluções abaixo de um ω crítico $\omega_c \approx 0.83$, para nenhum valor de l . Assim, as figuras tornam claro que existe um limite inferior para ω independente do valor de l , o que já era esperado em $l = 0$ devido a desigualdade (4.13). Como o comportamento para $\omega \gg 1$ é linear, e para $\omega \approx \omega_c$ é quadrático, o ajuste mais simples que reproduz esse comportamento em ambos os regimes é uma função racional

$$(\delta R)^{-1}(\omega) = \frac{a\omega^2 + b\omega + c}{d\omega + e}. \quad (4.20)$$

Os coeficientes da curva obtidos pelo ajuste são representados na Tabela 1.

| | a | b | c | d | e |
|---------|---------|----------|---------|----------|----------|
| $l = 0$ | 2223.78 | -1388.73 | -357.34 | 10044.60 | -6859.62 |
| $l = 1$ | 53.86 | -36.61 | 53.86 | 39.62 | -244.81 |
| $l = 2$ | 169.46 | -118.27 | -15.73 | 1316.28 | -960.93 |

Tabela 1 – O ajuste dos coeficientes.

A expansão assintótica no regime de ω grandes é dada por

$$\delta R^{-1} = \frac{a}{d}\omega + \frac{bd - ae}{d^2} + \mathcal{O}(\omega^{-1}). \quad (4.21)$$

O ajuste (4.20) com os coeficientes determinados na tabela 1 permitem calcular o comportamento assintótico ($\omega \rightarrow \infty$)

$$\delta R_{(l=0)}^{-1} = 0.221 \omega + 0.012 + \mathcal{O}(\omega^{-1}), \quad (4.22)$$

$$\delta R_{(l=1)}^{-1} = 0.158 \omega + 0.006 + \mathcal{O}(\omega^{-1}), \quad (4.23)$$

$$\delta R_{(l=2)}^{-1} = 0.128 \omega + 0.004 + \mathcal{O}(\omega^{-1}). \quad (4.24)$$

Para cada valor de ω onde calculamos o raio do compacton também calculamos a energia total.

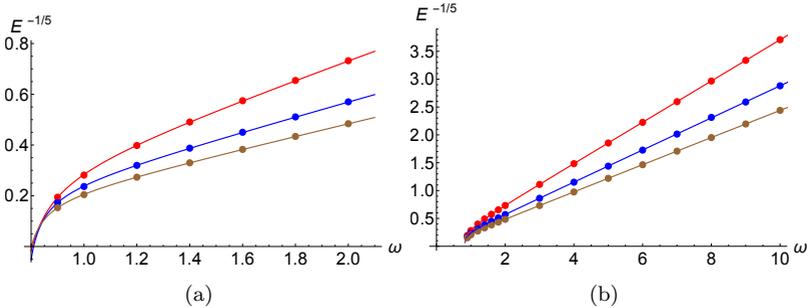


Figura 14 – A energia da função compacta em relação a ω para (de cima para baixo) $l = 0$, $l = 1$ and $l = 2$.

Reproduzindo a análise, observamos que $E^{-1/5}(\omega)$ é linear no regime $\omega \gg 1$. Na região de ω pequeno, há um desvio no comportamento linear. Como a curva de Fig. 14 tem exatamente o mesmo comportamento da curva da Fig. 13, podemos utilizar a mesma forma do ajuste para $E^{-1/5}$ que usamos para R^{-1} , ou seja, um ajuste da forma $E^{-1/5}(\omega) = (a\omega^2 + b\omega + c)/(d\omega + e)$, onde a, b, c, d, e são constantes

determinadas pelo novo ajuste. O comportamento assintótico de $E^{-1/5}$ para $\tilde{\mu} = 1$, $\omega \gg 1$ é dado por

$$E_{(l=0)}^{-1/5} = 0.369 \omega + 0.014 + \mathcal{O}(\omega^{-1}), \quad (4.25)$$

$$E_{(l=1)}^{-1/5} = 0.287 \omega + 0.004 + \mathcal{O}(\omega^{-1}), \quad (4.26)$$

$$E_{(l=2)}^{-1/5} = 0.243 \omega + 0.005 + \mathcal{O}(\omega^{-1}). \quad (4.27)$$

As quantidades conservadas $Q_t^{(1)}$ (carga de Noether) e $Q_\phi^{(1)}$ também podem ser plotadas em função de ω .

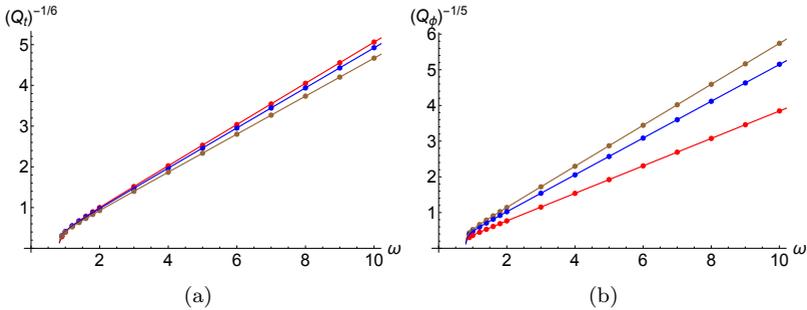


Figura 15 – (a) Carga de Noether $Q_t^{(1)}$ para $l = 0$, $l = 1$ and $l = 2$. (b) Carga $Q_\phi^{(1)}$ para (de cima para baixo) $l = 2$, $l = 1$ and $l = 0$.

Conforme Fig. 15, as curvas exibem o mesmo comportamento de $R^{-1}(\omega)$ e $E^{-1/5}(\omega)$ no regime de $\omega \gg 1$, onde $Q_t^{(1)} \propto \omega^{-6}$ e $Q_\phi^{(1)} \propto \omega^{-5}$, já que

$$Q_t^{-1/6} = a_1 \omega + b_1 + \mathcal{O}(\omega^{-1}), \quad Q_\phi^{-1/5} = a_2 \omega + b_2 + \mathcal{O}(\omega^{-1}). \quad (4.28)$$

| | a_1 | b_1 | a_2 | b_2 |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| $l = 0$ | 0.504 | 0.017 | 0.384 | 0.003 |
| $l = 1$ | 0.491 | 0.008 | 0.514 | 0.001 |
| $l = 2$ | 0.466 | 0.009 | 0.573 | 0.007 |

Tabela 2 – Expansão no regime $\omega \gg 1$, $Q_t^{-1/6} = a_1 \omega + b_1$ e $Q_\phi^{-1/5} = a_2 \omega + b_2$.

A fim de estudar a estabilidade das soluções, que depende da relação entre energia e carga de Noether, também plotamos em Fig.16 o comportamento de E com $Q_t^{(l)}$ e $Q_\phi^{(l)}$.

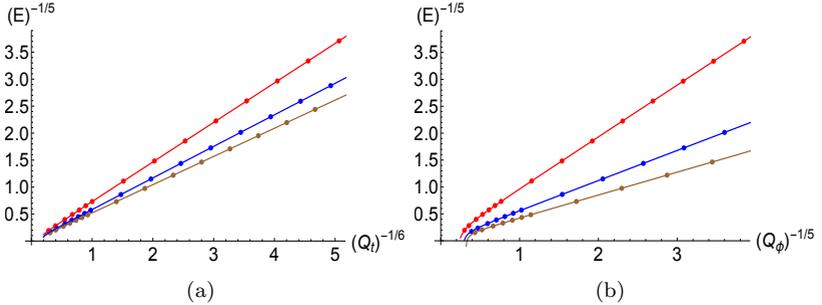


Figura 16 – (a) Energia- $Q_t^{(l)}$ dependência para (de cima para baixo) $l = 0$, $l = 1$ e $l = 2$. (b) Energia- $Q_\phi^{(l)}$ dependência para (de cima para baixo) $l = 0$, $l = 1$ and $l = 2$.

Conforme a seção 4.6, existe uma boa justificativa para que soluções compactas cuja energia for relacionada com a carga de Noether por $E \propto Q_t^d$, com $0 < d < 1$, sejam estáveis, isto é, não decaiam espontaneamente em duas ou mais soluções compactas de mesmo tipo (Q-ball para $l = 0, 1$ ou Q-shell para $l \geq 2$).

| | a_1 | b_1 | a_2 | b_2 |
|---------|-------|-------|-------|-------|
| $l = 0$ | 0.731 | 0.003 | 0.960 | 0.016 |
| $l = 1$ | 0.584 | 0.001 | 0.557 | 0.008 |
| $l = 2$ | 0.522 | 0.001 | 0.424 | 0.004 |

Tabela 3 – Expansão no regime $\omega \gg 1$, $E^{-1/5} = a_1 Q_t^{-1/6} + b_1$ e $E^{-1/5} = a_2 Q_\phi^{-1/6} + b_2$.

O ajuste linear cujos coeficientes são dados pela tabela 3 mostra que a energia se comporta como $E \propto Q_t^{5/6}$ e $E \propto Q_\phi$ para $\omega \gg 1$. Também fica claro da Fig. 16(a) que $E \propto Q_t^{5/6}$ é uma excelente aproximação para todos os valores de Q_t calculados. Nesse caso, $d = \frac{5}{6} < 1$ e as soluções não devem possuir dependência temporal diferente do que a dada pelo fator $e^{i\omega t}$ (veja seção 4.6).

Finalmente, plotamos o raio médio do compacton $R_0 := \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ em função de l .

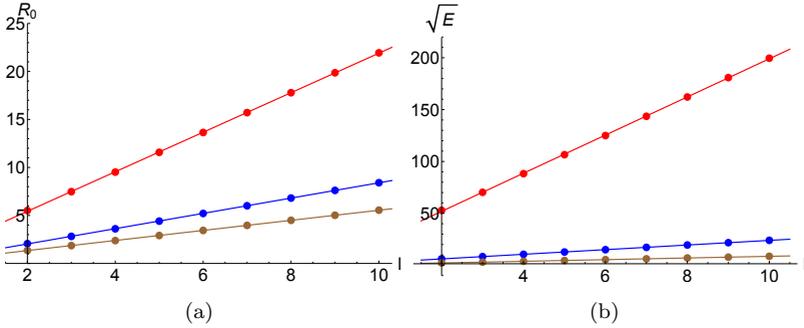


Figura 17 – (a) O raio médio $R_0 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ da Q-shell compacta em função de $l = 2, \dots, 10$. De cima pra baixo: $\omega = 1.0$, $\omega = 2.0$ e $\omega = 3.0$. (b) A raiz quadrada da energia do compacton em função de $l = 2, \dots, 10$.

