

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA**

MARCOS HENRIQUE SANTOS MARTINS

**A INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES
FIGURAIS NO ESBOÇO DE CURVAS DADAS POR EQUAÇÕES
PARAMÉTRICAS**

Florianópolis – SC
2016

Martins, Marcos Henrique Santos

A interpretação global de propriedades figurais no esboço de curvas dadas por equações paramétricas. Marcos Henrique Santos Martins. – Florianópolis, 2016.

220 f. : il. ; 14,81cm21cm.

Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica)–
Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

Bibliografia: f. 211-214.

1. Representação Semiótica. 2. Equações paramétricas. 3. Software Geogebra. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

“A interpretação global de propriedades figurais no esboço de curvas dadas por equações paramétricas”

Dissertação submetida ao Colegiado do Curso de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica em cumprimento parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA em 02 de dezembro de 2016.

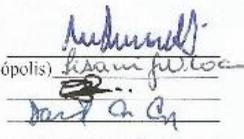
Dr. Mércies Thadeu Moretti (Orientador - PPGECT/UFSC)

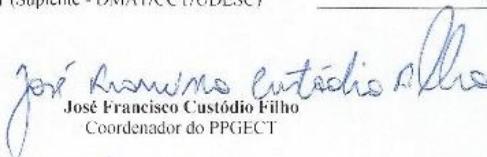
Dra. Lisani Geni Wachholz Coan (Examinadora - IFSC Florianópolis)

Dra. Cíntia Rosa da Silva (Examinadora - UFSC Blumenau)

Dr. David Antonio da Costa (Examinador - MEN/UFSC)

Dr. Rogério de Aguiar (Suplente - DMAT/CCT/UEDESC)




José Francisco Custódio Filho
Coordenador do PPGECT


Marcos Henrique Santos Martins
Florianópolis, Santa Catarina, 2016

Primeiramente, dedico este trabalho a meu Pai (*in memoriam*), que onde quer que esteja nunca deixou de me amar e confiar em mim, exatamente como sou. Pai, meu amor eterno. Enfim, dedico a todos aqueles que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta fase da minha formação, pois contribuíram também na composição de parte da minha história de vida.

AGRADECIMENTOS

Sou muito grato às adversidades que apareceram na minha vida, pois elas me ensinaram a tolerância, a simpatia, o autocontrole, a perseverança e outras qualidades que, sem essas adversidades, eu jamais conheceria.

Agradeço por estar vivo e por ter pessoas ao meu lado, numa contínua interação de experiências vividas.

Agradeço por estar com saúde, ter um lar, uma família maravilhosa, amigos e, principalmente, agradeço por ter tempo para aprender com os erros que cometi e inteligência para não cometê-los novamente.

O bom da vida é justamente isso! Lembrar que estou aqui e sou parcela viva de gratidão a este Universo do qual fazem parte todos aqueles que, por ora, apenas digo **MUITO OBRIGADO!**

"Você poderia me dizer, por favor, qual caminho eu devo seguir?"
"Isso depende muito de onde você deseja chegar."

(Lewis Carroll - Alice no País das Maravilhas)

RESUMO

A aprendizagem em Matemática se constitui de atividades cognitivas que requerem a compreensão e manipulação dos seus variados sistemas de representação. Entre esses sistemas temos as chamadas representações algébricas e as suas correspondentes representações gráficas. Neste contexto, estamos então nos referindo a formas diferentes de representação de um mesmo objeto matemático. Ao visualizarmos um gráfico, muitas vezes não nos damos conta que este nada mais é que uma relação, comparação entre duas ou mais grandezas representadas de tal forma que, visualmente, podemos perceber informações que denotam uma série de características em relação ao objeto representado, sendo que para esse gráfico tomar forma, se faz necessário que essa relação tenha uma representação na forma algébrica, podendo esta ser escrita também de maneiras distintas. Este trabalho se refere à utilização da interpretação global de propriedades figurais proposta por Raymond Duval em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica, aplicada ao esboço de curvas planas. Primeiramente, é feito um detalhamento sobre alguns estudos já realizados a respeito de curvas planas, representantes de funções $y = f(x)$ e cujas equações (representações algébricas) são dadas cartesianamente em sua forma explícita. Em seguida apresentamos uma proposta para curvas planas dadas por equações paramétricas, independentemente de estas representarem ou não funções $y = f(x)$.

Levando em consideração as operações cognitivas de tratamento e conversão, a interpretação global de propriedades figurais foi realizada no âmbito do entendimento das variações visuais (registros gráficos) e suas correspondentes variações simbólicas (registros algébricos). As curvas paramétricas analisadas se referem às retas e parábolas, onde propomos a utilização do software Geogebra com a finalidade de facilitar a obtenção de seus registros gráficos a partir de suas equações paramétricas, visto que a construção em si das referidas curvas foge ao foco deste trabalho.

Palavras-chave: Esboço de curvas. Registros de Representação Semiótica. Interpretação global de propriedades figurais. Parábolas. Equações paramétricas. Software Geogebra.

ABSTRACT

Learning in Mathematics is composed of cognitive activities that require understanding and manipulation of its various systems of representation. Among these systems have the so-called algebraic representations and their corresponding graphical representations. In this context, then we are referring to various forms of representing the same mathematical object. To visualize a graphic, often we do not realize that this is nothing more than a relationship, comparing two or more quantities represented in such a way that visually we can see information that show a number of characteristics in relation to the object represented, and that for this chart take shape, it is necessary that this relationship has a representation in algebraic form, which may also be written in different ways. This work relates to the use of global interpretation of figural properties proposed by Raymond Duval in his Theory of Semiotics Representation Registers, applied to the sketch plane curves. First, it is done a breakdown of some previous studies on plane curves, representatives of functions $y = f(x)$ and whose equations (algebraic representations) are given cartesianly in its explicitly. Then we present a proposal for plane curves given by parametric equations, regardless of whether they represent functions or not $y = f(x)$. Taking into account the cognitive processing and conversion operations, the overall interpretation of figural properties was carried out under the understanding of visual variations (graphic records) and their corresponding symbolic changes (algebraic records). Parametric curves analyzed refer to straight and paraboles, which we propose the use of the Geogebra software in order to facilitate obtaining their graphic records from their parametric equations, as the construction itself of these curves beyond the focus of this work.

Keywords: Sketch curves. Semiotics Representation Registers. global interpretation of figural properties. Paraboles. Parametric. Geogebra software.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1: Segmentação em unidades significantes do objeto dado em língua natural como “circunferência de centro no ponto $(1,2)$ e raio 2.....	52
Quadro 2.1: Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano.....	60
Quadro 2.2: Valores e variáveis visuais para $y_1 = x$ no plano cartesiano	62
Quadro 2.3: Valores e variáveis visuais para $y_2 = -x$ no plano cartesiano.....	63
Quadro 2.4: Valores e variáveis visuais para $y_3 = -2x$ no plano cartesiano.....	64
Quadro 2.5: Valores e variáveis visuais para $y_4 = \frac{1}{2}x$ no plano cartesiano.....	66
Quadro 2.6: Valores e variáveis visuais para $y_5 = 2x + 1$ no plano cartesiano.....	67
Quadro 2.7: Valores e variáveis visuais para $y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$ no plano cartesiano.....	70
Quadro 2.8: Pesquisas sobre esboço de curvas que utilizaram a TRRS de Duval	72
Quadro 2.9: Características (visuais e simbólicas) das parábolas dadas por equações cartesianas	83
Quadro 2.10: Equações e características das curvas trigonométricas analisadas por Silva (2008)	90
Quadro 2.11: Características das senóides.....	91
Quadro 2.12: Características das cossenóides.....	92
Quadro 2.13: Comparação entre os coeficientes das senóides.....	99
Quadro 2.14: Equações e características das curvas exponenciais analisadas por Silva (2008)	101
Quadro 2.15: Equações e características das curvas logarítmicas analisadas por Silva (2008)	102
Quadro 2.16: Conversões entre as unidades básicas do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$	112

Quadro 2.17: Conversões entre as unidades básicas do gráfico da

função $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$ 115

Quadro 3.1: Coordenadas cartesianas dos aviões A, B e C nos instantes $t = 0$ e $t = 1$ 123

Quadro 3.2: Coordenadas cartesianas iniciais do avião A de $t = 0$ até $t = 5$ 125

Quadro 3.3: Coordenadas cartesianas do avião A de $t = 0$ até $t = 5$ 126

Quadro 3.4: Representações algébricas (Cartesiana e Paramétrica) da rota do avião A 129

Quadro 3.5: Valores e variáveis visuais para a reta no plano dada por equações paramétricas 137

Quadro 3.6: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano 138

Quadro 3.7: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano 139

Quadro 3.8: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano 140

Quadro 3.9: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{1}{2}t - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano 141

Quadro 3.10: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = -7 - 10t \\ y = 1 + 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano 142

Quadro 3.11: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano 143

Quadro 4.1: Alguns pontos da parábola $C_1 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 164$

Quadro 4.2: Alguns pontos da parábola $C_2 : \begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 165$

Quadro 4.3: Alguns pontos da parábola $C_3 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 167$

Quadro 4.4: Alguns pontos da parábola $C_6 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 171$

Quadro 4.5: Alguns pontos da parábola $C_7 : \begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 172$

Quadro 4.6: Coeficientes dos termos lineares das parábolas 173

Quadro 4.7: Alguns pontos da parábola $C_{10}' : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 175$

Quadro 4.8: Relações entre alguns valores, variáveis visuais e unidades simbólicas..... 178

Quadro 4.9: Valores, variáveis visuais e unidades simbólicas para

$C_{11} : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = \frac{1}{4}t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 179$

Quadro 4.10: Características (visuais e simbólicas) das parábolas dadas por equações paramétricas 190

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Representação gráfica/geométrica da circunferência com centro na origem e raio 1.....	45
Figura 1.2: Representação gráfica do objeto dado pela equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$	51
Figura 1.3: Representação gráfica do objeto dado pela equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$	54
Figura 2.1: Gráfico de $y_1 = x$ no plano cartesiano.....	62
Figura 2.2: Gráfico de $y_2 = -x$ no plano cartesiano.....	64
Figura 2.3: Gráfico de $y_3 = -2x$ no plano cartesiano	65
Figura 2.4: Gráfico de $y_4 = \frac{1}{2}x$ no plano cartesiano.....	66
Figura 2.5: Gráfico de $y_5 = 2x + 1$ no plano cartesiano.....	68
Figura 2.6: Paralelismo entre as retas $y = 2x$ e $y_5 = 2x + 1$ no plano cartesiano.....	69
Figura 2.7: Intersecção com o eixo $y = 2x$ das retas $y = 2x$ e $y_5 = 2x + 1$	69
Figura 2.8: Gráfico de $y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$ no plano cartesiano.....	71
Figura 2.9: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_1 = 2x^2$)	74
Figura 2.10: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_2 = 0,5x^2$).....	74
Figura 2.11: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_3 = -2x^2$).....	75
Figura 2.12: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_4 = 2x^2 + 1$) ...	76
Figura 2.13: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função:	76
Figura 2.14: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_6 = x^2 + 4x + 4$)	77
Figura 2.15: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_7 = x^2 - 4x + 4$)	78
Figura 2.16: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_8 = x^2 - 2x$) ...	79
Figura 2.17: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_9 = -3x^2 - 3x + 6$).....	80
Figura 2.18: Conversão algébrica ↔ gráfica (Curva: $y^2 - 4y + 8x - 20 = 0$).....	82

Figura 2.19: Conversão algébrica ↔ gráfica da Curva:	
$y^{-+} 1 = 2\text{sen} \frac{1}{2} \left(x^{-+} \frac{\pi}{3} \right)$	95
Figura 2.20: Conversão algébrica ↔ gráfica da Curva:	
$y^{-} 2 = -\text{cos} 2 \left(x^{-} \frac{\pi}{4} \right)$	96
Figura 2.21: Conversão gráfica ↔ algébrica para determinação da equação da curva.....	98
Figura 2.22: Conversão gráfica ↔ algébrica para determinação da equação da curva senóide.....	99
Figura 2.23: Conversão algébrica ↔ gráfica da Curva: $y^{-+} 1 = 3 \left(x^{-+} 1 \right)$	104
Figura 2.24: Conversão algébrica ↔ gráfica da Curva:	
$y^{-} 2 = \log_2 \left(x^{-+} 2 \right)$	105
Figura 2.25: Esquema do procedimento informático de interpretação global proposto por Moretti (2008) e.....	108
Figura 2.26: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ obtido com o software Geogebra.....	110
Figura 2.27: Gráfico da função $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$ obtido com o software Geogebra.....	114
Figura 3.1a: Tela com radar a ser monitorado.....	122
Figura 3.1b: Mapa cartesiano da região monitorada pelo radar.....	122
Figura 3.2: Retas representante da rota seguida pelo avião A.....	124
Figura 3.3: Retas representantes das rotas seguidas pelos aviões A, B e C.....	127
Figura 3.4: Conversão algébrica ↔ gráfica (Curva: $x = y^2 + 3y + 2$).....	133
Figura 3.5: Representação gráfica da curva dada por:	
$\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t - 1 \end{cases}, t \geq 0$	134
Figura 3.6: Reta r passando pela origem.....	135
.....	135

Figura 3.7: Reta s qualquer	136
Figura 3.8: Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano	138
Figura 3.9: Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano	139
Figura 3.10: Gráfico de $\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano	140
Figura 3.11: Gráfico de $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{1}{2}t - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano	141
Figura 3.12: Gráfico de $\begin{cases} x = -7 - 10t \\ y = 1 + 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano	142
Figura 3.13: Gráfico de $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano	143
Figura 3.14: Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano	144
Figura 3.15: Paralelismo entre as retas $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	145
Figura 4.1: Alguns pontos equidistantes do ponto F e da reta d	150
Figura 4.2: Elementos visuais da parábola	151
Figura 4.3: Parábola com concavidade voltada para direita e vértice $V(0, 0)$	152
Figura 4.4: Concavidade da parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo x e vértice $V(0, 0)$	153
Figura 4.5: Parábola com concavidade voltada para cima e vértice $V(0, 0)$	153

Figura 4.6: Concavidades das parábolas com eixo de simetria coincidente com o eixo y e vértice $V(0,0)$	154
Figura 4.7: Parábola com concavidade voltada para direita e vértice $V(x_0, y_0)$	155
Figura 4.8: Parábola com concavidade voltada para cima e vértice $V(x_0, y_0)$	156
Figura 4.9: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica (Curva: $x^2 = 2py$).....	157
Figura 4.10: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica (Curva: $y^2 = 2px$)	158
Figura 4.11: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_1 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \square$	164
Figura 4.12: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_2 : \begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \square$	166
Figura 4.13: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_3 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \square$	167
Figura 4.14: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_4 : \begin{cases} x = -2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \square$	168
Figura 4.15: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_5 : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \square$	169
Figura 4.16: Abertura da parábola em relação ao coeficiente a	169
Figura 4.17: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_6 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t^2 \end{cases}, t \in \square$	171
Figura 4.18: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_7 : \begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}, t \in \square$	172
Figura 4.19: Coeficientes dos termos lineares das parábolas.....	174
Figura 4.20: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_{10}' : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, t \in \square$	176

Figura 4.21: Conversão algébrica ↔ gráfica $C_{10} : \begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} . 177$

Figura 4.22: Conversão algébrica ↔ gráfica de $C_{11} : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = \frac{1}{4}t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} . 180$

Figura 4.23: Conversão algébrica ↔ gráfica de $C_{12} : \begin{cases} x = -t^2 + 2 \\ y = -2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} 181$

Figura 4.24: Conversão algébrica ↔ gráfica de $C_{13} : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = \frac{1}{3}t^2 + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} 182$

Figura 4.25: Conversão algébrica ↔ gráfica de $C_{14}' : \begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} 184$

Figura 4.26: Conversão algébrica ↔ gráfica de

$C_{14} : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t^2 + 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 186$

Figura 4.27: Conversão algébrica ↔ gráfica de

$C_{15} : \begin{cases} x = 2t^2 - 4t + 1 \\ y = -3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 188$

Figura 4.28: Conversão algébrica ↔ gráfica de $C_{16} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} 189$

Figura 4.29: Tela inicial do software Geogebra 202

Figura 4.30: Parábola dada por $C : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} / -1 \leq t \leq 2$ no

Geogebra 203

Figura 4.31: Ferramenta “Controle Deslizante” do Geogebra 204

Figura 4.32: Configurando a Ferramenta “Controle Deslizante” do

Geogebra 205

Figura 4.33: Ferramenta “Controle Deslizante” na tela do Geogebra 205

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	27
1.1 Problemática e questão de investigação	30
1.2 A estrutura da pesquisa	36
2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	37
2.1 Considerações iniciais	37
2.2 O que é representação semiótica?	38
2.3 Operações cognitivas de formação, tratamento e conversão	43
2.4 Fenômenos de congruência e não congruência	50
2.5 A interpretação global das propriedades figurais	56
3 O PROCEDIMENTO DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS NO ESBOÇO DE CURVAS DADAS POR EQUAÇÕES CARTESIANAS EXPLÍCITAS REPRESENTANTES DE FUNÇÕES	59
3.1 O estudo da reta.....	59
3.2 Alguns estudos sobre curvas.....	72
4 O PROCEDIMENTO DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS NO ESBOÇO DE RETAS DADAS POR EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS	119
4.1 As equações paramétricas	119
4.2 Interpretação global da reta dada por equações paramétricas.....	134
5 O PROCEDIMENTO DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS NO ESBOÇO DE PARÁBOLAS DADAS POR EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS.....	149
5.1 Introdução.....	149
5.2 Parábola: definição, elementos e equações (VENTURI, 1994, p. 38-41)	150
5.2.1 Definição.....	150
5.2.2 Elementos da Parábola	151
5.2.3 Equações Canônicas da parábola com vértice na origem ($V \equiv O$)	151

5.2.3.1 Equações da parábola com vértice não coincidente com a origem ($V \equiv O' = (x_0, y_0)$)	155
5.3 As equações paramétricas da parábola.....	157
5.4 Comparações entre a equação cartesiana e as equações paramétricas da parábola	161
5.5 Interpretação global de parábolas dadas por equações paramétricas.....	162
5.6 O software Geogebra: uma ferramenta no estudo de curvas dadas por equações paramétricas.....	201
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	209
REFERÊNCIAS.....	211
ANEXO A - Tabelas de Unidades Básicas	215

1 INTRODUÇÃO

“[...] a formação do pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e suas relações.” (GRANGER, 1979, p. 21-47 apud DUVAL, 2009, p. 16)¹. Esta citação nos faz refletir a respeito das dificuldades que alunos têm para organizar e externalizar seus pensamentos durante a resolução de atividades matemáticas, pois há uma inatividade cognitiva por parte deles, no que tange a manipulação dos símbolos que caracterizam os objetos matemáticos.

Isto porque é comum observarmos que eles não desenvolvem recursos que facilitem a compreensão e que conduzam a consequente resolução das situações matemáticas que lhes são apresentadas.

A aprendizagem em Matemática se constitui de atividades cognitivas que requerem a compreensão e manipulação dos seus variados sistemas de representação, indispensáveis ao desenvolvimento dos atos cognitivos subjacentes a tal aprendizagem. Um exemplo disso é a compreensão que se tem através da construção e interpretação do esboço de um gráfico.

Ainda no ensino fundamental nos é apresentada o que chamamos matematicamente de *equação*². Também no ensino fundamental começamos a trabalhar com o que chamamos de gráfico³. Já no ensino médio nos deparamos com o que chamamos de *curva*⁴, nos seus variados formatos e domínios. É público e notório que, com exceção das cônicas (circunferências, elipses, parábolas e hipérbole), geralmente ministradas no 3º ano do ensino médio, as demais curvas estudadas neste ciclo são

¹ GRANGER, G. Langages et épistémologie. Paris : Linksieck, 1979.

² Equação deve ser entendida aqui como uma sentença matemática que possui o sinal de igual (=) separando o primeiro membro (antes do sinal de igualdade) do segundo membro (depois do sinal de igualdade) e uma ou mais incógnitas (termos desconhecidos), que geralmente são representadas por letras. Os coeficientes são os valores determinados. As incógnitas, dependendo do valor que assumam, podem tornar a equação verdadeira ou falsa.

³ Pelo menos por enquanto, tomemos um gráfico como sendo uma forma de representar uma relação entre duas ou mais grandezas de maneira que esta relação seja mais percebida visualmente.

⁴ “Intuitivamente podemos dizer que uma curva é um conjunto infinito de pontos ou o rastro deixado pelo movimento contínuo de um único ponto sobre uma superfície ou até mesmo no espaço.” (SILVA, 2008, p. 16).

curvas representantes de funções reais de variáveis reais, cujas equações destas são dadas explicitamente no formato $y = f(x)$.

Não é difícil perceber que gráficos de curvas são cada vez mais usados em diferentes aplicações. Engenheiros, físicos, químicos, matemáticos, cientistas sociais, dentre outros, os usam para analisar e resolver problemas e situações. Por isso é muito importante aprendermos a gerar e interpretar gráficos e suas formas, visto que podemos encontrá-los em várias publicações, expressando distintos dados e situações.

Nas universidades, por exemplo, qualquer aluno que curse a sequência das disciplinas de Cálculo ministradas nos diferentes cursos, pode perceber claramente a necessidade de se construir e interpretar gráficos de curvas planas. Com isso, se faz necessário uma transposição/conversão da linguagem algébrica para a gráfica e vice-versa.

Neste sentido, precisamos refletir o trabalho que comumente se faz nas escolas e universidades, onde estas ainda adotam uma prática pedagógica na qual o estudo de um gráfico acaba não contemplando uma análise pós-construção. Em geral partimos de uma representação algébrica e construímos o seu respectivo gráfico, mas raramente fazemos a operação inversa e sequer somos habituados a interpretar um gráfico que nos é apresentado, independentemente de conhecermos ou não a sua representação algébrica. Em síntese, uma leitura interpretativa de um gráfico não faz parte da cultura desses estabelecimentos de ensino.

Muitas vezes nos deparamos com um gráfico sem nos darmos conta que este nada mais é que uma relação, comparação entre duas ou mais grandezas representadas de tal forma que, visualmente, podemos perceber informações que denotam uma série de características em relação ao objeto representado. Para que esse gráfico tome forma, é necessário que essa relação, comparação, tenha uma representação na forma algébrica, podendo esta ser escrita de maneiras distintas. Nestes termos é importante salientar que estamos então, nos referindo a duas formas de representação de um mesmo objeto, a *representação algébrica* e a sua correspondente *representação gráfica*.

No contexto educacional, fazer a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa, pode caracterizar-se como um obstáculo epistemológico e didático para a maioria dos alunos, independentemente do grau de ensino em que estão inseridos. Isto justifica as muitas pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática, numa busca incessante por respostas e consequentes teorizações a respeito.

Uma dessas teorias é a chamada *Teoria dos Registros de Representação Semiótica*⁵ (TRRS) de Raymond Duval⁶, onde por meio de determinadas situações se busca identificar como as atividades envolvendo o referido objeto de aprendizagem exploram os *tratamentos* e as *conversões*⁷, bem como o sentido dessas conversões, além de verificar quais procedimentos são explorados no respectivo registro gráfico.

O próprio Duval (1998) expõe sobre as correspondências entre as variações visuais nos gráficos e as alterações significativas na escrita algébrica da relação por meio da chamada *interpretação global de propriedades figurais*, tratando especificamente do esboço de retas e suas relações com as equações polinomiais do primeiro grau.

Muitas outras pesquisas têm utilizado a TRRS de Duval em estudos relacionados à interpretação figurativa global de curvas, tais como polinomiais do segundo grau, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e curvas que surgem em cálculo no ensino superior.

Salientamos que as curvas apresentadas nas pesquisas analisadas ao se desenvolver este trabalho, são todas representantes de funções, expressas através de equações explícitas, pois as variáveis independente e dependente estão devidamente definidas e escritas em seu formato cartesiano.

Isso nos faz pensar a respeito de alguns fatores não observados no arsenal bibliográfico consultado. Primeiramente, e se a curva plana em estudo não for uma função $y = f(x)$? Já com relação às equações, suas respectivas representantes algébricas, existem outras formas de apresentá-las, pois pode ser uma equação implícita⁸ ou mesmo uma equação dada por funções paramétricas⁹, e não somente equações escritas no formato cartesiano, como considerada nas pesquisas e artigos avaliados.

Então, nesta pesquisa analisaremos a aplicação da TRRS para fazermos uma interpretação global das propriedades figurais de curvas

⁵ Esclarecemos a respeito da TRRS no Capítulo 1 deste trabalho

⁶ Raymond Duval: filósofo e psicólogo francês que desenvolveu estudos em Educação Matemática e trabalhou no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática de Estrasburgo, França, de 1970 a 1995. Hoje, Professor Emérito da *Université du Littoral Côte d'Opale/France*.

⁷ Também no Capítulo 1 definiremos, segundo Duval, o que são tratamentos e conversões.

⁸ No capítulo 4 detalharemos a respeito das equações implícitas.

⁹ Também no Capítulo 3, explicitaremos sobre as equações paramétricas.

planas que surgem no ensino médio e/ou superior, na qual conhecemos apenas a sua representação algébrica, esta dada por uma *equação implícita* ou por uma *equação paramétrica*, independentemente de ser ou não representante de uma função $y = f(x)$.

1.1 Problemática e questão de investigação

Ainda no ensino fundamental, ao cursar o 7º ano, os alunos começam a trabalhar com “equações”, um dos tópicos estudados quando entram no estudo da “álgebra” e cujos objetivos são: (i) conhecer e desenvolver uma nova linguagem matemática (a linguagem algébrica); (ii) compreender o significado e a extensão da representação de um número por um símbolo que em geral é uma letra; (iii) construir procedimentos para resolver equações do 1º grau utilizando as propriedades da igualdade e da equivalência entre equações; (iv) representar e resolver situações-problema usando equações do 1º grau. Em geral, também no 7º ano, ao estudarem “sistemas e equações”, pelo menos teoricamente, é ampliado o conhecimento matemático sobre equações, pois devem identificar situações-problema que envolva equações do 1º grau com duas variáveis, construindo a partir disto o conceito de par ordenado.

Já no 8º ano do ensino fundamental, após ampliação dos conjuntos numéricos ao estudar detalhadamente os “números reais”, lhes é apresentado uma “Introdução ao cálculo algébrico”, onde passa a reconhecer que expressões algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades numéricas e propriedades das operações aritméticas. Aqui, é de se esperar que o aluno reconheça no estudo das expressões algébricas a possibilidade do estudo de alguns elementos da estrutura algébrica, utilizando os conhecimentos sobre operações e suas propriedades para então construir estratégias de cálculo algébrico, conduzindo a uma ampliação da linguagem matemática. Ainda no 8º ano, é apresentado ao aluno o chamado “plano cartesiano”, no entanto, fica restrito a um método destinado à solução de um sistema composto por duas equações e duas variáveis, isto é, à representação das equações constituintes deste sistema.

No que diz respeito especificamente ao assunto a ser abordado neste trabalho, é no 9º ano do ensino fundamental que começam a se configurar nosso problema. Ao estudar “funções” no 9º ano, onde sugerimos que para apreender o significado de função é necessário antes que se consiga identificar a interdependência entre duas grandezas de tal

forma que, com muita clareza, se possa representar em um sistema de coordenadas cartesianas essa interdependência. Salientamos que é justamente nesta fase, de extrema importância o “saber fazer consciente” no que diz respeito à produção, leitura e interpretação de gráficos, mesmo restritos às funções polinomiais do 1º e 2º graus, como consta na maioria dos programas do ensino fundamental. Não podemos deixar de comentar que no 9º ano, ao estudar “circunferência e círculo”, o estudo deste, em geral, fica restrito às manipulações algébricas, sem que haja o estabelecimento de relações de correspondência entre as representações algébricas e suas correspondentes representações gráficas (visuais) no plano cartesiano.

No ensino médio é que o entendimento a respeito das conversões, linguagem algébrica \leftrightarrow linguagem gráfica, se configura como um importante componente para a apreensão do conhecimento dos objetos matemáticos tratados. No 1º ano, após formalização matemática do conceito de “função”, o aluno se vê diante de inúmeras situações em que precisa ler e interpretar dados dispostos em diferentes representações matemáticas, organizando estes dados em tabelas e gráficos e destacando a dependência entre as variáveis envolvidas. Esboçam curvas planas representantes de funções (polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas) sem se dar conta, na maioria das vezes, que as equações algébricas e suas correspondentes representações gráficas se configuram apenas em formas de representações distintas de um mesmo objeto. Ressaltamos aqui que as equações trabalhadas até então são, quase que exclusivamente, dadas na sua forma cartesiana.

Somente ao cursar o 3º ano do ensino médio, quando estuda o tópico “cônicas”, em geometria analítica, é que se depara com equações na sua forma implícita, onde precisa identificar qual objeto está trabalhando e cuja ênfase é dada principalmente na interpretação feita a partir da representação algébrica. Fica nítida nesta etapa a dependência que o aluno tem em relação ao tratamento ponto a ponto, configurado ao esboçar graficamente estas cônicas. Cabe ainda comentar aqui que curvas dadas por equações paramétricas acabam se restringindo apenas a uma das formas de representar a equação de uma reta, sem que haja menção alguma ao esboço das demais curvas a partir de funções paramétricas e vice-versa.

Dos comentários feitos acima podemos constatar que desde o ensino fundamental e estendendo-se durante o ensino médio, o aluno manipula equações e estas são, na grande maioria, expressas por equações cartesianas dadas explicitamente. Além disso, as representações gráficas

de curvas planas se restringem às funções do tipo $y = f(x)$, com exceção do estudo das cônicas (já no 3º ano do ensino médio), onde trabalham com equações implícitas (mesmo sem se dar conta disso) e as curvas trabalhadas não representam funções nas variáveis x e y (parábolas, circunferências, elipses e hipérbolas).

No ensino superior, especificamente nas disciplinas de Cálculo A/I os gráficos também se fazem presentes, ora como objeto de estudo direto, ora como coadjuvantes para facilitar a interpretação do objeto estudado. São objetos de estudo quando se vê especificamente o "esboço de gráficos de funções" e quando estes são elaborados com recursos do Cálculo, no estudo das "aplicações das derivadas". Nos outros momentos, como no "estudo dos limites", os gráficos aparecem, mas na condição de exemplos ilustrativos de limite de uma função num ponto e, no "estudo da integral", como elemento auxiliar ao se fazer o cálculo do comprimento de uma curva ou o cálculo da área abaixo de uma curva, entre outros.

Ao ministrar as disciplinas de Cálculo A e I como professor substituto do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), foi fácil constatar que mesmo neste nível de ensino os alunos sentem muita dificuldade em situações nas quais é necessário esboçar o gráfico de funções, sendo evidente a pouca habilidade que eles tem em lidar com gráficos. Também é notória a dependência que ainda há no que tange o tratamento ponto a ponto, visto que quase sempre recorrem à construção de tabelas.

Nas disciplinas de Cálculo, os gráficos são, via de regra, gráficos de funções, cuja relação entre a lei da função (representação algébrica) e o esboço (representação gráfica) propriamente dito, tem sido objeto constante de pesquisa em Educação Matemática. Perceba que estamos falando de duas formas de representação de um mesmo objeto, onde a passagem de uma representação para outra pode se caracterizar como um obstáculo epistemológico e didático, pois requer certo grau de abstração aliado a um raciocínio funcional. Em síntese, o esboço de curvas planas merece atenção especial por configurar-se num problema latente a respeito dos processos de ensino e aprendizagem relativos a duas formas de representação da mesma (algébrica e gráfica), oriunda do ensino fundamental e permanecendo até o ensino universitário.

Fazendo um levantamento bibliográfico sobre o assunto, verificamos que muitas pesquisas Moretti (2003); Silva (2008); Luiz (2010); Né (2013), dentre outras, têm sido desenvolvidas com foco no estudo de curvas aplicando a TRRS de Duval. O que nos chama atenção é o fato de que as curvas estudadas/apresentadas são representantes de

gráficos de funções, cujas representações algébricas (equações) são dadas cartesianamente e na sua forma explícita, pois as variáveis dependentes e independentes estão bem definidas.

Moretti (2003) em seu artigo "A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais" segue o raciocínio da interpretação global de Duval para as parábolas e suas relações com as equações polinomiais do segundo grau (funções quadráticas), referenciando a translação como um procedimento que contribui para a análise da relação entre as representações gráfica e algébrica.

Silva (2008), em sua dissertação de mestrado faz um estudo do Esboço de Curvas, baseado no uso da interpretação global das propriedades figurais proposta por Duval para as funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, onde a partir da representação algébrica de uma curva conhecida como "curva base" e seu respectivo gráfico, utiliza simetria, translação, paridade, inversibilidade, dentre outros elementos, para obter a representação gráfica e algébrica de outras curvas derivadas, sendo estas da mesma família.

Né (2013), em sua dissertação de mestrado estabelece uma conexão entre a TRRS de Duval e o enfoque Ontosemiótico de Juan Diaz Godino, desenvolvendo sua pesquisa numa turma de Cálculo A do curso de Meteorologia da UFSC, após terem estudado a respeito da construção de gráficos com utilização de elementos das derivadas. Ele investiga o uso que se faz da linguagem matemática no que tange o esboço de curvas no processo ensino e aprendizagem.

Moretti e Luiz (2010) no artigo "O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário" (Revista Educação Matemática Pesquisa, 2010) definem as chamadas unidades básicas (*gráfica*, *lingüística* e *simbólica*) utilizadas para a interpretação global de curvas que surgem no ensino superior. Os autores deixam claro que a conversão da representação algébrica (simbólica) para a representação gráfica no ensino superior, pode apresentar alto grau de complexidade e, por esta razão, sugerem o uso de softwares (plotadores) para a obtenção direta do gráfico. No entanto, para eles, há as unidades básicas simbólicas e gráficas, ambas intermediárias as representações algébricas e gráficas, sendo que podemos fazer as conversões entre elas, em via dupla, partindo da representação gráfica, primeiramente obtida computacionalmente.

Refletindo sobre cada uma das pesquisas citadas anteriormente, há algo que nos chama atenção, como já dissemos acima: todas as curvas

estudadas/apresentadas caracterizam gráficos de funções. Além disso, são funções apresentadas por equações cartesianas na sua forma explícita.

Neste contexto, surgem as seguintes perguntas: E se quisermos aplicar a interpretação global de propriedades figurais, constante na TRRS de Duval para objetos na qual conhecemos sua representação algébrica, mas esta expressa parametricamente ou mesmo implicitamente $[F(x, y) = 0]$? Ora, para muitas situações a equação na sua forma implícita poderá através de manipulação algébrica passar a ser explícita, pois poderemos neste caso, expressar uma variável em função da outra, no entanto, será mesmo uma função? E se a equação que caracteriza a representação algébrica não representar uma função $y = f(x)$, poderemos ainda fazer uma interpretação global de propriedades figurais para a curva que a representa? As conversões e as unidades básicas citadas por Moretti e Luiz (2010) ainda serão válidas para as curvas que surgem no ensino universitário, mas que não caracterizam funções?

No intuito de obter respostas às perguntas anteriormente citadas, primeiramente fizemos uma busca no banco de teses e dissertações da CAPES¹⁰ e nada encontramos a respeito, a não ser outras pesquisas na área cujo tratamento também ocorre para curvas representantes de funções cujas equações são dadas explicitamente na sua forma cartesiana.

Retas dadas por equações paramétricas e curvas representantes de cônicas, cuja equação é dada implicitamente nos interessam neste estudo. Simetrias, translações, **parametrizações**, assíntotas, curvaturas, normais e tangências são algumas das propriedades a serem analisadas nos gráficos das equações que pretendemos investigar, no intuito de verificar pontos notáveis na figura e a partir destes, "tentar" estabelecer padrões que conduzam às conversões preconizadas por Duval em sua TRSS.

Assim sendo, neste trabalho pretendemos considerar retas e curvas dadas por equações paramétricas, independentemente de estas representarem ou não funções, para fazermos uma interpretação global de propriedades figurais destas. Utilizamos um software para, a partir da equação, obtermos diretamente a sua respectiva representação gráfica e então, verificar quais propriedades figurais podem ou não ser inferidas, bem como, quais possíveis conversões podem ocorrer entre as diferentes representações.

O uso do recurso computacional neste caso, diante da complexidade em esboçar as curvas a serem analisadas, o que não se constitui no foco deste trabalho, pode trazer significativas contribuições

¹⁰ <<http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/>>. Acesso em: 10 mar. 2015.

para o processo, ao qual por ora nos propomos. Aqui, o cálculo apenas mecânico foge do nosso objetivo e o uso de um software, além de oferecer uma maior valorização das linguagens gráficas possibilita o desenvolvimento de seqüências didáticas que envolvam atividades de investigação.

Barufi (1999) discute o papel do professor na sala de aula, tendo como potencial aliado o computador como instrumento facilitador, que abre novos horizontes, possibilitando o estabelecimento de múltiplas relações e a negociação de significados.

Em relação ao software a ser utilizado, vemos que o Geogebra é uma excelente opção, por se tratar de um software de matemática dinâmica, gratuito, multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Segundo Caires (2011), o software Geogebra possibilita a construção dinâmica de pontos, retas, segmentos e secções cônicas, oferecendo suporte a equações e coordenadas que podem ser inseridas diretamente no software. Dentre suas aplicações didáticas importantes, Caires (2011) destaca a representação geométrica e algébrica de um mesmo objeto interagindo entre si.

Para Duval (2009, p. 28), “trabalhar com representações é para muitos alunos dos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e muitas vezes impossível”. Segundo Duval (2009) não é possível separar os distintos registros de representação semiótica, (no caso, algébrico e gráfico) da função cognitiva do pensamento humano.

Neste contexto, cabe o seguinte problema de pesquisa: **Como aplicar a interpretação global de propriedades figurais, preconizada por Raymond Duval, às curvas representadas na forma de equações paramétricas?**

A pesquisa aqui apresentada objetiva aplicar a interpretação global de propriedades figurais e buscar elementos matemáticos e informáticos para que esta interpretação global, aplicada ao caso de funções dadas por equações explícitas na forma cartesiana possa também ser aplicada a curvas cujo registro algébrico é dado por equações na forma paramétrica.

No intuito de responder nosso problema de pesquisa, pretendemos primeiramente fazer um aprofundamento de alguns estudos relativos ao esboço de curvas dadas por equações cartesianas, apresentando na seqüência uma proposta de estudo de esboço de curvas dadas por equações paramétricas, averiguando quais elementos matemáticos podem contribuir na interpretação global de propriedades figurais, para que fiquem nítidas as conversões preconizadas por Duval em sua TRSS.

Também vamos verificar quais ferramentas do software Geogebra podem facilitar a referida interpretação global de propriedades figurais e consequentemente o processo ensino-aprendizagem de curvas cuja expressão algébrica se dá parametricamente, de tal forma a estabelecer relações significativas, elencando as ferramentas que contribuam para a interpretação figural dessas curvas.

Rediscutir as conversões estruturadas por Duval para o estudo da reta, bem como as conversões apresentadas por Moretti (2003) no estudo das funções polinomiais do 2º grau, além de analisarmos o trabalho de Moretti e Luiz (2010), testando quais unidades básicas (simbólicas e gráficas) poderá ou não ser consideradas ao interpretar globalmente o gráfico de uma equação paramétrica, se constituem também como propósitos deste trabalho.

1.2 A estrutura da pesquisa

A estrutura do texto compreende quatro capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais. Na Introdução apresentamos o tema, algumas justificativas e o objetivo da pesquisa. No capítulo 1 abordamos a TRRS de Raymond Duval. No capítulo 2 tratamos do esboço de curvas aplicando a interpretação figural global de algumas curvas representantes de funções $y = f(x)$, constituintes de pesquisas já realizadas. O capítulo 3 apresenta o quadro teórico que estabelecemos relacionando as curvas paramétricas e o procedimento de interpretação figural global, discutido por Duval em sua TRRS, onde descrevemos os procedimentos que usamos para desenvolver a pesquisa. O capítulo 4 apresenta também o procedimento de interpretação figural global, mas para as parábolas deixando a descrição dos dados e a análise destes à luz do quadro teórico, que pode ser aplicado às demais cônicas. Em seguida, apresentamos as Considerações Finais e as Referências Bibliográficas utilizadas na pesquisa.

2 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

2.1 Considerações iniciais

Nas três últimas décadas, muito se tem discutido a respeito da apropriação do conhecimento matemático, cuja problemática tem sido alvo constante de pesquisas realizadas na área da Educação Matemática. Tais discussões têm ocorrido para todos os níveis de ensino objetivando uma análise criteriosa no intuito de explicar as dificuldades encontradas por alunos e professores, ao aprender e ensinar matemática, respectivamente.

O primeiro fator a ser levado em consideração diz respeito aos objetos de estudo da matemática, visto que, distinguindo-se das áreas que abrangem as ciências da natureza, nas quais os fenômenos que estas estudam podem ser percebidos através dos nossos sentidos e, em alguns casos até mesmo medidos através de instrumentos apropriados, os objetos de estudo da matemática são abstratos e existem apenas nas nossas mentes, sendo que os conhecemos somente através de suas representações.

Assim, para estudarmos um determinado objeto da matemática devemos considerar sempre a coexistência objeto-representação, visto que são inseparáveis, sendo que para estudarmos a respeito de um objeto matemático se faz necessário conhecer pelo menos uma de suas representações.

Ao dizermos “*pelo menos uma de suas representações*”, estamos admitindo que um dado objeto matemático possa ter mais de uma representação, ou seja, representações distintas podem se referir a um mesmo objeto. Isto faz com que seja necessário o entendimento das relações e processos matemáticos necessários para que se possa converter uma representação em outra, ambas representantes de um mesmo objeto. No contexto educacional, por exemplo, fazer a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e vice-versa, caracteriza-se como um obstáculo para a maioria dos alunos, independentemente do nível de ensino em que estão inseridos. Isto justifica as muitas pesquisas realizadas numa busca incessante por respostas e consequentes teorizações a respeito.

Dentre essas teorias acerca do processo de ensino e aprendizagem da matemática, encontra-se a chamada Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, entre as décadas de 70 e 90, cujo foco é a

investigação do papel dos registros de representação semiótica e suas respectivas mudanças para a apreensão do conhecimento matemático, publicada em variados trabalhos, entre eles o *Sémiosis et pensée humaine Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, publicado em 1995. Muitos trabalhos têm utilizado a TRRS como referencial teórico nos últimos anos na Academia.

