

Leandro Yoshio Morita

**CONTROLADORES DE RASTREAMENTO DE ÂNGULO DE ESTERÇO
E VELOCIDADE LONGITUDINAL DE UM VEÍCULO INCLINÁVEL DE
TRÊS RODAS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Hector Bessa Silveira, Dr.
Coorientador: Prof. Nestor Roqueiro, Dr.

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Morita, Leandro Yoshio

Controladores de Rastreamento de Ângulo de Esterço e Velocidade Longitudinal de um Veículo Inclínável de Três Rodas / Leandro Yoshio Morita ; orientador, Hector Bessa Silveira ; coorientador, Nestor Roqueiro. - Florianópolis, SC, 2016.

185 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Veículo inclínável . 3. Modelagem matemática. 4. Controle de inclinação. 5. Segurança. I. Silveira, Hector Bessa. II. Roqueiro, Nestor. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. IV. Título.

Leandro Yoshio Morita

**CONTROLADORES DE RASTREAMENTO DE ÂNGULO DE ESTERÇO
E VELOCIDADE LONGITUDINAL DE UM VEÍCULO INCLINÁVEL DE
TRÊS RODAS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “mestre em Engenharia de Automação e Sistemas”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 22 de Novembro de 2016.



Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr.
Coordenador do Curso
DAS-UFSC



Prof. Hector Bessa Silveira, Dr.
Orientador
DAS-UFSC

Banca Examinadora:



Prof. Henrique Simas, Dr.
EMC-UFSC



Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.
DAS-UFSC



Prof. Rodrigo Castelan Carlson, Dr.
DAS-UFSC

AGRADECIMENTOS

Não quero ser injusto nos agradecimentos, mas a lista é grande se esquecer de alguém peço que me desculpem.

Primeiramente a Deus pelo amparo nos momentos de dificuldades e por sempre guiar os meus passos em busca de um futuro promissor.

Ao orientador desta dissertação Prof. Dr. Hector Bessa Silveira pelo apoio e amizade disponibilizada antes mesmo do ingresso no mestrado, e com grande competência e profissionalismo orientou este trabalho.

Ao coorientador Prof. Dr. Nestor Roqueiro pela ajuda constante e por sempre estar disposto para conversas acerca do trabalho.

Aos professores membros da banca Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto, Prof. Dr. Henrique Simas e Prof. Dr. Rodrigo Carlson pelas valiosas contribuições para a melhoria deste trabalho.

Aos pais João Morita e Eliza Eiko Mizuta Morita que fizeram dos meus objetivos os seus e nunca pouparam esforços para que eu conseguisse alcançar mais esta realização.

Aos tios Pedro Takeno e Mari Matiko Mizuta por sempre estarem presentes nesta caminhada.

Aos familiares Manoel Rosado de Almeida, Eliane Almeida, Renan Rosado de Almeida, Cíntia Rosado de Almeida e Pablo Santos Guimarães pelo apoio e incentivo para a conclusão do curso.

À minha esposa Eduarda Rosado de Almeida e filho Gabriel Takeo Morita pelo amor e carinho, imprescindíveis para que eu possa seguir em frente e nunca desistir.

Aos amigos do mestrado Bryant Bruce Picon Yang e Miriam Zareth Parra Sejas pelos momentos agradáveis que partilhamos durante estes dois anos.

Agradeço aos amigos do Laboratório de Tecnologia de Informação e Comunicação (LTIC): Dayron Alvarez, Sergio Giraldo, Fabrício Saggin, Mônica Dias, Richard Andrade, Deinis Munoz, Guilherme Rosa e Edwin Calla pela receptividade e agradável convívio.

Por fim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento desta dissertação.

Nas grandes batalhas da vida, o primeiro
passo para a vitória é o desejo de vencer.
(Mahatma Gandhi).

RESUMO

Este trabalho trata o problema de controle de rastreamento do ângulo de esterço e velocidade longitudinal desejados pelo condutor de um veículo inclinável de 3 rodas, enquanto mantém o ângulo de inclinação dentro de uma margem de segurança pré-estabelecida de modo a alcançar uma condução segura e fácil em malha-fechada. A idéia principal é projetar controladores que forcem o ângulo de inclinação e a velocidade longitudinal do veículo a rastreamento trajetórias de referências adequadas, onde a trajetória de referência para o ângulo de inclinação evolui dentro de uma margem de segurança pré-estabelecida. A prática comum utilizada na literatura é determinar a estrutura do controlador com base em modelos aproximados de ordem reduzida do veículo. No presente trabalho, serão projetados controladores lineares e não-lineares para tal problema de rastreamento diretamente em um modelo de um protótipo de um veículo inclinável de 3 rodas com 9-GL (graus de liberdade). Seis diferentes metodologias são usadas: controladores PID, Regulador Quadrático Linear (LQR), realimentação linearizante, controle por modos deslizantes de Slotine, Controle Vetorial Unitário (UVC) de Utkin, e uma extensão do UVC proposta recentemente. Os resultados de simulação comparam os desempenhos destes controladores sob condições nominais, assim como sob perturbações de ventos externos e incertezas paramétricas de massa e altura do centro de massa do veículo.

Palavras-chave: Veículo inclinável; Modelagem matemática; Controle de inclinação; Segurança; Robustez; Trajetórias.

ABSTRACT

This work treats the control problem of tracking the steering angle and longitudinal velocity desired by the driver of a tilting 3-wheeled vehicle, while keeping its tilt angle within a pre-established safety margin, so as to achieve safe and easy driving in closed-loop. The key idea is to design controllers that force the tilt angle and the longitudinal velocity of the vehicle to track adequate reference trajectories, where the reference trajectory for the tilt angle evolves within a pre-established safety margin. A common practice in the literature is to determine the controller structure based upon reduced order approximate models of the vehicle. In the present work, one designs linear and nonlinear controllers for such tracking problem directly on a 9-DOF model of a prototype of a tilting 3-wheeled vehicle. Six different approaches are used: PID controllers, Linear Quadratic Regulator (LQR), feedback linearization, sliding mode control of Slotine, Unity Vector Control (UVC) of Utkin, and a recently proposed extension of UVC. The simulation results compare the performance of these controllers under nominal conditions, as well as under disturbances of the external wind and parametric uncertainties on the mass and center of mass height of the vehicle.

Keywords: Tilting vehicle; Mathematical modeling; Tilt control; Safety; Robustness; Trajectory.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Trânsito na cidade de Florianópolis-SC em um final de tarde com chuva.	35
1.2	Vista lateral do protótipo do veículos de três rodas para dois passageiros desenvolvido no Laboratório de Inovação (LI-UFSC). . .	37
1.3	Movimentos de rolagem executados por um veículo de três rodas e por uma motocicleta.	39
1.4	Orientação do ângulo de cambagem da roda do veículo quando submetida a uma carga	40
1.5	(a) Vista frontal do projeto do veículo de três rodas (LI-UFSC) ao realizar o movimento de rolagem $\phi(t)$, e (b) vista superior da roda dianteira do veículo com o ângulo de esterço $\delta(t)$ produzido. . .	41
2.1	Vista lateral(esquerda), e rotações executadas (direita) referentes ao triciclo.	49
2.2	Velocidades lineares (esquerda), e velocidades angulares (direita) referentes à roda traseira do triciclo.	50
2.3	Movimento de rolagem executado pela roda traseira (corpo 1) do triciclo.	51
2.4	Vista lateral do corpo do protótipo do veículo inclinável de três rodas. . .	52
2.5	Geometria e localização das rodas dianteiras e a roda traseira. . .	53
2.6	Relação entre as deformações nas molas da suspensão do triciclo e o ângulo θ de arfagem.	56
2.7	Vista superior da roda dianteira do protótipo do veículo inclinável de três rodas em movimento.	59
2.8	Diagrama da fórmula mágica de [1] relacionando a força transversal com o ângulo de escorregamento da roda.	60
2.9	Forças laterais nas rodas do protótipo do veículo inclinável de 3 rodas (PVI3R) que produzem o ângulo $\psi(t)$ de guinada.	62
2.10	Forças verticais nas rodas do protótipo do veículo inclinável de três rodas para produzir o movimento de rolagem (ϕ).	63
3.1	Diagrama de blocos da estratégia de controle em malha-fechada utilizada.	73
3.2	Lugar geométrico das raízes com a função de transferência $\phi(s)/\delta(s)$ para $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ com o controlador $C_2(s)$ e o filtro de referência $F_{c2}(s)$	80
3.3	Lugar geométrico das raízes com a função de transferência $\phi(s)/\delta(s)$ com $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ com o controlador $C_3(s)$ e o filtro de referência $F_{c3}(s)$	81

3.4	Evolução dos ganhos dos controladores $K_{c2}(u^*)$ e $K_{c3}(u^*)$ em função de u^* que mantém os pólos dominantes em malha fechada nos locais desejados.	83
4.1	(a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do <i>Gerador de Trajetórias</i> : (c) trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ juntamente com a velocidade desejada pelo condutor $u_d(t)$	97
4.2	(a) Referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com o controlador UVCE $\phi_e(t)$, (b) velocidade desejada pelo condutor $u_d(t)$, referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com o controlador UVCE $u_e(t)$, (c) entrada ângulo de esterço produzida pelo controlador UVCE e (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador UVCE.	99
4.3	(a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{iq}(t)$ obtida com o controlador LQR, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{iq}(t)$ obtida com o controlador LQR, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{iq}(t)$ produzida pelo controlador LQR, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador LQR, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador LQR e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador LQR.	104
4.4	(a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores PID-1 $\phi_{p1}(t)$, PID-2 $\phi_{p2}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$, e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entradas ângulos de esterço produzidas pelos controladores PID-1 $\delta_{p1}(t)$, PID-2 $\delta_{p2}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erros de inclinação obtidos pelos controladores PID-1 $e_{2p1}(t)$, PID-2 $e_{2p2}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL.	105

- 4.5 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{r1}(t)$ produzida pelo controlador RL, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador RL e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL. 106
- 4.6 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo controlador QMD, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador QMD, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador QMD e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador QMD. 107
- 4.7 Perturbações externas utilizadas nas simulações: (a) forças exercidas nas rodas do veículo pelo solo, $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ e (b) velocidade dos ventos laterais sobre o veículo $V_\omega(t)$ 108
- 4.8 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{1q}(t)$ obtida com o controlador LQR, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{1q}(t)$ obtida com o controlador LQR, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{1q}(t)$ produzida pelo controlador LQR, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador LQR, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador LQR e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador LQR. 111
- 4.9 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores PID-1 $\phi_{p1}(t)$, PID-2 $\phi_{p2}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entradas ângulo de esterço produzidas pelos controladores PID-1 $\delta_{p1}(t)$, PID-2 $\delta_{p2}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erros de inclinação obtidos pelos controladores PID-1 $e_{2p1}(t)$, PID-2 $e_{2p2}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$, (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL. 112

4.10 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{r1}(t)$ produzida pelo controlador RL, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador RL e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL. 113

4.11 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo controlador QMD, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador QMD, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador QMD e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador QMD. 114

4.12 (a) Intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, (c) detalhes da intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor para $99 \leq t \leq 104$ e (d) detalhes da intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor para $0 \leq t \leq 20$ 116

4.13 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{1q}(t)$ obtida com o controlador LQR, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{1q}(t)$ obtida com o controlador LQR, (c) intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{1q}(t)$ produzida pelo controlador LQR, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador LQR, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador LQR e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador LQR. 119

- 4.14 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores PID-1 $\phi_{p1}(t)$, PID-2 $\phi_{p2}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor e entradas ângulo de esterço produzidas pelos controladores PID-1 $\delta_{p1}(t)$, PID-2 $\delta_{p2}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erros de inclinação obtidos pelos controladores PID-1 $e_{p1}(t)$, PID-2 $e_{p2}(t)$ e PID-3 $e_{p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL. 120
- 4.15 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{r1}(t)$ produzida pelo controlador RL, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador RL e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL. 121
- 4.16 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo controlador QMD, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador QMD, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador QMD e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador QMD. . . . 122
- 4.17 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{1q}(t)$ obtida com o controlador LQR, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{1q}(t)$ obtida com o controlador LQR, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{1q}(t)$ produzida pelo controlador LQR, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador LQR, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador LQR e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador LQR. . . . 126

4.18 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores PID-1 $\phi_{p1}(t)$, PID-2 $\phi_{p2}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entradas ângulo de esterço produzidas pelo controladores PID-1 $\delta_{p1}(t)$, PID-2 $\delta_{p2}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) Entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erros de inclinação obtidos pelos controladores PID-1 $e_{2p1}(t)$, PID-2 $e_{2p2}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL. 127

4.19 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ do condutor referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{r1}(t)$ produzida pelo controlador RL, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador RL e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL. 128

4.20 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo controlador QMD, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador QMD, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador QMD e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador QMD. . . . 129

4.21 (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) Trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ 131

4.22 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$. . 133

4.23 (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ juntamente com a velocidade $u_d(t)$ desejada pelo condutor. 135

4.24 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$. . 137

4.25 (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ 139

4.26 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$. . 141

4.27 (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ juntamente com a velocidade $u_d(t)$ desejada pelo condutor. 143

4.28 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$. . 145

4.29 (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ juntamente com a velocidade $u_d(t)$ desejada pelo condutor. 146

- 4.30 (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$. . 149
- 1 Diagrama de Simulação do sistema de controle em malha fechada utilizado no Simulink. 176

LISTA DE TABELAS

2.1	Coeficientes em (2.49)--(2.50).	67
2.2	Componentes do ponto de operação (\mathbf{X}^* , \mathbf{U}^*) calculados.	67
2.3	Funções de transferências $G_{11}(s)$ obtidas a partir da linearização de (2.47) utilizando diferentes valores de velocidade longitudinal de operação u^*	69
3.1	Ganhos dos controladores $K_{c2}(u^*)$ e $K_{c3}(u^*)$ calculados para que os pólos do sistema permaneçam nos locais desejados.	82
4.1	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação sem perturbações externas e com parâmetros nominais no veículo, onde $e_1 = u - u_r$, $e_2 = \phi - \phi_r$	102
4.2	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo, onde $e_1 = u - u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$	109
4.3	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação sem perturbações externas e com parâmetros nominais do veículo utilizando um filtro de trajetórias do condutor, onde $e_1 = u - u_r$, $e_2 = \phi - \phi_r$	117
4.4	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo utilizando um filtro de trajetórias do condutor, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$	124
4.5	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação sob perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo para o Caso 1, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$	132
4.6	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo para o Caso 2, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$	136
4.7	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo para o Caso 3, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$	140
4.8	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo para o Caso 4, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$	144
4.9	Índices de desempenho obtidos pelos <i>Controladores de Rastreamento</i> em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo para o Caso 5, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$	147

SIGLAS

CET-SP Companhia de Engenharia de Tráfego de São Paulo	35
DENATRAN Departamento Nacional de Trânsito	35, 36
DTC <i>Direct Tilt Control</i>	39
PVI3R protótipo do veículo inclinável de 3 rodas	xiii, 37, 49, 54, 57, 58, 62, 64–68, 71, 75, 101
STB <i>Steer-by-Wire</i>	44
STC <i>Steering Tilt Control</i>	39, 40, 101

SÍMBOLOS

$B_1(t)$	Camada de fronteira da velocidade longitudinal	88
$B_2(t)$	Camada de fronteira do ângulo de inclinação	88
$F_1(t)$	Força externa exercida na roda traseira do veículo pelo solo xv, 61, 76, 96, 108, 115	
$F_2(t)$	Força externa exercida na roda dianteira direita do veículo pelo solo	xv, 61, 64, 76, 96, 108, 115
$F_3(t)$	Força externa exercida na roda dianteira esquerda do veículo pelo solo	xv, 61, 64, 76, 96, 108, 115
$F_x(\mathbf{t})$	Força longitudinal sobre o veículo	58
$F_y(\mathbf{t})$	Força transversal sobre o veículo	58
$F_{z1}(\mathbf{t})$	Força vertical sobre a roda traseira do veículo	58
$F_{z2}(t)$	Força vertical sobre o corpo do veículo	58
$F_{z3}(t)$	Força vertical sobre a roda dianteira direita do veículo	58
$F_{z4}(t)$	Força vertical sobre a roda dianteira esquerda do veículo	58
$M_\phi(t)$	Momento executado pelo veículo para produzir o ângulo de rolagem	58, 64
$M_\psi(t)$	Momento executado pelo veículo para produzir o ângulo de guinada	58, 61
$M_\theta(t)$	Momento executado pelo veículo para produzir o ângulo de arfagem	58, 64
$S(t)$	Vetor de superfícies de deslizamento	86, 89, 90
$T_m(t)$	Entrada torque mecânico 41, 58, 73, 78, 84, 88–90, 92, 98, 101, 117, 123, 124, 151	
$V_\omega(t)$	Velocidade dos ventos laterais sobre o veículo xv, 61, 76, 96, 108, 115	
$\delta(t)$	Entrada ângulo de esterço das rodas dianteiras do veículo 40, 41, 44, 73–75, 78, 84, 88–90, 92, 98, 101, 108, 110, 117, 123, 124, 151	

$\delta_d(t)$	Ângulo de esterço desejado pelo condutor	xiv–xxi, 44, 45, 47, 71, 73–75, 92, 95–97, 101, 104–107, 110–124, 126–149
$\delta_i(t)$	Intenção do ângulo de esterço do condutor	xvi–xviii, 115, 116, 119–122, 126–129
$\delta_{lq}(t)$	Entrada ângulo de esterço produzida pelo controlador LQR	xiv–xvii, 101, 104, 111, 119, 126
$\delta_{p1}(t)$	Entrada ângulo de esterço produzida pelo controlador PID-1	xiv, xv, xvii, xviii, 101, 105, 112, 120, 127
$\delta_{p2}(t)$	Entrada ângulo de esterço produzida pelo controlador PID-2	xiv, xv, xvii, xviii, 101, 105, 112, 120, 127
$\delta_{p3}(t)$	Entrada ângulo de esterço produzida pelo controlador PID-3	xiv, xv, xvii–xxi, 101, 105, 112, 120, 127, 131, 133, 136, 137, 140, 141, 143, 145, 147, 149
$\delta_{qm}(t)$	Entrada ângulo de esterço produzida pelo controlador QMD	xv–xxi, 101, 107, 114, 122, 129, 131, 133, 135, 137, 140, 141, 143, 145, 147, 149
$\delta_{rl}(t)$	Entrada ângulo de esterço produzida pelo controlador RL	xv–xxi, 101, 106, 113, 121, 128, 131, 133, 136, 137, 140, 141, 143, 145, 147, 149
C	Matriz de amortecimento	65
K	Matriz de rigidez	65
M	Matriz de inércia	65
$\dot{\mathbf{q}}$	Vetor de velocidades generalizadas	64
\mathbf{q}	Vetor de coordenadas generalizadas	64
P	Energia potencial do veículo	55
T	Energia cinética do veículo	55
Γ	Energia e dissipação do veículo	57
ω	Velocidade vertical do veículo	51
$\phi(t)$	Ângulo de inclinação do veículo, Ângulo de rolagem	40, 41, 44, 49, 50, 73–75, 84, 87, 90, 101

$\phi_{lq}(t)$	Ângulo de inclinação do veículo obtido com o controlador LQR	xiv–xvii, 100, 104, 111, 119, 126
$\phi_{p1}(t)$	Ângulo de inclinação do veículo obtido com o controlador PID-1	xiv, xv, xvii, xviii, 100, 105, 112, 120, 127
$\phi_{p2}(t)$	Ângulo de inclinação do veículo obtido com o controlador PID-2	xiv, xv, xvii, xviii, 100, 105, 112, 120, 127
$\phi_{p3}(t)$	Ângulo de inclinação do veículo obtido com o controlador PID-3	xiv, xv, xvii–xxi, 100, 105, 112, 120, 127, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149
$\phi_{qm}(t)$	Ângulo de inclinação do veículo obtido com o controlador QMD	xv–xxi, 100, 107, 114, 122, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149
$\phi_{rl}(t)$	Ângulo de inclinação do veículo obtido com o controlador RL	xv–xxi, 100, 106, 113, 121, 128, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149
$\phi_r(t)$	Trajetória de referência do ângulo de inclinação do veículo	xiv–xxi, 44, 47, 73–76, 84, 86, 88, 93, 95, 97–102, 104–108, 111–115, 117, 119–124, 126–129, 131–135, 137, 139, 141–143, 145–147, 149, 150
$\psi(t)$	Ângulo de guinada do veículo	xiii, 50, 62
$\theta(t)$	Ângulo de arfagem do veículo	50
c_{z1}	Coefficiente de amortecimento da roda traseira do veículo	58
c_{z2}	Coefficiente de amortecimento da roda dianteira direita do veículo	58
c_{z3}	Coefficiente de amortecimento da roda dianteira esquerda do veículo	58
$e_1(t)$	Erro de rastreamento de velocidade longitudinal	75
$e_2(t)$	Erro de rastreamento do ângulo de inclinação	75
g	Aceleração da gravidade	57
h_1	Altura do centro de gravidade da roda traseira do veículo	51
h_2	Altura do centro de gravidade do corpo principal do veículo	52,

h_3	Altura do centro de gravidade da roda dianteira direita do veículo	54
h_4	Altura do centro de gravidade da roda dianteira esquerda do veículo	54
k_{z1}	Coefficiente de rigidez da mola traseira do veículo	56
k_{z2}	Coefficiente de rigidez da mola dianteira direita do veículo	56
k_{z3}	Coefficiente de rigidez da mola dianteira esquerda do veículo	56
l	Comprimento do veículo	53
m_1	Massa da roda traseira do veículo	55
m_2	Massa do corpo principal do veículo	55, 108
m_3	Massa da roda dianteira direita do veículo	55
m_4	Massa da roda dianteira esquerda do veículo	55
$r(t)$	Vetor de trajetórias de referências	76
$s_1(t)$	Superfície de deslizamento da velocidade longitudinal	86
$s_2(t)$	Superfície de deslizamento do ângulo de inclinação	86
$u(t)$	Velocidade longitudinal do veículo	41, 42, 44, 49, 50, 73–75, 84, 87, 90, 101
$u_d(t)$	Velocidade longitudinal desejada pelo condutor	xiv–xxi, 44, 45, 47, 71, 73–75, 92, 95–97, 99, 101, 104–107, 110–124, 126–146, 148, 149
$u_i(t)$	Intenção da velocidade longitudinal do condutor	xvi–xviii, 115, 116, 119–122, 126–129
$u_{lq}(t)$	Velocidade longitudinal do veículo obtida com o controlador LQR	xiv–xvii, 100, 104, 111, 119, 126
$u_{qm}(t)$	Velocidade longitudinal do veículo obtida com o controlador QMD	xv–xxi, 100, 107, 114, 122, 129, 132, 133, 137, 140, 141, 144, 145, 147, 149
$u_{rl}(t)$	Velocidade longitudinal do veículo obtida com o controlador RL	xiv–xxi, 100, 105, 106, 112, 113, 120, 121, 127, 128, 132, 133, 137, 140, 141, 144, 145, 147, 149

$u_r(t)$	Trajetória de referência da velocidade longitudinal do veículo xiv–xxi, 44, 47, 73–76, 84, 86, 88, 93, 95, 97–101, 104–107, 109, 111–114, 117, 119–124, 126–129, 131–137, 139–147, 149	
$v(t)$	Velocidade transversal do veículo	51
$x(t)$	Movimento longitudinal do veículo	50
$y(t)$	Movimento transversal do veículo	50
$z_1(t)$	Movimento vertical da roda traseira do veículo	50
$z_2(t)$	Movimento vertical do corpo do veículo	50
$z_3(t)$	Movimento vertical da roda dianteira direita do veículo	50
$z_4(t)$	Movimento vertical da roda dianteira esquerda do veículo	50

SUMÁRIO

1	Introdução	35
1.1	Motivação do Problema Tratado	40
1.2	Estado da arte para o controle de inclinação de veículos de três e quatro rodas	42
1.3	Objetivos da Dissertação	44
1.4	Artigos científicos produzidos	46
1.5	Organização da Dissertação	46
2	Modelo Matemático do Protótipo do Veículo Inclínável de Três Rodas	49
2.1	Definições das Velocidades	49
2.2	Cálculos das Energias	55
2.2.1	Energia Cinética	55
2.2.2	Energia Potencial	55
2.2.2.1	Energia Potencial Elástica	55
2.2.2.2	Energia Potencial Gravitacional	57
2.2.3	Energia Dissipativa	57
2.3	Forças e Momentos Externos	58
2.3.1	Força na Direção Longitudinal - F_x	58
2.3.2	Força na Direção Transversal - F_y	59
2.3.3	Forças nas Direções Verticais - F_{zk}	61
2.3.4	Momento executado pelo veículo em relação ao eixo z - M_ψ	61
2.3.5	Momento executado pelo veículo em relação ao eixo x - M_ϕ	62
2.3.6	Momento executado pelo veículo em relação ao eixo y - M_θ	64
2.4	Modelo Dinâmico Não-Linear do Protótipo do Veículo Inclínável de Três Rodas	64
2.5	Modelo linearizado	67
2.6	Síntese do Capítulo	71
3	Estrutura de Controle em Malha Fechada	73
3.1	Projeto dos Controladores de Rastreamento de Trajetórias	75
3.1.1	Regulador Quadrático Linear-LQR	76
3.1.2	PID com compensação estática da não-linearidade	79
3.1.3	Realimentação Linearizante Entrada-Saída- RL	84
3.1.4	Controladores baseados em Modos Deslizantes	86
3.1.4.1	Quase Modos Deslizantes -QMD	87

3.1.4.2	Controle Vetorial Unitário-UVC	88
3.1.4.3	Controle Vetorial Unitário Estendido-EUVC	90
3.2	Síntese do Capítulo	92
4	Resultados de Simulações da Estrutura de Controle em Malha Fechada	95
4.1	Resultados de simulação sem perturbações externas e com parâmetros nominais do veículo	96
4.2	Resultados de simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo	108
4.3	Resultados de simulação sem perturbações externas e parâmetros nominais do veículo, usando um filtro de trajetórias	115
4.4	Resultados de simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo, usando um filtro de trajetórias	123
4.5	Resultados de simulação com Trajetória Circular e Senoidal realizadas pelo veículo	130
4.5.1	Estudo de Caso 1	130
4.5.2	Estudo de Caso 2	134
4.5.3	Estudo de Caso 3	138
4.5.4	Estudo de Caso 4	142
4.5.5	Estudo de Caso 5	146
4.6	Síntese do Capítulo	150
5	Conclusões	151
5.1	Sugestões de pesquisas futuras	153
	Referências Bibliográficas	155
	Apêndice 1	161
	Apêndice 2	168
	Apêndice 3	175
	Apêndice 4	176
	Apêndice 5	177
	Momentos de Inércia	177
	Matrizes do Modelo Euler-Lagrange do veículo	177
	Apêndice 6	184
	Ferramentas Auxiliares	184
	Apêndice 7	185
	Parâmetros físicos do modelo do triciclo utilizados em simulação	185

1 INTRODUÇÃO

Um problema que tem se agravado nas últimas décadas na maioria das metrópoles mundiais é o grande número de congestionamentos. Os quais apresentam como causas principais o aumento da quantidade de automóveis em circulação, pois os mesmos ocupam um espaço físico considerável nas rodovias e transportam, na maioria das vezes, um número relativamente baixo de passageiros [2,3]. Segundo estudos recentes, há cidades brasileiras que possuem em média, 2 automóveis para cada 3 habitantes, com a maior concentração nas regiões Sudeste e Sul [4]. Além disso, um levantamento realizado pelo Departamento Nacional de Trânsito (DENATRAN) mostrou que os automóveis são o meio de transporte mais utilizado na maioria das cidades brasileiras, representando cerca de 55,28 % do total de veículos [5]. A Companhia de Engenharia de Tráfego de São Paulo (CET-SP), realizou uma pesquisa na qual se comprovou, que a taxa média de ocupação em São Paulo é de 1,4 passageiro por carro [6], e este índice sobe para 1,52 para a cidade de Florianópolis [7].

Figura 1.1: Trânsito na cidade de Florianópolis-SC em um final de tarde com chuva.



Fonte: [5].

A Figura 1.1 ilustra o trânsito noturno em Florianópolis. Este cenário representa a realidade vivida diariamente pelas pessoas nes-

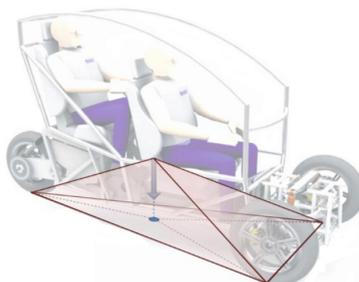
sa e em outras cidades brasileiras. Esta situação se agrava ainda mais em determinadas épocas do ano, principalmente no caso das cidades turísticas, tal como Florianópolis. Uma maior concentração de veículos em circulação pelas rodovias, causa um incremento no gasto de tempo e de combustível, aumentando por sua vez a emissão de gases poluentes na atmosfera. A grande preferência da população brasileira pela utilização de automóveis, é fortemente influenciada pela inexistência de um serviço público de transporte que atenda de maneira satisfatória a demanda dos usuários.

Em relação à utilização de transporte coletivo, a frequente superlotação devido à pequena quantidade de veículos disponíveis dificulta o uso deste meio por grande parte da população brasileira. Outro problema é o aumento gradual do preço das tarifas ao longo do tempo, se tornando inviável em muitos casos, a sua utilização por famílias com grande quantidade de membros.

A utilização da bicicleta e da motocicleta, possui a vantagem de ser mais econômica como alternativa ao automóvel. Porém, apresentam o inconveniente de dependerem das condições climáticas, dificultando bastante a sua utilização em dias frios ou chuvosos. Além disso, acidentes envolvendo motocicletas nas rodovias brasileiras aumentam todos os anos, refletindo de certa forma a insegurança deste meio de transporte, conforme apontam pesquisas realizadas pelo DENATRAN [5]. Além destes fatores, a utilização da bicicleta também depende do relevo e das condições físicas do ciclista, tornando-se pouco atrativa em trajetos de longa distância que exijam elevado esforço físico. Outro fator agravante é a insegurança dos ciclistas por terem de se locomover em meio aos veículos automotores devido à falta de investimentos em ciclovias na maioria das cidades brasileiras.

Portanto, a busca por inovações tecnológicas voltadas ao setor de transportes é de grande relevância para o cenário atual. Baseado nisso, pesquisadores vêm buscando desenvolver soluções alternativas de transporte que apresentem reduzido impacto ambiental e social. Uma das alternativas são os veículos relativamente estreitos e eficientes energeticamente, em comparação aos automóveis, dentre os quais se enquadram como uma opção promissora os triciclos [8,9]. Inicialmente, os triciclos foram projetados como veículos voltados para a prática esportiva [10], e ao longo dos anos foram aprimorados sob a perspectiva de melhorar a mobilidade urbana das pessoas.

Figura 1.2: Vista lateral do protótipo do veículos de três rodas para dois passageiros desenvolvido no Laboratório de Inovação (LI-UFSC).



Fonte: [10].

A Figura 1.2 representa a vista lateral do PVI3R, desenvolvido no Laboratório de Inovação (LI) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), o qual é tema deste trabalho. Este veículo apresenta duas rodas dianteiras e uma roda traseira, e permite o transporte do motorista e de um passageiro em série.

A escolha de duas rodas traseiras ou duas rodas dianteiras no projeto de triciclos, em geral baseia-se na teoria de pirâmide de estabilidade, conforme discutido em [11]. Esta pirâmide pode ser definida como o volume gerado entre os pontos de contato das rodas com o solo, tendo como vértice superior o centro de gravidade do veículo. A Figura 1.2 ilustra também a pirâmide de estabilidade associada ao protótipo. Nesta situação, o veículo encontra-se apoiado sobre uma superfície plana (em equilíbrio), e então a resultante das forças atuantes sobre este sistema corresponde ao peso do veículo somado ao dos passageiros (representada pelo vetor azul). Fazendo a projeção do vetor de força resultante, percebe-se que o mesmo intercepta a base da pirâmide. Assim, a teoria da pirâmide de estabilidade garante que, se essa resultante permanecer interna ao volume delimitado pela pirâmide, então o veículo irá permanecer em equilíbrio. Porém, uma situação indesejável pode ocorrer quando o veículo estiver em uma trajetória curva, caso em que o vetor de força resultante poderá estar localizado em uma região externa ao volume da pirâmide, o que resultará no tombamento do veículo.

O comportamento aerodinâmico e a estabilidade dos triciclos é diretamente influenciada pela configuração do veículo com duas rodas traseiras ou duas rodas dianteiras. Em veículos que possuem

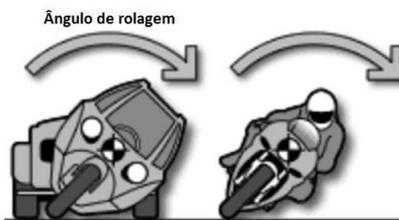
duas rodas traseiras, a parte frontal se torna crítica, visto que à medida que a força resultante no veículo se aproxima da roda dianteira, o volume da pirâmide de estabilidade se reduz. Neste caso, o centro de gravidade do veículo deve estar localizado na parte traseira do mesmo. Por outro lado, em veículos com duas rodas dianteiras, a parte traseira se torna crítica, e o centro de gravidade deve estar localizado na parte da dianteira para se obter um grau de estabilidade maior [12].

Cada projeto de triciclo, possui suas vantagens e desvantagens quanto ao desempenho do veículo. O principal fator considerado na escolha por duas rodas dianteiras no protótipo do triciclo abordado no presente trabalho, é que ao se levar em conta as forças atuantes, a força motriz é menor do que a força de frenagem, o que faz com que triciclos com duas rodas traseiras necessitem de dimensões físicas maiores em comparação aos com duas rodas dianteiras, para se garantir que a força resultante continue dentro da pirâmide de estabilidade durante uma frenagem brusca do veículo. Considerando os fatores supracitados e o desejo de um veículo de dimensões reduzidas, justifica-se a escolha de duas rodas dianteiras no protótipo mencionado.

Dentro da classe de veículos de três rodas, existem os triciclos convencionais, os quais são projetados de forma a evitar o movimento de rolagem em relação ao plano vertical e não possibilitam variações no ângulo de cambagem das rodas, permitindo ao motorista conduzi-lo de forma semelhante a um veículo de quatro rodas. Porém, veículos de três rodas possuem área da base da pirâmide de estabilidade reduzida quando comparados aos veículos de quatro rodas, havendo maiores riscos de queda durante uma curva.

Os triciclos que realizam o movimento de rolagem, o fazem de maneira semelhante ao que faz um motociclista ao realizar uma curva, conforme pode ser observado na Figura 1.3. Porém, diferentemente destes, a inclinação destes veículos de 3 rodas não será manipulada diretamente pelo condutor devido ao peso relativamente elevado que os triciclos em geral apresentam.

Figura 1.3: Movimentos de rolagem executados por um veículo de três rodas e por uma motocicleta.



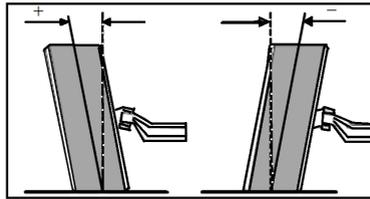
Fonte: Adaptada de [13].

Há duas tecnologias distintas utilizadas na literatura para realizar o movimento de rolagem em veículos de três rodas, os quais são conhecidos por sistema *Steering Tilt Control* (STC), que manipula o ângulo de esterço das rodas dianteiras do veículo, e o sistema *Direct Tilt Control* (DTC), o qual utiliza um atuador dedicado para produzir um torque sobre o eixo de rolagem do veículo [14, 15]. Como características principais, o sistema STC é indicado para altas velocidades, por consumir menor energia para produzir elevados valores de torque quando comparado ao sistema DTC, proporcionando assim maior conforto aos passageiros durante as curvas, principalmente. Outra vantagem do sistema STC é que este geralmente pode ser acionado por atuadores de menores dimensões quando comparado ao sistema DTC, reduzindo o peso total do veículo. Em contrapartida, o sistema STC necessita de um sistema *steer-by-wire* auxiliar, pois os comandos do condutor não estão conectados diretamente às rodas dianteiras do veículo, não sendo recomendado para baixas velocidades onde há necessidade de um controle de direção relativamente preciso. Atualmente, existem projetos de veículos que utilizam a tecnologia STC combinada com a DTC, obtendo-se assim as principais vantagens de cada uma delas para um determinada aplicação [16].

Este movimento de rolagem, que pode ser realizado através dos sistemas STC ou DTC, resultam na variação do ângulo de cambagem das rodas do veículo, que é o ângulo formado pelo plano vertical e o plano da roda, conforme é observado na Figura 1.4. A convenção usual adotada na literatura é que este ângulo assume o valor positivo quando a roda é inclinada para a esquerda, e o valor negativo quando a roda é inclinada para a direita. Quando a roda é

submetida a uma carga constante e um ângulo de cambagem, ocorrerá uma deformação desigual nos pneus, conforme a Figura 1.4, produzindo assim uma força lateral denominada força de cambagem, a qual permite que os triciclos inclináveis e motocicletas consigam realizar as trajetórias que apresentem um determinado raio de curvatura não-nulo [17].

Figura 1.4: Orientação do ângulo de cambagem da roda do veículo quando submetida a uma carga



Fonte: Adaptada de [18].

1.1 MOTIVAÇÃO DO PROBLEMA TRATADO

Nesta seção, será explicada a dificuldade técnica de condução e a insegurança no transporte de passageiros quando o protótipo do veículo inclinável de três rodas utilizado neste trabalho é controlado manualmente pelo condutor.

A Figura 1.5a ilustra a vista frontal do triciclo tema desta dissertação, ao realizar o movimento de rolagem $\phi(t)$, quando este se desloca sobre uma trajetória que apresenta um raio de curvatura não-nulo. Este movimento é obtido através da variação do ângulo de esterço $\delta(t)$ produzido pelas duas rodas dianteiras do veículo, conforme ilustra a Figura 1.5b, utilizando para isto a tecnologia STC.

Figura 1.5: (a) Vista frontal do projeto do veículo de três rodas (LI-UFSC) ao realizar o movimento de rolagem $\phi(t)$, e (b) vista superior da roda dianteira do veículo com o ângulo de esterço $\delta(t)$ produzido.



Fonte: Adaptada de [10].

Um problema entretanto, é que se este movimento de rolagem for realizado em malha-aberta, a força resultante de cambagem poderá estar localizada externamente ao volume gerado pela pirâmide de estabilidade do protótipo, fazendo com que o veículo apresente um tombamento no momento da execução deste movimento. Em outras palavras, o protótipo apresenta um comportamento semelhante a um pêndulo invertido em relação a dinâmica de $\phi(t)$, fazendo com que o veículo muito provavelmente caia quando perturbações externas inevitavelmente o tirem do seu equilíbrio na vertical, tornando a sua condução inviável de ser realizada manualmente pelo condutor. Assim, é necessário utilizar estratégias de controle automático em malha-fechada que forneçam garantias de estabilidade para o movimento de rolagem do veículo, e que permita que este seja conduzido de maneira relativamente simples e com segurança para o transporte dos passageiros.

Diferentemente de trabalhos anteriores [10, 17], neste trabalho os controladores serão projetados diretamente sobre um modelo não-linear de um triciclo inclinável que possui nove graus de liberdade (9-GL) e foi obtido a partir de uma metodologia Euler-Lagrange multicorpos [19]. O problema de controle a ser tratado é de natureza não-linear e multivariável. As duas entradas são $\delta(t)$ e $T_m(t)$, onde $\delta(t)$ é o ângulo de esterço produzido pelas rodas dianteiras, e $T_m(t)$ é o torque mecânico aplicado na roda traseira para produzir o movimento longitudinal. As duas saídas são $\phi(t)$ e $u(t)$, onde $\phi(t)$ é o ângulo de rolagem (em relação ao plano vertical), e

$u(t)$ é a velocidade longitudinal do veículo.

1.2 ESTADO DA ARTE PARA O CONTROLE DE INCLINAÇÃO DE VEÍCULOS DE TRÊS E QUATRO RODAS

Para tratar o problema de controle de inclinação de um veículo de quatro rodas, no trabalho proposto por [2] foram utilizados dois controladores PID em cascata (double-loop PID). Estes projetos foram realizados sobre um modelo linearizado do veículo, onde foi assumido como ponto de operação a inclinação zero sob uma velocidade constante. Foram obtidos resultados satisfatórios em que o veículo permaneceu estável durante variações da inclinação e mudanças de velocidade. Entretanto, os sinais de controle produzidos bem como os comandos utilizados pelo condutor não foram mostrados, e não temos idéia da dificuldade técnica de condução do veículo.

Considerando também um veículo de quatro rodas, os trabalhos [14], [20] e [21] utilizam para o projeto dos controladores uma bicicleta de 3-GL. Para isto, este modelo foi linearizando em torno do ponto de operação inclinação zero e a velocidade longitudinal do veículo é tratada como um parâmetro variante. Para a estabilização da inclinação do veículo, em [20] foi proposta uma abordagem baseada em um regulador linear quadrático (LQR), em [21] foi proposto um controlador LPV (Linear Parameter Varying) e em [14] foi utilizada a técnica de controle H_2 . Com base no modelo não-linear da bicicleta, em [22] foi projetado um controlador baseado na teoria de platitude (*flatness*). Nestes trabalhos, além da estabilização da inclinação, assegurou-se também o rastreamento de trajetórias de referência relativas à posição do veículo de quatro rodas no plano de deslocamento. No entanto, estas estratégias de controle apresentam a limitação de dependerem de um modelo interno linear para representar o comportamento do condutor, o que pode ser considerado um comportamento artificial.

Para o controle de inclinação referentes a veículos de três rodas com 3-GL, em [23] foi proposto um controlador proporcional-derivativo (PD) e em [24] foi utilizado um regulador linear quadrático (LQR). Ambos controladores foram projetados sobre modelos linearizados do veículo, considerando como ponto de operação a velocidade constante e inclinação nula. Ainda em [24] foi utilizada uma estrutura de predição com o controlador LQR para antecipar o movimento de inclinação realizado pelo veículo durante uma curva,

para reduzir o torque necessário. Nestes trabalhos foram asseguradas a estabilização do triciclo para diversas condições de operação, além de obterem significativa redução no consumo de energia. Porém, em ambas estratégias de controle, é utilizado um modelo interno para representar as intenções do condutor, comportamento este que é considerado artificial.

Para tratar o problema de controle de inclinação para veículos de três rodas com 4-GL, no trabalho [25] foi proposto um controlador LQR e em [26] foi utilizado um controlador projetado com o diagrama de bode (resposta em frequência). Estes controladores foram projetados sobre os modelos linearizados correspondentes aos veículos, considerando como ponto de operação velocidade constante e inclinação zero. Estes trabalhos apresentaram resultados onde os veículos permaneceram estáveis durante mudanças da inclinação mantendo a velocidade constante. Porém, nestas estratégias de controle, o comando ângulo de esterço utilizado pelo condutor necessita a todo instante de um mecanismo de correção, não representando portanto, uma condução dita transparente ao motorista, o que torna a condução relativamente difícil.

Para o controle de inclinação de triciclos com 6-GL, em [27] foi utilizado um controlador Proporcional- integral (PI) e [28] foi proposto um controlador PID por ganho escalonado (Gain Scheduling) dependente da velocidade longitudinal do veículo. Tais projetos foram realizados sobre os modelos linearizados dos veículos, assumindo como ponto de operação o ângulo de inclinação nulo e velocidade longitudinal constante. Já em [29] foi utilizado um controlador baseado em lógica fuzzy. O controlador proposto em [28] permitiu o veículo se manter estável a mudanças de velocidade e com poucas oscilações na inclinação, diferentemente de [27] que conseguiu estabilizar o veículo somente para velocidades baixas e [29] assumiu velocidade constante para todos os casos. Estes trabalhos no entanto, não garantem o rastreamento do ângulo de esterço e velocidade desejados pelo condutor.

Considerando o mesmo projeto do veículo inclinável de três rodas com 9-GL, os trabalhos anteriores [9, 17, 30–32], resolveram o problema de controle descrito na seção 1.3, pelo uso controladores baseados em modos deslizantes. Porém, como o modelo do veículo utilizado é de ordem elevada (9-GL), os controladores foram projetadas sobre uma dinâmica simplificada de ordem reduzida do veículo, que corresponde a um modelo de uma bicicleta (2-GL), e os ganhos do controlador para o veículo foram ajustados heurísticamente. Ainda, no trabalho [10, 32] foi feita uma comparação de

desempenho entre o controlador por modos deslizantes e um controlador PID. Tal controlador PID foi projetado com base no modelo linearizado do triciclo assumindo como ponto de operação velocidade constante e ângulo de inclinação nulo.

1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

O objetivo principal desta dissertação é projetar, para um modelo do projeto do veículo inclinável de três rodas de 9-GL, controladores que mantenham, em malha-fechada, o ângulo de esterço das rodas dianteiras $\delta(t)$ e a velocidade longitudinal $u(t)$ do veículo relativamente próximos do ângulo de esterço $\delta_d(t)$ e velocidade $u_d(t)$ desejados pelo condutor, respectivamente, ao mesmo tempo em que o ângulo $\phi(t)$ de rolagem é mantido dentro de uma margem de segurança pré-estabelecida. Isto permitirá uma condução relativamente simples e segura em malha-fechada para o transporte de passageiros. A idéia principal é que estes controladores forcem o ângulo de rolagem $\phi(t)$ e a velocidade longitudinal $u(t)$ do veículo a rastrear trajetórias adequadas de referência $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, respectivamente, onde $|\phi_r(t)|$, evolui dentro da margem pré-estabelecida de $\pi/6$ rad = 30° (graus). A geração das trajetórias, $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ é determinada por um algoritmo *Gerador de Trajetórias* que se baseia nos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor e em uma dinâmica simplificada de ordem reduzida para $\phi(t)$, dada por um modelo de 2-GL de uma bicicleta.

Ressalta-se que se trata de um sistema Steer-by-Wire (STB) ou seja, não há acoplamento mecânico entre $\delta_d(t)$ e $\delta(t)$. A estratégia de controle em malha-fechada utilizada para se resolver o problema de rastreamento descrito acima é explicada em maiores detalhes no capítulo Capítulo 3.