Fig.17 mostra R_0 para $l = 2, 3, \dots, 10$ e três valores de $\omega = 1, 2, 3$, de onde se vê que o raio médio do compacton cresce linearmente com l . Um ajuste linear nos dá $R_0 \approx 1.31 + 2.06l$ para $\omega = 1.0$, $R_0 \approx 0.44 + 0.79l$ para $\omega = 2.0$, $R_0 \approx 0.29 + 0.52l$ para $\omega = 3.0$. O raio médio R_0 decresce conforme ω cresce. Claramente, as soluções compactas do tipo Q-shell ($\forall l \geq 2$) se tornam mais estreitas quando ω aumenta e de acordo com Fig. 3 à 12 elas tem menor amplitude quando l cresce.

A Fig.17 (b) mostra que a raiz quadrada da energia em função de l é linear. O ajuste é dado por $\sqrt{E} \approx 15.13 + 18.38l$ para $\omega = 1.0$, $\sqrt{E} \approx 1.59 + 2.23l$ para $\omega = 2.0$, $\sqrt{E} \approx 0.56 + 0.80l$ para $\omega = 3.0$.

Fica claro em todos os ajustes em função de ω acima, de $\omega \approx 2$ que o comportamento é aproximadamente linear, ou seja, a região ω grande corresponde com $[2, \infty)$ com boa aproximação. Seria interessante justificar esse comportamento, se possível, em termos de resultados obtidos analiticamente. Na região ω grande, onde há linearidade das quantidades R^{-1} , $E^{-1/5}$, $Q_t^{-1/6}$, $Q_\phi^{-1/5}$, temos f e f' muito pequenos. Isso sugere que a equação de movimento radial (4.2) (insolúvel analiticamente) pode ser aproximada por uma equação linear permitindo uma análise baseada em soluções exatas (veja capítulo 5).

4.6 ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES

Conseguimos encontrar soluções de energia finita do tipo Q-ball e Q-shell compacta simples (não múltiplas) e analisar seu comportamento assintótico, onde foi possível encontrar soluções exatas. Nos resta mostrar que tais soluções são estáveis, isto é, que as soluções do tipo Q-ball ou Q-shell compactas não se quebram espontaneamente em duas ou mais soluções do mesmo tipo.

A carga de Noether é uma quantidade conservada aditiva, ou seja, a carga total é a soma de todas as cargas individuais de um sistema fechado. Isto implica que se uma solução estiver no estado de uma única Q-ball compacta (dita estado simples) e se partir em \mathcal{N} soluções do tipo Q-ball compacta (dita estado múltiplo), a carga de Noether total do estado múltiplo Q_Σ (soma das \mathcal{N} cargas individuais (Q_k)) é igual a carga de Noether do estado simples inicial Q_0 , ou seja

$$Q_0 = Q_\Sigma = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} Q_k \quad (4.29)$$

O mesmo vale para as soluções do tipo Q-shell. Se a energia total E é proporcional a Q a alguma potência d , ou seja, satisfizer a relação $E = \alpha Q^d \Rightarrow Q = \beta E^{\frac{1}{d}}$, onde α é uma constante de proporcionalidade e $\beta \equiv \alpha^{-\frac{1}{d}}$. A aditividade e conservação da carga, somado a relação entre carga e energia, determina se a energia de um estado simples é maior, menor ou igual a energia de um estado múltiplo de mesma carga. A carga do estado simples $Q_0 = \beta E_0^{\frac{1}{d}}$ e a carga total do estados múltiplo $Q_\Sigma = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} Q_k = \beta \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k^{\frac{1}{d}}$, são correlacionadas por

$$Q_0 = Q_\Sigma \Leftrightarrow \beta E_0^{\frac{1}{d}} = \beta \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k^{\frac{1}{d}} \Leftrightarrow E_0 = \left(\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k^{\frac{1}{d}} \right)^d. \quad (4.30)$$

Mas

$$\left(\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k^{\frac{1}{d}} \right)^d \begin{cases} > \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k, & \text{se } d > 1, \\ = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k, & \text{se } d = 1, \\ < \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k, & \text{se } d < 1. \end{cases} \quad (4.31)$$

Se o suporte de cada uma das soluções do estado múltiplo não se sobrepõe em nenhuma região ao suporte das demais, as soluções não vão interagir e a energia total será a soma das energias individuais ($E_\Sigma = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k$). Assim, os somatórios de E_k da desigualdade (4.31)

representam E_Σ . Como as soluções sempre tendem ao estado de menor energia, se $E_0 < E_\Sigma$, o estado simples não se transforma espontaneamente em um estado múltiplo, mas o contrário deve ocorrer, fazendo com que o equilíbrio seja estável. De maneira análoga, se $E_0 > E_\Sigma$ o equilíbrio é instável e se $E_0 = E_\Sigma$, ambos os estados são degenerados e a análise da instabilidade, por estes argumentos de correlação entre energia e carga, é inconclusiva. Substituindo o conjunto de equação e inequações (4.31) em (4.30) concluímos que

$$E_0 > E_\Sigma \Rightarrow \text{solução instável,} \quad \text{se } d > 1, \quad (4.32)$$

$$E_0 = E_\Sigma \Rightarrow \text{análise inconclusiva,} \quad \text{se } d = 1, \quad (4.33)$$

$$E_0 < E_\Sigma \Rightarrow \text{solução estável,} \quad \text{se } d < 1. \quad (4.34)$$

A análise das soluções numéricas em nosso modelo para $l = 0, 1, 2$ leva a conclusão que temos $E \propto Q^{\frac{5}{6}} \Rightarrow d = 5/6$ e, portanto, todas as soluções encontradas são estáveis. Esta é uma boa justificativa da estabilidade, mas não é uma prova rigorosa, na medida em que se supôs que nenhum suporte dos \mathcal{N} compactons se sobrepõe em qualquer região espacial. No caso de dois ou mais suportes se sobreporem, a energia total do estado múltiplo não é mais necessariamente a soma das energias individuais de cada solução ($E_\Sigma \neq \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} E_k$) o que faz com que a análise acima não seja mais válida. A interação entre compactons pode ser altamente complexa e foge do escopo deste trabalho.

5 O MODELO LIMITE

5.1 SOLUÇÃO EXATA

Na região de ômega grandes tanto $f(r)$ quanto $f'(r)$ se tornam muito pequenos, nos permitindo fazer uma aproximação de 1ª ordem na equação de movimento (4.2) que se reduz a

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) + \left(\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)f(r) = \frac{\mu^2}{8}s, \quad \text{onde } s \equiv \text{sgn } f(r). \quad (5.1)$$

Essa equação do movimento é linear dentro do raio do compacton. Fora desse raio a equação é trivial (portanto também é linear), sendo linear $\forall r \in \mathbb{R}_+$. Reescrevendo em termos dos campos u_i

$$\partial^2 u_i + \frac{\mu^2}{8M^2} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger \cdot u}} = 0. \quad (5.2)$$

observamos que a equação (5.2) é análoga a equação signum-Gordon complexa, mas com $2l + 1$ campos escalares complexos ao invés de um único. Isto nos leva a chama-lá de equação *tipo* signum-Gordon. No caso em que $l = 0$, temos um único campo e essa equação é exatamente a equação tipo signum-Gordon

$$\partial^2 u + \lambda^2 \text{sgn } u = 0, \quad \text{onde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

As soluções da equação (5.2) correspondem com o caso limite $u_i \rightarrow 0$ no modelo tipo CP^N definido em (3.8). A aproximação nos permite buscar soluções analíticas da equação linearizada aproximada (5.1) o que não era possível na equação original completa (4.2). Essas soluções analíticas, se encontradas, podem ser comparadas com as soluções numéricas para determinar a região no espaço do parâmetro ω em que a solução analítica é próxima da solução numérica. É conveniente fazer um rescalamento $x := r\omega$, o que torna equação radial mais simples e a dependência explícita de ω é isolada do lado direito

$$\tilde{f}''(x) + \frac{1}{x}\tilde{f}'(x) + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)\tilde{f}(x) = \alpha^2 \text{sgn}(\tilde{f}(x)). \quad (5.3)$$

onde $\tilde{f}(x) := f\left(\frac{x}{\omega}\right) \equiv f(r)$, $\tilde{f}'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ e $\alpha^2 := \frac{\mu^2}{8\omega^2}$. A densidade de

energia tem a forma

$$H(r) = 4\omega^2 \left[\left(\frac{d\tilde{f}}{dx} \right)^2 + \left(1 + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) \tilde{f}^2 \right] + \tilde{\mu}^2 \tilde{f} \operatorname{sgn}(\tilde{f}). \quad (5.4)$$

A constante de acoplamento adimensional do potencial é definida por $\tilde{\mu}^2 := \frac{\mu^2}{M^4}$. Como $\operatorname{sgn} f(r) = \operatorname{sgn} \tilde{f}(x)$, dentro do raio do compacton $\operatorname{sgn} \tilde{f} = 1$ e fora $\operatorname{sgn} \tilde{f} = 0$, onde a equação é trivial. Devido a linearidade, a solução completa é igual a soma da solução homogênea com a solução particular. Como a equação homogênea é a equação de Bessel esférica

$$\tilde{f}''(x) + \frac{1}{x} \tilde{f}'(x) + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) \tilde{f}(x) = 0, \quad (5.5)$$

logo, para cada valor de l a solução homogênea é dada por

$$\tilde{f}_h(x) = A j_l(x) + B n_l(x), \quad (5.6)$$

onde $j_l(x)$ é a função esférica de Bessel de ordem l , $n_l(x)$ a função esférica de Neumann de ordem l . A e B são constantes que dependem do valor de l que podem ser determinadas pelas condições de contorno. Como o Wronskiano

$$W(x) = j_l(x)n_l'(x) - j_l'(x)n_l(x) = \frac{1}{x^2} \neq 0$$

é não nulo, essas funções são linearmente independentes.