Neste capítulo apresentamos os elementos da TRRS que constituirão a base fundamental para apreensão conceitual do nosso objeto de estudo, pois serão utilizados para respondermos nossa questão de pesquisa a respeito do esboço de curvas partindo de equações paramétricas, discutidas nos capítulos 3 e 4 deste trabalho.

2.2 O que é representação semiótica?

Antes de apresentarmos os tópicos da TRRS, os quais serão a base para nossa questão de pesquisa, faremos uma explanação reflexiva acerca de alguns termos usados na referida teoria.

A primeira nomenclatura a ser discutida aqui é a de “representação”. O dicionário Aurélio da língua portuguesa expõe, para a palavra representação, dentre outros significados, “... aquilo que a mente produz; o conteúdo concreto do que é apreendido pelos sentidos; a imaginação; a memória ou o pensamento.” (FERREIRA, 2010, p. 658).

O conceito de representação há muito tempo se constitui no centro das mais variadas teorias, como a semiótica e as ciências cognitivas.

A matemática é totalmente construída através de representações. Por exemplo, o número 0,25 é representado na língua materna como “zero vírgula vinte e cinco” ou como “vinte e cinco centésimos”; ainda pode ser

expresso na forma fracionária como $\frac{1}{4}$ ou em notação científica como

$2,5 \times 10^{-1}$. Note que há representações diferentes para o mesmo número (objeto).

Para Duval (2009), “as representações são divididas em internas e externas. As **representações internas** são aquelas que criamos em nossas mentes, as quais descrevem a cognição dos indivíduos e por isso são **conhecidas ainda como representações mentais**. As **representações externas ou semióticas**, por sua vez, são aquelas constituídas por sistemas de signos¹¹ que possuem regras próprias de significação e

¹¹ Pierce (1931 apud DUVAL, 2009, p. 34) considera que o signo é aquilo que, sob determinado aspecto, representa alguma coisa para alguém, criando em sua

funcionamento, inventadas pelo homem para mediar as relações com os conhecimentos e as coisas do mundo.”

Duval (1995) preconiza a importância das representações dentro dos estudos da psicologia cognitiva, direcionando-as no contexto das representações mentais para conhecimento de como funciona o pensamento humano. No entanto, é para as representações semióticas o foco de seu estudo, pois o funcionamento cognitivo do pensamento para a aprendizagem matemática é a centralidade do mesmo.

Há uma intrínseca relação entre as representações mentais e semióticas. Já a noção de registro refere-se “ao domínio dos sinais que servem para designar qualquer coisa (por exemplo, o mapa que representa o Brasil e não é o Brasil)”. (ALMOLOUD, 2007, p. 80).

Para Duval (2009, p. 28), “não existe *noésis*¹² sem *semiósis*¹³, ou seja, não há conceitualização sem o sujeito ter-se apropriado das várias formas de representação de um mesmo objeto”.

Em sua TRRS, o autor afirma que:

A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois *registros de representação* e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. (DUVAL, 1993, p. 51).

Neste contexto, o entendimento de diferentes registros de representação pode conduzir ao desenvolvimento de habilidades que direcionam ao ato de criar, transformar e analisar os objetos matemáticos,

mente um signo equivalente. Nessa operação é gerado o interpretante. Aquilo que o signo representa é denominado seu objeto. “O signo compreende duas ideias – uma é a ideia da coisa que representa, e outra, a ideia da coisa representada – e a natureza do signo consiste em excitar a segunda pela primeira” (NÖTH, 1995b, p. 43).

PIERCE, C. S. *Collected Papers, II, Elements of logic*. Cambridge, Harvard: University Press, 1931.

¹² Intelecção, ato de compreensão conceitual (DUVAL, 2009, p. 15).

¹³ Signo, marca distintiva, produções ligadas às práticas significantes (DUVAL, 2009, p. 15).

considerando que a linha de pensamento se inicia a partir da concepção que fazemos de algo que vai além do que os olhos podem ver.

Diante do exposto, precisa estar claro que ao estudar determinado objeto matemático, é imprescindível conhecer algum registro (signo) que represente o objeto em questão, sendo que esse registro pode ser dado de algumas formas: na língua materna, aritmética, algébrica, geométrica, tabelas, gráfica, entre outras. Independentemente do formato de tal registro, podemos ter axiomas, propriedades e generalizações constituintes do referido registro, que constituirão o saber científico de uma determinada teoria matemática.

Um fator fundamental a respeito das dificuldades de aprendizagem em matemática consiste na necessidade de se distinguir o objeto matemático de sua representação.

[...] não pode haver compreensão em matemática se não se distingue um objeto de sua representação. Desde esta perspectiva, **é essencial não confundir jamais os objetos matemáticos**, por exemplo, os números, as funções, as retas, etc., **com suas representações**, por exemplo, as escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados das figuras [...] pois um mesmo objeto matemático pode ter diferentes representações. (DUVAL, 2009, p. 14, grifo nosso).

O segundo termo merecedor de uma discussão sobre seu significado é o de “semiótica”. Usando o mesmo dicionário Aurélio, entre alguns significados, temos ser “... a ciência geral dos sinais e símbolos, dos sistemas de significação.” (FERREIRA, 2010, p. 691).

Noth (1995, p. 17), citando a corrente americana de Charles Peirce (1839-1914) nos diz que “o termo “semiótica” tem origem grega (semeion = signo), caracterizando-se como a ciência dos signos e dos processos significativos na natureza e na cultura. Como os signos se referem à linguagem, podemos admitir a semiótica como a ciência de todas as linguagens”.

Então, um sistema de representação semiótica pode ser definido como:

Um conjunto de códigos (signos), organizados segundo regras de formação e convenções próprias, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados e estabelecer

relações com outros objetos e sistemas matemáticos (DUVAL, 1995).

Segundo Duval (2009, p. 36-37), os sistemas semióticos devem cumprir as três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

1°. Devem constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado;

2°. Transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação as representações iniciais;

3°. Converter as representações produzidas em um sistema em representações de outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado.

De acordo com Duval (2003), existem diversas formas de Representações Semióticas que são agrupadas em quatro grandes registros: a língua natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas. Para ele, cada um deles cumpre a função de representação, pois estabelecem uma comunicação de tal forma que os registros inerentes a cada um desses sistemas nos permitem realizar as chamadas operações cognitivas de tratamento e conversão, que abordaremos adiante.

Para Duval (2009), ao considerarmos o conhecimento matemático devemos estar atentos à necessidade intrínseca do uso das representações semióticas e cientes da variedade de registros que se pode utilizar. Isto faz com que a TRRS seja positivamente significativa, pois procura explicações a respeito daquilo que precisamos levar em consideração quando se investiga a aquisição do referido conhecimento.

Como já mencionamos, há variadas formas de representação de um mesmo objeto matemático e este talvez seja justamente o primeiro fator a ser considerado quando nos propomos a ensinar matemática, seja por professores ou livros didáticos, de tal forma que propiciem aos alunos a apropriação dos diferentes registros de representação semiótica, o que implicará um primeiro passo para a apreensão real e não apenas aparente dos objetos matemáticos em estudo.

Duval (2003) deixa claro que somente podemos ter acesso ao objeto matemático através de suas diferentes representações semióticas, visto que é dessa maneira que um aluno pode construir um determinado conceito. Por outro lado, para este autor, não é suficiente que se tenha

domínio de diferentes representações semióticas, pois o mais importante é que se possa transitar entre elas.

Devemos então considerar que cada tipo de registro semiótico possui suas próprias características, cujas especificidades faz com que seja necessário o desenvolvimento de habilidades que conduzam tanto às transformações dentro de um mesmo sistema de representação semiótica, quanto à capacidade de passar de uma representação para outra.

No ensino de matemática, o problema se estabelece justamente porque só se levam em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a coordenação entre estes vários registros de representação. Por exemplo, não adianta o sujeito resolver uma operação usando material concreto, ou através de um desenho, se não conseguir enxergar/coordenar estes procedimentos no tratamento aritmético (algoritmo da operação), no problema envolvendo esta operação ou mesmo em outro registro de representação qualquer. (DAMM apud PAIS et al., 2008, p. 181-182).

A citação anterior nos deixa um alerta já enfatizado por Duval em seus trabalhos, a de que a coordenação entre os diferentes registros é necessária para a aprendizagem em Matemática, pois não é a determinação das representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto que garantirá a apreensão do objeto matemático, mas sim a coordenação entre esses vários registros de representação.

Está justamente aí o real desafio para aqueles que ensinam matemática, o de levar em consideração a coordenação entre as diversas formas de representação de um mesmo objeto matemático, tendo em vista que a nossa própria formação, ao longo de nossa vida escolar, tratou das representações também de forma fragmentada, sem uma articulação entre duas ou mais naturezas de representação. Para assim proceder é necessário primeiramente, que façamos uma análise criteriosa a respeito da forma como concebemos os objetos e ferramentas matemáticas.

2.3 Operações cognitivas de formação, tratamento e conversão¹⁴

Os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado.

É importante estar claro que o processo de ensino deve compreender o trabalho com registros de representação, para tornar possível a produção e apreensão das representações dos objetos matemáticos bem como para a apreensão conceitual destes objetos, pois segundo Duval (1995) é o trabalho com registros que contempla três operações cognitivas: a formação, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação significa uma operação cognitiva que se realiza utilizando-se a língua materna, desenhos, figuras ou estruturas com signos próprios de uma ciência que não acontece independente do conteúdo a representar e não pode deixar de respeitar regras.

O tratamento significa uma operação cognitiva que compreende uma transformação da representação, no interior do mesmo sistema semiótico, mobilizando apenas um só registro de representação. Por exemplo, em $\frac{1}{2} = 0,5$ foi efetuado um tratamento no numeral representativo de um número, expressando-o através de uma fração e apresentando-o na forma decimal. O sistema semiótico é o mesmo, independentemente de estarem ou não sendo colocadas em jogo especificidades de cada uma das formas do número.

A conversão significa também uma operação cognitiva, porém de outra natureza, que compreende uma transformação de uma dada representação em outra, só que agora, pertencente a outro sistema semiótico. Essa operação não é uma operação trivial e nem cognitivamente neutra, conforme nos alerta Duval (1995). Exemplo: “um número positivo” (língua materna) e “ $x > 0$ ” (linguagem algébrica).

Cada registro de representação apresenta um conteúdo próprio que caracteriza parte do objeto estudado e o sujeito se apropria do objeto cada vez que se dá conta dos elementos que o caracteriza. Tomar consciência dos conteúdos existentes em cada registro de representação e estabelecer relações entre eles significa apropriar-se do objeto estudado.

¹⁴ Operações cognitivas constitutivas da semiose.

Neste sentido, podemos dizer que uma representação é identificável quando é possível reconhecer nesta representação o que ela representa, no caso da Matemática, o objeto matemático que representa.

Para isso, o sistema de signos precisa ser estabelecido socialmente. Assim, uma representação identificável permite que a pessoa que se depara com ela, selecione as características e os dados do conteúdo que está sendo representado.

Temos que estar atentos ao que podemos, de fato, considerar como sendo um registro semiótico, Por exemplo, é estabelecido socialmente que uma circunferência com um traço diagonal feito sobre a letra “E”, indica que é proibido estacionar. Mesmo satisfazendo esta condição, as placas de trânsito não são consideradas registros de representação semiótica, pois não existe nem a possibilidade de tratamento e nem a de conversão nestes tipos de representação.

As diversas representações semióticas de um objeto matemático são, pois, absolutamente necessárias, já que os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis na percepção e para que se possam efetuar tratamentos sobre os mesmos. Isso nos leva a apontar que existem três patamares distintos: **o objeto matemático, a representação mental desse objeto e a utilização de registros de representação semióticos desse objeto**. Por essa razão, a importância da distinção entre um objeto matemático e a representação que se faz no funcionamento cognitivo. (MORETTI et al., 2005).

Em se tratando da atividade cognitiva requerida pela Matemática, deve-se considerar a importância das representações semióticas pelos seguintes motivos: em relação às possibilidades de tratamento (não é qualquer tipo de registro de representação que permite um determinado tipo de tratamento), pelo fato de que os objetos matemáticos não são diretamente observáveis, visto que eles não têm existência física e sua apreensão só é possível por meio de registros de representação; igualmente pelo fato de que existe uma grande variedade de representações semióticas possíveis para serem utilizadas em Matemática (língua natural, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras).

De acordo com Duval (1993), o processo de ensino não pode privilegiar somente o tratamento, pois se assim o fizer estará atribuindo

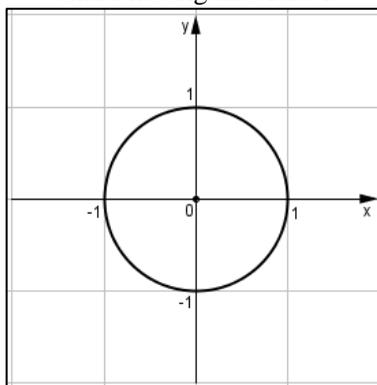
demasiada importância à forma, como se ela, por ser responsável pela descrição de uma informação, permitisse a conceitualização. É na conversão das representações, de um sistema semiótico a outro, que haverá uma operação cognitiva que pode ser descrita como uma mudança de forma, que possibilitará a conceitualização dos objetos matemáticos pelos sujeitos em processo de aprendizagem.

A seguir, apresentamos uma situação onde se pode observar diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático, onde detalhamos a significativa diferença entre tratamento e conversão sob a ótica de Duval.

Tomando o objeto matemático “circunferência”, somente teremos acesso a ele através de suas representações. Interessa-nos como foco desse trabalho as representações algébrica e gráfica do objeto, onde cada registro semiótico pode nos fornecer informações distintas a respeito da circunferência. Exemplificando, vamos tomar em particular a circunferência seguinte:

- Língua natural: circunferência com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas e raio 1 unidade de comprimento.
- Linguagem algébrica: $x^2 + y^2 = 1$.
- Representação gráfica: ver figura 1.1.

Figura 1.1: Representação gráfica/geométrica da circunferência com centro na origem e raio 1.



Fonte: Autores desta pesquisa.

Note que representamos o objeto em três distintos sistemas de representação semiótica. Vamos agora nos ater a sua representação

algébrica: $x^2 + y^2 = 1$. Perceba que temos aqui uma *equação* com duas variáveis, onde nenhuma delas está expressa em termos da outra, o que a caracteriza como sendo uma “*equação implícita*”, visto que não há definição sobre variáveis dependentes e independentes.

No entanto, através de operações algébricas, podemos tornar a equação implícita ($x^2 + y^2 = 1$) em uma *equação explícita*. Observe:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Temos agora a variável y expressa em função da variável x . Note que operamos dentro de um sistema de representação semiótica (algébrico), permanecendo nele, ou seja, conservando a forma de representação. A este procedimento, Duval chama de “*tratamento*”.

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. (DUVAL, 2008, p. 16).

Voltando a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$, temos que a mesma pode ser representada no plano cartesiano, cuja representação é dada pela Figura 1.1. Observe que agora houve uma mudança do sistema de representação algébrico para o sistema de representação gráfico. A esta transformação Duval chama de “*conversão*”.

As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registros conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2009, p. 16).

Duval (2009) nos afirma que “um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema”. (p. 57). Ainda, para ele “a conversão é uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida”. (p. 59).

É importante destacar aqui que tanto na transformação de tratamento (interna ao sistema algébrico) quanto na transformação de conversão (externa ao sistema algébrico), houve uma mudança de registro, visto que cada um dos sistemas de representação possui suas próprias regras de transformação que são internas ao sistema semiótico na qual pertencem. Contudo, o objeto matemático foi conservado mesmo após a mudança de registro, isto é, o objeto “circunferência centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas e de raio 1” permanece com suas propriedades características, embora ao fazermos a conversão, informações distintas podem ser obtidas diretamente a respeito da mesma.

No entanto, “certas regras de tratamento não são de forma alguma específicas a um dado registro de representação. É o caso das regras de derivação: elas são comuns a todos os raciocínios do tipo dedutivo. Porém, esses raciocínios podem ser efetuados no registro de uma língua formal tanto quanto naquele da língua natural.” (DUVAL, 2009, p. 58).

Também nos expõe que “converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro.” (DUVAL, 2009, p. 58).

Assim, a conversão semiótica impõe que se haja uma mudança no procedimento interpretativo, visto que o conteúdo a que se chega (após a conversão) precisa de uma interpretação diferente daquele característico da representação de partida (antes da conversão). Então, a conversão requer clareza perceptiva entre a forma e o conteúdo da representação. Se não se percebe essa diferença a atividade de conversão torna-se impossível ou incompreensível. (DUVAL, 2009, p. 59).

Devemos, porém, tomar cuidado quanto às regras de conversão. No nosso exemplo onde convertemos a equação implícita dada por $x^2 + y^2 = 1$ em seu registro gráfico (ver Figura 1.1), embora tenhamos omitido as regras usadas para tal conversão, estas não são as mesmas para a conversão no sentido contrário, isto é, para converter do registro gráfico para sua respectiva representação algébrica.

Para efetuar essa discriminação, é preciso, com efeito, dar início a uma interpretação global que requer ter percebido os diferentes valores possíveis das variáveis visuais pertinentes no registro gráfico e tê-los relacionado com os símbolos correspondentes na escritura algébrica. Ou seja, *as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido no qual a mudança de registro é efetuada.* (DUVAL, 2009, p. 61, grifo do autor).

Duval, em sua TRRS se dedicou incessantemente ao estudo da atividade (operação cognitiva) de conversão, onde para ele, “*a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos.*” (DUVAL, 2009, p. 63, grifo do autor).

Duval procurou analisar as inúmeras dificuldades enfrentadas por alunos ao realizarem conversões, onde para ele,

A passagem de um sistema de representação a um outro, ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes. (DUVAL, 2009, p. 18).

Neste contexto, é pertinente, conforme já expressamos na introdução deste trabalho, refletirmos a respeito das dificuldades enfrentadas por alunos, ao terem que realizar conversão ao estudarem conteúdos da disciplina de Matemática, ministrada em variados níveis de ensino.

Em se tratando do esboço de curvas, a prática pedagógica mais comum diz respeito à conversão do sistema algébrico para o gráfico, sendo que o sentido inverso, em geral, acaba sendo omitido.

Não é difícil constatar que os alunos sentem muita dificuldade em situações nas quais é necessário esboçar gráficos de funções, ficando evidente a pouca habilidade no que diz respeito à coordenação de diferentes registros semióticos, em especial aqui, o linguístico, algébrico e gráfico. Para Silva (2007), os professores em suas práticas pedagógicas e também os livros didáticos, geralmente desconsideram as conversões como se as mesmas fossem naturalmente aprendidas pelos alunos.

Duval (2009) pontua ainda que a existência de vários registros de representação objetiva principalmente, a economia de tratamento, a complementaridade e a conceitualização.

Em relação à *complementariedade* de registros, “compreende os elementos informativos e comunicacionais possibilitados pela representação escolhida”. (COLOMBO, 2008, p. 117). Como exemplo, podemos pensar nas informações que a representação da reta numérica fornecem a respeito dos números inteiros, como os aspectos relacionados à simetria, valor absoluto e oposto de um número. Já o registro numérico permite a realização de cálculos específicos que só podem ser realizados

por se tratar de uma representação discursiva (sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas).

Isto nos faz concluir que, de um ponto de vista cognitivo, uma representação não é completa em relação ao objeto que representa e, portanto, de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados.

Já no que diz respeito à *economia de tratamento*, imagine uma situação em que se tenha que resolver a seguinte expressão numérica:

$$2\left(0,3 + \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{5} \quad (*)$$

Um aluno que apresente dificuldades em relação às operações com números representados na forma fracionária pode transformar as frações da expressão (*) em suas correspondentes representações decimais, supondo aqui que para este registro (decimal) ele possui domínio. Assim sendo, ele fará a seguinte conversão:

$$2\left(0,3 + \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 2(0,3 + 0,5) - 0,8$$

conversão

Percebemos no exemplo hipotético acima que, o fato de dominar diferentes registros proporcionou a escolha de um caminho mais rápido e, portanto, mais econômico.

No que se refere à *conceitualização*, Duval (2009) defende que somente o domínio de vários registros de representação semiótica de um mesmo objeto pode conduzir a elaboração e apreensão de um conceito. No entanto, para ele devemos estar atentos quanto ao uso excessivo do tratamento, pois pode conduzir a uma confusão cognitiva, entre elas a dificuldade em distinguir o registro utilizado do objeto matemático em estudo, visto que pode ser, neste caso, a única representação conhecida do objeto.

Então, podemos dizer que quanto maior for o grau de compreensão e a conseqüente capacidade de realizar conversões que um aluno possua, maior será o seu rol de escolhas entre os diferentes registros, de tal forma que os tratamentos por ele efetuados sejam mais econômicos e seguros.

2.4 Fenômenos de congruência e não congruência

Suponha que estamos diante de um objeto matemático representado por “A” e que através de uma conversão chegamos à sua representação “B”. Então, “A” é o registro de saída e “B” o seu registro de chegada. Se o registro “B” deixa transparecer a representação “A”, ou seja, “B” lembra “A”, pois se reconhece o mesmo objeto em “A” e “B”, dizemos que houve o fenômeno de *congruência*. Caso contrário, isto é, se em “B” não se reconhece o mesmo objeto identificado em “A”, dizemos que houve a *não-congruência*. Em síntese, uma conversão pode ser congruente ou não-congruente.

Segundo Duval (2003), as congruências e não-congruências se manifestam de forma mais nítida nas operações de conversão. Para ele, quando se observa dois registros onde houve uma conversão, duas situações podem ocorrer:

Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência. (p. 19).

A dificuldade da conversão de um registro de representação para outro está relacionada com o grau de congruência entre o registro de saída e o registro de chegada.

Para determinarmos se as representações semióticas “A” e “B” são congruentes ou não-congruentes, segmentamos as representações em suas respectivas unidades significantes¹⁵, de maneira tal que estas possam ser colocadas em correspondência.

Ao final dessa segmentação comparativa, pode-se então ver se as unidades significantes são, em cada um dos dois registros, unidades significantes simples ou combinações de unidades simples. Essa comparação pode ser feita diretamente ou por meio de uma representação auxiliar que “codifique” de alguma forma as representações a comparar (DUVAL, 2009, p. 66).

¹⁵ Considera-se como unidade significativa elementar toda unidade que se destaca do “léxico” de um registro (DUVAL, 2009). Uma palavra, uma expressão ou uma figura são exemplos de unidades significantes.

Suponhamos que certo aluno, chamado João, conheça a equação reduzida de uma circunferência genérica, ou seja, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, onde x_0 e y_0 são as coordenadas cartesianas do centro da circunferência e r é o raio. Os exemplos seguintes nos mostram quando há congruência e não congruência, respectivamente:

Exemplo de congruência

Seja o objeto matemático dado pela equação implícita $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

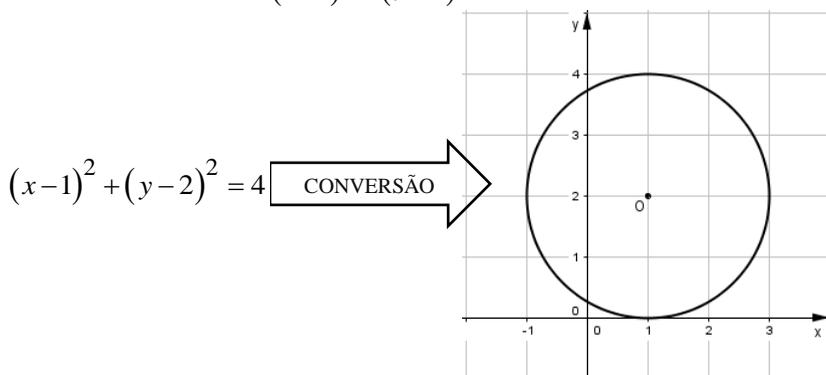
Como João conhece a equação reduzida de uma circunferência genérica, não terá problema algum para na equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, reconhecer:

- que o objeto matemático é uma circunferência;
- que esta circunferência tem centro no ponto $(1, 2)$;
- que o raio da circunferência é 2.

Ao fazer a conversão da representação algébrica para a representação gráfica, João obterá:

Figura 1.2: Representação gráfica do objeto dado pela equação

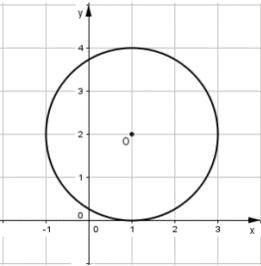
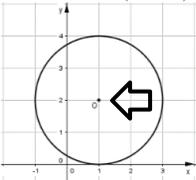
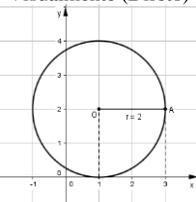
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$



Fonte: Autores desta pesquisa.

João tem então duas representações distintas para o mesmo objeto matemático, onde a segmentação nas chamadas unidades significativas pode ser observada no quadro 1.1:

Quadro 1.1: Segmentação em unidades significativas do objeto dado em língua natural como “circunferência de centro no ponto $(1, 2)$ e raio 2.

Representação	Unidades Significativas	
(Representação “A”) - Inicial (Algébrica) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$	Centro $(x_0, y_0) = (1, 2)$	Comparação: $\underbrace{(x-x_0)^2}_{(x-1)^2} + \underbrace{(y-y_0)^2}_{(y-2)^2} = r^2$ 4 \Downarrow $x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 2$
	Raio $r = 2$	Comparação: $\underbrace{(x-x_0)^2}_{(x-1)^2} + \underbrace{(y-y_0)^2}_{(y-2)^2} = r^2$ 2^2 \Downarrow $r = 2$
(Representação “B”) - Final (Gráfica) 	Centro O ponto “O” de coordenadas $(1, 2)$ é o centro da circunferência.	Visualmente (Direto) 
	Raio $r = med(\overline{OA}) = 2$	Visualmente (Direto) 

Fonte: Autores desta pesquisa.

Duval (2009) nos diz que duas representações semióticas distintas representam, pelo menos, em parte, o mesmo conteúdo, quando obedecem ao que ele chama de *critérios de congruência*, a saber:

1°. Possibilidade de uma correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem;

2°. Mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações;

3°. Conversão de uma unidade significativa da representação de partida a uma só unidade significativa na representação de chegada.

Analisando o quadro 1.1, vemos que todos os critérios de congruência preconizados por Duval são satisfeitos. Logo, concluímos que as representações “A” e “B” são congruentes, ou seja, em ambas as representações se reconhece o mesmo objeto.

Vamos agora analisar outro exemplo:

Exemplo de não congruência

Seja o objeto matemático dado pela equação implícita $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

Embora João conheça a equação reduzida de uma circunferência genérica, desta vez, não é direto perceber que o objeto matemático também corresponde a uma circunferência e muito menos, identificar de forma imediata o seu centro e raio. No entanto, fazendo um tratamento na equação (completando os quadrados), vem:

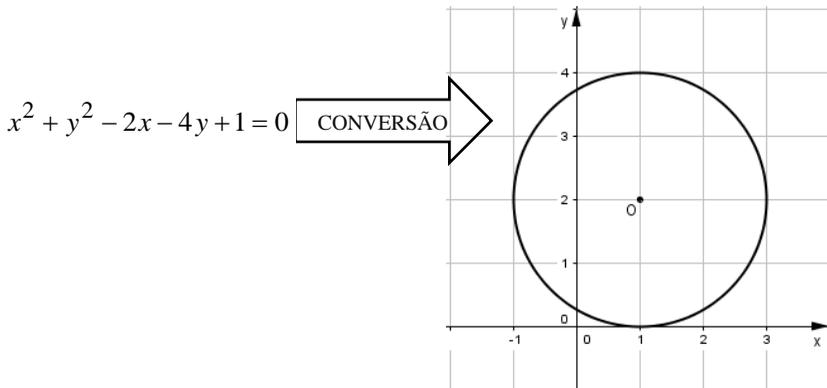
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 &= 0 \\(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 - 4 + 1 &= 0 \\(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4 &= 0 \\(x-1)^2 + (y-2)^2 &= 4\end{aligned}$$

Agora fica claro para João que o objeto representado por $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ é uma circunferência com centro no ponto $(1, 2)$ e raio 2, ou seja, o mesmo objeto do exemplo de congruência.

Mas, pensando em termos de conversão, temos:

Figura 1.3: Representação gráfica do objeto dado pela equação

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$



Fonte: Autores desta pesquisa.

Note que em relação à representação algébrica (equação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$) e sua respectiva representação gráfica (Figura 1.3):

- 1º. **Não há** possibilidade de uma correspondência semântica entre unidades significativas que as constituem;
- 2º. **Não tem** a mesma ordem de apreensão destas unidades nas duas representações;
- 3º. **Não há** como converter uma unidade significativa da representação de partida a uma só unidade significativa na representação de chegada.

Logo, concluímos que as representações não são congruentes, ou seja, não reconhecemos o mesmo objeto nas diferentes representações (partida \rightarrow chegada), pois como mostramos acima, esse reconhecimento somente é possível depois de um tratamento (completar os quadrados).

A “capacidade” de interpretar uma representação matemática depende além do rol de conhecimentos do sujeito, do grau de congruência do modelo matemático. No nosso primeiro exemplo, caso João não conhecesse a equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ não conseguiria identificar centro e raio da circunferência a partir da equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Ainda, uma representação congruente, como a

mostrada na figura 1.3, que “lembra” a situação original, possibilita uma interpretação mais eficaz; por outro lado, uma representação não congruente, que não “lembra” a situação original, como no exemplo 2, possibilitará uma leitura menos eficaz.

Ainda, uma questão a ser levada em consideração no que tange a congruência e a não congruência de uma conversão diz respeito ao sentido em que a conversão é realizada. Por exemplo, realizar a conversão do registro algébrico para o registro gráfico não apresenta, na maioria das vezes, a mesma dificuldade e o mesmo custo cognitivo que realizar uma conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Ou seja, construir um gráfico dado sua expressão algébrica, não apresenta a mesma dificuldade que construir uma expressão algébrica dada sua representação no registro gráfico. Isto não quer dizer que realizar a conversão no sentido algébrico \rightarrow gráfico seja algo natural.

Nestes termos, acaba que a ideia mais difundida nas salas de aulas é reduzir o processo de conversão a uma das formas mais simples, o que é um equívoco, pois o processo acaba sendo tratado como se bastasse apenas aplicar uma sequência de regras estabelecidas para obter a conversão, por exemplo, de uma equação à sua representação gráfica. Precisamos ter consciência que esse processo é bem mais complexo.

Há por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois essas são variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração em cada um dos dois registros. A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irreduzível a um tratamento. (DUVAL, 2003, p. 17).

Na disciplina de cálculo, por exemplo, a ênfase é dada no sentido algébrico \rightarrow gráfico, de tal forma como se a conversão no sentido contrário passasse a ser algo automático. Isto demonstra porque em determinadas conversões os alunos apresentam alto grau de dificuldade.

2.5 A interpretação global das propriedades figurais

Ao fazermos uma conversão do registro “A” para o registro “B”, não implica que o sentido inverso presente as mesmas características. No contexto deste trabalho, fazer uma conversão da representação algébrica para uma representação gráfica, o que de acordo com nossa experiência, é o mais comum acontecer, não proporciona garantia alguma que o sentido inverso ocorra. Esta é uma das razões porque alunos de matemática em qualquer que seja o grau de ensino, apresentem muitas dificuldades de leitura e de interpretação de gráficos.

Duval considera um equívoco quando se presume que os sentidos de conversão entre dois registros são equivalentes, visto que desta forma, por exemplo, estaríamos considerando que uma conversão partindo da representação algébrica para a representação gráfica, englobaria as mesmas estruturas e conceitos ao convertê-la da representação gráfica para a representação algébrica.

Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Vemos, então, que duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo. (DUVAL, 2003, p. 22).

Entre os três tipos de abordagens possíveis para a representação gráfica, citadas por Duval (2011, p.98-99), vamos aqui expor apenas duas, por entendermos que a primeira é a mais comum de encontrarmos tanto nos livros didáticos quanto na prática pedagógica dos professores, e a segunda por ser justamente a que utilizaremos no estudo das curvas objeto deste trabalho, a saber:

- 1ª Abordagem ponto a ponto;
- 2ª Procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

A abordagem ponto a ponto corresponde à representação de pontos com base em um par ordenado e a identificação do par ordenado em um sistema de eixos graduados a partir do ponto, sendo a curva traçada através da junção desses pontos obtidos.

Nesse modo de proceder não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente. Diversos problemas podem surgir devido ao fato de que se há congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente. (SILVA, 2008, p. 31).

O procedimento de interpretação global das propriedades figurais corresponde à associação das *variáveis visuais*¹⁶ pertinentes à representação gráfica com as variáveis simbólicas da representação algébrica, permitindo a percepção de que uma modificação na escrita algébrica implica uma mudança correspondente na representação gráfica e vice-versa. “Neste tipo de tratamento não estamos em presença da associação um ponto \leftrightarrow um par de números, mas na associação variável visual da representação \leftrightarrow unidade significativa da escrita algébrica.” (DUVAL, 1988, p. 237).

Através do procedimento de interpretação global das propriedades figurais podemos evitar a representação de um gráfico pelo método ponto a ponto previamente definido pela construção de uma tabela com a escolha de valores às variáveis, mas sim através da interpretação do registro algébrico em associação com suas características gráficas.

Uma expressão algébrica é composta por variáveis visuais (ou unidades significativas) que são: os símbolos de relações ($>$, $<$, $=$), os símbolos de operações ou sinais ($-$, $+$), os símbolos de variáveis e os símbolos de expoentes de coeficientes e constantes. (DUVAL, 1998, apud TRALDI, 2002, p. 27).

Em sua teoria Duval (1998) expõe sobre as correspondências entre as variações visuais nos gráficos e as alterações significativas na escrita algébrica através da interpretação global de propriedades figurais, tratando especificamente do esboço de retas e suas relações com as equações polinomiais do primeiro grau, conforme veremos no próximo capítulo.

¹⁶ De acordo com Duval, são variáveis visuais aquelas cuja variação resulta em uma mudança nos valores dos parâmetros na equação da curva correspondente.

3 O PROCEDIMENTO DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS NO ESBOÇO DE CURVAS DADAS POR EQUAÇÕES CARTESIANAS EXPLÍCITAS REPRESENTANTES DE FUNÇÕES

3.1 O estudo da reta

O procedimento de interpretação global das propriedades figurais foi estudado por Duval (1988) para o caso das retas em seu trabalho: “Gráficos e equações: a articulação entre dois registros”. Neste trabalho ele fez uma análise a respeito das modificações nas variáveis visuais (gráficas) e suas correspondentes modificações nas unidades simbólicas (algébricas) para equações representantes de retas no plano, ou seja, para estruturas algébricas representadas por equações explícitas do tipo $y = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$. Ressaltamos aqui que temos algebricamente o objeto matemático “função polinomial do 1º grau”.

Para Duval (1988), a conversão da equação (representação algébrica) para sua representação gráfica e vice-versa se constitui num obstáculo para a maioria dos alunos, visto que as dificuldades em ler e interpretar as representações gráficas parece estar associada à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre os registros algébrico e gráfico, onde o procedimento mais comum adotado nessa articulação é o tratamento ponto a ponto.

Neste contexto, o autor sugere uma descrição sistemática das variáveis visuais (gráficas) que leve em consideração o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, possibilitando desta forma a identificação das modificações realizadas na equação e no gráfico que a representa. Segundo o autor,

É por meio desta abordagem que são introduzidas e definidas as representações gráficas. Em referência aos dois eixos graduados, um par de números permite identificar um ponto (e, inversamente, um ponto se traduz por um par de números). Este modo associativo limita-se a alguns valores particulares e aos pontos marcados no plano referencial. Esta abordagem favorece quando se quer TRAÇAR o gráfico correspondente de uma equação do primeiro grau ou o gráfico de uma equação do segundo grau. Favorece ainda quando se quer LER as coordenadas de algum ponto interessante (porque é ponto de intersecção com os

eixos ou com alguma reta, porque é máximo, etc.). (DUVAL, 2011, p. 98).

O quadro 2.1 expõe a proposta de Duval (1988) no que tange a identificação das variáveis visuais na representação gráfica de uma reta e suas correspondentes unidades simbólicas nas equações algébricas:

Quadro 2.1: Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido da inclinação	Ascendente Descendente	Coefficiente > 0 : ausência do símbolo – Coefficiente < 0 : presença do símbolo –
Ângulos com os eixos	Partição simétrica Ângulo menor (45°) Ângulo maior (45°)	Coefficiente variável = 1 (não tem coeficiente escrito) Coefficiente variável < 1 Coefficiente variável > 1
Posição sobre o eixo	Corta acima Corta abaixo Corta na origem	Acrescenta-se uma constante (sinal +) Subtrai-se uma constante (sinal –) Não tem correção aditiva (ausência de sinal)

Fonte: Duval (1988, p. 240).

No quadro 2.1 podemos observar que as modificações nos coeficientes da expressão algébrica (equação) geram modificações no esboço gráfico da reta e vice-versa. Assim, considerando a função $y = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$, temos que o coeficiente “ b ”, chamado de coeficiente linear¹⁷ indica a posição da reta no eixo dos “ y ” (ordenadas) e o coeficiente “ a ”, chamado de coeficiente angular¹⁸ indica o ângulo (a inclinação) que a reta forma com os eixos¹⁹.

Então, em se tratando da equação explícita $y = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$, representante algébrica do objeto matemático “função polinomial do 1º grau”, qualquer modificação nos coeficientes “ a ” e/ou “ b ” é responsável por modificações na reta que a representa no plano cartesiano e vice-versa. Os exemplos seguintes dão uma ideia do que foi preconizado

¹⁷ Duval chama apenas de “coeficiente”.

¹⁸ Também chamado por Duval apenas como “coeficiente”.

¹⁹ No trabalho de Duval pode-se perceber que ele não busca pela medida do ângulo no sentido anti-horário em relação ao eixo x , como normalmente se encontra em algumas bibliografias. Ele toma como referência a inclinação da reta $y = x$, caso o sentido da inclinação seja positivo, ou $y = -x$, caso seja negativo, e verifica se a inclinação da reta analisada a deixa mais próxima do eixo x , do eixo y ou sobre a bissetriz do quadrante. (NÉ, 2013, p. 46).

por Duval ao propor a interpretação global das propriedades figurais no estudo das retas.

Exemplos: Obter o gráfico das seguintes equações:

a) $y_1 = x$

b) $y_2 = -x$

c) $y_3 = -2x$

d) $y_4 = \frac{1}{2}x$

e) $y_5 = 2x + 1$

f) $y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$

Resoluções:

a) $y_1 = x$

Sabemos que a equação $y_1 = x$ representa uma função linear (polinomial do 1º grau), por se tratar de uma função $f: \square \rightarrow \square$, definida genericamente por $y_1 = ax$ e cuja representação gráfica é uma reta no plano cartesiano.

No entanto, nosso foco aqui não é o estudo da função, mas sim a representação gráfica do objeto matemático dado por $y_1 = x$ ²⁰, no que tange a conversão da linguagem algébrica para a linguagem gráfica e vice-versa, o que de acordo com o quadro 2.1 formulado por Duval (1988, p. 240), mostrado anteriormente, nos permite fazer um estudo das relações existentes entre as variáveis visuais e os valores de suas respectivas variáveis simbólicas, como pode ser observado no quadro 2.2:

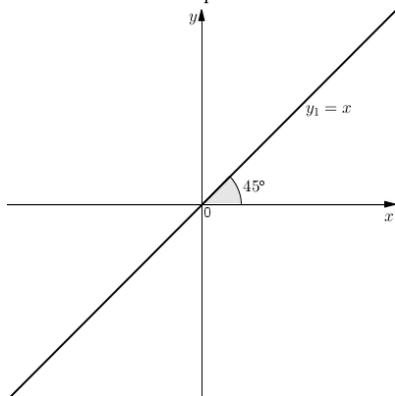
²⁰ Equação explícita cartesiana.

Quadro 2.2: Valores e variáveis visuais para $y_1 = x$ no plano cartesiano

Coefficientes	Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas
$a = 1$	Sentido da inclinação	Ascendente	$a = 1 > 0$
	Ângulo com os eixos	Partição simétrica (45°)	$ a = 1$
$b = 0$	Posição sobre o eixo	Corta na origem	Não tem correção aditiva

Fonte: Autores da pesquisa

Observe na figura 2.1 a representação gráfica do objeto matemático dado pela representação algébrica $y_1 = x$. É importante que se reconheça em ambos os sistemas semióticos que o objeto em questão é uma reta. Aqui, a conversão da representação algébrica em sua respectiva representação gráfica foi obtida diretamente com apoio do software Geogebra.

Figura 2.1: Gráfico de $y_1 = x$ no plano cartesiano

Fonte: Autores da pesquisa

Note que o fato de termos o valor $a = 1 > 0$ nos indica que a reta tem sentido de inclinação ascendente (quando se caminha da esquerda pra

direita) e corresponde a bissetriz²¹ dos quadrantes ímpares.

b) $y_2 = -x$

Uma analogia entre a equação deste item e a do anterior é muito importante para que se perceba uma das características relativas ao valor do coeficiente a . Aqui deve ficar claro que o sinal (+ ou -) desta unidade simbólica está diretamente atrelado ao sentido da inclinação, conforme pode ser observado no quadro 2.3:

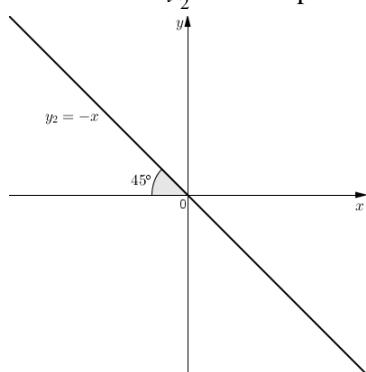
Quadro 2.3: Valores e variáveis visuais para $y_2 = -x$ no plano cartesiano

Coefficientes	Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas
$a = -1$	Sentido da inclinação	Descendente	$a = -1 < 0$
	Ângulo com os eixos	Partição simétrica (45°)	$ a = 1$
$b = 0$	Posição sobre o eixo	Corta na origem	Não tem correção aditiva

Fonte: Autores da pesquisa

Observe na figura 2.2 a representação gráfica do objeto matemático dado pela representação algébrica $y_2 = -x$. Aqui, a conversão da representação algébrica em sua respectiva representação gráfica também foi obtida diretamente com apoio do software Geogebra.