Diferentemente da prática comum utilizada na literatura, nas quais os controladores são projetados em modelos simplificados de ordem reduzida do veículo, propõe-se neste trabalho projetar diretamente sobre o modelo de 9-GL do protótipo:

- PID com compensação da não-linearidade estática, com base na metodologia utilizada em [17];
- Regulador linear quadrático, utilizando a abordagem via desigualdades matriciais lineares apresentada em [33];
- Controle por modos deslizantes, proposto em [34];

- Controle vetorial unitário, apresentado em [35];
- Controle vetorial unitário estendido, recentemente desenvolvida em [36];
- Realimentação linearizante, conforme [37].

note que os dois primeiros controladores correspondem a metodologias lineares e as demais são não-lineares.

Ressalta-se que o controlador PID utilizado em [17] foi projetado com base em funções de transferências identificadas numericamente através de algoritmos computacionais. No presente trabalho, mostraremos que tais funções de transferências podem ser obtidas analiticamente pela determinação do sistema linearizado associado ao modelo não-linear de 9-GL. Desse modo, propõe-se aqui uma metodologia analítica, direta e simples para se determinar essas funções de transferências de maneira exata.

Para as simulações, inicialmente serão utilizados os comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor obtidos a partir de [17]. Porém, conforme será mostrado, tais comandos apresentam variações bruscas, não correspondendo assim a um comportamento realista de um condutor. Em um segundo momento, as simulações serão refeitas com estas trajetórias suavizadas por filtros lineares de primeira ordem, a fim analisar se há melhoria de desempenho em malha-fechada dos controladores sob condições nominais (sem perturbações externas nem incertezas paramétricas) e sob as perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo.

Além disso, diferentemente de [10,17], este trabalho considerará ainda situações em que o condutor do triciclo deseja percorrer uma trajetória circular ($\delta_d(t)$ constante) e também desviar de obstáculos ($\delta_d(t)$ senoidal). Para estas situações, as simulações serão realizadas todas sob perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo, representando assim a realidade de uma condução.

As principais contribuições da presente dissertação de mestrado foram:

1. Projetar controladores lineares e não-lineares diretamente sobre o modelo completo de 9-GL do veículo;
2. Consideração de trajetórias desejadas pelo condutor mais realistas e próximas de situações práticas;
3. Projeto de controladores robustos;

4. Os esforços de controle e a dinâmica do ângulo de rolagem do veículo em malha-fechada foram cuidadosamente analisados para se avaliar, ajustar e escolher os controladores.

1.4 ARTIGOS CIENTÍFICOS PRODUZIDOS

A presente pesquisa de mestrado resultou na publicação de dois artigos técnicos em congressos:

- Morita, L. Y. and Roqueiro, N. and Silveira, H. B. ***Steering and Velocity Tracking of a Tilting Three-Wheeled Vehicle Using Sliding Mode Control***. In: IEEE-14th International Workshop on Variable Structure Systems - (VSS2016), 2016. **(O artigo encontra-se disponível no Apêndice 1);**
- Morita, L. Y. and Roqueiro, N. and Silveira, H. B. **Rastreamento de Ângulo de Esterço e Velocidade Longitudinal para um Veículo Inclinável de Três Rodas**. In: Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática (CBA-2016), 2016. **(O artigo encontra-se disponível no Apêndice 2).**

1.5 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Nesta seção, descreveremos como esta dissertação encontra-se organizada:

No Capítulo 2, o modelo matemático do protótipo do veículo inclinável de 3 rodas de 9-GL, considerado neste trabalho, é deduzido a partir de uma metodologia Euler-Lagrange multicorpos. Tal modelo será utilizado para se projetar no Seção 3.1, os controladores por realimentação linearizante, controle por modos deslizantes, controle vetorial unitário (UVC) e a versão estendida proposta recentemente para o UVC. Neste capítulo ainda, mostraremos o modelo linearizado do veículo representado em espaço de estados e funções de transferência, necessários para se projetar o controlador LQR e controladores PID respectivamente, também desenvolvidos no Seção 3.1. As funções de transferências obtidas neste trabalho de maneira analítica e direta, serão comparadas com as que foram obtidas por [17], que utilizou métodos numéricos de identificação na simulação computacional do modelo não-linear de 9-GL.

No Capítulo 3, explicamos em detalhes a estratégia de controle em malha-fechada utilizada nesta dissertação juntamente com

a solução proposta para tratar o problema descrito na seção 1.3 de rastreamento das trajetórias $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejadas pelo condutor.

No Seção 3.1, realizamos os projetos dos controladores utilizados nesta dissertação para tratar o problema de rastreamento das trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$. Para isto, são utilizadas metodologias lineares: controlador LQR com base em desigualdades matriciais lineares (LMIs), controladores PID com compensação estática da não-linearidade, e ainda metodologias não-lineares: controle por modos deslizantes, controle vetorial unitário (UVC) e a versão proposta recentemente controle vetorial unitário estendido (UVCE) e uma realimentação linearizante.

No Capítulo 4, os resultados de simulação obtidos em malha-fechada com os controladores descritos acima são mostrados e analisados. Inicialmente serão utilizados os comandos desejados pelo condutor $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ obtidos de [17]. Em um segundo momento estes comandos tais comandos do condutor serão suavizados por filtros lineares de primeira ordem, obtendo-se assim comandos resultantes mais realistas e próximos de uma situação prática. Estas simulações serão realizadas sob as condições nominais e sob perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo. Ainda nesse capítulo, serão mostrados os resultados de simulação obtidos com a estratégia de controle em malha-fechada, com os controladores por modos deslizantes, realimentação linearizante e PID. Para estes 3 controladores serão reproduzidas diversas situações em que o condutor deseja percorrer uma trajetória circular ($\delta_d(t)$ constante) e desviar de obstáculos ($\delta_d(t)$ senoidal) sob velocidade $u_d(t)$ constante. Para estas simulações, serão consideradas em todos os casos perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo.

No Capítulo 5, são realizadas as considerações finais do trabalho, além de mencionarmos algumas sugestões de pesquisas futuras.

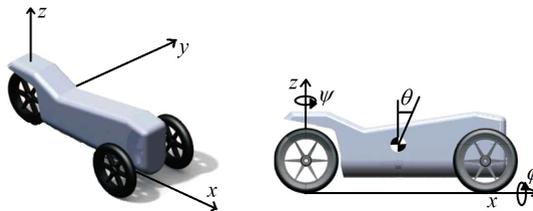
2 MODELO MATEMÁTICO DO PROTÓTIPO DO VEÍCULO INCLINÁVEL DE TRÊS RODAS

O modelo matemático do PVI3R, mencionado no Capítulo 1, foi concebido inicialmente com 6-GL em [38], posteriormente foram adicionados os movimentos verticais das rodas, resultando em um modelo completo não-linear de 9-GL que será deduzido a partir de uma metodologia Euler-Lagrange multicorpos [19] neste capítulo. A partir deste modelo, serão mostradas as dinâmicas da velocidade longitudinal $u(t)$ e do ângulo de inclinação $\phi(t)$, que serão necessárias para o projeto dos controladores não-lineares desenvolvidos no Seção 3.1. Em seguida, será apresentado o sistema linearizado em espaço de estados, e funções de transferências resultantes da linearização do modelo não-linear de 9-GL, que serão utilizados para se projetar também no Seção 3.1, um controlador LQR e controladores PID respectivamente. Ressalta-se que as funções de transferências obtidas analiticamente neste trabalho, calculadas partir do modelo linearizado do veículo, serão comparadas com as funções de transferências obtidas em [17], que por sua vez utilizou métodos numéricos de identificação na simulação computacional do modelo não-linear de 9-GL.

2.1 DEFINIÇÕES DAS VELOCIDADES

Para a modelagem do PVI3R, foram considerados quatro corpos independentes, sendo estes: a roda traseira (corpo 1), corpo principal do veículo (corpo 2), roda dianteira direita (corpo 3) e roda dianteira esquerda (corpo 4). O referencial xyz se encontra localizado no ponto de contato da roda traseira com o solo, conforme é observado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Vista lateral(esquerda), e rotações executadas (direita) referentes ao triciclo.



Fonte: Adaptada de [17].

Este modelo apresenta 9 graus de liberdade dados por: $x(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, os movimentos longitudinal e transversal, $z_1(t)$ o movimento vertical da roda traseira, $z_2(t)$ o movimento vertical do corpo principal do veículo, $z_3(t)$ e $z_4(t)$ são, respectivamente, os movimentos verticais das rodas dianteiras direita e esquerda, $\psi(t)$, $\phi(t)$ e $\theta(t)$ são os ângulos de guinada, rolagem e arfagem, respectivamente, os quais são mostrados na Figura 2.1.

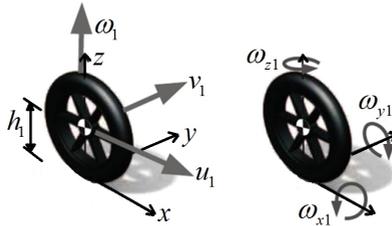
Neste trabalho, assumimos que o ângulo de inclinação do veículo corresponde ao ângulo de rolagem $\phi(t)$ e a velocidade longitudinal é $u(t) = \dot{x}(t)$.

Neste momento, serão definidas as velocidades para os quatro corpos associados ao veículo. Considere a Figura 2.2, que mostra a roda traseira do veículo com os respectivos vetores velocidade. As velocidades angulares ω_{x1} , ω_{y1} e ω_{z1} , são dadas por:

$$\omega_{x1}(t) = \dot{\phi}(t), \quad \omega_{y1}(t) = \dot{\alpha}(t), \quad \omega_{z1}(t) = \dot{\psi}(t), \quad (2.1)$$

que correspondem às velocidades de rotação em relação aos eixos x , y e z , respectivamente, e α representa os acíves/declives da pista.

Figura 2.2: Velocidades lineares (esquerda), e velocidades angulares (direita) referentes à roda traseira do triciclo.



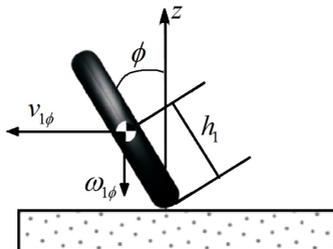
Fonte: Adaptada de [17].

Para a obtenção de u_1 a velocidade longitudinal, v_1 a velocidade lateral e ω_1 a velocidade vertical, é necessário analisar a influência dos movimentos de rotações neste corpo. Para isto considere o movimento de rolagem executado pela roda traseira, o qual é mostrado na Figura 2.3. Pela figura, observa-se que durante este movimento são geradas as componentes $v_{1\phi}$ e $\omega_{1\phi}$, as quais estão projetadas nas direções dos eixos x e z respectivamente. Assim, utilizando relações trigonométricas, é possível deduzir que:

$$v_{1\phi} = -h_1 \dot{\phi}(t) \cos(\phi(t)), \quad \omega_{1\phi} = -h_1 \dot{\phi}(t) \sin(\phi(t)), \quad (2.2)$$

onde h_1 é a altura do centro de gravidade da roda traseira. O sinal negativo em (2.2) indica que estes vetores estão orientadas em sentido contrário ao referencial adotado.

Figura 2.3: Movimento de rolagem executado pela roda traseira (corpo 1) do triciclo.



Fonte: Adaptada de [30].

Há também, conforme [30], as componentes de velocidade produzidas devido aos aclives/declives (α) da pista, projetadas nas direções x e z , respectivamente, as quais são dadas por:

$$u_{1\alpha} = h_1 \dot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)), \quad \omega_{1\alpha} = -h_1 \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)), \quad (2.3)$$

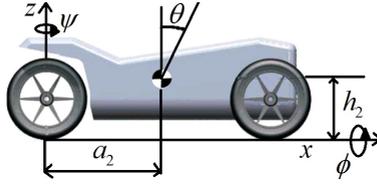
conforme discutido em [30], o movimento de guinada executado pela roda traseira não influencia as componentes de velocidade u_1 , v_1 e ω_1 , devido ao centro de gravidade deste corpo estar localizado sobre o eixo z . Assim, a partir de (2.1), (2.2) e (2.3) as velocidades da roda traseira (corpo 1) do veículo, são dadas por:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u(t) + h_1 \dot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)), \\ v_1(t) &= v(t) - h_1 \dot{\phi}(t) \cos(\phi(t)), \\ \omega_1(t) &= \omega(t) - h_1 \dot{\phi}(t) \sin(\phi(t)) - h_1 \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)), \\ \omega_{x1}(t) &= \dot{\phi}(t), \quad \omega_{y1}(t) = \dot{\alpha}(t), \quad \omega_{z1}(t) = \dot{\psi}(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde u , $v(t)$ e ω são, respectivamente, as velocidades longitudinal, transversal e vertical do corpo principal do veículo.

A mesma idéia é utilizada para obter as velocidades do corpo principal do veículo (corpo dois), que é representado em sua vista lateral através da Figura 2.4,

Figura 2.4: Vista lateral do corpo do protótipo do veículo inclinável de três rodas.



Fonte: Adaptada de [30].

A partir dela, é possível obter as velocidades angulares ω_{x2} , ω_{y2} e ω_{z2} , referentes a este corpo, dadas por:

$$\omega_{x2}(t) = \dot{\phi}(t), \quad \omega_{y2}(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{\theta}(t), \quad \omega_{z2}(t) = \dot{\psi}(t), \quad (2.5)$$

onde ω_{x2} , ω_{y2} e ω_{z2} correspondem às velocidades de rotação em relação aos eixos x , y e z , respectivamente.

A velocidade longitudinal u_2 , velocidade lateral v_2 e a velocidade vertical ω_2 do corpo do veículo, são deduzidas a partir dos movimentos de rotações executadas pelo corpo. Considerando um movimento de guinada, conforme [30], há a produção da velocidade $v_{2\psi}$, que é dada por

$$v_{2\psi} = a_2 \dot{\psi}(t), \quad (2.6)$$

onde a_2 é o comprimento do centro de gravidade da roda traseira ao centro de gravidade do veículo.

Quando o corpo do veículo executa o movimento de rolagem e também devido aos aclives presentes da pista α , torna-se possível a partir de trigonometria, obter as seguintes velocidades:

$$\begin{aligned} v_{2\phi} &= -h_2 \dot{\phi}(t) \cos(\phi(t)), & \omega_{2\phi} &= -h_2 \dot{\phi}(t) \sin(\phi(t)), \\ u_{2\alpha} &= \left(\sqrt{h_2^2 + a_2^2} \right) \dot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)), \\ \omega_{2\alpha} &= - \left(\sqrt{h_2^2 + a_2^2} \right) \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde h_2 é a altura do centro de gravidade do corpo principal do veículo.

Temos então, a partir de (2.5), (2.6) e (2.7) as seguintes velocidades para o corpo do veículo (corpo 2):

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u(t) + \left(\sqrt{h_2^2 + a_2^2}\right) \dot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)), \\ v_2(t) &= v(t) + a_2 \dot{\psi}(t) - h_2 \dot{\phi}(t) \cos(\phi(t)), \\ \omega_2(t) &= \omega(t) - \left(\sqrt{h_2^2 + a_2^2}\right) \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)) - h_2 \dot{\phi}(t) \sin(\phi(t)), \\ \omega_{x2}(t) &= \dot{\phi}(t), \quad \omega_{y2}(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{\theta}(t), \quad \omega_{z2}(t) = \dot{\psi}(t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

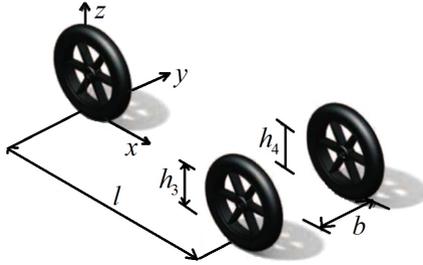
Note que, se tivermos, $\alpha \equiv 0$ (não há aclives ou declives na pista) então a velocidade longitudinal do veículo é considerada como sendo a do corpo 2, isto é, $u \equiv u_2$.

Para o cálculo das velocidades relacionadas ao corpo 3 e 4 (rodas dianteiras direita e esquerda, respectivamente), considere a Figura 2.5, que mostra a localização das rodas com exceção do corpo do veículo. As velocidades angulares para a roda dianteira direita são:

$$\omega_{x3}(t) = \dot{\phi}(t), \quad \omega_{y3}(t) = \dot{\alpha}(t), \quad \omega_{z3}(t) = \dot{\psi}(t), \quad (2.9)$$

onde ω_{x3} , ω_{y3} e ω_{z3} representam as velocidades de rotações da roda dianteira direita em relação aos eixos x , y e z , respectivamente.

Figura 2.5: Geometria e localização das rodas dianteiras e a roda traseira.



Fonte: Adaptada de [30].

Para determinar as demais velocidades, considere que em um movimento de guinada, há a produção das seguintes velocidades:

$$u_{3\psi} = b\dot{\psi}(t), \quad v_{3\psi} = l\dot{\psi}(t), \quad (2.10)$$

onde b e l representam parâmetros relacionados à geometria do veículo, como pode ser observado na Figura 2.5. Além disso, há as

velocidades produzidas devido aos movimentos de rolagem e acli-
ves/declives da pista, as quais são dadas por

$$\begin{aligned}
 v_{3\phi} &= -h_3\dot{\phi}(t) \cos(\phi(t)), & \omega_{3\phi} &= -h_3\dot{\phi}(t) \sin(\phi(t)), \\
 u_{3\alpha} &= \left(\sqrt{h_3^2 + l^2}\right) \dot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)), \\
 \omega_{3\alpha} &= -\left(\sqrt{h_3^2 + l^2}\right) \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)),
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Assim, temos que, utilizando (2.9), (2.10) e (2.11), podemos obter as velocidades relacionadas ao corpo 3 (roda dianteira direita), as quais são dadas por:

$$\begin{aligned}
 u_3(t) &= u(t) + b\dot{\psi}(t) + \left(\sqrt{h_3^2 + l^2}\right) \dot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)), \\
 v_3(t) &= v(t) + l\dot{\psi}(t) - h_3\dot{\phi}(t) \cos(\phi(t)), \\
 \omega_3(t) &= \omega(t) - h_3\dot{\phi}(t) \sin(\phi(t)) - \left(\sqrt{h_3^2 + l^2}\right) \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)), \\
 \omega_{x3}(t) &= \dot{\phi}(t), \quad \omega_{y3}(t) = \dot{\alpha}(t), \quad \omega_{z3}(t) = \dot{\psi}(t),
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde u_3 é a velocidade longitudinal, v_3 a velocidade lateral e ω_3 a velocidade vertical referentes à roda dianteira direita e h_3 é a altura do seu centro de gravidade.

Devido à localização simétrica das rodas dianteiras do veículo, é possível também considerar como em [30] que as velocidades referentes à roda dianteira direita de (2.12) podem ser estendidas para a roda dianteira esquerda:

$$\begin{aligned}
 u_4(t) &= u(t) - b\dot{\psi}(t) + \left(\sqrt{h_4^2 + l^2}\right) \dot{\alpha}(t) \cos(\alpha(t)), \\
 v_4(t) &= v(t) + l\dot{\psi}(t) - h_4\dot{\phi}(t) \cos(\phi(t)), \\
 \omega_4(t) &= \omega(t) - h_4\dot{\phi}(t) \sin(\phi(t)) - \left(\sqrt{h_4^2 + l^2}\right) \dot{\alpha}(t) \sin(\alpha(t)), \\
 \omega_{x4}(t) &= \dot{\phi}(t), \quad \omega_{y4}(t) = \dot{\alpha}(t), \quad \omega_{z4}(t) = \dot{\psi}(t),
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde u_4 é a velocidade longitudinal, v_4 a velocidade lateral e ω_4 a velocidade vertical para a roda dianteira esquerda e h_4 é a altura do seu centro de gravidade.

Definidas as velocidade referentes aos quatro corpos associados ao veículo, na sequência serão mostrados os cálculos das energias cinética, potencial e de dissipação, referentes ao modelo de 9-GL PVI3R.

2.2 CÁLCULOS DAS ENERGIAS

Nesta seção, mostraremos os cálculos das energias cinética, potencial e de dissipação. Estas serão necessárias para se utilizar a metodologia Euler-Lagrange multicorpos para a obtenção do modelo matemático não-linear de 9-GL do triciclo.

2.2.1 Energia Cinética

A energia cinética T é calculada a partir das velocidades mostradas em (2.4), (2.8), (2.12) e (2.13) relacionadas aos quatro corpos do veículo, conforme [30] é determinada por:

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 m_k (u_k^2(t) + v_k^2(t) + \omega_k^2(t)) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [(I_x \omega_x^2(t))_k + (I_y \omega_y^2(t))_k + (I_z \omega_z^2(t))_k] \\
 & - \sum_{k=1}^4 [(I_{xy} \omega_x(t) \omega_y(t))_k + (I_{xz} \omega_x(t) \omega_z(t))_k + (I_{yz} \omega_y(t) \omega_z(t))_k],
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde m_1, m_2, m_3 e m_4 correspondem às massas de cada corpo do veículo e I_k é o momento de inércia relacionados ao k -ésimo corpo com ($k = 1, 2, 3$ e 4). O cálculo destes momentos de inércia é mostrado no Apêndice 5.

2.2.2 Energia Potencial

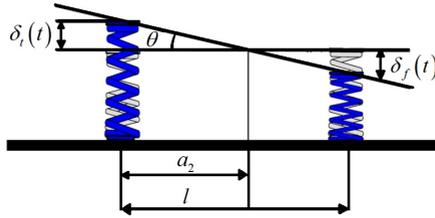
Neste modelo, assume-se que a energia potencial elástica P é produzida pelas deformações causadas nas molas de suspensão do veículo e nos pneus devido à elasticidade. Além destas, há também a energia potencial gravitacional produzida pelo corpo principal do veículo.

2.2.2.1 Energia Potencial Elástica

Para este cálculo, considere a Figura 2.6, que mostra as deformações nas molas traseira δ_t e dianteiras δ_f da suspensão do triciclo. Isto ocorre devido à transferência de carga entre os eixos dianteiro e traseiro. Pela figura, é possível relacionar o ângulo $\theta(t)$ de arfagem com as deformações δ_t e δ_f , sendo dadas por:

$$\tan(\theta(t)) = \frac{\delta_t(t)}{a_2} = \frac{-\delta_f(t)}{(l - a_2)}, \tag{2.15}$$

Figura 2.6: Relação entre as deformações nas molas da suspensão do triciclo e o ângulo θ de arfagem.



Fonte: Adaptada de [30].

Assumindo que para um ângulo θ suficientemente pequeno, é válido considerar que $\tan(\theta(t)) \approx \theta(t)$, obtendo assim a partir de (2.15), que

$$\theta(t) = \frac{\delta_t(t)}{a_2} = \frac{-\delta_f(t)}{(l - a_2)}, \quad (2.16)$$

Desta forma, conclui-se a partir de (2.16) que:

$$\delta_t(t) = \theta(t)a_2, \quad \delta_f(t) = -\theta(t)(l - a_2), \quad (2.17)$$

Assim, conforme [30], a energia potencial elástica devido às deformações nas molas da suspensão do veículo, é calculada por:

$$\begin{aligned} V_s = & \frac{1}{2} \left[k_{z1} (z_2(t) - z_1(t) + \delta_t)^2 + k_{z2} (z_2(t) - z_3(t) + \delta_f)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[k_{z3} (z_2(t) - z_4(t) + \delta_f)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde k_{z1} , k_{z2} e k_{z3} são as constantes de rigidez das molas.

Com base em [30], temos que a energia potencial elástica produzida pela deformação causada pelo solo nos pneus devido à elasticidade, é dada por:

$$V_p = \frac{1}{2} k_p \left[\delta_{p1}^2(t) + \delta_{p3}^2(t) + \delta_{p4}^2(t) \right], \quad (2.19)$$

onde o parâmetro k_p é a constante de rigidez dos pneus e δ_{pi} para $i = 1,3,4$ são as deformações causadas nos pneus devido à interação com o solo.

2.2.2.2 Energia Potencial Gravitacional

Assumindo que não há resistência ao movimento de rolagem do veículo, este se desloca angularmente em relação ao solo apresentando comportamento semelhante a um pêndulo invertido. Portanto, a energia potencial gravitacional devido a este fenômeno é:

$$V_m = m_2 g (h_2 + z_2(t)) \cos(\alpha(t)) \cos(\phi(t)), \quad (2.20)$$

onde m_2 é a massa do corpo do veículo e g é a aceleração da gravidade.

Assim, a energia potencial total P do modelo do protótipo do veículo inclinável de três rodas com 9-GL, é a soma das expressões (2.18), (2.19) e (2.20):

$$P = V_s + V_p + V_m, \quad (2.21)$$

2.2.3 Energia Dissipativa

O cálculo da energia de dissipação Γ , foi baseada na definição da função de Rayleigh em [39]. Esta dissipação ocorre principalmente devido ao atrito presente nos amortecedores do triciclo. Considerando que, esta dissipação é proporcional à velocidade, pode-se obter a dissipação no amortecedor da roda traseira dada por:

$$(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_1(t)) + a_2 \dot{\theta}(t), \quad (2.22)$$

A dissipação produzida no amortecedor da roda dianteira direita é

$$(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_3(t)) + (l - a_2) \dot{\theta}(t) + b \dot{\phi}(t), \quad (2.23)$$

e a dissipação da energia no amortecedor da roda dianteira esquerda, dada por

$$(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_4(t)) + (l - a_2) \dot{\theta}(t) + b \dot{\phi}(t), \quad (2.24)$$

Assim, a partir de (2.22), (2.23) e (2.24), a energia de dissipação de Rayleigh do modelo de 9-GL do PVI3R, é dada por:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{2} c_{z1} \left[(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_1(t))^2 + (a_2 \dot{\theta}(t))^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} c_{z2} \left[(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_3(t))^2 + ((l - a_2) \dot{\theta}(t))^2 + (b \dot{\phi}(t))^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} c_{z3} \left[(\dot{z}_2(t) - \dot{z}_4(t))^2 + ((l - a_2) \dot{\theta}(t))^2 + (b \dot{\phi}(t))^2 \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde os parâmetros constantes c_{z1} , c_{z2} e c_{z3} são os coeficientes de amortecimento das molas do veículo.

Definidas as energias, na seção seguinte serão deduzidas as forças generalizadas referentes ao modelo Euler-Lagrange do PVI3R.

2.3 FORÇAS E MOMENTOS EXTERNOS

Nesta seção, serão apresentadas as forças e momentos externos que atuam sobre o modelo de 9-GL do PVI3R, onde $F_x(t)$ e $F_y(t)$ são as forças na direção longitudinal e transversal respectivamente, $F_{z1}(t)$, $F_{z2}(t)$, $F_{z3}(t)$ e $F_{z4}(t)$ são as forças exercidas nas rodas do veículo devido ao contato com o solo e $M_\psi(t)$, $M_\phi(t)$ e $M_\theta(t)$ são os momentos responsáveis pelas rotações do veículo.

2.3.1 Força na Direção Longitudinal - F_x

A força máxima de tração aplicada na roda traseira do veículo é determinada por:

$$F_T(t) = \frac{2\eta\eta_T}{d} T_m(t), \quad (2.26)$$

onde η , η_T são a taxa e a eficiência de transmissão respectivamente, d é o diâmetro da roda e $T_m(t)$ é a entrada torque aplicada na roda traseira.

A resistência aerodinâmica R_A foi modelada conforme apresentado em [40], dada por:

$$R_A(t) = \frac{C_x A \rho}{2} u^2(t), \quad (2.27)$$

onde C_x é o coeficiente aerodinâmico, A é o valor da área frontal do veículo e ρ a massa específica do ar.

A resistência ao rolamento dos pneus na pista é

$$R_R(t) = f_r(N_1 + N_3 + N_4), \quad (2.28)$$

onde N_1 , N_3 e N_4 as forças normais exercidas nas rodas do veículo pelo solo, f_r é o coeficiente de resistência de rolamento, o qual deve ser determinado experimentalmente. Considera-se em [11], $f_r = 0,01$ como uma boa aproximação para este parâmetro.

A força que atua na direção longitudinal do movimento do veículo, é a soma de (2.26), (2.27) e (2.28). Além destas há a resistência devido ao aclave/declive da pista α e a força F_{br} de frenagem

conforme [41], então F_x é dada por:

$$F_x(t) = F_T(t) - R_A(t) - R_R(t) - m_2 g \sin(\alpha(t)) - F_{br}(t), \quad (2.29)$$

2.3.2 Força na Direção Transversal - F_y

Para a dedução desta componente, considere a Figura 2.7, que mostra a vista superior da roda dianteira com o vetor velocidade transversal $\vec{v}(t)$ no momento em que o veículo se encontra em movimento. Há três ângulos: o ângulo de esterço produzido pelas rodas dianteiras do veículo $\delta(t)$, o ângulo $\theta_{vd}(t)$ formado pelo vetor velocidade v e o plano xz , e o escorregamento da roda dianteira $\alpha_d(t)$, as quais encontram-se relacionadas por

$$\alpha_d(t) = \delta(t) - \theta_{vd}(t), \quad (2.30)$$

Figura 2.7: Vista superior da roda dianteira do protótipo do veículo inclinável de três rodas em movimento.



Fonte: Adaptada de [17].

Considerando que o ângulo de esterço da roda traseira do veículo é nulo, de maneira similar à (2.30), é possível obter o escorregamento α_t para a roda traseira

$$\alpha_t(t) = -\theta_{vt}(t), \quad (2.31)$$

Em [1], foi deduzido que

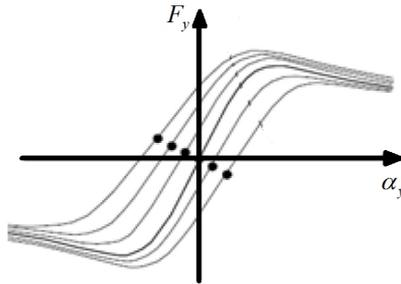
$$\begin{aligned} \alpha_d(t) &= \delta(t) - \frac{(v(t) + l_d) \dot{\psi}(t)}{u(t)}, \\ \alpha_t(t) &= -\frac{(v(t) - l_t) \dot{\psi}(t)}{u(t)}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde l_d e l_t são as distâncias longitudinais dos eixos dianteiros e traseiros ao centro de gravidade do veículo, respectivamente.

Para se obter uma relação entre os ângulos de escorregamentos das rodas do veículo em (2.32) com a força transversal F_y , será

utilizado o diagrama mostrado na Figura 2.8. Percebe-se que F_y apresenta um comportamento linear para pequenos ângulos de escorregamento α_y , sendo possível então adotar $F_y \approx C_\alpha \alpha_y$, onde C_α é um parâmetro constante que representa o coeficiente angular da reta.

Figura 2.8: Diagrama da fórmula mágica de [1] relacionando a força transversal com o ângulo de escorregamento da roda.



Fonte: Adaptada de [1].

Desta forma, considerando pequenos ângulos de escorregamento em (2.32), é possível obter a força transversal para a roda dianteira do veículo

$$F_{y\alpha d}(t) = C_\alpha \left(\delta(t) - \frac{\left(v(t) + \frac{l}{2} \right) \dot{\psi}(t)}{u(t)} \right), \quad (2.33)$$

e a força transversal para a roda traseira

$$F_{y\alpha t}(t) = -C_\alpha \left(\frac{\left(-v(t) + \frac{l}{2} \right) \dot{\psi}(t)}{u(t)} \right), \quad (2.34)$$

onde l representa a medida do comprimento do triciclo.

Tal como considerado em [41], há a força externa $F_{V\omega}$ exer-

cida pelos ventos laterais sobre o veículo, dada por

$$F_{V\omega}(t) = \frac{1}{2}\rho C_{xt} A_t V\omega^2(t) \text{sign}^1(V\omega(t)) \cos(\phi(t)), \quad (2.35)$$

onde C_{xt} é o coeficiente de arrasto transversal, A_t a área transversal do veículo e $V\omega(t)$ é a velocidade dos ventos. Então, a força $F_y(t)$ que atua na direção transversal do movimento do triciclo é dada pela soma de (2.33), (2.34) e (2.35), obtemos assim:

$$F_y(t) = 2F_{y\alpha d}(t) + F_{y\alpha t}(t) + F_{V\omega}(t), \quad (2.36)$$

2.3.3 Forças nas Direções Verticais - F_{zk}

As forças externas $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ agem nas rodas do veículo devido à interação direta com o solo. Estas forças são responsáveis por produzirem os deslocamentos verticais nas rodas. Observe que devido ao corpo principal do veículo (corpo 2) não apresentar contato com o solo, a componente F_{z2} é nula. Assim, as forças $F_{z1}(t)$, $F_{z3}(t)$ e $F_{z4}(t)$ são dadas por

$$\begin{aligned} F_{z1}(t) &= F_1(t), \\ F_{z2}(t) &= 0, \\ F_{z3}(t) &= F_2(t), \\ F_{z4}(t) &= F_3(t), \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ressaltamos que as forças $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ variam de acordo com as características da pista pela qual o triciclo se desloca.

2.3.4 Momento executado pelo veículo em relação ao eixo z - M_ψ

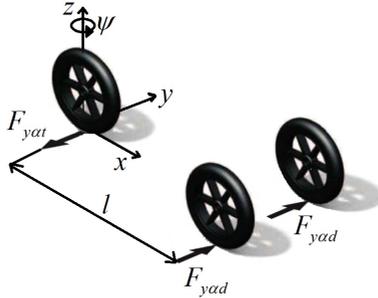
Este é o momento que produz o ângulo de guinada do veículo. Para este cálculo, considere a Figura 2.9 que mostra $F_{y\alpha t}$ em (2.34) aplicada sobre a roda traseira e $F_{y\alpha d}$ em (2.33) aplicada sobre as rodas dianteiras. Estas forças localizadas a uma distância $l/2$ ao centro de gravidade do veículo, irão produzir momentos resultantes orientados para o mesmo sentido de rotação (sentido anti-horário). Assim, o momento resultante $M_\psi(t)$ é dado por

$$M_\psi(t) = 2F_{y\alpha d}(t) \left(\frac{l}{2}\right) + F_{y\alpha t}(t) \left(\frac{l}{2}\right), \quad (2.38)$$

¹ $\text{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ 1 & \text{para } x > 0 \end{cases}$

Note que neste caso, o triciclo gira em torno de seu centro de gravidade. Já o momento produzido pela força dos ventos laterais $F_{V\omega}$ em (2.35) será desconsiderado conforme [30], pois este depende da geometria lateral do veículo, o que é desconhecido.

Figura 2.9: Forças laterais nas rodas do PVI3R que produzem o ângulo $\psi(t)$ de guinada.

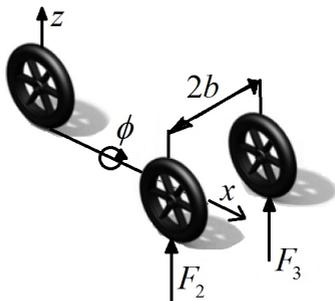


Fonte: Adaptada de [30].

2.3.5 Momento executado pelo veículo em relação ao eixo x - M_ϕ

Este momento produz o ângulo de rolagem do triciclo. Neste cálculo, considere que quando o veículo executa a rolagem, devido à suspensão existente nas rodas dianteiras ser do tipo A de braços paralelos, não há transferência de carga entre as duas rodas dianteiras. Desta forma, o eixo de giro do veículo corresponde à altura do centro de gravidade h_2 do corpo principal do veículo em relação ao solo, conforme mostra a Figura 2.10.

Figura 2.10: Forças verticais nas rodas do protótipo do veículo inclinável de três rodas para produzir o movimento de rolagem (ϕ).



Fonte: Adaptada de [30].

A força F_c de inércia atuando sobre o veículo em uma dada trajetória curvilínea segundo [41], é dada por

$$F_c(t) = m\dot{\psi}^2(t)R, \quad (2.39)$$

onde m é a massa do veículo e R o raio de curvatura da trajetória. Assumindo pequenos ângulos de escorregamento, é razoável considerar que:

$$\dot{\psi}(t) = Ru(t), \quad R = \frac{l}{\delta(t)}, \quad (2.40)$$

Substituindo (2.40) em (2.39), obtém-se:

$$F_c(t) = m \left(u(t) \frac{l}{\delta(t)} \right)^2 \left(\frac{\delta(t)}{l} \right), \quad (2.41)$$

Reescrevendo a expressão (2.41), chega-se a:

$$F_c(t) = m \left(\frac{u^2(t)\delta(t)}{l} \right), \quad (2.42)$$

Considerando a projeção da força F_c (2.39), normal ao plano da roda, e multiplicando pela altura do centro de gravidade h_2 , resulta na seguinte expressão para o momento M_{F_c} produzido pela força de inércia

$$M_{F_c}(t) = F_c(t) \cos(\phi(t))h_2, \quad (2.43)$$

onde F_c é dada em (2.42).

O momento exercido pelos ventos laterais será aproximado, pois este atua no centro de pressão do veículo, o qual depende da sua geometria. Assumindo como ponto de aplicação desta força o centro de gravidade h_2 , o momento dos ventos laterais em (2.35) é

$$M_{F_V}(t) = F_{V\omega}(t)h_2, \quad (2.44)$$

O momento resultante é dado pela soma de (2.43), (2.44) e, considera-se também, conforme [30] o momento produzido pelas forças externas $F_2(t)$ e $F_3(t)$ exercidas pelo solo nas rodas dianteiras do veículo, sendo então $M_\phi(t)$ dado por

$$M_\phi(t) = M_{F_c}(t) + M_{F_V}(t) + b(F_2(t) - F_3(t)), \quad (2.45)$$

2.3.6 Momento executado pelo veículo em relação ao eixo y - M_θ

Este é o momento que produz o ângulo de arfagem do triciclo, sendo obtido a partir dos momentos produzidos pela força F_{br} de frenagem e a força F_T de tração em (2.26) ambas aplicadas a uma distância h_2 , produzindo assim um momento resultante $M_\theta(t)$, dado por

$$M_\theta(t) = F_{br}(t)h_2 - F_T(t)h_2, \quad (2.46)$$

2.4 MODELO DINÂMICO NÃO-LINEAR DO PROTÓTIPO DO VEÍCULO INCLINÁVEL DE TRÊS RODAS

Baseado na metodologia Euler-Lagrange multicorpos [19], o modelo dinâmico não-linear do PVI3R com 9-GL, é representado através de

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} - \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)], \quad (2.47)$$

onde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \psi \\ \phi \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

são os vetores de coordenadas e velocidades generalizadas respectivamente, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = (m_{ij}(\mathbf{q})) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ é a matriz de inércia (simétrica e positiva definida $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^9$), $\mathbf{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ (constante e independe de \mathbf{q}) e $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = (k_{ij}(\mathbf{q})) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ são as matrizes de amortecimentos e rigidez, respectivamente. Os elementos m_{ij} , c_{ij} e k_{ij} ($1 \geq i, j \leq 9$) das matrizes $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, \mathbf{C} e $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ são dados respectivamente por:

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i \partial \dot{\mathbf{q}}_j}, \quad k_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i \partial \dot{\mathbf{q}}_j}, \quad c_{ij} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mathbf{q}_i \partial \mathbf{q}_j}, \quad (2.48)$$

onde T , P e Γ são como em (2.14), (2.21) e (2.25), respectivamente. Todos estes elementos foram calculados e, por conveniência, são mostrados no Apêndice 5. Por fim, o vetor de excitações \mathbf{F} , composto dos termos (2.29), (2.36), (2.37), (2.38), (2.45) e (2.46), dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_{z_1} \\ F_{z_2} \\ F_{z_3} \\ F_{z_4} \\ M_\psi \\ M_\phi \\ M_\theta \end{bmatrix},$$

A partir de (2.47), é possível mostrar que as dinâmicas não-lineares da velocidade longitudinal $u = \dot{x}$ e do ângulo de inclinação ϕ do PVI3R, são descritas por

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f_1(u(t)) + k_{21}T_m(t), \\ \ddot{\phi}(t) &= f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + d_2(\phi(t), t) + g_2(u(t), \phi(t))\delta(t), \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde as funções f_1 , f_2 , d_2 e g_2 são definidas por:

$$\begin{aligned}
 f_1(u) &= -k_{19} - k_{20}u^2, \\
 f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{\text{sen}(\phi)}{\kappa(\phi)} \left[k_1 \dot{z}_1 + k_2 \dot{z}_2 + k_3 (\dot{z}_3 + \dot{z}_4) + k_4 \theta + k_5 z_1 \right. \\
 &\quad \left. + k_6 z_2 + k_7 (z_3 + z_4) + k_8 \phi \text{sen}(\phi) \right] \\
 &\quad + \frac{\cos(\phi)}{u\kappa(\phi)} \left[k_{12} \phi u - k_{10} \dot{\psi} + k_{12} \phi u z_2 - k_{11} \dot{y} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{u\kappa(\phi)} \left[+ k_{15} \dot{\psi} + k_{16} \dot{y} + k_{18} \dot{\phi} u \right], \\
 d_2(\phi, t) &= -k_9 \frac{\text{sen}(\phi)}{\kappa(\phi)} \left[F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\kappa(\phi)} \left[\cos(\phi) (k_{13} \cos(\phi) + k_{14}) V_w^2(t) \text{sign}(V_w(t)) \right. \\
 &\quad \left. + k_{17} (F_2(t) + F_3(t)) \right], \\
 g_2(u, \phi) &= \frac{k_{20}u^2 \cos(\phi) + k_9 \cos(\phi) - k_5}{\kappa(\phi)}, \\
 \kappa(\phi) &= \cos^2(\phi) + 0,8255 \cos(\phi) + 9,3597,
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Nestas expressões, o ângulo de esterço $\delta(t)$ das rodas dianteiras e o torque mecânico $T_m(t)$ gerado na roda traseira para produzir o movimento longitudinal do veículo são as entradas de controle, $V_w(t)$ é a velocidade dos ventos laterais sobre o veículo e $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ são as forças exercidas nas rodas pelo solo. Os valores dos parâmetros $k_i \in \mathbb{R}$, com $i = 1, \dots, 21$ são mostrados na Tabela 2.1, os quais foram obtidos a partir dos parâmetros físicos do PVI3R considerado em [30], assumindo que $m = 500$ kg é a massa e $h = 1$ m a altura do centro de gravidade relacionados ao corpo principal do triciclo.

Observa-se que em (2.49)--(2.50), \dot{u} depende somente de u e da entrada torque T_m , e $\ddot{\phi}$ não depende de T_m . A dinâmica das demais variáveis do vetor de estados $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ em (2.47) serão omitidas por simplicidade.

Tabela 2.1: Coeficientes em (2.49)--(2.50).

$k_1 = 124, 41$	$k_2 = 207, 36$	$k_3 = 41, 47$	$k_4 = 755, 5$
$k_5 = 1, 22 \cdot 10^4$	$k_6 = 897, 34$	$k_7 = 1, 32 \cdot 10^4$	$k_8 = 1, 34 \cdot 10^3$
$k_9 = 0, 1375$	$k_{10} = 8, 94 \cdot 10^3$	$k_{11} = 2, 71 \cdot 10^3$	$k_{12} = k_8$
$k_{13} = 0, 526$	$k_{14} = 1, 02$	$k_{15} = 755, 92$	$k_{16} = 229, 06$
$k_{17} = k_9$	$k_{18} = k_3$	$k_{19} = 0, 09$	$k_{20} = 5 \cdot 10^{-4}$
$k_{21} = 0, 007$			

2.5 MODELO LINEARIZADO

Nesta seção, será feita a linearização do modelo do PVI3R de 9-GL obtido na seção anterior. O modelo linearizado será utilizado para o projeto de controladores PID e LQR no Seção 3.1. Por construção, o lado direito da expressão (2.47), não depende das variáveis x e y . Assim, consideraremos $\mathbf{X} = ((z_1, z_2, z_3, z_4, \psi, \phi, \theta), \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{16}$ como vetor de estado, $\mathbf{U} = (\delta, T_m) \in \mathbb{R}^2$ como vetor de controle, e, por simplicidade, as perturbações externas serão desprezadas isto é, $F_1 \equiv F_2 \equiv F_3 \equiv V_\omega \equiv 0$ em (2.49)--(2.50). Relembramos ainda que $\dot{\mathbf{q}} = (u, v, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4, \dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^9$.

Com isso, é possível reescrever (2.47) como

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad (2.51)$$

onde $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \left((\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4, \dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}), \ddot{\mathbf{q}} \right)$. Será feita a linearização de (2.51) no ponto de operação $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ correspondente a $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ (velocidade longitudinal) e $\phi^* = 0 \text{ rad}$ (inclinação nula). As demais componentes de $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ satisfazem $\mathbf{G}(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*) = 0$, e os seus valores são mostrados na Tabela 2.2. Ressaltamos que tais valores foram obtidos com auxílio de pacotes computacionais.

Tabela 2.2: Componentes do ponto de operação $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ calculados.

$z_1^* = -5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$z_2^* = 18 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$z_3^* = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
$z_4^* = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$\psi^* = 0 \text{ rad}$	$\phi^* = 0 \text{ rad}$
$\theta^* = -6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$	$u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$	$v^* = 0 \text{ ms}^{-1}$
$\dot{z}_1^* = 0 \text{ ms}^{-1}$	$\dot{z}_2^* = 0 \text{ ms}^{-1}$	$\dot{z}_3^* = 0 \text{ ms}^{-1}$
$\dot{z}_4^* = 0 \text{ ms}^{-1}$	$\dot{\psi}^* = 0 \text{ rads}^{-1}$	$\dot{\phi}^* = 0 \text{ rads}^{-1}$
$\dot{\theta}^* = 0 \text{ rads}^{-1}$	$\delta^* = 0 \text{ rad}$	$T_m^* = 29, 45 \text{ N} \cdot \text{m}$

O modelo linearizado resultante do PVI3R de 9-GL, é representado no espaço de estados por:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}\Delta \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{U}(t), \\ \Delta \mathbf{Y}(t) &= \mathbf{C}\Delta \mathbf{X}(t),\end{aligned}\quad (2.52)$$

onde $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^* \in \mathbb{R}^{16}$ é o vetor de estado, $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^* \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de controle e $\Delta \mathbf{Y} = (\phi - \phi^*, u - u^*) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de saída. Assim, a matriz de saída é $\mathbf{C} = \{e_6, e_8\}$, onde e_1, e_2, \dots, e_{16} são os vetores da base canônica do espaço vetorial \mathbb{R}^{16} . As matrizes são

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}^* \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}^*}} \in \mathbb{R}^{16 \times 16}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}^* \\ \mathbf{U}=\mathbf{U}^*}} \in \mathbb{R}^{16 \times 2},$$

as quais foram obtidas com o auxílio de pacotes simbólicos computacionais e, devido as dimensões bastante consideráveis, julgamos mais conveniente mostrá-las no Apêndice 3.