Para cada valor de l a solução particular pode ser construída pelo método da variação dos parâmetros, isto é, tem a forma

$$\tilde{f}_p(x) = a(x)j_l(x) + b(x)n_l(x), \quad (5.7)$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são tais que satisfazem duas restrições

$$a'(x)j_l(x) + b'(x)n_l(x) = 0 \quad \text{e} \quad a'(x)j_l'(x) + b'(x)n_l'(x) = \alpha^2.$$

Integrando as soluções $a'(x) = -\frac{\alpha^2 n_l(x)}{W(x)}$ e $b'(x) = -\frac{\alpha^2 j_l(x)}{W(x)}$ encontramos

$$a(x) = -\alpha^2 \int dx x^2 n_l(x), \quad b(x) = \alpha^2 \int dx x^2 j_l(x). \quad (5.8)$$

As soluções particulares $\tilde{f}_p(x)$ são dadas em termos das funções

esféricas de Bessel e Neumann e, dependendo do valor de l , do seno integral $\text{Si}(x) := \int_0^x dt \frac{\sin t}{t}$ e cosseno integral $\text{Ci}(x) := -\int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t}$. As primeiras cinco soluções particulares ($l = 0, 1, 2, 3, 4$) são

$$\tilde{f}_p^{(l=0)}(x) = \alpha^2, \quad (5.9)$$

$$\tilde{f}_p^{(l=1)}(x) = \alpha^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right), \quad (5.10)$$

$$\tilde{f}_p^{(l=2)}(x) = \alpha^2 \left(1 + \frac{9}{x^2} \right) + 3\alpha^2 [\text{Ci}(x)j_2(x) + \text{Si}(x)n_2(x)], \quad (5.11)$$

$$\tilde{f}_p^{(l=3)}(x) = \alpha^2 \left(1 + \frac{12}{x^2} + \frac{120}{x^4} \right), \quad (5.12)$$

$$\tilde{f}_p^{(l=4)}(x) = \alpha^2 \left(1 + \frac{25}{2x^2} + \frac{1575}{2x^4} \right) + \frac{15\alpha^2}{2} [\text{Ci}(x)j_4(x) + \text{Si}(x)n_4(x)]. \quad (5.13)$$

As soluções numéricas se dividem em três casos qualitativamente diferentes, $l = 0, 1$ e $l \geq 2$. Então, vamos analisar cada caso no limite $\omega \gg 1$, na tentativa de justificar os resultados obtidos numericamente.

5.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO APROXIMADA PARA $L = 0$ (CP^1)

Para $l = 0$ as soluções são do tipo Q-ball compacta e, portanto, são não triviais apenas em $(0, x_R)$. Temos três parâmetros a determinar, as constantes A, B da solução homogênea e o raio adimensional do compacton x_R . Para determina-las utilizamos três condições, a condição de centro $\tilde{f}(0)$ finito e as condições de borda $\tilde{f}(x_R) = \tilde{f}'(x_R) = 0$. A solução completa

$$\tilde{f}^{(l=0)}(x) = \alpha^2 + Aj_0(x) + Bn_0(x).$$

Da condição de centro, podemos determinar B . Como $n_0(x)$ diverge em $r = 0$ e $j_0(x)$ não, para que $\tilde{f}(0)$ seja finito, temos $B = 0$. As constantes A e x_R podem ser determinados através da equação da borda. De $\tilde{f}(x_1^0) = 0$, onde $x_1^{l=0} = x_R$ temos

$$\tilde{f}(x_1^0) = \alpha^2 + Aj_0(x_1^0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{\alpha^2}{j_0(x_1^0)}.$$

Então a solução tem a forma

$$\tilde{f}(x) = \alpha^2 \left(1 - \frac{j_0(x)}{j_0(x_1^0)} \right).$$

Como $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$ a equação para determinar x_1^0 tem a forma

$$f'(x) = -\alpha^2 j_0'(x) = 0 \Leftrightarrow j_0'(x) = \underbrace{\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}}_{-j_1(x)} = 0$$

ou

$$\beta(x) \equiv \cos x - \frac{\sin x}{x} = 0. \quad (5.14)$$

Múltiplos valores de x_1^0 podem satisfazer essa equação, contudo ela só é válida dentro do suporte do compacton (onde $\text{sgn } \tilde{f} = 1$). Uma vez atingida a condição de borda a solução se torna trivial $\tilde{f}(x) = 0 \Rightarrow \text{sgn } \tilde{f} = 0$ e a equação (5.14) deixa de ser válida. Então, o menor valor não nulo de x_1^0 que satisfaça a equação acima é o raio do compacton x_R . Plotando $\tilde{f}'(x)$ podemos determinar numericamente o valor de x_1^0 determinando o menor valor de x para o qual a função $\beta(x)$ corta o eixo x com $x \neq 0$, ou mais exatamente, o menor valor positivo de x tal que $\beta(x) = 0$, que é $x_1^0 = 4.49341$. Este é o primeiro zero de $j_1(x)$ bem conhecido e catalogado na literatura.

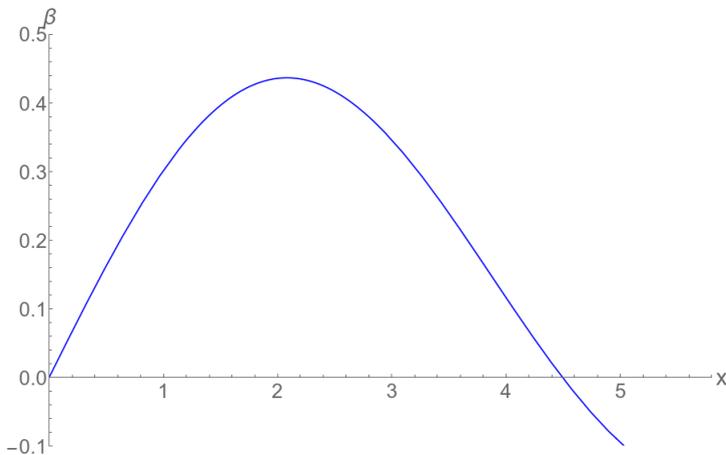


Figura 18 – β em função de x , onde $\beta(x_1^0 = 4.49341) = 0$.

A solução linearizada aproximada para $l = 0$ é

$$\tilde{f}^{(l=0)}(x) = \begin{cases} \alpha^2 \left(1 - \frac{j_0(x)}{j_0(x_1^0)}\right), & \forall x \in [0, x_1^0) \\ 0, & \forall x \geq x_1^0 \end{cases} \quad \text{onde } x_1^0 = 4.49341. \quad (5.15)$$

Da definição da variável $x := r\omega$ obtemos

$$R^{-1} = \frac{\omega}{x_1^0} \approx 0.22254\omega.$$

Esse resultado exato justifica o comportamento linear de R^{-1} com ω para $l = 0$ na região de ω grande encontrado numericamente. O coeficiente angular encontrado numericamente era $c_{num}^{(l=0)} = 0.221$ que é muito próximo do coeficiente angular encontrado exatamente $c_{exata}^{(l=0)} = 0.22254$, com uma diferença de ordem 10^{-3} .

5.3 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO APROXIMADA PARA $L = 1$ (CP^3)

Para $l = 1$ as soluções são do tipo Q-ball compacta e, portanto, são não triviais apenas em $(0, x_R)$. Temos três parâmetros a determinar, as constantes A, B da solução homogênea e o raio adimensional do compacton x_R . Para determina-las utilizamos três condições, a condição de centro $\tilde{f}(0)$ finito e as condições de borda $\tilde{f}(x_R) = \tilde{f}'(x_R) = 0$. A solução completa

$$\tilde{f}^{(l=1)}(x) = \alpha^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + Aj_1(x) + Bn_1(x).$$

Da condição de centro, podemos determinar B . Expandindo a solução em torno da origem

$$\tilde{f}^{(l=1)}(x \rightarrow 0^+) = \frac{2\alpha^2 - B}{x^2} + \left(\alpha^2 - \frac{B}{2}\right) + \mathcal{O}(x) = 0 + \mathcal{O}(x),$$

$$B = 2\alpha^2.$$

As constantes A e x_R podem ser determinados através da equação da borda. De $\tilde{f}(x \rightarrow x_R^-) = 0 \Leftrightarrow 2x^2\tilde{f}(x \rightarrow x_R^-) = 0$ temos

$$4\alpha^2 - 2(2\alpha^2 + Ax_R) \cos x_R + 2(A - 2\alpha^2 x_R) \sin x_R = -2x_R^2\alpha^2. \quad (5.16)$$

De $\tilde{f}'(x \rightarrow x_R^-) = 0 \Leftrightarrow x^3 \tilde{f}(x \rightarrow x_R^-) = 0$,

$$4\alpha^2 - 2(2\alpha^2 + Ax_R) \cos x_R + 2(A - 2\alpha^2 x_R) \sin x_R + 2\alpha^2 x_R^2 \cos x_R - Ax^2 \sin x_R = 0. \quad (5.17)$$

De (5.16) em (5.17)

$$-2x_R^2 \alpha^2 + 2\alpha^2 x_R^2 \cos x - Ax_R^2 \sin x = 0,$$

$$(1 - \cos x_R) + \frac{A}{\alpha^2} \sin x_R = 0.$$

Como $R \neq 0 \Rightarrow x_R \neq 0$

$$(1 - \cos x_R) + \frac{A}{\alpha^2} \sin x_R = 0. \quad (5.18)$$

A Eq. (5.18) é trivial para $x_R = 2\pi n$, com n natural. Supondo, por absurdo, que haja um valor de $x_R < 2\pi$ que satisfaça a equação acima, e checando que facilmente que $x_R = \pi$ não é solução, temos

$$x_R \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\} \Rightarrow \sin x_R \neq 0 \Rightarrow A = \alpha^2 \frac{\cos x_R - 1}{\sin x_R}.$$

Substituindo esse valor de A na equação (5.17) encontramos

$$x_R + 2 \cot x_R - 2 \cos x_R \cot x_R - 2 \sin x_R = 0.$$

No entanto, $h(x) \equiv x + 2 \cot x - 2 \cos x \cot x - 2 \sin x$

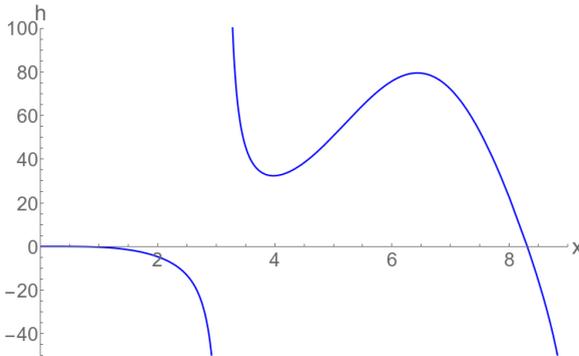


Figura 19 – h em função de x , com primeiro zero para $x > 0$ em $x = 8.30924 > 2\pi$.

tem seu primeiro valor nulo para $x > 0$ em $x = 8.30924 > 2\pi$, o que contradiz a hipótese da existência de $x_R \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$. Então, por absurdo, o menor valor de x_R não nulo é $x = 2\pi$, e $f(x) = 0$, para $\forall x \geq 2\pi$. Conhecendo $x_R = x_1^1 = 2\pi$ podemos substituir esse valor em Eq. (5.16) e encontrar A

$$4\alpha^2 - 2(2\alpha^2 + 2\pi A) = -2(2\pi)^2\alpha^2 \Leftrightarrow A = 2\pi\alpha^2 \quad (5.19)$$

A solução da equação linearizada para $l = 1$ é

$$\tilde{f}^{l=1}(x) = \begin{cases} \alpha^2 \left[1 + \frac{2}{x^2} + 2\pi j_1(x) + 2n_1(x) \right], & \forall x \in [0, 2\pi) \\ 0, & \forall x \geq 2\pi \end{cases} \quad (5.20)$$

Da definição $x := r\omega$ encontramos o raio do compacton

$$R^{-1} = \frac{\omega}{2\pi} \approx 0.15915\omega.$$

Esse resultado exato justifica o comportamento linear de R^{-1} com ω para $l = 1$ na região de ω grande encontrado numericamente. O coeficiente angular encontrado numericamente era $c_{num}^{(l=1)} = 0.158$ que é muito próximo do coeficiente angular encontrado exatamente $c_{exata}^{(l=1)} = 0.15915$, com uma diferença de ordem 10^{-3} .