²¹ O conceito de bissetriz é emprestado da geometria e pode ser aproveitado desde já devido sua grande importância no estudo de funções inversas, como a relação existente entre as funções exponenciais e as logarítmicas, apresentadas no decorrer deste capítulo.

Figura 2.2: Gráfico de $y_2 = -x$ no plano cartesiano

Fonte: Autores da pesquisa

Note que o valor $a = -1 < 0$ caracteriza uma reta que tem sentido de inclinação descendente e corresponde a bissetriz dos quadrantes pares. Ao compararmos os gráficos apresentados nas figuras 2.1 e 2.2, podemos observar ainda que em ambos, a reta passa pela origem do sistema de coordenadas cartesianas, ou seja, o ponto $(0,0)$ pertence a ambas as retas.

c) $y_3 = -2x$

Chamamos atenção para o fato do valor da unidade simbólica $|a|$ estar associado ao ângulo que a reta forma com os eixos coordenados, conforme pode ser observado no quadro 2.1, criado por Duval (1988) e no exemplo exposto no quadro 2.4 a seguir.

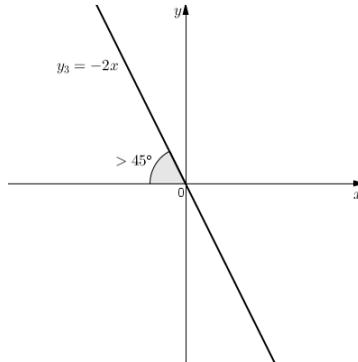
Quadro 2.4: Valores e variáveis visuais para $y_3 = -2x$ no plano cartesiano

Coefficientes	Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas
$a = -2$	Sentido da inclinação	Descendente	$a = -2 < 0$
	Ângulo com os eixos	Ângulo maior que 45°	$ a = 2 > 1$
$b = 0$	Posição sobre o eixo	Corta na origem	Não tem correção aditiva

Fonte: Autores da pesquisa

Na figura 2.3 temos a representação gráfica do objeto matemático dado pela representação algébrica $y_3 = -2x$, cuja conversão da representação algébrica para sua respectiva representação gráfica também foi obtida diretamente com apoio do software Geogebra.

Figura 2.3: Gráfico de $y_3 = -2x$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

Perceba no gráfico da figura 2.3 que o ângulo que a reta forma com o eixo das abscissas é maior que 45° (variável visual), o que está de acordo com o fato de o módulo do coeficiente angular ser maior que 1, ou seja, $|a| = 2 > 1$ (unidade simbólica).

Compare os gráficos das figuras 2.2 e 2.3. Podemos dizer que a reta representante de $y_2 = -x$ sofreu uma rotação, no sentido horário, em torno do ponto $(0, 0)$.

d) $y_4 = \frac{1}{2}x$

Poderíamos ter escrito a equação $y_4 = \frac{1}{2}x$ como $y_4 = 0,5x$. No

entanto, seja a primeira ou a segunda representação, temos que $|a| < 1$, o que de acordo com o que consta no quadro 2.1, define o ângulo entre a reta e o eixo dos x como sendo menor que 45° . Observe o quadro 2.5 e o compare com o gráfico da figura 2.4:

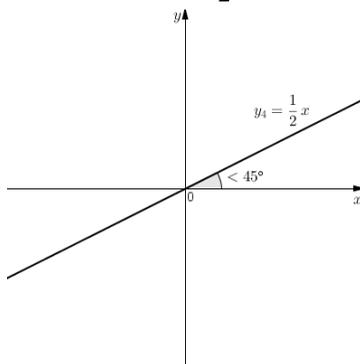
Quadro 2.5: Valores e variáveis visuais para $y_4 = \frac{1}{2}x$ no plano cartesiano

Coefficientes	Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas
$a = \frac{1}{2}$	Sentido da inclinação	Ascendente	$a = \frac{1}{2} > 0$
	Ângulo com os eixos	Ângulo menor que 45°	$ a = \frac{1}{2} < 1$
$b = 0$	Posição sobre o eixo	Corta na origem	Não tem correção aditiva

Fonte: Autores da pesquisa

Na figura 2.4 se pode visualizar a representação gráfica do objeto matemático dado pela representação algébrica $y_4 = \frac{1}{2}x$, cuja conversão da representação algébrica para sua respectiva representação gráfica foi mais uma vez obtida diretamente com apoio do software Geogebra.

Figura 2.4: Gráfico de $y_4 = \frac{1}{2}x$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

Uma comparação entre os gráficos das figuras 2.1 e 2.4 nos indica que a reta representante de $y_1 = x$ também sofreu uma rotação, no sentido horário, em torno do ponto $(0,0)$.

Os itens de “a” até “d” (acima) nos fazem concluir que para a equação explícita $y = ax + b$, quando temos $a \neq 0$ e $b = 0$, a reta que a representa no plano cartesiano passa pelo ponto $(0, 0)$, o que implica que para toda reta expressa por $y = ax, a \in \mathbb{R}^*$, já temos um ponto pertencente a esta reta, o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

e) $y_5 = 2x + 1$

Primeiramente, é importante perceber que o coeficiente linear é não nulo, ou seja, considerando a equação explícita $y = ax + b$, temos $a \neq 0$ e $b \neq 0$, o que de acordo com o quadro 2.1 nos permite concluir que a reta representante gráfica da equação $y_5 = 2x + 1$ não passa pela origem do sistema de coordenadas cartesianas. O desmembramento das relações existentes entre as variáveis visuais e os valores de suas respectivas variáveis simbólicas pode ser observado no quadro 2.6:

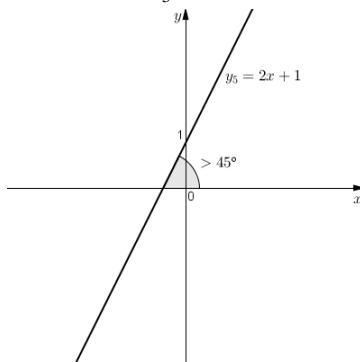
Quadro 2.6: Valores e variáveis visuais para $y_5 = 2x + 1$ no plano cartesiano

Coefficientes	Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas
$a = 2$	Sentido da inclinação	Ascendente	$a = 2 > 0$
	Ângulo com os eixos	Ângulo maior que 45°	$ a = 2 > 1$
$b = 1$	Posição sobre o eixo	Corta acima da origem	$+ 1$

Fonte: Autores da pesquisa

Note que temos $b = 1$, acompanhado do sinal $+$, o que de acordo com o quadro 2.1, implica que a reta intercepta o eixo das ordenadas 1 unidade acima do eixo das abscissas, ou seja, no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

No gráfico da figura 2.5 é apresentada a representação gráfica do objeto matemático dado pela representação algébrica $y_5 = 2x + 1$, cuja conversão da representação algébrica para sua respectiva representação gráfica foi obtida diretamente com apoio do software Geogebra.

Figura 2.5: Gráfico de $y_5 = 2x + 1$ no plano cartesiano

Fonte: Autores da pesquisa

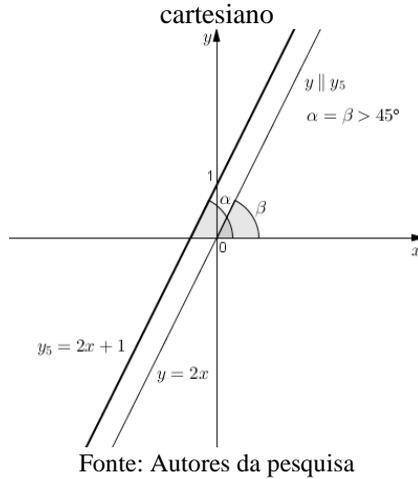
Embora Duval não tenha descrito em seu trabalho a respeito do artifício da translação, mencionado em várias pesquisas sobre esboço de curvas, chamamos à atenção para a importância em se perceber que a reta representante de $y_5 = 2x + 1$ corresponde a uma translação vertical para cima em 1 unidade da reta $y = 2x$, visto que ambas possuem coeficientes angulares iguais, o que caracteriza que as duas terão a mesma variável visual corresponde ao ângulo entre elas e o eixo dos x (eixo das abscissas), ou seja, as retas dadas por $y_5 = 2x + 1$ e $y = 2x$ são retas paralelas.

Ainda, no ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas temos que a ordenada é nula, ou seja, $y = 0$. A abscissa deste ponto de intersecção da reta com o eixo dos x pode ser obtida pelo “tratamento”:

$$y = ax + b \Rightarrow 0 = ax + b \Rightarrow -b = ax \Rightarrow -\frac{b}{a} = x$$

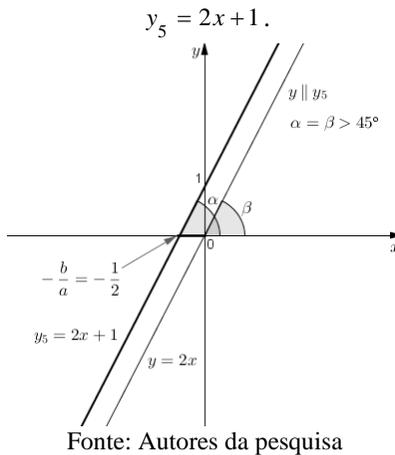
Na figura 2.6 pode ser verificado visualmente o que acabamos de expor a respeito deste paralelismo.

Figura 2.6: Paralelismo entre as retas $y = 2x$ e $y_5 = 2x + 1$ no plano



Note também que o deslocamento vertical da reta representante de $y_5 = 2x + 1$ em relação à reta dada por $y = 2x$, implica num deslocamento horizontal, neste caso, de $\frac{1}{2}$ unidades para a esquerda, pois afinal, está garantido o paralelismo como já comentado acima, o que pode ser visualizado graficamente na figura 2.7.

Figura 2.7: Intersecção com o eixo $y = 2x$ das retas $y = 2x$ e



$$f) \quad y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$$

No quadro 2.7 se pode observar o detalhamento das relações existentes entre as variáveis visuais e os valores de suas respectivas variáveis simbólicas para a equação $y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$.

Quadro 2.7: Valores e variáveis visuais para $y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$ no plano cartesiano

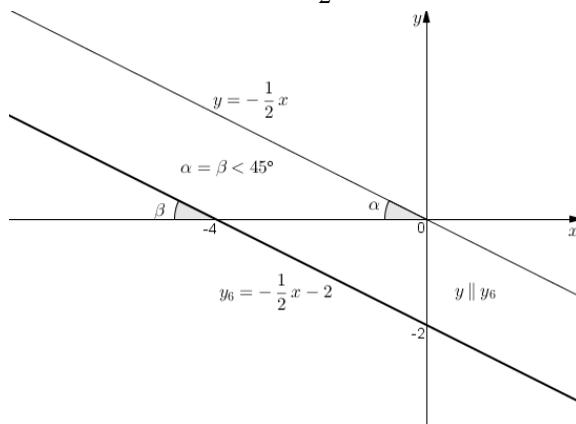
Coefficientes	Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas
$a = -\frac{1}{2}$	Sentido da inclinação	Descendente	$a = -\frac{1}{2} < 0$
	Ângulo com os eixos	Ângulo menor que 45°	$ a = \frac{1}{2} < 1$
$b = -2$	Posição sobre o eixo	Corta abaixo da origem	-2

Fonte: Autores da pesquisa

Agora temos $b = 2$, acompanhado do sinal $-$, o que de acordo com o quadro 2.1, implica que a reta intercepta o eixo das ordenadas 2 unidade abaixo do eixo das abscissas, ou seja, no ponto de coordenadas $(0, -2)$.

O gráfico da figura 2.8 mostra a representação gráfica do objeto matemático dado pela representação algébrica $y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$, cuja conversão foi obtida diretamente com apoio do software Geogebra.

Figura 2.8: Gráfico de $y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

A presença das duas retas na figura 2.8 é para que se perceba a translação vertical para baixo em 2 unidades da reta representante de

$y = -\frac{1}{2}x$, o que nos faz concluir que as retas dadas por $y = -\frac{1}{2}x$ e

$y_6 = -\frac{1}{2}x - 2$ são paralelas.

Os itens “e” e “f” discutidos anteriormente deixam de forma bem clara que o valor da unidade simbólica b , da equação $y = ax + b$ ($a \neq 0$) indica a posição da reta sobre os eixos, conforme estabelecido no quadro 2.1, criado por Duval (1988, p. 240).

Silva (2008, p. 133) detalha em sua dissertação um total de dezoito possibilidades de reta, com base na classificação de Duval (1988, p. 240), as expondo através de uma árvore de possibilidades, onde esboça o gráfico de cada uma dessas possibilidades.

O procedimento de interpretação global das propriedades figurais desenvolvido por Duval para o estudo das retas facilita a conversão da representação algébrica para a correspondente representação gráfica e vice-versa, pois associamos as variáveis gráficas às suas correspondentes unidades simbólicas, o que pode conduzir a um real e significativo entendimento das características do objeto matemático em questão, provenientes de cada um dos registros envolvidos.

Daqui para frente, com o objetivo de simplificar a leitura, nos referiremos ao procedimento de interpretação global das propriedades figurais apenas como “interpretação global”.

3.2 Alguns estudos sobre curvas

Seguindo o modelo de interpretação global de Duval para funções polinomiais do 1º grau, outros pesquisadores realizaram estudos que possibilitaram estender este procedimento para outros tipos de funções. Assim, teses, dissertações, artigos, entre outros, têm sido realizados no âmbito do referido procedimento, nos mais diferentes contextos. Alguns desses estudos tiveram como foco o esboço de curvas, direcionados a diferentes graus de ensino. O quadro 2.8 apresenta algumas dessas pesquisas, que também serviram de base teórica para este trabalho, no que tange ao estudo de conversões entre os registros algébricos e gráficos.

Quadro 2.8: Pesquisas sobre esboço de curvas que utilizaram a TRRS de Duval

Autor/Ano Publicação	Título	Categoria
MORETTI, Méricles Thadeu (2003)	A Translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais.	Artigo
SILVA, Madeline Odete (2008)	Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica.	Dissertação
LUIZ, Learcino dos Santos (2010)	Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias.	Dissertação

Fonte: Autores da pesquisa

A seguir, vamos expor os objetos de estudo e as principais características das pesquisas citadas no quadro 2.8:

1ª A Translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais.

No artigo, Moretti (2003) propõe a utilização de translações (horizontais e verticais) como recurso nas conversões da representação

algébrica para a representação gráfica das curvas representantes das parábolas. Para ele, utilizando este procedimento não é mais preciso obter a parábola através do artifício de tabela de pontos.

Para o autor, “as parábolas com equações gerais do tipo $y = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$), podem ser esboçadas a partir de deslocamentos (translações) de parábolas com vértice localizado na origem ($y = ax^2$)” (p. 153). Desta forma podemos perceber alterações na representação gráfica a partir de suas correspondentes alterações na representação algébrica (equação).

Os exemplos seguintes, desenvolvidos esquematicamente, nos mostram como obter o gráfico de algumas parábolas, sejam estas funções polinomiais do 2º grau ou não, usando os deslocamentos preconizados por Moretti:

Exemplos: Obter a representação gráfica das seguintes equações:

- a) $y_1 = 2x^2$
- b) $y_2 = 0,5x^2$
- c) $y_3 = -2x^2$
- d) $y_4 = 2x^2 + 1$
- e) $y_5 = 2x^2 - 1$
- f) $y_6 = x^2 + 4x + 4$
- g) $y_7 = x^2 - 4x + 4$
- h) $y_8 = x^2 - 2x$
- i) $y_9 = -3x^2 - 3x + 6$

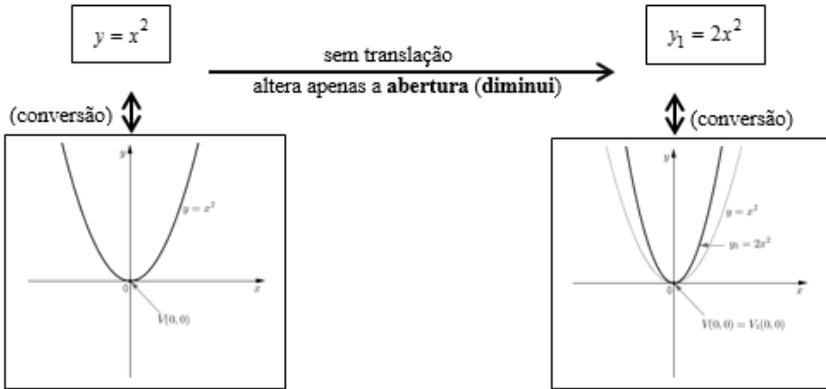
Resoluções²²:

a) $y_1 = 2x^2$

Para Moretti (2003), a curva $y = ax^2$ pode ser obtida a partir de uma tabela de pontos, a qual ele denomina de **curva base**.

²² Os gráficos constantes nas figuras desta seção foram obtidos com apoio do software Geogebra.

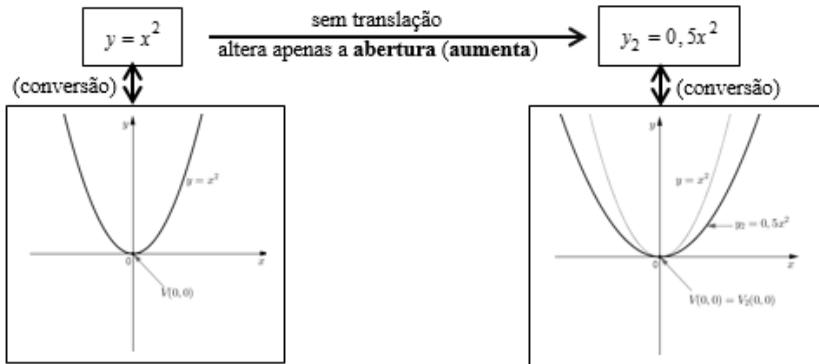
Figura 2.9: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_1 = 2x^2$)



Fonte: Autores da pesquisa

b) $y_1 = 0,5x^2$

Figura 2.10: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_2 = 0,5x^2$)



Fonte: Autores da pesquisa

O objetivo das curvas y_1 e y_2 obtidas nos itens “a” e “b” é mostrar o que ocorre com a curva quando $|a| > 1$ e $|a| < 1$, respectivamente, conforme descrito por Moretti (2003) em seu artigo, no que tange a “abertura” da parábola.

$$c) \quad y_3 = -2x^2$$

Figura 2.11: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica (Função: $y_3 = -2x^2$)



Fonte: Autores da pesquisa

O objetivo da curva y_3 obtida no item “c” é mostrar o que ocorre com a curva quando $a > 0$ e $a < 0$, conforme descrito por Moretti (2003) em seu artigo, no que tange a “concauidade” da parábola.

$$d) \quad y_4 = 2x^2 + 1$$

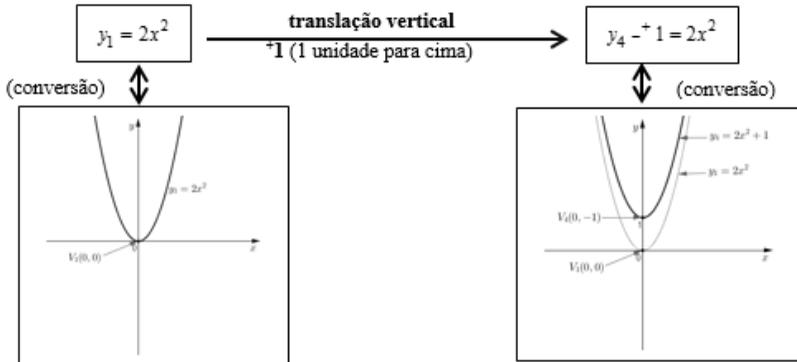
Aqui, primeiramente vamos nos ater ao seguinte tratamento:

$$y_4 = 2x^2 + 1 \quad \xrightarrow{\text{Tratamento}} \quad y_4^{-+} 1 = 2x^2$$

A nomenclatura que constantemente usaremos de agora em diante, em relação ao uso dos sinais + ou – no canto superior esquerdo do valor do coeficiente c , visa enfatizar a translação vertical da curva a ser traçada a partir da curva base. Se tivermos $^+ c$, implica uma translação vertical para cima; caso tenhamos a configuração $^- c$, caracteriza uma translação vertical para baixo.

Assim, vem:

Figura 2.12: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_4 = 2x^2 + 1$)

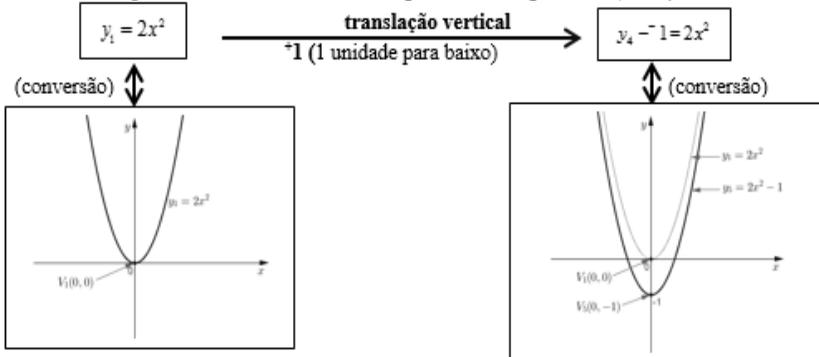


Fonte: Autores da pesquisa

e) $y_5 = 2x^2 - 1$

$y_4 = 2x^2 - 1$ ➔ Tratamento ➔ $y_4 + 1 = 2x^2$

Figura 2.13: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função:



Fonte: Autores da pesquisa

f) $y_6 = x^2 + 4x + 4$

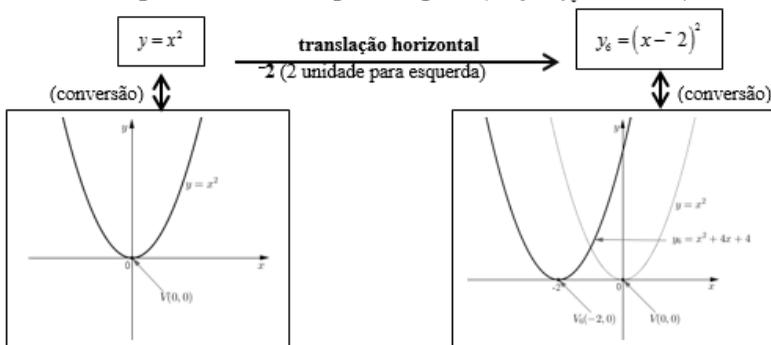
Aqui, primeiramente perceba que a expressão pode ser escrita como um trinômio quadrado perfeito:

$$y_6 = x^2 + 4x + 4 \quad \xrightarrow{\text{Tratamento}} \quad y_6 = (x+2)^2 = (x-(-2))^2 = (x-^{-}2)^2$$

Em $y_6 = (x-^{-}2)^2$, a nomenclatura $^{-}2$ (2 acompanhado do sinal $-$ no canto superior esquerdo) agora tem o objetivo de enfatizar a translação horizontal da curva a ser traçada a partir da curva base. Para este caso, denota uma translação horizontal de 2 unidades para a esquerda. Caso tivéssemos $^{+}2$, corresponderia a uma translação horizontal de 2 unidades para a direita.

Assim, vem:

Figura 2.14: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica (Função: $y_6 = x^2 + 4x + 4$)



Fonte: Autores da pesquisa.

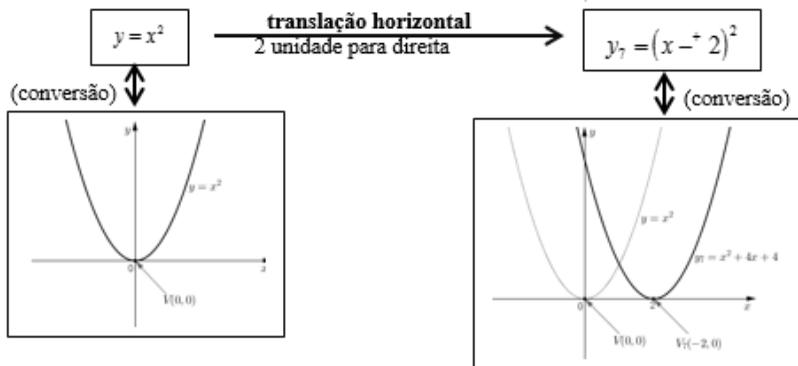
g) $y_7 = x^2 - 4x + 4$

Note que a expressão também pode ser escrita como um trinômio quadrado perfeito:

$$y_7 = x^2 - 4x + 4 \quad \xrightarrow{\text{Tratamento}} \quad y_7 = (x-2)^2 = (x-(+2))^2 = (x-^{+}2)^2$$

Então, temos que $y_7 = x^2 - 4x + 4$ e $y_7 = (x-^{+}2)^2$ são representações algébricas da mesma parábola.

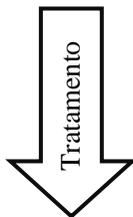
Figura 2.15: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_7 = x^2 - 4x + 4$)



Fonte: Autores da pesquisa.

A proposta de Moretti para a equação completa $y = ax^2 + bx + c$ e que não se enquadra nos casos apresentados anteriormente está sintetizada no esquema a seguir:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b, c \in \mathbb{R})$$



$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

⇓

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{(-b^2 + 4ac)}{4a} \Rightarrow y - \frac{(-b^2 + 4ac)}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \Rightarrow y + \frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

⇓

$$y - \underbrace{\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}}_{y_v} = a \left(x - \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{x_v} \right)^2$$

Note que no tratamento mostrado no esquema acima obtemos diretamente o vértice da parábola, ou seja, $V\left(\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$.

h) $y_8 = x^2 - 2x$

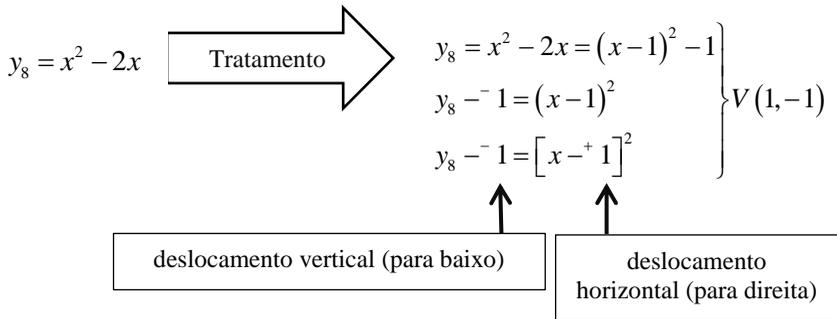
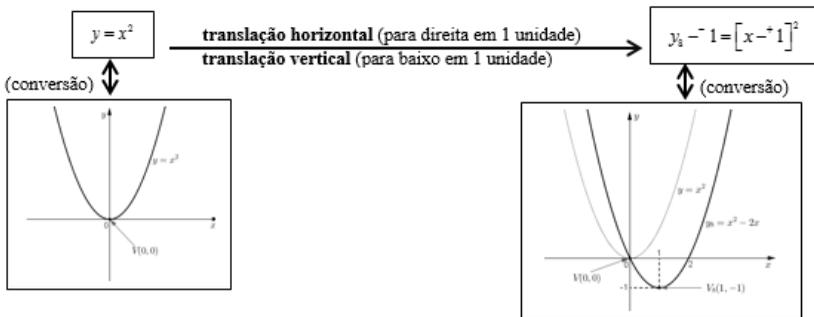


Figura 2.16: Conversão algébrica ↔ gráfica (Função: $y_8 = x^2 - 2x$)



Fonte: Autores da pesquisa.

i) $y_9 = -3x^2 - 3x + 6$

$y_9 = -3x^2 - 3x + 6$

Tratamento

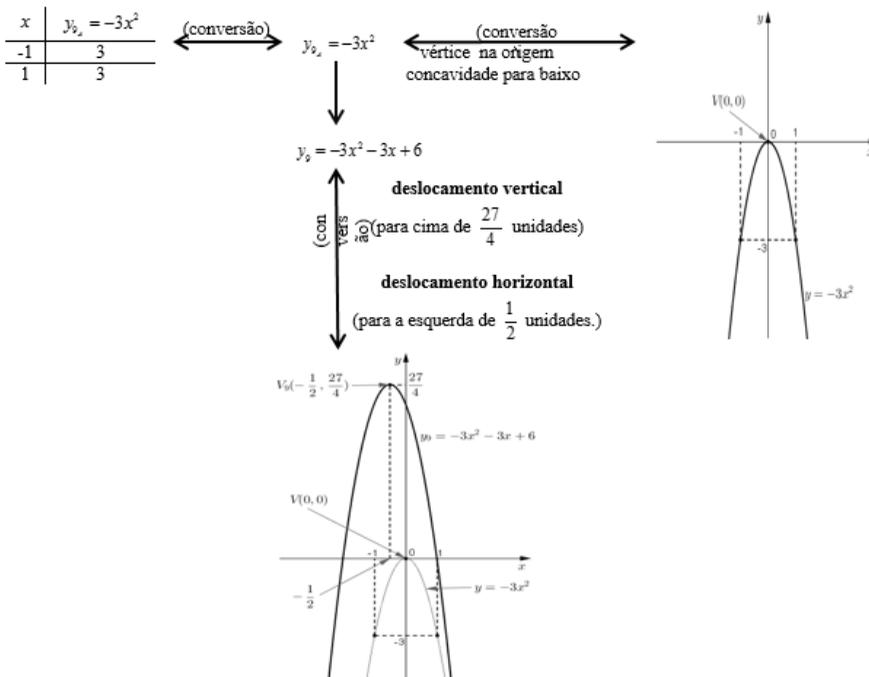
$$\left. \begin{aligned}
 y_9 &= -3x^2 - 3x + 6 \\
 y_9 &= -3(x^2 + x - 2) \\
 y_9 &= -3\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2\right] \\
 y_9 - \left(+\frac{27}{4}\right) &= -3\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 \\
 y_9 - \frac{27}{4} &= -3\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2
 \end{aligned} \right\} V\left(-\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$$

Note que ao fazermos o tratamento algébrico de $y_9 = -3x^2 - 3x + 6$, obtivemos o vértice da parábola que a representa, ou seja, $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$, onde podemos ver que haverá um deslocamento vertical para cima de $\frac{27}{4}$ unidades e um deslocamento horizontal para a esquerda de $\frac{1}{2}$ unidades.

Perceba também que $a = -3 < 0$, o que implica que a parábola terá concavidade voltada para baixo. Assim, construindo uma tabela de pontos para $y_9 = -3x^2 - 3x + 6$ e sua respectiva representação gráfica, vem:

Figura 2.17: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica (Função:

$$y_9 = -3x^2 - 3x + 6)$$



Fonte: Autores da pesquisa.

A proposta de Moretti (2003) para o esboço das parábolas abrangem tanto as parábolas representantes das funções polinomiais do 2º grau, quanto parábolas que não se constituem em funções no plano cartesiano, ou seja, parábolas cujas concavidades são voltadas para a direita ou para a esquerda e cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo y .

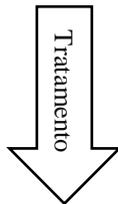
Isto nos faz concluir que também podemos usar translações para obter as curvas dadas por equações explícitas da forma $x = ay^2 + by + c$ ($a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$).

Além disso, é importante salientar aqui que mesmo para as parábolas que não representam uma função $y = f(x)$ podemos aplicar o processo de interpretação global, evitando a associação “ponto \leftrightarrow par ordenado”, e sim uma associação “variável visual \leftrightarrow unidade significativa (algébrica)”. O exemplo seguinte mostra o que acabamos de comentar.

Exemplo: Obter o gráfico da curva representada pela equação $y^2 - 4y + 8x - 20 = 0$.

Resolução:

$$y^2 - 4y + 8x - 20 = 0$$



$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 8x - 20 = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{8}(y^2 - 4y - 20) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}[(y - 2)^2 - 4 - 20] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 3) &= -\frac{1}{8}(y - 2)^2 \Rightarrow V_1(3, 2) \end{aligned}$$

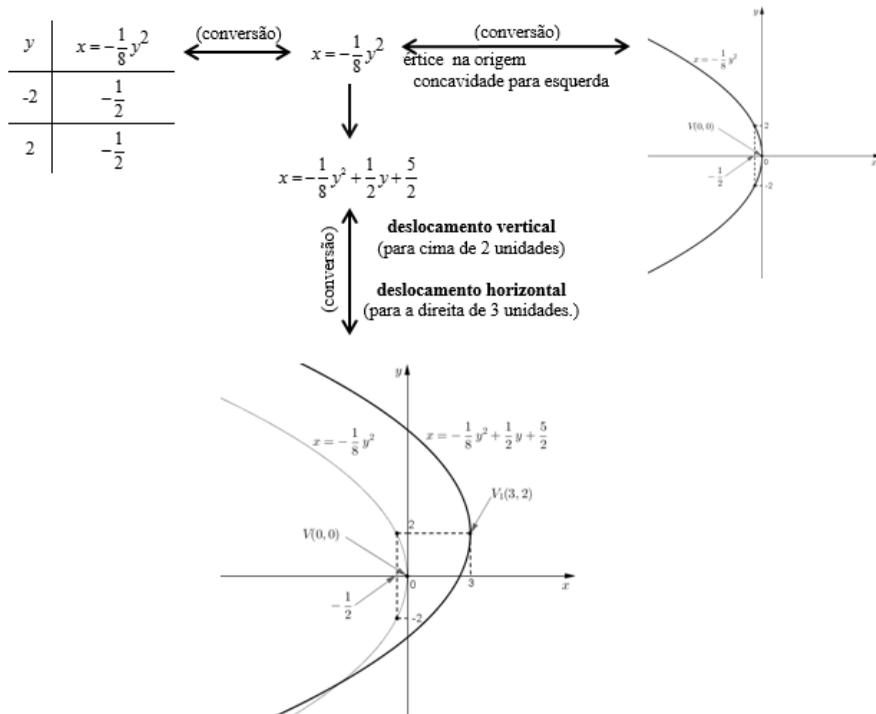
Ao fazermos o tratamento anterior, vemos em $x = -\frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$

que $a = -\frac{1}{8} < 0$, o que implica que a parábola terá concavidade voltada

para a esquerda. Também podemos verificar que terá seu vértice em $V_1(3,2)$. Assim, vem:

Figura 2.18: Conversão algébrica ↔ gráfica (Curva:

$$y^2 - 4y + 8x - 20 = 0)$$



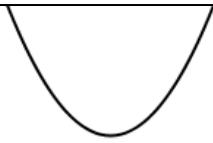
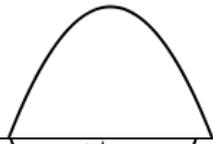
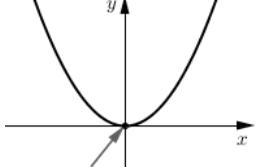
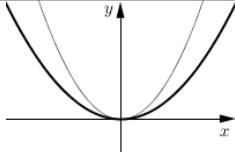
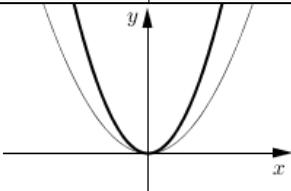
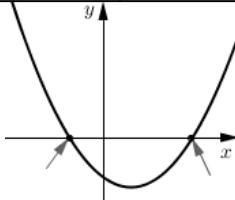
Fonte: Autores da pesquisa

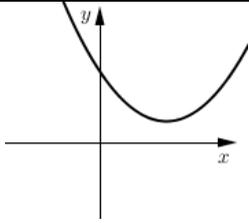
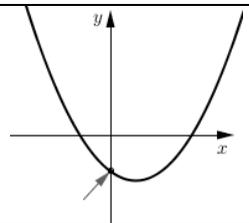
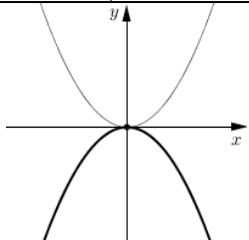
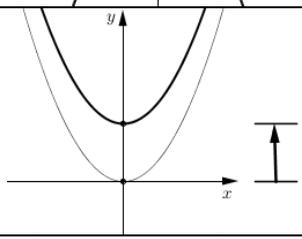
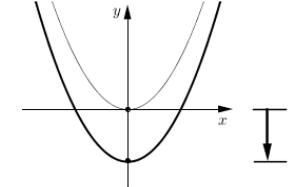
Os exemplos desenvolvidos neste capítulo em relação ao esboço do objeto parábola foram desenvolvidos de maneira diferente ao que costumamos observar no estudo deste objeto no ensino médio, inclusive difere também da forma como é apresentado na maioria dos livros didáticos. Da maneira proposta por Moretti (2003), percebem-se claramente as correspondências entre os elementos da equação e suas propriedades gráficas.

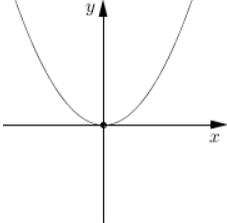
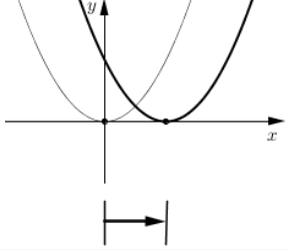
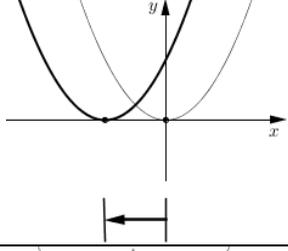
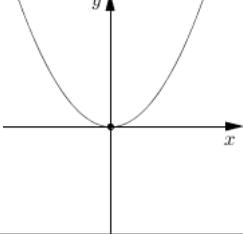
O quadro 2.9 (não sintetizado no estudo de Moretti (2003)) mostra as características figurais em relação aos coeficientes da escrita algébrica

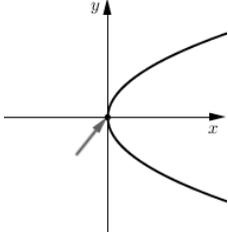
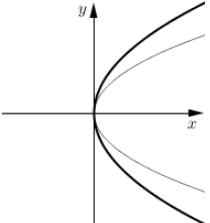
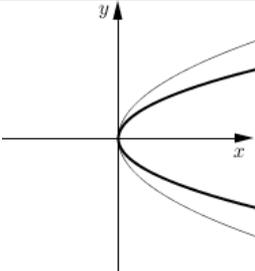
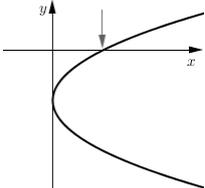
das parábolas cujas equações algébricas são dadas por $y = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b, c \in \mathbb{R}$) e $x = ay^2 + by + c$ ($a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b, c \in \mathbb{R}$).

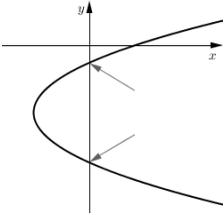
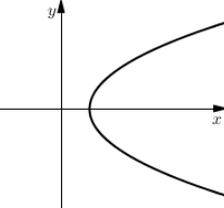
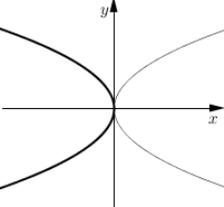
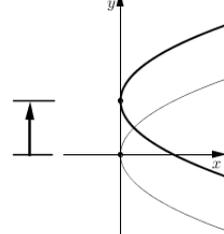
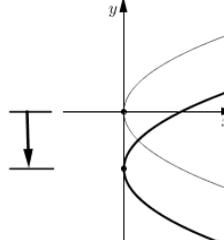
Quadro 2.9: Características (visuais e simbólicas) das parábolas dadas por equações cartesianas

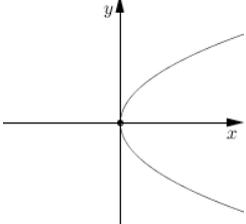
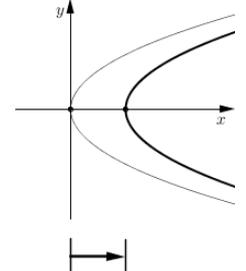
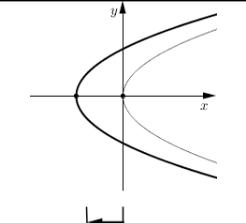
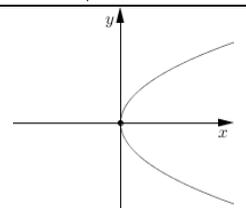
Objeto	Unidades significativas (linguística)	Unidades significativas (simbólica)	Unidades significativas (gráfica)
Parábolas de equação $y = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b, c \in \mathbb{R}$)	Concavidade voltada para cima (c.v.c.)	$a > 0$	
	Concavidade voltada para baixo (c.v.b.)	$a < 0$	
	Vértice na origem do sistema cartesiano [considerando c.v.c.]	$b = c = 0$ $[a > 0]$	
	Parábola com abertura maior [considerando c.v.c.]	$ a < 1$ $[a > 0]$	
	Parábola com abertura menor [considerando c.v.c.]	$ a > 1$ $[a > 0]$	
	Intercepta o eixo dos "x" [considerando c.v.c.]	$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$ e	

		$\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$ $a > 0$	
<p>Não intercepta o eixo dos “x”</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$b^2 - 4ac < 0$ $[a > 0]$		
<p>Intercepta o eixo dos “y”</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$(0, c)$ $[a > 0]$		
<p>Simetria em relação ao eixo dos “x”</p>	$b = c = 0 \begin{cases} y = ax^2 \\ y = -ax^2 \end{cases}$		
<p>Deslocamento vertical (para cima)</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$y - y_v = a(x - x_v)^2$ $y_v > 0$ $[a > 0]$		
<p>Deslocamento vertical (para baixo)</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$y - y_v = a(x - x_v)^2$ $y_v < 0$ $[a > 0]$		

	<p>Não há deslocamento vertical</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$y - y_V = a(x - x_V)^2$ $y_V = 0$ $[a > 0]$	
	<p>Deslocamento horizontal (para direita)</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$y - y_V = a(x - x_V)^2$ $x_V > 0$ $[a > 0]$	
	<p>Deslocamento horizontal (para esquerda)</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$y - y_V = a(x - x_V)^2$ $x_V < 0$ $[a > 0]$	
	<p>Não há deslocamento horizontal</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$y - y_V = a(x - x_V)^2$ $x_V = 0$ $[a > 0]$	
<p>Parábolas de equação</p> $x = ay^2 + by + c$	<p>Concavidade voltada para direita (c.v.d.)</p>	$a > 0$	

$(a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b, c \in \mathbb{R})$	Concavidade voltada para esquerda (c.v.e.)	$a < 0$	
	Vértice na origem do sistema cartesiano [considerando c.v.d.]	$b = c = 0$ $[a > 0]$	
	Parábola com abertura maior [considerando c.v.d.]	$ a < 1$ $[a > 0]$	
	Parábola com abertura menor [considerando c.v.d.]	$ a > 1$ $[a > 0]$	
	Intercepta o eixo dos "x" [considerando c.v.d.]	$(c, 0)$ $[a > 0]$	

<p>Intercepta o eixo dos “ y ”</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$\left(0, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$ <p>e</p> $\left(0, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$ $a > 0$	
<p>Não intercepta o eixo dos “ y ”</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$b^2 - 4ac < 0$ $[a > 0]$	
<p>Simetria em relação ao eixo dos “ y ”</p>	$b = c = 0 \begin{cases} x = ay^2 \\ x = -ay^2 \end{cases}$	
<p>Deslocamento vertical (para cima)</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$x - x_v = a(y - y_v)^2$ $y_v > 0$ $[a > 0]$	
<p>Deslocamento vertical (para baixo)</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$x - x_v = a(y - y_v)^2$ $y_v < 0$ $[a > 0]$	

<p>Não há deslocamento vertical</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$x - x_v = a(y - y_v)^2$ $y_v = 0$ $[a > 0]$	
<p>Deslocamento horizontal (para direita)</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$x - x_v = a(y - y_v)^2$ $x_v > 0$ $[a > 0]$	
<p>Deslocamento horizontal (para esquerda)</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$x - x_v = a(y - y_v)^2$ $x_v < 0$ $[a > 0]$	
<p>Não há deslocamento horizontal</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$x - x_v = a(y - y_v)^2$ $x_v = 0$ $[a > 0]$	

Fonte: Autores da pesquisa.