É possível mostrar que o modelo linearizado (2.52), apresenta as seguintes propriedades:

- O par (A,B) é controlável, ou seja, a matriz de controlabilidade $[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{15}\mathbf{B}]$ apresenta posto completo;
- O par (A,C) não é detectável inviabilizando, portanto, a utilização do observador de Luenberger.

Além disso, a matriz de transferência do sistema linearizado é diagonal e dada por:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 \\ 0 & G_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

$$\begin{cases} G_{11}(s) = \frac{\phi(s)}{\delta(s)} = \frac{1701,2(s+0,8163)}{(s+45,73)(s-3,363)(s+0,8693)}, \\ G_{22}(s) = \frac{u(s)}{T_m(s)} = \frac{0,007}{(s+0,015)}, \end{cases}$$

A função de transferência $G_{11}(s) = \phi(s)/\delta(s)$ obtida acima, corresponde a $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ e $\phi^* = 0 \text{ rad}$. Na sequência, será ilustrado como que $G_{11}(s)$ varia em função da velocidade longitudinal de operação u^* . Para isto, o procedimento descrito acima será repetido para $u^* = 5, 6, \dots, 30 \text{ ms}^{-1}$. Tais funções de transferências

serão utilizadas para se projetar controladores PID com escalonamento (não-linear) de ganho no Seção 3.1, e ainda compararemos com as funções de transferências obtidas em [17], que por sua vez foram utilizadas métodos numéricos de identificação na simulação computacional do modelo não-linear de 9-GL do triciclo.

A Tabela 2.3 apresenta as funções de transferências $G_{11}(s) = \phi(s)/\delta(s)$, obtidas por linearização considerando que $u^* = 5,6, \dots, 30 \text{ ms}^{-1}$.

Tabela 2.3: Funções de transferências $G_{11}(s)$ obtidas a partir da linearização de (2.47) utilizando diferentes valores de velocidade longitudinal de operação u^* .

Velocidade longitudinal de operação veículo (u^*) ms^{-1}	Função de transferência $G_{11}(s) = \frac{\phi(s)}{\delta(s)}$
5	$\frac{583,49(s+0,7933)}{(s+123,1)(s-2,281)(s+1,426)}$
6	$\frac{644,96(s+0,8612)}{(s+103,6)(s-2,387)(s+1,35)}$
7	$\frac{717,61(s+0,903)}{(s+89,62)(s-2,494)(s+1,279)}$
8	$\frac{801,43(s+0,9241)}{(s+79,21)(s-2,603)(s+1,214)}$
9	$\frac{896,43(s+0,9294)}{(s+71,14)(s-2,712)(s+1,153)}$
10	$\frac{1002,6(s+0,9233)}{(s+64,72)(s-2,822)(s+1,097)}$
11	$\frac{1120(s+0,9092)}{(s+59,49)(s-2,932)(s+1,044)}$
12	$\frac{1248,5(s+0,8898)}{(s+55,16)(s-3,041)(s+0,9955)}$
13	$\frac{1388,2(s+0,8669)}{(s+51,51)(s-3,149)(s+0,9503)}$
14	$\frac{1539,1(s+0,8421)}{(s+48,41)(s-3,257)(s+0,9083)}$
15	$\frac{1701,2(s+0,8163)}{(s+45,73)(s-3,363)(s+0,8693)}$
16	$\frac{1874,4(s+0,7902)}{(s+43,4)(s-3,468)(s+0,8329)}$
17	$\frac{2058,8(s+0,7644)}{(s+41,36)(s-3,571)(s+0,7991)}$
18	$\frac{2254,4(s+0,7391)}{(s+39,55)(s-3,673)(s+0,7675)}$

19	$\frac{2461, 2(s + 0, 7147)}{(s + 37, 95)(s - 3, 773)(s + 0, 738)}$
20	$\frac{2679, 1(s + 0, 6911)}{(s + 36, 51)(s - 3, 871)(s + 0, 7104)}$
21	$\frac{2908, 2(s + 0, 6685)}{(s + 35, 22)(s - 3, 967)(s + 0, 6846)}$
22	$\frac{3148, 5(s + 0, 6468)}{(s + 34, 06)(s - 4, 062)(s + 0, 6604)}$
23	$\frac{3400(s + 0, 6262)}{(s + 33)(s - 4, 154)(s + 0, 6376)}$
24	$\frac{3662, 7(s + 0, 6066)}{(s + 32, 04)(s - 4, 244)(s + 0, 6163)}$
25	$\frac{3936, 5(s + 0, 5879)}{(s + 31, 16)(s - 4, 333)(s + 0, 5962)}$
26	$\frac{4221, 5(s + 0, 5702)}{(s + 30, 35)(s - 4, 419)(s + 0, 5772)}$
27	$\frac{4517, 7(s + 0, 5533)}{(s + 29, 61)(s - 4, 503)(s + 0, 5594)}$
28	$\frac{4825(s + 0, 5372)}{(s + 28, 93)(s - 4, 586)(s + 0, 5425)}$
29	$\frac{5143, 6(s + 0, 5219)}{(s + 28, 29)(s - 4, 666)(s + 0, 5266)}$
30	$\frac{5473, 3(s + 0, 5074)}{(s + 27, 7)(s - 4, 745)(s + 0, 5115)}$

Por simplicidade, iremos comparar somente as as funções de transferências $G_{11}(s) = \phi(s)/\delta(s)$ relativas a $u^* = 5 \text{ ms}^{-1}$ (velocidade baixa), $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ (velocidade média) e $u^* = 29 \text{ ms}^{-1}$ (velocidade alta). As funções de transferências obtidas neste trabalho, são mostradas abaixo a direita e as funções de transferências obtidas por [17], são mostradas à esquerda

$$\frac{583, 48(s + 0, 79)}{(s + 123, 1)(s - 2, 28)(s + 1, 42)} \quad \frac{583, 49(s + 0, 7933)}{(s + 123, 1)(s - 2, 281)(s + 1, 426)}$$

$$\frac{1701, 15(s + 0, 82)}{(s + 45, 72)(s - 3, 35)(s + 0, 87)} \quad \frac{1701, 2(s + 0, 8163)}{(s + 45, 73)(s - 3, 363)(s + 0, 8693)}$$

$$\frac{5143, 56(s + 0, 52)}{(s + 28, 26)(s - 4, 63)(s + 0, 53)} \quad \frac{5143, 6(s + 0, 5219)}{(s + 28, 29)(s - 4, 666)(s + 0, 5266)}$$

Comparando estas uma a uma, é possível deduzir que se tratam das mesmas funções de transferências. Comparamos as demais

funções de transferências onde pudemos concluir que a metodologia utilizada neste trabalho para obtê-las analiticamente de maneira direta e exata, a partir do cálculo do modelo linearizado do veículo, resultou nas mesmas funções de transferências que as obtidas em [17], que utilizou métodos numéricos de identificação na simulação computacional do modelo não-linear de 9-GL. Ressaltamos que a metodologia utilizada por [17] apresenta o inconveniente de haver retrabalho caso haja variações nos parâmetros do triciclo. Desta forma, neste capítulo mostramos um procedimento mais direto e simples para a obtenção das funções de transferências do modelo linearizado do triciclo de maneira exata para quaisquer valores de parâmetros do triciclo.

Note que as funções de transferências $G_{11}(s) = \phi(s)/\delta(s)$, mostradas na Tabela 2.3, apresentam pólos e zeros de mesma ordem de grandeza, o que difere são os ganhos correspondentes. Além disso, estes ganhos variam de acordo com a velocidade longitudinal desenvolvida pelo triciclo.

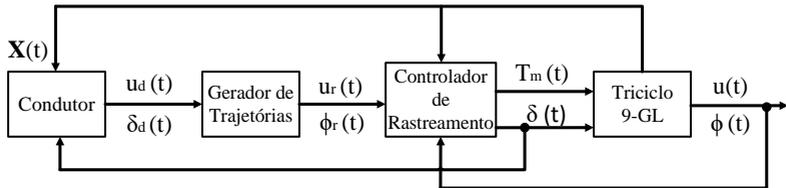
2.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, deduzimos o modelo matemático não-linear de 9-GL do PVI3R, utilizando uma metodologia Euler-Lagrange multicorpos. A partir deste modelo, obtemos as dinâmicas da velocidade e ângulo de inclinação que serão utilizadas posteriormente no Seção 3.1, para se projetar os controladores não-lineares: controlador por modos deslizantes, controle vetorial unitário e a versão estendida proposta recentemente além de uma realimentação linearizante. Mostramos também o modelo linearizado representado em espaços de estados e funções de transferências, que serão utilizadas para projetar um controlador LQR e controladores PID, respectivamente. Estes controladores serão também desenvolvidos juntamente no Seção 3.1. Pudemos concluir que as funções de transferências obtidas neste trabalho analiticamente a partir do cálculo do modelo linearizado do PVI3R são equivalente as obtidas por [17], que utilizou métodos numéricos de identificação na simulação computacional. Assim, neste capítulo, apresentamos um procedimento direto e mais simples para se determinar as funções de transferências de maneira exata. No capítulo seguinte, explicaremos em detalhes a estratégia de controle em malha fechada utilizada neste trabalho, para tratar o problema de rastreamento dos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor, que foi descrito na Introdução.

3 ESTRUTURA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA

Este capítulo explica em detalhes a solução proposta utilizada nesta dissertação para tratar o problema de controle descrito na Introdução, que corresponde a: projetar controladores em malha fechada que mantenham o ângulo de esterço $\delta(t)$ e a velocidade longitudinal $u(t)$ do veículo de 3 rodas relativamente próximas das trajetórias $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejadas pelo condutor, respectivamente, enquanto o ângulo de inclinação $\phi(t)$ é mantido dentro de uma margem de segurança. O diagrama de blocos da estrutura de controle em malha fechada é ilustrado na Figura 3.1 conforme metodologia utilizada em [17, 30, 41].

Figura 3.1: Diagrama de blocos da estratégia de controle em malha-fechada utilizada.



Os comandos do condutor do triciclo determinam o ângulo de esterço $\delta_d(t)$ e a velocidade longitudinal $u_d(t)$ desejados, que por sua vez dependem do ângulo de esterço das rodas dianteiras $\delta(t)$, da velocidade $u(t)$, e possivelmente do restante das variáveis de estado $\mathbf{X}(t)$. Considera-se que seja um sistema *steer-by-wire*: onde não há acoplamento mecânico entre $\delta_d(t)$ e $\delta(t)$. O condutor desempenha o papel de malha externa de controle (*Controlador de Rastreamento* corresponde à malha interna). Baseado nas trajetórias $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejadas pelo condutor, o *Gerador de Trajetórias* determina as trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, onde $|\phi_r(t)|$ evolui dentro de uma margem de segurança pré-estabelecida $\phi_{\max} = \pi/6$ rad (maiores detalhes no próximo parágrafo). Na malha interna de controle o *Controlador de Rastreamento* determina os valores das entradas $\delta(t)$ e $T_m(t)$ que forcem o ângulo de inclinação $\phi(t)$ e a velocidade longitudinal $u(t)$ do veículo de 3 rodas (*Triciclo 9-GL*) a rastrear as trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, respectivamente. É assumido que todo o vetor de estados $\mathbf{X}(t)$ do veículo está disponível.

O *Gerador de Trajetórias* é agora explicado em maiores detalhes. A idéia principal é construir trajetórias de referências $\phi_r(t)$

e $u_r(t)$, de modo a garantir que no geral se tenha $\delta(t) \cong \delta_d(t)$ e $u_r(t) \cong u_d(t)$ quando $\phi(t) = \phi_r(t)$ e $u(t) = u_r(t)$ (rastreamento perfeito em malha-fechada), resolvendo assim o problema de controle. Os detalhes são dados na sequência. Considere então que os comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor são amostrados com um determinado período $T > 0$. As trajetórias de referências são escolhidas como funções lineares por partes, dadas por

$$\begin{aligned}\phi_r(t) &= \phi_r(kT) + \frac{\phi_r((k+1)T) - \phi_r(kT)}{T} (t - kT), \\ u_r(t) &= u_r(kT) + \frac{u_r((k+1)T) - u_r(kT)}{T} (t - kT),\end{aligned}\quad (3.1)$$

para $t \in [kT, (k+1)T)$ e $k \in \mathbb{N}$. Pela construção acima, $\dot{\phi}_r(t) \equiv 0$ (segunda derivada nula). É necessário determinar os valores de $\phi_r(kT)$, $\phi_r((k+1)T)$, $u_r(kT)$ e $u_r((k+1)T)$. Conforme discutido em [41], a equação diferencial não-linear de segunda ordem dada por

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{g}{h} \sin(\phi(t)) + \frac{1}{lh} \cos(\phi(t)) u^2(t) \delta(t), \quad (3.2)$$

corresponde a um modelo simplificado de uma bicicleta de 2-GL onde l é o comprimento e h a altura do centro de gravidade da bicicleta. Provou-se em [41] que esta captura as principais características da dinâmica do ângulo de inclinação $\phi(t)$ do triciclo de 9-GL (compare a semelhança com (2.49)–(2.50)). Relembre que $\ddot{\phi}_r \equiv 0$, assim tomando por base (3.2), é razoável escolhermos

$$\phi_r(kT) = -\tan^{-1} \left(\frac{u_d^2(kT) \delta_d(kT)}{gl} \right), \quad (3.3)$$

Seja $\phi_{\max} = \pi/6$ rad o máximo valor admissível para $|\phi(t)|$ para a condução segura do veículo em malha-fechada. Agora, se em (3.3), tivermos $|\phi_r(kT)| \leq \phi_{\max}$, então escolhemos $u_r(kT) = u_d(kT)$. Caso contrário, ou seja, $|\phi_r(kT)| > \phi_{\max}$, então escolhe-se $u_r(kT)$ de modo que a seguinte expressão seja satisfeita

$$\phi_r(kT) = -\text{sign}(\delta_d(kT)) \phi_{\max} = -\tan^{-1} \left(\frac{u_r^2(kT) \delta_d(kT)}{gl} \right), \quad (3.4)$$

ou seja, o valor da velocidade desejada $u_d(kT)$ é penalizada a fim de manter o valor do ângulo de esterço desejado $\delta_d(kT)$. Note que neste caso $u_r(kT) \neq u_d(kT)$. A mesma idéia é utilizada para obter

$\phi_r((k+1)T)$ e $u_r((k+1)T)$: assumindo que as amostras das derivadas $\dot{\delta}_d(t)$ e $\dot{u}_d(t)$ estejam disponíveis, temos que $\delta_d((k+1)T) \cong \delta_d(kT) + T\dot{\delta}_d(kT)$ e $u_d((k+1)T) \cong u_d(kT) + T\dot{u}_d(kT)$, para pequeno $T > 0$. No caso em que as amostras de $\dot{\delta}_d(t)$ e $\dot{u}_d(t)$ não estejam disponíveis, então escolhemos um pequeno $T > 0$ e atrasamos as amostras $\delta_d(kT)$ e $u_d(kT)$ por T , de modo que em (3.3) e (3.4) substituimos $\delta_d(kT)$ e $u_d(kT)$ por $\delta_d((k-1)T)$ e $u_d((k-1)T)$, respectivamente. Portanto, se em (3.3) tivermos $|\phi_r(kT)| \leq \phi_{\max}$, então tomamos $u_r(kT) = u_d((k-1)T)$, e assim por diante.

Por construção, $\ddot{\phi}_r \equiv 0$, $|\phi_r(t)| \leq \phi_{\max}$, e em geral temos que $u_r(t) \cong u_d(t)$. Quando há rastreamento perfeito em malha-fechada, isto é, $\phi(t) = \phi_r(t)$ e $u(t) = u_r(t) \cong u_d(t)$, assim, a dinâmica simplificada de ordem reduzida para $\phi(t)$ em (3.2) juntamente com (3.3)--(3.4) garantem que $\delta(t) \cong \delta_d(t)$. Assim, é possível considerar também para o modelo do PVI3R com 9-GL que $\delta(t) \cong \delta_d(t)$. Resolvemos assim o problema de rastreamento dos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor.

Ressaltamos novamente que se trata de um sistema *steer-by-wire*, ou seja não há acoplamento mecânico entre $\delta_d(t)$ e $\delta(t)$.

Note ainda que o cálculo da trajetória de referência $\phi_r(t)$ em (3.1), obtido a partir de $\dot{\phi} \equiv 0$ na dinâmica simplificada de ordem reduzida referente ao modelo de bicicleta com 2-GL em (3.2), em essência representa um movimento naturalmente executado pelo PVI3R.

Na seção seguinte, realizaremos os projetos dos *Controladores de Rastreamento*, que serão utilizados para tratar o problema de rastreamento das trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ determinadas pelo *Gerador de Trajetórias*.

3.1 PROJETO DOS CONTROLADORES DE RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIAS

Neste capítulo, realizaremos os projetos dos controladores utilizados para o problema de rastreamento das trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ de classes C^2 e C^1 respectivamente, determinadas pelo *Gerador de Trajetórias*. Assim, sejam definidos $e_1(t) = u(t) - u_r(t)$ e $e_2(t) = \phi(t) - \phi_r(t)$, os erros de rastreamento de velocidade e inclinação, respectivamente. Para o *Controlador de Rastreamento*, propõem-se neste capítulo, projetar as seguintes metodologias:

1. um regulador linear quadrático (LQR) utilizando desigualdades matriciais lineares (LMI) de [33], com base no modelo linearizado em (2.52);
2. dois controladores PID com compensação da não-linearidade estática, conforme [17], que serão desenvolvidos a partir das funções de transferências mostradas na Tabela 2.3;
3. o controlador por quase modos deslizantes (QMD) de [34], o controle vetorial unitário (UVC) de [35] e a versão estendida proposta recentemente para o UVC (EUVC) e uma realimentação linearizante (RL) segundo [37], a serem desenvolvidos sobre as dinâmicas não-lineares dadas em (2.49)--(2.50).

Para estes projetos assumimos que todas as variáveis do vetor de estados $\mathbf{X}(t)$ estão disponíveis, além de desprezarmos inicialmente as perturbações externas, isto é, $F_1(t) \equiv F_2(t) \equiv F_3(t) \equiv V_\omega(t) \equiv 0$, em (2.49)--(2.50), estas serão levadas em consideração nos resultados de simulação mostrados no capítulo seguinte.

3.1.1 Regulador Quadrático Linear-LQR

Também conhecido por “controle ótimo”, foi desenvolvido em 1960 por Rudolf Kalman e vem sendo amplamente utilizado na literatura em diversas aplicações, como controle de servomotores, processos químicos e na robótica. A idéia principal desta técnica é determinar uma lei de controle por realimentação de estados que minimiza um determinado índice de desempenho, obtida a partir da escolha das matrizes de ponderações sobre as variáveis de estado e sinais de controle. A abordagem tradicional utilizada na literatura para determinar a matriz de ganhos da realimentação é através da solução algébrica da equação de *Ricatti* [42], porém neste trabalho optamos por utilizar desigualdades matriciais lineares (LMI), conforme [33].

Considere que as trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ em (3.1) são lineares por partes. Assim, o duplo integrador é um modelo interno para estas trajetórias. Isto resulta em um sistema aumentado dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_{mf}\xi(t) + B_{mf}\Delta\mathbf{U}(t) + B_r r(t), \\ \Delta\mathbf{Y}(t) &= C_{mf}\Delta\mathbf{X}(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $\xi = (\Delta\mathbf{X}, x_m) \in \mathbb{R}^{20}$ é o vetor de estados aumentado e $x_m \in \mathbb{R}^4$ é o estado do modelo interno e $r(t) = (\phi_r(t), u_r(t)) \in \mathbb{R}^2$ é o

vetor das trajetórias de referências, e as matrizes A_{mf} , B_{mf} e C_{mf} , são dadas por

$$A_{mf} = \begin{bmatrix} A & 0_{16 \times 4} \\ W & X \end{bmatrix}, \quad B_{mf} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{4 \times 2} \end{bmatrix}, \quad C_{mf} = [C \quad 0_{2 \times 4}],$$

onde A , B e C são determinadas diretamente do modelo linearizado do veículo em (2.52), e as demais matrizes referentes ao modelo interno são mostradas no Apêndice 3.

O problema tratado nesta seção, consiste em determinar uma matriz de ganhos K da realimentação de estados ($\Delta U = K\xi(t)$) para o sistema aumentado (3.5), que minimize a função custo a dada a seguir:

$$J = \min_{\Delta U} \int_0^{\infty} z'(t)z(t) dt, \quad (3.6)$$

onde $z(t) = C_z \xi(t) + D_z \Delta U(t)$ é o vetor auxiliar. Note que devemos ter $C_z' D_z = 0$ conforme [33]. As matrizes $C_z = \text{diag}(C_{z1}, \dots, C_{z20})$ e $D_z = \text{diag}(D_{z1}, D_{z2})$ são matrizes positivas definidas que representam as ponderações sobre os estados e controles respectivamente, a serem definidas pelo projetista. Para a escolha destas matrizes foi considerado o método quadrático apresentado por [43],

$$C_{zi} = \frac{1}{X_i^2(\max)} \Big|_{i=1}^n, \quad D_{zi} = \frac{1}{U_i^2(\max)} \Big|_{i=1}^2, \quad (3.7)$$

onde $X_i^2(\max)$ e $U_i^2(\max)$ representam o valor máximo para o estado e controle, respectivamente.

Para o projeto deste controlador, considera-se a seguinte função de Lyapunov,

$$V(\xi) = \xi' P \xi.$$

É possível assumir a partir de [44], que a seguinte desigualdade é verificada:

$$\dot{V}(\xi) + z'z < 0, \quad (3.8)$$

Integrando (3.8) de $t = 0$ a $t = t_f$ obtém-se

$$V(\xi(t_f)) - V(\xi(0)) + \int_0^{t_f} z'(t)z(t) dt < 0,$$

Supondo que o sistema seja assintoticamente estável em malha fechada conclui-se que $\lim_{t_f \rightarrow \infty} \xi(t_f) = 0$ e $\lim_{t_f \rightarrow \infty} V(\xi(t_f)) = 0$, podendo ser reescrito na forma

$$\int_0^{\infty} z'(t)z(t) dt < V(\xi(t=0)) = \xi_0' P \xi_0,$$

Ao minimizar $\xi_0' P \xi_0$, define-se um limite superior para a função custo de (3.6), obtido através de uma variável auxiliar λ ,

$$\lambda > \xi_0' P \xi_0, \quad (3.9)$$

Sabendo que o sistema em malha fechada é dado por $\dot{\xi}(t) = (A_{mf} + B_{mf}K)\xi(t)$ e $z(t) = (C_z + D_zK)\xi(t)$, a condição (3.8) é de forma equivalente representada por

$$\xi' [(A_{mf} + B_{mf}K)'P + P(A_{mf} + B_{mf}K) + (C_z + D_zK)'(C_z + D_zK)]\xi < 0,$$

Definindo a variável $Q = P^{-1}$, e multiplicando o lado esquerdo da desigualdade acima por $Q(\xi')^{-1}$ e o lado direito por $\xi^{-1}Q$ chega-se a:

$$Q[(A_{mf} + B_{mf}K)'P + P(A_{mf} + B_{mf}K) + (C_z + D_zK)'(C_z + D_zK)]Q < 0, \quad (3.10)$$

Finalmente aplicando o complemento de Schur (veja no Apêndice 6) e mudança de variável $Y = KQ$ em (3.9)-(3.10), recaímos na seguinte LMI:

$$\min_{Q, Y} \lambda \text{ sujeito a } \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda & \xi_0' \\ \xi_0 & Q \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} QA_{mf}' + A_{mf}Q + Y'B_{mf}' + B_{mf}Y & QC_z' + Y'D_z' \\ C_zQ + D_zY & -I_n \end{bmatrix} < 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

onde $\xi_0 \in \mathbb{R}^{20}$ é a condição inicial dos estados e I_n a matriz identidade (de ordem adequada). Supondo que $Q = Q' \in \mathbb{R}^{20 \times 20}$ e $Y \in \mathbb{R}^{2 \times 20}$ sejam solução da LMI (3.11), então a matriz de ganhos K a qual minimiza o funcional J de (3.6), é obtida através de $K = YQ^{-1}$. Determinamos assim a seguinte lei de controle LQR para o *Controlador de Rastreamento*:

$$\Delta U = (\delta(t) - \delta^*, T_m(t) - T_m^*) = K\xi = YQ^{-1}\xi. \quad (3.12)$$

Ressalta-se que é possível projetar um controlador robusto utilizando a abordagem politópica, ao considerarmos incertezas paramétricas nas matrizes A_{mf} e B_{mf} dadas em (3.11). Porém, neste trabalho, não foi possível expressar estas matrizes em função dos parâmetros massa m e altura h do centro de gravidade do veículo (serão utilizadas incertezas de +20% da massa e -5% da altura do centro de gravidade do veículo nos resultados de simulações mostradas no Capítulo 4). O problema aqui encontrado foi a complexidade envolvida para determiná-las a partir de pacotes simbólicos do

Matlab. Note que, para obter A_{mf} e B_{mf} em função de m e h é preciso realizar inúmeras operações (inversão de matrizes em (2.47), etc) o que apresenta muita complexidade computacional envolvida. Assim, o Matlab não conseguiu calcular as matrizes para que pudéssemos utilizar um polítopo e projetar assim um controlador robusto LQR.

3.1.2 PID com compensação estática da não-linearidade

O controlador Proporcional-integral-derivativo (PID) é o mais utilizado em controle de processos, pelo desempenho satisfatório obtido em diversas aplicações industriais. Outro benefício para a sua utilização, é a possibilidade deste controlador ser implementado em equipamentos que não possuem elevada capacidade de processamento. Devido à teoria bastante consolidada, o PID é uma importante ferramenta para análise em projetos de controle [45].

Baseado nisto, nesta seção serão projetados sobre as funções de transferências mostradas na Tabela 2.3, dois controladores PID com compensação estática da não-linearidade, seguindo a mesma metodologia apresentada por [17] para o *Controlador de Rastreamento*.

Conforme comentado, as funções de transferências mostradas na Tabela 2.3, apresentam pólos e zeros de mesma ordem de grandeza, diferindo no ganho correspondente, que varia de acordo com a velocidade longitudinal desenvolvida pelo veículo. Desta forma, para o projeto destes controladores PID, será utilizado o lugar geométrico das raízes com a função de transferência relacionada à velocidade longitudinal de operação $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$, desconsiderando neste caso, o ganho 1501,2.

Da mesma forma que em [17], serão adotadas as seguintes especificações para a resposta do sistema em malha-fechada:

- Tempo de estabilização $t_s(5\%) \leq 1,5 \text{ s}$;
- Sobressinal máximo de 20%;
- Erro nulo em regime permanente para referências do tipo degrau.

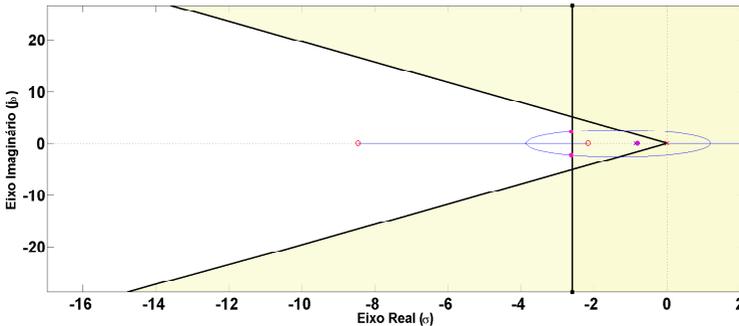
Atendendo às especificações acima, o primeiro projeto do con-

trolador PID com dois graus de liberdade é dado por

$$C_2(s) = K_{c2} \frac{(s + 2,17)(s + 8,47)}{s(s + 84,7)}, \quad F_{c2}(s) = \frac{2,17}{(s + 2,17)}, \quad (3.13)$$

onde o filtro de referência F_{c2} é utilizado para cancelar o zero dominante do controlador, e assim diminuir o sobressinal da resposta em malha fechada. A Figura 3.2 mostra o lugar das raízes, com a referida função de transferência de ganho unitário, o controlador C_2 e o filtro de referência F_{c2} . Neste caso, os pólos dominantes de malha fechada se encontram localizados na posição $-2,86 \pm 2,09j$ e o ganho do controlador obtido neste caso é de $K_{c2} = 3,1835$.

Figura 3.2: Lugar geométrico das raízes com a função de transferência $\phi(s)/\delta(s)$ para $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ com o controlador $C_2(s)$ e o filtro de referência $F_{c2}(s)$.



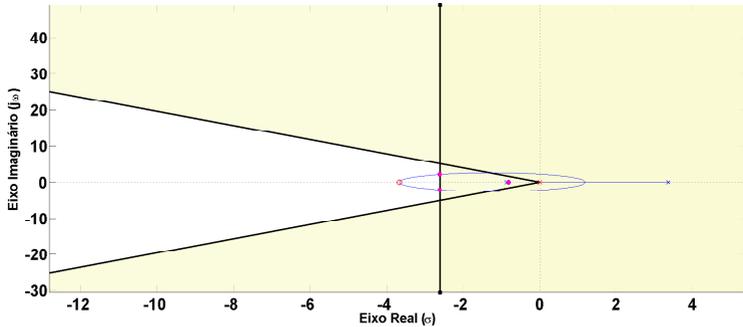
Considerando a mesma função de transferência utilizada anteriormente, foi projetado outro controlador PID de dois graus de liberdade, dado por

$$C_3(s) = K_{c3} \frac{(s + 3,67)(s + 3,67)}{s(s + 36,7)}, \quad F_{c3}(s) = \frac{3,67^2}{(s + 3,67)^2}, \quad (3.14)$$

onde F_{c3} é o filtro de referência utilizado para cancelar os zeros duplos dominantes do controlador C_3 , reduzindo assim o sobressinal da resposta em malha fechada. A Figura 3.3 mostra o lugar das raízes, com a referida função de transferência de ganho unitário, o controlador C_3 e o filtro de referência F_{c3} . Para este controlador, os pólos dominantes de malha fechada se encontram localizados na

posição $-2,60 \pm 2,13j$ e o ganho obtido nesta situação foi de $K_{c3} = 3,2665$.

Figura 3.3: Lugar geométrico das raízes com a função de transferência $\phi(s)/\delta(s)$ com $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ com o controlador $C_3(s)$ e o filtro de referência $F_{c3}(s)$.



Porém, os ganhos destes controladores K_{c2} e K_{c3} , não devem ser valores constantes e sim variáveis, que sejam funções das velocidades longitudinais desenvolvidas pelo veículo, para compensar as variações nos ganhos dos sistemas linearizados mostrados na Tabela 2.3, para que os pólos dominantes em malha fechada permaneçam nos lugares desejados e atendam as especificações para todos os valores de velocidade do veículo.

A Tabela 3.1 mostra os ganhos dos controladores K_{c2} e K_{c3} , que foram calculados para cada função de transferência da Tabela 2.3 (impondo ganhos unitários), que mantém os pólos dominantes do sistema em malha fechada dentro das especificações desejadas para todo valor de u^* desenvolvido pelo triciclo.

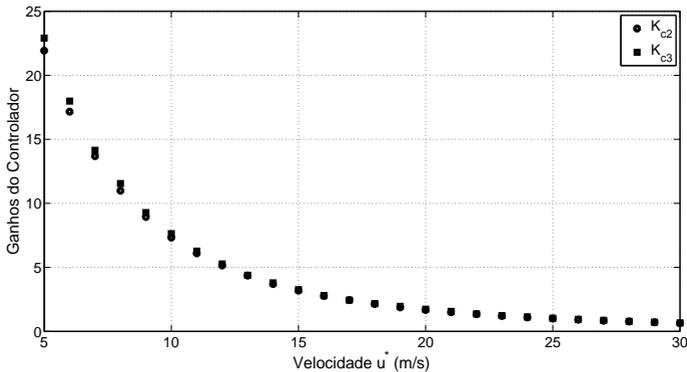
Tabela 3.1: Ganhos dos controladores $K_{c2}(u^*)$ e $K_{c3}(u^*)$ calculados para que os pólos do sistema permaneçam nos locais desejados.

Velocidade do veículo (u^*) ms^{-1}	K_{c2}	K_{c3}
$u^* = 5 \text{ ms}^{-1}$	21,924	22,903
$u^* = 6 \text{ ms}^{-1}$	17,157	17,982
$u^* = 7 \text{ ms}^{-1}$	13,687	14,143
$u^* = 8 \text{ ms}^{-1}$	10,987	11,543
$u^* = 9 \text{ ms}^{-1}$	8,936	9,279
$u^* = 10 \text{ ms}^{-1}$	7,325	7,636
$u^* = 11 \text{ ms}^{-1}$	6,097	6,267
$u^* = 12 \text{ ms}^{-1}$	5,147	5,269
$u^* = 13 \text{ ms}^{-1}$	4,356	4,383
$u^* = 14 \text{ ms}^{-1}$	3,697	3,794
$u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$	3,183	3,266
$u^* = 16 \text{ ms}^{-1}$	2,767	2,798
$u^* = 17 \text{ ms}^{-1}$	2,440	2,444
$u^* = 18 \text{ ms}^{-1}$	2,141	2,171
$u^* = 19 \text{ ms}^{-1}$	1,878	1,954
$u^* = 20 \text{ ms}^{-1}$	1,671	1,728
$u^* = 21 \text{ ms}^{-1}$	1,493	1,564
$u^* = 22 \text{ ms}^{-1}$	1,344	1,368
$u^* = 23 \text{ ms}^{-1}$	1,204	1,235
$u^* = 24 \text{ ms}^{-1}$	1,091	1,128
$u^* = 25 \text{ ms}^{-1}$	1	1,026
$u^* = 26 \text{ ms}^{-1}$	0,911	0,938
$u^* = 27 \text{ ms}^{-1}$	0,833	0,862
$u^* = 28 \text{ ms}^{-1}$	0,772	0,780
$u^* = 29 \text{ ms}^{-1}$	0,711	0,717
$u^* = 30 \text{ ms}^{-1}$	0,645	0,664

A partir dos dados mostrados da Tabela 3.1, é possível relacionar os ganhos K_{c2} e K_{c3} com a velocidade longitudinal de operação do veículo u^* . Obtemos então como resultado as curvas mostradas na Figura 3.4, onde observa-se que estas apresentam um comportamento não-linear, e conforme [17], é possível linearizá-las, realizando a seguinte operação,

$$K_{lci}(u^*) = \frac{1}{\sqrt{K_{ci}(u^*)}}, \quad (3.15)$$

Figura 3.4: Evolução dos ganhos dos controladores $K_{c2}(u^*)$ e $K_{c3}(u^*)$ em função de u^* que mantém os pólos dominantes em malha fechada nos locais desejados.



Desta forma, a partir de (3.15) são obtidas duas funções discretizadas $K_{lci}(u^*)$ com $i = 2,3$ que serão aproximadas por funções contínuas de primeiro grau, visando estender a função de pontos discretos para todas as faixas de velocidade do veículo. As funções de primeiro grau obtidas por interpolação polinomial são mostradas abaixo

$$K_{lc2}(u) = 0.0416u - 0.0430, \quad K_{lc3}(u) = 0.0412u - 0.0446, \quad (3.16)$$

Retomando (3.15), os ganhos efetivos para os controladores $C_2(s)$ em (3.13) e $C_3(s)$ em (3.14), são dados por

$$K_{c2}(u) = \frac{1}{(0.0416u - 0.0430)^2}, \quad K_{c3}(u) = \frac{1}{(0.0412u - 0.0446)^2}, \quad (3.17)$$

Para validar estes projetos, os controladores $C_2(s)$ em (3.13) e $C_3(s)$ em (3.14), os respectivos filtros foram combinados com as 26 funções de transferências mostradas na Tabela 2.3, obtendo assim um sistema resultante estável em malha fechada para todas as situações e com os pólos dominantes nas posições desejadas.

Assim, nesta seção foram mostrados dois projetos de controladores PID com compensação estática da não-linearidade. Por simplicidade, não será mostrado o projeto do controlador PID com compensação estática da não-linearidade proposto por [17], sendo

este dado por

$$C_1(s) = K_{c1} \frac{(s + 2,05)(s + 5,75)}{s(s + 20)}, \quad F_{c1}(s) = \frac{0.41(s + 5)}{(s + 2,05)}, \quad (3.18)$$

onde o ganho dependente da velocidade longitudinal deste controlador é $K_{c1}(u) = \frac{1}{(0,0674u - 0.061352)^2}$.

Para facilitar a análise e discussão dos resultados realizados no capítulo seguinte, serão adotadas as seguintes nomenclaturas para estes controladores:

- **PID-1** corresponderá ao controlador PID proposto por [17] em (3.18);
- **PID-2** será denominado o controlador PID em (3.13);
- **PID-3** representará o controlador PID em (3.14).

3.1.3 Realimentação Linearizante Entrada-Saída- RL

A metodologia conhecida por realimentação linearizante é uma técnica de controle não-linear que nos últimos anos despertou o interesse de grande parte dos pesquisadores. Essa técnica pode ser utilizada em diversas aplicações práticas tais como: controle de aeronaves, rastreamento de trajetórias por robôs manipuladores e controle de velocidade em motores elétricos [37].

Nesta seção, será projetada uma realimentação linearizante entrada-saída para o problema de rastreamento das trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ em (3.1). Informações complementares deste método podem ser obtidos em [34, 46].

Relembre que a função $g_2(u(t), \phi(t)) > 0$ para $|\phi(t)| < \pi/2$ rad e $u(t) > 0$ em (2.49)–(2.50), assim, é possível concluir que as saídas $y_1 = u$ e $y_2 = \phi$ apresentam graus relativos $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 2$, respectivamente.

Portanto, é imediato que as seguintes realimentações de estados não-lineares:

$$T_m(t) = \frac{[-f_1(u(t)) + v_1(t)]}{k_{21}}, \quad \delta(t) = \frac{[-f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + v_2(t)]}{g_2(u(t), \phi(t))}, \quad (3.19)$$

asseguram respectivamente, em malha fechada que:

$$\dot{u}(t) = v_1(t), \quad \ddot{\phi}(t) = v_2(t), \quad (3.20)$$

onde $v_1(t)$ e $v_2(t) \in \mathbb{R}$ são as novas entradas (a serem definidas a seguir).

Utilizando os sinais de controle (3.19) nas dinâmicas não-lineares em (2.49)–(2.50), foram obtidos sistemas linearizados equivalentes, que correspondem a bancos de um e dois integradores, respectivamente em (3.20).

Escolhendo as novas entradas $v_1(t)$ e $v_2(t)$ de (3.20), dadas por

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \dot{u}_r(t) + k_1 e_1(t), \\ v_2(t) &= \ddot{\phi}_r(t) + k_2 \dot{e}_2(t) + k_3 e_2(t) + k_4 \int_0^t e_2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.21)$$

Note que v_2 apresenta a ação de controle PID, e a partir de (3.21), resultam as seguintes dinâmicas em malha fechada para os erros de rastreamentos

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) + k_1 e_1(t) &= 0, \\ \ddot{e}_2(t) + k_2 \dot{e}_2(t) + k_3 e_2(t) + k_4 \int_0^t e_2 d\tau &= 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

Resta então determinar os ganhos do controlador k_1, k_2, k_3 e $k_4 \in \mathbb{R}$, de tal forma que as equações características em (3.22), sejam *Hurwitz* ou seja, apresentem raízes com parte real negativa, obtendo assim dinâmicas assintoticamente estáveis em malha fechada.

Para determinar os parâmetros de controle k_2, k_3 e k_4 e assim estabilizar a dinâmica de e_2 , optamos utilizar para este trabalho o método LQR em (3.11). Considere para isto, que a equação diferencial de segunda ordem de (3.22), que corresponde à dinâmica de e_2 pode ser reescrita no espaço de estados, como

$$\dot{e}_\phi(t) = A_e e_\phi(t) + B_e v(t), \quad (3.23)$$

onde $v(t) = K_e e_\phi(t)$ e $e_\phi = (\int e_2, e_2, \dot{e}_2) \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de estados do sistema,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ são matrizes conhecidas e } K_e =$$

(k_4, k_3, k_2) são os ganhos da realimentação que deseja-se determinar a fim de minimizar a seguinte função custo (3.24),

$$J_e = \min_v \int_0^\infty z'_e(t) z_e(t) dt, \quad (3.24)$$

com $z_e(t) = C_{ze}e_\phi(t) + D_{ze}v(t)$ é o vetor auxiliar, C_{ze} e D_{ze} são matrizes diagonais positivas definidas que ponderam os estados e controles, respectivamente.

Baseado na metodologia (3.11), chega-se à seguinte LMI

$$\min_{Q_e, Y_e} \lambda_e \text{ sujeito a } \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_e & e'_0 \\ e_0 & Q_e \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} Q_e A'_e + A_e Q_e + Y'_e B'_e + B_e Y_e & Q_e C'_{ze} + Y'_e D'_{ze} \\ C_{ze} Q_e + D_{ze} Y_e & -I_{n_e} \end{bmatrix} < 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

onde $e_0 \in \mathbb{R}^3$ é a condição inicial para os estados e I_{n_e} a matriz identidade (de ordem adequada). Supondo que $Q_e = Q'_e \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $Y_e \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ sejam solução da LMI (3.25), então a matriz de ganhos $K_e = (k_4, k_3, k_2)$ que minimiza o funcional J_e de (3.24) é obtida através de $K_e = Y_e Q_e^{-1}$. A lei de controle que estabiliza (3.23) é $v(t) = Y_e Q_e^{-1} e_\phi(t)$.

A lei de controle Realimentação linearizante entrada-saída para o *Controlador de Rastreamento* é definida por (3.19) e (3.21), com os ganhos do controlador $k_1 > 0$ (escolhido arbitrário), $k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ provenientes de (3.25).

3.1.4 Controladores baseados em Modos Deslizantes

Para tratar o problema de rastreamento das trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ em (3.1), nesta seção, propõem-se utilizar as seguintes metodologias para o *Controlador de Rastreamento*: quase modos deslizantes (QMD) de [34], controle vetorial unitário (UVC) proposto em [35] e o controle vetorial unitário estendido (EUVC) desenvolvido recentemente em [36]. Estas escolhas foram motivadas principalmente por estas técnicas garantirem baixa sensibilidade ao sistema de controle frente às perturbações externas e incertezas paramétricas.

Inicialmente, para os projetos destes controladores, define-se, conforme [34], as seguintes superfícies de deslizamentos

$$\begin{aligned} s_1(t) &= e_1(t), \\ s_2(t) &= \dot{e}_2(t) + c e_2(t), \quad c > 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde c é a constante de tempo a ser definida pelo projetista, e $S(t) = (s_1(t), s_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ o vetor superfícies de deslizamento.

3.1.4.1 Quase Modos Deslizantes -QMD

Aqui será utilizada a metodologia quase modos deslizantes desenvolvida por [34], que provou ser possível substituir as leis de controle descontínuas, por leis de controle contínuas, para evitar o fenômeno de *chattering*. Porém, o erro de rastreamento não converge para a origem mas permanece numa vizinhança em torno desta.

Neste projeto, lembre ainda que em (2.49)--(2.50) temos $g_2(u(t), \phi(t)) > 0$ para $|\phi(t)| < \pi/2$ rad e $u(t) > 0$, e ainda [34] permite que as funções f_2 , g_2 e d_2 não sejam perfeitamente conhecidas, temos então que

$$\left| f_2 - \hat{f}_2 \right| \leq \bar{F}_2, \quad \frac{1}{\bar{G}_2} \leq \frac{\hat{g}_2}{g_2} \leq \bar{G}_2, \quad |d_2| \leq \bar{D}_2, \quad (3.27)$$

onde “ $\hat{\cdot}$ ” denota valores nominais, \hat{f}_2 , \bar{F}_2 , \hat{g}_2 e \bar{G}_2 são funções não-lineares contínuas e \bar{D}_2 é uma estimativa para a cota superior das perturbações externas.

A intenção inicial era projetar este controlador para compensar explicitamente as incertezas relacionadas aos parâmetros massa e altura do centro de gravidade do veículo, os quais se encontram presentes nas funções não-lineares f_2 e g_2 em (2.49)--(2.50) (tais incertezas serão utilizadas nos resultados de simulação do capítulo seguinte). Porém, as expressões f_2 e g_2 em função destes parâmetros, apresentaram uma grande complexidade, o que dificultou obter os limites superiores de desvios paramétricos em (3.27). Desta forma, neste projeto será considerado que $\bar{F}_2 \equiv 0$ e $\bar{G}_2 \equiv 1$. A cota superior \bar{D}_2 será utilizada posteriormente para compensar as perturbações externas utilizadas em simulação no próximo capítulo.

Considere então as seguintes camadas de fronteiras em torno das superfícies s_1 e s_2 , conforme [34],

$$B_1(t) = \{|s_1(t)| \leq \epsilon_1\}, \quad B_2(t) = \{|s_2(t)| \leq c\epsilon_2\}, \quad (3.28)$$

onde ϵ_1 , $\epsilon_2 > 0$ são as larguras destas camadas de fronteiras, a serem definidas pelo projetista.