5.4 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO APROXIMADA PARA $L = 2$ (CP^5)

Para $l = 2$ as soluções são do tipo Q-shell compacta e, portanto, se tornam não triviais apenas em (x_1, x_2) . Temos quatro parâmetros a determinar: as constantes A, B da solução homogênea e os raios x_1 e x_2 . Para determina-las utilizamos quatro condições, as condição da primeira borda $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}'(x_1) = 0$ e as condições da segunda de borda $\tilde{f}(x_2) = \tilde{f}'(x_2) = 0$. A solução completa

$$\tilde{f}^{(l=2)}(x) = \alpha^2 \left(1 + \frac{9}{x^2} \right) + (3\alpha^2 \text{Ci } x + A)j_2(x) + (3\alpha^2 \text{Si } x + B)n_2(x). \quad (5.21)$$

Da condições da primeira borda, podemos determinar A e B . Basta isolar A em $\tilde{f}^{(l=2)}(x_1) = 0$ e substituir em $\tilde{f}'^{(l=2)}(x_1) = 0$, que então depende apenas de B e x_1 . Dessa equação se determina B em função de x_1

$$B = \alpha^2(4 \sin x_1 - x_1 \cos x_1 - 3 \text{Si } x_1)$$

e substituindo a expressão de B na expressão de A , encontramos A em função de x_1

$$A = \alpha^2(4 \cos x_1 + x_1 \sin x_1 - 3 \text{Ci } x_1).$$

Substituindo as expressões de A e B em (5.22)

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(l=2)}(x) = \alpha^2 \left(1 + \frac{9}{x^2} \right) + \alpha^2 [4 \cos x_1 + x_1 \sin x_1 + 3(\text{Ci } x - \text{Ci } x_1)] j_2(x) + \\ + \alpha^2 [4 \sin x_1 - x_1 \cos x_1 + 3(\text{Si } x - \text{Si } x_1)] n_2(x). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Os raios do compacton x_1 (interno) e x_2 (externo) podem ser determinados simultaneamente das condições da segunda borda. Pode-se ajustar numericamente os valores de x_1 e x_2 tal que se satisfaça simultaneamente $\tilde{f}(x_2) = \tilde{f}'(x_2) = 0$, o que fornece $x_1 = 0.193871$ e $x_2 = 7.944507$. A espessura do compacton é $\delta x = x_2 - x_1 = 7.750640$.

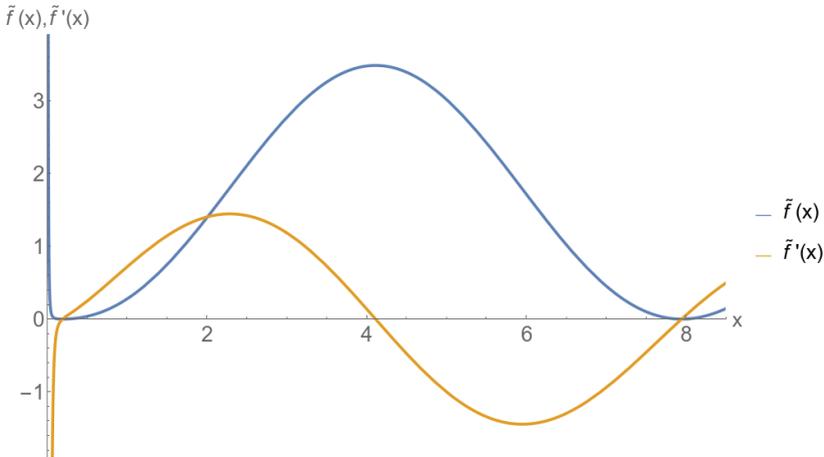


Figura 20 – De cima para baixo em $x = 4$, respectivamente, \tilde{f} e \tilde{f}' em função de x , satisfazendo a condição de borda com $x_1 = 0.193871$ e $x_2 = 7.944507$.

Então $\tilde{f}^{(l=2)}(x)$ tem solução dada pela equação (5.22) para $\forall x \in (x_1, x_2)$ e é trivial para $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus (x_1, x_2)$.

Da definição da variável $x := r\omega$ obtemos

$$R^{-1} = \frac{\omega}{\delta x} \approx 0.12902\omega.$$

Esse resultado exato justifica o comportamento linear de R^{-1} com ω para $l = 2$ na região de ω grande encontrado numericamente. O coeficiente angular encontrado numericamente era $c_{num}^{(l=2)} = 0.128$ que é muito próximo do coeficiente angular encontrado exatamente $c_{exata}^{(l=2)} = 0.12902$, com uma diferença de ordem 10^{-3} . Para $l = 0, 1, 2$, no regime $\omega \gg 1$, obtemos analiticamente $f \propto \alpha^2 \propto \omega^{-2}$, ficando claro que, nessa região, \tilde{f} e \tilde{f}' decrescem rapidamente quando ω cresce, tornando a aproximação cada vez melhor.

5.5 ENERGIA E CARGAS

A de energia $H(r)$ pode ser reescrita em termos de uma função $g(x)$ definida por

$$f(r) = \tilde{f}(x) = \alpha^2 g(x) \quad (5.23)$$

afim de fatorizar a dependência de $\alpha^2 = \alpha^2(\omega, \tilde{\mu})$. A densidade de energia (5.4) toma a forma

$$H(r) = \frac{\tilde{\mu}^4}{8\omega^2} \left[\frac{1}{2} \left(g'^2 + \left(1 + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) g^2 \right) + g \operatorname{sgn}(g) \right] = \frac{\tilde{\mu}^4}{8\omega^2} G(x), \quad (5.24)$$

onde $g'(x) = \frac{dg}{dx}(x)$. A energia total $E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 H(r)$ lê-se

$$E = c_1^{(l)} \frac{\tilde{\mu}^4}{\omega^5} \quad \text{onde} \quad c_1^{(l)} := \frac{\pi}{2} \int_0^\infty dx x^2 G(x) \quad (5.25)$$

é uma constante numérica, para cada valor de l , que não depende de ω . A função $G(x)$ é não nula somente em $[x_1, x_2]$, onde $x_1 \equiv 0$ para $l = 0, 1$. Segue-se da equação (5.25) que $E^{-1/5} = \left(\tilde{\mu}^4 c_1^{(l)} \right)^{-1/5} \omega$. Isso significa que a energia do compacton é proporcional a ω^5 se, e somente, se $f(r) \propto \omega^{-2}$. Além disso, os valores explícitos de $(c_1^{(l)})^{-1/5}$ são dados

por

$$\left(c_1^{(l=0)}\right)^{-1/5} = \left(\frac{\pi}{2} 90.725215\right)^{-1/5} = 0.37087, \quad (5.26)$$

$$\left(c_2^{(l=1)}\right)^{-1/5} = \left(\frac{\pi}{2} 323.44843\right)^{-1/5} = 0.28761, \quad (5.27)$$

$$\left(c_3^{(l=2)}\right)^{-1/5} = \left(\frac{\pi}{2} 737.11300\right)^{-1/5} = 0.24393 \quad (5.28)$$

e elas são estimativas muito boas dos coeficientes lineares das equações (4.25), (4.26) e (4.27) obtidas para $\tilde{\mu} = 1$.

Alguns termos da energia podem ser escritos em termos das cargas

$$4\pi \frac{\tilde{\mu}^4}{16\omega^2} \int dr r \left(1 + \frac{l(l+1)}{x^2} g^2\right) = \sum_{m=-l}^l \left(\omega Q_t^{(m)} + m Q_\phi^{(m)}\right),$$

onde as cargas são dadas pelas expressões

$$Q_t^{(m)} = c_2^{(l)} \frac{\tilde{\mu}^4}{\omega^6} \quad \text{onde} \quad c_2^{(l)} := \frac{\pi}{4(2l+1)} \int_0^\infty dx x^2 g^2, \quad (5.29)$$

$$Q_\phi^{(m)} = c_3^{(l)} \frac{\tilde{\mu}^4}{\omega^5} \quad \text{onde} \quad c_3^{(l)} := \frac{\pi}{4(2l+1)} \int_0^\infty dx g^2. \quad (5.30)$$

A dependência entre energia e carga toma a forma

$$E = c_1^{(l)} \tilde{\mu}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{Q_t^{(m)}}{c_1^{(l)}}\right)^{\frac{5}{6}}, \quad E = \frac{c_1^{(l)}}{c_3^{(l)}} Q_\phi^{(m)}. \quad (5.31)$$

As relações $E \propto Q_t^{\frac{5}{6}}$ e $E \propto Q_\phi$ obtidas exatamente justificam o comportamento linear visto na Fig. 16. Como as cargas de Noether Q_t são aditivas e conservadas, e $E \propto Q_t^d$, com $d = \frac{5}{6} < 1$, as soluções encontradas exatamente devem ser estáveis (veja seção 4.6). Logo, todas as soluções exatas encontradas no regime $\omega \gg 1$ mantêm sua forma, permanecendo do tipo Q-ball compacta ($l = 0, 1$) ou Q-shell compacta ($\forall l \geq 2$). Note que o mesmo argumento foi usado em (ARODZ; LIS, 2008)

6 CONCLUSÕES

A introdução do potencial em forma V na região de mínimos no modelo CP^N , junto ao ansatz com dependência temporal $e^{i\omega t}$, tornou possível encontrar soluções compactas de energia finita no modelo CP^N , com N **ímpar**. Tais soluções são do tipo Q-ball para $N = 1, 3$ e Q-shell para $\forall N \geq 5$.