No artigo de Moretti (2003) podemos constatar que o artifício da translação no esboço das curvas correspondentes à família das parábolas foge ao que Duval (2009) chama de procedimento por pontos.

Dessa forma, podemos dizer que o procedimento utilizado caracteriza-se com o que Duval (2009) nomeia como “interpretação global das propriedades figurais”, conforme expusemos no capítulo anterior, pois se baseia no uso de operações em um dos registros verificando as modificações em outro, no caso, algébrico e gráfico, o que

pode ser observado na sinopse apresentada no quadro 2.9, onde é possível estabelecer relações entre as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades simbólicas na expressão algébrica.

Outro fator importante é que as parábolas transladadas não modificam seu formato, pois apenas se movimentam no plano, o que nos remete a pensar na movimentação por translação de outras curvas planas, tais como as curvas trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e as cônicas.

Em relação às curvas senóides, cossenóides, exponenciais e logarítmicas, Silva (2008) utiliza entre seus referenciais o trabalho de Duval (1998) feito para o estudo da reta e também o estudo feito por Moretti (2003) para as parábolas, onde aborda o esboço de curvas estabelecendo as relações entre as propriedades figurais e a representação algébrica para as funções seno, cosseno, exponencial e logarítmica, objetos matemáticos trabalhados também no ensino médio, que apresentamos na seção a seguir.

2ª Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica.

Em sua dissertação Silva (2008) utiliza entre seus referenciais o trabalho de Duval (1998) feito para o estudo da reta e também o estudo feito por Moretti (2003) para as parábolas. A autora aborda o esboço de curvas estabelecendo as relações entre as propriedades figurais e a representação algébrica para as funções seno, cosseno, exponencial e logarítmica, objetos matemáticos trabalhados também no ensino médio.

A autora toma para cada uma das funções analisadas uma curva chamada de curva base e, a partir delas é que serão aplicados os tratamentos característicos de cada uma. De certa forma, ela utiliza o mesmo modelo de Moretti, que utilizava a curva $y = ax^2$ ($a \neq 0$), como base ao aplicar simetria e translação para obter outras curvas da família das parábolas.

O quadro 2.10 mostra o formato das equações analisadas e as características consideradas pela autora ao investigar quais modificações nos coeficientes das referidas equações implicam alterações em seus correspondentes registros gráficos.

Quadro 2.10: Equações e características das curvas trigonométricas analisadas por Silva (2008)

Função	Formato	Equação	Elementos Característicos
Função Seno	Equação curva base	$y = \text{sen } x$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Domínio; ✓ Imagem; ✓ Periodicidade; ✓ Amplitude; ✓ Paridade (Função Ímpar); ✓ Simetria; ✓ Translação
	Equação geral	$y = \pm a + b \text{sen}(kx \pm c)$	
Função Cosseno	Equação curva base	$y = \text{cos } x$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Domínio; ✓ Imagem; ✓ Periodicidade; ✓ Amplitude; ✓ Paridade (Função Par); ✓ Simetria; ✓ Translação
	Equação geral	$y = \pm a + b \text{cos}(kx \pm c)$	
Função Exponencial	Equação curva base	$y = a^x (a \in \mathbb{R}, a \neq 1)$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Domínio; ✓ Imagem; ✓ Simetria; ✓ Translação
	Equação geral	$y = a^{x \pm d} \pm b (a \in \mathbb{R}, a \neq 1)$	
Função Logarítmica	Equação curva base	$y = \log_a x (a \in \mathbb{R}^*_+, a \neq 1)$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Domínio; ✓ Imagem; ✓ Função Inversa ✓ Simetria; ✓ Translação
	Equação geral	$y = b + \log_a (x+d) (a, b, d \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1)$	

Fonte: Autores da pesquisa.

Por sua vez, o quadro 2.11 apresenta os resultados obtidos no estudo da referida autora para as curvas senóides, onde podemos verificar suas conclusões no que tange aos valores das variáveis agregados a sua representação simbólica e suas respectivas características em relação às variáveis visuais.

Quadro 2.11: Características das senóides.

Coeficiente	Expressão (unidades da escrita algébrica)	Curva (variáveis visuais)
Curva base: $y = \text{sen } x$		
$b = k = 1$ $a = c = 0$	Os coeficientes não aparecem	<ul style="list-style-type: none"> • Amplitude 2, intervalo de imagem $[-1, 1]$; • Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a 2π; • Não há translações; • O ponto $(0,0)$ pertence à curva; • A curva é simétrica em relação à origem do sistema cartesiano.
Curva geral: $y = \pm a + b \text{sen}(kx \pm c); a, b, c, k \in \mathbb{R}$		
b	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude $2b$, intervalo imagem $[-b, b]$.
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude $ 2b $, intervalo imagem $[b, -b]$, curva simétrica em relação ao eixo x àquela que apresenta coeficiente b positivo.
k	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{k}$.
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{ k }$; Curva simétrica em relação ao eixo x àquela que apresenta coeficiente k positivo.
a	Positivo: $+a$ (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo y de a unidades para cima em relação à senóides onde $a = 0$. Modificação do intervalo imagem para $[-b+a, b+a]$ se $b > 0$ ou para $[b+a, -b+a]$ se $b < 0$.
	Negativo: $-a$ (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo y de a unidades para baixo em relação à senóides onde $a = 0$. Modificação do intervalo imagem para $[-b-a, b-a]$ se $b > 0$ ou para $[b-a, -b-a]$ se $b < 0$.
c	Positivo: $+c$ (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo x de $\left \frac{c}{k}\right $ unidades para a direita em relação à senóides onde $c = 0$.
	Negativo: $-c$ (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo x de $\left \frac{c}{k}\right $ unidades para a esquerda em relação à senóides onde $c = 0$.

Fonte: Silva (2008, p. 109).

A nomenclatura usada pela autora em relação ao uso dos sinais + e – no canto superior esquerdo dos valores dos coeficientes a e c , segundo ela, visam enfatizar as translações horizontais e verticais da curva a ser traçada a partir da curva base.

Similarmente ao que foi feito para as curvas senóides, foi desenvolvido na dissertação analisada o mesmo procedimento para o estudo das curvas cossenóides, cujos resultados relativos às alterações visuais no gráfico decorrentes das alterações nos coeficientes das equações podem ser visualizados no quadro 2.12:

Quadro 2.12: Características das cossenóides.

Coeficiente	Expressão (unidades da escrita algébrica)	Curva (variáveis visuais)
Curva base: $y = \cos x$		
$b = k = 1$ $a = c = 0$	Os coeficientes não aparecem	<ul style="list-style-type: none"> • Amplitude 2, intervalo de imagem $[-1, 1]$; • Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a 2π; • Não há translações; • O ponto $(0,1)$ pertence à curva; • A curva é simétrica em relação à origem do sistema cartesiano.
Curva geral: $y = \pm a + b \cos(kx \pm c)$; $a, b, c, k \in \mathbb{R}$		
b	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude $2b$, intervalo imagem $[-b, b]$.
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Amplitude $ 2b $, intervalo imagem $[b, -b]$, curva simétrica em relação ao eixo x àquela que apresenta coeficiente b positivo.
k	Positivo: Ausência do sinal +; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{k}$.
	Negativo: Presença do sinal -; Presença do valor numérico desde que seja diferente de 1.	Período (comprimento do intervalo de repetição da curva) igual a $\frac{2\pi}{ k }$; Curva simétrica em relação ao eixo x àquela que apresenta coeficiente k positivo.
a	Positivo: + a (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo y de a unidades para cima

		em relação à cossenóide onde $a = 0$. Modificação do intervalo imagem para $[-b+a, b+a]$ se $b > 0$ ou para $[b+a, -b+a]$ se $b < 0$.
	Negativo: $-a$ (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo y de a unidades para baixo em relação à senóides onde $a = 0$. Modificação do intervalo imagem para $[-b-a, b-a]$ se $b > 0$ ou para $[b-a, -b-a]$ se $b < 0$.
c	Positivo: $+c$ (presença do coeficiente com o sinal +).	Translação no eixo x de $\left \frac{c}{k} \right $ unidades para a direita em relação à senóides onde $c = 0$.
	Negativo: $-c$ (presença do coeficiente com o sinal -).	Translação no eixo x de $\left \frac{c}{k} \right $ unidades para a esquerda em relação à senóides onde $c = 0$.

Fonte: Silva (2008, p. 110-111).

Silva (2008) expõe que “essa forma de proceder, considerando as propriedades figurais da curva, possibilita a sua visualização como um todo, reforçando a relação entre o esboço e sua expressão algébrica e não entre a curva e alguns pontos.” (p.111)

O esboço de curvas das funções dos tipos senóide e cossenóide apresentado buscou considerar propriedades figurais das curvas associando variáveis visuais das mesmas (amplitude, período, simetria...) aos coeficientes das expressões algébricas, procurando mostrar que tipo de alterações na curva eram provocadas por variações nos coeficientes de suas expressões. (SILVA, 2008, p. 108).

Os exemplos seguintes, desenvolvidos esquematicamente, nos mostram como obter o gráfico de algumas curvas senóides e cossenóides, usando os elementos preconizados por Silva:

Exemplos: Obter o gráfico das curvas representadas pelas seguintes equações explícitas:

$$a) \quad y = 1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{b) } y = -2 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Resoluções:

As curvas solicitadas correspondem a uma senóide e cossenóide, respectivamente. Obteremos o seu esboço gráfico considerando para ambas o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

$$\text{a) } y = 1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = 1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$



$$y = 1 + 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

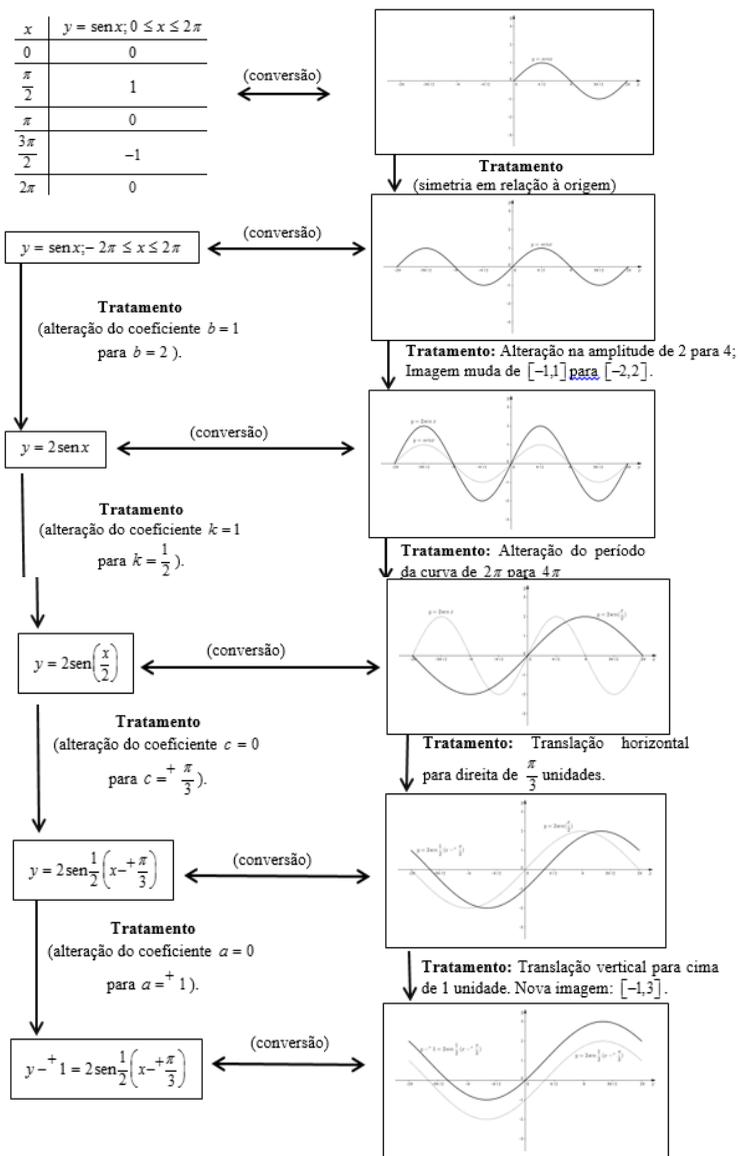
$$y - 1 = 2\text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y - 1 = 2\text{sen}\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

No formato obtido a partir do tratamento algébrico realizado, fica mais nítido o reconhecimento dos coeficientes da equação geral $y = \pm a + b\text{sen}(kx \pm c)$; $a, b, c, k \in \mathbb{R}$, no que tange às ações de cada um deles ao compararmos com os valores dos coeficientes da curva base $y = \text{sen } x$.

Figura 2.19: Conversão algébrica ↔ gráfica da Curva:

$$y - 1 = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

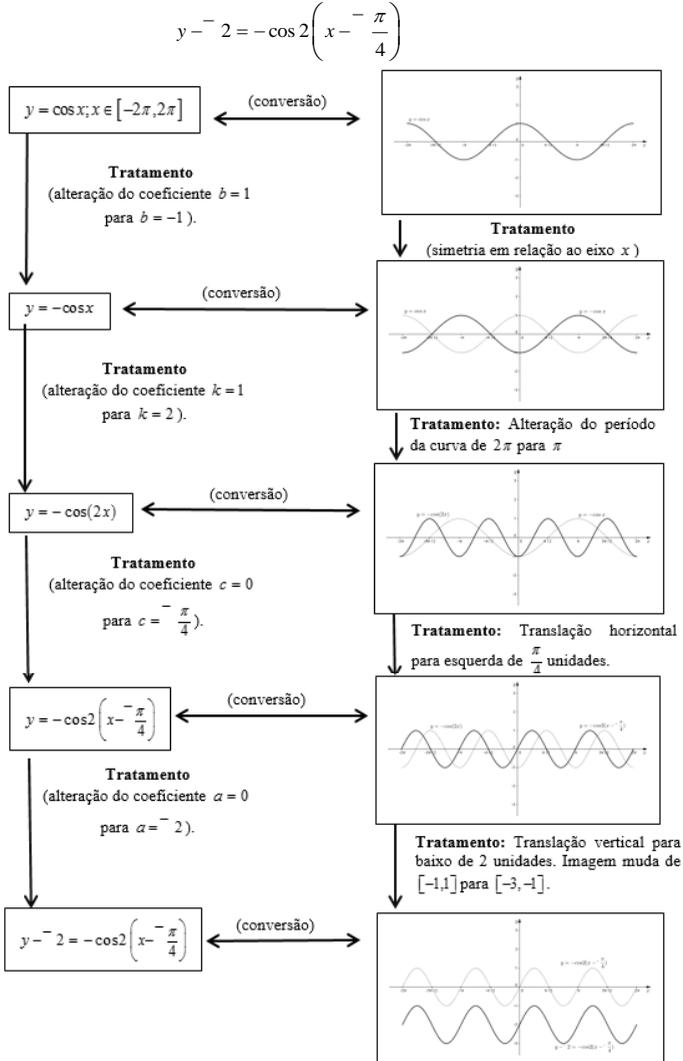


Fonte: Autores da pesquisa.

b) $y = -2 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ ➔ $y - 2 = -\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Tratamento Algébrico

Figura 2.20: Conversão algébrica ↔ gráfica da Curva:



Fonte: Autores da pesquisa.

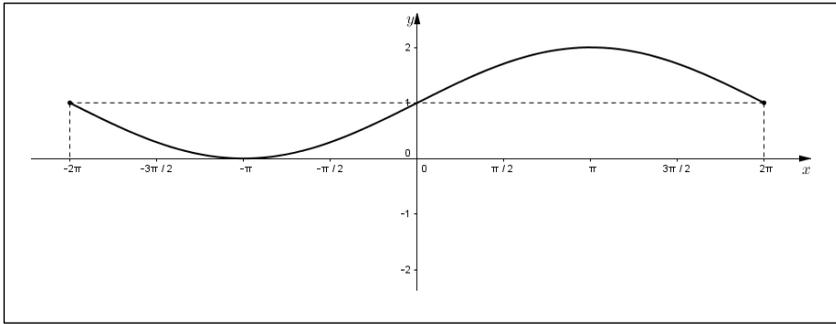
É importante que se perceba que o esboço das curvas representantes das funções seno e cosseno, tal como foi desenvolvido acima, consiste em considerar propriedades figurais das curvas, associando suas variáveis visuais aos coeficientes das equações explícitas que as representam algebricamente, sempre no intuito de verificar que tipos de modificações gráficas eram provenientes das alterações executadas nos coeficientes das equações.

Essa forma de proceder, considerando as propriedades figurais da curva, possibilita a sua visualização como um todo, reforçando a relação entre o esboço e sua expressão algébrica e não entre a curva e alguns pontos. Duval (2009) preconiza esta forma de trabalhar o esboço de curvas por ser ela a que favorece a conversão no sentido inverso, ou seja, à compreensão de maneira qualitativa do que ocorre com seus coeficientes e uma leitura correta do gráfico. Além disso, é possível ainda, a partir do gráfico se chegar à expressão algébrica (desde que sejam conhecidos alguns valores numéricos). (SILVA, 2008, p. 111).

Ressaltamos na citação acima o trecho onde diz: “... é possível ainda, a partir do gráfico se chegar à expressão algébrica (desde que sejam conhecidos alguns valores numéricos).” Então, a partir de um determinado gráfico, considerando propriedades figurais da curva podemos obter sua representação algébrica, desde que alguns valores estejam disponíveis. O exemplo seguinte mostra essa situação.

Exemplo: Obter a equação que representa a curva da figura 2.21.

Figura 2.21: Conversão gráfica \leftrightarrow algébrica para determinação da equação da curva



Fonte: Autores da pesquisa.

Resolução:

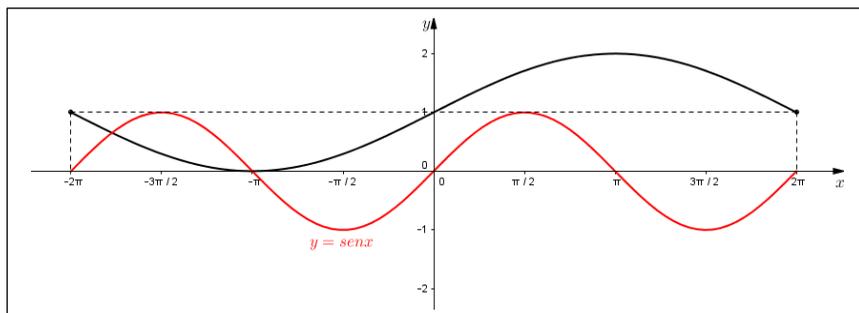
Primeiramente, perceba que a curva apresentada na figura 2.21 tem a forma de uma senóide ou cossenóide.

Aqui, vamos considerá-la como sendo uma senóide. No entanto, salientamos que poderíamos considerá-la uma cossenóide o que conduziria a uma outra equação para a mesma curva.

Note que o período é 4π e a amplitude é 2, visto que a imagem é $[0, 2]$, o que denota que houve um deslocamento vertical para cima de 1 unidade em relação a curva base considerada, $y = \sin x$.

Esboçando no mesmo gráfico a senóide representante da curva base $y = \sin x$, conforme pode ser visualizado na figura 2.22, poderemos então estabelecer algumas comparações.

Figura 2.22: Conversão gráfica \leftrightarrow algébrica para determinação da equação da curva senóide



Fonte: Autores da pesquisa.

Uma análise comparativa entre os coeficientes da curva na qual desconhecemos a equação e os coeficientes da curva base $y = \text{sen } x$ pode ser observada no quadro 2.21:

Quadro 2.13: Comparação entre os coeficientes das senóides

Coeficiente	Curva base $y = \text{sen } x$	Observação proveniente da comparação entre as duas curvas	Curva desconhecida $y = \pm a + b \text{sen } x (kx \pm c)$
a	0	A curva desconhecida está deslocada verticalmente em 1 unidade para cima em relação a curva base.	$+1$
k	1	O período da curva passou de 2π para 4π , ou seja, o período dobrou o que significa que k fica reduzido a sua metade.	$\frac{1}{2}$
c	0	Não houve deslocamento horizontal ou houve deslocamento horizontal para direita de 2π . No caso de um deslocamento horizontal de $+2\pi$, seria necessário uma simetria em relação ao eixo dos x .	0 ou $+2\pi$
b	1	Não havendo deslocamento horizontal não temos alteração para este coeficiente; caso haja deslocamento horizontal de 2π , fica alterado em sinal.	1 ou -1

Fonte: Autores da pesquisa.

Levando em consideração os dados obtidos no quadro acima, podemos escrever a “equação geral” da referida curva na qual desconhecemos sua equação assim:

$$\underbrace{y - 1 = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}_{y=1+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{y - 1 = -\operatorname{sen}\left[\left(\frac{1}{2}\right)(x - 2\pi)\right]}_{y=1-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}-\pi\right)}$$

Logo, concluímos que a curva da figura 2.21 é uma senóide de equação $y = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ ou $y = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$.

Dando continuidade ao estudo realizado por Silva, vamos agora expor a respeito do que foi concluído pela autora para as curvas exponenciais e logarítmicas.

Para as funções exponenciais, a autora considerada as curvas exponenciais cujas equações são as mais comuns de se encontrar nos livros didáticos de matemática do ensino médio. São elas, $y = a^{kx}$, $y = a^{x+d}$ e $y = b + a^x$, com $b, k, d \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Considera neste caso como curva base para obter as demais curvas desse grupo de exponenciais a curva de equação explícita $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$.

O quadro 2.14 apresenta os resultados obtidos no estudo feito pela referida autora para as curvas exponenciais tratadas por ela, onde também podemos verificar suas conclusões no que tange aos valores das variáveis agregados a sua representação simbólica e suas respectivas características em relação às variáveis visuais.

Quadro 2.14: Equações e características das curvas exponenciais analisadas por Silva (2008)

Equação Explícita	Coefficientes	Curva (variáveis visuais)
$y = a^x$	$a \in \mathbb{R}, a > 1$	Curva base: obtidas por tabela de pontos
$y = a^x$	$a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1$	Obtidas por simetria em relação ao eixo y , a partir da curva da exponencial com base inversa.
$y = -\left(a^x\right)$	$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	Obtidas por simetria em relação ao eixo x , a partir da curva $y = a^x$.
$y = a^{x-d}$	$a, d \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$	Obtidas por translação horizontal de d unidades para a esquerda da curva base $y = a^x$.
$y = a^{x+d}$	$a, d \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$	Obtidas por translação horizontal de d unidades para a direita da curva base $y = a^x$.
$y - b = a^x$	$a, b \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$	Obtidas por translação vertical de b unidades para cima da curva base $y = a^x$.
$y - b = a^x$	$a, b \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$	Obtidas por translação vertical de b unidades para baixo da curva base $y = a^x$.
$y - b = a^{x-d}$	$a, b, d \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$	Obtidas por translação vertical e horizontal da curva $y = a^x$, onde o sentido do deslocamento é dado pelo sinal que acompanha os valores de b e d . Sinal positivo indica deslocamento para cima no caso de b e para a direita no caso de d . Já o sinal negativo indica deslocamento para baixo no caso de b e para a esquerda no caso de d .

Fonte: Silva (2008, p. 122).

Para as funções logarítmicas, a autora considera as curvas logarítmicas cujas equações são dadas pela equação geral $y = b + \log_a(x + d)$, com $a, b, d \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$. Voltando à função exponencial definida como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$ ($a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$), sugere uma restrição no contradomínio desta de tal forma que tenhamos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $y = a^x$ ($a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$), garantindo assim a bijeção da função, o que lhe garante a afirmativa de que a função exponencial de base a é a função inversa da função logarítmica de mesma base e vice-versa. (p.123).

Assim, para obter a curva de uma função logarítmica considera a sua simetria em relação à reta $y = x$ da sua inversa exponencial, quando já conhecida.

O quadro 2.15 apresenta os resultados obtidos no estudo feito por Silva para as curvas logarítmicas tratadas, onde mais uma vez podemos verificar suas conclusões no que tange aos valores das variáveis agregados a sua representação simbólica e suas respectivas características em relação às variáveis visuais.

Quadro 2.15: Equações e características das curvas logarítmicas analisadas por Silva (2008)

Equação Explícita	Coefficientes	Curva (variáveis visuais)
$y = \log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^*, a > 1$	Curva base: obtidas por simetria em relação à reta $y = x$ da curva da curva exponencial de mesma base a .
$y = \log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^*, 0 < a < 1$	Obtidas por simetria em relação ao eixo X da curva cuja base a é inversa, ou seja, $a > 1$ (quando já conhecida).
$y \pm b = \log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$ $b \in \mathbb{R}^*$	Obtidas por translação vertical da curva $y = \log_a x$ de b unidades nos sentidos para cima ou para baixo, conforme o coeficiente b seja acompanhado do sinal “+” ou “-”, respectivamente.

$y = \log_a (x \mp d)$	$a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$ $d \in \mathbb{R}^*$	Obtidas por translação horizontal da curva $y = \log_a x$ de d unidades nos sentidos para a direita ou para a esquerda, conforme o coeficiente d seja acompanhado do sinal “+” ou “-”, respectivamente.
$y \mp b = \log_a (x \mp d)$	$a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$ $b, d \in \mathbb{R}^*$	Obtidas por uma translação em duas etapas, uma na direção horizontal e outra na direção vertical, onde os sentidos dos deslocamentos são dados pelos sinais dos coeficientes b e d conforme visto nas linhas anteriores.

Fonte: Silva (2008, p. 129).

Os exemplos seguintes, desenvolvidos esquematicamente, nos mostram como obter o gráfico de curvas exponenciais e logarítmicas, usando os elementos apresentados por Silva:

Exemplos: Obter o gráfico das curvas representadas pelas seguintes equações explícitas:

- a) $y = 1 + 3^{(x-1)}$
 b) $y = -2 + \log_2 (x - 2)$

Resoluções:

a) $y = 1 + 3^{(x-1)}$

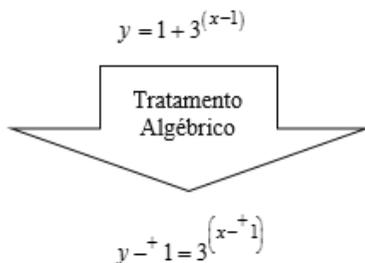
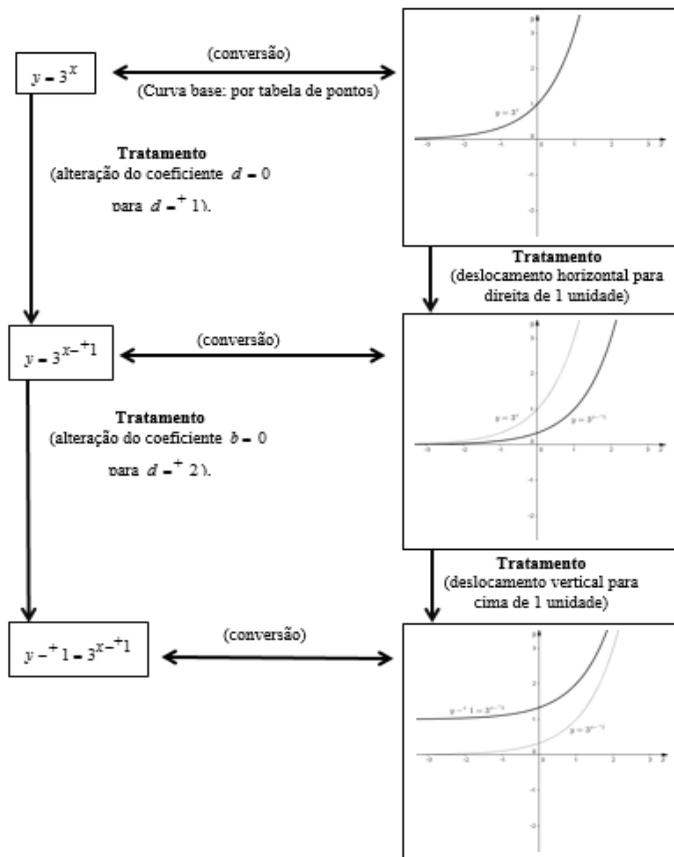


Figura 2.23: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica da Curva: $y - 1 = 3^{(x-1)}$.



Fonte: Autores da pesquisa.

a) $y = -2 + \log_2(x-2)$

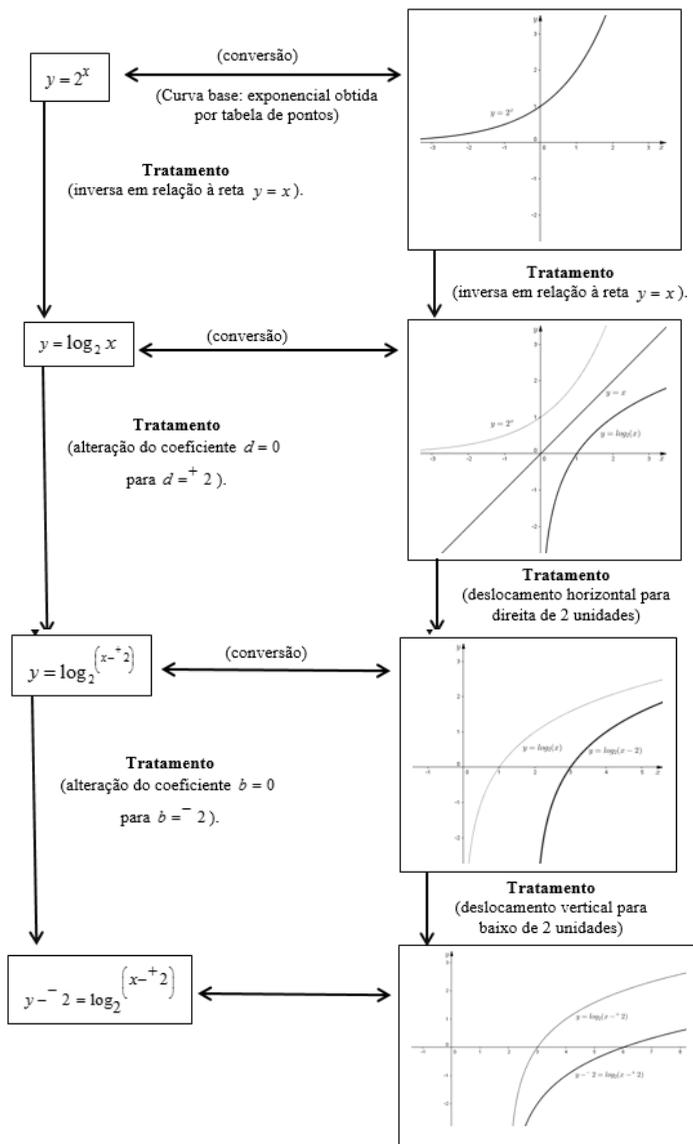
$$y = -2 + \log_2(x-2)$$

Tratamento
Algébrico

$$y - 2 = \log_2(x-2)$$

Figura 2.24: Conversão algébrica ↔ gráfica da Curva:

$$y - 2 = \log_2(x - 2)$$



Fonte: Autores da pesquisa.

Nesta seção vimos que Silva (2008) tratou em seu trabalho de conversões entre representações algébricas e gráficas de curvas representantes de funções estudadas no ensino médio através do procedimento de interpretação global das propriedades figurais, já relatado por Duval (1988) e Moretti (2003).

O estudo realizado por Silva (2008) utilizou conceitos como o de função inversa, funções pares e funções ímpares que, na maioria das vezes, são abordados apenas em seus aspectos algébricos. Ainda, utilizou os conceitos de simetria e translação como importantes aliados no esboço das curvas abordadas por ela, estabelecendo favorecimento à interligação entre a expressão algébrica e seu correspondente esboço gráfico no plano.

A proposta de Silva (2008), se bem compreendida e devidamente aplicada por um professor pode trazer ganhos significativamente positivos à compreensão conceitual de seus alunos do ensino médio.

Embora Silva (2008) tenha focado seu estudo analítico em algumas curvas estudadas no ensino médio, não há como deixarmos de refletir a respeito de outras curvas que podem ser estudadas com o mesmo enfoque, sendo estas representantes de gráficos de funções ou não, como por exemplo, as cônicas.

Podemos ainda considerar um estudo de curvas que costumam surgir no ensino superior, como por exemplo, as curvas representantes de funções racionais, onde o grau de complexidade pode exigir uma análise detalhada a respeito de propriedades figurais e cujo esboço gráfico pode ser impraticável sem o auxílio de uma ferramenta computacional.

A próxima seção traz justamente a exposição de uma pesquisa realizada com alunos do ensino superior, no que tange a utilização de elementos do cálculo diferencial e integral diante da interpretação global de propriedades figurais para algumas curvas que surgem neste grau de ensino, onde é utilizado um software matemático como ferramenta indispensável à obtenção do esboço gráfico da curva.

3ª Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias.

Diferentemente das curvas estudadas por Moretti (2003) e Silva (2008), que foram curvas objetos de aprendizagem do ensino médio, Luiz faz um estudo sob a ótica da interpretação global para curvas que surgem no ensino superior.

Em sua dissertação Luiz desenvolve a partir do artigo “Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino

universitário” (MORETTI et al., 2010) uma sequência didática envolvendo curvas representantes de problemas de otimização, aplicada à alunos de uma turma de cálculo A de um curso de engenharia da UFSC.

Na proposta deste autor, as curvas selecionadas no seu estudo são representantes de funções $y = f(x)$ e foram esboçadas utilizando-se o software DERIVE (plotador gráfico) a partir de suas equações explícitas. A partir do registro gráfico é então analisado um conjunto de elementos chamados de **unidades básicas**, subdivididos em unidade básica **gráfica, linguística e simbólica** cujo objetivo é orientar as conversões entre os registros simbólicos e gráficos relativos a elementos das derivadas estudadas em cálculo.

Para Luiz, as unidades básicas podem ser usadas para definirem grande parte dos **componentes significativos**²³ do esboço de curva de uma função, tais como: pontos de máximo e de mínimo, pontos de inflexão, retas tangentes, assíntotas verticais e horizontais e limites laterais em um determinado ponto.

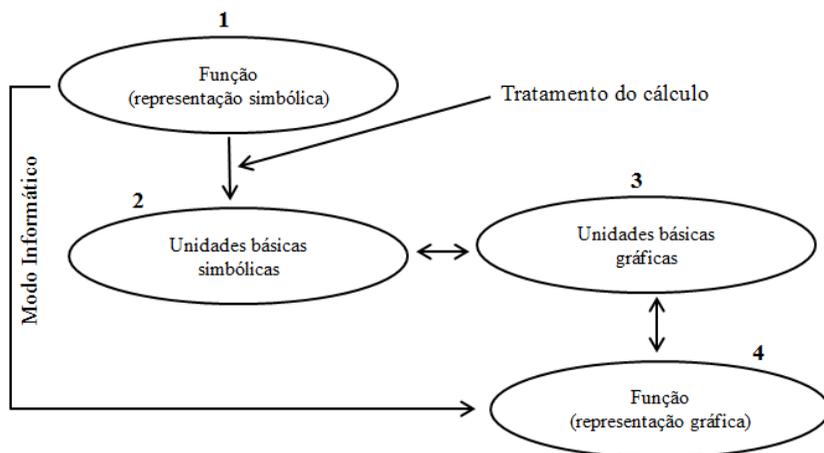
Moretti et al. (2010, p. 7) explica o uso e a importância destas unidades básicas:

Cada elemento em um dos grupos relaciona-se com um elemento do outro grupo. Pretendemos que as unidades básicas gráficas e simbólicas funcionem como unidades significativas ou pertinentes das representações da função. As conversões entre as representações de uma função, tanto em um sentido como em outro, poderão ser tratadas da mesma forma tendo como intermediação essas unidades básicas.

Na figura 2.25 temos um esquema desenvolvido por Moretti (2008) que configurou-se no caminho utilizado por Luiz no estudo das curvas analisadas por ele. Note que na figura é possível verificar o tipo de conversão utilizada em sua análise.

²³ Refere-se aqui às partes da curva associada a uma função que nos permite uma interpretação física e/ou matemática através de seu traçado. Aqui estamos tratando principalmente dos componentes mais usuais no estudo de Cálculo A (I), tais como pontos de máximo e de mínimo, pontos de inflexão, retas tangentes e assíntotas (verticais e horizontais).

Figura 2.25: Esquema do procedimento informático de interpretação global proposto por Moretti (2008) e utilizado por Luiz (2010)



Fonte: Moretti (2008, p. 100).

O autor defende que a conversão mais adequada, devido a complexidade das funções tratadas no ensino superior é o sentido $1 \rightarrow 4$ no modo informático. Assim, usando o software e conhecendo a lei da função (aqui, equação explícita) teremos duas representações distintas (algébrica e gráfica) do mesmo objeto, no caso, da curva. Para ele, partir da conversão direta $1 \rightarrow 4$ poderemos então, aplicar o procedimento de interpretação global de Duval na sequência: $4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1$, onde:

- $4 \rightarrow 3$: ocorre os tratamentos na curva (visuais inicialmente) em sua representação gráfica (4) para que haja reconhecimento e caracterização das unidades gráficas (3);
- $2 \leftarrow 1$: ocorre os tratamentos de cálculo na função em sua forma simbólica (1) para que se possa determinar as unidades básicas simbólicas (2) relacionadas às suas correspondentes unidades básicas gráficas (3);
- $3 \leftrightarrow 2$: conversão (em via dupla) que objetiva confirmar as correspondências entre as unidades básicas gráficas (3) e as unidades básicas simbólicas (2).

Observamos que o caminho percorrido no sentido $1 \rightarrow 2$ por meio de um software gráfico nos dá uma curva acabada, porém ela não destaca com precisão certos elementos, tais como pontos críticos e retas

assíntotas. Para o autor, a conversão no sentido $1 \rightarrow 2$ está associada simultaneamente à conversão no sentido $2 \rightarrow 1$ e pode ocorrer apenas para alguns grupos restritos de funções. Já a conversão no sentido $2 \rightarrow 1$ pode ser realizada com auxílio de um software gráfico ou então passando pelas unidades básicas simbólicas (obtidas por meio de tratamentos do cálculo) e gráficas.

As tabelas (1 até 24 - ver anexo) apresentam as referidas unidades básicas (gráfica, linguística e simbólica) relativas aos elementos do cálculo ²⁴utilizados no esboço de curvas, destacados pelo autor em seu trabalho, e que também utilizaremos posteriormente no estudo das nossas curvas dadas por equações implícitas.

Os exemplos seguintes, desenvolvidos esquematicamente, nos mostram como aplicar o procedimento de interpretação global utilizando as tabelas de unidades básicas, defendidas por Luiz para curvas geralmente apresentadas no tópico “aplicações das derivadas” da disciplina de cálculo A (I).

Exemplos:

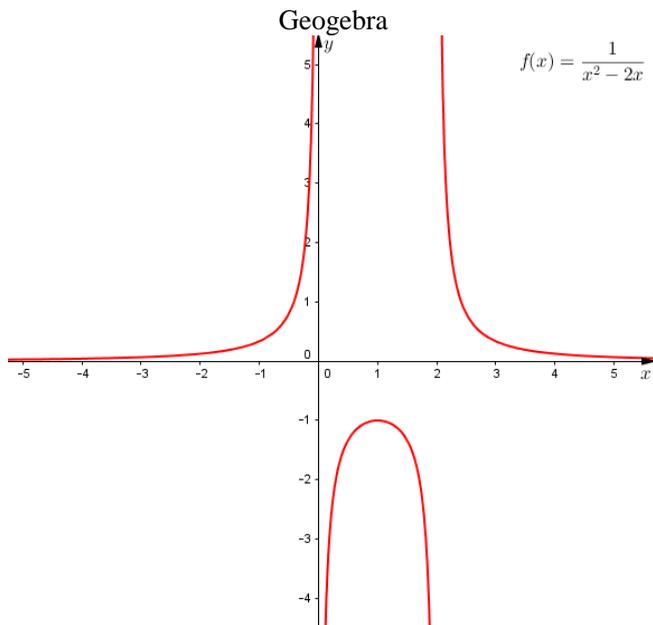
a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$

- Conversão no sentido $1 \rightarrow 4$ utilizando o software Geogebra²⁵:

²⁴ Elementos do cálculo: variação e concavidade, retas assintóticas, determinação de pontos importantes (extremos relativos, pontos de inflexão e continuidade).

²⁵ Mais adiante, comentaremos a respeito deste software que é justamente o software a ser utilizado neste trabalho para obtenção gráfica das curvas a serem estudadas aqui a partir de suas representações algébricas implícitas.

Figura 2.26: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ obtido com o software



Fonte: Autores da pesquisa

Note que no gráfico da figura 2.26 o software não nos forneceu informações a respeito de pontos significativos (pontos críticos, retas assíntotas, extremos relativos, etc.).