Então, os seguintes sinais de controle contínuos

$$T_m(t) = \frac{\left[-f_1(u(t)) + \dot{u}_r(t) - \eta \text{sat} \left(\frac{s_1(t)}{\epsilon_1} \right) \right]}{k_{21}},$$

$$\delta(t) = \frac{\left[-f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \ddot{\phi}_r(t) - c\dot{e}_2(t) - \eta \text{sat} \left(\frac{s_2(t)}{c\epsilon_2} \right) \right]}{g_2(u(t), \phi(t))}, \quad (3.29)$$

onde a função $\text{sat}(\cdot)$, é dada por

$$\text{sat}(y) = \begin{cases} y, & \text{para } |y| \leq 1, \\ \text{sign}(y), & \text{para } |y| > 1, \end{cases}$$

asseguram as respectivas condições globais de quase deslizamento:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_1^2(t) \leq -\eta |s_1(t)|, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} s_2^2(t) \leq -\eta |s_2(t)|, \quad (3.30)$$

o que torna as camadas de fronteiras $B_1(t)$ e $B_2(t)$ em (3.28), conjuntos positivamente invariantes, as quais são, respectivamente, alcançadas em tempo finito dados por:

$$t_{r1} \leq \frac{s_1(t=0)}{\eta}, \quad t_{r2} \leq \frac{s_2(t=0)}{\eta}, \quad (3.31)$$

Note ainda que, de acordo com [34], a precisão de rastreamento depende das larguras das camadas de fronteiras ϵ_1 e ϵ_2 , sendo dadas por

$$|e_1(t)| \leq \epsilon_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e_2(t)| \leq \epsilon_2, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{e}_2(t)| \leq 2c\epsilon_2, \quad (3.32)$$

Com a utilização dos sinais de controle contínuos em (3.29) para o *Controlador de Rastreamento* quase modos deslizantes, evita-se o fenômeno de *chattering*.

3.1.4.2 Controle Vetorial Unitário-UVC

A técnica conhecida na literatura por controle vetorial unitário (Unity Vector Control) de [35] é agora utilizada para o problema de rastreamento das trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ em (3.1).

Para isto, considere que (2.49)--(2.50) pode ser reescrita através de:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)[\tau - N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)], \quad (3.33)$$

onde $q = (x, \phi) \in \mathbb{R}^2$, $\dot{q} = (u, \dot{\phi}) \in \mathbb{R}^2$ e $M(q, \dot{q}) = \text{diag}(1/k_{21}, 1/g_2(u, \phi)) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é a matriz diagonal positiva definida e $\tau = (T_m(t), \delta(t)) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de controle.

Seja definido então: $N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \|N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\|$ (a norma euclidiana), $M^-(q, \dot{q}) = \lambda_{\min}(M(q, \dot{q}))$ e $M^+(q, \dot{q}) = \lambda_{\max}(M(q, \dot{q}))$, onde λ_{\min} e λ_{\max} são os autovalores mínimo e máximo da matriz M , respectivamente.

A seguinte lei de controle

$$\tau = (T_m(t), \delta(t)) = \tau_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \frac{S(t)}{\|S(t)\|}, \quad (3.34)$$

onde $\tau_0 = \tau_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) > 0$ é dado por

$$\tau_0 = M^+(q, \dot{q}) \left[|c\dot{e}_2| + \|\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} + \eta \right], \eta > 0, \quad (3.35)$$

garante que a seguinte condição global de deslizamento,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S' S \leq -\eta \|S\|, \quad (3.36)$$

seja satisfeita, o que torna o vetor de superfícies $S = 0$ um conjunto positivamente invariante, que é alcançado em tempo finito dado por

$$t_r \leq \frac{\|S(t=0)\|}{\eta}, \quad (3.37)$$

Para determinar o ganho do controlador τ_0 em (3.35), é utilizada a seguinte função de *Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2} S' S, \quad (3.38)$$

Derivando-se V em relação ao tempo, chega-se a:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{S}' S + S' \dot{S}) = S' \dot{S}, \quad (3.39)$$

Substituindo \dot{S} na expressão (3.39), é possível reescrever

$$\dot{V} = S' \left[c\dot{e}_2 + (\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r) - M^{-1}(q, \dot{q}) \left(\tau_0 \frac{S}{\|S\|} - N \right) \right], \quad (3.40)$$

Utilizando o Lema .2 (Apêndice 6), na expressão (3.40) resulta em

$$\dot{V} \leq \|S\| \left[|c\dot{e}_2| + \|(\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r)\| + \|M^{-1}N\| \right] - S' M^{-1}(q, \dot{q}) \tau_0 \frac{S}{\|S\|},$$

Mostra-se a partir do Lema .4 (Apêndice 6) que é válido considerar

$$\dot{V} \leq \|S\| \left[|c\dot{e}_2| + \|(\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r)\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} \right] - S' M^{-1}(q, \dot{q}) \tau_0 \frac{S}{\|S\|}, \quad (3.41)$$

Com o Lema .3 (Apêndice 6) na expressão (3.41), obtém-se

$$\dot{V} \leq \|S\| \left[|c\dot{e}_2| + \|(\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r)\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} - \frac{\tau_0}{M^+(q, \dot{q})} \right],$$

Assim, (3.35) será atendida se a seguinte condição for satisfeita

$$\|S\| \left[|c\dot{e}_2| + \|(\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r)\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} - \frac{\tau_0}{M^+(q, \dot{q})} \right] \leq -\eta \|S\|,$$

o que resulta em:

$$\tau_0 \geq M^+(q, \dot{q}) \left[|c\dot{e}_2| + \|(\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r)\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} + \eta \right], \quad (3.42)$$

Desta forma, a partir de (3.42), recaímos na expressão mostrada em (3.35). A partir de (3.34) e (3.35), determina-se a lei de controle UVC para o *Controlador de Rastreamento*.

3.1.4.3 Controle Vetorial Unitário Estendido- EUVC

Para a técnica de controle vetorial unitário acima, observe que o mesmo “ganho de realimentação” τ_0 de (3.35) é utilizado para ambos os sinais de controle $T_m(t)$ e $\delta(t)$ em (3.34). Portanto, se forem utilizados ganhos diferentes para cada entrada, será possível obter em muitos casos menores amplitudes e energias nos sinais de controle. Esta foi a grande motivação pelo desenvolvimento da versão estendida para o UVC, o controle vetorial unitário estendido (Extended unity vector control) proposta em [36].

Considere novamente (3.33). Mostraremos na seqüência que as seguintes leis de controle

$$T_m(t) = \frac{\bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{k_{21}} \frac{S(t)}{\|S(t)\|}, \quad \delta(t) = \frac{\bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{g_2(u(t), \phi(t))} \frac{S(t)}{\|S(t)\|}, \quad (3.43)$$

onde

$$\bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \left[|c\dot{e}_2| + \|\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} + \eta \right], \eta > 0, \quad (3.44)$$

garantem que (3.36) seja satisfeita.

O cálculo desta lei de controle será realizado conforme [36], mas considerando-se aqui que $Q = I$ (matriz identidade de ordem adequada), $D = M(q, \dot{q}) = \text{diag}(1/k_{21}, 1/g_2(u, \phi))$, $\Delta = 0$ (não foram consideradas as incertezas paramétricas de massa e altura do centro de gravidade do veículo, devido à dificuldade em obter um limite superior destes desvios paramétricos, conforme mencionado anteriormente), $B = 0$ e $T = \text{diag}(t_1, t_2)$ é a matriz de ganhos independentes do controlador que será determinada. Assumindo novamente a função de *Lyapunov* em (3.38), e derivando-se V em relação ao tempo, chega-se a:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} (\dot{S}'S + S'\dot{S}) = S'\dot{S}, \quad (3.45)$$

Substituindo \dot{S} na expressão (3.45), é possível obter

$$\dot{V} = S' \left[c\dot{e}_2 + (\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r) - M^{-1}(q, \dot{q}) \left(T \frac{S}{\|S\|} - N \right) \right], \quad (3.46)$$

Utilizando o Lema .2 (Apêndice 6) na equação (3.46), é possível mostrar que:

$$\dot{V} \leq \|S\| \left[|c\dot{e}_2| + \|\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r\| + \|M^{-1}N\| \right] - S'M^{-1}(q, \dot{q})T \frac{S}{\|S\|},$$

A partir do Lema .4 (Apêndice 6) é válido considerar que:

$$\dot{V} \leq \|S\| \left[|c\dot{e}_2| + \|\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} \right] - S'M^{-1}(q, \dot{q})T \frac{S}{\|S\|}, \quad (3.47)$$

A condição (3.47) pode ser reescrita por

$$\dot{V} \leq \|S\| \left[|c\dot{e}_2| + \|\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} - S'M^{-1}(q, \dot{q})T \frac{S}{\|S\|^2} \right],$$

O objetivo (3.35) é alcançado, caso a seguinte condição seja satisfeita

$$\|S\| \left[|c\dot{e}_2| + \|\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} - \frac{S'M^{-1}(q, \dot{q})TS}{\|S\|^2} \right] \leq -\eta\|S\|,$$

Assumindo que:

$$\lambda_{\min}(D^{-1}T) \leq \frac{S'M^{-1}TS}{\|S\|^2}, \quad (3.48)$$

A expressão (3.48) pode ser reescrita como segue

$$|c\dot{e}_2| + \|(\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r)\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} + \eta \leq \lambda_{\min}(D^{-1}T), \quad (3.49)$$

Substituindo $\lambda_{\min}(D^{-1}T)$ por $\min(t_i/d_i)$ na expressão dada em (3.49) resultam ganhos independentes do controlador $t_i > 0$ para $i = 1, 2$

$$t_i \geq d_i \left[|c\dot{e}_2| + \|(\dot{u}_r, \ddot{\phi}_r)\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{M^-(q, \dot{q})} + \eta \right],$$

que pode ser representada por

$$t_i \geq d_i \bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (3.50)$$

onde $\bar{\tau}_0$ é dado em (3.44). Relembre que $d_1 = 1/k_{21}$ e $d_2 = 1/g_2(u, \phi)$. Assim, determina-se a partir de (3.50) os ganhos dos sinais de controle $T_m(t)$ e $\delta(t)$ em (3.43), respectivamente, dadas por

$$t_1 = \frac{\bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{k_{21}}, \quad t_2 = \frac{\bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{g_2(u(t), \phi(t))},$$

É importante ressaltar que, a técnica de controle UVCE trata os casos onde a matriz $M(q, \dot{q})$ de (3.33) não é necessariamente diagonal. De (3.34), (3.35) (UVC) e (3.43) (UVCE), pode-se concluir que, diferentemente da lei de controle UVC, que apresenta o mesmo “ganho de realimentação” $\tau_0 = M^+ \bar{\tau}_0$ para ambas as entradas, o método UVCE utiliza ganhos diferentes: $\frac{1}{k_{21}} \bar{\tau}_0$ para T_m e $\frac{1}{g_2(u(t), \phi(t))} \bar{\tau}_0$ para δ .

3.2 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo explicamos em detalhes a estrutura de controle em malha fechada utilizada para o problema de rastreamento das trajetórias $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ do condutor, de modo a alcançar uma

condução relativamente simples e segura para o transporte dos passageiros. Além disso, realizamos os diversos projetos para os *Controladores de Rastreamento* utilizados para o rastreamento das trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ em (3.1). As metodologias não-lineares utilizadas foram: o controlador por modos deslizantes e uma realimentação linearizante ambos projetados sobre as dinâmicas não-lineares em (2.49)--(2.50), o controle vetorial unitário e o controle vetorial unitário estendido projetados sobre (3.33). As metodologias lineares utilizadas foram: um regulador quadrático linear projetado com base no modelo linearizado do triciclo em espaço de estados em (2.52) e 2 controladores PID com compensação estática da não-linearidade, projetados sobre as funções de transferência mostradas na Tabela 2.3, seguindo o projeto de [17]. No capítulo seguinte, serão mostrados e analisados os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle em malha fechada mostrada na Figura 3.1, utilizando todos estes controladores aqui desenvolvidos.

4 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES DA ESTRUTURA DE CONTROLE EM MALHA FECHADA

Neste capítulo, serão mostrados os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle em malha fechada mostrada na Figura 3.1, utilizando as seguintes metodologias para os *Controladores de Rastreamento*:

1. O regulador linear quadrático (LQR) em (3.12);
2. O controlador PID-1 de [17] mostrado em (3.18), o controlador PID-2 em (3.13) e o controlador PID-3 em (3.14) para o rastreamento de $\phi_r(t)$. Optamos neste trabalho por utilizar em conjunto com estes controladores a Realimentação linearizante em (3.19)--(3.21) para rastreamento de $u_r(t)$;
3. O controlador por modos deslizantes (QMD) em (3.29);
4. A realimentação linearizante entrada-saída (RL) em (3.19)--(3.21);
5. O controle vetorial unitário (UVC) em (3.34) e o controle vetorial unitário estendido (UVCE) em (3.43).

Serão mostrados os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle em malha fechada mostrada na Figura 3.1, com os controladores listados acima, utilizando inicialmente os comandos desejados pelo condutor obtidos de [17]. Posteriormente as simulações serão refeitas com estes comandos suavizadas por filtros de primeira ordem, a fim analisar se há melhoria de desempenho em malha-fechada sob condições nominais (sem perturbações externas nem incertezas paramétricas) e sob as perturbações externas e incertezas paramétricas. Serão mostrados também os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle em malha fechada mostrada na Figura 3.1, com os controladores por modos deslizantes, Realimentação linearizante e o PID-3, mas utilizando variação exponencial conforme [14], e senoidal para o esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo motorista, sob velocidade longitudinal $u_d(t)$ constante em ambos os casos. Para facilitar a análise, em todas as situações descritas, serão utilizados os critérios integral do erro ao quadrado (ISE) e integral dos sinais de controle ao quadrado (medida da energia utilizada).

4.1 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO SEM PERTURBAÇÕES EXTERNAS E COM PARÂMETROS NOMINAIS DO VEÍCULO

Nesta seção, começaremos mostrando os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle em malha fechada mostrada na Figura 3.1, considerando o caso nominal: sem perturbações externas, isto é $F_1(t) \equiv F_2(t) \equiv F_3(t) \equiv V_\omega(t) \equiv 0$ em (2.49)–(2.50), e utilizando os parâmetros nominais do triciclo em (2.47). Os valores destes parâmetros foram obtidos de [17] e são listados na Tabela 5.1 do Apêndice 7.

Inicialmente, o condutor estabelece os comandos desejados para o ângulo de esterço $\delta_d(t)$ e velocidade longitudinal $u_d(t)$, onde δ_d é linear por partes e assume os valores (em graus):

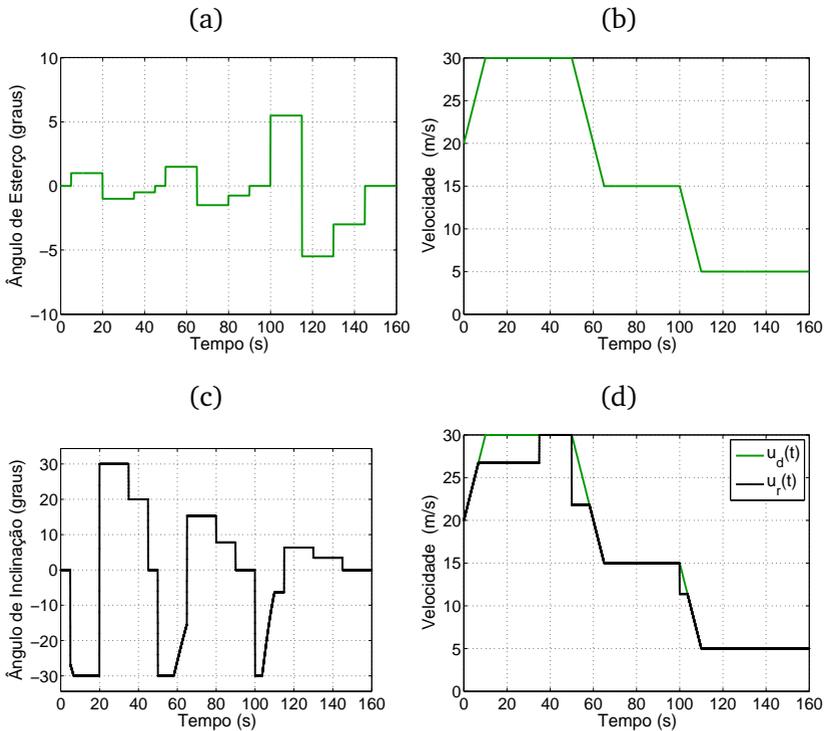
$$\delta_d(t) = \begin{cases} 0^\circ, & \text{para } t = [0 \ 5) \text{ s;} \\ 1^\circ, & \text{para } t = [5 \ 20) \text{ s;} \\ -1^\circ, & \text{para } t = [20 \ 35) \text{ s;} \\ -0,5^\circ, & \text{para } t = [35 \ 45) \text{ s;} \\ 0^\circ, & \text{para } t = [45 \ 50) \text{ s;} \\ 1,5^\circ, & \text{para } t = [50 \ 65) \text{ s;} \\ -1,5^\circ, & \text{para } t = [65 \ 80) \text{ s;} \\ -1^\circ, & \text{para } t = [80 \ 90) \text{ s;} \\ 0^\circ, & \text{para } t = [90 \ 100) \text{ s;} \\ 5,5^\circ, & \text{para } t = [100 \ 115) \text{ s;} \\ -5,5^\circ, & \text{para } t = [115 \ 130) \text{ s;} \\ -2,5^\circ, & \text{para } t = [130 \ 145) \text{ s;} \\ 0^\circ, & \text{para } t = [145 \ 160) \text{ s;} \end{cases}, \quad (4.1)$$

Para a geração da velocidade desejada u_d , foram utilizadas as seguintes funções lineares por partes dependentes do tempo (t), dadas por

$$u_d(t) = \begin{cases} (20 + t) \text{ ms}^{-1}, & \text{para } t = [0 \ 10) \text{ s;} \\ 30 \text{ ms}^{-1}, & \text{para } t = [10 \ 50) \text{ s;} \\ (80 - t) \text{ ms}^{-1}, & \text{para } t = [50 \ 65) \text{ s;} \\ 15 \text{ ms}^{-1}, & \text{para } t = [65 \ 100) \text{ s;} \\ (115 - t) \text{ ms}^{-1}, & \text{para } t = [100 \ 110) \text{ s;} \\ 5 \text{ ms}^{-1}, & \text{para } t = [110 \ 160) \text{ s;} \end{cases}, \quad (4.2)$$

Estes comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor em (4.1) e (4.2), foram obtidos de [17], os quais são mostrados respectivamente nas Figuras 4.1a (em graus) e 4.1b.

Figura 4.1: (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ juntamente com a velocidade desejada pelo condutor $u_d(t)$.



A partir destes comandos, o *Gerador de Trajetórias* determina as trajetórias de referências lineares por partes $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ em (3.1) e (3.3)-(3.4), sendo apresentadas nas Figuras 4.1c (ângulo de inclinação em graus) e 4.1d, respectivamente. Foi utilizado um período de amostragem $T = 0,1$ s em (3.1) e $\phi_{\max} = \pi/6$ rad = 30° (graus). Observa-se, que, de acordo com o *Gerador de Trajetórias*, $u_r(t) \equiv u_d(t)$ quando $|\phi_r(t)| \leq \phi_{\max}$ e $u_r(t) \neq u_d(t)$ quando $|\phi_r(t)| > \phi_{\max}$, conforme é ilustrado nas Figuras 4.1c e 4.1d.

Para as simulações, foram consideradas as seguintes condições iniciais para o veículo: $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ e $u(0) = 25 \text{ ms}^{-1}$ e as de-

mais variáveis de estados são nulas para $t = 0$.

Escolhemos, seguindo a metodologia dada em (3.7), para o controlador LQR as seguintes matrizes de ponderações:

$$\begin{cases} C_z = \text{diag}(0, 5; 0, 5; 0, 5; 0, 5; 0, 5; 0, 5; 1; 0, 25; 1; 0, 5; 0, 1; \\ \quad 0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 1; 0, 1; 25; 20; 1; 1) \\ D_z = \text{diag}(0, 005; 0, 001) \end{cases}$$

Para o controlador RL, foram utilizados em (3.21) os parâmetros de controle: $k_2 = 20$, $k_3 = 40,5$ e $k_4 = 41$, que foram obtidos de (3.25) e $k_1 = 2$ escolhido arbitrariamente. Para a escolha de k_2 , k_3 e k_4 foi considerando o método (3.7), assumindo que $e_0 = 0,1$ a condição inicial e as seguintes matrizes de ponderações

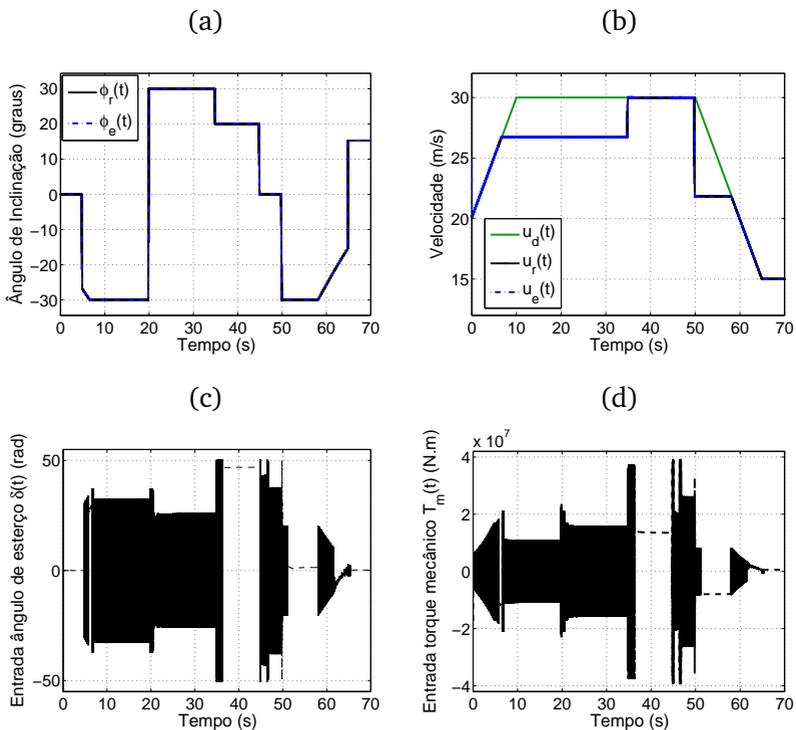
$$\begin{cases} C_{ze} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, D_{ze} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Para os controladores QMD, UVC e UVCE consideramos os seguintes parâmetros de controle: $c = 2$ (constante de tempo do erro) em (3.26), $\varepsilon_1 = 0,75$ e $\varepsilon_2 = 0,1$ (larguras das camadas limites de B_1 e B_2 , respectivamente) em (3.28) e $\eta = 1$ em (3.29), (3.35), (3.44).

Neste trabalho, nos deparamos com um problema na implementação da estratégia de controle em malha-fechada, utilizando os *Controladores de Rastreamento* UVC e UVCE. Observe na Figura 4.2a, que a inclinação $\phi_e(t)$ do veículo obtida com o controlador UVCE rastreia a trajetória de referência $\phi_r(t)$ com uma precisão boa. Já a Figura 4.2b mostra a velocidade longitudinal $u_e(t)$ do veículo obtida com o controlador UVCE, a qual rastreia a trajetória de referência $u_r(t)$ adequadamente. Entretanto, pode-se concluir a partir de 4.2c (ângulo de esterço em radianos) e 4.2d, que as entradas $\delta(t)$ e $T_m(t)$ determinadas pelo controlador UVCE não podem ser implementadas na prática, pois ambas exibiram *chattering* (chaveamento de alta frequência) e além disso, a entrada ângulo de esterço $\delta(t)$ viola as restrições físicas uma vez que as rodas dianteiras do veículo giram em muitos círculos completos para a esquerda e para a direita (veja na Figura 4.2c que $\delta(t)$ atinge 50 rad!). Apesar de não ser mostrado, o controlador UVC também apresentou estes inconvenientes e com amplitudes nos sinais de controle ainda maiores do que o UVCE: a entrada $T_m(t)$ é considerada elevada e o ângulo de esterço $\delta(t)$ do UVC é da ordem de 10^7 rad! Por apresentarem sinais de controle com elevadas amplitudes, foi necessário utilizar passos

de integração muito baixos nas simulações, da ordem de 10^{-6} para o UVCE e 10^{-8} para UVC. Por exemplo, para obter os resultados mostrados na Figura 4.2 com o controlador UVCE, para um tempo total de simulação de $t = 70$ s foi necessário simular por aproximadamente dois dias consecutivos, tornando-se inviável realizar as simulações com o controlador UVC.

Figura 4.2: (a) Referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com o controlador UVCE $\phi_e(t)$, (b) velocidade desejada pelo condutor $u_d(t)$, referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com o controlador UVCE $u_e(t)$, (c) entrada ângulo de esterço produzida pelo controlador UVCE e (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador UVCE.



Esta elevada amplitude nestes sinais de controle, pode ser explicada tomando por base o ganho do controlador dado em (3.44). Foi constatado por simulação os seguintes valores para os parâmetros do controlador $N^+ \approx 37$ E $M^- \approx 0,00025$. Note que o ganho

do controlador $\bar{\tau}_0$ em (3.44) é composto da divisão dos termos N^+ por M^- o que resulta no valor aproximado de 148000. Além disso, conforme (3.43) o ganho efetivo do controlador para a entrada T_m é dividida pelo parâmetro $k_{21} = 0,007$ e a entrada δ é dividida pela função $g_2 \approx 4000$ o que explica as elevadas amplitudes apresentadas pelas entradas mostradas nas Figuras 4.2d e 4.2c. No controlador UVC, as entradas apresentam o mesmo ganho τ_0 para o controlador em (3.35), onde o parâmetro $M^+ \approx 141,6$ multiplica a divisão de N^+ por M^- , resultando em ganhos extremamente elevados. Já a questão do chaveamento pode ser entendido a partir dos sinais de controle UVC e UVCE em (3.34) e (3.43) respectivamente. Nota-se por exemplo, que a entrada T_m é composta de $s_1/\|S\| = s_1/\sqrt{s_1^2 + s_2^2}$. Quando a superfície de inclinação é alcançada em tempo finito ou seja, $s_2 \equiv 0$, então $s_1/\sqrt{s_1^2} \cong \text{sign}(s_1)$ e o mesmo raciocínio pode ser aplicado para a entrada δ .

Para os demais *Controladores de Rastreamento* utilizados neste trabalho, as simulações ocorreram normalmente sem os problemas de implementações descritos acima.

Desta forma, percebemos que a inclinação $\phi_{1q}(t)$ do veículo obtida com o controlador LQR mostrada na Figura 4.3a, a inclinação $\phi_{p1}(t)$, $\phi_{p2}(t)$, $\phi_{p3}(t)$ do veículo obtidas com o controladores PID-1, PID-2 e PID-3 (mostradas juntas) na Figura 4.4a, a inclinação $\phi_{r1}(t)$ do veículo obtida com o controlador RL mostrada na Figura 4.5a e a inclinação $\phi_{qm}(t)$ do veículo obtida com o controlador QMD mostrada na Figura 4.6a, rastreiam a trajetória de referência $\phi_r(t)$ com elevada precisão. Tais precisões podem ser observadas pelos erros de inclinação obtidos pelos controladores LQR, PID-1, PID-2 e PID-3 (mostrados juntos), RL e QMD, mostrados nas Figuras 4.3e, 4.4e, 4.5e e 4.6e, respectivamente.

Da mesma forma, a velocidade longitudinal $u_{1q}(t)$ do veículo obtida pelo controlador LQR mostrada na Figura 4.3b, a velocidade longitudinal $u_{r1}(t)$ do veículo obtida pelo controlador RL associado ao PID-1 mostrada na Figura 4.4b, a velocidade longitudinal $u_{r1}(t)$ do veículo obtida pelo controlador RL mostrada na Figura 4.5b e a velocidade longitudinal $u_{qm}(t)$ do veículo obtida pelo controlador QMD mostrada na Figura 4.6b, rastreiam a trajetória de referência $u_r(t)$ com precisão satisfatória. Já os erros de rastreamento da velocidade longitudinal associados a estes controladores são mostrados nas Figuras 4.3f, 4.4f, 4.5f e 4.6f, respectivamente. Por simplicidade, iremos mostrar somente os resultados obtidos por um controlador RL (associado ao PID-1), pois os controladores PID-2 e PID-3 foram

associados a este mesmo controlador, mantendo assim os mesmos resultados apresentados nas Figuras 4.4b e 4.4f.

Na sequência, serão analisados os sinais de controle resultantes destas simulações: $\delta(t)$ (ângulo de esterço das rodas dianteiras) e o $T_m(t)$ (torque mecânico produzido na roda traseira).

Observamos que a entrada ângulo de esterço $\delta_{lq}(t)$ produzida pelo controlador LQR mostrada na Figura 4.3c, as entradas $\delta_{p1}(t)$, $\delta_{p2}(t)$ e $\delta_{p3}(t)$ produzidas pelos controladores PID-1, PID-2 e PID-3 (mostradas juntas) na Figuras 4.4c, a entrada ângulo de esterço $\delta_{rl}(t)$ produzida pelo controlador RL mostrada na Figura 4.5c e a entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo controlador QMD mostrada na Figura 4.6c, são possíveis de serem implementadas na prática, pois as mesmas não ultrapassam o valor do ângulo de esterço máximo suportado pelas rodas dianteiras do veículo que corresponde a $|\delta_{\max}| = \pi/4 \text{ rad} = 45^\circ$ (graus). Mesmo com poucas oscilações de alta amplitude e com rápidas variações, temos conforme esperávamos o sistema *steer-by-wire*, ou seja $\delta_{lq}(t) \cong \delta_d(t)$, $\delta_{p1}(t) \cong \delta_{p2}(t) \cong \delta_{p3}(t) \cong \delta_d(t)$, $\delta_{rl}(t) \cong \delta_d(t)$ e $\delta_{qm}(t) \cong \delta_d(t)$. Os picos que aparecem durante os transitórios nestas entradas são inerentes ao sistema STC utilizado pelo veículo. Note que tais oscilações ocorrem precisamente quando a trajetória de referência $\phi_r(t)$ apresenta variações relativamente rápidas. Fisicamente, as rodas dianteiras do veículo esterçam fazendo com que o corpo do veículo se incline e mantenha o ângulo de inclinação juntamente com a referência. Este comportamento é intuitivo e esperado do ponto de vista físico.

As Figuras 4.3d, 4.4d, 4.5d e 4.6d mostram as entradas torque produzidas pelos controladores: LQR, RL associado ao PID-1, RL e QMD respectivamente. Note que estas entradas no geral, apresentam picos com amplitudes mais elevadas, que ocorrem nos mesmos instantes de tempo em que a trajetória de referência $u_r(t)$ apresenta rápidas variações (veja Figura 4.1d), permanecendo baixas nos demais instantes de tempo.

No geral, espera-se que $|\phi_r(t)| \leq \phi_{\max} = \pi/6 \text{ rad} = 30^\circ$ (graus) e $u_r(t) \cong u_d(t)$. Quando há rastreamento perfeito em malha-fechada, isto é $\phi(t) = \phi_r(t)$ e $u(t) = u_r(t) \cong u_d(t)$ (Figuras 4.3a-4.4a-4.5a-4.6a e 4.3b-4.4b-4.5b-4.6b), a dinâmica simplificada de ordem reduzida para $\phi(t)$ em (3.2) juntamente com (3.3)-(3.4), garantem que $\delta(t) \cong \delta_d(t)$. Assim, é razoável considerar também para o modelo de 9-GL do PVI3R, que $\delta(t) \cong \delta_d(t)$ (vide Figuras 4.3c-4.4c-4.5c-4.6c). Resolve-se desta forma o problema de rastreamento das trajetórias $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejadas pelo condutor.

Tabela 4.1: Índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* em simulação sem perturbações externas e com parâmetros nominais no veículo, onde $e_1 = u - u_r$, $e_2 = \phi - \phi_r$.

<i>Controlador de Rastreamento</i>	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
Regulador quadrático linear (LQR)	0,088	117,5	0,401	$1,152 \cdot 10^8$
PID-1+ RL	0,069	6,003	0,375	$1,9 \cdot 10^7$
PID-2 + RL	0,051	6,003	0,379	$1,9 \cdot 10^7$
PID-3 + RL	0,036	6,003	0,384	$1,9 \cdot 10^7$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,024	6,278	0,355	$1,9 \cdot 10^7$
Realimentação linearizante (RL)	0,010	6,003	0,352	$1,9 \cdot 10^7$

Analisaremos agora os índices de desempenho obtidos em simulação dos diversos *Controladores de Rastreamento*, os quais têm os valores mostrados na Tabela 4.1. Percebe-se dos valores da tabela, que o *Controlador de Rastreamento* Realimentação linearizante (RL), projetado de modo a garantir que $e_1 \rightarrow 0$ e $e_2 \rightarrow 0$ (rastreamento perfeito), foi o que apresentou o melhor desempenho em todos os índices, quando comparado com os demais controladores. Isto já era esperado, pois os controladores PID e o LQR foram projetados com base no sistema linearizado, e o QMD utiliza camadas de fronteiras para o modelo não-linear. Note ainda que o índice $\int e_2^2$ relativo ao RL, foi aproximadamente cinco vezes menor que os correspondentes obtidos pelos controladores PID, o que indica uma precisão maior do controlador RL no rastreamento da trajetória $\phi_r(t)$. Entretanto, apesar dos controladores PID apresentarem um desempenho inferior, estes controladores necessitam apenas da realimentação de saída e não de todo o vetor de estados como o RL que apresenta maior custo e complexidade de implementação. Já o *Controlador de Rastreamento* Regulador linear quadrático (LQR) foi o que apresentou o pior desempenho em todos os índices, em relação aos demais controladores. Além disso, os controladores PID-2 e PID-3 (ambos projetados nesta dissertação) apresentaram desempenho $\int e_2^2$ melhor em relação ao PID-1 de [17], com aproximadamente o mesmo índice $\int \delta^2$ (energia utilizada pelo sinal de controle δ), associados ao mesmo controlador RL.

Na seção seguinte, serão mostrados os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle mostrada na Figura 3.1, sob perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo. Para isto, serão utilizados os seguintes *Controladores de Rastreamento*:

LQR, PID-1, PID-2 e PID-3, RL e QMD. Não serão utilizados os *Controladores de Rastreamento* UVC e UVCE, pois conforme mostrado nas Figuras 4.2c e 4.2d, estes controladores apresentaram sinais de controle que violam as restrições físicas além de exibirem o fenômeno de *chattering*.

Figura 4.4: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores PID-1 $\phi_{p1}(t)$, PID-2 $\phi_{p2}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$, e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entradas ângulos de esterço produzidas pelos controladores PID-1 $\delta_{p1}(t)$, PID-2 $\delta_{p2}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erros de inclinação obtidos pelos controladores PID-1 $e_{2p1}(t)$, PID-2 $e_{2p2}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL.

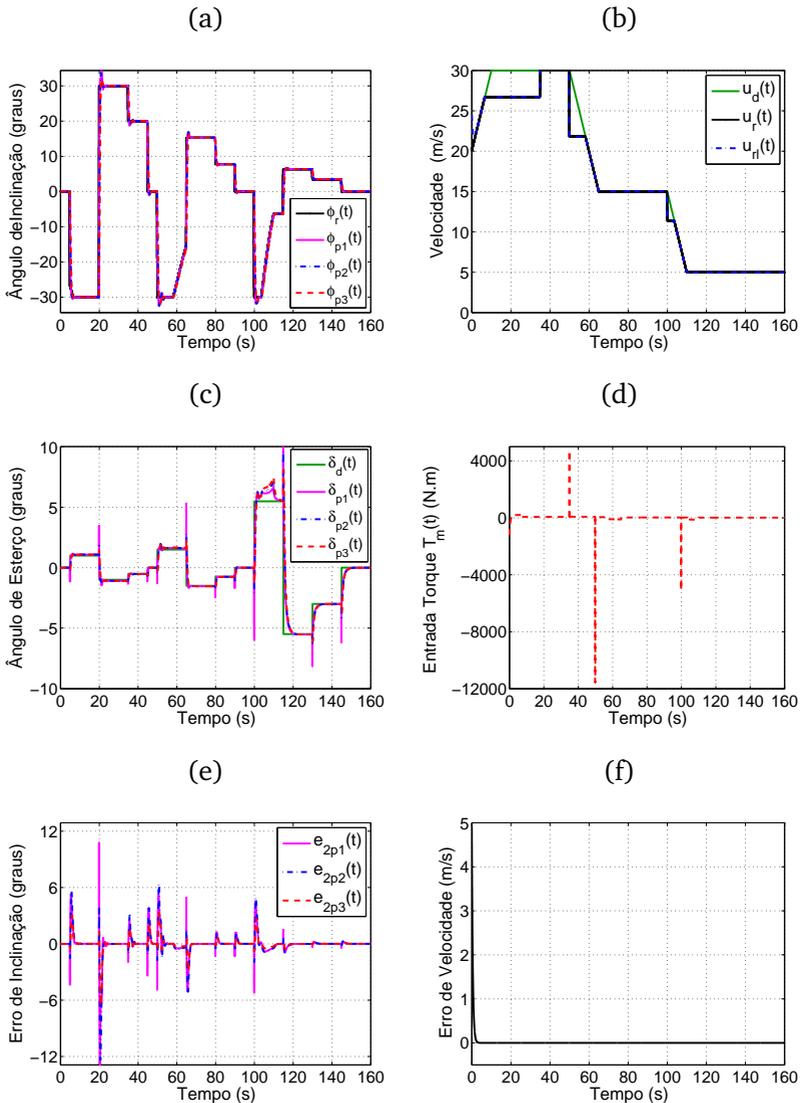
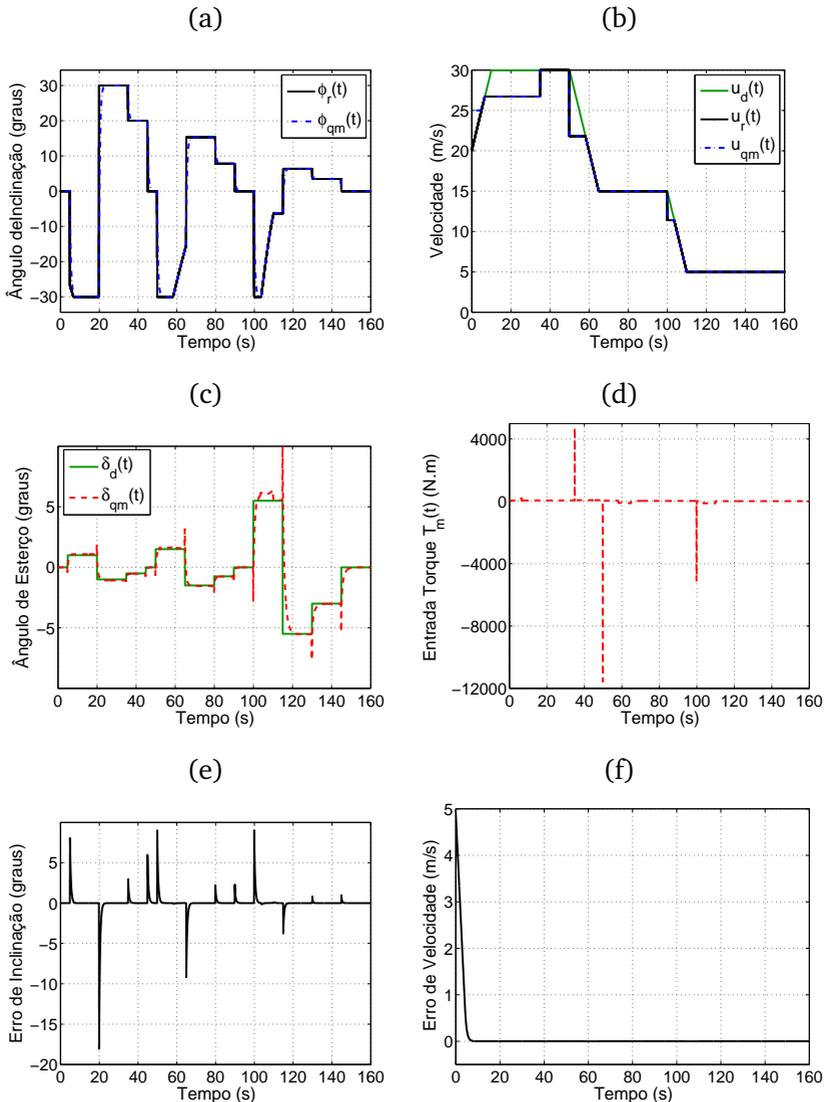


Figura 4.6: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo controlador QMD, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador QMD, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador QMD e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador QMD.

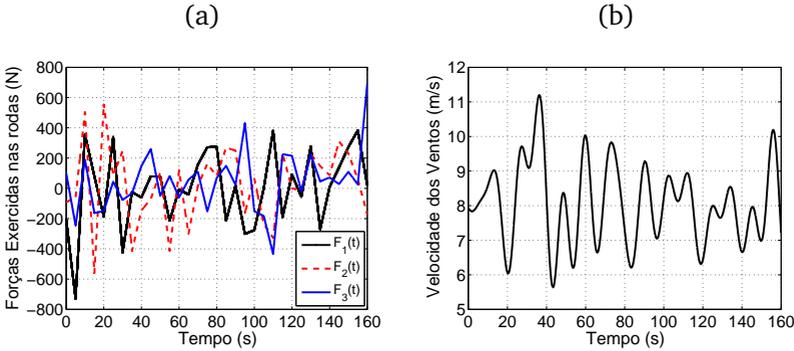


4.2 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM PERTURBAÇÕES EXTERNAS E INCERTEZAS PARAMÉTRICAS NO VEÍCULO

Nesta seção, mostraremos os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle mostrada na Figura 3.1, considerando perturbações externas, ou seja $F_1(t) \neq F_2(t) \neq F_3(t) \neq V_\omega(t) \neq 0$ em (2.49)--(2.50) e incertezas paramétricas de massa e altura do centro de gravidade no veículo em (2.47).

Assume-se, conforme [17], que as perturbações externas variam “aleatoriamente”, com $|F_i(t)| \leq 800$ N, para $i = 1, 2, 3$, e $5 \text{ ms}^{-1} \leq V_\omega(t) \leq 12 \text{ ms}^{-1}$, onde $|F_i(t)|$ é a força exercida na roda i pelo solo e $V_\omega(t)$ é a velocidade dos ventos laterais sobre o veículo, as quais são ilustradas nas Figuras 4.7a e 4.7b, respectivamente.

Figura 4.7: Perturbações externas utilizadas nas simulações: (a) forças exercidas nas rodas do veículo pelo solo, $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ e (b) velocidade dos ventos laterais sobre o veículo $V_\omega(t)$.



Considere que, os valores nominais para a massa e altura do centro de gravidade do veículo (corpo 2) são $m_2 = 500$ kg e $h_2 = 1$ m, respectivamente. Desta forma, iremos utilizar nas simulações, incertezas nestes parâmetros de +20% e -5%, respectivamente.

Foi verificado em (2.49)--(2.50) que $|d_2(\phi, t)| < D_2$, onde $D_2 \triangleq 70$ é a estimativa da cota superior para as perturbações externas utilizadas, considerando $|\phi| < \pi/4$ rad e $t \geq 0$. Para que o controlador QMD consiga rejeitar estas perturbações, readaptamos o sinal de controle $\delta(t)$ em (3.29), substituindo simplesmente η por $\eta + D_2$. Para maiores detalhes, veja [34].

Sendo assim, observa-se o rastreamento da trajetória de referência $\phi_r(t)$, obtidos com os controladores LQR, PID1, PID-2 e

PID-3 (mostrados juntos), RL e QMD, os quais são mostrados nas Figuras 4.8a, 4.9a, 4.10a e 4.11a, respectivamente. Já as correspondentes entradas ângulo de esterço produzidas por estes controladores são mostradas nas Figuras 4.8c, 4.9c, 4.10c e 4.11c respectivamente, sob as perturbações externas e incertezas paramétricas. Notamos que estes resultados são semelhantes ao caso nominal (sem perturbações externas nem incertezas paramétricas) que foram obtidos na seção anterior, (veja as Figuras 4.3a, 4.4a, 4.5a e 4.6a e 4.3c, 4.4c, 4.5c e 4.6c).

Da mesma forma, as Figuras 4.8b, 4.9b, 4.10b e 4.11b representam o rastreamento da trajetória de referência $u_r(t)$ obtidos com os controladores LQR, RL (associado ao PID-1), RL e QMD respectivamente. As Figuras 4.8d, 4.9d, 4.10d e 4.11d, ilustram respectivamente as entradas torque mecânico produzidas por estes controladores, sob perturbações externas e incertezas paramétricas. Note que a dinâmica \dot{u} em (2.49)--(2.50) não é influenciada pelas perturbações externas, o que torna estes resultados equivalentes aos obtidos na Seção 4.1 (sem perturbações externas nem incertezas paramétricas), os quais são mostrados nas Figuras (4.3b, 4.4b, 4.5b, 4.6b e 4.3d, 4.4d, 4.5d e 4.6d).

Tabela 4.2: Índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo, onde $e_1 = u - u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$.

<i>Controlador de Rastreamento</i>	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
Regulador quadrático linear (LQR)	0,090	117,5	0,421	$1,152 \cdot 10^8$
PID-1 + RL	0,069	6,003	0,392	$1,9 \cdot 10^7$
PID-2 + RL	0,052	6,003	0,396	$1,9 \cdot 10^7$
PID-3 + RL	0,036	6,003	0,402	$1,9 \cdot 10^7$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,009	6,278	0,407	$1,9 \cdot 10^7$
Realimentação linearizante (RL)	0,011	6,003	0,406	$1,9 \cdot 10^7$

Analisaremos agora os índices de desempenho obtidos em simulação dos *Controladores de Rastreamento*, que têm os seus valores mostrados na Tabela 4.2, sob as perturbações externas e incertezas paramétricas. A partir destes dados, é possível afirmar que o *Controlador de Rastreamento* Quase modos deslizantes (QMD) foi o que apresentou o melhor desempenho para $\int e_2^2$, mantendo os demais índices aproximadamente iguais aos demais controladores. A maior precisão de rastreamento já era esperada devido a utilização

da cota superior D_2 no sinal de controle $\delta(t)$ em (3.29). Tal cota foi utilizada visando compensar explicitamente as perturbações externas. Note que o valor obtido para $\int e_2$ pelos controladores QMD e RL se apresentaram relativamente próximos, sendo aproximadamente 5 vezes menores que os obtidos pelos controladores PID. Assim, toda a análise realizada na seção anterior sobre o custo e complexidade de implementação destes controladores pode ser aqui estendida. Já o *Controlador de Rastreamento* Regulador linear quadrático (LQR) foi o que apresentou o pior desempenho em todos os índices analisados. Nota-se que os controladores PID-2 e PID-3, mantiveram também nesta situação, um melhor desempenho em $\int e_2$ em relação ao PID-1 de [17], utilizando aproximadamente a mesma energia em $\delta(t)$, associados ao mesmo controlador RL.