As soluções do tipo Q-ball para $N = 1, 3$ e do tipo Q-shell para $N = 5$, foram obtidas numericamente para muitos valores de ω o que nos permitiu fazer um ajuste numérico e obter o comportamento de $\delta R^{-1}(\omega)$, $E^{-1}(\omega)$, $Q_t^{-5/6}$, entre outros. Em particular, todos lineares no regime de $\omega \gg 1$. Também observamos que não existem soluções abaixo de um $\omega_c \approx 0.823$, deixando claro a importância do fator temporal $e^{i\omega t}$ no ansatz, já que ele é o responsável por introduzir o parâmetro ω do qual a existência e a forma das soluções dependem fortemente. Para esses valores de N , se mostrou que $E \propto Q^{\frac{5}{6}}$, o que implica na estabilidade das soluções, em concordância com (ARODZ; LIS, 2008). Tais soluções se tornam mais estreitas e achatadas com o aumento de ω , a medida que os valores máximos de f e $|f'|$ diminuem, se tornando cada vez menores conforme ω aumenta. Isso sugeriu uma aproximação de 1ª ordem em f e f' , que reduziu a equação de movimento a uma equação linear de segunda ordem, onde se pode construir soluções exatas para todo N ímpar. Tais soluções são dadas em termos de funções esféricas de Bessel e de Neumann, e justificam o comportamento linear das grandezas obtido numericamente na região de $\omega \gg 1$, bem como a estabilidade das soluções. Para $N = 1, 3$ e 5 , o coeficiente angular das grandezas acima obtido numericamente, difere do coeficiente angular das soluções da equação linearizada aproximada, na ordem de 10^{-3} .

As soluções do tipo Q-ball e Q-shell compactas em modelo CP^N com a introdução de potencial em forma V deverão ser encontradas em um caso limite de sua generalização, o modelo SF estendido com a introdução de potencial em forma V. Tal potencial pode fazer com que haja soluções compactas de energia finita no modelo completo. Também seria interessante obter soluções compactas de energia finita para N par, mas nosso ansatz que reduz as equações de movimento a uma única equação radial foi definido apenas com N ímpar, sendo incompatível com N par. Um ansatz para N par que tenha as mesmas propriedades do que nosso ansatz (4.1) com N ímpar, ainda não foi encontrado e este problema permanece em aberto.

REFERÊNCIAS

- ADAM, C. et al. K fields, compactons and thick branes. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 41, p. 212004–212011, 2008.
- ADAM, C. et al. Compact baby skyrmions. **Phys. Rev. D**, v. 80, p. 105013–105027, 2009.
- ARODZ, H.; KLIMAS, P.; TYRANOWSKI, T. Field-theoretic models with v-shaped potentials. **Acta Physica Polonica B**, v. 36, p. 3861 – 3877, 2005.
- ARODZ, H.; LIS, J. Compact q -balls in the complex signum-gordon model. **Phys. Rev. D**, v. 77, p. 107702–10776, 2008.
- ARODZ, H.; LIS, J. Compact q -balls and q -shells in a scalar electrodynamics. **Physical Review. D, Particles Fields**, v. 79, p. 045002 – 045011, 2009.
- BAZEIA, D. et al. Compact q -balls. **Physics Letters B**, v. 758, p. 146 – 151, 2016.
- BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. New results on compact structures. **Physics Letters B**, v. 731, p. 293–297, 2014.
- DERRICK, G. H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. **Journal of Mathematical Physics**, v. 5, p. 1252–1254, 1964.
- DUSUEL, S.; MICHAUX, P.; REMOISSENET, M. From kinks to compactonlike kinks. **Phys. Rev. E**, v. 57, p. 2320–2326, 1998.
- FERREIRA, L. A.; KLIMAS, P. Exact vortex solutions in a cpn skyrme-faddeev type model. **Journal of High Energy Physics**, v. 2010, p. 8, 2010.
- FERREIRA, L. A.; KLIMAS, P.; ZAKRZEWSKI, W. J. Properties of some $(3 + 1)$ -dimensional vortex solutions of the CP^N model. **Phys. Rev. D**, v. 84, p. 085022–085032, 2011.
- FERREIRA, L. A.; KLIMAS, P.; ZAKRZEWSKI, W. J. Some $(3 + 1)$ -dimensional vortex solutions of the CP^N model. **Phys. Rev. D**, v. 83, p. 105018–105025, 2011.

FERREIRA, L. A.; KLIMAS, P.; ZAKRZEWSKI, W. J. Some properties of $(3 + 1)$ dimensional vortex solutions in the extended cpn skyrme-faddeev model. **Journal of High Energy Physics**, v. 2011, p. 98–115, 2011.

HELGASON, S. Differential geometry, lie groups and symmetric spaces. **Academic Press, New York U.S.A.**, p. 198 – 400, 1978.

LEE, T.; PANG, Y. Nontopological solitons. **Physics Reports**, v. 221, p. 251 – 350, 1992.

ROSEN, G. Particlelike solutions to nonlinear complex scalar field theories with positive definite energy densities. **Journal of Mathematical Physics**, v. 9, p. 996–998, 1968.

ROSENAU, P.; HYMAN, J. M. Compactons: Solitons with finite wavelength. **Phys. Rev. Lett.**, v. 70, p. 564–567, 1993.

WERLE, J. Dirac spinor solitons or bags. **Physics Letters B**, v. 71, p. 357 – 359, 1977.

APÊNDICE A – Equações de movimento

A.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM COORDENADAS CARTESIANAS

Considere a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - V \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\mathcal{L}_0 := -\frac{1}{2}[M^2\eta_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}]\tau^{\nu\mu}. \quad (\text{A.2})$$

onde η é a métrica do espaço-tempo de Minkowski e $C_{\mu\nu}$ e $\tau_{\nu\mu}$ foram definidos, respectivamente, em (2.4) e (2.5). Qualquer variação da Lagrangiana \mathcal{L}_0 com respeito aos campos tem a forma

$$\delta\mathcal{L}_0 = -C_{\mu\nu}\delta\tau^{\nu\mu}. \quad (\text{A.3})$$

A variação de \mathcal{L}

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k)}\delta(\partial_\alpha u_k) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial u_k}\delta u_k - \frac{\delta V}{\delta u_k}\delta u_k \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)}\delta(\partial_\alpha u_k^*) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial u_k^*}\delta u_k^* - \frac{\delta V}{\delta u_k^*}\delta u_k^* \\ &= \partial_\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k)}\delta u_k + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)}\delta u_k^* \right] \\ &+ \left[-\partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k)} \right) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial u_k} - \frac{\delta V}{\delta u_k} \right] \delta u_k \\ &+ \left[-\partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)} \right) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial u_k^*} - \frac{\delta V}{\delta u_k^*} \right] \delta u_k^*. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O divergente total não contribui para a equação do movimento, pois se torna uma integral na borda pelo teorema de Gauss e podemos tomar a borda no infinito, onde os campos são identicamente nulos. Obtemos duas equações de movimento mutuamente conjugadas. Considere então uma delas

$$-\partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)} \right) + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial u_k^*} - \frac{\delta V}{\delta u_k^*} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Vamos multiplicar a equação acima por $-\frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2$. A equação pode ser reescrita na forma seguinte

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \left[\frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)} \right] - \frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)} \partial_\alpha (1+u^\dagger u)^2 \\ - \frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u_k^*} + \frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 \frac{\partial V}{\partial u_k^*} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Seja $\Delta_{ij}^2 = (1+u^\dagger u)\delta_{ij} - u_i u_j^*$, pode-se chegar facilmente as relações

$$\frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)} = -\frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 C_{\mu\nu} \frac{\partial \tau^{\nu\mu}}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)} = C_\nu^\alpha \Delta_{kj}^2 \partial^\nu u_j. \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\alpha u_k^*)} \partial_\alpha (1+u^\dagger u)^2 = 2C_{\alpha\nu} \Delta_{kj}^2 \partial^\nu u_j \frac{u^\dagger \partial^\alpha u + (\partial^\alpha u^\dagger) u}{1+u^\dagger u} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial u_k^*} &= -\frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 C_{\mu\nu} \frac{\partial \tau^{\nu\mu}}{\partial u_k^*} \\ &= -\frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 C_{\mu\nu} (-4) \left[-2u_k \frac{\partial^\mu u^\dagger \Delta^2 \partial^\nu u}{(1+u^\dagger u)^3} \right] \\ &\quad - \frac{1}{4}(1+u^\dagger u)^2 C_{\mu\nu} (-4) \left[\frac{\frac{\partial}{\partial u_k^*} (\partial^\mu u^\dagger \Delta^2 \partial^\nu u)}{(1+u^\dagger u)^2} \right] \\ &= -2u_k C_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu u^\dagger \Delta^2 \partial^\nu u}{(1+u^\dagger u)} + C_{\mu\nu} \partial^\mu u_i^* \underbrace{\frac{\partial}{\partial u_k^*} \Delta_{ij}^2}_{u_k \delta_{ij} - u_i \delta_{kj}} \partial^\nu u_j \\ &= -2u_k C_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu u^\dagger \Delta^2 \partial^\nu u}{(1+u^\dagger u)} + C_{\mu\nu} [(\partial^\mu u^\dagger \partial^\nu u) u_k - (\partial^\mu u^\dagger u) \partial^\nu u_k]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