No entanto, observando o traçado da curva temos uma ideia das variáveis visuais as quais devemos focar nossa análise, visto serem unidades gráficas notáveis que nos conduzirão às suas correspondentes unidades simbólicas, a saber:

- i. Analisando a curva $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ no gráfico da figura 2.26, notamos que a função “parece” ser crescente no intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ e decrescente em $[1, 2) \cup (2, +\infty)$. Ainda, possui concavidade negativa em $(0, 2)$ e concavidade positiva em $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$;

- ii. Vemos que $y \rightarrow +\infty$ quando percorremos a curva nos aproximando de $x = 0 \notin D(f)$ pela esquerda e $y \rightarrow -\infty$ quando a percorremos nos aproximamos de $x = 0 \notin D(f)$ pela direita, o que indica a presença de uma possível assíntota vertical;
- iii. Analogamente, vemos que $y \rightarrow -\infty$ quando percorremos a curva nos aproximando de $x = 2 \notin D(f)$ pela esquerda e $y \rightarrow +\infty$ quando a percorremos nos aproximamos de $x = 2 \notin D(f)$ pela direita, o que indica a presença de mais uma possível assíntota vertical;
- iv. Também conseguimos visualizar que $y \rightarrow 0$ quando percorremos a curva fazendo $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$, o que indica a presença de uma possível assíntota horizontal;
- v. Ainda podemos notar que há um possível ponto importante no intervalo $[0, 2]$, possivelmente na vizinhança de $x = 1$, o qual merece análise detalhada, pois pode ser extremo relativo.

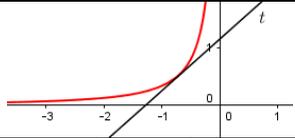
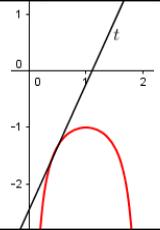
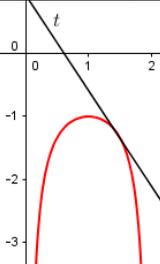
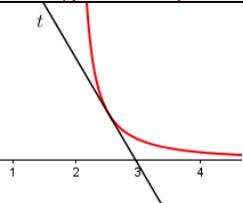
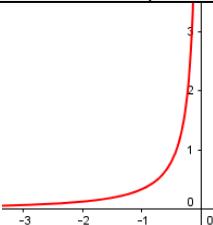
Levando em consideração as características destacadas acima a partir do gráfico apresentado na figura 2.26, podemos recorrer às tabelas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12 e 14) apresentadas no anexo deste trabalho.

No quadro 2.16 esboçamos as unidades básicas destacadas da

função $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$:

Quadro 2.16: Conversões entre as unidades básicas do gráfico da

$$\text{função } f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}.$$

UNIDADES BÁSICAS		
Sentido: 3 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1		
Gráfica	Linguística	Simbólica
	t : reta tangente Função crescente Concavidade positiva	$x < 0 \begin{cases} t: y=ax+b, a>0 \\ f'(x)>0 \\ f''(x)>0 \end{cases} \quad (*)$
	t : reta tangente Função crescente Concavidade negativa	$0 < x < 1 \begin{cases} t: y=ax+b, a>0 \\ f'(x)>0 \\ f''(x)<0 \end{cases} \quad (*)$
	t : reta tangente Função decrescente Concavidade negativa	$1 < x < 2 \begin{cases} t: y=ax+b, a<0 \\ f'(x)<0 \\ f''(x)<0 \end{cases} \quad (*)$
	t : reta tangente Função decrescente Concavidade positiva	$x > 2 \begin{cases} t: y=ax+b, a<0 \\ f'(x)<0 \\ f''(x)>0 \end{cases} \quad (*)$
	Assíntota vertical em $x = 0$.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - 2x} = +\infty$

		$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 - 2x} = -\infty$
	Assíntota vertical em $x = 2$.	$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 2x} = -\infty$
		$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 2x} = -\infty$
	Assíntota horizontal em $y = 0$.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 2x} = 0$
		$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 2x} = 0$
	<p>Máximo relativo em $x = 1$. (Derivada primeira de f muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de $x = 1$)</p>	$f(1) = -1 \neq 0$ $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{9} > 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{16}{9} < 0 \end{cases}$ $f''(1) = -2 < 0$

(*) Verificados no próprio software Geogebra:

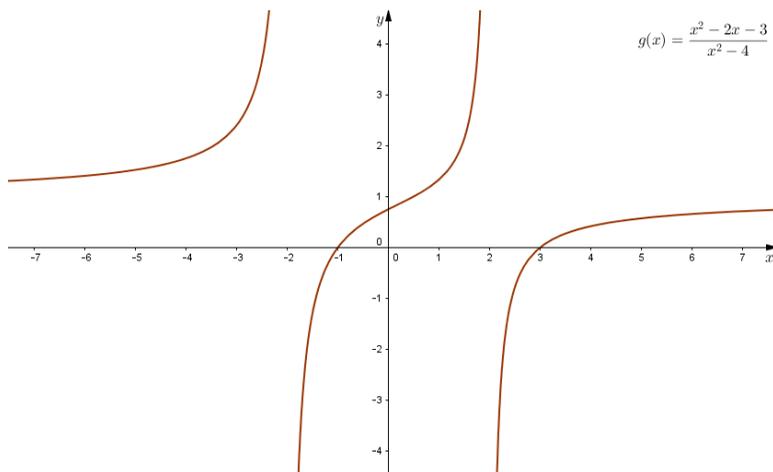
$$f'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x)^2} \begin{cases} >0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ =0 \text{ para } x=1 \\ <0, \forall x \in (1, 2) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{-6x^2 - 12x + 8}{x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3} \begin{cases} >0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ \cancel{\neq} x \in D(f) / f''(x) = 0 \\ <0, \forall x \in (0, 2) \end{cases}$$

b) $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$

- Conversão no sentido 1 \rightarrow 4 utilizando o software Geogebra:

Figura 2.27: Gráfico da função $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$ obtido com o software Geogebra



Fonte: Autores da pesquisa

Observando o traçado da curva temos uma ideia das variáveis visuais as quais devemos focar nossa análise, visto serem unidades

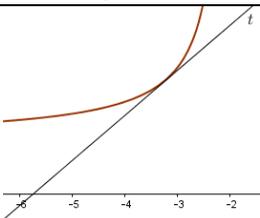
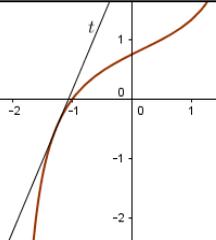
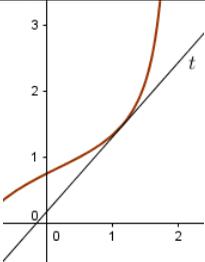
gráficas notáveis que nos conduzirão às suas correspondentes unidades simbólicas, onde levando em consideração as características visuais no gráfico apresentado na figura 2.27, podemos recorrer às tabelas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12 e 14) apresentadas no anexo deste trabalho.

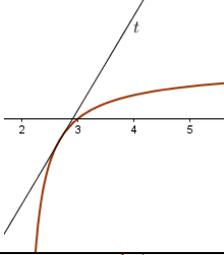
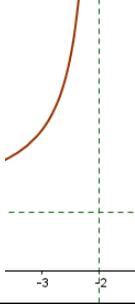
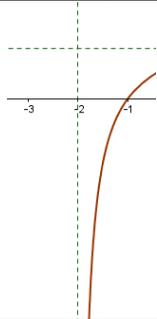
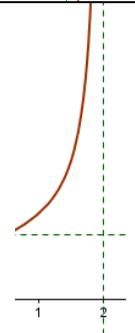
No quadro 2.17 esboçamos as unidades básicas destacadas da

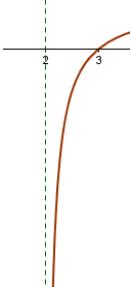
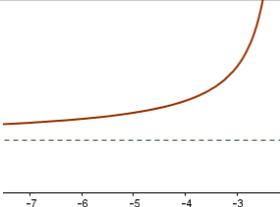
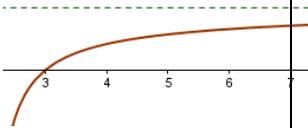
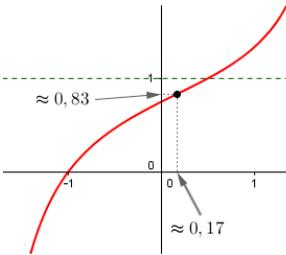
$$\text{função } g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} :$$

Quadro 2.17: Conversões entre as unidades básicas do gráfico da

$$\text{função } g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} .$$

UNIDADES BÁSICAS		
Sentido: 3 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1		
Gráfica	Linguística	Simbólica
	<p>t : reta tangente Função crescente Concavidade positiva</p>	$x < -2 \begin{cases} t: y=ax+b, a>0 \\ g'(x)>0 \\ g''(x)>0 \end{cases} (*)$
	<p>t : reta tangente Função crescente Concavidade negativa</p>	$-2 < x < 0,17 \begin{cases} t: y=ax+b, a>0 \\ g'(x)>0 \\ g''(x)<0 \end{cases} (*)$
	<p>t : reta tangente Função decrescente Concavidade negativa</p>	$0,17 < x < 2 \begin{cases} t: y=ax+b, a>0 \\ g'(x)>0 \\ g''(x)>0 \end{cases} (*)$

	<p>t : reta tangente Função decrescente Concavidade negativa</p>	$x > 2 \begin{cases} t: y=ax+b, a>0 \\ g'(x)>0 \\ g''(x)<0 \end{cases} \quad (*)$
	<p>Assíntota vertical em $x = -2$.</p>	$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} = +\infty$
		$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} = -\infty$
	<p>Assíntota vertical em $x = 2$.</p>	$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} = +\infty$

		$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} = -\infty$
	Assíntota horizontal em $y = 1$.	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} = 1$
		$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4} = 1$
	<p>Ponto de inflexão em $x \approx 0,17$.</p> <p>(Derivada primeira de g não muda de sinal na vizinhança de $x \approx 0,17$.)</p> <p>Derivada segunda de g muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de $x \approx 0,17$)</p>	$g'(x) > 0, \forall x \in D(f)$ $g''(0) = -\frac{1}{8}$ $g''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{64}{225}$

Fonte: Autores da pesquisa

(*) Verificados no próprio software Geogebra:

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} > 0, \forall x \in D(f)$$

$$g''(x) = \frac{-4x^3 + 6x^2 - 48x + 8}{x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64} \begin{cases} < 0, \forall x \in (-2; 0, 17) \cup (2, +\infty) \\ = 0 \text{ para } x \approx 0, 17 \\ > 0, \forall x \in (-\infty, -2) \cup (0, 17; 2) \end{cases}$$

De acordo com a forma que discutimos as funções apresentadas nos exemplos anteriores, concluímos que a utilização das tabelas de unidades básicas propostas por Luiz, faz com que tenhamos uma visão global da curva e a partir dela identificarmos características visuais significativas e então fazer as respectivas correspondências com suas propriedades algébricas. Destacamos aqui que esta forma de abordagem não é usada no ensino superior, grau de ensino que nos interessa neste trabalho.

A função das unidades básicas é de definir previamente esses elementos básicos com o uso de tratamentos do cálculo em nível superior. Sem isso, para a maioria das funções que trabalhamos no ensino superior, não é possível o estudo da conversão das funções com tratamento global. (LUIZ, 2010, p. 67).

Neste capítulo foi possível observar que os trabalhos referentes à interpretação global a respeito das retas (Duval, 1988), das parábolas (Moretti, 2003), das senóides, cossenóides, exponenciais e logarítmicas (Silva, 2008) e de algumas curvas que surgem no ensino superior (Luiz, 2010), se referem a funções, cujas equações são dadas cartesianamente em sua forma explícita. No próximo capítulo iremos apresentar outro formato de apresentação das equações, as equações de curvas dadas por funções paramétricas, independentemente de estas serem ou não representantes de funções, onde analisamos as conversões sob a ótica da interpretação global e também apresentaremos fatores que justificam a utilização de software gráfico, bem como sobre a escolha pelo Geogebra.

4 O PROCEDIMENTO DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAS NO ESBOÇO DE RETAS DADAS POR EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

4.1 As equações paramétricas

No capítulo anterior nos referimos a algumas pesquisas que utilizaram a interpretação global proposta por Duval em sua TRRS, onde vimos que o gráfico de uma equação envolvendo duas variáveis (x, y) é uma curva no plano. É possível, entretanto, adotar um ponto de vista dinâmico, e pensar em qualquer curva do plano (ou do espaço) como a trajetória de um ponto móvel, sendo que neste trabalho nos restringimos às curvas planas.

Neste contexto, pensar numa curva como a trajetória descrita por uma partícula no plano nos remete à reflexão de outra área do saber, componente do rol da chamada ciências da natureza: a Física.

Nossa experiência com o ensino médio nos mostrou que professores de matemática e física utilizam neste grau de ensino uma metodologia de tal forma como se a aprendizagem de uma área do conhecimento não estivesse interligada aos conhecimentos da outra.

É comum nos depararmos com situações em que muitos alunos têm dificuldades nos conteúdos de Física, em que muitas vezes, mesmo percebendo do que se trata, no momento em que precisam modelar os fenômenos e trabalhar com as equações utilizando seus conhecimentos matemáticos, os mesmos demonstram uma inatividade que compromete o desenvolvimento do conhecimento científico, tanto do ponto de vista matemático, quanto físico.

A partir dessas percepções surgem algumas perguntas que talvez possam minimizar as inquietações dos profissionais da educação e as dúvidas e insatisfações por parte de nossos alunos: Por que não se praticar um ensino mais interdisciplinar?"; Por que ensinar Matemática e Física como se fossem disciplinas tão diferentes?" e, "Como poderíamos minimizar a falta dos conteúdos matemáticos adequados para a resolução de problemas na disciplina de Física?" (WILLI NETO, 2011, p. 13).

Por este viés, a interdisciplinaridade permite que as disciplinas de matemática e física sejam estudadas relacionando-as e assim mostrando aos alunos que os conteúdos que lhes são apresentados possuem uma relação entre si. É importante estar ciente de que a língua materna permite termos acesso aos outros conteúdos, sendo necessário também o conhecimento de uma linguagem simbólica criada pela Matemática na qual irão se sustentar os fundamentos das ideias e objetos físicos.

A verdade é que seja no ensino médio, seja no ensino superior, não é difícil a inexistência de uma relação de interdisciplinaridade entre o ensino da matemática e da física, sem considerar que a física se utiliza da linguagem simbólica matemática e dos conhecimentos a respeito das equações geradas pelos modelos que descrevem os fenômenos na qual estuda, pois as utiliza para comprovações científicas.

Existem no ensino médio e superior muitos conteúdos que podem ser ministrados interdisciplinarmente entre os professores de matemática e física. Dentre os muitos exemplos possíveis, destacamos primeiramente o estudo da cinemática²⁶, que possui uma descrição gráfica capaz de permitir que sejam explorados os diferentes tipos de movimentos descritos por pontos materiais²⁷ comparando-os com as equações matemáticas associadas. É importante salientar aqui que já no primeiro ano do ensino médio o estudo do MRU (Movimento Retilíneo Uniforme) e do MRUV (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado) estudados na disciplina de física acaba desvinculado do estudo das funções polinomiais do 1º e 2º graus, abordados para o mesmo público na disciplina de matemática.

Mesmo no ensino superior, os livros didáticos não conduzem os alunos a perceberem de forma imediata a equivalência entre as equações matemáticas e as equações físicas que representam a posição de um móvel no M.U (Movimento Uniforme) ou a velocidade de um móvel no MUV (Movimento Uniformemente Variado), todas dadas em função do tempo. Também não se configura de forma evidente o fato de a função polinomial do segundo grau ser equivalente a função física que representa a posição em função do tempo de um móvel que descreve um movimento MUV.

Um segundo fator merecedor de destaque aqui diz respeito aos gráficos estudados em ambas as disciplinas. Na matemática o esboço e interpretação de gráficos acabam se restringindo às funções reais de variáveis reais. No entanto, se pensarmos num gráfico como representante

²⁶ Estudo dos movimentos sem a preocupação com as suas causas.

²⁷ Objeto onde as dimensões (tamanho) são desprezíveis quando comparadas com o movimento estudado.

do movimento de uma partícula no plano (tão importante para a física), a curva descrita pode não caracterizar uma função do tipo $y = f(x)$ e isto não implica que não possamos analisá-lo e dele extrairmos uma série de informações, tanto matemáticas quanto físicas. Ainda há de ser considerado o formato das equações que representam algebricamente tais curvas, pois dependendo do contexto algébrico na qual determinada equação é apresentada, dela podemos obter diferentes informações que podem apresentar vantagens e desvantagens, dependendo do foco desejado no estudo.

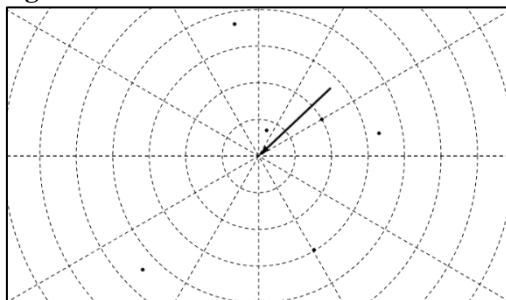
O exemplo 3.1 nos mostra que diferentes informações podem ser obtidas ao considerarmos uma curva representada por uma equação cartesiana e a mesma curva representada por uma equação num outro formato, chamado paramétrico.

Exemplo 3.1²⁸: Aristóteles trabalha no Aeroporto Internacional Hercílio Luz, em Florianópolis, Santa Catarina. Sua função é controlar o tráfego aéreo na região próxima ao aeroporto onde, devido ao grande número de decolagens e aterrissagens, o risco de colisão é muito maior. Durante um único turno de trabalho, Aristóteles deve analisar centenas de trajetórias percorridas pelas aeronaves que aparecem na tela do radar, à sua frente. Se as trajetórias de dois aviões se aproximam perigosamente, Aristóteles deve avisar a um deles para alterar a sua rota. Para desempenhar sua tarefa com sucesso, Aristóteles necessita conhecer com precisão, a rota percorrida por cada aeronave e o instante em que estas passam por cada ponto deste percurso.

As Figuras 3.1a e 3.1b mostram a tela do radar com que Aristóteles trabalha e monitora uma área de 3600 km^2 ao redor do aeroporto e mostra uma espécie de mapa cartesiano da região: a imagem que aparece na tela é uma janela de $[-30, 30]$ por $[-30, 30]$, com a torre de controle na origem, conforme mostra o esquema apresentado na figura 3.1a.

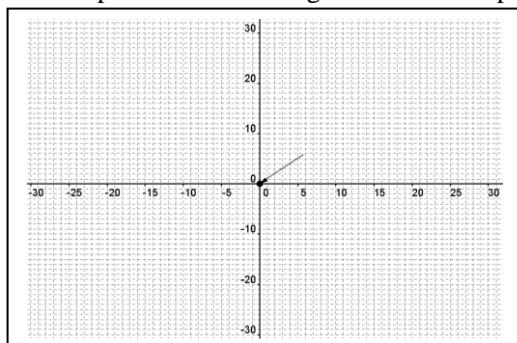
²⁸ Adaptado de:

<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulo_s/cap91.html>. Acesso em: 10 ago. 2016.

Figura 3.1a: Tela com radar a ser monitorado

Torre de Controle

Fonte: Autores da pesquisa.

Figura 3.1b: Mapa cartesiano da região monitorada pelo radar

Torre de Controle

Fonte: Autores da pesquisa.

Para simplificar o problema, vamos considerar que cada avião viaja em linha reta com velocidade constante. (Na realidade, Aristóteles deve lidar com mudanças quer na direção seguida pelos aviões, quer na velocidade desenvolvida). O Quadro 3.1 mostra as coordenadas (posição) de três aviões no momento em que começa o monitoramento, isto é, no momento em que a imagem aparece na tela ($t = 0$) e um minuto mais tarde ($t = 1$).

Quadro 3.1: Coordenadas cartesianas dos aviões A, B e C nos instantes $t = 0$ e $t = 1$.

	Coordenadas em $t = 0$	Coordenadas em $t = 1$
Avião A	$(-12, -30)$	$(-7, -22)$
Avião B	$(-9, 30)$	$(-6, 21)$
Avião C	$(30, -8)$	$(15, -24)$

Fonte: Autores da pesquisa.

Na sequência, apresentamos os tópicos de (i) até (x) que têm como objetivo ajudá-lo a analisar e explorar os dados fornecidos no Quadro 3.1:

- i.** Deduza a equação cartesiana que descreve a rota seguida pelo avião A.

Os aviões descrevem um movimento retilíneo. Devemos então, determinar a equação cartesiana da reta descrita pelo avião A. No intervalo de tempo de 1 minuto o avião A passa do ponto $(-12, -30)$ para o ponto $(-7, -22)$. Então, sendo a equação da reta do tipo: $y = ax + b$, temos o sistema:

$$\begin{cases} -30 = -12a + b \\ -22 = -7a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{5} \\ b = -\frac{54}{5} \end{cases}$$

Portanto, a equação cartesiana que descreve a rota seguida pelo avião A é:

$$y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5} \quad (\text{I})$$

- ii.** Em algum instante do percurso, o avião A passa diretamente sobre a torre de controle? Justifique a sua resposta por meio de um cálculo.

A Torre de Controle fica localizada no ponto $(0, 0)$. Se fizermos $x = 0$ na equação cartesiana (I), obtemos:

$$y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$$

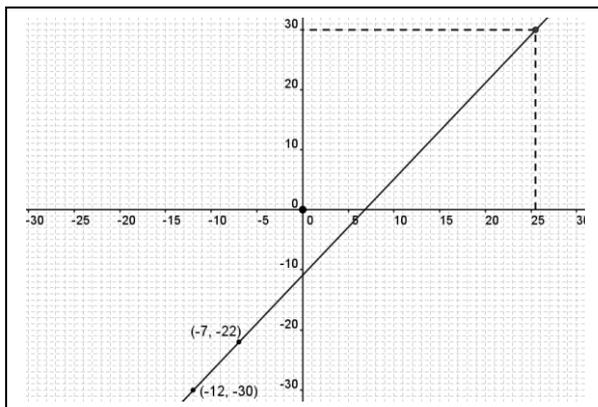
$$y = \frac{8}{5}(0) - \frac{54}{5}$$

$$y = -\frac{54}{5}$$

Como podemos verificar no cálculo acima, o avião A passa pelo eixo das ordenadas no ponto $\left(0, -\frac{54}{5}\right)$. Assim podemos concluir que não passa por $(0, 0)$ onde se encontra a torre de controle.

- iii. Quais são as coordenadas do avião A quando a sua imagem desaparece da tela do radar? Veja na Figura 3.2 o gráfico da reta que descreve a rota seguida pelo avião A.

Figura 3.2: Reta representante da rota seguida pelo avião A



Fonte: Autores da pesquisa.

A imagem do avião aparece na tela do radar no ponto de coordenadas $(-12, -30)$ e desaparece no ponto de coordenadas

$\left(\frac{51}{2}, 30\right)$. Esta observação pode ser confirmada algebricamente,

calculando-se na equação $y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$ o valor de x , quando $y = 30$.

- iv. Para Aristóteles, é muito importante saber a posição do avião, em cada instante. Usando a equação cartesiana deduzida no item (i), é possível saber a posição (coordenadas) do avião A, 3 minutos após o início do monitoramento? É possível saber quanto tempo leva para a imagem do avião A desaparecer da tela do radar? Não. A equação deduzida no item (i) não permite relacionar a posição do avião com o tempo transcorrido.
- v. O Quadro 3.2 mostra as coordenadas x e y do avião A, em cada instante de tempo indicado. Sabendo que o avião se desloca com velocidade constante, complete este quadro.

Quadro 3.2: Coordenadas cartesianas iniciais do avião A de $t = 0$ até $t = 5$.

t	x	y
0	-12	-30
1	-7	-22
2	?	?
3	?	?
4	?	?
5	?	?

Fonte: Autores da pesquisa

Pelos dados do Quadro 3.1 e levando em consideração que o avião se desloca sobre a reta $y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$ com velocidade constante, podemos deduzir que a cada minuto transcorrido, o movimento do avião resulta num deslocamento de 5 km na direção x , para Leste e 8 km na direção y , para Norte. A partir destes dados podemos completar o quadro dado como é mostrado no Quadro 3.3. Repare que todos os pontos (x, y) deste quadro pertencem a reta que descreve a rota seguida pelo avião.

Quadro 3.3: Coordenadas cartesianas do avião A de $t = 0$ até $t = 5$.

t	x	y
0	-12	-30
1	-7	-22
2	-2	-14
3	3	-6
4	8	2
5	13	10

Fonte: Autores da pesquisa.

- vi.** Use o quadro 3.3 (obtido no item anterior) para expressar a coordenada x do avião como uma função afim do tempo.
Pelos dados apresentados é possível deduzir que $x(t) = -12 + 5t$.
- vii.** Use o Quadro 3.3 (obtida no item v) para expressar a coordenada y do avião como uma função afim do tempo.
Pelos dados apresentados é possível deduzir que $y(t) = -30 + 8t$.
- viii.** Use as equações obtidas nos dois itens anteriores para achar a posição (coordenadas) do avião, decorridos 3 minutos após o início do monitoramento.
Substituindo-se $t = 3$ nas equações deduzidas nos dois itens anteriores ou, simplesmente, olhando a tabela completa no item (v), é possível afirmar que 3 minutos após o início do monitoramento, o avião estará sobrevoando o ponto de coordenadas $(3, -6)$. Estas coordenadas significam que, neste instante, o avião estará sobrevoando um ponto localizado 3 km a leste e 6 km ao sul da torre de controle.
- ix.** Quanto tempo leva para que a imagem deste avião desapareça da tela do radar?
Pelo item (iii), sabemos que a imagem do avião desaparecerá da tela do radar quando ele atingir o ponto de coordenadas $\left(\frac{51}{2}, 30\right)$.
Usando ou a equação obtida no item (vi), ou a equação obtida no item (vii) é possível calcular em que instante o avião estará sobrevoando este ponto. Para isso, basta resolver qualquer uma das

equações: $\frac{51}{2} = -12 + 5t$ ou $30 = -30 + 8t$. Em qualquer dos casos

o resultado encontrado é $t = \frac{15}{2} = 7,5$ minutos, que é o tempo necessário para que a imagem do avião atravessa a tela do radar.

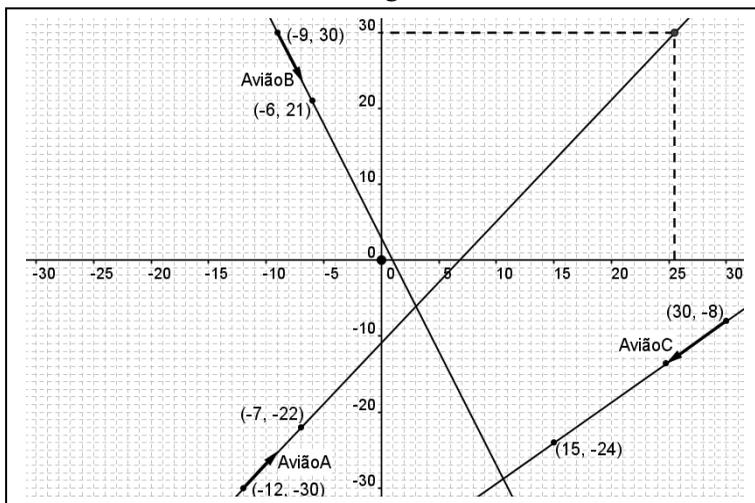
- x. Repita a análise feita acima para os outros dois aviões e decida se é necessário que algum deles altere a sua rota.

Pela análise feita acima, podemos concluir que a rota de um dos aviões deverá ser alterada se as retas que descrevem o movimento de cada um deles se cruzarem *num mesmo instante*, durante o trajeto. As equações cartesianas das retas que descrevem a trajetória

dos aviões B e C são, respectivamente, $y = -3x + 3$ e $y = \frac{16}{15}x - 40$

. Veja na figura 3.3 os gráficos destas equações traçados no plano cartesiano.

Figura 3.3: Retas representantes das rotas seguidas pelos aviões A, B e C



Fonte: Autores da pesquisa.

Apesar da reta que representa o curso seguido pelo avião B cruzar as outras duas, não é possível deduzir, a partir das equações cartesianas

deste movimento, se os aviões colidirão ou não. Para obter esta informação é necessário também conhecer em que instante cada avião passa pelo ponto de interseção das duas rotas. A interseção das rotas seguidas pelos aviões A e B se dá no ponto de coordenadas $(3, -6)$. Para chegar a esta conclusão basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5} \\ y = -3x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 \end{cases}$$

Para decidir se o avião B precisa alterar o seu curso, é necessário saber em que instante os dois aviões estarão sobrevoando este ponto. Para o avião A, isto se dará 3 minutos após o início do monitoramento; para o avião B, 4 minutos após o início do monitoramento, quando o avião A já estará sobrevoando o ponto $(8, 2)$. Portanto, neste caso, não há risco de colisão.

As equações $x(t) = -12 + 5t$ e $y(t) = -30 + 8t$, obtidas anteriormente, são exemplos de **equações paramétricas**. Falando informalmente, um conjunto de equações paramétricas no plano é um par de funções da forma $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$ e seu gráfico é uma curva no plano, isto é, o seu gráfico consiste de todos os pontos do plano cujas coordenadas são dadas por $(x, y) = (f_1(t), f_2(t))$. A variável t é chamada de parâmetro. Na maior parte dos problemas práticos, em especial na física, t representa o tempo. Neste caso, as equações paramétricas descrevem a trajetória de um objeto que se move em um plano, fornecendo, em cada instante de tempo t , as coordenadas (x, y) deste objeto.

O domínio de um conjunto de funções paramétricas é constituído pelos valores do parâmetro t , que pertencem ao intervalo durante o qual o movimento se processa e a sua imagem (os valores correspondentes de x e y) é um subconjunto do plano cartesiano.

No exemplo estudado anteriormente, o domínio das equações paramétricas $x(t) = -12 + 5t$ e $y(t) = -30 + 8t$, deduzidas nos itens (vi)

e (vii), pode ser entendido como o intervalo $\left[0, \frac{15}{2}\right]$, isto é, os valores de t compreendidos entre 0 e 7,5 minutos, visto que este domínio representa o intervalo de tempo desde que se começa a monitorar o movimento dos aviões até o instante em que a imagem sai da tela. A imagem é definida pelos valores de x e y tais que $-12 \leq x \leq \frac{51}{2}$ e $-30 \leq y \leq 30$, e corresponde a um retângulo no plano definido por $\left[-12, \frac{51}{2}\right] \times [-30, 30]$.

O gráfico destas equações, isto é, a trajetória seguida pelo avião enquanto monitorado, é um segmento de reta.

Quando descrevemos um movimento por meio de equações paramétricas, expressamos x e y como funções de t . Assim, t é a variável independente de ambas as funções. Consequentemente, a frase "domínio das funções paramétricas" se refere a valores de t e "imagem das funções paramétricas" se refere a valores de x e y . Ao considerarmos a equação cartesiana (em x e y) correspondente a este movimento, a variável independente passa a ser x e a imagem os valores correspondentes de y . Esta situação é resumida no Quadro 3.4:

Quadro 3.4: Representações algébricas (Cartesiana e Paramétrica) da rota do avião A

Modelo	Função (Funções)	Domínio	Imagem
Paramétrico	$x(t) = -12 + 5t$ $y(t) = -30 + 8t$	$0 \leq t \leq \frac{15}{2}$	$-12 \leq x \leq \frac{51}{2}$ $-30 \leq y \leq 30$
Cartesiano	$y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$	$-12 \leq x \leq \frac{51}{2}$	$-30 \leq y \leq 30$

Fonte: Autores da pesquisa.

As equações cartesianas e as equações paramétricas deduzidas funcionam ambas como modelos analíticos (algébricos) para a trajetória dos aviões e apresentam vantagens e desvantagens, dependendo da informação que queremos obter. É útil e importante saber deduzir os dois tipos de equações a partir de uma situação problema e obter uma a partir da outra. As equações paramétricas envolvem uma variável extra, em

geral o tempo, e à primeira vista, por envolver mais do que uma equação, parecem ser mais complicadas do que a (única) equação cartesiana para descrever o movimento em questão. No entanto, como já comentamos, equações paramétricas permitem relacionar a posição do objeto com tempo transcorrido, o que a equação cartesiana não permite. Além disso, eliminando o parâmetro a partir das equações paramétricas, podemos reconstruir o modelo cartesiano, e assim obter todas as informações fornecidas somente pela equação cartesiana, como por exemplo, a declividade da trajetória seguida. O exemplo 3.2 mostra como isto pode ser feito.

Exemplo 3.2²⁹: As equações paramétricas que descrevem a trajetória seguida por um avião (avião A do exemplo 3.1) são dadas por $x(t) = -12 + 5t$ e $y(t) = -30 + 8t$. Obtenha a equação cartesiana desse movimento.

Para obtermos a equação cartesiana, a partir das equações paramétricas, basta fazermos um “tratamento” isolando t numa das equações paramétricas dadas e, a seguir, substituir o resultado obtido na outra equação paramétrica.

Assim, da primeira equação paramétrica vem:

$$x = -12 + 5t$$

$$x + 12 = 5t$$

$$t = \frac{x + 12}{5}$$

Substituindo $t = \frac{x + 12}{5}$ em $y(t) = -30 + 8t$, temos:

$$y = -30 + 8t$$

$$y = -30 + 8\left(\frac{x + 12}{5}\right)$$

$$y = -30 + \frac{8}{5}x + \frac{96}{5}$$

$$y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$$

²⁹ Adaptado de Martins (2010, p. 55).

Note que $y = \frac{8}{5}x - \frac{54}{5}$ é a equação cartesiana obtida no item (i)

do exemplo 3.1. Esse fato comprova que os dois modelos (cartesiano e paramétrico) descrevem a mesma trajetória.

Os exemplos 3.1 e 3.2 nos fazem refletir sobre os modelos de equações utilizadas, tanto no ensino médio quanto no ensino superior. No ensino médio, equações paramétricas costumam ser trabalhadas apenas no 3º ano deste ciclo, em Geometria Analítica, quando se estudam as formas de representações das retas, o que também é habitual ocorrer no ensino universitário, pois também se trabalha com parametrizações na disciplina de cálculo quando se estudam as chamadas Funções Vetoriais³⁰.

Outro fator importante em relação a utilização de equações paramétricas pode ser observado no exemplo 3.3.

Exemplo 3.3: Seja uma curva C definida pelas equações paramétricas $x(t) = t^2 + t$ e $y(t) = t - 1$. Identifique e esboce C .

Para cada valor de t (admitindo $t \in \mathbb{R}$), temos um ponto (x, y) correspondente no plano, pertencente à curva C .

Para traçarmos um esboço gráfico de C podemos primeiramente pensar no tratamento ponto a ponto, tão criticado por inúmeras pesquisas que tomam como base a TRRS de Duval.

No entanto, aqui obteremos primeiramente a equação cartesiana representante de C , como segue:

$$\begin{array}{rcl}
 y = t - 1 & & x = t^2 + t \\
 t = y + 1 & \Rightarrow & x = (y + 1)^2 + y + 1 \\
 & \text{Substituindo em} & \underbrace{x = y^2 + 3y + 2}_{\text{equação cartesiana de } C} \\
 & x = t^2 + t &
 \end{array}$$

A partir de $x = y^2 + 3y + 2$ (representante algébrica cartesiana de C), usaremos a técnica apresentada no capítulo 2, desenvolvida por Moretti (2003) no que se refere ao uso das translações como recurso nas

³⁰ Funções cujos valores são vetores.

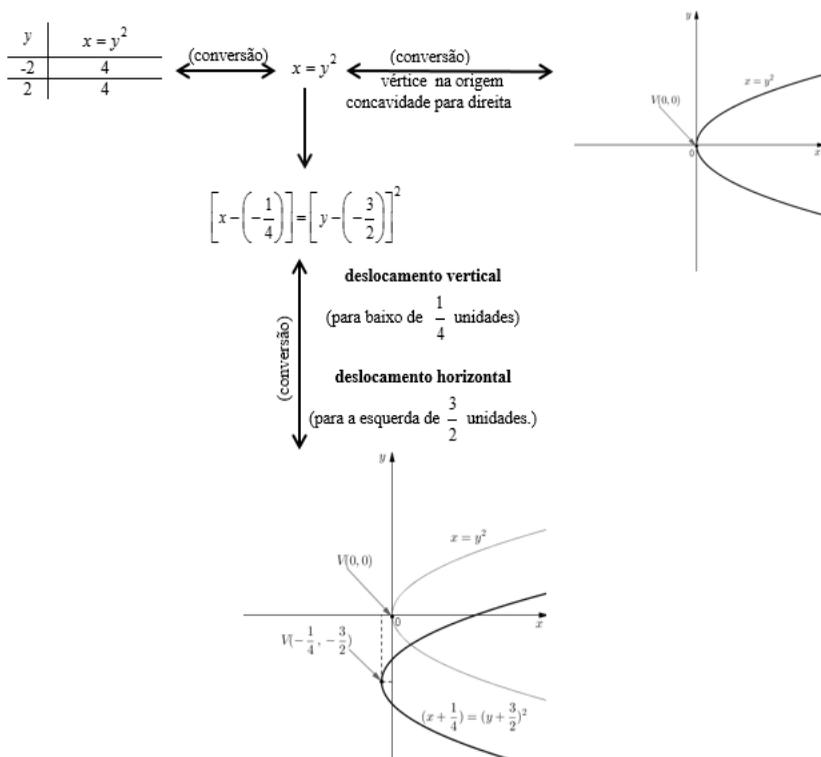
conversões da representação algébrica para a representação gráfica das parábolas.

Embora o exemplo 3.3 trate de uma parábola, assunto a ser discutido no capítulo 4 deste trabalho, seu objetivo aqui é de mostrar que o objeto matemático pode ser reconhecido fazendo-se um tratamento nas equações dadas. A figura 3.4 mostra a referida conversão:

$$\begin{array}{l}
 x = y^2 + 3y + 2 \quad \begin{array}{c} \text{Tratamento} \\ \text{Algébrico} \end{array} \Rightarrow x = y^2 + 3y + 2 \Leftrightarrow x = \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 2 \\
 \Leftrightarrow x = \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \\
 \Leftrightarrow \left[x - \left(-\frac{1}{4} \right) \right] = \left[y - \left(-\frac{3}{2} \right) \right]^2 \\
 \Downarrow \\
 V \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right)
 \end{array}$$

Ao fazermos o tratamento anterior, vemos em $x = y^2 + 3y + 2$ que $a = 1 > 0$, o que implica a parábola terá concavidade voltada para a direita (eixo de simetria paralelo ao eixo x). Também podemos verificar que terá seu vértice em $V \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right)$. Assim, vem:

Figura 3.4: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica (Curva: $x = y^2 + 3y + 2$)



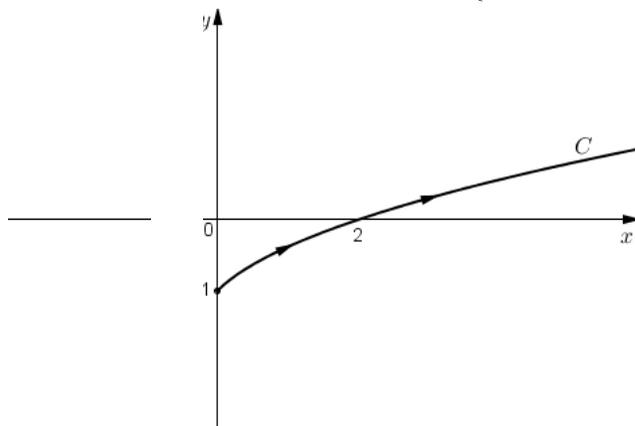
Fonte: Autores da pesquisa.

Até agora nos referimos à curva C considerando $t \in \mathbb{R}$. No entanto, suponha que a curva plana C represente a trajetória de uma partícula no plano. Então, teoricamente o domínio possível para a variável t é o intervalo $[0, +\infty)$. Assim, fazendo $t = 0$ obtemos o ponto $(0, -1) \in C$.

Note que o gráfico apresentado na figura 3.4 não representa o gráfico de uma função da forma $y = f(x)$, pois podemos facilmente observar que retas verticais (paralelas ao eixo y) interceptam o gráfico (a curva) em mais de um ponto, o que nos mostra que para um mesmo valor do domínio há mais de uma imagem correspondente.

O esboço gráfico da curva C que representa o real movimento da partícula pode ser observado na figura 3.5:

Figura 3.5: Representação gráfica da curva dada por: $\begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t - 1 \end{cases}, t \geq 0$



Fonte: Autores da pesquisa.

Perceba que as setas apresentadas na figura 3.5 indicam o sentido do respectivo movimento de uma partícula que se movimenta descrevendo a curva.

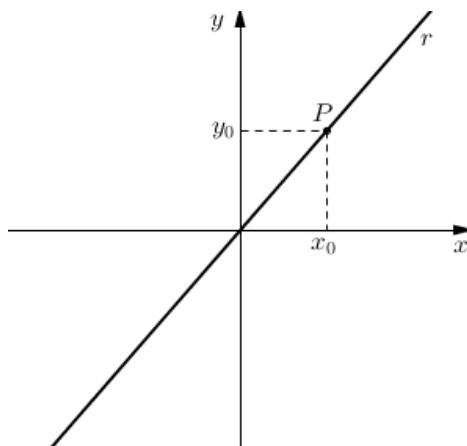
A partir de agora faremos uma interpretação global das propriedades figurais de algumas curvas, a partir de suas equações paramétricas. Primeiramente, obteremos a conversão da representação algébrica para a gráfica usando o software Geogebra e a partir deste registro gráfico faremos as respectivas associações entre suas unidades básicas visuais, linguísticas e simbólicas.

A seguir, faremos um estudo das retas dadas por equações paramétricas.

4.2 Interpretação global da reta³¹ dada por equações paramétricas

Consideremos inicialmente uma reta r passando pela origem (Figura 3.6), da qual P seja um ponto qualquer de coordenadas $(x_0, y_0) \in r$.

³¹ Estamos aqui considerando uma reta como sendo uma curva com grau de concavidade nulo (zero).