Na seção seguinte, mostraremos os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle da Figura 3.1, consideraremos porém, utilizar comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor mais próximos de uma situação prática. Buscamos com isso, investigar se há melhor desempenho nestas situações, dos *Controladores de Rastreamento* utilizados neste trabalho.

Figura 4.9: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores PID-1 $\phi_{p1}(t)$, PID-2 $\phi_{p2}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entradas ângulo de esterço produzidas pelos controladores PID-1 $\delta_{p1}(t)$, PID-2 $\delta_{p2}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erros de inclinação obtidos pelos controladores PID-1 $e_{2p1}(t)$, PID-2 $e_{2p2}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$, (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL.

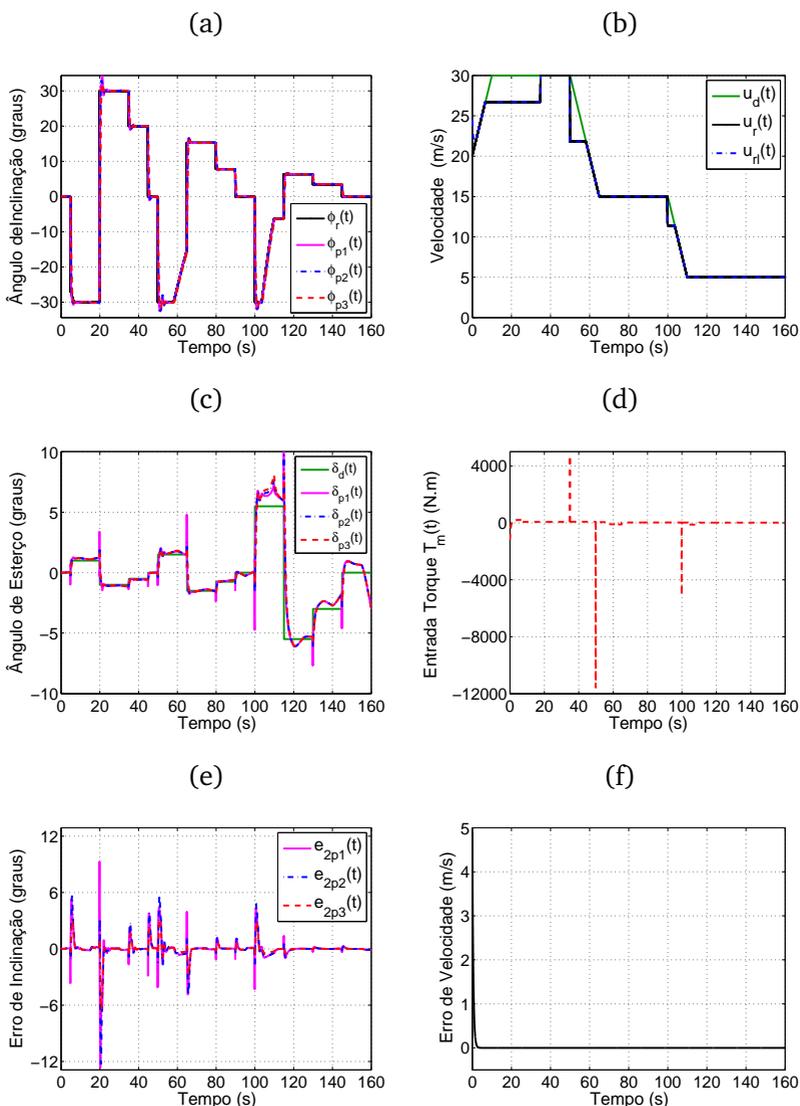
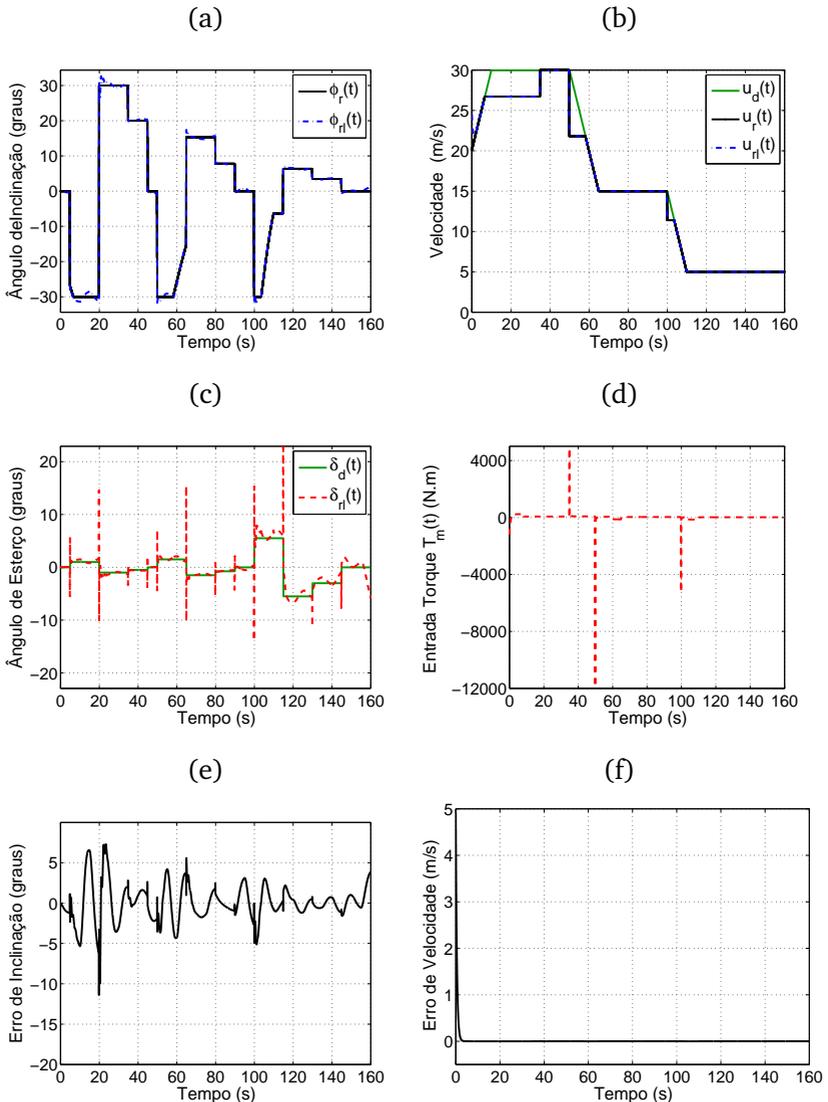


Figura 4.10: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{ri}(t)$ obtida com o controlador RL, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{ri}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{ri}(t)$ produzida pelo controlador RL, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador RL e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL.



4.3 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO SEM PERTURBAÇÕES EXTERNAS E PARÂMETROS NOMINAIS DO VEÍCULO, USANDO UM FILTRO DE TRAJETÓRIAS

Perceba que, os comandos desejados pelo condutor, o ângulo de esterço $\delta_d(t)$ e velocidade longitudinal $u_d(t)$ mostrados nas Figuras 4.1a e 4.1b respectivamente, que foram utilizados nas simulações até o momento, apresentam variações bruscas do tipo degrau, não correspondendo assim a um comportamento realista para o condutor. Desse modo, diferentemente de [10, 17], neste trabalho serão realizadas simulações que sejam mais próximas de uma condução prática do veículo. Então, nesta seção, os comandos mostrados na Figura 4.1a e 4.1b, serão agora consideradas como sendo as intenções do condutor (o que ele tem em mente), ou seja intenção para o ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e intenção para a velocidade longitudinal $u_i(t)$, os quais são mostrados nas Figuras 4.12a e 4.12b, respectivamente.

Propomos então, que os “novos” comandos desejados $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ pelo condutor (sua ação efetiva), correspondam a uma “suavização” de $\delta_i(t)$ e $u_i(t)$, respectivamente. Isto pode ser obtido através da utilização dos filtros passa-baixas de primeira ordem com constantes de tempo $\tau_\delta = 0,28$ s e $\tau_u = 1$ s respectivamente dados por:

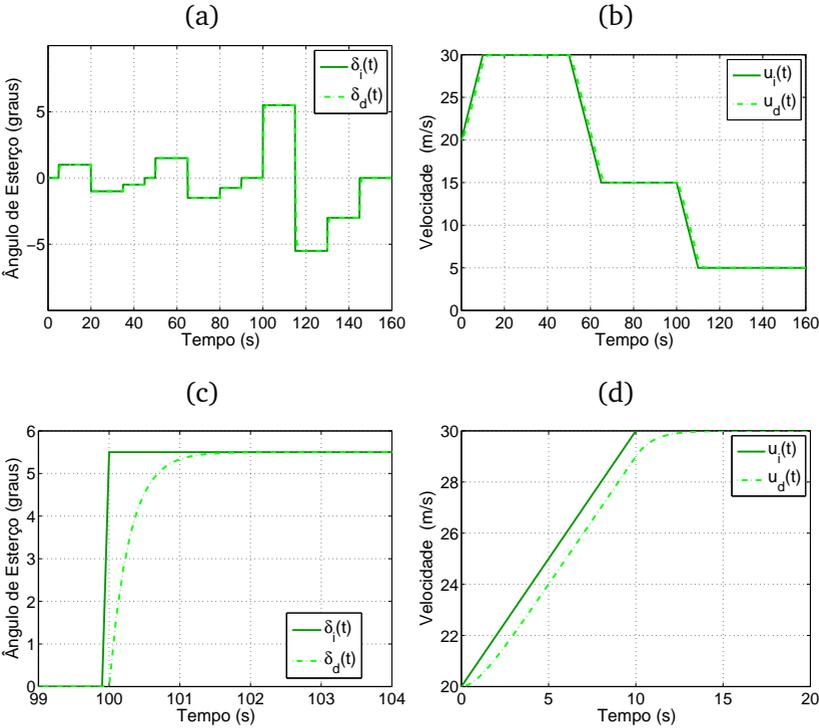
$$\delta_d(s) = \frac{3,5}{(s + 3,5)}\delta_i(s), \quad u_d(s) = \frac{1}{(s + 1)}u_i(s), \quad (4.3)$$

onde as entradas do filtro são as intenções do condutor $\delta_i(t)$ e $u_i(t)$ (o que ele tem em mente), e as saídas são os comandos efetivamente desejados $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$, os quais são mostrados nas Figuras 4.12a e 4.12b, respectivamente. Visto que, tais filtros tendem a atrasar as respostas, as constantes de tempo τ_δ e τ_u em (4.3), foram ajustadas em simulação para obter trajetórias “suaves” e com tempo de resposta mais próximo do comportamento do motorista durante uma condução. A entrada e saída correspondente a cada filtro é mostrada em detalhes nas Figuras 4.12c e 4.12d, respectivamente.

Assim, nesta seção, as simulações com a estrutura de controle mostrada na Figura 3.1 serão refeitas, inicialmente sem perturbações externas, isto é $F_1(t) \equiv F_2(t) \equiv F_3(t) \equiv V_\omega(t) \equiv 0$ em (2.49)–(2.50) e com os parâmetros nominais do veículo em (2.47). Consideraremos agora os comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor provenientes de (4.3).

Para este caso então, observamos o rastreamento da trajetória de referência $\phi_r(t)$ obtidos com os controladores LQR, PID-1,

Figura 4.12: (a) Intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, (c) detalhes da intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor para $99 \leq t \leq 104$ e (d) detalhes da intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor para $0 \leq t \leq 20$.



PID-2 e PID-3 (mostrados juntos), RL e QMD, sendo mostrados nas Figuras 4.13a, 4.14a, 4.15a e 4.16a, respectivamente. Nota-se uma alta precisão obtida por todos os controladores. As correspondentes entradas ângulo de esterço produzidas pelos controladores são mostradas nas Figuras 4.13c, 4.14c, 4.15c e 4.16c, respectivamente. Podemos notar que estas entradas apresentaram picos menores de oscilações, quando comparadas com as entradas obtidas na Seção 4.1, as quais foram mostradas nas Figuras 4.13c, 4.14c, 4.15c e 4.16c sob as mesmas condições (sem perturbações externas nem incertezas paramétricas). Estes picos menores foram obtidos devido

4.3. Resultados de simulação sem perturbações externas e parâmetros nominais do veículo, usando um filtro de trajetórias 17

a utilização dos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor provenientes de (4.3).

O rastreamento da trajetória de referência $u_r(t)$, obtidos com os controladores LQR, RL (associado ao PID-1), RL e QMD são vistos nas Figuras 4.13b, 4.14b, 4.15b e 4.16b, respectivamente. Já as correspondentes entradas torque produzidas por estes controladores são mostradas nas Figuras 4.13d, 4.14d, 4.15d e 4.16d, respectivamente. Note que tais entradas apresentam picos com amplitudes menores quando comparadas com as entradas obtidas na Seção 4.1, as quais são mostradas nas Figuras 4.3d, 4.4d, 4.5d e 4.6d, sob as mesmas condições (sem perturbações externas nem incertezas paramétricas no veículo).

Tabela 4.3: Índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* em simulação sem perturbações externas e com parâmetros nominais do veículo utilizando um filtro de trajetórias do condutor, onde $e_1 = u - u_r$, $e_2 = \phi - \phi_r$.

<i>Controlador de Rastreamento</i>	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
Regulador quadrático linear (LQR)	0,030	117,5	0,395	$1,14 \cdot 10^8$
PID-1 + RL	0,054	6,238	0,369	$8 \cdot 10^6$
PID-2 + RL	0,044	6,238	0,373	$8 \cdot 10^6$
PID-3 + RL	0,024	6,238	0,378	$8 \cdot 10^6$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,017	6,455	0,344	$7,5 \cdot 10^6$
Realimentação linearizante (RL)	0,003	6,238	0,346	$8 \cdot 10^6$

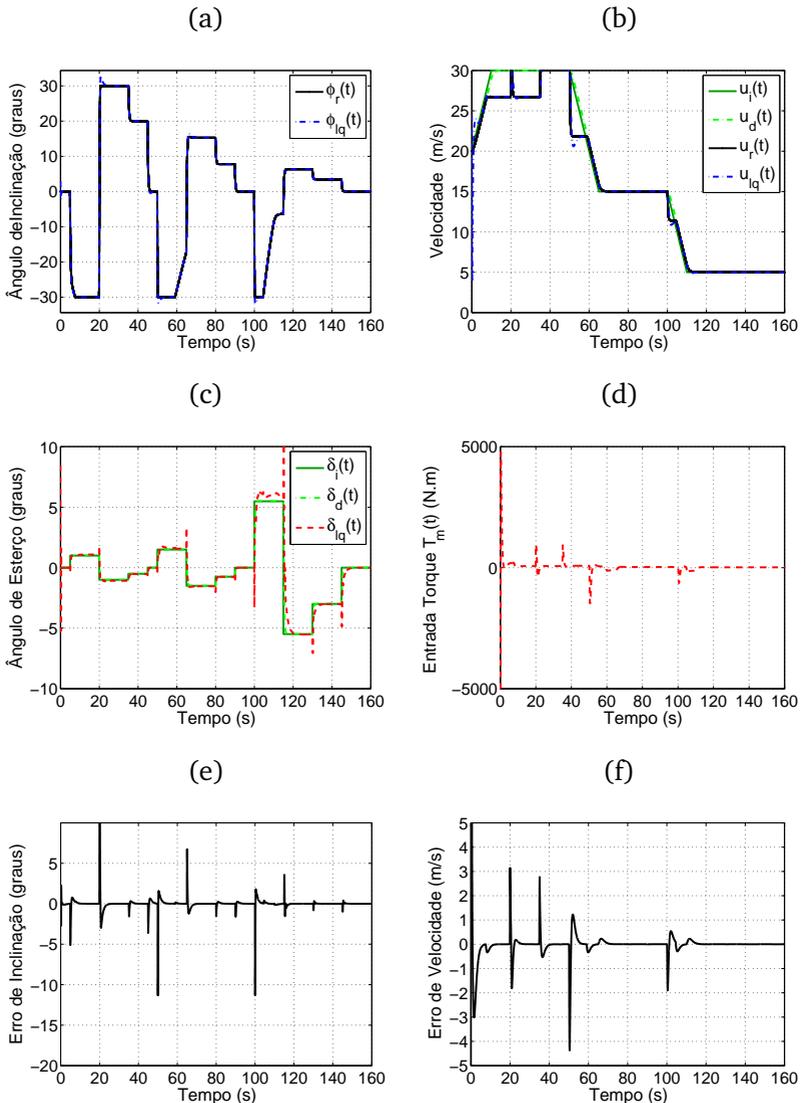
Analisaremos neste momento os índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento*, que tem os valores mostrados na Tabela 4.3. Destes dados, podemos deduzir que a Realimentação linearizante (RL) foi o que apresentou o melhor desempenho em todos índices, comparados aos outros controladores. Isto já era esperado pelo desempenho anterior apresentado por este controlador na Seção 4.1, também sob as mesmas condições (sem perturbações externas nem incertezas paramétricas no veículo). Comparando ainda os índices de desempenho mostrados na Tabela 4.3 com os da Tabela 4.1 ambas obtidas no caso nominal, podemos notar uma diminuição em $\int e_2^2$, $\int \delta^2$ e $\int T_m^2$ para todos os *Controladores de Rastreamento* utilizados. Isto se reflete em uma maior precisão no rastreamento de $\phi_r(t)$ e considerável redução da energia utilizada por ambos sinais de controle $\delta(t)$ e $T_m(t)$ mantendo a mesma precisão no rastreamento de $u_r(t)$. Isto foi possível devido a utilização dos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor,

mais próximos de uma condução prática do veículo, os quais são provenientes de (4.3).

Na seção seguinte, serão mostrados os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle da Figura 3.1. Nesta situação serão consideradas perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo, utilizando os comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor oriundos de (4.3).

4.3. Resultados de simulação sem perturbações externas e parâmetros nominais do veículo, usando um filtro de trajetórias 19

Figura 4.13: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{lq}(t)$ obtida com o controlador LQR, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{lq}(t)$ obtida com o controlador LQR, (c) intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{lq}(t)$ produzida pelo controlador LQR, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador LQR, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador LQR e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador LQR.



4.3. Resultados de simulação sem perturbações externas e parâmetros nominais do veículo, usando um filtro de trajetórias

Figura 4.15: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) intenção do ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{r1}(t)$ produzida pelo controlador RL, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador RL e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL.

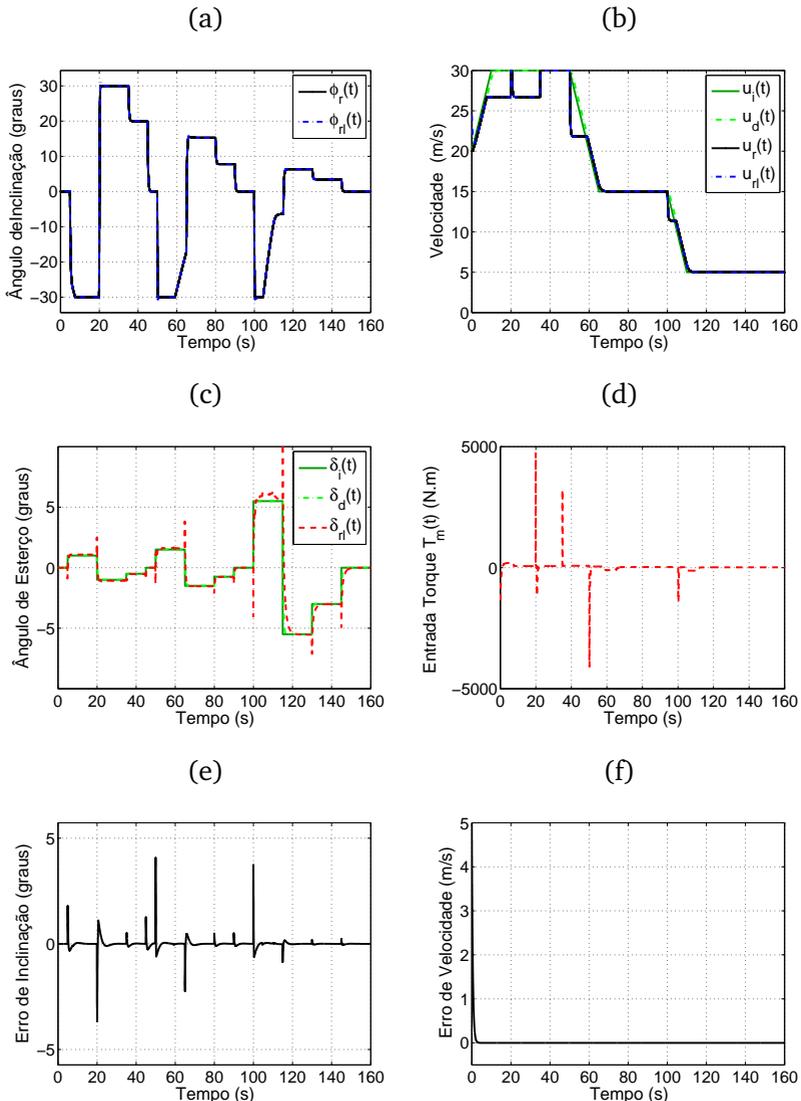
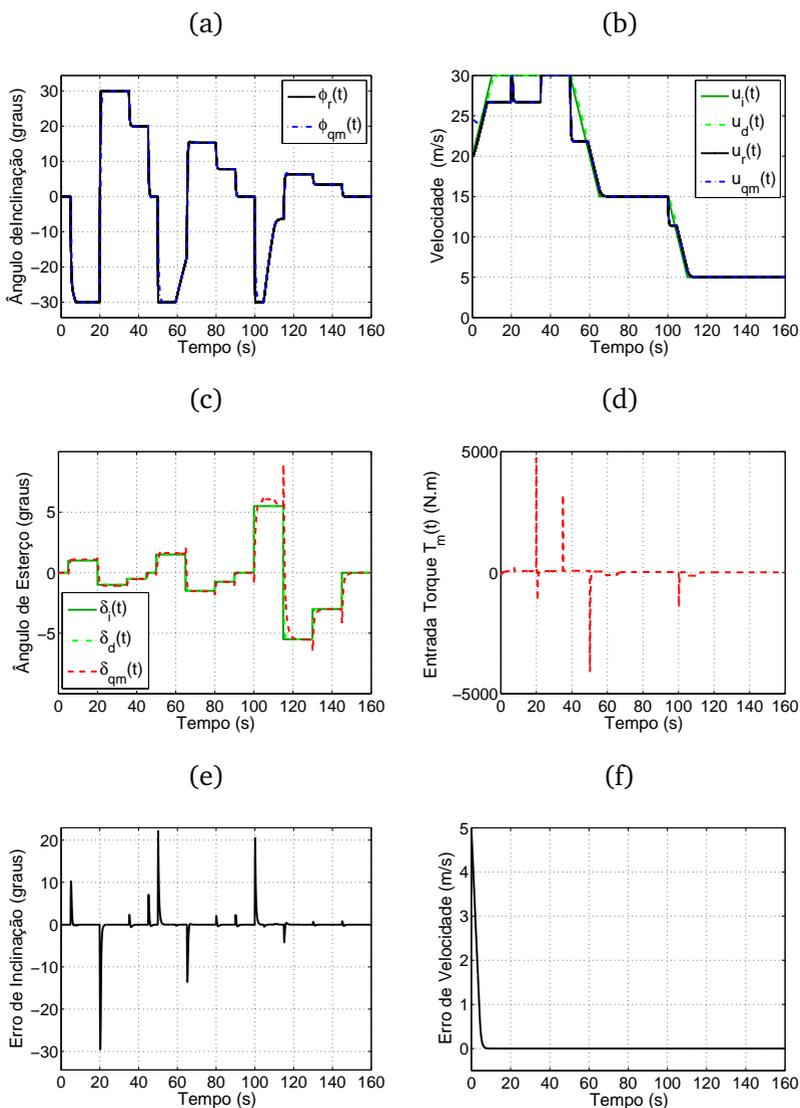


Figura 4.16: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo controlador QMD, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador QMD, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador QMD e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador QMD.



4.4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM PERTURBAÇÕES EXTERNAS E INCERTEZAS PARAMÉTRICAS DO VEÍCULO, USANDO UM FILTRO DE TRAJETÓRIAS

Nesta seção, mostraremos os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle mostrada na Figura 3.1, com perturbações externas mostradas nas Figuras 4.7a e 4.7b em (2.49)–(2.50) e incertezas paramétricas de +20% da massa e –5% da altura do centro de gravidade no veículo em (2.47). Para estas simulações, serão utilizados os comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor obtidos de (4.3).

Assim, o rastreamento da trajetória de referência $\phi_r(t)$ obtidos pelos controladores LQR, PID-1, PID-2 e PID-3 (mostrados juntos), RL e QMD, podem ser vistos nas Figuras 4.17a, 4.18a, 4.19a e 4.20a, respectivamente. As entradas ângulo de esterço produzidas por estes controladores são mostradas nas Figuras 4.8c, 4.9c, 4.10c e 4.11c respectivamente, sob perturbações externas e as incertezas paramétricas.

O rastreamento da trajetória de referência $u_r(t)$ obtido pelos controladores LQR, RL (associado ao PID-1), RL e QMD são ilustrados nas Figuras 4.8b, 4.9b, 4.10b e 4.11b, respectivamente. E as correspondentes entradas torque produzidas pelos controladores são mostradas nas Figuras 4.8b, 4.9b, 4.10b e 4.11b, sob perturbações externas e as incertezas paramétricas.

Destas figuras, nota-se um rastreamento das trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ bastante satisfatório, e obtenção de sinais de controle $\delta(t)$ e $T_m(t)$ que podem ser implementadas na prática, pois os mesmos apresentam amplitudes que não ultrapassam os limites do triciclo, sob perturbações externas e incertezas paramétricas, utilizando os comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ obtidos a partir de (4.3).

Tabela 4.4: Índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo utilizando um filtro de trajetórias do condutor, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$.

<i>Controlador de Rastreamento</i>	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
Regulador quadrático linear (LQR)	0,032	117,5	0,401	$1,14 \cdot 10^8$
PID-1 + RL	0,054	6,238	0,375	$8 \cdot 10^6$
PID-2 + RL	0,045	6,238	0,378	$8 \cdot 10^6$
PID-3 + RL	0,024	6,238	0,384	$8 \cdot 10^6$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,001	6,455	0,377	$7,5 \cdot 10^6$
Realimentação linearizante (RL)	0,004	6,238	0,410	$8 \cdot 10^6$

Analisaremos agora os índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* para esta simulação, com os seus valores mostrados na Tabela 4.4. Nesta situação, o *Controlador de Rastreamento* Quase modos deslizantes foi o que apresentou o melhor desempenho em $\int e_2^2$, mantendo os demais índices aproximadamente iguais aos outros controladores. Note ainda que o índice $\int e_2^2$ obtido pelo QMD foi muito superior aos dos demais controladores, sendo aproximadamente 4 vezes menor que o obtido pelo RL e de 10 vezes menor que os dos controladores PID. Comparando ainda os dados mostrados na Tabela 4.4 com os dados da Tabela 4.2, (ambos obtidos sob perturbações externas e incertezas paramétricas), também se nota uma redução em $\int e_2^2$, $\int \delta^2$ e $\int T_m^2$, mantendo aproximadamente igual o $\int e_1^2$ para todos controladores utilizados.

Dos resultados mostrados nas Seções 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, pudemos concluir que o objetivo de rastreamento dos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor, foram alcançados tanto sob condições nominais (sem perturbações externas nem incertezas paramétricas) quanto sob perturbações externas e incertezas paramétricas de massa e altura do centro de gravidade do veículo. Ainda foi observado que com a utilização dos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ do condutor obtidos em (4.3), houve melhoria na precisão de rastreamento de $\phi_r(t)$ além de menores esforços em ambos sinais de controle $\delta(t)$ e $T_m(t)$, mantendo a mesma precisão no rastreamento de $u_r(t)$ para todos os controladores utilizados neste trabalho.

Na seção seguinte, serão mostrados resultados de simulação da estrutura de controle mostrada na Figura 3.1, com os *Controladores de Rastreamento* Quase modos deslizantes (QMD), Realimentação

4.4. Resultados de simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo, usando um filtro de trajetória

liniarizante (RL) e PID-3. Estas escolhas foram motivadas por serem os 3 controladores que apresentaram os melhores desempenhos nos resultados de simulações obtidos até o momento. Na seção seguinte, propomos então reproduzir diversas situações em que o condutor do triciclo deseja percorrer trajetórias circular e também desviar de obstáculos.

4.4. Resultados de simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo, usando um filtro de trajetória

Figura 4.18: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores PID-1 $\phi_{p1}(t)$, PID-2 $\phi_{p2}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entradas ângulo de esterço produzidas pelo controladores PID-1 $\delta_{p1}(t)$, PID-2 $\delta_{p2}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) Entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erros de inclinação obtidos pelos controladores PID-1 $e_{2p1}(t)$, PID-2 $e_{2p2}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL.

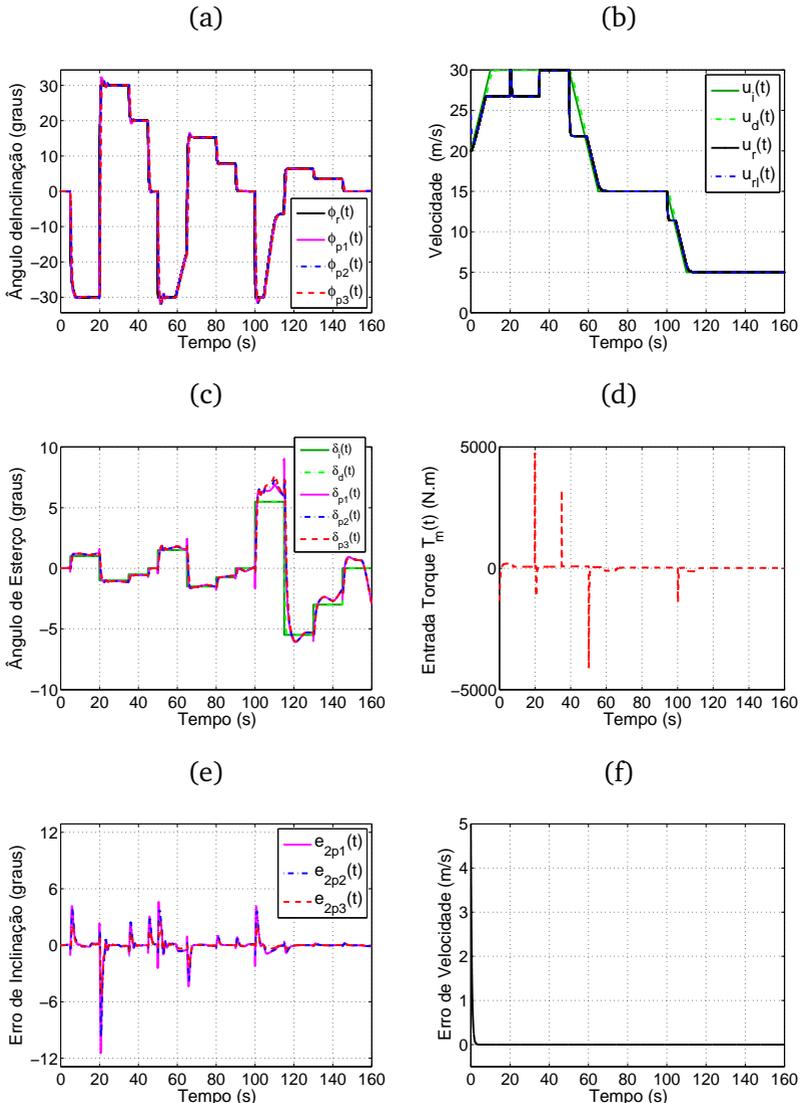
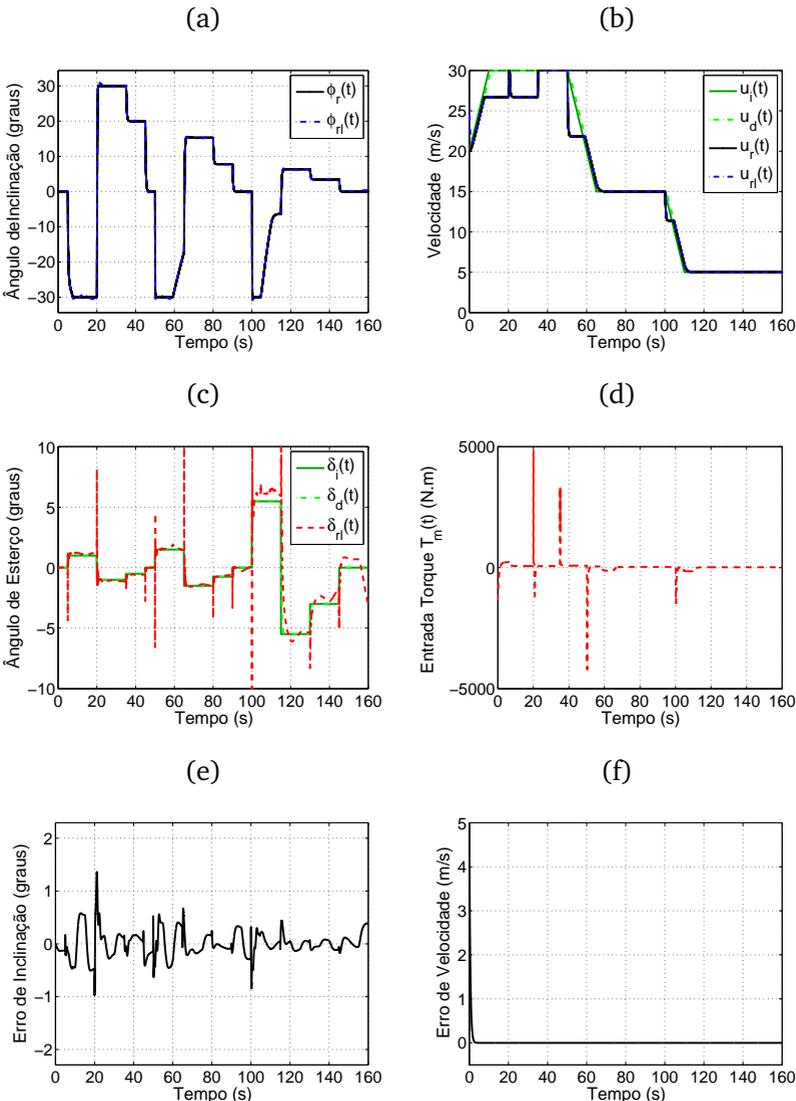
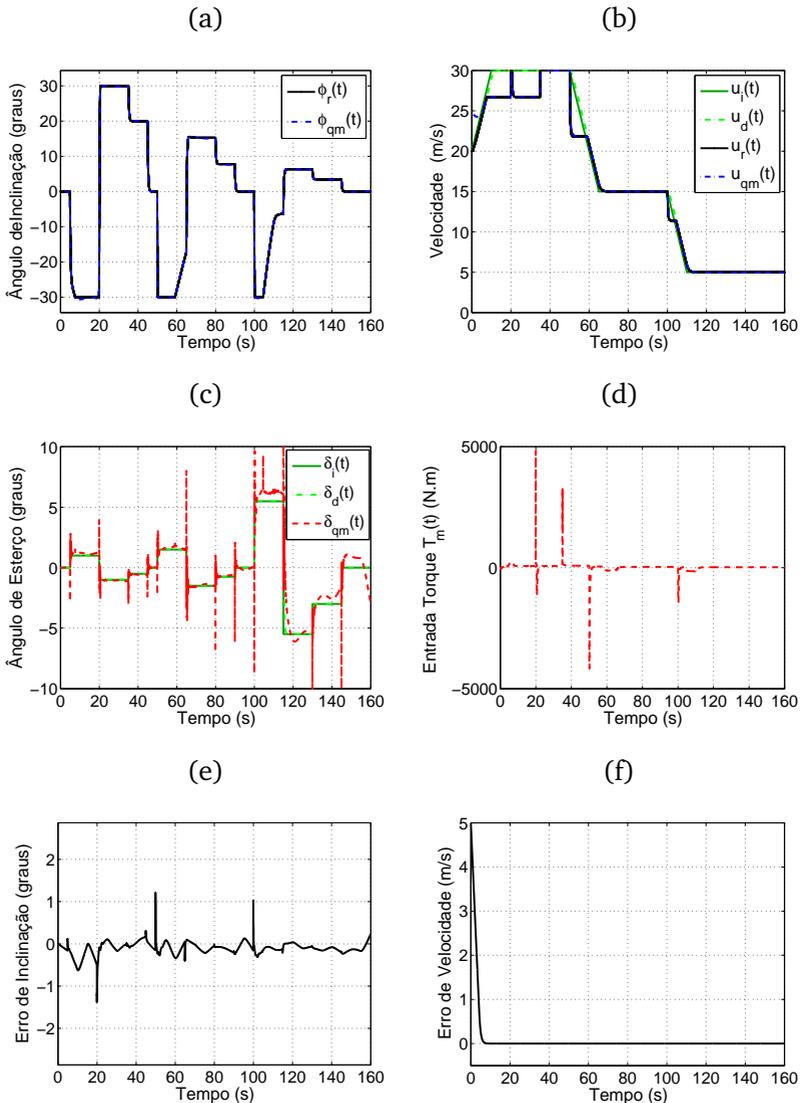


Figura 4.19: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ do condutor referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{r1}(t)$ obtida com o controlador RL, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{r1}(t)$ produzida pelo controlador RL, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador RL, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador RL e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador RL.



4.4. Resultados de simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo, usando um filtro de trajetória 129

Figura 4.20: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (b) intenção de velocidade $u_i(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo $u_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, (c) intenção de ângulo de esterço $\delta_i(t)$ e ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo controlador QMD, (d) entrada torque mecânico produzida pelo controlador QMD, (e) erro de inclinação obtido pelo controlador QMD e (f) erro de velocidade obtido pelo controlador QMD.



4.5 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO COM TRAJETÓRIA CIRCULAR E SENOIDAL REALIZADAS PELO VEÍCULO

Nesta seção, mostraremos os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle mostrada na Figura 3.1, utilizando os *Controladores de Rastreamento*: Quase modos deslizantes (QMD), Realimentação linearizante (RL) e PID-3. Estas escolhas foram motivadas devido aos melhores desempenhos obtidos por estes três controladores nas simulações mostradas nas seções anteriores. Busca-se então nesta seção, reproduzir situações mais próximas de uma condução prática, onde o condutor do triciclo deseja percorrer trajetórias circulares conforme [14] e também desviar de obstáculos (“slalom”). Para isto, serão utilizadas por simplicidade, variações exponenciais e senoidais, respectivamente para o comando $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor, mantendo a velocidade $u_d(t)$ constante em todos os casos. Todas as simulações serão realizadas sob as perturbações externas mostradas nas Figuras 4.7a e 4.7b em (2.49)–(2.50), e incertezas paramétricas de +20% da massa e –5% da altura do centro de gravidade no veículo em (2.47).

4.5.1 Estudo de Caso 1

Agora serão mostrados os resultados de simulação obtidos com a estratégia de controle em malha-fechada mostrada na Figura 3.1, utilizando os *Controladores de Rastreamento* quase modos deslizantes, realimentação linearizante e PID-3.

Para as simulações, foram utilizadas as seguintes condições iniciais para o veículo: $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ e $u(0) = 5 \text{ ms}^{-1}$, mantendo nula as demais variáveis de estados em $t = 0$.

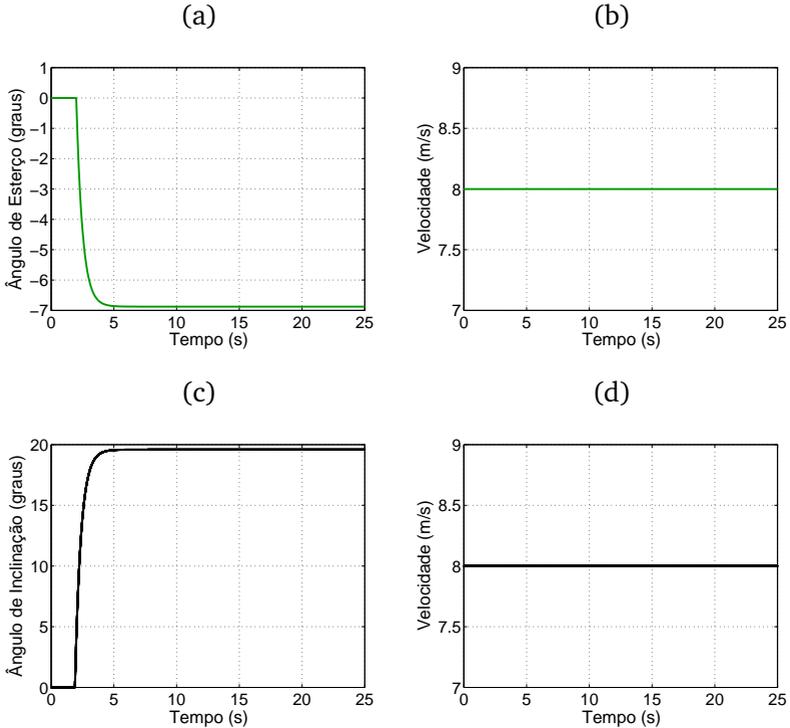
Considere então para esta primeira situação, que δ_d é dado por

$$\delta_d(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t \leq 2 \text{ s,} \\ -0,12(1 - e^{-t/\tau_1}) \text{ rad,} & \text{para } t > 2 \text{ s,} \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $\tau_1 = 0,5 \text{ s}$ é a constante de tempo, e $u_d = 8 \text{ ms}^{-1}$ a velocidade longitudinal desejada pelo condutor, os quais são mostrados nas Figuras 4.21a (em graus) e 4.21b, respectivamente. Note que tais comandos δ_d em (4.4) e u_d , correspondem a uma reprodução simplificada para uma situação em que o condutor deseja percorrer uma trajetória circular.

A partir destes comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ estabelecidos pelo condutor, o *Gerador de Trajetórias* determina as trajetórias de referên-

Figura 4.21: (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) Trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$.



cias $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, as quais são mostradas nas Figuras 4.21c (em graus) e 4.21d, respectivamente.

Desta forma, percebe na Figura 4.22a que, a inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ obtida com o controlador QMD, a inclinação do veículo $\phi_{rl}(t)$ obtida com o controlador RL e a inclinação do veículo $\phi_{p3}(t)$ obtida com o controlador PID-3 rastream a trajetória de referência $\phi_r(t)$ de forma precisa. A baixa amplitude apresentada pelos erros de inclinação e_{2qm} para o QMD, e_{2rl} para a RL e e_{2p3} para o PID-3 podem ser observados na Figura 4.22e. Já a Figura 4.22c mostra as entradas ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$ produzida pelo QMD, a entrada ângulo de esterço $\delta_{rl}(t)$ produzida pelo RL e a entrada ângulo de esterço $\delta_{p3}(t)$ produzida pelo controlador PID-3 se encontram

muito próximas do comando $\delta_d(t)$ do condutor, conforme esperado. Tais entradas apresentam os picos iniciais de oscilação inerentes ao sistema STC utilizado pelo triciclo.

A Figura 4.22b, mostra o rastreamento da trajetória de referência $u_r(t)$ obtido com os controladores QMD ($u_{qm}(t)$) e RL ($u_{r1}(t)$). Já a Figura 4.22d, mostra as correspondentes entradas torque mecânico produzidas pelos controladores QMD ($T_{mqm}(t)$) e RL ($T_{mrl}(t)$), onde ambos sinais de controle apresentam picos iniciais que não ultrapassam 900 N.m e permanecem baixas nos demais instantes de tempo. Por simplicidade, não mostraremos o rastreamento da trajetória de referência $u_r(t)$, erro de velocidade e entrada torque mecânico produzido pelo controlador realimentação linearizante associado ao PID-3, pois se trata do mesmo resultado obtido nas Figuras 4.22b e 4.22f e 4.22d (em vermelho), respectivamente.

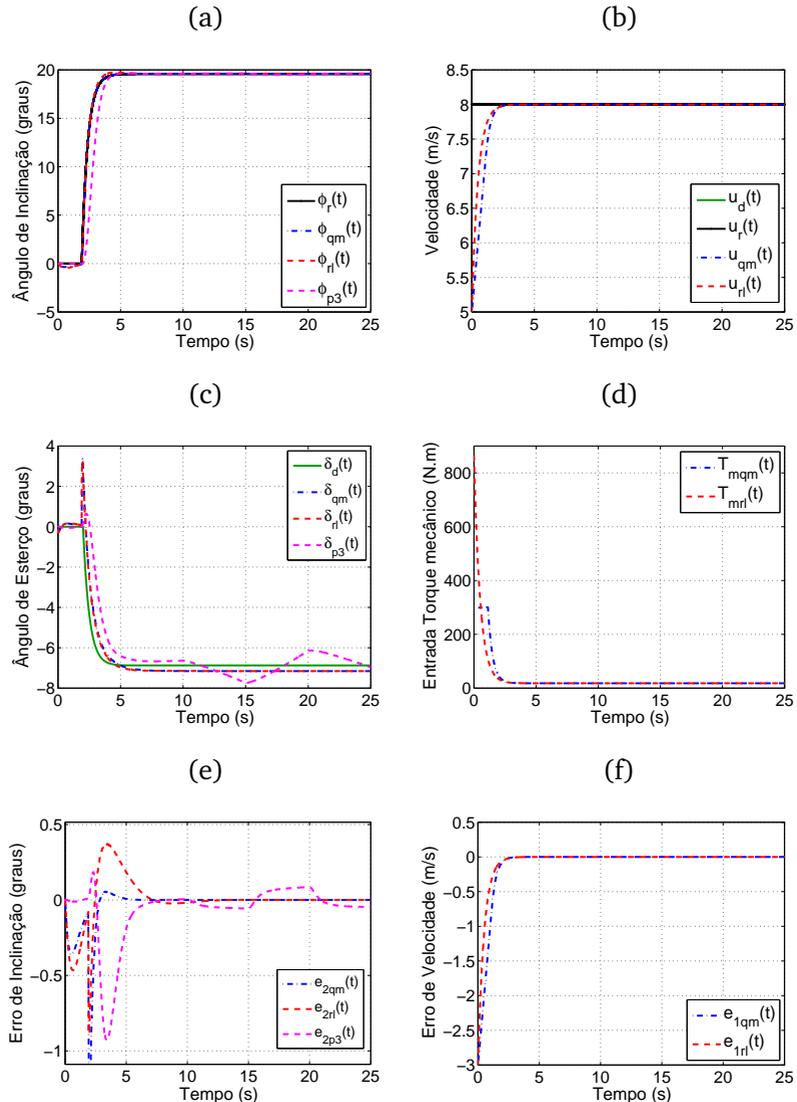
Analisando os índices de desempenho obtidos na simulação, onde os valores são mostrados na Tabela 4.5, pode-se deduzir que o *Controlador de Rastreamento* QMD foi o que apresentou o melhor desempenho em $\int e_2^2$, mantendo os demais índices aproximadamente iguais aos outros controladores. Este maior desempenho já era esperado, conforme mostraram os resultados de simulações obtidos nas seções anteriores, sob perturbações externas e incertezas paramétricas. Notamos ainda que o QMD apresentou para $\int e_2^2$ a metade do valor que o obtido pelo controlador PID-3, o que implica em maior precisão no rastreamento de $\phi_r(t)$ para o QMD.

