

Marcos Vinicius Matsuo

**MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ALGORITMOS  
ADAPTATIVOS PARA EQUALIZAÇÃO ATIVA DE RUÍDO E  
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

Tese submetida ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de  
Doutor em Engenharia Elétrica.  
Orientador: Prof. Dr. Rui Seara.

Florianópolis  
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Matsuo, Marcos Vinicius

Modelagem estocástica de algoritmos adaptativos para equalização ativa de ruído e identificação de sistemas / Marcos Vinicius Matsuo ; orientador, Rui Seara - Florianópolis, SC, 2016.  
165 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia Elétrica. 2. Algoritmo FxLMS. 3. Algoritmo NLMS 4. Filtragem adaptativa. 5. Modelagem estocástica. I. Seara, Rui. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

**MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE ALGORITMOS  
ADAPTATIVOS PARA EQUALIZAÇÃO ATIVA DE RUÍDO E  
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

Marcos Vinicius Matsuo

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração *Comunicações e Processamento de Sinais*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 14 de dezembro de 2016.

---

Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr.

Coordenador do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Prof. Rui Seara, Dr. - UFSC  
Orientador

---

Prof. João Marcos Travassos Romano, Dr. - UNICAMP

---

Prof<sup>ª</sup>. Mariane Rembold Petraglia, Ph.D. - UFRJ

---

Prof. Hans Helmut Zürn, Ph.D. - UFSC

---

Prof. Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, Ph.D. - UFSC

---

Prof. Eduardo Luiz Ortiz Batista, Dr. - UFSC



Dedico este trabalho aos meus pais,  
Vicente e Marinalva, e às minhas  
irmãs, Michele e Mariana.



## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais e às minhas irmãs, por sempre me apoiarem.

Ao meu orientador, Prof. Rui Seara, pelos ensinamentos e pela grande amizade firmada ao longo dos últimos anos.

Ao Prof. Eduardo L. O. Batista, pelos ensinamentos e pelas inúmeras conversas sobre diversos assuntos.

Ao Prof. Hans H. Zürn, pelos conhecimentos transmitidos através das revisões dos artigos produzidos ao longo dos últimos anos.

Ao Elton L. Fontão pela amizade, pelas agradáveis discussões e por fazer do LINSE um ambiente de trabalho organizado e produtivo.

Aos amigos Ciro Pitz, Eduardo Kuhn, Eduardo Beck, Fábio Perez, Hermeson Barbosa, Rodrigo Tessari, André Schlichting, Guilherme Zilli, João Paulo, Raimundo Nonato e Walter Gontijo pelas valiosas conversas e pelo apoio no decorrer desses últimos anos.

A todos os amigos do LINSE pela ótima convivência diária.

Aos professores membros da banca examinadora, por suas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo suporte financeiro e ao LINSE pela infraestrutura disponibilizada para a realização deste trabalho de tese.



## RESUMO

Este trabalho de pesquisa trata da modelagem estocástica de dois algoritmos adaptativos bem conhecidos na literatura, a saber: o algoritmo FxLMS (*filtered-x least-mean-square*) e o algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*). Particularmente, para o algoritmo FxLMS são desenvolvidos dois modelos estocásticos, ambos considerando aplicações de controle e/ou equalização ativa de ruído periódico, porém em diferentes estruturas (monocanal e multicanal). Baseado nas expressões de modelo obtidas, diversos aspectos do comportamento do algoritmo FxLMS são discutidos, evidenciando o impacto dos parâmetros do algoritmo sobre seu desempenho. Para o algoritmo NLMS, são propostos dois modelos estocásticos, ambos considerando a aplicação de identificação de sistemas tanto com sinal de entrada branco gaussiano quanto correlacionado gaussiano. Especificamente, o primeiro modelo do algoritmo NLMS é derivado assumindo que o filtro adaptativo e a planta a ser estimada podem possuir ordens diferentes (tal suposição, que é condizente com cenários práticos, não é usualmente tratada na literatura devido às dificuldades matemáticas surgidas no desenvolvimento da modelagem estocástica). O segundo modelo do algoritmo NLMS considera uma formulação matemática mais geral (quando comparada a outros trabalhos da literatura) para representar a planta a ser identificada, possibilitando a representação de diversos tipos de sistemas variantes no tempo; originando, assim, um modelo estocástico capaz de prever o comportamento do algoritmo NLMS em uma ampla gama de cenários de operação. Resultados de simulação são apresentados, ratificando a precisão dos modelos estocásticos propostos, tanto na fase transitória quanto em regime permanente.