As equações de movimento se tornam

$$\begin{aligned}
 \Delta_{kj}^2 \partial^\alpha (C_{\alpha\nu} \partial^\nu u_j) &+ \overbrace{C_{\alpha\nu} \partial^\nu u_j \partial^\alpha \Delta_{kj}^2}^{\text{termo 1}} \\
 &\overbrace{\partial^\alpha (C_{\alpha\nu} \Delta_{kj}^2 \partial^\nu u_j)} \\
 &- 2C_{\alpha\nu} \Delta_{kj}^2 \partial^\nu u_j \frac{u^\dagger \partial^\alpha u + (\partial^\alpha u^\dagger) u}{1 + u^\dagger u} \\
 &+ 2u_k C_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu u^\dagger \Delta^2 \partial^\nu u}{(1 + u^\dagger u)} - \underbrace{C_{\mu\nu} [(\partial^\mu u^\dagger \partial^\nu u) u_k - (\partial^\mu u^\dagger u) \partial^\nu u_k]}_{\text{termo2}} \\
 &+ \frac{1}{4} (1 + u^\dagger u)^2 \frac{\partial V}{\partial u_k^*} = 0,
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

onde

$$\partial^\alpha \Delta_{kj}^2 = [(\partial^\alpha u^\dagger) u + u^\dagger \partial^\alpha u] \delta_{kj} - (\partial^\alpha u_k) u_j^* - u_k \partial^\alpha u_j^* \tag{A.11}$$

e

$$\partial^\alpha \Delta_{kj}^2 \partial^\nu u_j = [(\partial^\alpha u^\dagger) u + u^\dagger \partial^\alpha u] \partial^\nu u_k - (u^\dagger \partial^\nu u) \partial^\alpha u_k - (\partial^\alpha u^\dagger \partial^\nu u) u_k. \tag{A.12}$$

Substituindo α por μ e juntando os termos 1 e 2

$$\begin{aligned}
 \Delta_{kj}^2 \left[\partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_j) - 2C_{\mu\nu} \frac{u^\dagger \partial^\mu u + (\partial^\mu u^\dagger) u}{1 + u^\dagger u} \partial^\nu u_j \right] \\
 + C_{\mu\nu} [2(\partial^\mu u^\dagger u) \partial^\nu u_k - 2(\partial^\mu u^\dagger \partial^\nu u) u_k] \\
 + C_{\mu\nu} [(u^\dagger \partial^\mu u) \partial^\nu u_k - (u^\dagger \partial^\nu u) \partial^\mu u_k] \\
 + 2u_k C_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu u^\dagger \Delta^2 \partial^\nu u}{(1 + u^\dagger u)} + \frac{1}{4} (1 + u^\dagger u)^2 \frac{\partial V}{\partial u_k^*} = 0.
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

A inversa de $\Delta_{ij}^2 = (1 + u^\dagger u) \delta_{ij} - u_i u_j^*$ é $\Delta_{ij}^{-2} = \frac{\delta_{ij} + u_i u_j^*}{1 + u^\dagger u}$ e satisfaz

$$\sum_{k=1}^N \Delta_{ik}^{-2} \Delta_{kj}^2 = \delta_{ij}. \tag{A.14}$$

Note que \mathbf{u}_i é autovetor da matriz Δ_{ik}^{-2}

$$\sum_{k=1}^N \Delta_{ik}^{-2} \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_i \quad (\text{A.15})$$

Temos também

$$\sum_{k=1}^N \Delta_{ik}^{-2} \partial^\nu \mathbf{u}_k = \frac{\partial^\nu \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i (\mathbf{u}^\dagger \partial^\nu \mathbf{u})}{1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}}. \quad (\text{A.16})$$

Multiplicando a Eq. (A.13) por Δ_{ik}^{-2} e somando sobre k de 1 até N , ou seja, tomando $\sum_{k=1}^N$ obtemos

$$\begin{aligned} \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_j) - \frac{C_{\mu\nu}}{1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}} & \left[\overbrace{2}^{(\alpha)} (\mathbf{u}^\dagger \partial^\mu \mathbf{u}) \partial^\nu u_i + \overbrace{2(\partial^\mu \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})}^{(\beta)} \partial^\nu u_i \right] \\ & + \frac{C_{\mu\nu}}{1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}} \left[\overbrace{2(\partial^\mu \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})}^{(\beta)} \partial^\nu u_i + \overbrace{2(\partial^\mu \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}) (\mathbf{u}^\dagger \partial^\nu \mathbf{u})}^{(\gamma)} u_i \right. \\ & \quad \left. - \overbrace{2(1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}) (\partial^\mu \mathbf{u}^\dagger \partial^\nu \mathbf{u})}^{(\gamma)} u_i + \overbrace{(\mathbf{u}^\dagger \partial^\mu \mathbf{u}) \partial^\nu u_i}^{(\alpha)} \right] \\ & + \overbrace{(\mathbf{u}^\dagger \partial^\mu \mathbf{u}) (\mathbf{u}^\dagger \partial^\nu \mathbf{u})}^{(\delta)} u_i - \overbrace{(\mathbf{u}^\dagger \partial^\nu \mathbf{u}) \partial^\mu u_i}^{(\delta)} - \overbrace{(\mathbf{u}^\dagger \partial^\nu \mathbf{u}) (\mathbf{u}^\dagger \partial^\mu \mathbf{u})}^{(\delta)} u_i \\ & + \overbrace{2u_i C_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu \mathbf{u}^\dagger \Delta^2 \partial^\nu \mathbf{u}}{(1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})}}^{(\gamma)} + \frac{1}{4} (1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u})^2 \sum_{k=1}^N \left[(\delta_{ik} + u_i u_k^*) \frac{\partial V}{\partial u_k^*} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Os termos representados pela mesma letra grega entre parênteses na equação (A.17) se cancelam, reduzindo a equação de movimento a

$$\begin{aligned} \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - \frac{C_{\mu\nu}}{1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}} & \left[(\mathbf{u}^\dagger \partial^\mu \mathbf{u}) \partial^\nu u_i + (\mathbf{u}^\dagger \partial^\nu \mathbf{u}) \partial^\mu u_i \right] \\ & + \frac{1}{4} (1 + \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}) \sum_{k=1}^N \left[(\delta_{ik} + u_i u_k^*) \frac{\partial V}{\partial u_k^*} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Note que em CP^1 o somatório no último termo da equação (A.18) tem um único termo, fazendo com que a contribuição da parte potencial se torne simplesmente

$$\frac{u}{4}(1 + |u|^2)^2 \frac{\partial V}{\partial |u|^2}. \quad (\text{A.19})$$

Se o potencial depende apenas de $|u_i|^2$ então $\frac{\partial V}{\partial u_k^*} = u_k \frac{\partial V}{\partial |u_k|^2}$. Obtemos finalmente as equações de movimento

$$\begin{aligned} \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - \frac{C_{\mu\nu}}{1 + u^\dagger u} [(u^\dagger \partial^\mu u) \partial^\nu u_i + (u^\dagger \partial^\nu u) \partial^\mu u_i] \\ + \frac{u_i}{4} (1 + u^\dagger u) \left[\frac{\partial V}{\partial |u_i|^2} + \sum_{k=1}^N |u_k|^2 \frac{\partial V}{\partial |u_k|^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

No caso particular onde o potencial $V = V(|u_i|) = V(|u|^2)$ onde $|u|^2 \equiv u^\dagger u = \sum_{k=1}^N |u_k|^2$ temos

$$\frac{\partial V}{\partial |u_k|^2} = \frac{\partial V}{\partial |u|^2} \underbrace{\frac{\partial |u|^2}{\partial |u_k|^2}}_1 = \frac{\partial V}{\partial |u|^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial |u_i|^2} + \sum_{k=1}^N |u_k|^2 \frac{\partial V}{\partial |u_k|^2} = \frac{\partial V}{\partial |u|^2} + \frac{\partial V}{\partial |u|^2} \sum_{k=1}^N |u_k|^2 = (1 + |u|^2) \frac{\partial V}{\partial |u|^2}.$$

As equações de movimento se tornam

$$\begin{aligned} \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - \frac{C_{\mu\nu}}{1 + u^\dagger u} [(u^\dagger \partial^\mu u) \partial^\nu u_i + (u^\dagger \partial^\nu u) \partial^\mu u_i] \\ + \frac{u_i}{4} (1 + |u|^2)^2 \frac{\partial V}{\partial |u|^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

O potencial em forma V considerado nesse trabalho

$$V \equiv \mu^2 \sqrt{\frac{u^\dagger u}{1 + u^\dagger u}} = \mu^2 \sqrt{\frac{|u|^2}{1 + |u|^2}} = V(|u|^2) \quad (\text{A.22})$$

onde μ^2 é uma constante, tem justamente essa forma. Logo, a equação

(A.21) corresponde a

$$\begin{aligned} \partial^\mu (C_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - \frac{C_{\mu\nu}}{1 + u^\dagger u} [(u^\dagger \partial^\mu u) \partial^\nu u_i + (u^\dagger \partial^\nu u) \partial^\mu u_i] \\ + \mu^2 \frac{u_i}{8|u|} \sqrt{1 + |u|^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

No modelo tratado nesse trabalho $C_{\mu\nu} = M^2 \eta_{\mu\nu}$, o que reduz as equações de movimento a

$$\begin{aligned} \partial^\mu (\eta_{\mu\nu} \partial^\nu u_i) - \frac{\eta_{\mu\nu}}{1 + u^\dagger u} [(u^\dagger \partial^\mu u) \partial^\nu u_i + (u^\dagger \partial^\nu u) \partial^\mu u_i] \\ + \frac{\mu^2}{8M^2} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger u}} \sqrt{1 + u^\dagger u} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Resulta simplesmente

$$\partial_\mu \partial^\mu u_i - \frac{2(u^\dagger \partial_\mu u) \partial^\mu u_i}{1 + u^\dagger u} + \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger u}} \sqrt{1 + u^\dagger u} \quad (\text{A.25})$$

onde $\tilde{\mu}^2 \equiv \frac{\mu^2}{M^2}$.

A.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM COORDENADAS CURVILINEARES

Em vários casos é conveniente expressar as equações de movimento em coordenadas curvilineares. A mudança de coordenadas pode ser determinada pela seguinte substituição nas equações de movimento (A.21): $\partial^\mu \rightarrow g^{\mu\alpha} \partial_\alpha$, $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ e o divergente

$$\partial^\mu (\eta_{\mu\nu} \partial^\nu) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} g_{\mu\nu} \partial_\beta). \quad (\text{A.26})$$

A mudança de coordenadas transforma as equações de movimento em coordenadas cartesianas (A.24) nas equações de movimento em coor-

denadas curvilineares

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} g_{\mu\nu} \partial_\beta u_i) \\
 & - \frac{g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\mu\nu}}{1 + u^\dagger u} [(u^\dagger \partial_\alpha u) \partial_\beta u_i + (u^\dagger \partial_\beta u) \partial_\alpha u_i] \\
 & + \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger u}} \sqrt{1 + u^\dagger u} = 0.
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Note que o tensor $g_{\mu\nu}$ é um tensor métrico no espaço de plano (de Minkowski) onde introduzimos coordenadas curvilineares.