Figura 3.6: Reta r passando pela origem

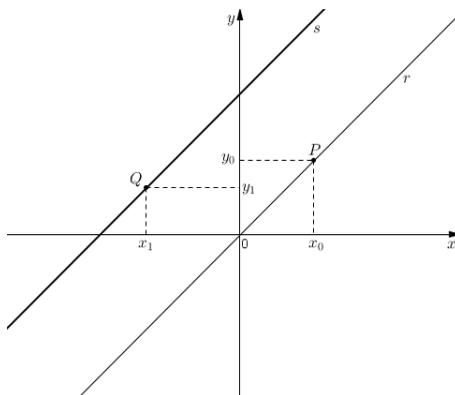
Fonte: Autores da pesquisa.

A declividade desta reta é $m = \frac{y_0}{x_0}$, donde $y = \frac{y_0}{x_0}x$, da

qual se tira $\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0} = t$, e as equações paramétricas da reta são:

$$\begin{cases} x = x_0 t \\ y = y_0 t \end{cases} \quad (*)$$

Para o caso de uma reta qualquer (Figura 3.7), definiremos esta reta s traçando uma reta r paralela passando pela origem. Consideraremos sobre r um ponto P de coordenadas (x_0, y_0) e sobre s um ponto Q conhecido de coordenadas (x_1, y_1) . Transportemos a origem para este ponto Q .

Figura 3.7: Reta s qualquer

Fonte: Autores da pesquisa.

Escrevendo como (*), vem:

$$X = x_0t \text{ e } Y = y_0t,$$

onde teremos:

$$\begin{cases} x = x_1 + X = x_1 + x_0t \\ y = y_1 + Y = y_1 + y_0t \end{cases},$$

que são as equações paramétricas de s .

Então, sendo $\begin{cases} x = x_1 + x_0t \\ y = y_1 + y_0t \end{cases}$, as equações paramétricas para uma

reta qualquer, através de um tratamento, vem:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0t \rightarrow t = \frac{x - x_1}{x_0} \\ y = y_1 + y_0t \end{cases} \Rightarrow y = y_1 + y_0 \left(\frac{x - x_1}{x_0} \right) = \underbrace{\frac{y_0}{x_0}}_{\text{coeficiente angular}} x + \underbrace{\left[y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 \right]}_{\text{coeficiente linear}}$$

Desta forma, podemos reestruturar o Quadro 2.1 (capítulo 2), obtido da obra de Duval, referente aos valores e variáveis visuais para a reta dada pela equação cartesiana $y = ax + b$. O Quadro 3.5 mostra então a adaptação feita para o quadro 2.1 considerando a reta agora dada por equações paramétricas.

Quadro 3.5: Valores e variáveis visuais para a reta no plano dada por equações paramétricas

Variáveis visuais	Unidades simbólicas correspondentes				Valores
	x_0	y_0	x_1	y_1	Característica
Casos Particulares	= 0		= 0		Reta coincide com o eixo y
		= 0		= 0	Reta coincide com o eixo x
		= 0		$\neq 0$	Reta paralela ao eixo x
	= 0		$\neq 0$		Reta paralela ao eixo y
			= 0		Reta passa pela origem
Sentido da inclinação	Sinais iguais				Reta Ascendente
	Sinais diferentes				Reta Descendente
Ângulo com os eixos	$ x_0 = y_0 $				Partição simétrica
	$ x_0 < y_0 $				Ângulo maior (45°)
	$ x_0 > y_0 $				Ângulo menor (45°)
Posição sobre o eixo	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = 0$				Corta na origem (não tem correção aditiva)
	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 > 0$				Corta acima (acrescenta-se $y_1 - \frac{y_0 x_1}{x_0}$)
	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 < 0$				Corta abaixo (subtrai-se $y_1 - \frac{y_0 x_1}{x_0}$)

Fonte: Autores da pesquisa

Os exemplos a seguir confirmam os dados constituintes do quadro 3.3.

Exemplos: Obter o gráfico e fazer o estudo das retas representadas pelas equações:

a) $x = t$ e $y = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

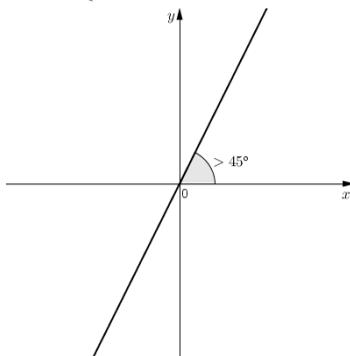
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 0 + 2t \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Quadro 3.6: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano

cartesiano		
Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Ascendente	x_0 e y_0 (sinais iguais: +)
Ângulo com os eixos	Ângulo maior que 45°	$ x_0 = 1 < y_0 = 2$
Posição sobre o eixo	Corta na origem	$x_1 = y_1 = 0$ (não tem correção aditiva)

Fonte: Autores da pesquisa

Figura 3.8: Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

b) $x = t$ e $y = 2t + 1, t \in \mathbb{R}$.

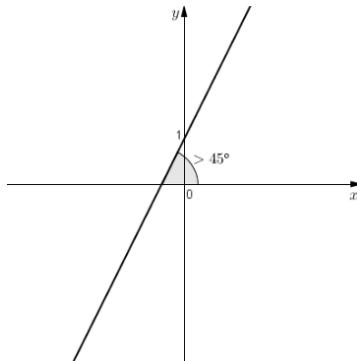
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Quadro 3.7: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Ascendente	x_0 e y_0 (sinais iguais: +)
Ângulo com os eixos	Ângulo maior que 45°	$ x_0 = 1 < y_0 = 2$
Posição sobre o eixo	Corta acima da origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = 1 > 0$ (correção aditiva: +1)

Fonte: Autores da pesquisa

Figura 3.9: Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

c) $x = -2t$ e $y = 3t + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

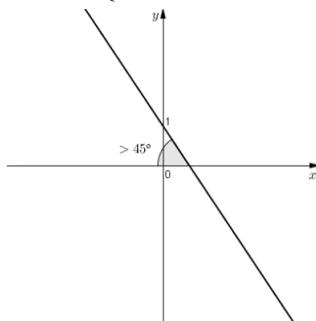
$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 3 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Quadro 3.8: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Descendente	x_0 e y_0 (sinais diferentes: - e +)
Ângulo com os eixos	Ângulo maior que 45°	$ x_0 = 2 < y_0 = 3$
Posição sobre o eixo	Corta acima da origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = 1 > 0$ (correção aditiva: +1)

Fonte: Autores da pesquisa

Figura 3.10: Gráfico de $\begin{cases} x = -2t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

d) $x = t + 2$ e $y = -\frac{t}{2} - 4$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{t}{2} - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = -4 - \frac{1}{2}t \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -\frac{1}{2} \\ x_1 = 2 \\ y_1 = -4 \end{cases}$$

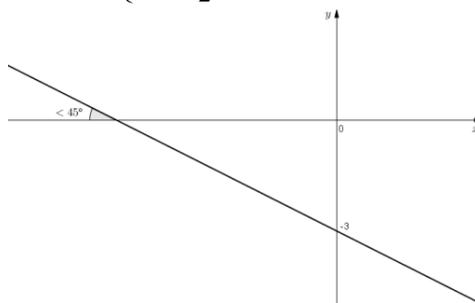
Quadro 3.9: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{1}{2}t - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

no plano cartesiano

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Descendente	x_0 e y_0 (sinais diferentes: + e -)
Ângulo com os eixos	Ângulo menor que 45°	$ x_0 = 1 > y_0 = \frac{1}{2}$
Posição sobre o eixo	Corta abaixo da origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = -3 < 0$ (correção aditiva: - 3)

Fonte: Autores da pesquisa

Figura 3.11: Gráfico de $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{1}{2}t - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

$$e) \quad x = -7 - 10t \text{ e } y = 1 + 10t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

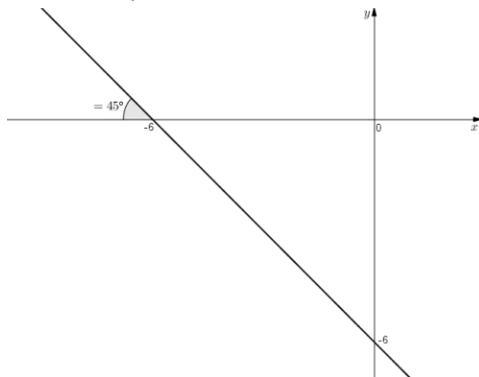
$$\begin{cases} x = -7 - 10t \\ y = 1 + 10t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -10 \\ y_0 = 10 \\ x_1 = -7 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Quadro 3.10: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = -7 - 10t \\ y = 1 + 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Descendente	x_0 e y_0 (sinais diferentes: + e -)
Ângulo com os eixos	Partição simétrica (=45°)	$ x_0 = y_0 = 10$
Posição sobre o eixo	Corta abaixo da origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = -6 < 0$ x_0 (correção aditiva: - 6)

Fonte: Autores da pesquisa

Figura 3.12: Gráfico de $\begin{cases} x = -7 - 10t \\ y = 1 + 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

$$f) \quad x = 3 - 3t \text{ e } y = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

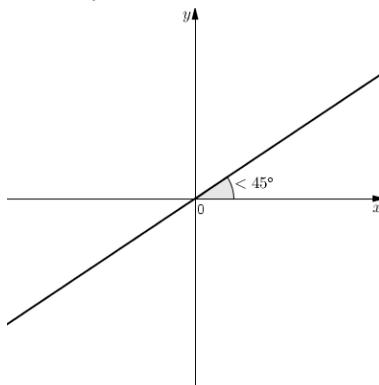
$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -2 \\ x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

Quadro 3.11: Valores e variáveis visuais para $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano

Variáveis Visuais	Valores	Unidades simbólicas
Sentido da Inclinação	Ascendente	x_0 e y_0 (sinais iguais: - e -)
Ângulo com os eixos	Ângulo menor que 45°	$ x_0 = 3 > y_0 = 2$
Posição sobre o eixo	Corta na origem	$y_1 - \frac{y_0}{x_0} x_1 = 0$

Fonte: Autores da pesquisa

Figura 3.13: Gráfico de $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano cartesiano



Fonte: Autores da pesquisa

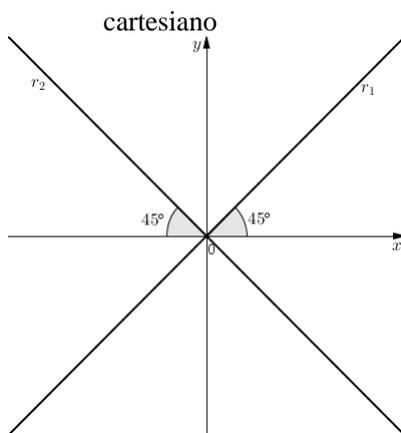
Complementando o trabalho de Duval em relação ao estudo da reta sob a ótica da interpretação global no que tange a translação de retas no plano, temos:

1º. A reta r_1 dada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e a reta r_2

dada por $\begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ representam, no plano cartesiano, as

bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente, como pode ser observado na figura 3.14.

Figura 3.14: Gráfico de $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ no plano



2º. Seja a reta r_1 dada pelas equações paramétricas $\begin{cases} x = x_1 + x_0t \\ y = y_1 + y_0t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

e a reta r_2 dada por $\begin{cases} x = x_3 + x_2t \\ y = y_3 + y_2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Dizemos que r_1 é paralela

a r_2 somente quando a igualdade $y_0x_2 = x_0y_2$ é verificada. Por

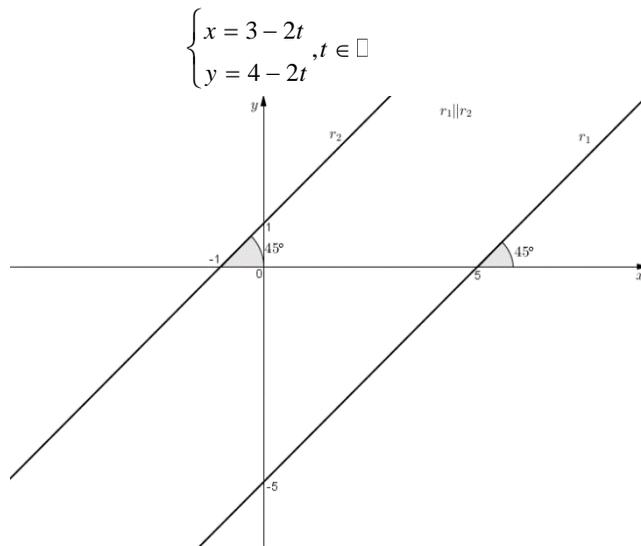
exemplo, as retas dadas pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ e } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ são retas paralelas, pois:}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \text{ e} \\ \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(-1)(-2) = (-1)(-2)}_{y_0 x_2 = x_0 y_2}. \end{aligned}$$

Na figura 3.15 você pode visualizar graficamente o que acabamos de expor, onde pode ser percebido que r_2 corresponde a uma translação vertical de r_1 em 6 unidades para cima, o que caracteriza que as duas terão a mesma variável visual corresponde ao ângulo entre elas e o eixo dos x (eixo das abscissas).

Figura 3.15: Paralelismo entre as retas $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e



Fonte: Autores da pesquisa

3º. No ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas temos que a ordenada é nula, ou seja, $y=0$. A abscissa deste ponto de intersecção da reta com o eixo dos x pode ser obtida pelo “tratamento”:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0 t \\ y = y_1 + y_0 t \rightarrow 0 = y_1 + y_0 t \rightarrow t = -\frac{y_1}{y_0} \Rightarrow x = x_1 + x_0 \left(-\frac{y_1}{y_0} \right) \Rightarrow x = x_1 - \frac{x_0}{y_0} y_1 \end{cases}$$

No caso do exemplo das retas dadas pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ e } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ temos:}$$

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ x_1 = 3 \\ y_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 3 - \frac{(-1)}{(-1)}(-2) = 5 \text{ [Verifique na figura}$$

3.15]

e

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -2 \\ x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 3 - \frac{(-2)}{(-2)}(4) = -1 \text{ [Verifique na figura 3.15]}$$

Observe que, neste caso, ocorreu um deslocamento horizontal da reta $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ em 6 unidades para a esquerda, pois afinal, está garantido o paralelismo como já comentado acima.

O estudo que acabamos de fazer em relação ao objeto matemático “reta no plano cartesiano” corresponde a uma adaptação, ou seja, uma complementação do estudo realizado por Raymond Duval sobre o estudo do mesmo objeto, conforme apresentado no capítulo 2 deste trabalho. A diferença está no fato de que Duval considerou retas dadas por equações

cartesianas e aqui estendemos para as retas dadas por equações paramétricas.

No próximo capítulo faremos um estudo da parábola aplicando a interpretação global, a partir de equações paramétricas, no intuito de estender o trabalho proposto por Moretti (2003) já discutido no capítulo 2 deste trabalho. Apresentaremos um estudo da parábola partindo de suas equações dadas na forma paramétrica, deixando assim uma abertura para posterior estudo das demais cônicas parametrizadas.

5 O PROCEDIMENTO DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS NO ESBOÇO DE PARÁBOLAS DADAS POR EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

5.1 Introdução

No capítulo 3 foi feita uma interpretação figural global de retas dadas por equações paramétricas, onde fizemos uma ampliação do estudo feito por Duval (1988) na sua interpretação global para as retas no plano, dadas por equações cartesianas $y = ax + b$. Vimos que as equações paramétricas são formas de representar as retas através de um parâmetro, ou seja, uma variável que faz a ligação de duas equações que pertencem à mesma reta.

Assim, em vez de descrever uma reta expressando a ordenada de um ponto $P(x, y)$ da reta em função de x , expressamos ambas as coordenadas em função de uma terceira variável t , onde no estudo do movimento de uma partícula, t geralmente denota *tempo*.

Diante do estudo feito, podemos dizer que o estudo da trajetória retilínea de uma partícula em movimento descrita por um par de equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$ são melhores que uma equação cartesiana, porque descrevem a posição da partícula $(x, y) = (f(t), g(t))$ em qualquer instante t , o que certamente facilita o estudo dos movimentos feito na disciplina de Física.

Na interpretação global feita para retas expressas pelas equações paramétricas $x = x_1 + x_0t$ e $y = y_1 + y_0t$, pudemos verificar as relações existentes entre os valores de seus coeficientes e as variáveis visuais no gráfico da reta que as representa.

Entretanto, considerando um ponto de vista dinâmico, podemos pensar em uma trajetória não retilínea que seja representante do movimento de certa partícula no plano, ou seja, uma trajetória cujo gráfico de uma equação envolvendo duas variáveis (x, y) se constitui em qualquer curva do plano que não seja uma reta.

Imaginemos que uma partícula se move ao longo de uma curva que denominaremos por C . C pode ser uma curva desconhecida ou uma curva na qual já conhecemos sua denominação, tais como a senóide,

cossenóide, exponencial, logarítmica, ou ainda uma cônica³².

Neste capítulo vamos centralizar nosso estudo na interpretação global de uma das cônicas conhecidas, a parábola, expressa por equações paramétricas, no intuito de ampliarmos o estudo feito por Moretti (2003) apresentado no capítulo 2, de forma análoga ao que foi feito para ampliação do estudo da reta realizado por Duval (1988) e discutido no capítulo anterior.

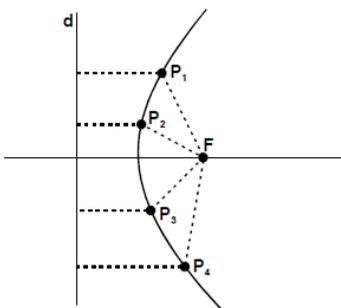
5.2 Parábola: definição, elementos e equações (VENTURI, 1994, p. 38-41)

5.2.1 Definição

Considere-se, em um plano π , um ponto F e uma reta d que não contém F . Denominamos parábola de foco F e diretriz d ao lugar geométrico dos pontos do plano π que equidistam de d e F .

A Figura 4.1 mostra alguns pontos pertencentes à parábola (equidistantes do ponto F e da reta d).

Figura 4.1: Alguns pontos equidistantes do ponto F e da reta d



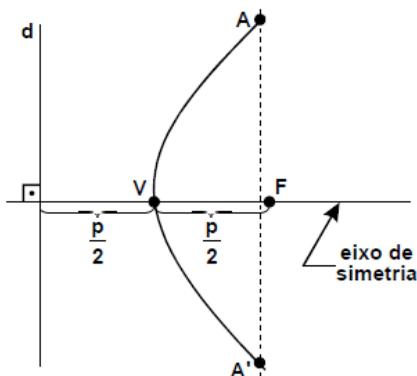
Fonte: Venturi (1994, p. 41).

³² Dado num plano π um sistema ortogonal de coordenadas, e dada a equação $G(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, chama-se *cônica* ao conjunto dos pontos $P(x,y)$ de π tais que $G(x,y)$ se verifica. São exemplos de cônicas: o conjunto vazio, um ponto, uma reta, a reunião de duas retas paralelas, a reunião de duas retas concorrentes, a elipse, a hipérbole, a parábola e a circunferência. (OLIVEIRA, 1986, p. 271-272)

4.2.2 Elementos da Parábola

Na Figura 4.2 apresentamos visualmente os elementos da parábola, a saber:

Figura 4.2: Elementos visuais da parábola



Fonte: Venturi (1994, p. 41).

Denominamos: F : foco; d : diretriz; V : vértice; p : parâmetro que representa a distância do foco à diretriz ($p \neq 0$); \overline{VF} : reta que representa o eixo de simetria da parábola; $\overline{AA'}$: corda (segmento) que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria³³, também chamada de corda focal mínima ou Latus Rectum.

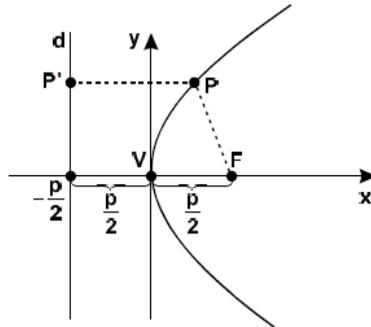
4.2.3 Equações Canônicas da parábola com vértice na origem ($V \equiv O$)

a) O eixo de simetria coincide com o eixo x

Na Figura 4.3 temos uma parábola com concavidade voltada para a direita representada no sistema de coordenadas cartesianas.

³³ O eixo de simetria é também chamado de eixo focal.

Figura 4.3: Parábola com concavidade voltada para direita e vértice $V(0,0)$



Fonte: Venturi (1994, p. 42).

Note que a diretriz d tem equação $x = -\frac{p}{2}$. Ademais: $P(x, y)$ é um ponto genérico da parábola; $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ é o foco; $P'\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto sobre a diretriz.

Por definição, vem:

$$\underbrace{d(P, F)}_{\text{distância de } P \text{ até } F} = \underbrace{d(P, P')}_{\text{distância de } P \text{ até } P'} \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} \quad (*)$$

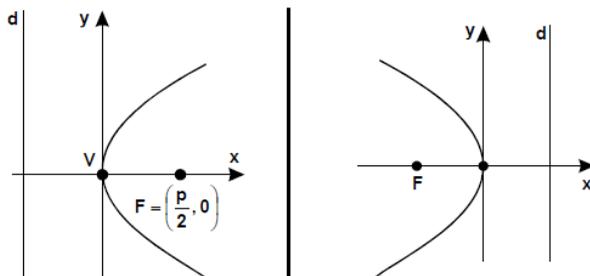
Elevando ambos os membros de (*) ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 = 2px,$$

que representa a equação canônica (ou reduzida ou padrão) da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo x .

Na Figura 4.4 podemos observar a variação visual da concavidade da parábola em relação ao parâmetro p da equação $y^2 = 2px$.

Figura 4.4: Concavidade da parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo x e vértice $V(0,0)$



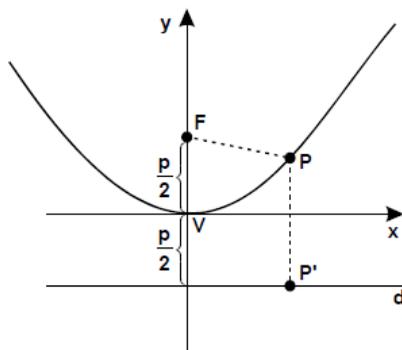
Fonte: Venturi (1994, p. 42).

Perceba na Figura 4.4, que se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a direita (voltada para a parte positiva do eixo x). Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

b) O eixo de simetria coincide com o eixo y

Na Figura 4.5 temos uma parábola com concavidade voltada para cima representada no sistema de coordenadas cartesianas.

Figura 4.5: Parábola com concavidade voltada para cima e vértice $V(0,0)$



Fonte: Venturi (1994, p. 42).

Note que a diretriz d tem equação $y = -\frac{p}{2}$. Ademais: $P(x, y)$ é um ponto genérico da parábola; $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ é o foco; $P'\left(x, -\frac{p}{2}\right)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto sobre a diretriz.

Por definição, vem:

$$\underbrace{d(P, F)}_{\text{distância de } P \text{ até } F} = \underbrace{d(P, P')}_{\text{distância de } P \text{ até } P'} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}}_{(*)} = \underbrace{\sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}}_{(*)}$$

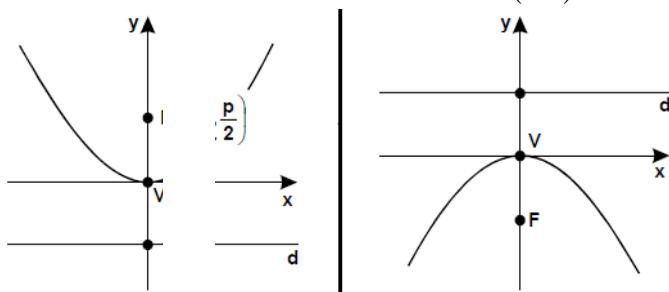
Elevando ambos os membros de (*) ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \Rightarrow x^2 = 2py, \text{ que representa a}$$

equação canônica da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo y .

Na Figura 4.6 podemos observar a variação visual da concavidade da parábola em relação ao parâmetro p da equação $x^2 = 2py$.

Figura 4.6: Concavidades das parábolas com eixo de simetria coincidente com o eixo y e vértice $V(0,0)$



Fonte: Venturi (1994, p. 42).

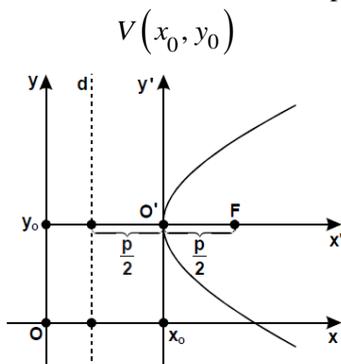
Note agora na Figura 4.6, que se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a cima (voltada para a parte positiva do eixo y). Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

5.2.3.1 Equações da parábola com vértice não coincidente com a origem ($V \equiv O' = (x_0, y_0)$)

a) O eixo de simetria é paralelo ao eixo x

Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem coincide com o vértice $V = (x_0, y_0)$, conforme pode ser verificado na Figura 4.7.

Figura 4.7: Parábola com concavidade voltada para direita e vértice



Fonte: Venturi (1994, p. 50).

Face ao exposto, a equação da parábola referida ao nosso sistema $x'O'y'$ é:

$$y'^2 = 2px' \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Contudo, devido à translação: } \left. \begin{array}{l} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{array} \right\} \quad \textcircled{2}$$

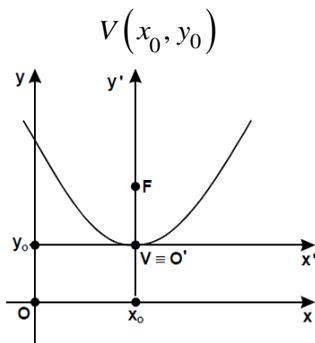
Substituindo $\textcircled{2}$ em $\textcircled{1}$, vem: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ [1]

que representa a equação da parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo x . O parâmetro p será positivo ou negativo se, respectivamente a concavidade da parábola estiver voltada para a direita ou para a esquerda.

b) O eixo de simetria é paralelo ao eixo y

Analogamente, através de uma translação de eixos, obtemos a equação da parábola de concavidade voltada para cima, conforme esboço da figura 4.8.

Figura 4.8: Parábola com concavidade voltada para cima e vértice



Fonte: Venturi (1994, p. 51).

A equação da parábola referida ao nosso sistema $x'O'y'$ é:

$$x'^2 = 2py' \quad \textcircled{3}$$

Contudo, devido à translação, substituindo ② em ③, vem:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad \textcircled{II}$$

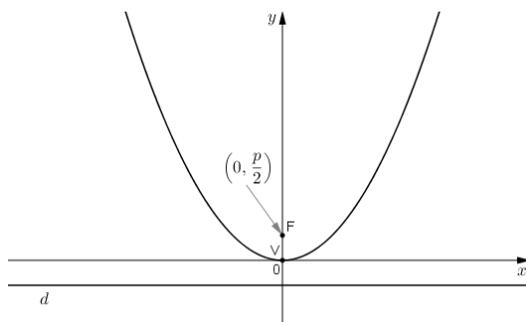
que representa a equação da parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo y . O parâmetro p será positivo ou negativo se,

respectivamente a concavidade da parábola estiver voltada para cima ou para baixo.

5.3 As equações paramétricas da parábola

Apresentamos detalhadamente a definição de parábola, seus elementos e suas equações, de acordo com Venturi (1986, p. 38-51). Aqui, iniciemos considerando a equação canônica da parábola que tem vértice na origem $(0,0)$ do sistema de coordenadas cartesianas, foco $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, eixo de simetria³⁴ coincidente com o eixo y e diretriz paralela ao eixo dos x , isto é, $x^2 = 2py$, cuja conversão da representação algébrica para a gráfica está genericamente sintetizada na Figura 4.9.

Figura 4.9: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica (Curva: $x^2 = 2py$)



Fonte: Autores da pesquisa

Por translação, a parábola com vértice em $\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, foco $(0,0)$, eixo de simetria coincidente com o eixo y e diretriz paralela ao eixo dos x , tem equação $x^2 = 2p\left(y + \frac{p}{2}\right)$.

³⁴ Também chamado de Eixo Focal.

Fazendo $x = pt$, temos $y = \frac{p}{2}t^2$. Ainda, fazendo $k = \frac{p}{2}$, as equações paramétricas da parábola $x^2 = 2py$ são:

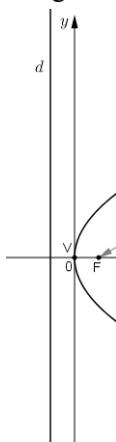
$$\begin{cases} x = 2kt \\ y = kt^2, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por translação, as equações paramétricas da parábola $x^2 = 2p\left(y + \frac{p}{2}\right)$ são:

$$\begin{cases} x = 2kt \\ y = k(t^2 - 1), t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Analogamente, consideremos agora a parábola que tem vértice na origem $(0,0)$ do sistema de coordenadas cartesianas, foco $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, eixo de simetria coincidente com o eixo x e diretriz paralela ao eixo dos y , isto é, $y^2 = 2px$, cuja conversão da representação algébrica para a gráfica pode ser observada na Figura 4.10.

Figura 4.10: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica (Curva: $y^2 = 2px$)



Fonte: Autores da pesquisa

Por translação, a parábola com vértice em $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, foco $(0, 0)$, eixo de simetria coincidente com o eixo x e diretriz paralela ao eixo dos y , tem equação $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$.

Fazendo $y = pt$, temos $x = \frac{p}{2}t^2$. Ainda, fazendo $k = \frac{p}{2}$, as equações paramétricas da parábola $y^2 = 2px$ são:

$$\begin{cases} x = kt^2 \\ y = 2kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Por translação, as equações paramétricas da parábola $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ são:

$$\begin{cases} x = k(t^2 - 1) \\ y = 2kt \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Outra forma de obtermos as equações paramétricas da parábola é perceber que equações canônicas desta, figuram variáveis no 1º grau. Isso nos permite escrever essa variável como dependente da variável do segundo grau.

Assim, por exemplo, na parábola C de equação $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, cujo vértice é (x_0, y_0) e o eixo de simetria é paralelo ao eixo x , temos:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \Leftrightarrow x = \frac{(y - y_0)^2}{2p} + x_0$$

Escolhendo a variável independente t como sendo $y - y_0$, a variável dependente x se expressa como $x = \frac{t^2}{2p} + x_0$. Assim, as equações paramétricas da parábola são:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} + x_0 \\ y = t + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad \textcircled{1}$$

Para a equação canônica $y^2 = 2px$, que representa uma parábola com vértice na origem e eixo de simetria paralelo ao eixo x , basta fazermos o seguinte tratamento:

$$y^2 = 2px \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2p}$$

Chamando $t = y$, temos as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad \textcircled{2}$$

Analogamente, para as equações da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y , com vértice na origem dada por $x^2 = 2py$, e com vértice fora da origem dada por $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, temos respectivamente os seguintes pares de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \textcircled{3} \text{ e } \begin{cases} x = t + x_0 \\ y = \frac{t^2}{2p} + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \textcircled{4}.$$

Chamando $k = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 2k$ teremos $\textcircled{2}$, $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ e $\textcircled{4}$ expressas respectivamente como:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{4k} \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad \begin{cases} x = \frac{t^2}{4k} + x_0 \\ y = t + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{4k} \end{cases}, t \in \mathbb{R}; \quad \begin{cases} x = t + x_0 \\ y = \frac{t^2}{4k} + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5.4 Comparações entre a equação cartesiana e as equações paramétricas da parábola

A equação [I] obtida representa genericamente uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo x e vértice $V = (x_0, y_0)$. Desenvolvendo [I] e isolando x , temos:

$$\begin{aligned} (y - y_0)^2 &= 2p(x - x_0) \quad [I] \\ y^2 - 2y_0y + y_0^2 &= 2px - 2px_0 \\ x &= \frac{1}{2p}y^2 - \frac{2y_0}{2p}y + \frac{y_0^2 + 2px_0}{2p} \\ x &= \frac{1}{2p}y^2 - \frac{y_0}{p}y + \underbrace{\frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}}_{c} \quad [I'] \\ &\quad \quad \quad a \quad \quad \quad b \quad \quad \quad c \end{aligned}$$

ou $x = ay^2 + by + c$, que é a equação cartesiana da parábola em questão, onde: $p = \frac{1}{2a}$ e $b = \frac{y_0}{p} \Rightarrow y_0 = bp \Rightarrow y_0 = \frac{-b}{2a}$, que nos permite calcular a ordenada do vértice da parábola (y_0).

Ainda, como tínhamos adotado $k = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 2k$ e sendo $p = \frac{1}{2a}$

, vem: $p = \frac{1}{2a} \Rightarrow 2k = \frac{1}{2a} \Rightarrow k = \frac{1}{4a}$ e, portanto, as equações

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{4k}, t \in \mathbb{R} \\ y = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \frac{t^2}{4k} + x_0, t \in \mathbb{R} \\ y = t + y_0 \end{cases} \quad \text{ficam escritas, respectivamente}$$

como:

$$\begin{cases} x = at^2, t \in \mathbb{R} \\ y = t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = at^2 + x_0, t \in \mathbb{R} \\ y = t + y_0 \end{cases}.$$

Procedendo de forma análoga, o desenvolvimento da equação [II] obtida, representa genericamente uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo y e tem vértice $V = (x_0, y_0)$, nos faz concluir que as equações

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{4k}, t \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = t + x_0 \\ y = \frac{t^2}{4k} + y_0, t \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ ficam escritas, respectivamente}$$

como:

$$\begin{cases} x = t \\ y = at^2, t \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ e}$$

$$\begin{cases} x = t + x_0 \\ y = at^2 + y_0, t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

A partir de agora, as equações paramétricas $\begin{cases} x = at^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e

$\begin{cases} x = t \\ y = at^2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ serão chamadas de “curvas paramétricas base”. A

primeira relativa a uma parábola com eixo focal paralelo ao eixo x e a segunda, com eixo focal paralelo ao eixo y , ambas com vértice na origem $(0,0)$ do sistema de coordenadas cartesianas. Uma curva paramétrica base se constituirá no ponto de partida para obtermos outras curvas da mesma família, possibilitando a interpretação global a que nos propomos, conforme pode ser observado na seção a seguir.

5.5 Interpretação global de parábolas dadas por equações paramétricas

Através da discussão dos exemplos a seguir, obteremos os elementos necessários para ampliação do estudo feito por Moretti (2003) apresentado no capítulo 2, que se constitui como propósito deste capítulo.

Exemplos: Esboçar graficamente as curvas dadas pelas seguintes equações paramétricas:

$$a) C_1 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

Primeiramente, é importante reconhecer que a equação paramétrica da curva C_1 é a representante algébrica de uma cônica e que esta é uma parábola.

Existem nove possibilidades para uma equação representar uma cônica³⁵. São elas: o conjunto vazio, um ponto, uma reta, a reunião de duas retas paralelas, a reunião de duas retas concorrentes, a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola. (OLIVEIRA, 1986, p. 271-272).

No caso da parábola, o reconhecimento parte da percepção de que as coordenadas x e y são expressas por funções polinomiais, uma delas polinomial do 1º grau e a outra, polinomial do 2º grau. Neste exemplo, note que temos $x = t^2$ (termo quadrático) e $y = t$ (termo linear), o que nos faz concluir que a parábola tem eixo focal paralelo ao eixo das abscissas.

$$\text{Comparando } \begin{cases} x = at^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ com } C_1 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ vemos que}$$

$a = 1 > 0$, o que indica que a parábola terá concavidade voltada para a direita, visto que a tem o mesmo sinal de p , pois $p = \frac{1}{2a} \Rightarrow a = \frac{1}{2p}$,

conforme consta no comentário feito após a figura 4.4.

Também é importante perceber que na equação paramétrica que representa C_1 temos a ausência de termo independente (com grau zero) na equação da coordenada y e, ausência de termos com grau zero e grau um na equação da coordenada x . Isso nos faz concluir que a parábola tem vértice na origem, ou seja, no ponto $(0,0)$, sendo seu eixo focal coincidente com o eixo dos x .

³⁵ Embora o autor em sua obra tenha apenas trabalhado com as equações cartesianas das cônicas, podemos estender suas conclusões para as cônicas expressas por funções paramétricas.

Assim, para a conversão da equação $C_1 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ em sua respectiva representante gráfica, podemos esboçar o seguinte quadro de pontos:

Quadro 4.1: Alguns pontos da parábola $C_1 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

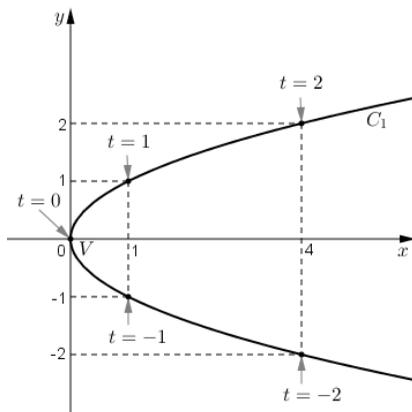
$t \in \mathbb{R}$	(x, y)
-2	$(4, -2)$
-1	$(1, -1)$
1	$(1, 1)$
2	$(4, 2)$

Fonte: Autores da pesquisa

Neste caso, como já sabemos que o eixo focal coincide com o eixo das abscissas, bem como sabemos o vértice da parábola e que sua concavidade é voltada para a direita, bastava tomarmos dois valores para t , tais que seus respectivos pontos ficassem um deles acima do eixo x e o outro abaixo deste.

Observe a representação gráfica de C_1 na Figura 4.11.

Figura 4.11: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_1 : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

$$\text{b) } C_2 : \begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

O termo quadrático de C_2 figura na equação paramétrica da coordenada x . Então, o eixo de simetria (ou eixo focal) é paralelo ao eixo x . Temos $a = 2 > 0$, o que indica que a parábola terá concavidade voltada para a direita.

Em C_2 também há ausência de termo independente (com grau zero) na equação da coordenada y e ausência de termo com grau zero ou grau um na equação da coordenada que possui o termo quadrático, isto é, em x . Assim, concluímos que C_2 também tem seu vértice no ponto $(0, 0)$.

O Quadro 4.2 nos mostra alguns pontos da “curva paramétrica base” a qual estamos chamando de C_2 .

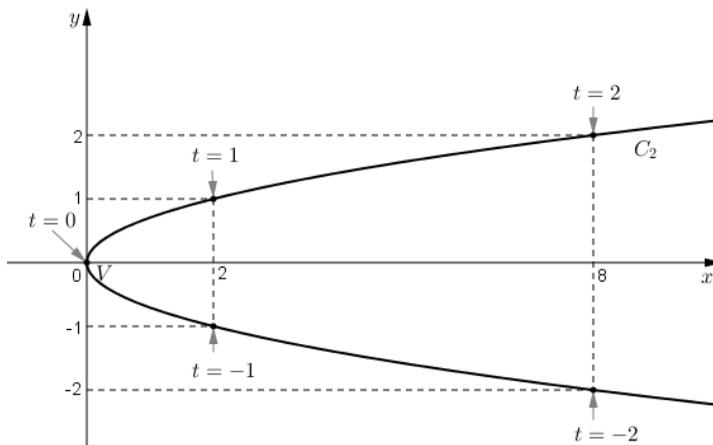
Quadro 4.2: Alguns pontos da parábola $C_2 : \begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$	(x, y)
-2	$(8, -2)$
-1	$(2, -1)$
1	$(2, 1)$
2	$(8, 2)$

Fonte: Autores da pesquisa

Observe a representação gráfica de C_2 na Figura 4.12.

Figura 4.12: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_2 : \begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

$$\text{c) } C_3 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

O termo quadrático de C_3 figura na equação paramétrica da coordenada x . Então, o eixo de simetria é paralelo ao eixo x . Temos $a = \frac{1}{2} > 0$, o que indica que a parábola terá concavidade voltada para a direita.

Em C_3 também há ausência de com grau zero na equação das coordenadas x e y , bem como ausência de termo com grau um na equação da coordenada que possui o termo quadrático, isto é, em x . Assim, concluímos que C_3 também tem seu vértice no ponto $(0,0)$.

O Quadro 4.3 nos mostra alguns pontos da “curva paramétrica base” C_3 .

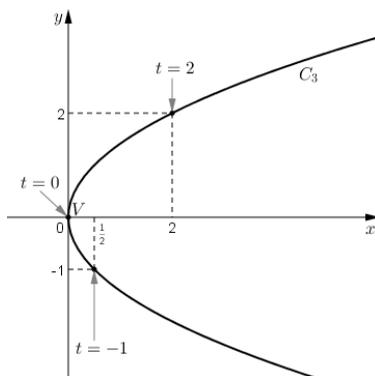
Quadro 4.3: Alguns pontos da parábola $C_3 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$	(x, y)
-1	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
2	$(2, 2)$

Fonte: Autores da pesquisa

Observe a representação gráfica de C_3 na Figura 4.13.

Figura 4.13: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_3 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

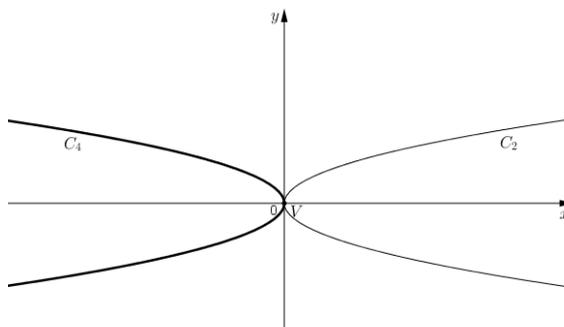
d) $C_4 : \begin{cases} x = -2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Resolução:

Comparando as equações paramétricas de C_2 e C_4 , vemos que elas diferem apenas em relação ao valor do coeficiente a , pois em C_2 , $a = 2$ e em C_4 , $a = -2$. Então, a representação paramétrica de C_4 pode ser obtida por simetria de C_2 em relação ao eixo dos y .

Na Figura 4.14 temos a representação gráfica de C_4 a partir de C_2 .

Figura 4.14: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_4 : \begin{cases} x = -2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



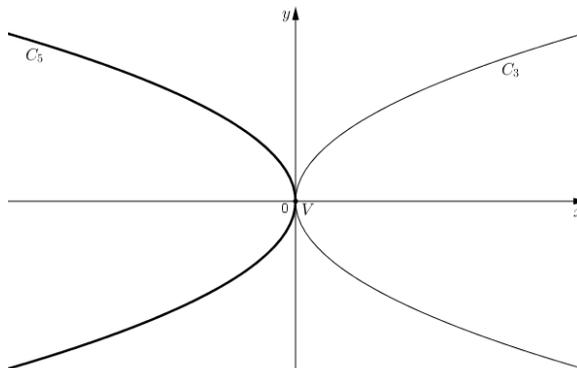
Fonte: Autores da pesquisa

$$\text{e) } C_5 : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

Análogo ao raciocínio do item anterior, aqui vemos que as equações paramétricas de C_3 e C_5 diferem apenas em relação ao valor do coeficiente a , pois em C_3 , $a = \frac{1}{2}$ e em C_5 , $a = -\frac{1}{2}$. Então, a representação paramétrica de C_5 pode ser obtida por simetria de C_3 em relação ao eixo dos y . Na Figura 4.15 temos a representação gráfica de C_5 a partir de C_3 .