Tabela 4.5: Índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* em simulação sob perturbações externas e incertezas paramétricas no veículo para o Caso 1, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$.

<i>Controlador de Rastreamento</i>	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
PID-3 + RL	0,00020	2,25	0,302	$2 \cdot 10^5$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,00010	3	0,304	$1,8 \cdot 10^5$
Realimentação linearizante (RL)	0,00015	2,25	0,308	$2 \cdot 10^5$

Na sequência, reproduziremos outra situação em que o condutor deseja percorrer também uma trajetória circular. Para isto, será utilizada uma variação exponencial com a mesma constante de tempo τ_1 (caso anterior) porém, com magnitude de $|\delta_{\max}| = \pi/4$ rad para o comando $\delta_d(t)$, mantendo $u_d(t) = 8 \text{ ms}^{-1}$ para os comandos do condutor.

Figura 4.22: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$.



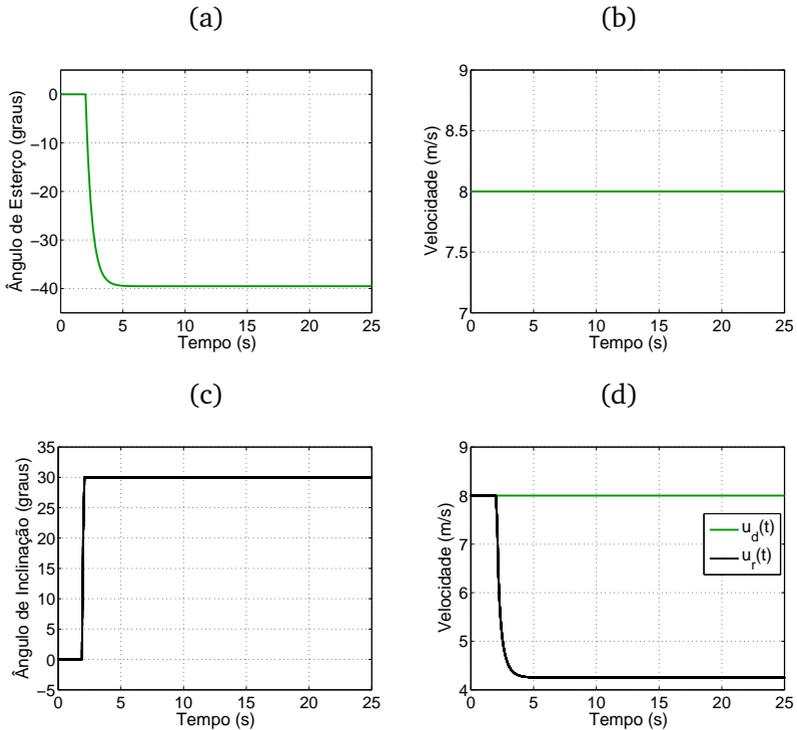
4.5.2 Estudo de Caso 2

Considere então para esta segunda situação, que o condutor deseja percorrer outra trajetória circular, assumindo por simplicidade que o comando $\delta_d(t)$ agora é dado por

$$\delta_d(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq t \leq 2 \text{ s,} \\ -\delta_{\max}(1 - e^{-t/\tau_1}) \text{ rad,} & \text{para } t > 2 \text{ s,} \end{cases}, \quad (4.5)$$

onde $\delta_{\max} = \pi/4$ rad, corresponde ao máximo valor suportado pelas rodas dianteiras do veículo, sob uma velocidade $u_d(t) = 8 \text{ ms}^{-1}$ para os comandos desejados pelo condutor, os quais são vistos nas Figuras 4.23a (em graus) e 4.23b, respectivamente. A partir destes comandos, o *Gerador de Trajetórias* determina $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, as quais são mostradas nas Figuras 4.23c (em graus) e 4.23d, respectivamente. Note que, de acordo com o *Gerador de Trajetórias*, nesta situação, quando $\phi_r(t) > \phi_{\max}$ resulta em $u_r(t) \neq u_d(t)$.

Figura 4.23: (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ juntamente com a velocidade $u_d(t)$ desejada pelo condutor.



Para esta situação então, o rastreamento da trajetória de referência $\phi_r(t)$ obtido com os controladores QMD, RL e PID-3, pode ser visto na Figura 4.24a. Nota-se que a inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ e $\phi_{rl}(t)$ obtida com os controladores QMD e RL respectivamente, rastream a trajetória de referência mais rapidamente que a inclinação $\phi_{p3}(t)$ obtida com o controlador PID-3. Observamos na Figura 4.24e os erros $e_{2qm}(t)$, $e_{2rl}(t)$ e $e_{2p3}(t)$ de inclinação obtidos pelos controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente. Estes erros no geral, apresentam uma baixa amplitude, indicando assim uma precisão elevada no rastreamento de $\phi_r(t)$.

A Figura 4.24c mostra as entradas ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$,

$\delta_{r1}(t)$ e $\delta_{p3}(t)$ produzidas pelos controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente. Observa-se que tais entradas se mantêm muito próximas de $\delta_d(t)$ e não ultrapassam o valor do ângulo de esterço máximo suportado pelas rodas dianteiras do triciclo, que corresponde a $|\delta_{\max}| = 45^\circ$ (graus) (representada pelo tracejado em preto no gráfico).

O rastreamento da trajetória de referência $u_r(t)$ obtido pelos controladores QMD e RL são vistos na Figura 4.24b. Nota-se um bom rastreamento obtidos pelos controladores. A Figura 4.24d mostra a entrada torque mecânico $T_{mqm}(t)$ e $T_{mrl}(t)$ produzidas pelos controladores QMD e RL respectivamente, as quais possuem amplitudes iniciais próximas a ± 900 N.m nos mesmos instantes de tempo em que a trajetória de referência $u_r(t)$ apresenta variações rápidas, e conforme observa-se permanecem baixas nos demais instantes de tempo.

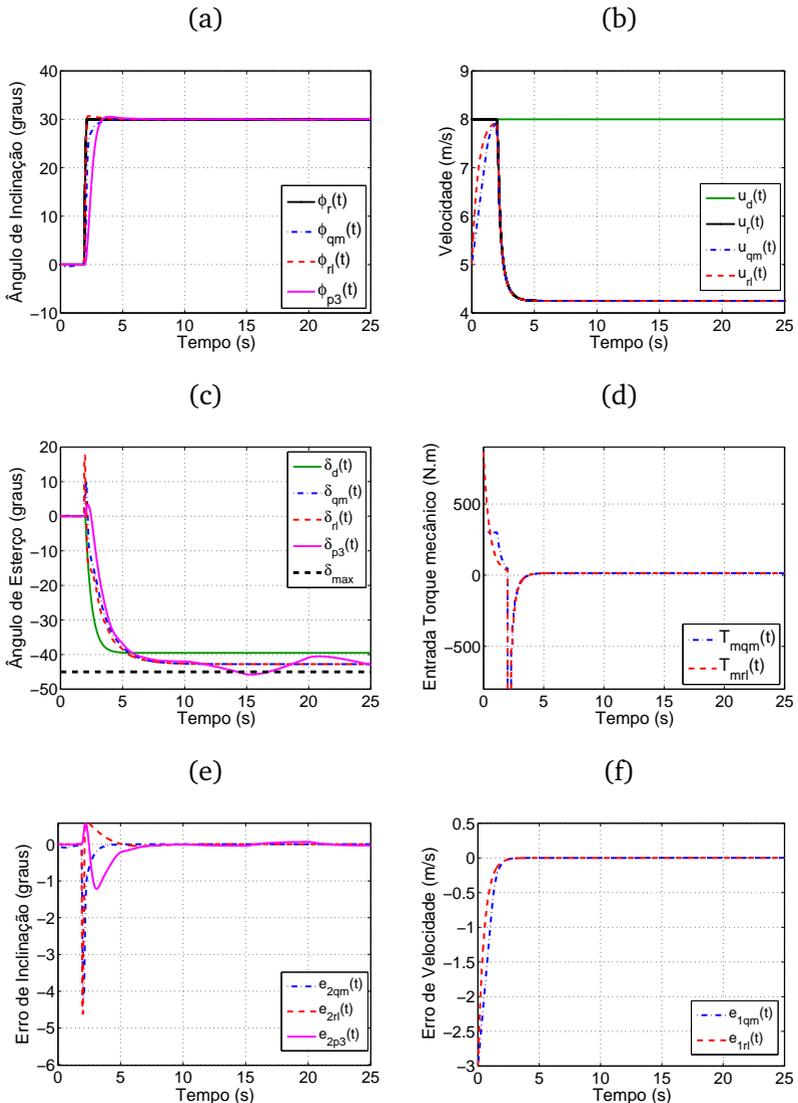
Analisando os dados mostrados na Tabela 4.6, que representam os valores dos índices de desempenho obtidos pelos controladores nesta simulação, pode-se concluir que os 3 controladores apresentaram desempenhos bastante semelhantes em todos os índices analisados para este caso. Porém, o QMD foi o que apresentou um desempenho um pouco superior em $\int e_2^2$, indicando uma precisão maior no rastreamento de $\phi_r(t)$ relativo a este controlador. Note ainda a elevada energia utilizada em $\int \delta^2$ utilizados pelos 3 controladores nesta situação.

Tabela 4.6: Índices de desempenho obtidos pelos Controladores de Rastreamento em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo para o Caso 2, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$.

Controlador de Rastreamento	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
PID-3 + RL	0,00030	2,25	11,54	$6 \cdot 10^5$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,00020	3	11,60	$6 \cdot 10^5$
Realimentação linearizante (RL)	0,00024	2,25	11,90	$6 \cdot 10^5$

Na sequência, iremos reproduzir 3 diferentes situações, em que o condutor do triciclo deseja desviar de obstáculos. Para isto, serão utilizadas variações senoidais para o comando ângulo de esterço $\delta_d(t)$ sob a velocidade longitudinal $u_d(t)$ constante, para os comandos desejados pelo condutor.

Figura 4.24: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$.



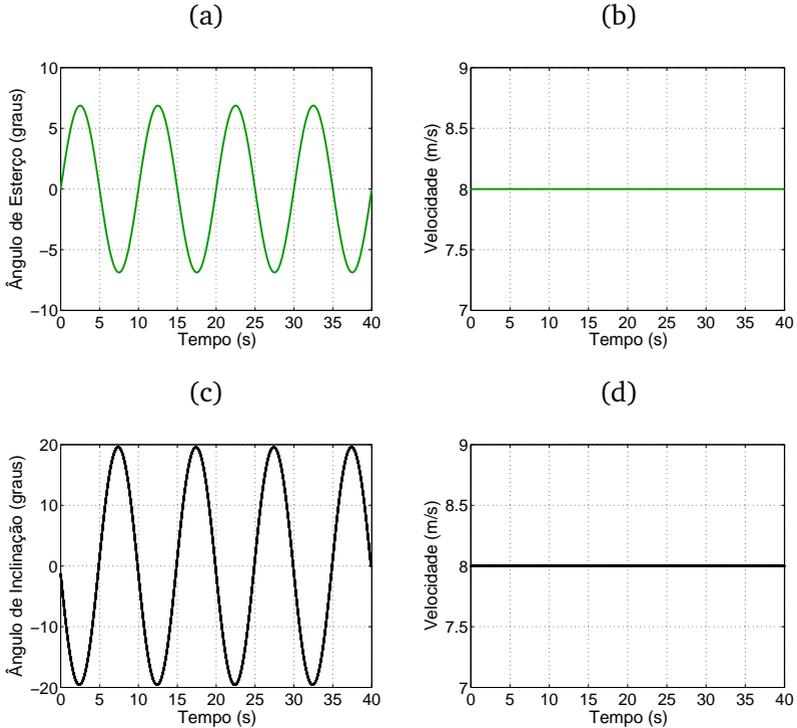
4.5.3 Estudo de Caso 3

Agora, reproduziremos uma situação em que o condutor do triciclo deseja desviar de obstáculos. Tal trajetória é conhecida na literatura técnica de veículos por *slalom*. Assim, considere que o comando ângulo de esterço $\delta_d(t)$ desejado pelo condutor é dado por

$$\delta_d(t) = 0,12 \operatorname{sen}(\omega_1 t), \quad (4.6)$$

onde $\omega_1 = 2\pi f_1$ é a frequência do sinal senoidal e $f_1 = 0,1$ Hz, com a velocidade longitudinal $u_d(t) = 8 \text{ ms}^{-1}$ constante, os quais são observados nas Figuras 4.23a (em graus) e 4.23b, respectivamente. Note que os comandos $\delta_d(t)$ em (4.6) e $u_d(t)$ utilizados neste momento, correspondem a uma reprodução simplificada para uma situação em que o condutor deseja desviar de obstáculos.

Figura 4.25: (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$.



Com base nos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados do condutor o *Gerador de Trajetórias* determina as trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, sendo estas mostradas nas Figuras 4.25c (em graus) e 4.25d, respectivamente.

Assim, observamos na Figura 4.26a que a inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$ e $\phi_{rl}(t)$ obtidas com os controladores QMD e RL respectivamente, rastreiam a trajetória de referência $\phi_r(t)$ diferentemente da inclinação do veículo $\phi_{p3}(t)$ obtida com o controlador PID-3, a qual se apresenta com um atraso em relação às demais. A Figura 4.26e representa o erro de inclinação $e_{2qm}(t)$, $e_{2rl}(t)$ e $e_{2p3}(t)$ obtidos pelos controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente. Percebe-se que o erro de inclinação obtido pelo controlador PID-3 apresenta

uma amplitude visivelmente mais elevada que os demais. Já a Figura 4.26c ilustra as entradas ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$, $\delta_{rl}(t)$ e $\delta_{p3}(t)$ produzidas pelos controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente. Observamos ainda que tais entradas encontram-se muito próximas do comando $\delta_d(t)$ do condutor, porém, com a entrada $\delta_{p3}(t)$ apresentando-se mais deslocada em relação às demais.

A Figura 4.26b mostra o rastreamento da trajetória de referência $u_r(t)$ obtido pelos controladores QMD $u_{qm}(t)$ e RL $u_{rl}(t)$, e a Figura 4.26d mostra as entradas torque correspondentes produzidas por estes controladores (T_{mqm}) e (T_{mrl}), respectivamente.

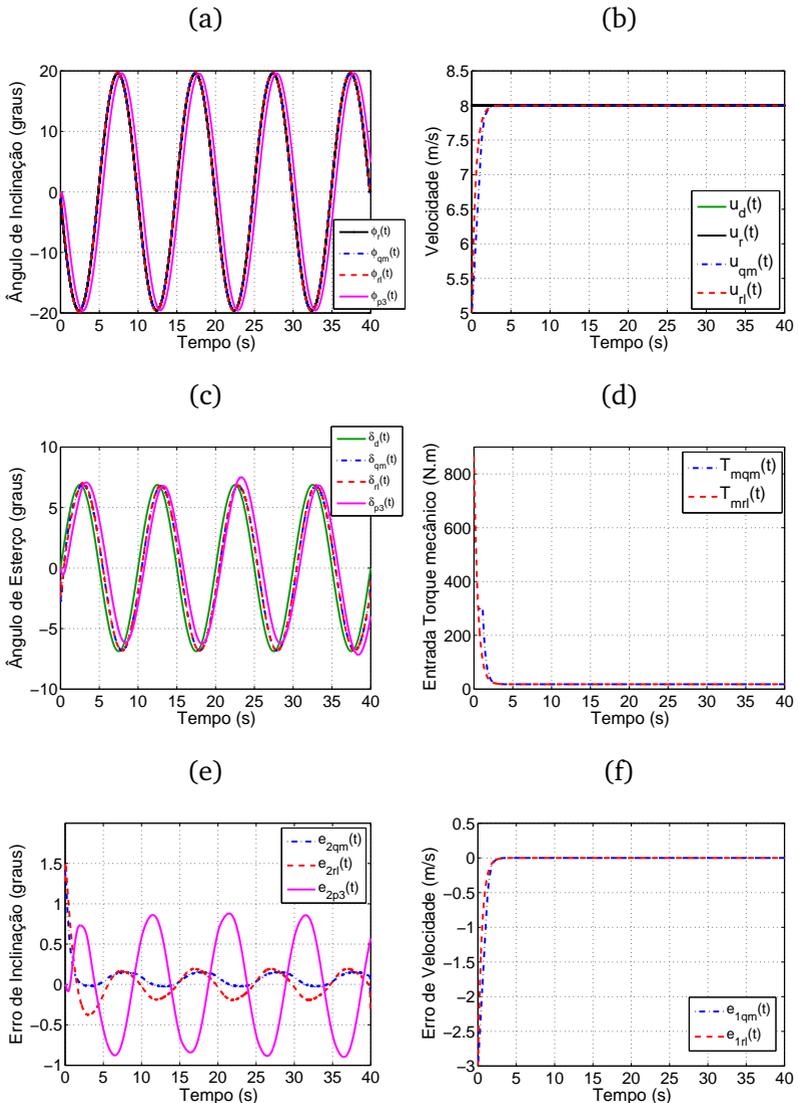
Analisando os dados mostrados na Tabela 4.7, que representam os índices de desempenho obtidos nesta simulação para cada controlador, percebemos que também nesta situação, o controlador QMD apresentou o melhor desempenho para o índice $\int e_2^2$, com os demais índices aproximadamente iguais aos outros controladores. Nota-se ainda que este índice se apresentou aproximadamente 3 vezes menor que o correspondente obtido pelo PID-3. Porém, conforme analisado anteriormente, o QMD necessita realimentar todo o estado e apresenta uma maior complexidade e custo de implementação, diferentemente do PID que necessita somente da realimentação de saída.

Tabela 4.7: Índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo para o Caso 3, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$.

<i>Controlador de Rastreamento</i>	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
PID-3 + RL	0,0032	2,25	0,272	$2 \cdot 10^5$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,0013	3	0,289	$1,9 \cdot 10^5$
Realimentação linearizante (RL)	0,0020	2,25	0,295	$2 \cdot 10^5$

Na sequência, reproduziremos outra situação em que o condutor do triciclo deseja desviar de obstáculos. Para isto, será utilizada a variação senoidal com a mesma frequência (ω_1) (caso anterior), porém, com uma amplitude de $|\delta_{max}| = \pi/4$ rad para o comando $\delta_d(t)$ sob a mesma velocidade $u_d(t) = 8 \text{ ms}^{-1}$ constante para os comandos do condutor.

Figura 4.26: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$.



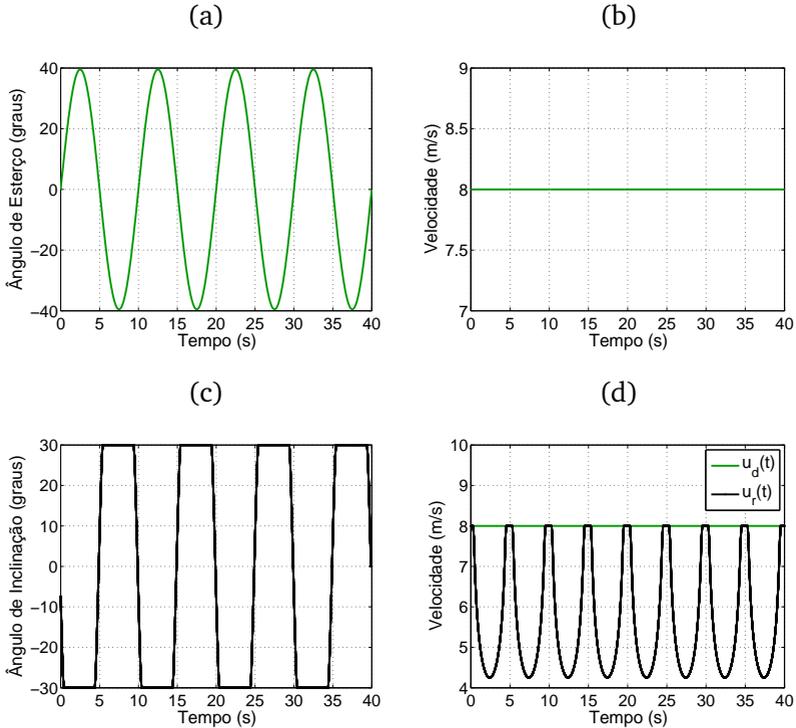
4.5.4 Estudo de Caso 4

Considere para esta situação, por simplicidade, a seguinte variação senoidal para o comando $\delta_d(t)$, dada por

$$\delta_d(t) = \delta_{\max} \text{sen}(\omega_1 t), \quad (4.7)$$

onde $\delta_{\max} = \pi/4$ rad, mantendo a velocidade longitudinal $u_d(t) = 8 \text{ ms}^{-1}$ desejada pelo condutor, que podem ser vistas nas Figuras 4.27a (em graus) e 4.27b, respectivamente. Note que esta situação corresponde às rodas dianteiras do triciclo girarem o máximo para a direita e esquerda. Utilizando os comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor o *Gerador de Trajetórias* determina as trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, mostradas nas Figuras 4.27c e 4.27d, respectivamente. Note neste caso que de acordo com o *Gerador de Trajetórias*, quando $\phi_r(t) > \phi_{\max}$ então $u_r(t) \neq u_d(t)$.

Figura 4.27: (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ juntamente com a velocidade $u_d(t)$ desejada pelo condutor.



Assim, perceba pela Figura 4.28a que a inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$, $\phi_{rl}(t)$ e $\phi_{p3}(t)$ obtidas com os controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente, rastreiam a trajetória de referência $\phi_r(t)$ adequadamente. A Figura 4.28e apresenta o erro de inclinação $e_{2qm}(t)$, $e_{2rl}(t)$ e $e_{2p3}(t)$ obtidos pelos controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente. Note que no geral estes erros apresentam baixas amplitudes, com o erro obtido pelo controlador PID-3 apresentando amplitudes maiores que os demais. A Figura 4.28c mostra as entradas ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$, $\delta_{rl}(t)$ e $\delta_{p3}(t)$ produzidas pelos controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente. Note que, conforme esperávamos, estas entradas são aproximadamente iguais ao comando $\delta_d(t)$

do condutor, que apresenta uma amplitude de δ_{\max} . As oscilações presentes nestas entradas, conforme já comentado, é devido ao sistema STC utilizado pelo veículo.

Tabela 4.8: Índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo para o Caso 4, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$.

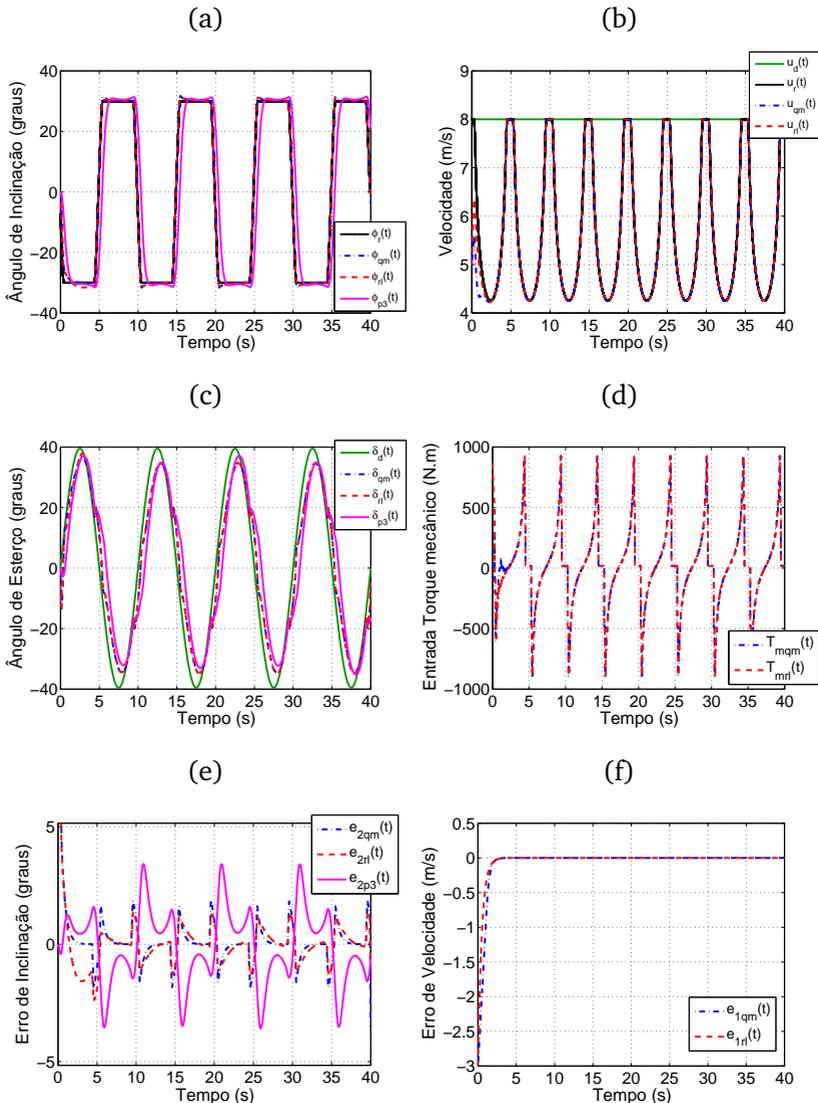
<i>Controlador de Rastreamento</i>	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
PID-3 + RL	0,020	2,25	6,808	$4 \cdot 10^6$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,008	3	6,903	$3,9 \cdot 10^6$
Realimentação linearizante (RL)	0,010	2,25	7,150	$4 \cdot 10^6$

Já a Figura 4.28b representa o rastreamento da trajetória de referência $u_r(t)$ obtido com os controladores QMD $u_{qm}(t)$ e RL $u_{rl}(t)$ e a Figura 4.28d mostra as correspondentes entradas torque mecânico produzidas $T_{mqm}(t)$ e $T_{mrl}(t)$, respectivamente. Note que estas entradas apresentam no geral, elevadas amplitudes e elevados esforços de controle, que ocorrem nos mesmos instantes de tempo em que a trajetória de referência $u_r(t)$ apresenta variações.

Analisaremos agora os índices de desempenho obtidos em simulação, que tem os valores mostrados na Tabela 4.8. Destes dados, concluímos que o QMD apresentou o melhor desempenho para o índice $\int e_2^2$, mantendo os valores dos demais índices aproximadamente iguais aos outros controladores. Este índice para o QMD foi menor que os obtidos pelo RL e PID-3. Note ainda que o valor de $\int e_2^2$ obtido pelo RL foi 2 vezes menor que o obtido pelo PID-3.

Por fim, consideraremos que o condutor deseja desviar de obstáculos, da mesma forma que os dois casos anteriores analisados. Será utilizada a variação senoidal de mesma amplitude δ_{\max} (utilizada no caso anterior), porém, com o dobro da frequência $\omega_2 = 2\omega_1$, para o comando $\delta_d(t)$ com a velocidade longitudinal $u_d(t) = 8 \text{ ms}^{-1}$ para os comandos do condutor.

Figura 4.28: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$.



4.5.5 Estudo de Caso 5

Para esta última situação, de desvio de obstáculo, considere por simplicidade que o comando $\delta_d(t)$ é dado por

$$\delta_d(t) = \frac{\pi}{4} \text{sen}(\omega_2 t), \tag{4.8}$$

onde $\omega_2 = 2\pi f_2$ é a frequência do sinal senoidal e $f_2 = 0,2$ Hz o dobro da frequência utilizada nos casos anteriores. A partir de $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$, o *Gerador de Trajetórias* determina as trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ mostradas nas Figuras 4.29c e 4.29d, respectivamente.

Figura 4.29: (a) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e (b) velocidade longitudinal desejada $u_d(t)$ referentes aos comandos do condutor. Saídas do *Gerador de Trajetórias*: (c) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e (d) trajetória de referência de velocidade longitudinal $u_r(t)$ juntamente com a velocidade $u_d(t)$ desejada pelo condutor.

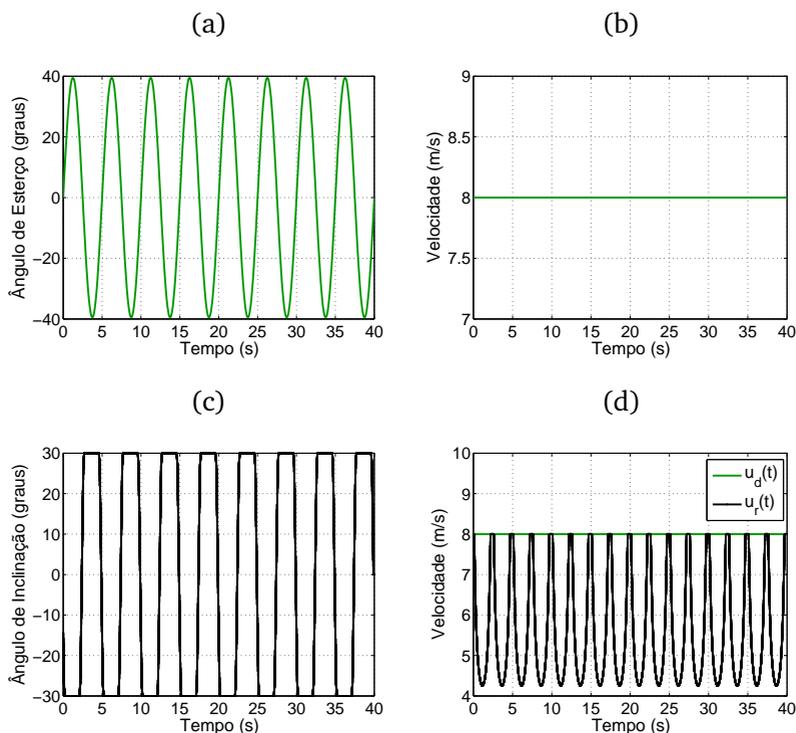


Tabela 4.9: Índices de desempenho obtidos pelos *Controladores de Rastreamento* em simulação com perturbações externas e incertezas paramétricas do veículo para o Caso 5, onde $e_1 = u = u_r$ e $e_2 = \phi - \phi_r$.

<i>Controlador de Rastreamento</i>	Índice de desempenho			
	$\int e_2^2$	$\int e_1^2$	$\int \delta^2$	$\int T_m^2$
PID-3 + RL	0,045	2,25	3,030	$1,5 \cdot 10^7$
Quase modos deslizantes (QMD)	0,023	3	3,207	$1,5 \cdot 10^7$
Realimentação linearizante (RL)	0,032	2,25	3,410	$1,5 \cdot 10^7$

Desta forma, a Figura 4.30a mostra a inclinação do veículo $\phi_{qm}(t)$, $\phi_{rl}(t)$ e $\phi_{p3}(t)$ obtidas com os controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente, onde observamos o rastreamento da trajetória de referência $\phi_r(t)$ pelos controladores QMD e RL de forma precisa, e a inclinação do veículo obtida pelo controlador PID-3 atrasada em relação às demais. Os erros de rastreamento de inclinação $e_{2qm}(t)$, $e_{2rl}(t)$ e $e_{2p3}(t)$ obtidos pelos controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente, são mostrados na Figura 4.30e.

A Figura 4.28b ilustra a velocidade do veículo $u_{qm}(t)$ e $u_{rl}(t)$ obtida com os controladores QMD e RL respectivamente, onde notamos um rastreamento preciso da trajetória de referência $u_r(t)$ pelos dois controladores. A Figura 4.30f mostra os correspondentes erros de rastreamento de velocidade $e_{1qm}(t)$ e $e_{1rl}(t)$ obtido pelos controladores QMD e RL, respectivamente.

A Figura 4.30c mostra a entrada ângulo de esterço $\delta_{qm}(t)$, $\delta_{rl}(t)$ e $\delta_{p3}(t)$ produzidas pelos controladores QMD, RL e PID-3 respectivamente, as quais apresentam amplitudes menores em comparação ao comando $\delta_d(t)$ do condutor. Note que neste caso, com os pólos alocados para os erros de rastreamento, o sistema em malha fechada está se comportando como um filtro passa-baixas, o que era de se esperar. Isto poderia ser contornado através da escolha de pólos mais rápidos para a dinâmica do erro.

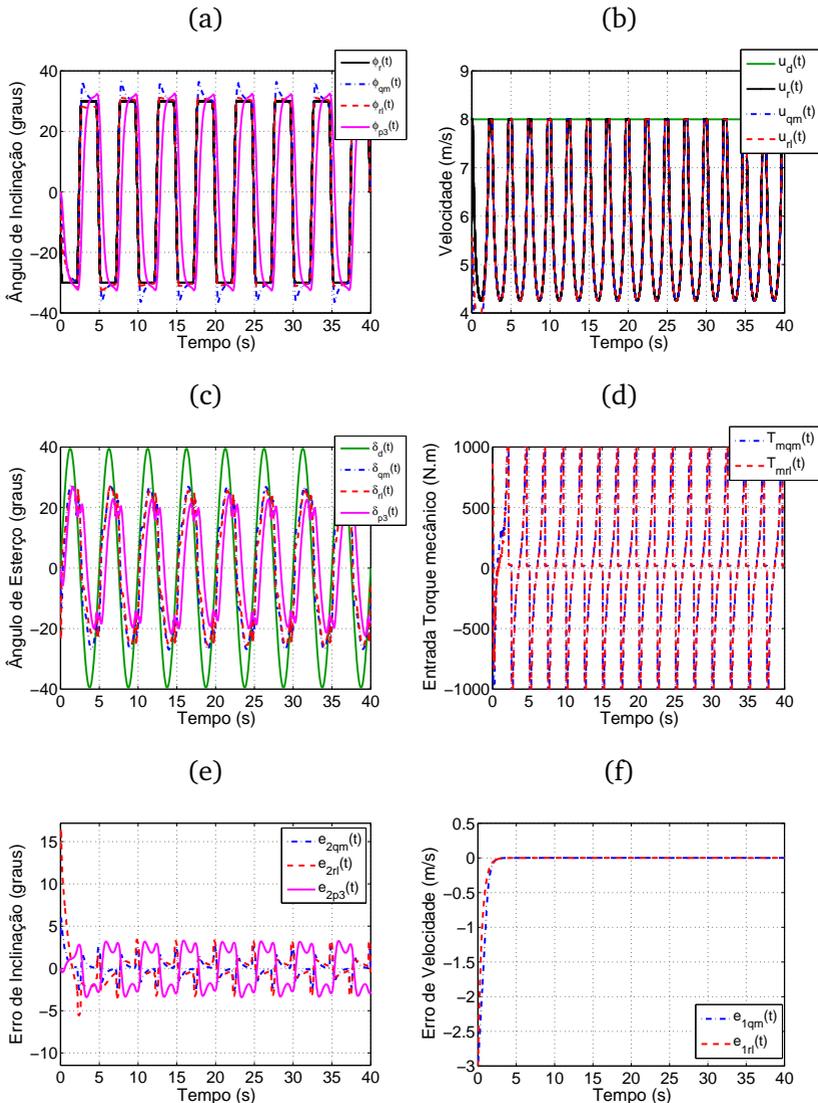
A Figura 4.30d representam as entradas torque mecânico $T_{mqm}(t)$ e $T_{mrl}(t)$ produzidas pelos controladores QMD e RL respectivamente, onde notamos elevadas amplitudes e também elevados esforços de controle, bastante semelhantes aos resultados obtidos no caso anterior analisado.

Nesta situação também, conforme esperava-se, o *Controlador de Rastreamento* Quase modos deslizantes foi o que apresentou o melhor desempenho no índice $\int e_2^2$, mantendo os demais índices

bastante próximos dos demais controladores. Note ainda que tal índice foi 2 vezes menor que o correspondente obtido pelo controlador PID-3.

Podemos concluir dos resultados obtidos ao longo desta seção, que o objetivo de rastreamento dos comandos $\delta_d(t)$ e $u_d(t)$ desejados pelo condutor, foram alcançados com a estrutura de controle mostrada na Figura 3.1, utilizando o *Controladores de Rastreamento* QMD, RL e PID-3. Foram reproduzidas diversas situações em que o condutor deseja percorrer trajetórias circular e também desviar de obstáculos. Foram consideradas em todas as simulações perturbações externas e incertezas paramétricas de massa e altura do centro de gravidade no veículo, tornando assim as condições mais próximas de uma situação prática de condução do triciclo.

Figura 4.30: (a) Trajetória de referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores QMD $\phi_{qm}(t)$, RL $\phi_{rl}(t)$ e PID-3 $\phi_{p3}(t)$, (b) velocidade desejada $u_d(t)$ pelo condutor, trajetória de referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores QMD $u_{qm}(t)$, RL $u_{rl}(t)$, (c) ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ pelo condutor e entrada ângulo de esterço produzidas pelos controladores QMD $\delta_{qm}(t)$, RL $\delta_{rl}(t)$ e PID-3 $\delta_{p3}(t)$, (d) entrada torque mecânico produzida pelos controladores QMD $T_{mqm}(t)$ e RL $T_{mrl}(t)$, (e) erro de inclinação obtidos pelos controladores QMD $e_{2qm}(t)$, RL $e_{2rl}(t)$ e PID-3 $e_{2p3}(t)$ e (f) erro de velocidade obtido pelos controladores QMD $e_{1qm}(t)$ e RL $e_{1rl}(t)$.



4.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, foram mostrados os resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle para tratar o problema de rastreamento das trajetórias desejadas pelo condutor. Para isto, foram utilizadas as metodologias lineares: Regulador quadrático linear e controlador PID e também não-lineares: Quase modos deslizantes, controle vetorial unitário e a versão estendida e uma realimentação linearizante, todas para o *Controlador de Rastreamento*. Conforme, mostraram os resultados de simulações, os controladores UVC e UVCE apresentaram sinais de controle que violam as restrições físicas e exibem o fenômeno de *chattering*. Considerando as simulações sob as condições nominais o *Controlador de Rastreamento* RL foi o que apresentou o melhor desempenho em todos os índices analisados. Já nas simulações sob perturbações externas e incertezas paramétricas o QMD apresentou melhor desempenho em $\int e_2^2$ mantendo os demais índices aproximadamente iguais aos demais controladores. Inicialmente, para as simulações foram utilizadas as trajetórias desejadas pelo condutor obtidas de [17]. Porém, estas trajetórias apresentam variações bruscas e dificilmente são utilizados em situações práticas. Neste capítulo provou-se que com a utilização de trajetórias mais suaves há uma melhoria na precisão de rastreamento de $\phi_r(t)$ e menores esforços em ambos sinais de controle para todos os controladores utilizados. Ainda neste capítulo, foram reproduzidas diversas situações em que o condutor do triciclo deseja percorrer trajetórias circular e também desviar de obstáculos.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma proposta de uma estrutura de controle em malha fechada para o rastreamento do ângulo de esterço e da velocidade longitudinal desejados pelo condutor de um triciclo, ao mesmo tempo em que mantém o ângulo de inclinação dentro de uma margem de segurança. Com isto, o veículo pode ser conduzido de maneira relativamente simples e com segurança no transporte dos passageiros.

Diferentemente da prática comum utilizada na literatura, onde os controladores são projetados sobre modelos aproximados de ordem reduzida do veículo, neste trabalho projetamos controladores diretamente sobre um modelo completo não-linear de 9-GL do triciclo. Para isto, foram utilizadas as seguintes metodologias: controle por modos deslizantes, controle vetorial unitário, controle vetorial unitário estendido e uma realimentação linearizante. Com base no modelo linearizado do triciclo em espaço de estados e funções de transferências foram projetados um regulador linear quadrático e controladores PID, respectivamente.

Ressaltamos que, as funções de transferências utilizadas no projeto dos controladores PID, foram obtidas analiticamente de maneira direta a partir do cálculo do modelo linearizado. Estas se mostraram serem as mesmas funções de transferências obtidas em [17], que utilizou métodos numéricos de identificação na simulação computacional do modelo não-linear de 9-GL do triciclo. Entretanto, na metodologia utilizada por [17] há retrabalho caso os parâmetros do triciclo mudem. Assim, mostramos neste trabalho um procedimento simples e direto para se determinar de maneira exata as funções de transferências associadas ao modelo linearizado de 9-GL do triciclo para quaisquer valores de parâmetros.

Todos os *Controladores de Rastreamento* desenvolvidos neste trabalho, conseguiram resolver adequadamente o problema de rastreamento do ângulo de esterço e da velocidade longitudinal desejados pelo condutor, com exceção do UVC e UVCE. Estes dois controladores produziram sinais de controle $\delta(t)$ e $T_m(t)$ que não podem ser implementados na prática, pois ambos apresentaram elevadas amplitudes que violam as restrições físicas, além de exibirem o fenômeno indesejado de *Chattering* (chaveamento de alta frequência).

Dos resultados de simulação obtidos com a estrutura de controle em malha fechada da Figura 3.1, o *Controlador de Rastreamento* realimentação linearizantes (RL) foi o que apresentou o melhor desempenho em todos os índices analisados ($\int e_2^2$, $\int e_1^2$, $\int \delta^2$ e $\int T_m^2$) sob condições nominais (sem perturbações externas nem

incertezas paramétricas). Isto de certa forma já era esperado, pois o RL foi projetado de modo a garantir que $e_1 \rightarrow 0$ e $e_2 \rightarrow 0$ (rastreamento perfeito), e os controladores PID e LQR foram projetados com base no sistema linearizado, e o QMD usa camadas de fronteira para o modelo não-linear.

Considerando os resultados obtidos com perturbações externas e incertezas paramétricas de +20% da massa e -5% da altura do centro de gravidade do veículo, o *Controlador de Rastreamento Quase modos deslizantes* foi o que obteve o melhor desempenho comparado aos outros controladores. Isto também já era esperado pois este controlador foi projetado para compensar explicitamente as perturbações externas.

Para as simulações descritas acima, utilizamos inicialmente os comandos desejados pelo condutor obtidos de [17]. Em um segundo momento, as simulações foram refeitas com os ditos comandos suavizados por filtros lineares de primeira ordem, obtendo assim comandos resultantes mais próximos de uma situação prática de condução, onde foi observado um melhor desempenho nos índices ($\int e_2^2$, $\int \delta^2$ e $\int T_m^2$) para todos os *Controladores de Rastreamento* utilizados.

Comparando o desempenho dos controladores PID, em todas as situações analisadas, o PID-2 e o PID-3 (ambos projetados neste trabalho) apresentaram melhor desempenho no índice $\int e_2^2$ quando comparado ao controlador PID-1 proposto por [17]. Os demais índices mantiveram aproximadamente iguais, com o controlador PID-3 se sobressaindo dentre eles.

Neste trabalho, reproduzimos também diversas situações em que o condutor deseja percorrer uma trajetória circular conforme [14], e desviar de obstáculos. Para isto, consideramos simplificada-mente utilizar para o comando ângulo de esterço do condutor variações exponenciais e senoidais, respectivamente, sob velocidade longitudinal desejada constante. Foram então mostrados os resultados de simulação obtidos nestas situações, com os três *Controladores de Rastreamento* que apresentaram os melhores desempenhos nas simulações anteriores: QMD, RL e PID-3. Estas simulações foram todas realizadas sob perturbações externas e incertezas de +20% da massa e -5% da altura do centro de gravidade no veículo. Os *Controladores de Rastreamento* QMD e RL apresentaram no geral, desempenhos próximos em quase todos os índices analisados, com o controlador PID-3 apresentando um desempenho um pouco inferior.

Entretanto, apesar dos controladores PID apresentarem um

desempenho inferior, quando comparados aos controladores RL e QMD, o controlador PID necessita apenas da realimentação da saída e não de todo o vetor de estados como o RL e o QMD, os quais possuem maior custo e complexidade de implementação.

Em resumo, as principais contribuições desta dissertação de mestrado foram:

1. Projetar controladores lineares e não-lineares diretamente sobre o modelo completo não-linear de 9-GL do triciclo;
2. Consideração de trajetórias desejadas pelo condutor mais realistas e próximas de situações práticas;
3. Projetos de diversos controladores robustos;
4. Foi apresentada uma metodologia analítica, para se determinar de maneira exata as funções de transferências associadas ao modelo linearizado de 9-GL triciclo;
5. Os esforços de controle e a dinâmica do ângulo de inclinação do triciclo em malha fechada foram cuidadosamente analisados para se avaliar, ajustar e escolher os controladores.