A.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Para as coordenadas esféricas em 3+1 a métrica é dada por

$$\begin{aligned}
 [g_{\mu\nu}] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \\
 [g^{\mu\nu}] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Como a matriz $[g_{\mu\nu}]$ é diagonal, $\sqrt{-g} = \sqrt{-\text{Tr}[g_{\mu\nu}]} = r^2 \sin \theta$. Logo, a equação (A.27) se resume a

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\mu (r^2 \sin \theta g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} g_{\mu\nu} \partial_\nu u_i) \\
&\quad - \frac{g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} g_{\mu\nu}}{1 + u^\dagger u} [(u^\dagger \partial_\mu u) \partial_\nu u_i + (u^\dagger \partial_\nu u) \partial_\mu u_i] \\
&\quad\quad\quad + \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger u}} \sqrt{1 + u^\dagger u} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\mu (r^2 \sin \theta g^{\mu\mu} \overbrace{g^{\mu\mu} g_{\mu\mu}}^1 \partial_\mu u_i) \\
&\quad - \frac{g^{\mu\mu} \overbrace{g^{\mu\mu} g_{\mu\mu}}^1}{1 + u^\dagger u} [(u^\dagger \partial_\mu u) \partial_\mu u_i + (u^\dagger \partial_\mu u) \partial_\mu u_i] \\
&\quad\quad\quad + \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger u}} \sqrt{1 + u^\dagger u}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

onde utilizamos a notação em que dois ou mais índices repetidos representam uma somatória sobre todos os valores desse índice. Esta notação compacta é eficaz, já que a métrica é diagonal e para um μ fixo, temos $g^{\mu\mu} g_{\mu\mu} = 1$. Isto simplifica a equação (A.29) a

$$\begin{aligned}
&\overbrace{\frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\mu (r^2 \sin \theta g^{\mu\mu} \partial_\mu u_i)}^{\equiv I_1} - \frac{2g^{\mu\mu} (u^\dagger \partial_\mu u) \partial_\mu u_i}{1 + u^\dagger u} \\
&\quad + \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \frac{u_i}{\sqrt{u^\dagger u}} \sqrt{1 + u^\dagger u} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

O bloco I_1 tem a forma

$$\begin{aligned}
I_1 &= \partial_t^2 u_i - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u_i) + \frac{1}{r^2} L^2 u_i, \\
\text{onde } L^2 &\equiv - \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right].
\end{aligned} \tag{A.31}$$

O operador L^2 é o bem conhecido operador de momento angular. Isso nos sugere um ansatz cuja dependência angular esteja inteiramente contida em um termo proporcional aos harmônicos esféricos $Y_l^m(\theta, \phi)$, uma vez que isso nos permite calcular com facilidade o termo $L^2 u_i$, já

que $L^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m$.

A.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM COORDENADAS CURVILINEARES, CORRENTES E CARGAS CONSERVADAS

Sejam $x^\mu, \forall \mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ as coordenadas cartesianas, ξ^μ coordenadas curvilineares quaisquer e Ω um hipervolume em 3+1. A variação da ação tem a forma

$$\int_{\Omega} d^4 x (\mathcal{L}' - \mathcal{L}) = 0 \quad (\text{A.32})$$

onde $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(u + \delta u, u^\dagger + \delta u^\dagger)$ e $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u^\dagger)$. Como $d^4 x = \sqrt{-g} d^4 \xi$, podemos fazer uma mudança de variável para as coordenadas curvilineares

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} d^4 \xi \sqrt{-g} [\mathcal{L}'(u + \delta u, u^\dagger + \delta u^\dagger) - \mathcal{L}(u, u^\dagger)] \\ &= \int_{\Omega} d^4 \xi \sqrt{-g} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i^*} \delta u_i^* + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu u_i^*)} \delta (\partial_\mu u_i^*) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i} \delta u_i + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu u_i)} \delta (\partial_\mu u_i) \right] \\ &\quad \quad \quad (\equiv I_J) \\ &= \int_{\Omega} d^4 \xi \partial_\mu \left[\sqrt{-g} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu u_i^*)} \delta u_i^* + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu u_i)} \delta u_i \right) \right] \\ &\quad + \int_{\Omega} d^4 \xi \left[-\partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu u_i^*)} \right) + \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i^*} \right] \delta u_i^* \\ &\quad \quad \quad I_{M1} \\ &\quad + \int_{\Omega} d^4 \xi \left[-\partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu u_i)} \right) + \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i} \right] \delta u_i. \\ &\quad \quad \quad I_{M2} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Pelo teorema de Gauss, o termo I_J se torna uma integral na superfície $\partial\Omega$, onde $\delta u_i = \delta u_i^* = 0$ e portanto ele é nulo. Logo, a integral é nula. Como δu_i e δu_i^* são independentes, ambas integrais I_{M1} e I_{M2} são nulas. Uma vez que o hipervolume é arbitrário, o integrando deve

ser nulo, levando as equações de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu u_i)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i} = 0, \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu u_i^*)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u_i^*} = 0. \quad (\text{A.35})$$

Para reescrever \mathcal{L} em coordenadas curvilineares basta transformar suas derivadas parciais $\partial^\mu \rightarrow g^{\mu\alpha} \partial_\alpha$. A dedução da equação de movimento é análoga a vista no apêndice A.1, e recobra a mesma forma da equação (A.27).

As correntes de Noether podem ser encontradas realizando a transformação de simetria global $u_i \rightarrow e^{i\alpha_i} u_i$, onde para cada $i = 1, \dots, N$, α_i é um parâmetro contínuo. A variação leva ao resultado (A.33) onde agora δu_i não é nulo. Assumindo as equações de movimento (A.34) e (A.35), temos que $I_J = 0$ independente do hipervolume Ω . Isso implica que o integrando deve ser nulo, e portanto

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} J^\mu)}_{\text{divergente}} = 0,$$

$$\text{onde } J^\mu = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu u_i^*)} \delta u_i^* + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu u_i)} \delta u_i \right]. \quad (\text{A.36})$$

A parametrização em termos dos campos u_i fixa uma simetria global $U(N+1)$ no modelo para $SU(N) \otimes U(1)$. O subgrupo $U(1)^N$ é dado pelo conjunto de transformações

$$u_i \rightarrow e^{i\alpha_i} u_i, \quad \forall i \in 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.37})$$

Isso implica que $\delta u_i = i\alpha_i u_i$ e $\delta u_i^* = -i\alpha_i u_i^*$. Substituindo na expressão (A.40) temos

$$J^\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i J_\mu^i, \quad \text{onde } J_\mu^i \equiv -i \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu u_i^*)} u_i^* - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial^\mu u_i)} u_i \right]. \quad (\text{A.38})$$

Como α_i é arbitrário

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} J_\mu) = 0 &\Leftrightarrow \alpha_i \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} J_\mu^i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} J_\mu^i) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Logo, as correntes J_μ^i também são conservadas, e não dependem de α_i . De fato, substituindo a expressão de \mathcal{L} em (A.38)

$$J_\mu^i = -\frac{4i}{(1 + u^\dagger u)^2} \sum_{j=1}^N \left[u_i^* \Delta_{ij}^2 \partial_\mu u_j - \partial_\mu u_j^* \Delta_{ij}^2 u_i \right]. \quad (\text{A.40})$$

É importante salientar que ∂_μ na expressão de J_μ^i são derivadas em coordenadas curvilineares quaisquer em 3+1 dimensões, por exemplo, podemos ter $\mu = \{t, r, \theta, \phi\}$ se u_i for dado em coordenadas esféricas. Também podemos definir a corrente adimensional $\tilde{J}_\mu^i = M^{-3} J_\mu^i$, onde

$$\tilde{J}_\mu^i = -\frac{4i}{(1 + u^\dagger u)^2} \sum_{j=1}^N \left[u_i^* \Delta_{ij}^2 \tilde{\partial}_\mu u_j - \tilde{\partial}_\mu u_j^* \Delta_{ij}^2 u_i \right] \quad (\text{A.41})$$

e $\tilde{\partial}_\mu = r_0 \partial_\mu = M^{-1} \partial_\mu$ são derivadas em relação as coordenadas curvilineares adimensionais $\tilde{x}^\mu = r_0^{-1} x^\mu$.

APÊNDICE B – Equação puramente radial

B.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A partir do ansatz 3+1 dimensional

$$u_m(t, r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{i\omega t} \quad (\text{B.1})$$

podemos obter as equações de movimento. Para isso devemos calcular $\partial_\mu u_m$, $u^\dagger \partial_\mu u$ e $L^2 u_m$, $\forall \mu \in \{t, r, \theta, \phi\}$.

$$\begin{aligned} \partial_t u_m &= i\omega u_m, & \partial_r u_m &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f' e^{i\omega t} Y_l^m = \frac{f'}{f} u_m, \\ \partial_\phi u_m &= i m u_m, & \partial_\theta u_m &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f e^{i\omega t} \partial_\theta Y_l^m = \frac{\partial_\theta Y_l^m}{Y_l^m} u_m. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

A partir do bloco de equações (B.2) se pode calcular $u^\dagger \partial_\mu u$.

$$\bullet u^\dagger \partial_t u = i\omega u^\dagger u = i\omega f^2. \quad (\text{B.3})$$

$$\bullet u^\dagger \partial_r u = \frac{4\pi}{2l+1} f f' \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*} Y_l^m = f f'. \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \bullet u^\dagger \partial_\theta u &= \frac{4\pi}{2l+1} f^2 \sum_{m=-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m \partial_\theta P_l^m = \\ &= f^2 \sum_{m=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{1}{2} \partial_\theta (P_l^m)^2 = f^2 \partial_\theta \sum_{m=-l}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{1}{2} (P_l^m)^2 = \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} \frac{f^2}{2} \partial_\theta \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*} Y_l^m = \frac{f^2}{2} \partial_\theta 1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\bullet u^\dagger \partial_\phi u = \frac{4\pi}{2l+1} f^2 i \sum_{m=-l}^l m Y_l^{m*} Y_l^m$$

$$\begin{aligned}
&= i \frac{4\pi f^2}{2l+1} \left(\sum_{m=-l}^{-1} m Y_l^{m*} Y_l^m + \sum_{m=1}^l m Y_l^{m*} Y_l^m \right) \\
&= i \frac{4\pi f^2}{2l+1} \left(\sum_{m=1}^l (-m) Y_l^{-m*} Y_l^{-m} + \sum_{m=1}^l m Y_l^{m*} Y_l^m \right)
\end{aligned}$$

mas como $Y_l^{-m} = (-1)^m Y_l^m$, então

$$\begin{aligned}
u^\dagger \partial_\phi u &= i \frac{4\pi f^2}{2l+1} \left(- \sum_{m=1}^l (-1)^{2m} m Y_l^{m*} Y_l^m + \sum_{m=1}^l m Y_l^{m*} Y_l^m \right) \\
&= i \frac{4\pi f^2}{2l+1} \left(- \sum_{m=1}^l m Y_l^{m*} Y_l^m + \sum_{m=1}^l m Y_l^{m*} Y_l^m \right) = 0. \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