**Palavras-chave:** Algoritmo FxLMS. Algoritmo NLMS. Filtragem adaptativa. Modelagem estocástica.



## ABSTRACT

This research work focuses on the stochastic modeling of two well-known adaptive algorithms from the literature, namely: the filtered-x least mean square (FxLMS) algorithm and the normalized least-mean-square (NLMS) algorithm. In particular, for the FxLMS algorithm two stochastic models are developed, both considering applications of active noise control and equalization of periodic noise, but in different structures (single-channel and multichannel). Based on the obtained expressions, several aspects of the FxLMS algorithm behavior are discussed, highlighting the impact of some parameters on the algorithm performance. For the NLMS algorithm, two stochastic models are proposed, both considering the application of system identification with white Gaussian and correlated Gaussian input signals. Specifically, the first model of the NLMS algorithm is developed assuming that the adaptive filter and the system to be identified can have different orders (such a supposition, which is consistent with practical scenarios, is not usually considered in the literature due to the mathematical difficulties arising in the development of the stochastic model). The second model of the NLMS algorithm considers a more general mathematical formulation (compared with other works from the open literature) to represent the system to be identified, allowing to represent several types of time-varying systems; resulting in a stochastic model able to predict the NLMS algorithm behavior in several scenarios. Simulation results are presented, confirming the accuracy of the proposed stochastic models for both transient and steady-state phases.

**Keywords:** FxLMS algorithm. NLMS algorithm. Adaptive filtering. Stochastic modeling.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama básico de um sistema de NANC (adaptado de [17]).	26
Figura 2.2 - Diagrama de blocos de um sistema de NANE [24].	29
Figura 2.3 - Diagrama de blocos do $q$ -ésimo filtro adaptativo.	29
Figura 2.4 - Resposta ao impulso típica de um caminho secundário obtida de [17].	45
Figura 2.5 - Exemplo 1. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza), pelo modelo dado em [27] (linha tracejada escura) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b) $\mu_1 = 0,002$ . (c) e (d) $\mu_1 = 0,02$ . (e) e (f) $\mu_1 = 0,03$ .	48
Figura 2.6 - Exemplo 2. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza), pelo modelo dado em [27] (linha tracejada escura) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ . (c) e (d) $\beta_1 = 0,2$ e $\beta_2 = \beta_3 = 0$ . (e) e (f) $\beta_1 = 0$ , $\beta_2 = 1$ e $\beta_3 = 3$ .	51
Figura 2.7 - Exemplo 3. Estrutura típica utilizada para identificação de sistema utilizando o algoritmo LMS ( <i>least-mean-square</i> ) [3].	53
Figura 2.8 - Exemplo 3. Distorção na equalização desejada para diversos valores de $\hat{L}$ .	53
Figura 2.9 - Exemplo 3. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (a) e EQM (b) obtidos por simulação de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha sólida escura), utilizando $\hat{s}(n)$ com ordem $\hat{L} = 24$ e $\lambda = 0,9$ .	54
Figura 3.1 - Diagrama de um sistema multicanal de NANC.	56
Figura 3.2 - Respostas ao impulso típicas de caminhos secundários de um sistema multicanal de NANC, de [43]. (a) Resposta ao impulso $s_{1,1}(n)$ . (b) Resposta ao impulso $s_{1,2}(n)$ . (c) Resposta ao impulso $s_{2,1}(n)$ . (d) Resposta ao impulso $s_{2,2}(n)$ .	67

Figura 3.3 - Exemplo 1. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\mu = 0,1$ . (c) e (d)  $\mu = 0,2$ . ..... 69

Figura 3.4 - Exemplo 2. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $G = 2$  e  $K = 1$ . (c) e (d)  $G = 1$  e  $K = 2$ . ..... 71