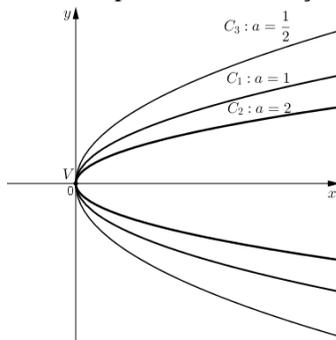
Figura 4.15: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_5 : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

Fazendo uma comparação entre valores do coeficiente a em C_1 , C_2 , C_3 , C_4 e C_5 , vemos que a parábola tem abertura maior quando $|a| < 1$ e, uma menor abertura se $|a| > 1$. Assim, a abertura da parábola (variável visual) está diretamente relacionada à desigualdade $|a| < 1$ ou $|a| > 1$ (unidades simbólicas). Na Figura 4.16 se pode visualizar com nitidez essa a abertura da parábola como variável visual.

Figura 4.16: Abertura da parábola em relação ao coeficiente a



Fonte: Autores da pesquisa

O fato da abertura da parábola estar associada à desigualdade $|a| > 1$ ou $|a| < 1$, quando a curva é dada por equações paramétricas, é similar ao que foi descrito por Moretti (2003) em seu artigo, no que tange a “abertura” da parábola representada por uma equação cartesiana. É importante ter clareza que tanto na representação cartesiana quanto na representação paramétrica, é o módulo do coeficiente do termo quadrático que determina quão maior ou menor é a abertura da referida parábola.

$$f) \quad C_6 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

O termo quadrático de C_6 figura na equação paramétrica da coordenada y . Então, o eixo de focal é paralelo ao eixo y .

$$\text{Comparando } \begin{cases} x = t \\ y = at^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ com } C_6 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ vemos}$$

que $a = -2 < 0$, o que indica que a parábola terá concavidade voltada para baixo, visto que a tem o mesmo sinal de p , pois $p = \frac{1}{2a} \Rightarrow a = \frac{1}{2p}$, conforme consta no comentário feito após a Figura 4.6.

Verifica-se que em C_6 há ausência de termo de grau zero na equação da coordenada x e ausência de termo com grau zero e grau um na equação da coordenada y que possui o termo quadrático, isto é, em y . Então, concluímos que C_6 também tem seu vértice no ponto $(0, 0)$.

$$\text{Para a conversão da equação } C_6 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ em sua}$$

respectiva representante gráfica, podemos esboçar o seguinte quadro contendo alguns de seus pontos:

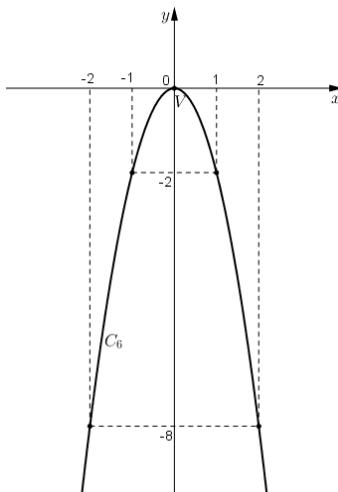
Quadro 4.4: Alguns pontos da parábola $C_6 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t^2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$t \in \mathbb{R}$	(x, y)
-2	$(-2, -8)$
-1	$(-1, -2)$
1	$(1, -2)$
2	$(2, -8)$

Fonte: Autores da pesquisa

Na Figura 4.17 apresentamos um esboço do gráfico de C_6 .

Figura 4.17: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_6 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t^2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$



Fonte: Autores da pesquisa

g) $C_7 : \begin{cases} x = t \\ y = 4t^2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Resolução:

O termo quadrático de C_7 figura na equação paramétrica da coordenada y . Então, o eixo focal é paralelo ao eixo y . Temos $a = 4 > 0$, o que indica que a parábola terá concavidade voltada para cima. O vértice da parábola é no ponto $(0, 0)$, devido ausência de termos de grau zero e grau um na equação da coordenada y e ausência de termo de grau zero na equação da coordenada x , o que nos faz concluir também que o eixo focal coincide com o eixo y .

No Quadro 4.5 temos a representação simbólica de alguns pontos de C_7 e na figura 4.10, sua representação gráfica.

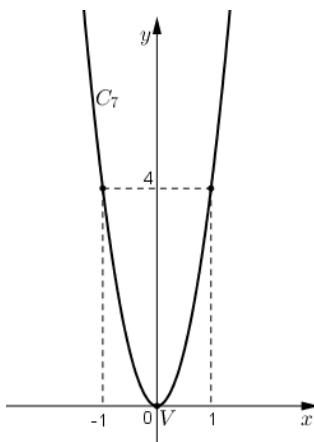
Quadro 4.5: Alguns pontos da parábola $C_7 : \begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$	(x, y)
-1	$(-1, 4)$
1	$(1, 4)$

Fonte: Autores da pesquisa

Na Figura 4.18 apresentamos um esboço do gráfico de C_7 .

Figura 4.18: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_7 : \begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

Até o momento as curvas (parábolas) obtidas possuem a coordenada que não contém o termo quadrático com coeficiente igual a 1, conforme pode ser verificado no Quadro 4.6.

Quadro 4.6: Coeficientes dos termos lineares das parábolas

Parábola	Equações Paramétricas	Coeficiente (termo de 1º grau)
C_1	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$y = t$ Coeficiente = 1
C_2	$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$y = t$ Coeficiente = 1
C_3	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$y = t$ Coeficiente = 1
C_4	$\begin{cases} x = -2t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$y = t$ Coeficiente = 1
C_5	$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$y = t$ Coeficiente = 1
C_6	$\begin{cases} x = t \\ y = -2t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$x = t$ Coeficiente = 1
C_7	$\begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$	$x = t$ Coeficiente = 1

Fonte: Autores da pesquisa

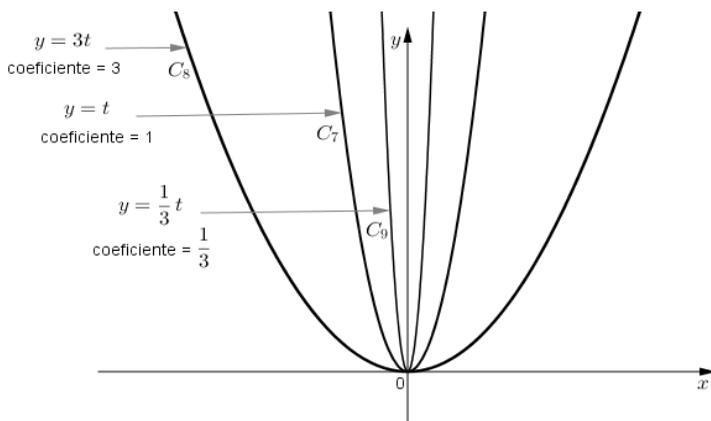
Diante do exposto, cabe a pergunta: O que ocorre com a parábola caso se mantenha o coeficiente do termo de 2º grau, mas se faça variar o coeficiente do termo de 1º grau da outra coordenada?

Para responder o questionamento anterior, observemos a Figura 4.19 que mostra num mesmo gráfico as parábolas dadas

parametricamente por: $C_7 : \begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, $C_8 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e

$$C_9 : \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = 4t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Figura 4.19: Coeficientes dos termos lineares das parábolas



Fonte: Autores da pesquisa

Observando as representações gráficas de C_7 , C_8 e C_9 na Figura 4.19, vemos que quanto maior for o módulo do coeficiente do termo de 1º grau da coordenada que o contém, maior será a abertura da parábola. Ao contrário do valor do coeficiente a (que acompanha o termo quadrático), aqui a variação da abertura se dá numa proporção direta.

Assim, reescrevendo a equação $\begin{cases} x = at^2 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ como $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

temos que: a parábola tem abertura maior quando $0 < |a| < 1$ e uma menor abertura se $|a| > 1$. Por outro lado, se $|b| > 1$, maior será a abertura da parábola e, se $0 < |b| < 1$, menor será a abertura.

Em todos os exemplos discutidos até agora neste capítulo, as parábolas possuem vértice na origem, ou seja, no ponto $(0,0)$. No entanto, se este vértice não for a origem do sistema de coordenadas cartesianas, como se dará a interpretação global destas? É o que vamos discutir na sequência de exemplos a seguir.

$$\text{h) } C_{10} : \begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

Primeiro esboçaremos a representação gráfica da curva (parábola) paramétrica base, dada por $C_{10}' : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, onde temos: eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas, vértice na origem $(0,0)$, o que nos indica que o eixo de simetria coincide com o eixo x e, concavidade voltada para direita, pois $a = 1 > 0$.

No Quadro 4.7 temos a representação simbólica de alguns pontos de C_{10}' e na Figura 4.20, sua representação gráfica.

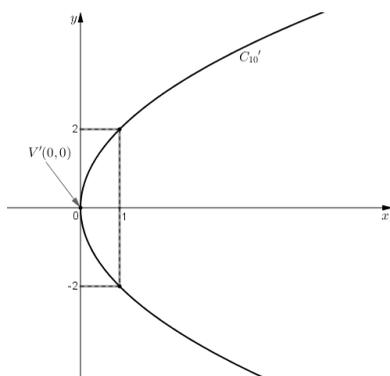
Quadro 4.7: Alguns pontos da parábola $C_{10}' : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$	(x, y)
-1	$(1, -2)$
1	$(1, 2)$

Fonte: Autores da pesquisa

O quadro com apenas estes dois pontos pertencentes à parábola são necessários e suficientes para nos fornecer uma ideia a respeito da abertura da mesma.

Figura 4.20: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_{10}' : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

Note em $C_{10} : \begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ que na equação da coordenada x ,

onde está o termo quadrático também há a presença de um termo independente (grau zero), o mesmo ocorrendo na equação da coordenada y . Isto indica que o vértice da parábola não é na origem, ou seja, não é mais o ponto $(0,0)$ como em C_{10}' , mas sim o ponto de coordenadas $(2,-1)$, conforme nos certificaremos ao fazermos um tratamento nas equações paramétricas constantes na representação algébrica de C_{10} , conforme segue:

$$C_{10} : \begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Tratamento} \quad C_{10} : \begin{cases} x - 2 = t^2 \\ y + 1 = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Comparando $C_{10}' : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ cujo gráfico está esboçado na Figura

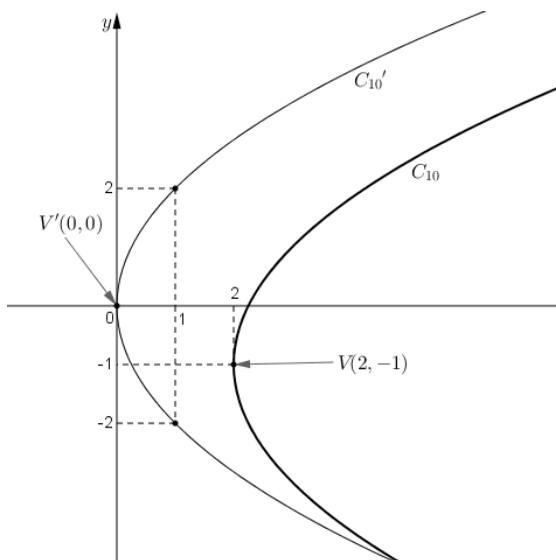
4.20 com $C_{10} : \begin{cases} x - 2 = t^2 \\ y + 1 = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, vemos que há caracterização

simultânea de dois deslocamentos, a saber:

- i. $x - +2 = t^2$ indica um deslocamento horizontal da parábola de
deslocamento
horizontal
2 unidades para a direita ($+2$);
- ii. $y + -1 = 2t$ indica um deslocamento vertical da parábola de 1
deslocamento
vertical
unidade para baixo (-1).

Em outras palavras, o gráfico de C_{10} é transladado em relação ao gráfico de C_{10}' , em 2 unidades para a direita e em 1 unidade para baixo. Isto justifica o vértice $(2, -1)$ de C_{10} , conforme pode ser visualizado na Figura 4.21.

Figura 4.21: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica $C_{10} : \begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

Reescrevendo as equações $\begin{cases} x = at^2 + x_0 \\ y = t + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e

$\begin{cases} x = t + x_0 \\ y = at^2 + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ como $\begin{cases} x = at^2 + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e

$\begin{cases} x = bt + x_0 \\ y = at^2 + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, respectivamente, sintetizamos no Quadro 4.8 as

possibilidades vistas até o momento no que diz respeito a algumas relações existentes entre os valores, as variáveis visuais e respectivas unidades simbólicas.

Quadro 4.8: Relações entre alguns valores, variáveis visuais e unidades simbólicas

Termo do 2º grau	Eixo de simetria	Unidades simbólicas	Concavidade	Vértice
t^2 na equação de x	paralelo ao eixo x	$a > 0$ $x_0 = y_0 = 0$	Voltada para direita	$(0,0)$
		$a > 0$ $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$		(x_0, y_0)
		$a < 0$ $x_0 = y_0 = 0$	Voltada para esquerda	$(0,0)$
		$a < 0$ $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$		(x_0, y_0)
t^2 na equação de y	paralelo ao eixo y	$a > 0$ $x_0 = y_0 = 0$	Voltada para cima	$(0,0)$
		$a > 0$ $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$		(x_0, y_0)
		$a < 0$ $x_0 = y_0 = 0$	Voltada para baixo	$(0,0)$
		$a < 0$ $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$		(x_0, y_0)

Fonte: Autores da pesquisa

As resoluções dos próximos exemplos serão feitas através de esquemas, similar às resoluções dos exemplos feitos no capítulo 2, quando apresentamos esquematicamente o que foi preconizado por Moretti (2003) em seu trabalho para as parábolas expressas por equações cartesianas.

$$i) \quad C_{11} : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = \frac{1}{4}t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

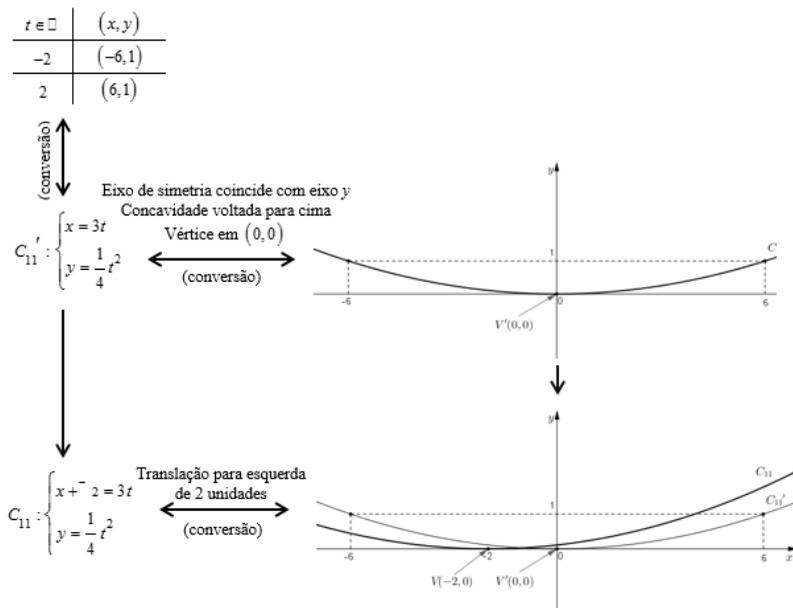
Quadro 4.9: Valores, variáveis visuais e unidades simbólicas para

$$C_{11} : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = \frac{1}{4}t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} .$$

Curva paramétrica base: $C_{11}' : \begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{1}{4}t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$				
Termo do 2º grau	Eixo de simetria	Unidades simbólicas	Concavidade	Vértice
t^2 na equação de y	paralelo ao eixo y	$a = \frac{1}{4} > 0$ $x_0 = y_0 = 0$	Voltada para cima	(0,0)
$C_{11} : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = \frac{1}{4}t^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Tratamento} \quad C_{11} : \begin{cases} x + 2 = 3t \rightarrow \text{deslocamento horizontal } (-2) \\ y = \frac{1}{4}t^2 \rightarrow \text{sem deslocamento vertical} \end{cases}$				
t^2 na equação de y	paralelo ao eixo y	$a = \frac{1}{4} > 0$ $x_0 = -2 \neq 0$ e $y_0 = 0$	Voltada para cima	(-2,0)

Fonte: Autores da pesquisa

Figura 4.22: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica de $C_{11} : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = \frac{1}{4}t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

Note que é bastante significativa a “grande” abertura da parábola C_{11} , visto que $0 < |a| = \frac{1}{4} < 1$ e $|b| = 3 > 1$. Observe também que para fazermos a conversão da representação algébrica de C_{11} em sua respectiva representação gráfica partindo da chamada curva paramétrica base C_{11}' , houve apenas um deslocamento horizontal do vértice V' de C_{11}' .

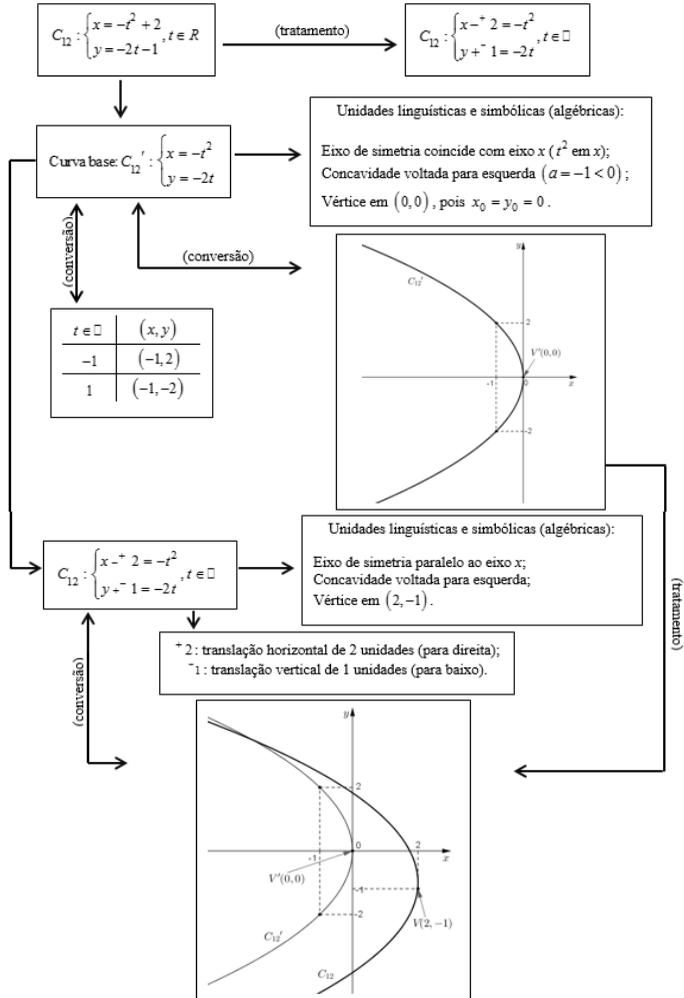
É importante destacar que não há necessidade de fazermos um quadro como o quadro 4.9 cada vez que quisermos obter o registro gráfico de uma equação, pois basta que se proceda executando os tratamentos e conversões devidas em cada etapa.

Nos dois próximos exemplos desenvolveremos as resoluções de maneira mais objetiva, detalhando os valores, variáveis visuais e respectivas unidades simbólicas na própria configuração esquemática resolutive.

$$j) C_{12} : \begin{cases} x = -t^2 + 2 \\ y = -2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

Figura 4.23: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica de $C_{12} : \begin{cases} x = -t^2 + 2 \\ y = -2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

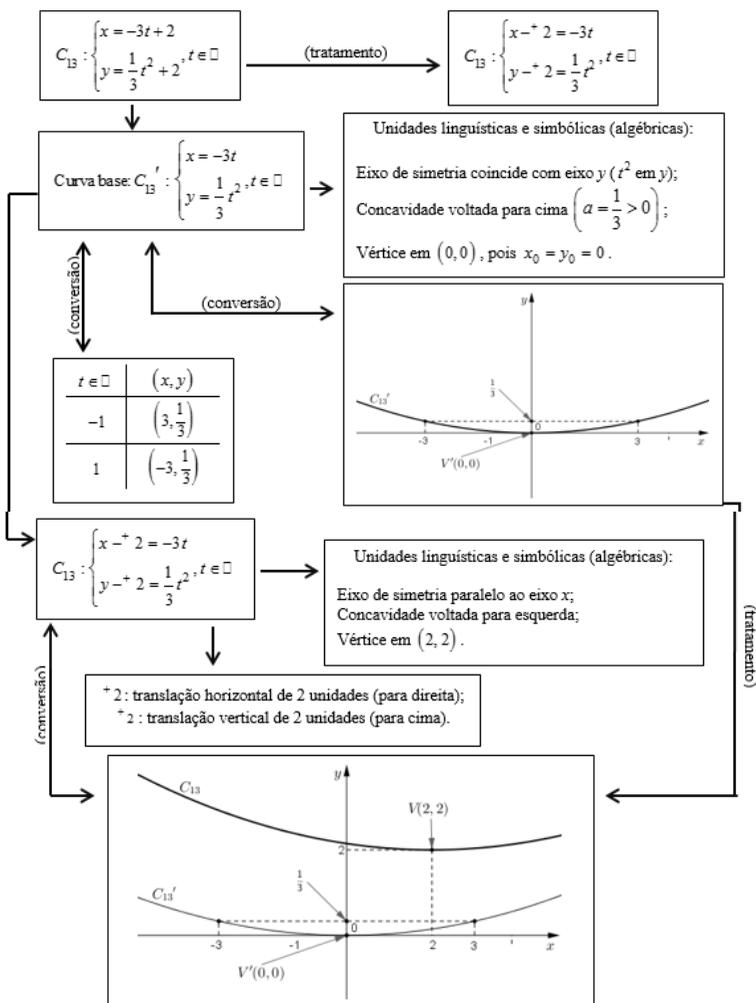


Fonte: Autores da pesquisa

$$k) C_{13} : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = \frac{1}{3}t^2 + 2 \end{cases}, t \in \square$$

Resolução:

Figura 4.24: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica de $C_{13} : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = \frac{1}{3}t^2 + 2 \end{cases}, t \in \square$



Fonte: Autores da pesquisa

Considerando a parábola dada genericamente pelas equações paramétricas $C: \begin{cases} x = at^2 + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ou $C: \begin{cases} x = bt + x_0 \\ y = at^2 + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

definimos aqui: a como sendo o coeficiente que acompanha t^2 , b o coeficiente que acompanha t e (x_0, y_0) as coordenadas do vértice V .

Em todos os exemplos desenvolvidos até agora, para a coordenada onde figura o termo quadrático não temos a presença simultânea de um

termo linear. Por exemplo, na curva dada por $C_{12}: \begin{cases} x = -t^2 + 2 \\ y = -2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

vemos na coordenada x definida $x = -t^2 + 2$ apenas a presença de um termo do 2º grau acompanhado de outro independente (grau zero). Neste contexto, cabe a seguinte pergunta: O que ocorre com a parábola se a coordenada que define o eixo de simetria for um polinômio completo de grau 2?

Sejam as seguintes estruturas genéricas:

$C: \begin{cases} x = at^2 + ct + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ e $C: \begin{cases} x = bt + x_0 \\ y = at^2 + ct + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, onde

independentemente do eixo de simetria, a é o coeficiente que acompanha t^2 , b o coeficiente que acompanha t e c é o termo independente. Será que x_0 e y_0 continuam sendo as coordenadas do vértice V ?

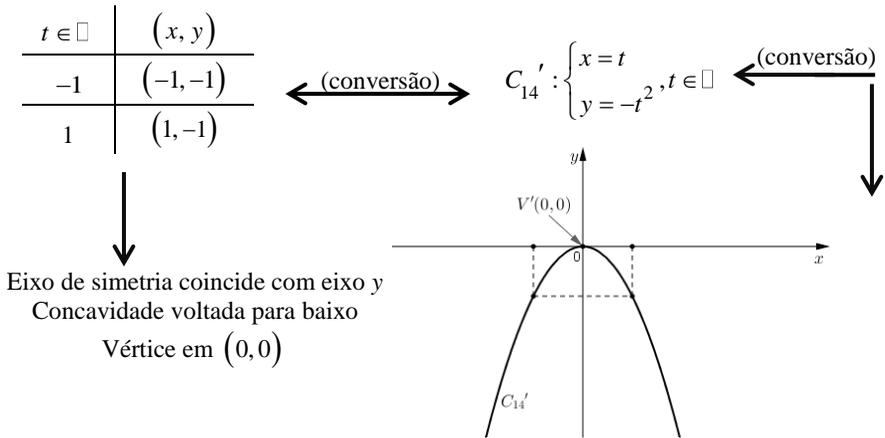
Na busca por uma resposta aos dois últimos questionamentos, sugerimos atenção ao desenvolvimento dos três próximos exemplos.

$$1) \quad C_{14}: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t^2 + 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

Primeiramente, da mesma forma que fizemos nos itens anteriores, vamos converter a curva paramétrica base, de sua representação algébrica para a gráfica, conforme Figura 4.25 a seguir:

Figura 4.25: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica de $C_{14}' : \begin{cases} x = t \\ y = -t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

Agora vamos realizar dois tratamentos algébricos. O primeiro deles nos fornecerá informações a respeito do deslocamento em relação ao eixo y (coincidente com o eixo de simetria) e o segundo a respeito do deslocamento em relação ao eixo x .

$$y = -t^2 + 3t + 2 \xrightarrow{\text{Tratamento ①}} y = -t^2 + 3t + 2 = -(t^2 - 3t - 2)$$

$$y = -\left[\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 2 \right] = -\left[\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \right]$$

$$y = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \Rightarrow y = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

No artigo de Moretti (2003) sobre a interpretação global das parábolas dadas por equações cartesianas, o tratamento ① também foi realizado (ver capítulo 2 deste trabalho) e fornecia diretamente o deslocamento do vértice da curva em relação ao vértice da curva base, ou seja, em relação ao ponto $(0,0)$. Isto ocorre em coordenadas cartesianas porque temos uma coordenada expressa em função da outra.

Em se tratando das parábolas cujas representações algébricas são dadas por equações paramétricas, o tratamento ① nos fornece apenas o deslocamento em relação à coordenada onde figura o termo do 2º grau.

Para o exemplo acima, ao obtermos a expressão $y - \frac{17}{4} = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2$, podemos concluir que a parábola se deslocará verticalmente para cima em

$\frac{17}{4}$ unidades $\left[\begin{array}{c} y - \frac{17}{4} \\ x_v \end{array} \right]$ e $\frac{17}{4}$ corresponde à ordenada do vértice da

mesma.

No entanto, $\left(t - \frac{3}{2}\right)^2$ não corresponde ao deslocamento

horizontal da parábola e, portanto, $\frac{3}{2}$ não é a abscissa do vértice da parábola. Há ainda outro tratamento a ser realizado com o objetivo de verificarmos o deslocamento horizontal a ser considerado, conforme pode ser constatado a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
 x = t - 2 & \begin{array}{c} \text{Tratamento } \textcircled{2} \\ \text{ } \end{array} & \begin{array}{l} x = t - 2 \Rightarrow x + 2 = t \\ \downarrow \\ \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + 2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{array}
 \end{array}$$

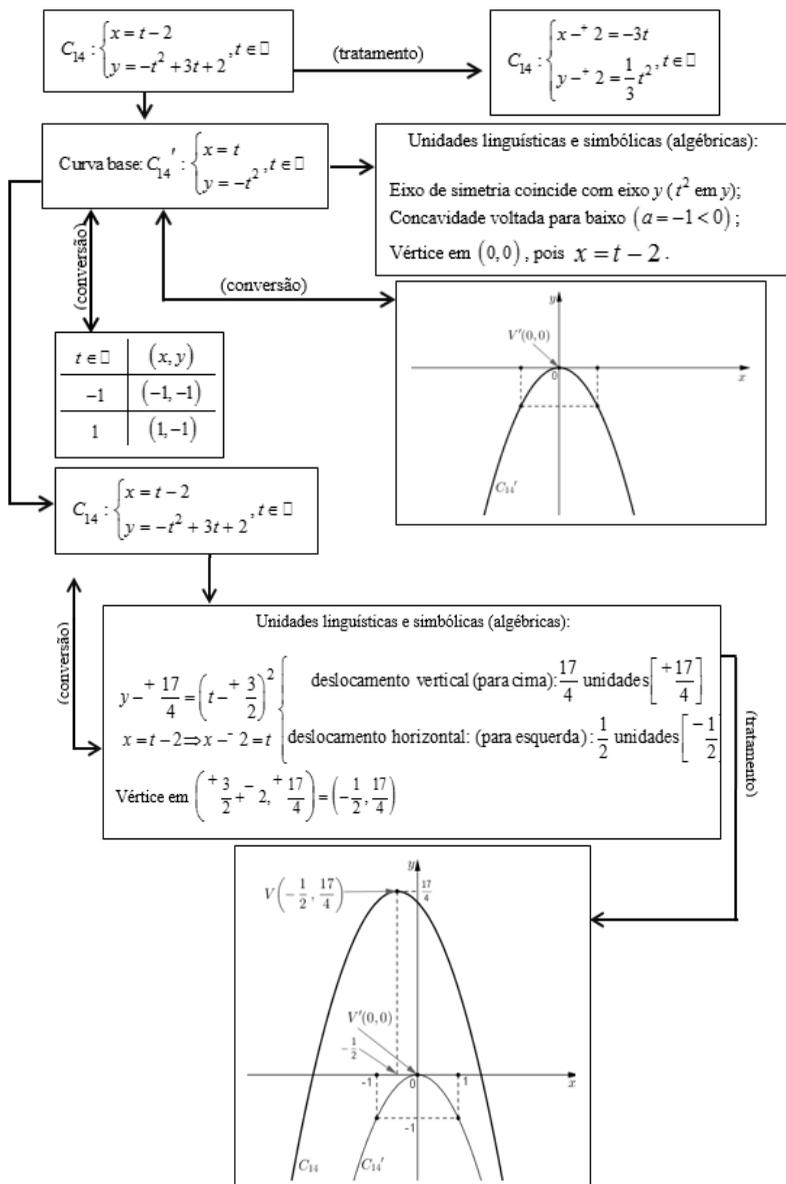
O tratamento $\textcircled{2}$ nos indica que a parábola base se deslocará horizontalmente para a esquerda em $\frac{1}{2} \left[+ \frac{3}{2} + - 2 = - \frac{1}{2} \right]$ unidades. Logo,

o vértice da curva será $V\left(\frac{17}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, o que mostra que para esses casos,

x_0 e y_0 conforme denominamos, não são as coordenadas do vértice da curva, conforme pode ser visualizado na Figura 4.26, onde temos toda a

configuração da conversão de $C_{14} : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t^2 + 3t + 2 \end{cases}, t \in \square$ em sua respectiva representação gráfica.

Figura 4.26: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica de $C_{14} : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t^2 + 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



Fonte: Autores da pesquisa

Acompanhe raciocínio similar no próximo exemplo:

$$m) C_{15} : \begin{cases} x = 2t^2 - 4t + 1 \\ y = -3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

$$x = 2t^2 - 4t + 1$$

Tratamento ①

$$x = 2t^2 - 4t + 1 = 2\left(t^2 - 2t + \frac{1}{2}\right)$$

$$x = 2\left[(t-1)^2 - 1 + \frac{1}{2}\right] = 2\left[(t-1)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

$$x = 2(t-1)^2 - 1 \Rightarrow x + 1 = 2(t-1)^2$$

O tratamento ① nos indica que a parábola base se deslocará horizontalmente para a esquerda em 1 unidade.

$$y = -3t + 2$$

Tratamento ②

$$y = -3t + 2 \Rightarrow \frac{2-y}{3} = t$$

⇓

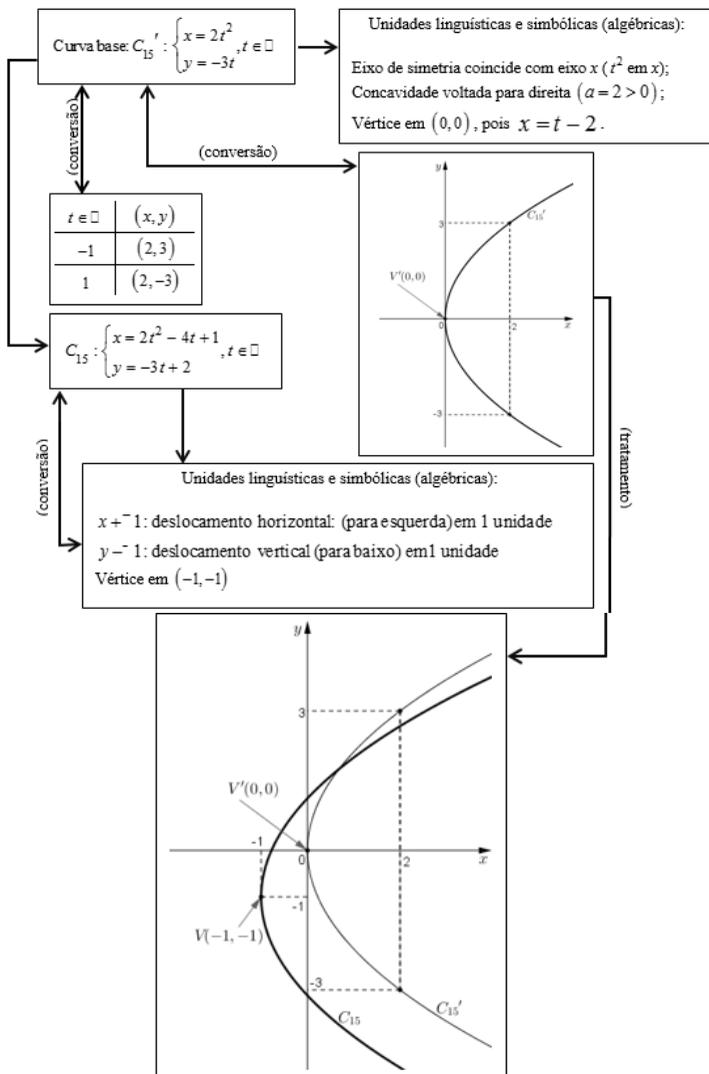
$$2(t-1)^2 = 2\left(\frac{2-y}{3} - 1\right)^2$$

$$\frac{2}{9}(y+1)^2 = \frac{2}{9}(y-1)^2$$

O tratamento ② nos mostra que a parábola base se deslocará verticalmente para baixo em 1 unidade.

Ambos os deslocamentos são em relação à parábola paramétrica base. Assim, o vértice da curva será $V(-1,-1)$, conforme pode ser visualizado na Figura 4.27.

Figura 4.27: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica de $C_{15} : \begin{cases} x = 2t^2 - 4t + 1 \\ y = -3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

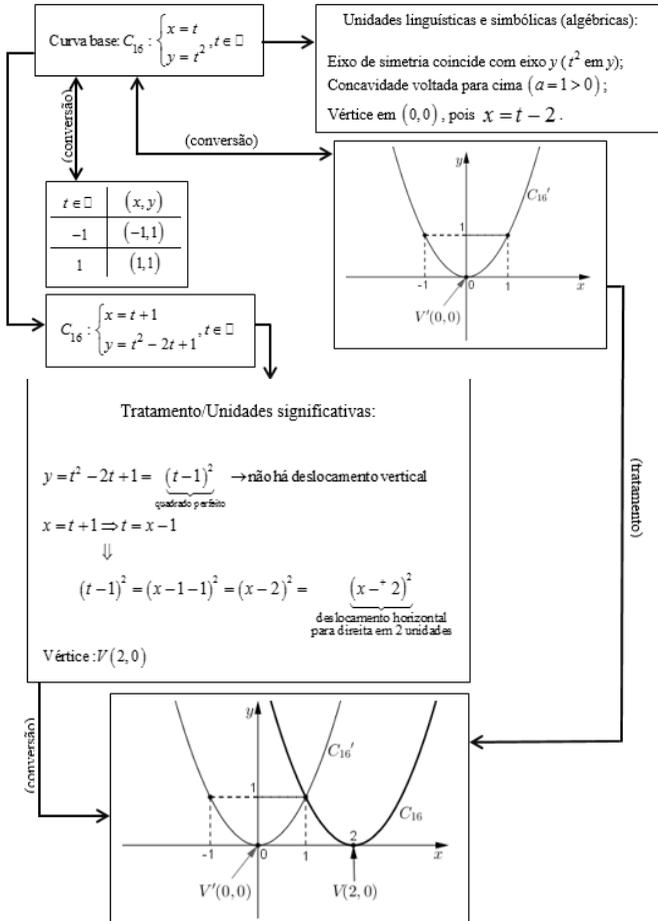


Fonte: Autores da pesquisa

$$n) C_{16} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Resolução:

Figura 4.28: Conversão algébrica \leftrightarrow gráfica de $C_{16} : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



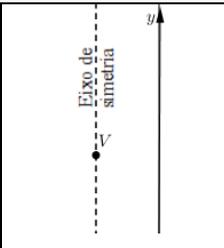
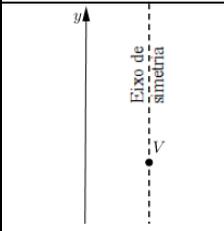
Com a discussão feita nos itens de “a” até “n” concluímos que em relação ao objeto parábola dada por equações paramétricas não é

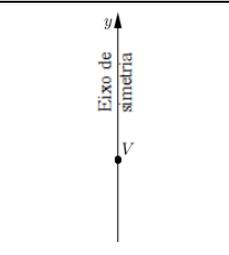
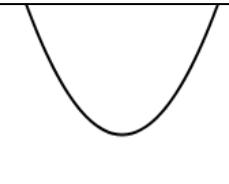
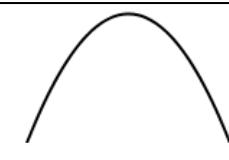
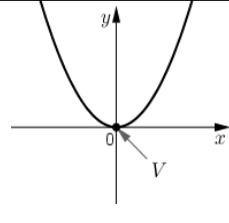
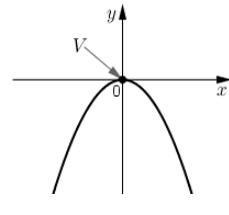
necessário que se faça a transformação do seu formato paramétrico para o cartesiano, mesmo porque desta maneira não teríamos a configuração de uma congruência semântica, visto que as informações conceituais obtidas pelas duas equações não são as mesmas.