O operador do momento angular L^2 atua somente sobre os harmônicos esféricos de u_m

$$L^2 u_m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f(r) e^{i\omega t} L^2 Y_l^m(\theta, \phi). \quad (\text{B.7})$$

A atuação do L^2 sobre os harmônicos esféricos é dada pela bem conhecida relação $L^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m$. Com isso, calculamos

$$L^2 u_m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f(r) e^{i\omega t} l(l+1) Y_l^m = l(l+1) u_m. \quad (\text{B.8})$$

Como $u^\dagger u = f^2$ o termo potencial das equações de movimento

$$\begin{aligned}
P_V &\equiv \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \frac{u_m}{\sqrt{u^\dagger u}} \sqrt{1 + u^\dagger u} = \frac{4\pi}{2l+1} e^{i\omega t} Y_l^m \frac{f}{\sqrt{f^2}} \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \sqrt{1 + f^2}, \\
P_V &= \frac{4\pi}{2l+1} e^{i\omega t} Y_l^m \operatorname{sgn}(f) \frac{\mu^2}{8} \sqrt{1 + f^2}. \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

Substituindo o bloco de equações (B.2) e as equações (B.3) à (B.9) na equação de movimento (A.30) os termos $\frac{4\pi}{2l+1} e^{i\omega t} Y_l^m$ ficam em evidência em ambos os lados da equação, tornando a equação pura-

mente radial

$$f'' + \frac{2}{r}f' + \left(\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f - \frac{2f}{1+f^2} (f'^2 + \omega^2 f^2) = \frac{\tilde{\mu}^2}{8} \text{sgn}(f) \sqrt{1+f^2}, \quad (\text{B.10})$$

onde se define $\text{sgn}(f) := 1, \forall f > 1$ e $\text{sgn}(0) := 0$.

B.2 CORRENTES E CARGAS

Para calcular as componentes da corrente adimensional, precisamos obter algumas grandezas

$$\Delta_{mm'}^2 = (1 + u^\dagger u) \delta_{mm'} - u_m u_{m'}^*, \quad (\text{B.11})$$

$$\Delta_{mm'}^2 u_{m'} = (1 + u^\dagger u) u_m - u_m u^\dagger u = u_m, \quad (\text{B.12})$$

$$\Delta_{mm'}^2 (m' u_{m'}) = (1 + u^\dagger u) m u_m - u_m \underbrace{(m' u_{m'}^* u_{m'})}_{\stackrel{(\text{B.6})}{=} 0}, \quad (\text{B.13})$$

$$\Delta_{mm'}^2 (\partial_\theta u_{m'}) = (1 + u^\dagger u) \partial_\theta u_m - u_m \underbrace{(u_{m'}^* \partial_\theta u_{m'})}_{\stackrel{(\text{B.5})}{=} 0}. \quad (\text{B.14})$$

onde usamos a notação compacta em que dois ou mais índices repetidos em subscrito representam uma soma sobre todos os valores possíveis desse índice. Substituindo (B.11) à (B.14) em (A.40) obtemos

$$\begin{aligned} J_t^m &= \frac{(-4i)(i\omega)}{(1 + u^\dagger u)^2} [u_m^* \underbrace{\Delta_{mm'}^2 u_{m'}}_{u_m} + \underbrace{u_{m'}^* \Delta_{mm'}^2 u_m}_{u_m^*}] \\ &= \frac{8\omega}{(1 + f^2)^2} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} f^2 (P_l^m)^2 \\ &= 8\omega \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{f^2}{(1+f^2)^2} (P_l^m)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$J_r^m = \frac{-4i}{(1 + u^\dagger u)^2} \frac{f'}{f} [u_m^* \underbrace{\Delta_{mm'}^2 u_{m'}}_{u_m} - \underbrace{u_{m'}^* \Delta_{mm'}^2 u_m}_{u_m^*}] = 0, \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned}
J_\theta^m &= \frac{-4i}{(1+u^\dagger u)^2} [u_m^* \underbrace{\Delta_{mm'}^2}_{(1+u^\dagger u)\partial_\theta u_m} \partial_\theta u_{m'} - \underbrace{\partial_\theta u_m^*}_{(1+u^\dagger u)\partial_\theta u_m^*} \Delta_{mm'}^2 u_m] \\
&= \frac{-4i}{(1+u^\dagger u)^2} [u_m^* \partial_\theta u_m - \partial_\theta u_m^* u_m] \quad (\text{B.17}) \\
&= \frac{-4i}{(1+u^\dagger u)^2} \frac{\partial_\theta P_l^m}{P_l^m} [u_m^* u_m - u_m^* u_m] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_\phi^m &= \frac{(-4i)i}{(1+u^\dagger u)^2} [u_m^* \underbrace{\Delta_{mm'}^2}_{(1+u^\dagger u)mu_m} m' u_{m'} - \underbrace{m' u_m^*}_{(1+u^\dagger u)mu_m^*} \Delta_{mm'}^2 u_m] \\
&= \frac{4m}{1+u^\dagger u} (u_m^* u_m + u_m^* u_m) = 8m \frac{u_m^* u_m}{1+u^\dagger u} \quad (\text{B.18}) \\
&= 8m \frac{1}{1+f^2} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{2l+1}{4\pi} f^2 (P_l^m)^2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\
&= 8m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{f^2}{1+f^2} (P_l^m)^2.
\end{aligned}$$

As componentes não nulas J_t^m e J_ϕ^m dependem apenas de r e ϕ , fazendo com que o divergente seja trivialmente nulo.

$$\partial^\mu J_\mu^m = \partial^t J_t^m(r, \theta) + \underbrace{\partial^r J_r^m}_0 + \underbrace{\partial^\theta J_\theta^m}_0 + \partial^\phi J_\phi^m(r, \theta) = 0. \quad (\text{B.19})$$

É importante notar que, como $\forall m \in \{-l, \dots, l\}$, existem $2l+1$ correntes J_μ^m independentes e não nulas. Como as correntes J_μ^m não dependem do tempo t

$$\partial_t J_t^m = 0, \quad \partial_t J_\phi^m = 0 \quad (\text{B.20})$$

devem estar associadas a quantidades conservadas. Seja Ω a esfera de

raio unitário, e $x \equiv \cos \theta$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x J_t^m &= 8\omega \frac{(l-m)!}{(l+m)!} 2\pi \underbrace{\int_{-1}^1 dx (P_l^m(x))^2}_{\frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \int_0^\infty dr r^2 \frac{f^2}{(1+f^2)^2} \\
 &= \frac{32\omega}{2l+1} \pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{f^2}{(1+f^2)^2} = \frac{8\omega}{2l+1} \underbrace{4\pi}_{\int d\Omega} \int_0^\infty dr r^2 \frac{f^2}{(1+f^2)^2} \\
 &= \frac{2}{2l+1} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{4\omega f^2}{(1+f^2)^2} \tag{B.21}
 \end{aligned}$$

Como $\sum_{-l}^l 1 = 2l + 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{4\omega^2 f^2}{(1+f^2)^2} = \sum_{-l}^l \omega \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x J_t^m \tag{B.22}$$

Assim podemos fazer uma correlação entre o lado esquerdo que representa uma parte da energia (4.3) com a carga de Noether definida como

$$Q_t^m \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x J_t^m = \frac{16\pi}{2l+1} \omega \int_0^\infty dr r^2 \frac{f^2}{(1+f^2)^2}. \tag{B.23}$$

Outro termo da energia E tem a forma

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{4}{1+f^2} \left[\frac{l(l+1)}{r^2} f^2 \right]. \tag{B.24}$$

Isso sugere a expressão

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{r^2} J_\phi^m &= 8m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} 2\pi \underbrace{\int_{-1}^1 dx (P_l^m(x))^2}_{\frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{r^2} \frac{f^2}{1+f^2} \\
 &= \frac{32\pi}{2l+1} m \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{r^2} \frac{f^2}{1+f^2} = \frac{2}{2l+1} m \underbrace{4\pi}_{\int \Omega} \int_0^\infty dr r^2 \left[\frac{4}{r^2} \frac{f^2}{1+f^2} \right] \tag{B.25}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{m=-l}^l m \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{r^2} J_\phi^m = \frac{2}{2l+1} \sum_{m=-l}^l m^2 \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{4}{r^2} \frac{f^2}{1+f^2}. \quad (\text{B.26})$$

Mas $\sum_{m=-l}^l m^2 = \frac{1}{3}(2l+1)(l+1)l$, então

$$\begin{aligned} \sum_{m=-l}^l m \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{r^2} J_\phi^m &= \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{4}{1+f^2} \frac{l(l+1)}{r^2} f^2, \\ \sum_{m=-l}^l m Q_\phi^m &= \sum_{m=-l}^l m \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{r^2} J_\phi^m = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{4}{1+f^2} \frac{l(l+1)}{r^2} f^2 \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

onde definimos a quantidade conservada Q_ϕ^m

$$Q_\phi^m \equiv \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{1}{r^2} J_\phi^m = \frac{48\pi}{2l+1} m \int_0^\infty dr \frac{f^2}{1+f^2}. \quad (\text{B.28})$$

A energia total escrita em termos da integral em \mathbb{R}^3 da densidade de energia (4.4) pode ser reescrita parcialmente em termos das quantidades conservadas Q_t^m e Q_ϕ^m

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left(\frac{4f'^2}{(1+f^2)^2} + \tilde{\mu}^2 \frac{f \operatorname{sgn}(f)}{\sqrt{1+f^2}} \right) + \sum_{m=-l}^l \left(\omega Q_t^{(m)} + m Q_\phi^{(m)} \right). \quad (\text{B.29})$$