5.1 SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS

1. Validação e aprimoramento do modelo matemático computacional do veículo inclinável de três rodas de 9-GL, realizando ensaios e medições dos parâmetros do protótipo do veículo que se encontra atualmente em fase de construção;
2. Devido às amplitudes elevadas e chaveamento de alta frequência nos sinais de controle δ e T_m produzidos pelos controladores UVC e UVCE, uma possibilidade para trabalhos futuros seria realizar a adaptação das leis de controle UVC e UVCE visando reduzir as amplitudes e eliminar o *chattering*, as quais podem ser obtidas talvez por uma escolha mais adequada de combinações lineares das superfícies de deslizamentos;
3. Com excessão dos controladores PID, todos os demais controladores projetados assumem que todos os estados do veículo podem ser realimentados. Assim, é importante investigar a possibilidade de se utilizar estimadores de estados não-lineares e a aplicação de MPC (Model Predictive Control) em que somente a saída é realimentada;

4. Visto que, o sinal de controle ângulo de esterço produzido pelas rodas dianteiras do veículo $\delta(t)$ apresenta uma restrição física, não podendo exceder o valor máximo suportado pelas rodas que corresponde a $|\delta_{max}| = \frac{\pi}{4}$ rad = 45° (graus), uma possibilidade para trabalhos futuros seria investigar o controle preditivo baseado em modelo (MPC), como uma alternativa para o *Controlador de Rastreamento* devido a possibilidade de inclusão de restrições de amplitude nos sinais de controle;
5. Manipular e encontrar uma forma para tratar as expressões f_2 e g_2 de (2.49)--(2.50) de forma a obter um limite superior de desvios paramétricos de massa e altura do centro de gravidade do veículo, e incorporação destas incertezas nas leis de controle quase modos deslizantes (QMD) e controle vetorial unitário estendido (UVCE) visando compensar explicitamente em simulação estas incertezas paramétricas;
6. Comparar o desempenho obtido pelos controladores projetados diretamente sobre o modelo do veículo inclinável de três rodas com 9-GL realizado neste trabalho com os controladores projetados sobre o modelo simplificado de ordem reduzida da bicicleta de 2-GL;
7. Aplicação das leis de controle propostas nesta dissertação no protótipo do veículo operacional, para validar os resultados de simulação obtidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 PACEJKA, H. B. *Tire and Vehicle Dynamics, 2nd edition volume R-372*. 2nd. ed. : SAE International, 2005. ISBN 0768017025,9780768017021.
- 2 CHIOU, J. C. et al. Tilting motion control in narrow tilting vehicle using double-loop pid controller. In: *Asian Control Conference, 2009. ASCC 2009. 7th*. 2009. p. 913–918.
- 3 FURUICHI, H. et al. Switching dynamic modeling and driving stability analysis of three-wheeled narrow tilting vehicle. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 19, n. 4, p. 1309–1322, Aug 2014. ISSN 1083-4435.
- 4 G1. *Com aumento da frota, país tem 1 automóvel para cada 4 habitantes, year = 2014 url = g1.globo.com/brasil/noticia/2014/03/com-aumento-da-frota-pais-tem-1-automovel-para-cada-4-habitantes.html, urldate = 2016-07-21*.
- 5 TRÂNSITO), D. D. N. D. *Número de veículos e a relação entre população e tamanho da frota de veículos, por município do país, year = 2015 url = http://www.denatran.gov.br/frota.htm, urldate = 2016-07-01*.
- 6 TRÁFEGO), C. C. D. E. D. *Número de ocupantes por automóvel, year = 2011 url = http://www.cetsp.com.br/, urldate = 2016-07-01*.
- 7 SOARES, A. G. *Notas sobre a ocupação automobilística e a crise do transporte social urbano da cidade de Florianópolis, year = 2003*.
- 8 FURUICHI, H. et al. Dynamic model of three wheeled narrow tilting vehicle and optimal tilt controller design. In: *Micro-NanoMechatronics and Human Science (MHS), 2012 International Symposium on*. 2012. p. 331–336.
- 9 ROQUEIRO, N.; COLET, F. E. A sliding mode controlled three wheels narrow vehicle for two passengers. In: *2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. 2010. p. 358–363. ISSN 2158-3978.
- 10 CARMO, L. M. M. do. *CONTROLE DE INCLINAÇÃO DE UM VEÍCULO DE TRÊS RODAS ATRAVÉS DA ABORDAGEM DO CONTROLE VETORIAL UNITÁRIO*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.

- 11 LEAL, L. C. M.; ROSA, E. da; NICOLAZZI, L. C. *Uma introdução à modelagem quase-estática de veículos automotores de rodas*. : Publicação interna GRANTE, 2015.
- 12 FURUICHI, H. et al. Dynamic model of three wheeled narrow tilting vehicle and corresponding experiment verification. In: *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2012. p. 3728–3733. ISSN 2153-0858.
- 13 GEARFUSE. *VentureOne The plug-in hybrid three-wheeled vehicle, year = 2015 url = www.gearfuse.com, urldate = 2016-07-20*.
- 14 MOURAD, L.; CLAVEAU, F.; CHEVREL, P. Direct and steering tilt robust control of narrow vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, v. 15, n. 3, p. 1206–1215, June 2014. ISSN 1524-9050.
- 15 KIDANE, S. et al. Experimental investigation of a narrow leaning vehicle tilt stability control system. In: *2007 American Control Conference*. 2007. p. 1612–1617. ISSN 0743-1619.
- 16 KIDANE, S. et al. Development and experimental evaluation of a tilt stability control system for narrow commuter vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 18, n. 6, p. 1266–1279, Nov 2010. ISSN 1063-6536.
- 17 FARIA, M. G. de. *CONTROLE DE INCLINAÇÃO BASEADO EM ESTERÇO PARA VEÍCULO DE TRÊS RODAS DE CAMBAGEM VARIÁVEL*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.
- 18 RIVER, B. *Blue River Fleet Service, year = 2005 url = www.blueriverfleet.com/alignment.htm, urldate = 2016-06-27*.
- 19 ISERMANN, R. *Mechatronic Systems: Fundamentals*. 1. ed. : Springer-Verlag London, 2005. ISBN 978-1-85233-930-2, 978-1-84628-259-1.
- 20 MOURAD, L.; CLAVEAU, F.; CHEVREL, P. A Lateral Control Strategy for Narrow Tilting Commuter Vehicle Based on the Perceived Lateral Acceleration. In: *Preprints of the 18th IFAC World Congress*. 2011. v. 2, p. 6254 – 6259.
- 21 MOURAD, L.; CLAVEAU, F.; CHEVREL, F. Design of a two dof gain scheduled frequency shaped lq controller for narrow tilting vehicles.

In: *2012 American Control Conference (ACC)*. 2012. p. 6739–6744. ISSN 0743-1619.

22 MOURAD, L.; CLAVEAU, F.; CHEVREL, P. Non-linear control of a narrow tilting vehicle. In: *2014 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*. 2014. p. 2488–2494. ISSN 1062-922X.

23 GOHL, J. et al. The development of tilt-controlled narrow ground vehicles. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No.CH37301)*. 2002. v. 3, p. 2540–2545 vol.3. ISSN 0743-1619.

24 PIYABONGKARN, D.; KEVICZKYAND, T.; RAJAMANI, R. Active direct tilt control for stability enhancement of a narrow commuter vehicle. *International Journal of Automotive Technology*, Vol. 5, n. No. 2, p. pp. 77–88, January 2004.

25 GOODARZI, A. et al. An integrated vehicle dynamic control strategy for three-wheeled vehicles. 2014. Available from Internet: <pik.sagepub.com/content/early/2014/11/27/1464419314558741.abstract>.

26 BEROTE, J.; DARLING, J.; PLUMMER, A. Development of a tilt control method for a narrow-track three-wheeled vehicle. *Journal of Automobile Engineers*, Vol. 226, n. No. D, p. 48–69, May 2011.

27 CHATTERJEE, M.; KALE, M.; CHAUDHARI, B. N. Mathematical modelling of chassis dynamics of electric narrow tilting three wheeled vehicle. In: *2015 Annual IEEE India Conference (INDICON)*. 2015. p. 1–6.

28 FARIA, M. G.; VIEIRA, R. S.; ROQUEIRO, N. Tilting control of a three-wheeled vehicle by steering. In: *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. 2010. p. 3464–3471.

29 MILANI, S. A.; AZADI, S. Fuzzy vehicle dynamic control for a three-wheeled vehicle using tilt mechanism. *International Journal of Automotive Engineering*, Vol.4, n. No.4, p. pp. 869–881, December 2014.

30 FARIA, M. G. de; COLET, E. F.; ROQUEIRO, N. A sliding mode controlled three wheeled narrow vehicle. *International Journal of Vehicle Design*, v. 62, n. 2/3/4, p. 123–146, 2013.

- 31 FARIA, M. G.; ROQUEIRO, N.; COLET, E. F. A Sliding Mode Controlled Tilting Three Wheeled Narrow Vehicle. In: *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA2010*. 2010. v. 18, p. 1596–1602.
- 32 CARMO, L. M. M. et al. Aplicação do controle vetorial unitário para estabilização de um veículo urbano inclinável. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. 2012. p. 702–707.
- 33 TROFINO, A. *Apostila de Controle Robusto*. : Departamento de Automação e Sistemas, 2015.
- 34 LI, J.-J. S. W. *Applied Nonlinear Control*. 1991. ISBN 0130408905,9780130408907.
- 35 UTKIN JUERGEN GULDNER, J. S. V. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems, Second Edition (Automation and Control Engineering)*. 2nd. ed. : CRC Press, 2009. (Automation and Control Engineering). ISBN 1420065602,9781420065602.
- 36 ROQUEIRO, N. et al. An extension of the unity vector control method. In: *2014 13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. 2014. p. 1–4. ISSN 2158-3978.
- 37 ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. 3. ed. : Springer-Verlag London, 1995. (Communications and Control Engineering). ISBN 978-1-4471-3909-6,978-1-84628-615-5.
- 38 VIEIRA, R. de S.; NICOLAZZI, L. C.; ROQUEIRO, N. Modelling a tilting three-wheeled narrow vehicle with six degrees of freedom. In: *20th International Congress of Mechanical Engineering*. 2009. p. 1–9.
- 39 GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. 2d ed. ed. : Addison-Wesley Pub. Co, 1980. (Addison-Wesley series in physics). ISBN 9780201029185,0201029189.
- 40 JAZAR, G. N. *Vehicle Dynamics. Theory and Application*. 1st ed. 2008. corr. 3rd printing. ed. : Springer, 2008. ISBN 9780387742434,0387742433.
- 41 ROQUEIRO, N.; FARIA, M. G. D.; COLET, E. F. Sliding mode controller and flatness based set-point generator for a three wheeled narrow vehicle. *{IFAC} Proceedings Volumes*, v. 44, n. 1, p. 11925 – 11930, 2011. ISSN 1474-6670. 18th IFAC World Congress.

- 42 MOORE, J. B.; MINGORI, D. L. Robust frequency-shaped l_q control. *Automatica*, v. 23, n. 5, p. 641 – 646, 1987. ISSN 0005-1098. Available from Internet: <www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109887900604>.
- 43 JOHNSON, M. A.; GRIMBLE, M. J. Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design. *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications*, v. 134, n. 1, p. 53–71, January 1987. ISSN 0143-7054.
- 44 GHAOUI, L. E. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. : Society for Industrial and Applied Mathematic, 1994. (Studies in Applied Mathematics 15). ISBN 9780898713343,089871334X.
- 45 HAUKSDOTTIR, A. S.; HERJOLFSSON, G.; SIGUROSSON, S. P. Optimized zero tracking and disturbance rejecting controllers - the generalized pid controller. In: *2007 American Control Conference*. 2007. p. 5790–5795. ISSN 0743-1619.
- 46 KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. 3rd ed. ed. : Prentice Hall, 2002. ISBN 0130673897,9780130673893.

APÊNDICE 1

Steering and Velocity Tracking of a Tilting Three-Wheeled Vehicle Using Sliding Mode Control

Leandro Yoshio Morita

Department of Automation and Systems
Federal University of Santa Catarina
Brazil

leandro.morita@posgrad.ufsc.br

Nestor Roqueiro

Department of Automation and Systems
Federal University of Santa Catarina
Brazil

nestor.roqueiro@ufsc.br

Hector Bessa Silveira

Department of Automation and Systems
Federal University of Santa Catarina
Brazil

hector.silveira@ufsc.br

Abstract—This work treats the control problem of tracking the steering angle and the longitudinal velocity desired by the driver of a tilting 3-wheeled vehicle while keeping its tilt angle within a safety margin, so as to achieve safe and easy driving in closed-loop. A common practice in the literature is to determine the controller structure based upon reduced order approximate models of the vehicle. Here, one designs sliding mode controllers for such tracking problem directly on a 9-DOF model of a prototype of a tilting 3-wheeled vehicle. Three different approaches are used: the sliding mode controller of Slotine, the Unit Vector Control (UVC) method of Utkin, and a recently proposed extension of the UVC controller. The simulation results compare the performance of these controllers, and parametric uncertainties and external disturbances are also considered.

I. INTRODUCTION

A major problem in many cities around the world is the increasing number of cars in circulation. The considerable physical space that cars occupy on the streets and roads as well as the relatively low number of passengers per car are some of the main issues that result in traffic jams. Furthermore, the amount of pollutant gases emitted into the atmosphere is proportional to the number of cars on our planet. In recent years, many researchers have been working on alternative solutions to the problem of urban mobility with reduced environmental impact. One of these alternatives are relatively small, narrow and energy-efficient vehicles, in which 3-wheeled vehicles have emerged as a promising option. Although initially designed as sport vehicles, over the years they have also been designed from an urban mobility improvement perspective [1], [2].



Fig. 1. Front (left) and lateral view (right) of the prototype of a tilting 3-wheeled vehicle developed at Innovation Laboratory, UFSC, Brazil.

Fig. 1 shows the front and lateral view of the prototype of a tilting 3-wheeled vehicle developed at Innovation Laboratory of Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil. It consists

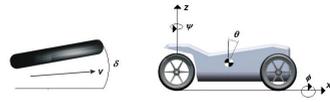


Fig. 2. Steering angle (δ), roll angle (ϕ), pitch angle (θ) and yaw angle (ψ) of the vehicle.

of two front wheels and one rear wheel, and it allows for two passengers in tandem. In order to make curves at relative high velocities, it tilts similarly to a motorcycle. The tilting angle is precisely the roll angle ϕ (see Fig. 2), and tilting is achieved by varying the camber angle of its front wheels, which is the angle between the xy -plane and the tire plane. This is precisely a steering tilt control (STR) system. However, such 3-wheeled vehicle behaves essentially as an inverted pendulum with respect to the tilting dynamics, thus being unstable in open-loop and impractical for driving. Therefore, closed-loop control strategies are required to drive the vehicle with safety and ease.

The steering angle δ of the two front wheels is depicted in Fig. 2, and let $u = \dot{x}$ be the longitudinal velocity of the rear wheel. As in the works [3]–[6], here one also considers a nonlinear 9-DOF (degree of freedom) dynamic model of the prototype of the tilting 3-wheeled vehicle illustrated in Fig. 1. The control inputs are the steering angle $\delta(t)$ and the mechanical torque $T_m(t)$ applied to rear wheel, and one assumes that all state variables are measured. The control problem treated in this paper is to design closed-loop controllers that keep the steering angle $\delta(t)$ and the (longitudinal) velocity $u(t)$ of the 3-wheeled vehicle relatively close to the trajectories $\delta_d(t)$ and $u_d(t)$ desired by the driver, respectively, while keeping its tilt angle within a safety margin, thus achieving safe and easy driving in closed-loop. The key idea is to determine sliding mode controllers that force the tilting angle $\phi(t)$ and the velocity $u(t)$ of the vehicle to track adequate reference trajectories $\phi_r(t)$ and $u_r(t)$, respectively, where $|\phi_r(t)|$ evolves within a pre-established safety margin $\phi_{max} \leq \pi/6$ ($= 30^\circ$). One has chosen sliding mode techniques due to their robustness properties. The generation of the reference trajectories $\phi_r(t)$

and $u_r(t)$ rely upon the driver's command for the desired steering angle $\delta_d(t)$ and the velocity $u_d(t)$, as well as on a simplified model for the dynamics of $\phi(t)$: a 2-DOF bicycle model. One considers a steer-by-wire system, i.e. there is no mechanical coupling between $\delta_d(t)$ and $\delta(t)$. The generated reference trajectory $u_r(t)$ is such that in general one has $u_r(t) \cong u_d(t)$. Under perfect tracking in closed-loop, i.e. $\phi(t) = \phi_r(t)$ and $u(t) = u_r(t) \cong u_d(t)$, one has that the referred approximate model for $\phi(t)$ ensures that $\delta(t) \cong \delta_d(t)$, so that for the complete 9-DOF vehicle model it is reasonable to expect that $\delta(t) \cong \delta_d(t)$, thus solving the control problem. One points out that, as opposed to [3], [5], [6], where the sliding mode controller structure for the control strategy described above was determined from the referred 2-DOF bicycle model and the controller gains for the 9-DOF vehicle model were adjusted heuristically, here one designs the controllers directly on the 9-DOF vehicle model.

The tilt stabilization of a 4-wheeled vehicle was treated in [7], [8] and [9] using LQR (Linear Quadratic Regulator), LPV (Linear Parameter-Varying) and robust H_2 techniques, respectively. The design of the controllers was based upon the linearized system of a 2-DOF bicycle model. In [10], a flatness-based nonlinear controller was obtained from such 2-DOF bicycle. However, in those works the behavior of the driver's commands is considered as an internal linear model.

This paper is organized as follows. Section II briefly describes the nonlinear mathematical model of the dynamics of the velocity $u(t)$ and the tilting angle $\phi(t)$ of the 3-wheeled vehicle here treated. Such model is sufficient for the purpose of controller design. The complete 9-DOF vehicle model in not shown due to lack of space. Section III explains in detail the control strategy outlined above. In Section IV, three sliding mode controllers are designed for the tracking problem of the reference trajectories $\phi_r(t)$ and $u_r(t)$: 1) the quasi-sliding mode method presented in [11]; 2) the Unit Vector Control (UVC) approach given in [12]; and 3) the UVC extension recently proposed in [13]. The closed-loop simulation results for these controllers are exhibited and analyzed in Section V. Finally, Section VI presents the conclusions.

II. DYNAMICS OF THE LONGITUDINAL VELOCITY AND THE TILTING ANGLE OF THE 3-WHEELED VEHICLE

Using an Euler-Lagrange multi-body approach, the nonlinear 9-DOF model of the prototype of a tilting 3-wheeled vehicle described in the introduction can be written as

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (1)$$

where $\mathbf{q} = (x, y, z_1, z_2, z_3, z_4, \psi, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^9$ is the vector of generalized coordinates, $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{18}$ is the state, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^9$ is the excitation vector, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, \mathbf{C} and $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ are respectively the inertial, damping and stiffness matrices, x and y are respectively the longitudinal and transverse vehicle movements, z_1 the rear wheel vertical movement, z_2 the main body vertical movement, z_3 and z_4 are respectively the right and left front wheel vertical movement, and ψ , ϕ and θ are respectively the yaw, roll and pitch angles (see Fig. 2). One has that $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ is a symmetric

positive definite matrix for all $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^9$. The reader is referred to [14] for full modeling details. Recall that $\phi(t)$ is precisely the tilting angle of the vehicle.

From (1) and the expressions in [14], the dynamics of the longitudinal velocity $u(t) = \dot{x}(t)$ of the rear wheel and the tilting angle $\phi(t)$ is obtained:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f_1(u(t)) + k_{21}T_m(t), \\ \dot{\phi}(t) &= f_2(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + d_2(\phi, t) + g_2(u(t), \phi(t))\delta(t). \end{aligned} \quad (2)$$

The control inputs are the steering angle $\delta(t)$ of the front wheels (see Fig. 2) and the mechanical torque $T_m(t)$ applied to the rear wheel, and

$$\begin{aligned} f_1(u) &= -k_{19} - k_{20}u^2, \\ f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{\sin(\phi)}{\alpha(\phi)} \left[k_{11}\dot{z}_1 + k_{12}\dot{z}_2 + k_{13}(\dot{z}_3 + \dot{z}_4) + k_{14}\theta + k_{15}z_1 \right. \\ &\quad \left. + k_{16}z_2 + k_{17}(z_3 + z_4) + k_{18}\phi \sin(\phi) \right] \\ &\quad + \frac{\cos(\phi)}{u\alpha(\phi)} \left[k_{12}\phi u - k_{10}\dot{\psi} + k_{12}\phi uz_2 - k_{11}\dot{y} \right] \\ &\quad + \frac{1}{u\alpha(\phi)} \left[+ k_{15}\dot{\psi} + k_{16}\dot{y} + k_{18}\dot{\phi} u \right], \\ d_2(\phi, t) &= -k_{19} \frac{\sin(\phi)}{\alpha(\phi)} \left[F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha(\phi)} \left[\cos(\phi)(k_{13} \cos(\phi) + k_{14})V_w^2(t)\text{sign}(V_w(t)) \right. \\ &\quad \left. + k_{17}(F_2(t) + F_3(t)) \right], \\ g_2(u, \phi) &= \frac{k_{20}u^2 \cos(\phi) + k_{19} \cos(\phi) - k_{15}}{\alpha(\phi)}, \\ \alpha(\phi) &= \cos^2(\phi) + 0.8255 \cos(\phi) + 9.3597, \end{aligned} \quad (3)$$

where $V_w(t)$ is the speed of external lateral winds on the vehicle, $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ are external disturbances due to ground forces exerted on its wheels, and the constant parameters k_1, \dots, k_{21} have the values shown in Table I. One remarks that these values result from the physical parameters considered in [14]. For instance, the mass of the vehicle is $m = 500\text{kg}$ and the height of its center of gravity is $h = 1\text{m}$. Note from (2)–(3) that \dot{u} depends only on u and on the input torque T_m , and that $\dot{\phi}$ does not depend on the input T_m . The function $g_2(u, \phi)$ above is positive for $|\phi| < \pi/2$ and $u > 0$. The dynamics of the remaining state variables are not shown due to lack of space. It is easy to see that (2)–(3) can be rewritten as

TABLE I
VALUES OF THE PARAMETERS IN (3).

$k_1 = 124.41$	$k_2 = 207.36$	$k_3 = k_1$	$k_4 = 755.5$
$k_5 = 1.22 \cdot 10^4$	$k_6 = 897.34$	$k_7 = 1.32 \cdot 10^4$	$k_8 = 1.34 \cdot 10^3$
$k_9 = 0.1375$	$k_{10} = 8.94 \cdot 10^3$	$k_{11} = 2.71 \cdot 10^3$	$k_{12} = k_8$
$k_{13} = 0.526$	$k_{14} = 1.02$	$k_{15} = 755.92$	$k_{16} = 229.06$
$k_{17} = k_9$	$k_{18} = k_3$	$k_{19} = 0.09$	$k_{20} = 5 \cdot 10^{-4}$
$k_{21} = 7 \cdot 10^{-3}$			

$$\ddot{q} = M^{-1}(q, \dot{q}) [\tau - N(q, \dot{q}, t)], \quad (4)$$

where $q = (x, \phi) \in \mathbb{R}^2$, $M^{-1}(q, \dot{q}) = \text{diag}(k_{21}, g_2(u, \phi))$ is a positive definite 2×2 matrix, $\tau = (T_m, \delta) \in \mathbb{R}^2$ is the input vector, and $N(q, \dot{q}, t) = -M(q, \dot{q})(f_1(u), f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + d_2(\phi, t)) \in \mathbb{R}^2$.

III. THE CONTROL STRATEGY

This section describes in detail the proposed solution outlined in the introduction for the control problem here treated: to design closed-loop controllers that keep the steering angle $\delta(t)$ and the (longitudinal) velocity $u(t)$ of the 3-wheeled vehicle relatively close to the trajectories $\delta_d(t)$ and $u_d(t)$ desired by the driver, respectively, while keeping its tilt angle within a safety margin. The control strategy is illustrated in Fig. 3, which is the same methodology used in [3], [5], [6]. The commands of the driver of the 3-wheeled vehicle determine the desired steering angle $\delta_d(t)$ and velocity $u_d(t)$, which in turn depend on the steering angle $\delta(t)$ of the front wheels, on the velocity $u(t)$, and possibly on the remaining state variables $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$. One considers a steer-by-wire system: there is no mechanical coupling between $\delta_d(t)$ and $\delta(t)$. The driver plays the role of a closed-loop controller in the outer loop (the *Tracking Controller* corresponds to the inner loop). Based on the driver's desired trajectories $\delta_d(t)$ and $u_d(t)$, the *Reference Generator* determines the reference trajectories $\phi_r(t)$ and $u_r(t)$, where $|\phi_r(t)|$ evolves within a pre-established safety margin $\phi_{max} \leq \pi/6$ (further details in the next paragraph). The inner loop consists of the *Tracking Controller*: its aim is to determine the values for the inputs $\delta(t)$ and $T_m(t)$ that force the tilting angle $\phi(t)$ and the velocity $u(t)$ of the vehicle to track the reference trajectories $\phi_r(t)$ and $u_r(t)$, respectively. It is assumed that the whole state vector $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ of the vehicle is measured.

The *Reference Generator* is now further explained. The main idea is to construct the reference trajectories $\phi_r(t)$ and $u_r(t)$ so as to ensure that in general one has $\delta(t) \cong \delta_d(t)$ and $u_r(t) \cong u_d(t)$ when $\phi(t) = \phi_r(t)$ and $u(t) = u_r(t)$, thus solving the control problem. The details are given in the sequel. Consider that $\delta_d(t)$ and $u_d(t)$ are sampled with sampling period $T > 0$. The reference trajectories $\phi_r(t)$ and $u_r(t)$ are chosen as piecewise-linear functions by

$$\begin{aligned} \phi_r(t) &= \phi_r(kT) + \frac{\phi_r((k+1)T) - \phi_r(kT)}{T}(t - kT), \\ u_r(t) &= u_r(kT) + \frac{u_r((k+1)T) - u_r(kT)}{T}(t - kT), \end{aligned} \quad (5)$$

for $t \in [kT, (k+1)T)$, $k \in \mathbb{N}$. By construction, $\ddot{\phi}_r \equiv 0$. It suffices to specify the values of $\phi_r(kT)$, $\phi_r((k+1)T)$, $u_r(kT)$, $u_r((k+1)T)$. As discussed in [14], the differential equation

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{g}{h} \sin(\phi(t)) + \frac{1}{lh} \cos(\phi(t))u^2(t)\delta(t), \quad (6)$$

which corresponds to a 2-DOF simplified bicycle model, captures the essential features of the dynamics of the tilting angle $\phi(t)$ of the 9-DOF model of the 3-wheeled vehicle (compare with (2)–(3)), where g is the gravitational acceleration and l is the length of the vehicle. Recall that $\ddot{\phi}_r \equiv 0$. Hence, by relying on the simplified model (6), it is reasonable to take

$$\phi_r(kT) = -\tan^{-1} \left(\frac{u_d^2(kT)\delta_d(kT)}{gl} \right). \quad (7)$$

Let $\phi_{max} = \pi/6$ be the maximum admissible value for $|\phi(t)|$ in order to drive the vehicle safely. Now, if in (7) one has $|\phi_r(kT)| \leq \phi_{max}$, then choose $u_r(kT) = u_d(kT)$. Otherwise, if $|\phi_r(kT)| > \phi_{max}$, then choose $u_r(kT)$ so that

$$\phi_r(kT) = -\text{sign}(\delta_d(kT))\phi_{max} = -\tan^{-1} \left(\frac{u_r^2(kT)\delta_d(kT)}{gl} \right), \quad (8)$$

i.e. the desired velocity value $u_d(kT)$ is penalized in order to keep the desired steering angle value $\delta_d(kT)$. Note that in such case $u_r(kT) \neq u_d(kT)$. The same idea is applied to obtain $\phi_r((k+1)T)$ and $u_r((k+1)T)$: assuming that the samples of the derivatives $\dot{\delta}_d(t)$ and $\dot{u}_d(t)$ are available, one has that $\delta_d((k+1)T) \cong \delta_d(kT) + T\dot{\delta}_d(kT)$ and $u_d((k+1)T) \cong u_d(kT) + T\dot{u}_d(kT)$, for small $T > 0$. In case the samples of $\dot{\delta}_d(t)$ and $\dot{u}_d(t)$ are not available, then one chooses a small $T > 0$ and delays the samples $\delta_d(kT)$, $u_d(kT)$ by T , so that in (7)–(8) one replaces $\delta_d(kT)$ and $u_d(kT)$ by $\delta_d((k-1)T)$ and $u_d((k-1)T)$, respectively. Hence, if in (7) one has $|\phi_r(kT)| < \phi_{max}$, then one takes $u_r(kT) = u_d((k-1)T)$, and so on.

By construction, $\ddot{\phi}_r \equiv 0$, $|\phi_r(t)| \leq \phi_{max}$, and in general one has $u_r(t) \cong u_d(t)$. Under perfect tracking in closed-loop, $\phi(t) = \phi_r(t)$ and $u(t) = u_r(t) \cong u_d(t)$, and thus the approximate model for $\phi(t)$ in (6) along with (7) ensures that $\delta(t) \cong \delta_d(t)$, so that for the complete 9-DOF vehicle model it is reasonable to expect that $\delta(t) \cong \delta_d(t)$, thus solving the control problem. The next section describes the design of the *Tracking Controller* based upon sliding mode techniques. Sliding mode control was chosen due to its robustness property.

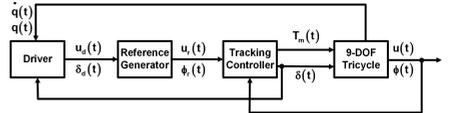


Fig. 3. Block diagram of the closed-loop control strategy.

IV. SLIDING MODE TRACKING CONTROLLERS

Let $u_r(t)$ and $\phi_r(t)$ be arbitrary reference trajectories of class C^1 and C^2 for $u(t)$ and $\phi(t)$ in (2)–(3), respectively, with $|\phi_r(t)| \leq \phi_{max}$ and $u_r(t) > 0$ for $t \geq 0$. Define the tracking errors respectively as $e_1(t) = u(t) - u_r(t)$ and $e_2(t) = \phi(t) - \phi_r(t)$. Consider the sliding surfaces:

$$s_1 = e_1, \quad s_2 = \dot{e}_2 + ce_2, \quad c > 0, \quad (9)$$

and let $S = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ be the sliding surface vector. In the sequel, three different sliding mode techniques are applied to design the *Tracking Controller* of Fig. 3 above. Throughout this section, one assumes that there are no external disturbances in (2)–(3), i.e. $F_1 \equiv F_2 \equiv F_3 \equiv V_w \equiv 0$. Hence, $d_2 \equiv 0$ in (2)–(3) and $N = N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in (4). These disturbances will be taken into account in the simulation results of Section V.

1) *Quasi-Sliding Mode Control (QSMC)*: Here we rely on the quasi-sliding mode methodology using continuous control laws developed in [11] in order to avoid chattering. Recall that in (3), $g_2(u, \phi) > 0$ for $|\phi| < \pi/2$ and $u > 0$. Let $\eta, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$. It is shown in [11] that the following continuous control laws for system (2)–(3),

$$T_m = \frac{1}{k_{21}} [-f_1(u) + \dot{u}_r(t) - \eta \text{sat}(s_1/\epsilon_1)],$$

$$\delta = \frac{1}{g_2(u, \phi)} \left[-f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \ddot{\phi}_r(t) - c\dot{\epsilon}_2 - \eta \text{sat} \left(\frac{s_2}{c\epsilon_2} \right) \right], \quad (10)$$

ensure that the boundary layers $B_1 = \{|s_1| \leq \epsilon_1\}$ and $B_2 = \{|s_2| \leq c\epsilon_2\}$ around the sliding surfaces s_1 and s_2 are positively invariant sets that are reached in finite time: $t_{r1} \leq |s_1(t=0)|/\eta$ and $t_{r2} \leq |s_2(t=0)|/\eta$, respectively. In particular, $|u(t) - u_r(t)| \leq \epsilon_1$, for $t \geq t_{r1}$. Furthermore, $\lim_{t \rightarrow \infty} |e_2(t)| \leq \epsilon_2$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{e}_2(t)| \leq 2c\epsilon_2$ (see [11]).

2) *Unit Vector Control (UVC)*: Recall that (2)–(3) can be rewritten as system (4), where $q = (x, \phi)$, $\dot{q} = (u, \dot{\phi})$, $u = \dot{x}$, $\tau = (T_m, \delta)$ is the control vector, and $M(q, \dot{q})$ is a diagonal positive definite matrix. Define $N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \|N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|$ (Euclidean norm), and $M^-(q, \dot{q}) = \lambda_{\min}(M(q, \dot{q}))$, $M^+(q, \dot{q}) = \lambda_{\max}(M(q, \dot{q}))$ (minimum and maximum eigenvalue, respectively). Let $\eta > 0$. From the development in [12] (see also the computations in [13]), the control law

$$\tau = (T_m, \delta) = \tau_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \frac{S}{\|S\|}, \quad (11)$$

where $\tau_0 = \tau_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) > 0$ is given by

$$\tau_0 = M^+(q, \dot{q}) \left(|c\dot{\epsilon}_2| + \|(\dot{u}_r(t), \ddot{\phi}_r(t))\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{M^-(q, \dot{q})} + \eta \right), \quad (12)$$

ensures that (“ \top ” denotes transpose)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} S S^\top \leq -\eta \|S\|, \quad (13)$$

which in turn implies that $S = 0$ is a positively invariant set that is reached in finite time $t_r \leq \|S(t=0)\|/\eta$.

3) *Extended Unit Vector Control (EUVC)*: For the UVC technique above, note that the same “feedback gain” $\tau_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ is used for both controls T_m and δ in (11). Hence, if one is able to use distinct gains for each input, one might as well obtain control signals of reduced amplitudes and energies. This is what motivated the UVC extension proposed in [13] and presented in the sequel. Consider again system (4). As $M(q, \dot{q})$ is a diagonal positive definite matrix, then the control laws

$$T_m = \frac{1}{k_{21}} \bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \frac{S}{\|S\|}, \quad \delta = \frac{1}{g_2(u, \phi)} \bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \frac{S}{\|S\|},$$

$$\bar{\tau}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \left(|c\dot{\epsilon}_2| + \|(\dot{u}_r(t), \ddot{\phi}_r(t))\| + \frac{N^+(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{M^-(q, \dot{q})} + \eta \right), \quad (14)$$

where $\eta > 0$, ensures that (13) is met. This follows from the computations in [13] with: $Q = I$, $D = M$ (M is diagonal), and $\Delta = 0$ (no parametric uncertainties) and $B = 0$. It is

important to point out that the EUVC technique developed in [13] also covers the general case where the matrix M in system (4) is not necessarily diagonal. From (11)–(12) UVC and (14) (EUVC), one sees that, as opposed to the UVC control law which has the same “feedback gain” $\tau_0 = M^+ \bar{\tau}_0$ for both inputs, the EUVC approach uses distinct gains: $1/k_{21} \bar{\tau}_0$ for T_m , and $1/g_2 \bar{\tau}_0$ for δ , with $M = \text{diag}(1/k_{21}, 1/g_2)$ and $M^+ = \max(1/k_{21}, 1/g_2)$.

V. SIMULATION RESULTS

Recall that the control problem here treated is to design closed-loop controllers that keep the steering angle $\delta(t)$ and the (longitudinal) velocity $u(t)$ of the 3-wheeled vehicle close to the references trajectories $\delta_d(t)$ and $u_d(t)$ desired by the driver, respectively, while keeping its tilt angle within a safety margin. The simulation results are now shown for the control strategy depicted in Fig. 3 and the sliding mode tracking controllers designed in the previous section. One considers that the trajectories $u_d(t)$ (velocity) and $\delta_d(t)$ (steering angle) desired by the driver are the ones shown in Fig. 4b and Fig. 4c, respectively. Note that their duration is 70 seconds. One has that $\delta_d(t)$ is piecewise-constant and assumes the following values (in degrees): 0° on $[0, 5]$; 1° on $[5, 20]$; -1° on $[20, 35]$; -0.5° on $[35, 45]$; 0° on $[45, 50]$; 1.5° on $[50, 65]$; -1.5° on $[65, 70]$. The resulting piecewise-linear reference trajectories $\phi_r(t)$ and $u_r(t)$ determined by the *Reference Generator* from (5) and (7)–(8) are presented in Fig. 4a (tilting angle in degrees) and Fig. 4b, respectively, for the sampling period $T = 0.1$ and $\phi_{\max} = \pi/6$ ($= 30^\circ$). Note that, in accordance to the *Reference Generator*, $u_r(t)$ coincides with $u_d(t)$ (see Fig. 4b) when $|\phi_r(t)| < \phi_{\max} = 30^\circ$ (see Fig. 4a), and they differ in case $|\phi_r(t)| = \phi_{\max} = 30^\circ$.

The initial conditions of vehicle are: $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, $u(0) = 25\text{m/s}$, and the remaining states are all zero at $t = 0$. For the QSMC, UVC and EUVC controllers of the previous section, one considers the following control parameters: $c = 2$ in (9), $\epsilon_1 = 0.75$, $\epsilon_2 = 0.1$ (widths of the boundary layers B_1 and B_2 , respectively) in (10), and $\eta = 1$ in (10), (12), (14).

In the sequel, the obtained closed-loop simulation results are presented and discussed. One begins treating the ideal case with nominal parameters and no external disturbances, i.e. $F_1 \equiv F_2 \equiv F_3 \equiv V_w \equiv 0$ in (2)–(3). Parametric uncertainties and external disturbances will be considered afterwards. One sees in Fig. 4a that the tilting angle with the QSMC ($\phi_s(t)$) and EUVC ($\phi_e(t)$) controllers adequately tracks the reference tilting angle $\phi_r(t)$ determined by the *Reference Generator*. Note that, in comparison to the EUVC controller, the QSMC exhibits an overall better tracking precision. Fig. 4b presents the tracking of the reference velocity $u_r(t)$ with the QSMC ($u_s(t)$) and EUVC ($u_e(t)$) controllers. Both controllers achieve a reasonable tracking precision. However, one concludes from Fig. 4d (steering angle in radians) and Fig. 4f that the inputs $\delta(t)$ and $T_m(t)$ determined by the EUVC controller cannot be implemented in practice: both exhibit chattering (high frequency switching), and furthermore the steering angle $\delta(t)$ violates physical constraints since the front wheels of the

vehicle spin in many full circles to the left and to the right ($\delta(t)$ exceeds 50rad!). Although not shown here due to lack of space, the UVC controller also had these drawbacks, and with control amplitudes larger than the ones of EUVC: $T_m(t)$ is considerably larger, and $\delta(t)$ of UVC is in the order of 10^7 rad! For the prototype of the 3-wheeled vehicle here considered, the maximum admissible steering angle of the front wheels is 45° . On the other hand, the inputs determined by the QSMC controller can be implemented in practice: chattering is avoided in both inputs $\delta(t)$ and $T_m(t)$, and $\delta(t)$ did not violate these physical constraints, as seen in Fig. 4c, Fig. 4e and Fig. 4f (steering angle in degrees). Although not presented here, the amplitude of the input torque $T_m(t)$ has two peaks: one of 5×10^5 N.m at the instant $t = 31.5$ s, and the other one of -1.1×10^5 N.m at $t = 50.1$ s. They occur precisely when the reference velocity $u_r(t)$ presents a fast variation (see Fig. 4b), and are about 100 times smaller than the resultant torque amplitude with the EUVC controller (see Fig. 4f). However, apart from these peaks, the input torque amplitude is significantly smaller: its typical order of magnitude is as shown in Fig. 4e (detailed view on the time interval [10, 20]). Furthermore, from Fig. 4c and Fig. 4f (detailed view on the time interval [10, 20]), notice that the input steering angle $\delta(t)$ with the QSMC controller evolves within the maximum admissible value of 45° for the vehicle. Apart from the few observed oscillations of high amplitude and fast variation, one has that $\delta(t) \cong \delta_d(t)$, and thus one concludes that the QSMC controller solves the control problem. Such oscillations correspond to an STR (Steering Tilt Control) system. Indeed, note from Fig. 4a that they occur precisely when $\phi_r(t)$ exhibits relatively fast variations. The steering angle $\delta(t)$ of the front wheels then oscillates so that the vehicle tilts and its tilting angle keeps up with the reference tilting angle. Such behavior is intuitive and is expected from the physical point of view.

Now, parametric uncertainties and external disturbances are considered in (2)–(3). Recall that $V_w(t)$ corresponds to the speed of lateral winds on the vehicle and $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$ are ground forces exerted on its wheels. Here one assumes that these disturbances vary randomly with $|F_i(t)| \leq 800$ N, for $i = 1, 2, 3$, and $5\text{m/s} \leq V_w(t) \leq 12\text{m/s}$, as shown in Fig. 4h (one depicts $V_w(t) \times 50$ for the sake of clarity and, although not presented, $F_2(t)$ and $F_3(t)$ are similar to $F_1(t)$). It was verified that $|d_2(\phi, t)| < D \triangleq 70$ in (2)–(3) for $|\phi| < \pi/4$ and $t \geq 0$. Hence, in order for the QSMC controller to reject these disturbances, it suffices to replace η by $\eta + D$ in the control law for δ in (10) (see [11] for details). One also assumes that the nominal mass $m = 500$ kg of the vehicle and the nominal height $h = 1$ m of its center of gravity have an uncertainty of $+20\%$ and -5% , respectively. Such uncertainties were not explicitly considered in the control laws (10) due to the complexity involved in the determination of an upper bound for the parametric deviation in (2)–(3). Nonetheless, it is reasonable to expect that the *sat* terms in (10) already ensure some degree of robustness. Fig. 4i and Fig. 4j exhibit the results obtained for the (modified) QSMC controller in the

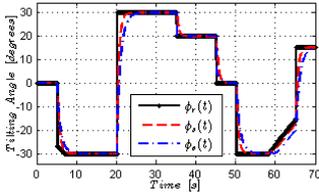
presence of the considered external disturbances and parametric uncertainties. Notice that the obtained input $\delta(t)$ and tracking precision in such situation are very similar to the ideal case treated above with no external disturbances and parametric uncertainties (see Fig. 4c and Fig. 4a, respectively). Thus, the designed QSMC controller is robust and adequately solves the control problem.

VI. CONCLUSIONS

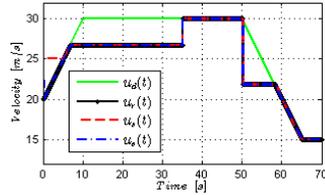
This paper presented a control strategy based on sliding mode controllers for tracking the steering angle and velocity desired by the driver of a tilting 3-wheeled vehicle. As opposed to other works in the literature, where the choice of the controller structure relied on reduced order approximate models, here the controllers were designed directly on the complete 9-DOF model of a prototype of the vehicle. The simulation results have shown that the QSMC controller provides a reasonable solution to the control problem with robustness properties and no chattering. Currently under investigation is the adaptation of the UVC and EUVC control laws so as to reduce the amplitudes of the inputs and avoid chattering. It seems that this can be achieved by means of an adequate linear combination of the sliding surfaces.

REFERENCES

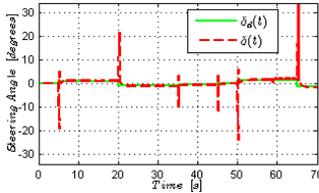
- [1] S. Kidane, R. Rajamani, L. Alexander, P. Starr, and M. Donath, "Development and experimental evaluation of a tilt stability control system for narrow commuter vehicles," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 18, no. 6, pp. 1266–1279, Nov 2010.
- [2] J. Chiou, C.-Y. Lin, C.-L. Chen, and C.-P. Chien, "Tilting motion control in narrow tilting vehicle using double-loop pid controller," in *7th Asian Control Conference (ASCC)*, Aug 2009, pp. 913–918.
- [3] M. Faria, N. Roqueiro, and E. Colet, "A sliding mode controlled tilting three wheeled narrow vehicle," in *XVIII Congresso Brasileiro de Automatica*, 2010, pp. 1596–1602.
- [4] M. Faria, R. Vieira, and N. Roqueiro, "Tilting control of a three-wheeled vehicle by steering," in *XVIII Congresso Brasileiro de Automatica*, 2010, p. 346473471.
- [5] N. Roqueiro and E. Colet, "A sliding mode controlled three wheels narrow vehicle for two passengers," in *11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, June 2010, pp. 358–363.
- [6] M. Faria, N. Roqueiro, and E. Colet, "Sliding mode controller and flatness based set-point generator for a three wheeled narrow vehicle," in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, 2011, pp. 11925–11930.
- [7] L. Mourad, F. Claveau, and P. Chevrel, "Direct and steering tilt robust control of narrow vehicles," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 3, pp. 1206–1215, June 2014.
- [8] —, "Design of a two dof gain scheduled frequency shaped lq controller for narrow tilting vehicles," in *American Control Conference (ACC)*, June 2012, pp. 6739–6744.
- [9] —, "A lateral control strategy for narrow tilting commuter vehicle based on the perceived lateral acceleration," in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, Sep 2011.
- [10] F. Claveau, P. Chevrel, and L. Mourad, "Non-linear control of a narrow tilting vehicle," in *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC)*, Oct 2014, pp. 2488–2494.
- [11] J.-J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [12] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, 2nd ed. CRC Press, 2009.
- [13] N. Roqueiro, L. do Carmo, H. Silveira, and E. Colet, "An extension of the unity vector control method," in *13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, June 2014, pp. 1–4.
- [14] M. Gaudenzi, E. Colet, and N. Roqueiro, "A sliding mode controlled three wheeled narrow vehicle," *International Journal of Vehicle Design*, vol. 62, no. 2/3/4, pp. 123–146, 2013.



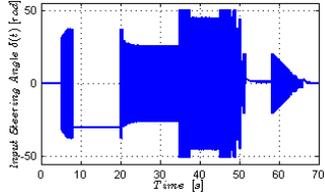
(a) Reference tilting angle $\phi_r(t)$, and tilting angles with the QSMC ($\phi_a(t)$) and EUVC ($\phi_e(t)$) controllers.



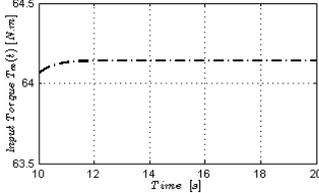
(b) Desired velocity $u_d(t)$ of the driver, reference velocity $u_r(t)$, and velocities with the QSMC ($u_s(t)$) and EUVC ($u_e(t)$) controllers.



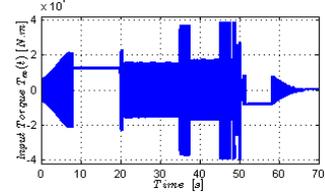
(c) Desired steering angle $\delta_d(t)$ of the driver and input steering angle $\delta(t)$ with the QSMC controller.



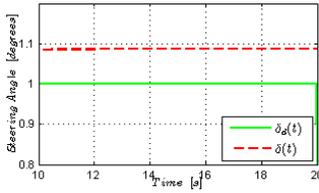
(d) Input steering angle with the EUVC controller.