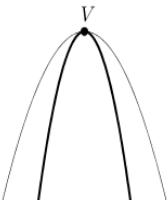
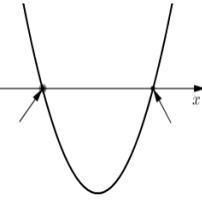
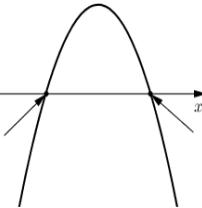
A interpretação da curva parábola dada por equações paramétricas, cujas unidades significativas foram observadas e comentadas nas resoluções dos exemplos dados neste capítulo estão sintetizadas no Quadro 4.10 onde mostramos as características figurais em relação aos coeficientes da escrita algébrica das parábolas cujas equações são dadas

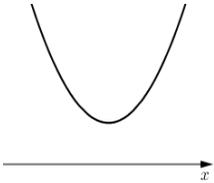
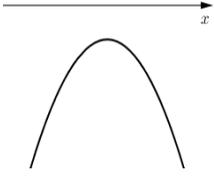
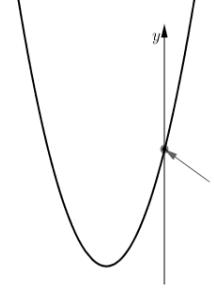
$$\text{por } \begin{cases} x = at^2 + ct + x_0 \\ y = bt + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ e } \begin{cases} x = bt + x_0 \\ y = at^2 + ct + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} .$$

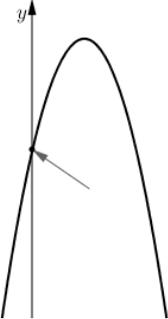
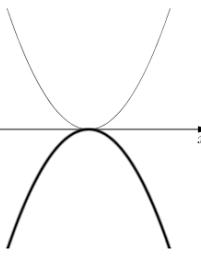
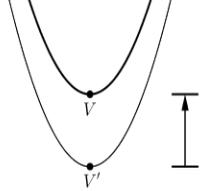
Quadro 4.10: Características (visuais e simbólicas) das parábolas dadas por equações paramétricas

Unidades significativas (linguística)	Tratamentos	Unidades significativas (simbólica)	Unidades significativas (gráfica)
Parábolas com equações paramétricas:			
$\begin{cases} x = bt + x_0 \\ y = at^2 + ct + y_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (} a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R} \text{)}$			
Termo do 2º grau na equação da coordenada y ↓ Eixo de simetria paralelo ao eixo y	Não há (diretamente das equações)	$x_0 < 0$	
		$x_0 > 0$	

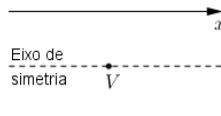
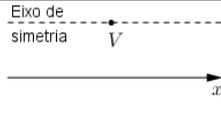
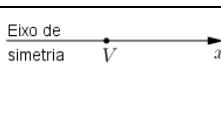
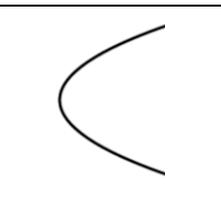
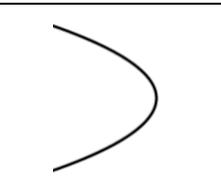
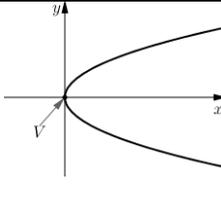
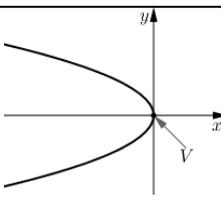
		$x_0 = 0$	
Concavidade voltada para cima (c.v.c.)	Não há (diretamente das equações)	$a > 0$	
Concavidade voltada para baixo (c.v.b.)	Não há (diretamente das equações)	$a < 0$	
Vértice na origem do sistema de coordenadas	Não há (diretamente das equações)	$x_0 = y_0 = 0$ $c = 0$ $[a > 0]$	
		$x_0 = y_0 = 0$ $c = 0$ $[a < 0]$	
Abertura maior	Não há (diretamente das equações)	$0 < a < 0$ $ b > 1$ $[a > 0]$	

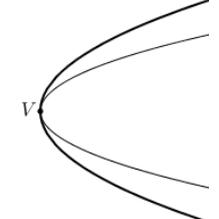
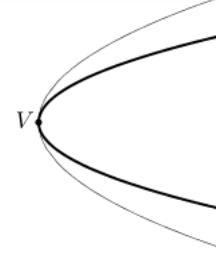
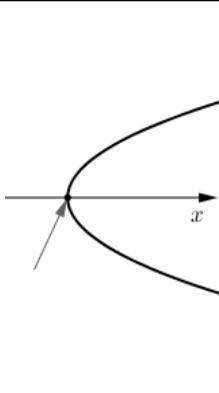
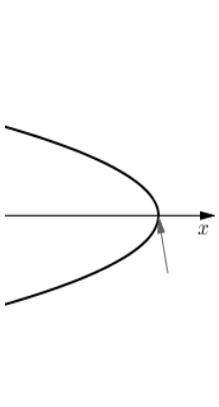
<p>Abertura menor</p>	<p>Não há (diretamente das equações)</p>	$ a > 1$ $0 < b < 1$ $[a < 0]$	
<p>Intercepta o eixo "x" dos</p>	$\begin{cases} y = at^2 + ct + y_0 \\ 0 = at^2 + ct + y_0 \\ t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} \end{cases}$ <p>[considerando c.v.c.]</p> $\begin{cases} x = bt + x_0 \\ x = b \left(\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} \right) + x_0 \\ x = \frac{-cb \pm b\sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} + x_0 \end{cases}$	$x = \frac{-cb + b\sqrt{a^2 - 4ay_0}}{2a} + x_0$ <p>e</p> $x = \frac{-cb - b\sqrt{a^2 - 4ay_0}}{2a} + x_0$ $[a > 0]$	
<p>Intercepta o eixo "x" dos</p>	$\begin{cases} y = at^2 + ct + y_0 \\ 0 = at^2 + ct + y_0 \\ t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} \end{cases}$ <p>[considerando c.v.b.]</p> $\begin{cases} x = bt + x_0 \\ x = b \left(\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} \right) + x_0 \\ x = \frac{-cb \pm b\sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} + x_0 \end{cases}$	$x = \frac{-cb + b\sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} + x_0$ <p>e</p> $x = \frac{-cb - b\sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} + x_0$ $[a < 0]$	

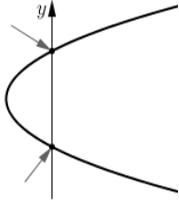
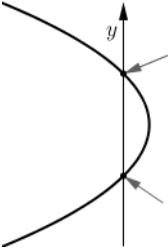
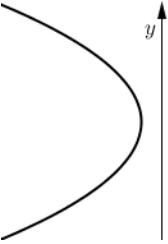
<p>Não intercepta o eixo dos “x”</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$\begin{cases} y = at^2 + ct + y_0 \\ 0 = at^2 + ct + y_0 \\ t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} \\ c^2 - 4ay_0 < 0 \end{cases}$	$c^2 - 4ay_0 < 0$ $[a > 0]$	
<p>Não intercepta o eixo dos “x”</p> <p>[considerando c.v.b.]</p>	$\begin{cases} y = at^2 + ct + y_0 \\ 0 = at^2 + ct + y_0 \\ t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ay_0}}{2a} \\ c^2 - 4ay_0 < 0 \end{cases}$	$c^2 - 4ay_0 < 0$ $[a < 0]$	
<p>Intercepta o eixo dos “y”</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>	$\begin{cases} x = bt + x_0 \\ 0 = bt + x_0 \\ t = -\frac{x_0}{b} \end{cases}$ $\begin{cases} y = at^2 + ct + y_0 \\ y = a\left(-\frac{x_0}{b}\right)^2 + c\left(-\frac{x_0}{b}\right) + y_0 \\ y = \frac{ax_0^2}{b^2} - \frac{cx_0}{b} + y_0 \end{cases}$	$\left(0, \frac{ax_0^2}{b^2} - \frac{cx_0}{b} + y_0\right)$ $[a > 0]$	

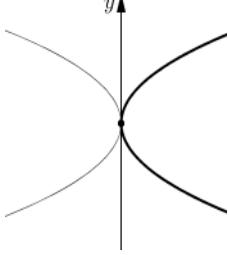
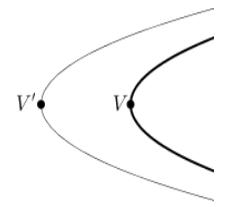
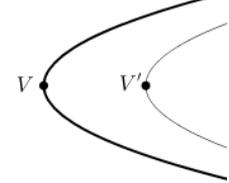
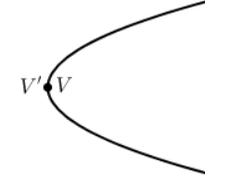
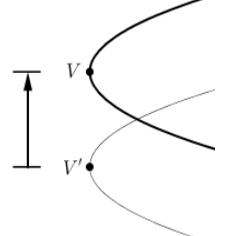
<p>Intercepta o eixo dos “ y ”</p> <p>[considerando c.v.b.]</p>	$\begin{cases} x = bt + x_0 \\ 0 = bt + x_0 \\ t = -\frac{x_0}{b} \end{cases}$ $\begin{cases} y = at^2 + ct + y_0 \\ y = a\left(-\frac{x_0}{b}\right)^2 + c\left(-\frac{x_0}{b}\right) + y_0 \\ y = \frac{ax_0^2}{b^2} - \frac{cx_0}{b} + y_0 \end{cases}$	$\left(0, \frac{ax_0^2}{b^2} - \frac{cx_0}{b} + y_0\right)$ <p>[a < 0]</p>	
<p>Simetria em relação ao eixo dos “ x ”</p> <p>[considerando vértice na origem]</p>	<p>Não há (diretamente das equações)</p>	$c = x_0 = y_0 = 0 \begin{cases} x = bt \\ y = -at^2 \end{cases}$	
<p>Deslocamento vertical</p> <p>[considerando c.v.c.]</p>		<p>⁺ y_v (para cima)</p> <p>[a > 0]</p>	

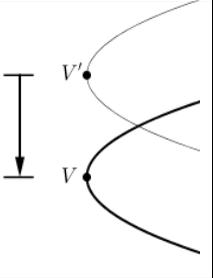
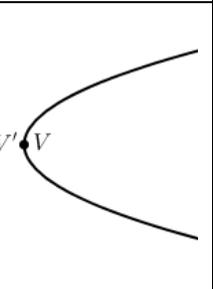
	$y = at^2 + ct + y_0$ $y = a\left(t^2 + \frac{c}{a}t\right) + y_0$ $y = a\left[\left(t + \frac{c}{2a}\right)^2\right] + y_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2$ $y - \underbrace{\left[y_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2\right]}_{y_V} = a\left[\left(t + \frac{c}{2a}\right)^2\right]$	$- y_V$ (para baixo) $[a > 0]$		
	$\begin{cases} y_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2 < 0 \\ y_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2 > 0 \\ y_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2 = 0 \end{cases}$	$y_V = 0$ (não há deslocamento vertical) $[a > 0]$		
Deslocamento horizontal	$y = at^2 + ct + y_0$ $y = a\left(t^2 + \frac{c}{a}t\right) + y_0$ $y = a\left[\left(t + \frac{c}{2a}\right)^2\right] + y_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2$ $y - \underbrace{\left[y_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2\right]}_{y_V} = a\left[\left(t + \frac{c}{2a}\right)^2\right]$	$+ x_V$ (para direita) $[a > 0]$		
	[considerando c.v.c.]	$x = bt + x_0$ $\frac{x - x_0}{b} = t$	$- x_V$ (para esquerda) $[a > 0]$	
		$t + \frac{c}{2a}$ $\frac{x - x_0}{b} + \frac{c}{2a}$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{x_V}$	$x_V = 0$ (não há deslocamento horizontal) $[a > 0]$	
Parábolas com equações paramétricas: $\begin{cases} x = at^2 + ct + x_0, t \in \mathbb{R} \quad (a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{R}) \\ y = bt + y_0 \end{cases}$				

<p>Termo do 2º grau na equação da coordenada x</p> <p>↓</p> <p>Eixo de simetria paralelo ao eixo x</p>	<p>Não há (diretamente das equações)</p>	$y_0 < 0$	
		$y_0 > 0$	
		$y_0 = 0$	
<p>Concavidade voltada para direita (c.v.d.)</p>	<p>Não há (diretamente das equações)</p>	$a > 0$	
<p>Concavidade voltada para esquerda (c.v.e.)</p>	<p>Não há (diretamente das equações)</p>	$a < 0$	
<p>Vértice na origem do sistema de coordenadas</p>	<p>Não há (diretamente das equações)</p>	$x_0 = y_0 = 0$ $c = 0$ $[a > 0]$	
		$x_0 = y_0 = 0$ $c = 0$ $[a < 0]$	

Abertura maior	Não há (diretamente das equações)	$0 < a < 0$ $ b > 1$ $[a > 0]$	
Abertura menor	Não há (diretamente das equações)	$ a > 1$ $0 < b < 1$ $[a < 0]$	
Intercepta o eixo “ x ” dos “ x ” [considerando c.v.d.]	$\begin{cases} y = bt + y_0 \\ 0 = bt + y_0 \\ -\frac{y_0}{b} = t \end{cases}$ $\begin{cases} x = at^2 + ct + x_0 \\ x = a\left(-\frac{y_0}{b}\right)^2 + c\left(-\frac{y_0}{b}\right) + x_0 \\ x = \frac{ay_0^2}{b^2} - \frac{cy_0}{b} + x_0 \end{cases}$	$\left(\frac{ay_0^2}{b^2} - \frac{cy_0}{b} + x_0, 0 \right)$ $[a > 0]$	
Intercepta o eixo “ x ” dos “ x ” [considerando c.v.e.]	$\begin{cases} y = bt + y_0 \\ 0 = bt + y_0 \\ -\frac{y_0}{b} = t \end{cases}$ $\begin{cases} x = at^2 + ct + x_0 \\ x = a\left(-\frac{y_0}{b}\right)^2 + c\left(-\frac{y_0}{b}\right) + x_0 \\ x = \frac{ay_0^2}{b^2} - \frac{cy_0}{b} + x_0 \end{cases}$	$\left(\frac{ay_0^2}{b^2} - \frac{cy_0}{b} + x_0, 0 \right)$ $[a < 0]$	

<p>Intercepta o eixo dos “y”</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$\begin{cases} x = at^2 + ct + x_0 \\ 0 = at^2 + ct + x_0 \\ t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} \end{cases}$ $\begin{cases} y = bt + y_0 \\ y = b \left(\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} \right) + y_0 \\ y = \frac{-bc \pm b\sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} + y_0 \end{cases}$	$y = \frac{-bc + b\sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} + y_0$ <p>e</p> $y = \frac{-bc - b\sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} + y_0$ <p>[a > 0]</p>	
<p>Intercepta o eixo dos “y”</p> <p>[considerando c.v.e.]</p>	$\begin{cases} x = at^2 + ct + x_0 \\ 0 = at^2 + ct + x_0 \\ t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} \end{cases}$ $\begin{cases} y = bt + y_0 \\ y = b \left(\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} \right) + y_0 \\ y = \frac{-bc \pm b\sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} + y_0 \end{cases}$	$y = \frac{-bc + b\sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} + y_0$ <p>e</p> $y = \frac{-bc - b\sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} + y_0$ <p>[a < 0]</p>	
<p>Não intercepta o eixo dos “y”</p> <p>[considerando c.v.e.]</p>	$\begin{cases} x = at^2 + ct + x_0 \\ 0 = at^2 + ct + x_0 \\ t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ax_0}}{2a} \\ c^2 - 4ax_0 < 0 \end{cases}$	$c^2 - 4ax_0 < 0$ <p>[a < 0]</p>	

<p>Simetria em relação ao eixo dos “ y ”</p> <p>[considerando vértice na origem]</p>	<p>Não há (diretamente das equações)</p>	$c = x_0 = y_0 = 0 \begin{cases} x = at^2 \\ y = bt \end{cases}$	
<p>Deslocamento horizontal</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>	$x = at^2 + ct + x_0$ $x = a \left(t^2 + \frac{c}{a}t \right) + x_0$ $x = a \left[\left(t + \frac{c}{2a} \right)^2 \right] + x_0 - \left(\frac{c}{2a} \right)^2$ $x - \underbrace{\left[x_0 - \left(\frac{c}{2a} \right)^2 \right]}_{x_V} = a \left[\left(t + \frac{c}{2a} \right)^2 \right]$	<p>$+ x_V$ (para direita)</p> <p>[$a > 0$]</p>	
	$x_V \begin{cases} x_0 - \left(\frac{c}{2a} \right)^2 < 0 \\ x_0 - \left(\frac{c}{2a} \right)^2 > 0 \\ x_0 - \left(\frac{c}{2a} \right)^2 = 0 \end{cases}$	<p>$- x_V$ (para esquerda)</p> <p>[$a > 0$]</p>	
	$x_V = 0$ <p>(não há deslocamento horizontal)</p> <p>[$a > 0$]</p>		
<p>Deslocamento vertical</p> <p>[considerando c.v.d.]</p>		<p>$+ y_V$ (para cima)</p> <p>[$a > 0$]</p>	

	$x = at^2 + ct + x_0$ $x = a\left(t^2 + \frac{c}{a}t\right) + x_0$ $x = a\left[t + \frac{c}{2a}\right]^2 + x_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2$ $x - \underbrace{\left[x_0 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2\right]}_{x_v} = a\left[t + \frac{c}{2a}\right]^2$	$-y_v \text{ (para baixo)}$ $[a > 0]$	
	$y = bt + y_0$ $\frac{y - y_0}{b} = t$ $t + \frac{c}{2a}$ $\underbrace{\frac{y - y_0}{b} + \frac{c}{2a}}_{y_v}$	$y_v = 0 \text{ (n\~{a}o h\~{a} deslocamento vertical)}$ $[a > 0]$	

Fonte: Autores da pesquisa.

O Quadro 4.10 se constitui numa sinopse a respeito das parábolas expressas por equações paramétricas, onde é possível perceber as características figurais destas em relação aos coeficientes da escrita algébrica. Ele amplia o estudo feito por Moretti (2003), sintetizado no Quadro 2.9 (capítulo 2) no que tange o estudo do mesmo objeto matemático, no entanto, expresso por equações cartesianas.

Esta sinopse foi obtida a partir dos exemplos desenvolvidos neste capítulo em relação ao esboço do objeto parábola, de maneira diferente ao que costumamos observar no estudo deste no ensino médio, tanto por professores quanto pelos livros didáticos, visto que o estudo das representações paramétricas acaba sendo omitido por estes.

Na análise aqui realizada fica evidente que para a obtenção de uma família de parábolas dadas parametricamente, também não precisamos utilizar o que Duval (2009) chama de procedimentos por pontos, pois nos baseamos no uso de operações em um dos registros verificando as modificações em outro, no caso, algébrico e gráfico, o que pode ser observado em detalhes no quadro 4.3, onde estão estabelecidas as relações entre as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades simbólicas na expressão algébrica. Em síntese, podemos dizer que utilizamos o que Duval (2009) chama de “interpretação global das propriedades figurais”, conforme expusemos nos capítulos 2 e 3.

Destacamos ainda que este estudo envolvendo parametrizações a respeito da parábola e que pode ser estendido para outras curvas, é bastante importante para explorar trajetórias, principalmente quando não dispomos de aplicativos computacionais, pois evita a construção gráfica feita a mão onde plotam-se inúmeros pontos no plano.

No contexto do uso de recursos computacionais, na sessão seguinte fazemos uma apresentação do estudo de curvas dadas por equações paramétricas através de um software já bastante popular dentro da comunidade matemática, o software Geogebra.

5.6 O software Geogebra³⁶: uma ferramenta no estudo de curvas dadas por equações paramétricas

O Geogebra é um software de Matemática dinâmica, criado por Markus Hohenwarter, multiplataforma, gratuito e desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino. Ele reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculo em um único ambiente. O mais interessante é que ele permite apresentar ao mesmo tempo, representações distintas de um mesmo objeto de tal forma que estas interajam entre si.

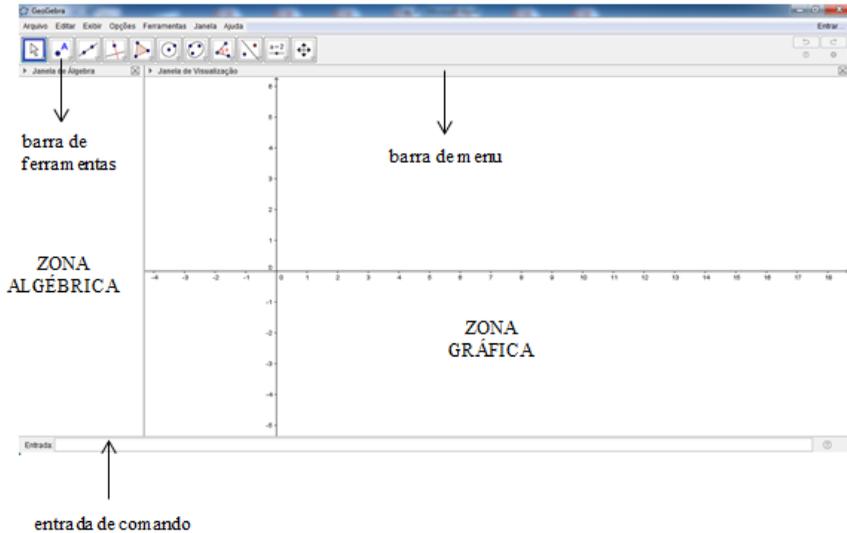
Disponível em português, ele pode ser um importante aliado no que tange ao estudo dos objetos matemáticos discutidos neste trabalho, visto que permite a manipulação da representação algébrica de tal forma que podemos observar os efeitos desta na sua representação gráfica.

Embora as manipulações gráficas sejam limitadas às translações e não termos como obter um mesmo objeto através de duas equações com formatos distintos, o fato de podermos criar uma equação dependendo de coeficientes manipuláveis faz com que possamos desenvolver inúmeras sequências didáticas que visem o estudo de curvas, utilizando o software Geogebra como uma importante ferramenta.

³⁶ Os sites [www.pucsp.br/geogebra/](http://www.pucsp.br/geogebra/br/), do Instituto Geogebra de São Paulo, e www.geogebra.im-uff.mat.br/bib.tml, do Instituto Geogebra no Rio de Janeiro, fornecem os links para downloads tanto do software como dos tutoriais de uso, além de exemplos de aplicações para sala de aula. (Acessos em 8/1/2016). Manuais e outros exemplos de uso podem ser encontrados em www.geogebra.org, alimentado pela equipe que continua aperfeiçoando o software.

Ao abrir o software você verá uma janela conforme mostramos na Figura 4.29, em que destacamos o nome das partes que compõe a tela inicial do software.

Figura 4.29: Tela inicial do software Geogebra



Já discutimos sobre as parábolas parametrizadas no plano, em que uma parábola é escrita como uma dupla de funções que dependem de uma mesma variável (que aqui denominamos de t , como geralmente é chamado o parâmetro).

Com o software Geogebra podemos plotar parábolas, além de outras curvas, no plano. Fazemos isso com o comando *Curva*, bastando digitá-lo na linha que indica a “entrada de comando”. A sintaxe do comando é dada por:

Curva [**<Expressão1>**, **<Expressão2>**, **<Variável>**, **<Valor Inicial>**, **<Valor Final>**],

onde:

- **<Expressão1>** corresponde a função x dos valores das abscissas,
- **<Expressão2>** corresponde a função y dos valores das ordenadas,

- <Variável> é o nome dado a variável das funções x e y ,
- <Valor Inicial> e <Valor Final> correspondem aos intervalos inicial e final de variação da variável.

Por exemplo, vamos obter o gráfico da parábola parametrizada dada por $C: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} / -1 \leq t \leq 2$. Então, escrevemos na “entrada de comando”:

$$\text{Curva } [t + 1, t^2 - 2 * t + 1, t, -1, 2]$$

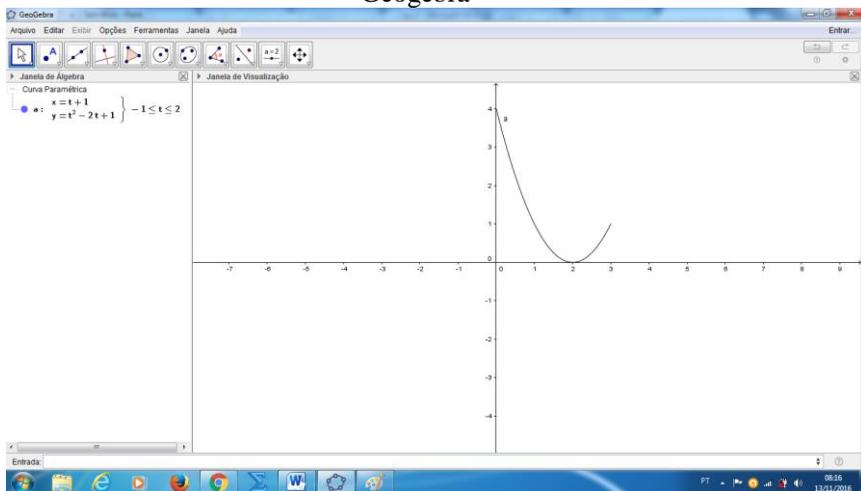
É importante lembrar que $*$ indica a operação de multiplicação e $^$ a operação potenciação. Assim, a sintaxe equivale a:

$$\text{Curva } [t + 1, t^2 - 2t + 1, t, -1, 2]$$

Após teclar em “Enter” você terá uma tela como a que pode ser visualizada na Figura 4.30.

Figura 4.30: Parábola dada por $C: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} / -1 \leq t \leq 2$ no

Geogebra

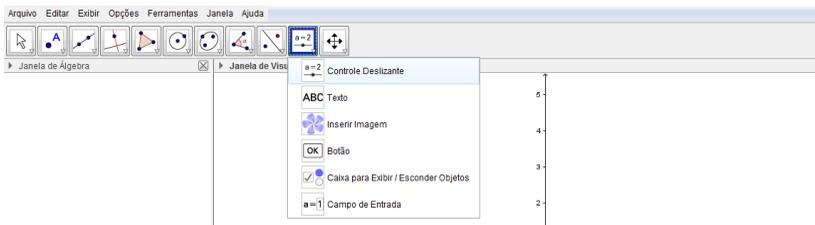


Perceba na Figura 4.30 que na zona algébrica aparece a equação da curva dada por suas equações paramétricas e na zona gráfica aparece um esboço da curva, plotado apenas no intervalo definido, ou seja, para $t \in [-1, 2]$.

Note também que não é possível manipular a estrutura gráfica. Para alterá-la é necessário mudar os valores dos coeficientes, o que pode, neste caso, ser feito dando dois cliques com o mouse em cima da equação da zona algébrica, onde abrirá uma janela e daí se pode mudar a estrutura como um todo. Esta questão, no entanto, pode ser solucionada conforme indicada na sequência de passos seguintes.

- 1°. Abra um novo arquivo (em branco) do Geogebra.
- 2°. Na 10ª janela da barra de ferramentas selecione a opção “Controle Deslizante”, conforme Figura 4.31, clicando em seguida em qualquer ponto da zona gráfica.

Figura 4.31: Ferramenta “Controle Deslizante” do Geogebra



- 3°. Abrirá uma janela como a da Figura 4.32 onde você deverá selecionar a opção “Número” dar um “Nome” a esta sua variável e ainda indicar o valor mínimo e máximo de variação. Sugerimos que você chame este primeiro controle deslizante de “a” e defina o intervalo com os valores -10 (mín) e 10 (max). Clicando em “OK”, aparecerá na tela um segmento de reta conforme Figura 4.33. Esse segmento pode ser movido na tela com o lado direito do mouse e posicionado numa região mais propícia de tal forma que não venha a atrapalhar a visualização dos itens que virão posteriormente.

Figura 4.32: Configurando a Ferramenta “Controle Deslizante” do Geogebra

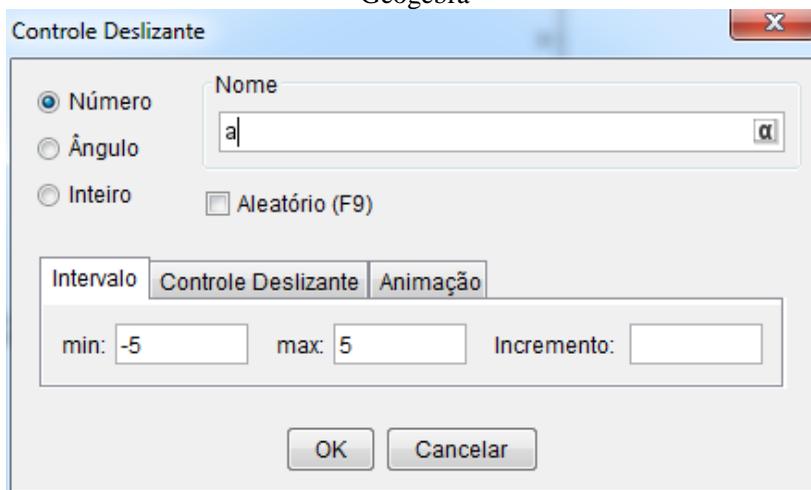
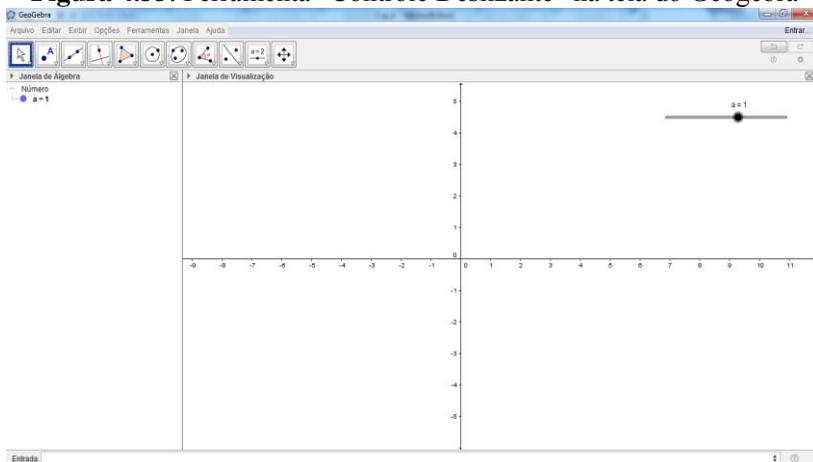


Figura 4.33: Ferramenta “Controle Deslizante” na tela do Geogebra



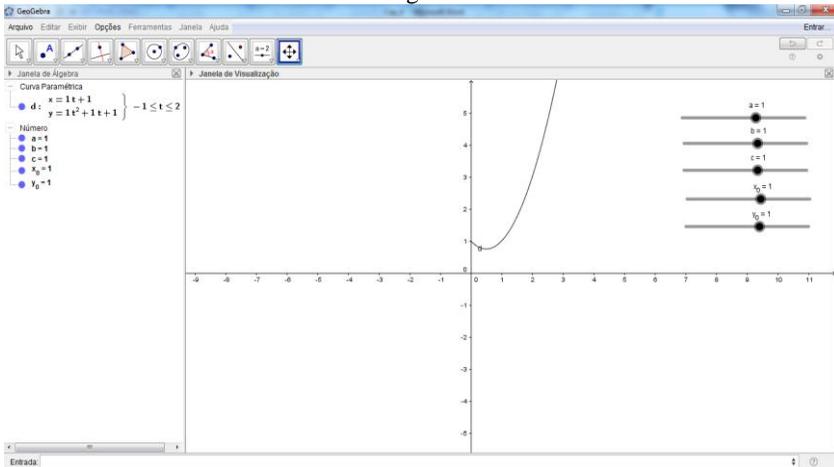
- 4°. Repita o 3º passo e crie os seguintes “Controles Deslizantes”, todos no intervalo -10 (mín) e 10 (max): “ b ”, “ c ”, “ x_0 ” e “ y_0 ”.
- 5°. Na “entrada de comando”, digite a seguinte sintaxe:

$$\text{Curva } [b \cdot t + x_0, a \cdot t^2 - c \cdot t + y_0, t, -1, 2]$$

Dando “Enter”, aparecerá uma tela como a da Figura 4.34.

Figura 4.34: Parábola dada por $C : \begin{cases} x = 1t + 1 \\ y = 1t^2 - 1t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} / -1 \leq t \leq 2$ no

Geogebra



- 6°. Movimente os pontos correspondentes aos controles deslizantes e observe simultaneamente as variações dos coeficientes da zona algébrica e as correspondentes alterações gráficas da curva representada na zona gráfica.
- 7°. Varie os controles deslizantes até que estes obtenham os seguintes valores: “ $a = 1$ ”, “ $b = 1$ ”, “ $c = -2$ ”, “ $x_0 = 1$ ” e “ $y_0 = 1$ ”. Agora compare as equações e o gráfico com o que foi obtido anteriormente para a curva dada por $C : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} / -1 \leq t \leq 2$ (veja Figura 4.30).
- 8°. Clique duas vezes sobre a representação algébrica do objeto e altere o intervalo de variação de $[-1, 2]$ para $[-10, 10]$.

- 9º. Faça novamente deslizar os pontos dos controles deslizantes e fique atento às alterações algébricas e gráficas que aparecerão na tela.

Com a execução do 9º passo é possível perceber as alterações visuais no gráfico e relacioná-las com as respectivas alterações na escrita algébrica, de tal forma que percebemos as características das parábolas, conforme discutido neste capítulo, tais como concavidade, abertura, interseção com os eixos, vértice, simetria e deslocamentos horizontais e verticais.

A sugestão que estamos fazendo em relação à utilização do software Geogebra para a interpretação global das parábolas parametrizadas reforça a pesquisa realizada por Luiz (2010), em sua dissertação de Mestrado, ao propor a utilização de plotadores gráficos no estudo de curvas que surgem no cálculo diferencial e integral, sendo estas curvas representadas por equações cartesianas.

Seguindo o raciocínio de Luiz (2010), podemos com o Geogebra obter diretamente o esboço da curva parametrizada para, a partir daí, fazermos uma análise do conjunto de elementos chamados pelo autor de unidades básicas (gráfica, linguística e simbólica), no intuito de conduzir às conversões entre os registros algébricos e gráficos relativos a elementos das derivadas estudadas em cálculo, tais como: concavidade, intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de mínimo e de máximo relativos, pontos de inflexão, retas assintóticas e continuidade (ver anexo deste trabalho).

Finalizando este último capítulo, podemos concluir que o procedimento de interpretação global sugerido por Duval (2009) também se aplica às curvas expressas por equações paramétricas. Embora tenhamos apenas feito um estudo sobre o objeto parábola, acreditamos que este possa ser estendido para as demais cônicas, bem como para qualquer curva plana que possa ser parametrizada em termos de um determinado parâmetro, não necessariamente o “tempo”, tão utilizado nos contextos que envolvem o estudo do movimento.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho fizemos um levantamento bibliográfico sobre o esboço de curvas planas que averiguaram as correspondências entre as variações visuais nos gráficos e as alterações significativas na escrita algébrica da relação por meio da chamada *interpretação global de propriedades figurais*, preconizada por Raymond Duval (2009).

Constatamos em todas as curvas apresentadas nos trabalhos avaliados, que estas caracterizavam gráficos de funções apresentadas por equações cartesianas na sua forma explícita.

Considerando que a equação de uma curva pode também ser apresentada através de equações paramétricas e que esta curva pode não ser representante de uma função $y = f(x)$, fizemos uma análise criteriosa sobre as variações visuais e correspondentes variações algébricas de dois objetos matemáticos expressos parametricamente: a reta e a parábola.

A análise realizada respondeu ao nosso problema de pesquisa ao constarmos que a *interpretação global de propriedades figurais*, constante na Teoria dos Registros de Representação Semiótica é válida também para retas e parábolas parametrizadas.

Ao rediscutirmos as conversões estruturadas por Duval (2009) para o estudo da reta e as translações preconizadas por Morretti (2003) no estudo das parábolas, verificamos que as unidades básicas (simbólicas e gráficas) podem também ser consideradas ao interpretarmos globalmente o gráfico de uma curva dada por uma equação paramétrica.

Assim, acabamos fazendo uma complementação do estudo realizado por Raymond Duval sobre o estudo da reta e uma ampliação do estudo feito por Moretti (2003), no que tange o estudo da parábola, visto que ao tratarmos as retas e as parábolas parametrizadas, os coeficientes algébricos constantes nas equações não são os mesmos presentes nas equações cartesianas.

Um fator importante a ser considerado é a constatação de que para esboçarmos o gráfico de retas e parábolas dadas por equações paramétricas não precisamos utilizar o procedimento por pontos, mas sim mantermos foco no uso de operações em um dos registros verificando as modificações no outro, no caso, algébrico e gráfico, ou seja, estar atento às relações entre as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades simbólicas na expressão algébrica.

Podemos também constatar a importância que um software matemático, como o Geogebra, pode ter quando utilizado como

ferramenta ao tratarmos das conversões entre os registros algébrico e gráfico, pois facilita a visualização e percepção das relações entre as estruturas algébricas e figurais, dando oportunidade à interpretação, pois foge ao árduo trabalho em se obter o esboço gráfico por si só, como comumente é feito no ensino médio e superior.

Por fim, deixamos para reflexão: Como efetuar um estudo a respeito de outras curvas parametrizadas, como por exemplo, outras cônicas além da parábola (circunferência, hipérbole e elipse), lembrando sempre que tal estudo pode ser de extrema importância, principalmente quando a curva representa a trajetória do movimento de uma partícula no plano?

REFERÊNCIAS

ALMOLOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: ED. UFPR, 2007.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

CAIRES, V. et. al. Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática: Avaliação de Usabilidade e de Aprendizado. II ENINED: Encontro Nacional de Informática e Educação, UNIOESTE, **Anais...** Cascavel-PR. p. 408-417, out. 2011.

CAPES. **Banco de Teses e Dissertações**. Disponível em: <<http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/>>. Acesso em: 10 mar. 2015.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin; MORETTI, Mércles Thadeu. **Registros de representação semiótica e parâmetros curriculares nacionais: interfaces presentes e possíveis**, 2007.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin. **Representações semióticas no ensino**: contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar. 2008. 253 p. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

DUVAL, R. Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, v. 1, p. 235-253, 1988.

_____. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM – ULP, 1993.

_____. **Sémiosis et pensée humaine**: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

_____. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135-153.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2003.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. 4. ed. Campinas: Papyrus, 2008, p. 11-33.

_____. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Fascículo I. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_____. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Mérciles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

_____. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas**. São Paulo: PROEM, 2011.

FERREIRA, Aurélio B. H. **Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa**. 8. ed. Curitiba: Positivo, 2010.

LUIZ, L. S. **Esboço de curvas no ensino superior: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

MARTINS, Marcos H. S.; PEREIRA, Rosimary. **Cálculo III e IV**. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010.

MORETTI, Mérciles T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2003.

MORETTI, Mércles T.; BRANDT, Célia F. O papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal. **Revista de Educação Matemática Pesquisa**, v. 7, n. 2, p. 201-227, 2005.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 529-547, 2010.

MORETTI, M. T.; FERRAZ, G. A.; FERREIRA, V. G. G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Revista Quadrante**, v. 17, n. 2, p. 97-122, 2008.

NÉ, A. L. S. **A análise da linguagem Matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no Ensino Superior**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

WILLI NETO, Lima. **O ensino interdisciplinar entre Física e Matemática**: Uma nova estratégia para minimizar o problema da falta dos conhecimentos matemáticos no desenvolvimento do estudo da Física. 2011, 113p. Dissertação (Mestrado Profissional Ensino das Ciências na Educação Básica)- Universidade do Grande Rio, UNIGRANRIO, Duque de Caxias (RJ), 2011.

NOTH, W. **A semiótica no século XX**. São Paulo: Annablume, 1995.

NOTH, W. **Panorama da Semiótica**: de Platão a Peirce. São Paulo: Annablume, 1996.

OLIVEIRA, Ivan C.; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. São Paulo: MacGraw-Hill, 1986.

PAIS, L. C. Questões metodológicas e a engenharia didática. In: PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. p. 99-108.

_____. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

_____. et al. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC- PUC-SP, 2008.

PEIRCE, C. S. **The Collected Papers**. Cambridge M.A.: Harvard University Press, 1931.

SILVA, M. O. **Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

SILVA, U. **Análise da abordagem da função adotada em livros didáticos de matemática da educação básica**. Dissertação (Mestrado em Educação)- PUC, SP, 2007.

SOARES, M. A. S. **Os números racionais e os registros de representação semiótica: análise de planejamentos das séries finais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação)- UNIJUI/RS, 2007.

TRALDI, Armando Junior. **Sistema de inequações do 1º grau: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações**. Dissertação (Mestrado em Educação)- PUC/SP, 2002.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e Quádricas**. 5. ed. Curitiba: UFPR, PR, 1986.

ANEXO A – Tabelas de Unidades Básicas

☞ Variação e concavidade:

Tabela 1

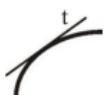
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função crescente. Concavidade negativa.	$t: y = ax + b, a > 0$ $y'(x) > 0$ $y''(x) < 0$

Tabela 2

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função crescente. Concavidade positiva.	$t: y = ax + b, a > 0$ $y'(x) > 0$ $y''(x) > 0$

Tabela 3

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função decrescente. Concavidade negativa.	$t: y = ax + b, a < 0$ $y'(x) < 0$ $y''(x) < 0$

Tabela 4

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	t é uma tangente. Função decrescente. Concavidade positiva.	$t: y = ax + b, a < 0$ $y'(x) < 0$ $y''(x) > 0$

☞ Retas assintóticas:

Tabela 5

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assintota vertical.	$\lim_{x \rightarrow a^-} y(x) = -\infty$ $x = a$

Tabela 6

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assintota vertical.	$\lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = -\infty$ $x = a$

Tabela 7

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assintota vertical.	$\lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = +\infty$ $x = a$

Tabela 8

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	Assintota vertical.	$\lim_{x \rightarrow a^-} y(x) = +\infty$ $x = a$

Tabela 9

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
 $y = b$	Assintota horizontal.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = b$ $y = b$

Tabela 10

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
 $y = b$	Assintota horizontal.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = b$ $y = b$

Tabela 11

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
 $y = b$	Assintota horizontal.	$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = b$ $y = b$

Tabela 12

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
 $y = b$	Assintota horizontal	$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = b$ $y = b$

☞ Determinação de pontos importantes (extremos relativos):

Tabela 13

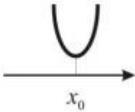
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Mínimo relativo x_0.</p> <p>Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0; ou efetuar o teste da derivada 2ª ou de ordem superior.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$ <p>$y''(x_0) > 0$;</p> <p>$y^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $y^{(n)}(x_0) > 0$,</p> <p>$n > 2$, par.</p>

Tabela 14

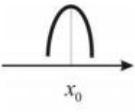
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Máximo relativo x_0.</p> <p>Derivada primeira de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0; ou efetuar o teste da derivada 2ª ou de ordem superior.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$ <p>ou $y''(x_0) < 0$.</p> <p>$y^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $y^{(n)}(x_0) < 0$,</p> <p>$n > 2$, par.</p>

Tabela 15

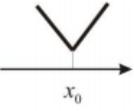
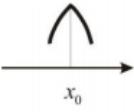
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Mínimo relativo x_0.</p> <p>Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0 e não existe em x_0.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) \nexists \\ y'(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 16

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Máximo relativo x_0.</p> <p>Derivada primeira de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0 e não existe em x_0.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) \nexists \\ y'(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

☞ Determinação de pontos importantes (pontos de inflexão):

Tabela 17

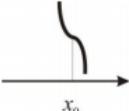
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Ponto de inflexão x_0.</p> <p>Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) \neq 0 \\ y'(x) < 0, x \in V(x_0) \\ y''(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 18

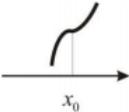
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Ponto de inflexão x_0.</p> <p>Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) \neq 0 \\ y'(x) > 0, x \in V(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 19

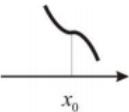
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Ponto de inflexão x_0.</p> <p>Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0, x \in V(x_0) \\ y''(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 20

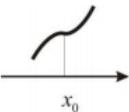
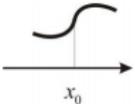
Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Ponto de inflexão em x_0.</p> <p>Derivada primeira de y não muda de sinal na vizinhança de x_0. Derivada segunda de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) > 0, x \in V(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Tabela 21

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Ponto de inflexão em x_0.</p> <p>Derivada não existe em x_0, pois a tangente em x_0 é vertical. y é contínua em x_0. Derivada segunda de y não existe em x_0, mas muda de sinal positivo para negativo na vizinhança deste ponto.</p>	$y'(x_0) \nexists$ $\lim_{x \rightarrow x_0} y = y(x_0)$ $\begin{cases} y''(x_0) \nexists \\ y''(x) > 0, x \in V^-(x_0) \\ y''(x) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

☞ Determinação de pontos importantes (continuidade):

Tabela 22

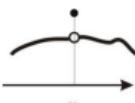
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Limites laterais em x_0 são iguais.</p> <p>Descontínua em x_0.</p>	$y'(x_0) \nexists$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = \lim_{x \rightarrow x_0^-} y \neq y(x_0)$

Tabela 23

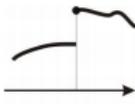
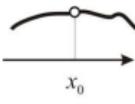
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Limites laterais em x_0 são diferentes.</p> <p>Descontínua em x_0.</p>	$y'(x_0) \nexists$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} y$ $y(x_0) \exists$

Tabela 24

Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
	<p>Limites laterais em x_0 são iguais.</p> <p>x_0 não pertence ao domínio de y.</p>	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} y = \lim_{x \rightarrow x_0^-} y$ $y(x_0) \nexists$

Fonte: Moretti (2008).