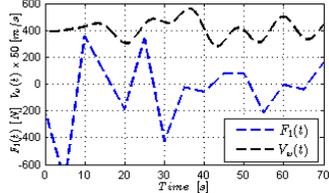
(e) Input torque with the QSMC controller for $10 \leq t \leq 20$.



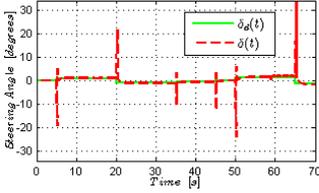
(f) Input torque with the EUVC controller.



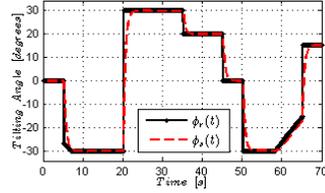
(g) Detail of the desired steering angle $\delta_d(t)$ and input $\delta(t)$ with the QSMC controller for $10 \leq t \leq 20$.



(h) External disturbances: ground forces exerted on the rear wheel (F_1) and lateral winds on the vehicle (V_w).



(i) Input steering angle from the QSMC controller with external disturbances and parametric uncertainties.



(j) Reference (ϕ_r) and input tilting angle (ϕ_s) from the QSMC controller with disturbances and parametric uncertainties.

APÊNDICE 2

RASTREAMENTO DE ÂNGULO DE ESTERÇO E VELOCIDADE LONGITUDINAL PARA UM VEÍCULO INCLINÁVEL DE TRÊS RODAS

LEANDRO YOSHIO MORITA*, NESTOR ROQUEIRO*, HECTOR BESSA SILVEIRA*

*Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina Florianópolis, Santa Catarina, Brasil

Emails: leandro.morita@posgrad.ufsc.br, nestor.roqueiro@ufsc.br, hector.silveira@ufsc.br

Abstract— This work treats the problem of tracking the steering angle and the longitudinal velocity desired by the driver of a tilting three-wheeled vehicle, which uses a STC (Steering Tilt Control) system, while keeping the tilting angle within a safety margin. Differently from the common practice adopted in the literature, in which controller design is carried out on simplified models of reduced order for the vehicle, this work proposes: (a) a feedback linearization designed directly on a model with 9 degrees-of-freedom for the tilting vehicle, and (b) a LQR designed on the linearized system of such model. The obtained closed-loop simulation results for both of these controllers are presented under nominal conditions and under external disturbances and parametric uncertainties.

Keywords— Tilting vehicle, Tracking, Feedback linearization, LQR.

Resumo— Este trabalho trata do problema de rastreamento do ângulo de esterço e da velocidade longitudinal desejadas pelo condutor de um veículo inclinável de três rodas, o qual utiliza um sistema STC (*Steering Tilt Control*), ao mesmo tempo em que o ângulo de inclinação do veículo é mantido dentro de uma margem de segurança. Diferentemente da prática comum adotada na literatura, em que o projeto dos controladores é realizado sobre modelos simplificados de ordem reduzida do veículo, este trabalho propõe: (a) uma realimentação linearizante projetada diretamente sobre um modelo de 9 graus de liberdade do veículo inclinável, e (b) um regulador linear quadrático projetado sobre o sistema linearizado de tal modelo. São apresentados os resultados de simulação obtidos em malha-fechada com esses dois controladores sob condições nominais e sob perturbações externas e incertezas paramétricas.

Palavras-chave— Veículo inclinável, Rastreamento, Realimentação linearizante, LQR.

1 Introdução

Um problema que tem se agravado nas últimas décadas nas metrópoles mundiais é o grande número de congestionamentos, o qual possui como causa principal o aumento na quantidade de automóveis em circulação pois estes ocupam um espaço físico considerável nas rodovias e geralmente transportam um número relativamente baixo de passageiros. Uma maior quantidade de veículos em circulação causam um incremento no gasto de tempo e de combustível, aumentando, por sua vez, a emissão de gases poluentes. Diante disso, os pesquisadores buscam desenvolver soluções alternativas para o problema da mobilidade urbana, onde os triciclos surgem como uma solução promissora na busca por veículos relativamente pequenos e com impacto ambiental reduzido. Inicialmente, os triciclos foram projetados como veículos esportivos, mas ao longo dos anos foram aprimorados para o transporte de pessoas sob a perspectiva de melhorar a mobilidade urbana (Chiou et al., 2009; Kidane et al., 2010).

A Fig. 1a e 1c mostram a vista frontal e lateral do protótipo de um veículo inclinável de três rodas desenvolvido no Laboratório de Inovação (LI) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), o qual apresenta duas rodas dianteiras e uma roda traseira, e possibilita o transporte do condutor e de um passageiro em série. Para que

o veículo possa fazer curvas em alta velocidade, é necessário que o corpo do protótipo se incline de maneira semelhante a uma motocicleta. Isto ocorre por meio da variação do ângulo de cambagem das rodas dianteiras, que é o ângulo entre o plano xy e o plano do pneu. O ângulo de inclinação do veículo corresponde ao ângulo de rolagem ϕ mostrado na Fig. 1c. Desse modo, o protótipo utiliza um sistema STC (*Steering Tilt Control*). No entanto, uma dificuldade técnica é que esse veículo se comporta como um pêndulo invertido com relação à dinâmica de ϕ , tornando a sua condução em malha-aberta inviável. Portanto, são necessárias estratégias de controle em malha-fechada para que o veículo possa ser conduzido de maneira relativamente simples e com segurança para os passageiros.

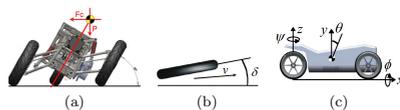


Figura 1: (a) Vista frontal (esquerda) do protótipo de um veículo inclinável de três rodas desenvolvido no LI-UFSC, (b) ângulo de esterço (δ) e (c) ângulo de rolagem (ϕ), guinada (θ) e arfagem (ψ) do veículo.

O ângulo de esterço (δ) das duas rodas dianteiras do protótipo é mostrado na Fig. 1b, e $u = \dot{x}$

é a velocidade longitudinal do veículo.

O objetivo principal deste trabalho é projetar controladores em malha-fechada que mantenham o ângulo de esterço δ e velocidade longitudinal u do veículo relativamente próximas das trajetórias δ_d e u_d desejadas pelo condutor, ao mesmo tempo em que o ângulo de inclinação ϕ do veículo é mantido dentro de uma margem de segurança pré-estabelecida. Com isso, o veículo poderá ser conduzido com facilidade e segurança em malha-fechada. A idéia principal é que os controladores projetados forcem o ângulo de inclinação ϕ e a velocidade u do veículo a rastreamento determinadas trajetórias de referência ϕ_r e u_r adequadas, respectivamente, com $|\phi_r(t)|$ evoluindo dentro da margem de segurança pré-estabelecida de $\phi_{max} = \pi/6$ ($= 30^\circ$). A geração de tais trajetórias ϕ_r e u_r é realizada a partir dos comandos referentes ao ângulo de esterço δ_d e à velocidade u_d enviados pelo condutor, e de um modelo simplificado para a dinâmica de ϕ , representado por um modelo de 2-GL (graus de liberdade) de uma bicicleta (a Seção 3 detalha essa estratégia de controle e descreve como a mesma resolve o referido problema de controle). No entanto, ressaltamos que os controladores serão projetados com base em um modelo não-linear com 9-GL do protótipo de um veículo inclinável de três rodas descrito anteriormente. O problema de controle descrito acima, foi resolvido em (Gaudenzi et al., 2013; Faria et al., 2010) pelo uso de controladores por modos deslizantes projetados sobre um modelo de 2-GL de uma bicicleta, e os ganhos do controlador para o modelo de 9-GL do veículo inclinável de três rodas foram ajustados heurísticamente. Já em (Morita et al., 2016) foram utilizados controladores baseados em modos deslizantes projetados diretamente sobre o modelo do veículo de 9-GL.

O controle de inclinação para veículos de quatro rodas foi tratado nos trabalhos (Mourad et al., 2014; Mourad et al., 2012; Mourad et al., 2011), com base em controle LQR, LPV (Linear Parameter-Varying) e H_2 robusto, respectivamente. O projeto desses controladores foi realizado sobre o sistema linearizado de um modelo de 3-GL de uma bicicleta, já (Claveau et al., 2014) foi projetado um controlador baseado em *flatness* sobre o modelo não-linear da bicicleta, as estratégias de controle nestes trabalhos dependem de um modelo interno linear para representar o comportamento do condutor, que é de certo modo artificial. Diferentemente destes trabalhos, neste artigo projetaremos uma realimentação linearizante diretamente sobre o modelo de 9-GL do veículo e um regulador linear quadrático (LQR) sobre o sistema linearizado de tal modelo, sem a necessidade de um modelo interno referente ao condutor.

Descreveremos agora organização deste trabalho. Apresentamos na Seção 2 o referido modelo não-linear com 9-GL do protótipo de um veículo

inclinável de três rodas, juntamente com o sistema linearizado associado que será utilizado para se projetar um controlador LQR. A Seção 3 explica em detalhes a estratégia de controle em malha-fechada adotada para se resolver problema de controle descrito acima. Na Seção 4, projetaremos os seguintes controladores para rastreamento das trajetórias de referência ϕ_r e u_r : (a) um controlador LQR através de desigualdades matriciais lineares (LMIs), e (b) um controlador não-linear baseado em realimentação linearizante. Os resultados de simulação obtidos em malha-fechada são mostrados e analisados na Seção 5.

2 Dinâmica Não-Linear e Linearizada do Veículo Inclinável de Três Rodas

Baseado na metodologia Euler-Lagrange multicorpos, a dinâmica do protótipo de um veículo inclinável de três rodas descrito na Introdução é dada pelo seguinte modelo não-linear com 9-GL:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} - \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)], \quad (1)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y, z_1, z_2, z_3, z_4, \psi, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^9$ e $\dot{\mathbf{q}} = (u, v, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4, \dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^9$ são os vetores de coordenadas e velocidades generalizadas, respectivamente, x e y são respectivamente os movimentos longitudinal e transversal, z_1 o movimento vertical da roda traseira, z_2 o movimento vertical do corpo principal do veículo, z_3 e z_4 são respectivamente os movimentos verticais das rodas dianteiras direita e esquerda, ψ , ϕ e θ são os ângulos de guinada, rolagem e arfagem, respectivamente (veja a Fig. 1c), $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^9$ é o vetor de excitação, e $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ e $\mathbf{K}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ são respectivamente as matrizes de inércia, amortecimento e rigidez. Temos que $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ é simétrica e positiva definida, para $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^9$. Detalhes completos da modelagem do veículo são apresentados em (Gaudenzi et al., 2013). De (1), temos que a dinâmica da velocidade longitudinal $u = \dot{x}$ e inclinação ϕ do veículo são descritas por

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f_1(u) + k_{21}T_m, \\ \dot{\phi} &= f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + d_2(\phi, t) + g_2(u, \phi)\delta, \end{aligned} \quad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} f_1(u) &= -k_{19} - k_{20}u^2, \\ f_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{\sin(\phi)}{\alpha(\phi)} \left[k_1 \dot{z}_1 + k_2 \dot{z}_2 + k_3 (\dot{z}_3 + \dot{z}_4) \right. \\ &\quad + k_4 \dot{\theta} + k_5 z_1 + k_6 z_2 + k_7 (z_3 + z_4) + k_8 \phi \sin(\phi) \Big] \\ &\quad + \frac{\cos(\phi)}{u\alpha(\phi)} \left[k_{12} \phi u - k_{10} \dot{\psi} + k_{12} \phi u z_2 - k_{11} \dot{y} \right] \\ &\quad + \frac{1}{u\alpha(\phi)} \left[+k_{15} \dot{\psi} + k_{16} \dot{y} + k_{18} \phi u \right], \\ d_2(\phi(t), t) &= -k_9 \frac{\sin(\phi)}{\alpha(\phi)} \left[F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha(\phi)} \left[\cos(\phi) (k_{13} \cos(\phi) + k_{14}) V_w^2(t) \text{sign}(V_w(t)) \right. \\ &\quad \left. + k_{17} (F_2(t) + F_3(t)) \right], \\ g_2(u, \phi) &= \frac{k_{20} u^2 \cos(\phi) + k_9 \cos(\phi) - k_5}{\alpha(\phi)}, \\ \alpha(\phi) &= \cos^2(\phi) + 0.8255 \cos(\phi) + 9.3597, \end{aligned} \quad (3)$$

os controles são o ângulo de esterço δ das rodas dianteiras (vide Fig. 1b) e o torque mecânico T_m aplicado na roda traseira para produzir o movimento longitudinal do veículo. V_w é a velocidade dos ventos laterais sobre o veículo, e F_1, F_2, F_3 são as forças exercidas nas rodas pelo solo. Os valores dos parâmetros $k_1, \dots, k_{21} \in \mathbb{R}$ são mostrados na Tabela 1, sendo determinados a partir dos parâmetros físicos do protótipo considerados em (Gaudenzi et al., 2013). A função g_2 é positiva para $|\phi| < 90^\circ$ (graus) e $u > 0$. Ressaltamos que, em (2), \dot{u} depende somente de u e de T_m , e $\dot{\phi}$ não depende de T_m . A dinâmica das demais variáveis do vetor de estado $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ são omitidas por falta de espaço.

Tabela 1: Valores dos coeficientes em (3).

$k_1 = 124.41$	$k_2 = 207.36$	$k_3 = 41.47$
$k_4 = 755.5$	$k_5 = 12200$	$k_6 = 897.34$
$k_7 = 13200$	$k_8 = 1340$	$k_9 = 0.1375$
$k_{10} = 8940$	$k_{11} = 2710$	$k_{12} = k_8$
$k_{13} = 0.526$	$k_{14} = 1.02$	$k_{15} = 755.92$
$k_{16} = 229.06$	$k_{17} = k_9$	$k_{18} = k_3$
$k_{19} = 0.09$	$k_{20} = 0, 0005$	$k_{21} = 0.007$

2.1 Modelo Linearizado

Na seqüência será feita a linearização de (1). Por construção, o lado direito de (1) não depende de x e y . Por simplicidade, nesta seção consideraremos $\mathbf{X} = ((z_1, z_2, z_3, z_4, \psi, \phi, \theta), \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{16}$ como vetor de estado e $\mathbf{U} = (\delta, T_m) \in \mathbb{R}^2$ como vetor de controle, e desconsideraremos perturbações externas, isto é, $F_1 \equiv F_2 \equiv F_3 \equiv V_w \equiv 0$ em (2)–(3). Com isso, é possível escrever (1) como

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad (4)$$

onde $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = ((\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{z}_4, \dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta}), \dot{\mathbf{q}})$. Vamos agora linearizar (4) no ponto de operação $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ correspondente a $u^* = 15 \text{ ms}^{-1}$ (velocidade longitudinal) e $\phi^* = 0^\circ$ (inclinação nula). As demais componentes de $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ satisfazem $\mathbf{G}(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*) = 0$, sendo omitidas por questão de espaço. O modelo linearizado do protótipo é então dado por

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}, \\ \Delta \mathbf{Y} &= \mathbf{C} \Delta \mathbf{X}, \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^* \in \mathbb{R}^{16}$ é o vetor de estado, $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^* \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de controle e $\Delta \mathbf{Y} = (\phi - \phi^*, u - u^*) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de saída. Desse modo, $\mathbf{C} = (e_6', e_8')$, onde $\{e_1, \dots, e_{16}\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^{16} . As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} não são mostradas por falta de espaço. Pode-se mostrar que o modelo linearizado acima é controlável, que é uma propriedade fundamental para se utilizar um controlador LQR, porém não é detectável. A matriz de transferência é diagonal:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1701.2(s+0,8163)}{(s+45,73)(s-3,363)(s+0,8693)} & 0 \\ 0 & \frac{0,007}{(s+0,015)} \end{bmatrix}.$$

3 Estratégia de Controle

Nesta seção, a estratégia de controle em malha-fechada adotada é descrita. O objetivo principal é projetar controladores em malha-fechada que mantenham o ângulo de esterço δ e a velocidade longitudinal u do veículo relativamente próximas das trajetórias δ_d e u_d desejadas pelo condutor, respectivamente, ao mesmo tempo em que o ângulo de inclinação ϕ do veículo permaneça dentro de uma margem de segurança. Ressaltamos que não há acoplamento mecânico entre δ_d e δ : sistema *drive-by-wire*. Assumimos que todos os estados $\mathbf{X}(t)$ do veículo podem ser realimentados. O diagrama de blocos da estratégia de controle em malha-fechada é mostrado na Fig. 2, que é a mesma metodologia utilizada em (Gaudenzi et al., 2013). O condutor estabelece o ângulo de esterço desejado $\delta_d(t)$ e a velocidade desejada $u_d(t)$, os quais dependem de $\delta(t)$, $u(t)$ e das demais variáveis de estado de $\mathbf{X}(t)$. A partir de δ_d e u_d , o *Gerador de Trajetórias* determina as trajetórias de referência ϕ_r e u_r , com $|\phi_r| \leq \phi_{max} = \pi/6$ (maiores detalhes na seqüência). Na malha interna do diagrama há o *Controlador de Rastreamento* que determina os sinais controles $\delta(t)$ e $T_m(t)$ de modo que $\phi(t)$ e $u(t)$ rastream assintoticamente as trajetórias de referência $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$, respectivamente. O condutor faz o papel de uma malha externa de controle.

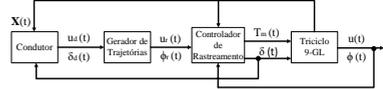


Figura 2: Diagrama da estratégia de controle.

Para o *Gerador de Trajetórias*, considere que δ_d e u_d são amostrados com um determinado período $T > 0$. As trajetórias de referências $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ são escolhidas como funções lineares por partes dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_r(t) &= \phi_r(kT) + \frac{\phi_r((k+1)T) - \phi_r(kT)}{T} (t - kT), \\ u_r(t) &= u_r(kT) + \frac{u_r((k+1)T) - u_r(kT)}{T} (t - kT), \end{aligned} \quad (6)$$

com $t \in [kT, (k+1)T)$, $k \in \mathbb{N}$. Por construção, $\dot{\phi}_r \equiv 0$. Resta-nos então especificar os valores de $\phi_r(kT)$, $\phi_r((k+1)T)$, $u_r(kT)$ e $u_r((k+1)T)$. Para isto, nos basearemos em um modelo simplificado de ordem reduzida para ϕ : o modelo de uma bicicleta de 2-GL, mostrado a seguir

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{h} \sin(\phi) + \frac{1}{lh} \cos(\phi) u^2 \delta, \quad (7)$$

onde g é a aceleração da gravidade e l o comprimento da bicicleta. Tal modelo simplificado captura as principais características da dinâmica de $\phi(t)$ do triciclo (veja (Gaudenzi et al., 2013) para

realizaremos simulações que sejam mais próximas de uma situação prática e, desse modo, propomos que as trajetórias $u_d(t)$ e $\delta_d(t)$ desejadas pelo motorista correspondam a uma suavização de $u_i(t)$ e $\delta_i(t)$, respectivamente. Isto foi atingido pela utilização de um filtro de primeira ordem com constante de tempo $\tau = 0,5$; as entradas do filtro são as intenções do motorista $u_i(t)$ e $\delta_i(t)$ (i.e. o que ele tem em mente), e as saídas são os comandos efetivamente desejados $u_d(t)$ e $\delta_d(t)$, respectivamente, como mostrado nas Figs. 3b e 3c. Escolhemos $T = 0,1s$ e $\phi_{max} = 30^\circ$. As trajetórias de referência correspondentes $\phi_r(t)$ e $u_r(t)$ determinadas pelo *Gerador de Trajetórias* são exibidas nas Figs. 3a (em graus) e 3b, respectivamente.

Considere que as condições iniciais do veículo são: $\phi(0) = \phi(0) = 0$, $u(0) = 25 \text{ ms}^{-1}$, e as demais variáveis de estados são nulas. Para o controlador LQR, escolhemos as seguintes matrizes de ponderação: $D_z = \text{diag}(0,005; 0,001)$, $C_z = \text{diag}(0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 1; 0,25; 1; 0,5; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 25; 20; 1; 1)$. Para o controlador RL, foram utilizados os ganhos: $c_1 = 2$, $c_2 = 20$, $c_3 = 40,5$ e $c_4 = 41$. Começaremos mostrando os resultados de simulação obtidos em malha-fechada para o caso ideal, ou seja, sem perturbações externas e sem incertezas paramétricas. Percebemos pela Fig. 3a que o ângulo de inclinação do veículo rastreia a trajetória de referência $\phi_r(t)$ com uma precisão satisfatória: $\phi_{lq}(t)$ e $\phi_{rl}(t)$ são os ângulos de inclinação obtidos com os controladores LQR e RL, respectivamente. Do mesmo modo, a Fig. 3b mostra que a velocidade do veículo também rastreia a trajetória de referência $u_r(t)$ com boa precisão: $u_{lq}(t)$ para o LQR e $u_{rl}(t)$ para o RL. Analisaremos agora os sinais de controle resultantes $\delta(t)$ (ângulo de esterço das rodas dianteiras) e $T_m(t)$ (torque aplicado na roda traseira). Pela Fig. 3c, vemos que ângulos de esterço produzidos pelos controladores LQR $\delta_{lq}(t)$ e RL $\delta_{rl}(t)$ são possíveis de serem implementados no veículo, pois os mesmos não ultrapassam $\delta_{max} = 45^\circ$, que é o esterço máximo suportado pelo veículo. Conforme o esperado, temos que $\delta_d(t) \cong \delta_{lq}(t) \cong \delta_{rl}(t)$ (maiores detalhes no intervalo de tempo $[10,20]$ na Fig. 3e). Ressaltamos que os picos de oscilação presentes em $\delta_{lq}(t)$ e $\delta_{rl}(t)$ na Fig. 3c são inerentes ao sistema STC (*Steering Tilt Control*) do veículo. A Fig. 3d mostra as entradas torque produzidos pelo LQR T_{mlq} e RL T_{mrl} . Note que os picos com amplitude próxima de $\pm 5000N.m$ ocorrem nos mesmos instantes de tempo em que a velocidade de referência $u_r(t)$ apresenta variações rápidas (veja a Fig. 3b).

Agora, simularemos com perturbações externas e incertezas paramétricas em (2)–(3). Assumimos que as perturbações variam randomicamente, com $|F_i(t)| \leq 800N$, para $i = 1, 2, 3$, e $5m/s \leq$

$V_\omega(t) \leq 12m/s$, onde $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ são as forças exercidas nas rodas pelo solo, e $V_\omega(t)$ é a velocidade dos ventos laterais sobre o veículo. Na Fig. 3f são mostradas $F_1(t)$ e $V_\omega(t) \times 50$. Não mostramos $F_2(t)$ e $F_3(t)$ por serem similares a $F_1(t)$. Assumindo que os valores nominais para a massa e a altura do centro do gravidade do veículo são $m = 500kg$ e $h = 1m$, respectivamente, vamos considerar incertezas paramétricas de $+20\%$ e -5% , respectivamente. Os resultados de simulação são apresentados nas Figs. 3g e 3h, os quais são semelhantes aos obtidos para o caso nominal na Fig. 3a e 3c, respectivamente. As precisões do rastreamento de $u_r(t)$ e as entradas de torque obtidas com os controladores LQR e RL são semelhantes aos mostrados para o caso nominal na Fig. 3b e 3d, respectivamente, não sendo exibidas por questão de espaço.

Por fim, a Tabela 2 apresenta os índices de desempenho obtidos com o controlador LQR e o RL, tanto no caso nominal (N) quanto no caso com perturbações externas e incertezas paramétricas (P). Percebemos que o controlador RL apresentou um melhor desempenho em ambos os casos: maior precisão de rastreamento e menor esforço de controle. Isto, de certa forma, era esperado, por se tratar de um controlador não-linear projetado diretamente sobre o modelo completo (2)–(3).

Tabela 2: Valores dos índices de desempenho para os controladores LQR e RL, considerando o caso nominal (N) e o caso com perturbações externas e incertezas paramétricas (P).

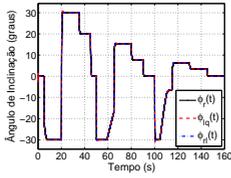
Índice	LQR (N)	RL (N)	LQR (P)	RL (P)
$\int e^2$	0,0079	0,00012	0,0094	0,0029
$\int \delta^2$	0,374	0,3664	0,3718	0,3775
$\int e_m^2$	110,2	6,25	110,2	6,25
$\int T_m^2$	$1,14 \times 10^8$	8×10^6	$1,14 \times 10^8$	8×10^6

6 Conclusões

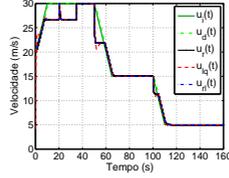
Este trabalho apresentou uma estratégia de controle em malha-fechada para o rastreamento do ângulo de esterço e da velocidade longitudinal desejadas pelo condutor de um veículo inclinável de três rodas, ao mesmo tempo em que ângulo de inclinação do veículo é mantido dentro de uma margem de segurança. Projetamos um controlador LQR sobre um modelo linearizado e uma realimentação linearizante diretamente sobre um modelo completo não-linear. A realimentação linearizante apresentou um melhor desempenho em termos de uma maior precisão de rastreamento e um menor esforço de controle.

Referências

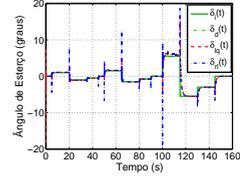
- Chiou, J. C., Lin, C. Y., Chen, C. L. and Chien, C. P. (2009). Tilting motion control in narrow tilting vehicle using double-loop pid controller, *Asian Control Conference, 2009. ASCC 2009. 7th*, pp. 913-918.
- Claveau, F., Chevrel, P. and Mourad, L. (2014). Non-linear control of a narrow tilting vehicle, *2014 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, pp. 2488-2494.



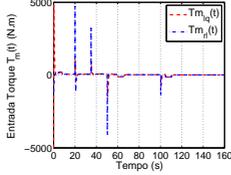
(a) Referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores LQR $\phi_{lq}(t)$ e RL $\phi_{rl}(t)$.



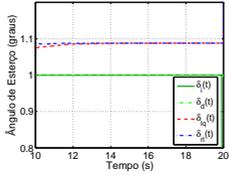
(b) Intenção de velocidade $u_r(t)$ e velocidade desejada $u_d(t)$ referentes ao condutor, referência de velocidade $u_r(t)$ e velocidade do veículo obtida com os controladores LQR $u_{lq}(t)$ e RL $u_{rl}(t)$.



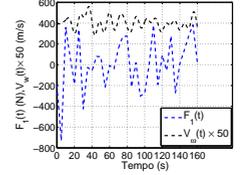
(c) Intenção do ângulo de esteção $\delta_r(t)$ e ângulo de esteço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entradas ângulo de esteção produzidas pelos controladores LQR $\delta_{lq}(t)$ e RL $\delta_{rl}(t)$.



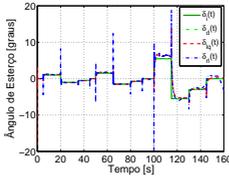
(d) Entrada torque mecânico produzidas pelos controladores LQR Tm_{lq} e RL Tm_{rl} .



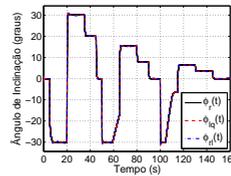
(e) Detalhes da intenção do ângulo de esteção $\delta_r(t)$ e ângulo de esteço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entradas ângulo de esteção produzidas pelos controladores LQR $\delta_{lq}(t)$ e RL $\delta_{rl}(t)$ para $10 \leq t \leq 20$.



(f) Força exercida na roda traseira pelo solo $F_1(t)$ e ventos laterais sobre o veículo $V_w(t)$.



(g) Intenção do ângulo de esteção $\delta_r(t)$ e ângulo de esteço desejado $\delta_d(t)$ referentes ao condutor e entradas ângulo de esteção produzidas pelos controladores LQR $\delta_{lq}(t)$ e RL $\delta_{rl}(t)$ com perturbações externas e incertezas paramétricas.



(h) Referência do ângulo de inclinação $\phi_r(t)$ e inclinação do veículo obtida com os controladores LQR $\phi_{lq}(t)$ e RL $\phi_{rl}(t)$ com perturbações externas e incertezas paramétricas.

Figura 3: Resultados de simulação do sistema de controle.

Faria, M., Roqueiro, N. and Colet, E. (2010). A sliding mode controlled tilting three wheeled narrow vehicle, *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 1596–1602.

Gaudenzi, M., Colet, E. and Roqueiro, N. (2013). A sliding mode controlled three wheeled narrow vehicle, *International Journal of Vehicle Design* **62**(2/3/4): 123–146.

Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*, Communications and Control Engineering, 3rd edn, Springer.

Kidane, S., Rajamani, R., Alexander, L., Starr, P. J. and Donath, M. (2010). Development and experimental evaluation of a tilt stability control system for narrow commuter vehicles, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **18**(6): 1266–1279.

Laurent El Ghaoui, Eric Feron, V. B. S. P. B. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics 15, Society for Industrial and Applied Mathematic.

Morita, L. Y., Roqueiro, N. and Silveira, H. B. (2016). Steering and velocity tracking of a tilting three-wheeled vehicle using sliding mode control, *2016 14th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 322–327.

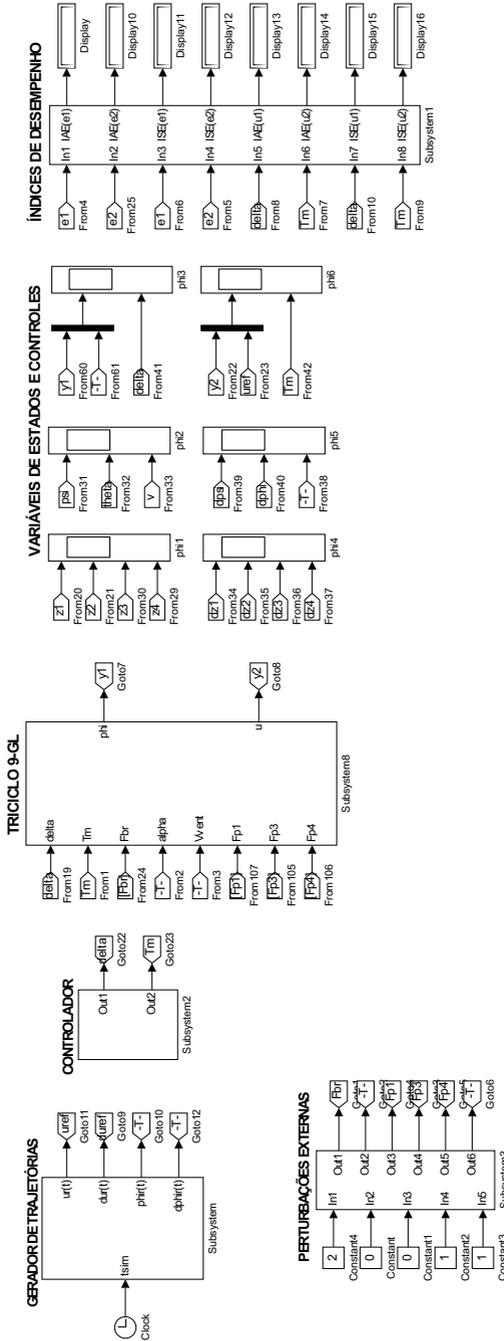
Mourad, L., Claveau, F. and Chevrel, P. (2011). A lateral control strategy for narrow tilting commuter vehicle based on the perceived lateral acceleration, *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, number 2, pp. 6254–6259.

Mourad, L., Claveau, F. and Chevrel, P. (2012). Design of a two dof gain scheduled frequency shaped lq controller for narrow tilting vehicles, *American Control Conference (ACC)*, pp. 6739–6744.

Mourad, L., Claveau, F. and Chevrel, P. (2014). Direct and steering tilt robust control of narrow vehicles, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **15**(3): 1206–1215.

APÊNDICE 4

Figura 1: Diagrama de Simulação do sistema de controle em malha-fechada utilizado no Simulink.



APÊNDICE 5

Momentos de Inércia

$$\begin{aligned}
 I_{z1} &= 0; I_{z2} = m_2 a_2^2; I_{z3} = m_3 (a_3^2 + b_3^2); I_{z4} = m_4 (a_4^2 + b_4^2); \\
 I_{x1} &= m_1 h_1^2; I_{x2} = m_2 h_2^2; I_{x3} = m_3 (h_3^2 + b_3^2); I_{x4} = m_4 (h_4^2 + b_4^2); \\
 I_{xz1} &= 0; I_{xz2} = m_2 h_2 a_2; I_{xz3} = m_3 h_3 a_3; I_{xz4} = m_4 h_4 a_4; I_{y2} = \\
 & m_2 (a_2^2 + h_2^2); I_{yz2} = 0; I_{xy2} = 0;
 \end{aligned}$$

Matrizes do Modelo Euler-Lagrange do veículo

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & m_{17} & m_{18} & m_{19} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} & m_{27} & m_{28} & m_{29} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} & m_{37} & m_{38} & m_{39} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} & m_{47} & m_{48} & m_{49} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} & m_{57} & m_{58} & m_{59} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} & m_{67} & m_{68} & m_{69} \\ m_{71} & m_{72} & m_{73} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{77} & m_{78} & m_{79} \\ m_{81} & m_{82} & m_{83} & m_{84} & m_{85} & m_{86} & m_{87} & m_{88} & m_{89} \\ m_{91} & m_{92} & m_{93} & m_{94} & m_{95} & m_{96} & m_{97} & m_{98} & m_{99} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4;$$

$$m_{12} = 0;$$

$$m_{13} = 0;$$

$$m_{14} = 0;$$

$$m_{15} = 0;$$

$$m_{16} = 0;$$

$$m_{17} = b_3 m_3 - b_4 m_4;$$

$$m_{18} = 0;$$

$$m_{19} = 0;$$

$$m_{21} = 0;$$

$$m_{22} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4;$$

$$m_{23} = 0;$$

$$m_{24} = 0;$$

$$m_{25} = 0;$$

$$m_{26} = 0;$$

$$m_{27} = a_2 m_2 + a_3 m_3 + a_4 m_4;$$

$$m_{28} = -\cos(\phi(t)) (h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3 + h_4 m_4);$$

$$m_{29} = 0;$$

$$m_{31} = 0;$$

$$m_{32} = 0;$$

$$\begin{aligned}
m_{33} &= m_1; \\
m_{34} &= 0; \\
m_{35} &= 0; \\
m_{36} &= 0; \\
m_{37} &= 0; \\
m_{38} &= -m_1 h_1 \text{sen}(\phi(t)); \\
m_{39} &= 0; \\
m_{41} &= 0; \\
m_{42} &= 0; \\
m_{43} &= 0; \\
m_{44} &= m_2; \\
m_{45} &= 0; \\
m_{46} &= 0; \\
m_{47} &= 0; \\
m_{48} &= -m_2 h_2 \text{sen}(\phi(t)); \\
m_{49} &= 0; \\
m_{51} &= 0; \\
m_{52} &= 0; \\
m_{53} &= 0; \\
m_{54} &= 0; \\
m_{55} &= m_3; \\
m_{56} &= 0; \\
m_{57} &= 0; \\
m_{58} &= -m_3 h_3 \text{sen}(\phi(t)); \\
m_{59} &= 0; \\
m_{61} &= 0; \\
m_{62} &= 0; \\
m_{63} &= 0; \\
m_{64} &= 0; \\
m_{65} &= 0; \\
m_{66} &= m_4; \\
m_{67} &= 0; \\
m_{68} &= -m_4 h_4 \text{sen}(\phi(t)); \\
m_{69} &= 0; \\
m_{71} &= m_3 b_3 - m_4 b_4; \\
m_{72} &= m_2 a_2 + m_3 a_3 + m_4 a_4; \\
m_{73} &= 0; \\
m_{74} &= 0; \\
m_{75} &= 0; \\
m_{76} &= 0; \\
m_{77} &= m_2 a_2^2 + m_3 (b_3^2 + a_3^2) + m_4 (b_4^2 + a_4^2) + (I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} + I_{z4}); \\
m_{78} &= -\cos(\phi(t)) (m_2 h_2 a_2 + m_3 h_3 a_3 + m_4 h_4 a_4) - (I_{xz1} + I_{xz2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{xz3} + I_{xz4}); \\
m_{79} &= -I_{yz2}; \\
m_{81} &= 0; \\
m_{82} &= -\cos(\phi(t))(m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 + m_4 h_4); \\
m_{83} &= -m_1 h_1 \sin(\phi(t)); \\
m_{84} &= -m_2 h_2 \sin(\phi(t)); \\
m_{85} &= -m_3 h_3 \sin(\phi(t)); \\
m_{86} &= -m_4 h_4 \sin(\phi(t)); \\
m_{87} &= -\cos(\phi(t))(m_2 h_2 a_2 + m_3 h_3 a_3 + m_4 h_4 a_4) - (I_{xz1} + I_{xz2} + \\
& I_{xz3} + I_{xz4}); \\
m_{88} &= I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4} + m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + m_3 h_3^2 + m_4 h_4^2; \\
m_{89} &= -I_{xy2}; \\
m_{91} &= 0; \\
m_{92} &= 0; \\
m_{93} &= 0; \\
m_{94} &= 0; \\
m_{95} &= 0; \\
m_{96} &= 0; \\
m_{97} &= -I_{yz2}; \\
m_{98} &= -I_{xy2}; \\
m_{99} &= I_{yz2};
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} & k_{39} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & k_{89} \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & k_{99} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 0; \\
k_{12} &= 0; \\
k_{13} &= 0; \\
k_{14} &= 0; \\
k_{15} &= 0; \\
k_{16} &= 0; \\
k_{17} &= 0; \\
k_{18} &= 0; \\
k_{19} &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{21} &= 0; \\k_{22} &= 0; \\k_{23} &= 0; \\k_{24} &= 0; \\k_{25} &= 0; \\k_{26} &= 0; \\k_{27} &= 0; \\k_{28} &= 0; \\k_{29} &= 0; \\k_{31} &= 0; \\k_{32} &= 0; \\k_{33} &= k_{z1} + k_p; \\k_{34} &= -k_{z1}; \\k_{35} &= 0; \\k_{36} &= 0; \\k_{37} &= 0; \\k_{38} &= 0; \\k_{39} &= -a_2 k_{z1}; \\k_{41} &= 0; \\k_{42} &= 0; \\k_{43} &= -k_{z1}; \\k_{44} &= k_{z1} + k_{z2} + k_{z3}; \\k_{45} &= -k_{z2}; \\k_{46} &= -k_{z3}; \\k_{47} &= 0; \\k_{48} &= -gm_2 \operatorname{sen}(\phi(t)) \cos(\alpha(t)); \\k_{49} &= -l(k_{z2} + k_{z3}) + a_2(k_{z1} + k_{z2} + k_{z3}); \\k_{51} &= 0; \\k_{52} &= 0; \\k_{53} &= 0; \\k_{54} &= -k_{z2}; \\k_{55} &= k_{z2} + k_p; \\k_{56} &= 0; \\k_{57} &= 0; \\k_{58} &= 0; \\k_{59} &= k_{z2}(l - a_2); \\k_{61} &= 0; \\k_{62} &= 0; \\k_{63} &= 0; \\k_{64} &= -k_{z3}; \\k_{65} &= 0; \\k_{66} &= k_{z3} + k_p;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{67} &= 0; \\
k_{68} &= 0; \\
k_{69} &= k_{z3}(l - a_2); \\
k_{71} &= 0; \\
k_{72} &= 0; \\
k_{73} &= 0; \\
k_{74} &= 0; \\
k_{75} &= 0; \\
k_{76} &= 0; \\
k_{77} &= 0; \\
k_{78} &= 0; \\
k_{79} &= 0; \\
k_{81} &= 0; \\
k_{82} &= 0; \\
k_{83} &= 0; \\
k_{84} &= -gm_2 \text{sen}(\phi(t)) \cos(\alpha(t)); \\
k_{85} &= 0; \\
k_{86} &= 0; \\
k_{87} &= 0; \\
k_{88} &= -gm_2 \cos(\phi(t)) \cos(\alpha(t))(h_2 + z_2(t)); \\
k_{89} &= 0; \\
k_{91} &= 0; \\
k_{92} &= 0; \\
k_{93} &= -a_2 k_{z1}; \\
k_{94} &= -l(k_{z2} + k_{z3}) + a_2(k_{z1} + k_{z2} + k_{z3}); \\
k_{95} &= k_{z2}(l - a_2); \\
k_{96} &= k_{z3}(l - a_2); \\
k_{97} &= 0; \\
k_{98} &= 0; \\
k_{99} &= k_{z1}a_2^2 + (k_{z2} + k_{z3})(l - a_2)^2;
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} & c_{18} & c_{19} \\
c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} & c_{28} & c_{29} \\
c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} & c_{38} & c_{39} \\
c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} & c_{48} & c_{49} \\
c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} & c_{58} & c_{59} \\
c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} & c_{68} & c_{69} \\
c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} & c_{78} & c_{79} \\
c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} & c_{85} & c_{86} & c_{87} & c_{88} & c_{89} \\
c_{91} & c_{92} & c_{93} & c_{94} & c_{95} & c_{96} & c_{97} & c_{98} & c_{99}
\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}c_{11} &= 0; \\c_{12} &= 0; \\c_{13} &= 0; \\c_{14} &= 0; \\c_{15} &= 0; \\c_{16} &= 0; \\c_{17} &= 0; \\c_{18} &= 0; \\c_{19} &= 0; \\c_{21} &= 0; \\c_{22} &= 0; \\c_{23} &= 0; \\c_{24} &= 0; \\c_{25} &= 0; \\c_{26} &= 0; \\c_{27} &= 0; \\c_{28} &= 0; \\c_{29} &= 0; \\c_{31} &= 0; \\c_{32} &= 0; \\c_{33} &= c_{z1}; \\c_{34} &= -c_{z1}; \\c_{35} &= 0; \\c_{36} &= 0; \\c_{37} &= 0; \\c_{38} &= 0; \\c_{39} &= 0; \\c_{41} &= 0; \\c_{42} &= 0; \\c_{43} &= -c_{z1}; \\c_{44} &= c_{z1} + c_{z2} + c_{z3}; \\c_{45} &= -c_{z2}; \\c_{46} &= -c_{z3}; \\c_{47} &= 0; \\c_{48} &= 0; \\c_{49} &= 0; \\c_{51} &= 0; \\c_{52} &= 0; \\c_{53} &= 0; \\c_{54} &= -c_{z2}; \\c_{55} &= c_{z2}; \\c_{56} &= 0;\end{aligned}$$

$$c_{57} = 0;$$

$$c_{58} = 0;$$

$$c_{59} = 0;$$

$$c_{61} = 0;$$

$$c_{62} = 0;$$

$$c_{63} = 0;$$

$$c_{64} = -c_{z3};$$

$$c_{65} = 0;$$

$$c_{66} = c_{z3};$$

$$c_{67} = 0;$$

$$c_{68} = 0;$$

$$c_{69} = 0;$$

$$c_{71} = 0;$$

$$c_{72} = 0;$$

$$c_{73} = 0;$$

$$c_{74} = 0;$$

$$c_{75} = 0;$$

$$c_{76} = 0;$$

$$c_{77} = 0;$$

$$c_{78} = 0;$$

$$c_{79} = 0;$$

$$c_{81} = 0;$$

$$c_{82} = 0;$$

$$c_{83} = 0;$$

$$c_{84} = 0;$$

$$c_{85} = 0;$$

$$c_{86} = 0;$$

$$c_{87} = 0;$$

$$c_{88} = c_{z2}b_3^2 + c_{z3}b_4^2;$$

$$c_{89} = 0;$$

$$c_{91} = 0;$$

$$c_{92} = 0;$$

$$c_{93} = 0;$$

$$c_{94} = 0;$$

$$c_{95} = 0;$$

$$c_{96} = 0;$$

$$c_{97} = 0;$$

$$c_{98} = 0;$$

$$c_{99} = c_{z1}a_2^2 + c_{z2}(l - a_2)^2 + c_{z3}(l - a_2)^2;$$

APÊNDICE 6

Ferramentas Auxiliares

Lemma .1. *Seja $x \in \mathbb{R}^m$ o vetor de variáveis de decisão e $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$ funções afins de x com $Q(x) = Q(x)'$ e $R(x) = R(x)'$. Considere que:*

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)'R(x)^{-1}S(x) > 0 \quad (1)$$

A desigualdade (1) não é uma LMI pois não é afim na variável x , porém esta desigualdade pode ser reescrita de forma equivalente por:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x)' \\ S(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (2)$$

que representa uma LMI. A condição necessária para a equivalência é que se tenha $Q(x) > 0$ e $R(x) > 0$.

Lemma .2. *Considere dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^n$ então a seguinte desigualdade*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

é denominada desigualdade de Cauchy-Schwarz, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar dos vetores correspondentes e $\| \cdot \|$ a norma euclidiana.

Lemma .3. *Para qualquer matriz simétrica e positiva definida ($P = P^\top \in \mathbb{R}^n$) tem-se:*

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq x'Px \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2$$

Lemma .4. *Para qualquer matriz simétrica e positiva definida ($P = P^\top \in \mathbb{R}^n$)*

$$\|Px\| \leq \|P\|_2 \|x\|$$

onde $\|P\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(P'P)}$ é o valor singular máximo de P (norma L_2).

APÊNDICE 7

Parâmetros físicos do modelo do triciclo utilizados em simulação

$m_1 = 5 \text{ kg}$	$m_2 = 500$	$m_3 = 5$	$m_4 = 5$
$h_1 = 0,5$	$h_2 = 1$	$h_3 = 0,5$	$h_4 = 0,5$
$a_2 = 1,2$	$b = 1$	$l = 2,2$	$k_{z1} = 9922,51$
$k_{z2} = 3206,5$	$k_{z3} = 3206,5$	$c_{z1} = 904,75$	$c_{z2} = 301,6$
$c_{z3} = 301,6$	$k_p = 99225,1$	$C_\alpha = 10000$	$A = 1$
$A_t = 3$	$\rho = 1,29$	$f_r = 0,01$	$g = 9,81$
$C_x = 0,4$	$C_{xt} = 1$	$d = 0,55$	$\eta = 1$
$\eta_T = 1$			