Figura 3.5 - Exemplo 3. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $G = 2$  e  $K = 2$ . (c) e (d)  $G = 2$  e  $K = 1$ . (e) e (f)  $G = 1$  e  $K = 2$ . ..... 73

Figura 4.1 - Configuração típica de um problema de identificação de sistemas utilizando o algoritmo NLMS..... 76

Figura 4.2 - Amostras dos vetores  $\mathbf{w}_1$  (linha cinza) e  $\mathbf{w}_2$  (linha escura). ..... 90

Figura 4.3 - Exemplo 1. Curvas do EQM obtidas por simulação de MC (linhas irregulares cinza) e através do modelo proposto (linhas sólidas escuras). Os valores do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. Para fins de comparação, a curva do EQM para  $M = N = 30$  é mostrada em todas as figuras. (a) e (b) Sinal de entrada branco com  $\chi = 1$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ]. (c) e (d) Sinal de entrada correlacionado com  $\chi = 110,58$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ ]. ..... 94

Figura 4.4 – Exemplo 1. Curvas do EQM obtidas por simulação de MC (linhas irregulares cinza) e através do modelo proposto (linhas sólidas escuras), considerando  $\sigma_\phi^2 = 0$ . Os valores do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) Sinal de entrada branco com  $\chi = 1$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ]. (b) Sinal de entrada correlacionado com  $\chi = 110,58$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ ]. ..... 95

Figura 4.5 – Exemplo 2. EQM em regime permanente obtido através de simulações de MC (marcadores cinza) e do modelo proposto (linha escura) utilizando o passo de adaptação ótimo.....	96
Figura 4.6 - Exemplo 3. Valores do EQM em regime permanente obtidos por simulação de MC (marcadores cinza) e através do modelo proposto (linhas escuras) considerando diferentes dimensões para os filtros adaptativos. Para fins de comparação, a curva do EQM em regime permanente para $M = N = 30$ é mostrada em todas as figuras. (a) e (b) Sinal de entrada branco com $\chi = 1$ [obtido de (4.78) considerando $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ]. (c) e (d) Sinal de entrada correlacionado com $\chi = 110,58$ [obtido de (4.78) considerando $\beta_1 = -0,55$ e $\beta_2 = 0,8$ ]. .....	98
Figura 4.7 – Exemplo 4. Curvas do EQM obtidas por simulação de MC (linhas irregulares cinza) e através do modelo proposto (linhas sólidas escuras) considerando diferentes níveis de perturbação na planta $\mathbf{w}_o(n)$ . Os valores do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) Sinal de entrada branco com $\chi = 1$ [obtido de (4.78) considerando $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ]. (b) Sinal de entrada correlacionado obtido de (4.78) com $\chi = 110,58$ [obtido de (4.78) considerando $\beta_1 = -0,55$ e $\beta_2 = 0,8$ ]. .....	99
Figura 5.1 - Diagrama de blocos de uma estrutura de identificação de sistemas utilizando o algoritmo NLMS.....	102
Figura 5.2 - Comportamento de $A_{i,q}$ (a) e $\psi_{i,q}$ (b) com respeito ao passo de adaptação (considerando os mesmos parâmetros do terceiro cenário do Exemplo 1 para $i = 3, 5$ e $6$ ). .....	110
Figura 5.3 - Comportamento do valor médio do EQME em regime permanente em relação ao passo de adaptação.....	118
Figura 5.4 – Exemplo 1. Comportamento médio de alguns coeficientes do filtro adaptativo (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulação de MC (linha irregular cinza) e do modelo proposto (linha tracejada escura). Os coeficientes do sistema variante no tempo $\mathbf{w}_o(n)$ e o valor médio do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b) $\chi = 1$ . (c) e (d) $\chi = 114,04$ . (e) e (f) $\chi = 559,14$ . ....	122
Figura 5.5 – Exemplo 1. Amostras de $\mathbf{w}_1$ (linha cinza) e $\mathbf{w}_2$ (linha escura). .....	123

Figura 5.6 – Exemplo 2. Curvas do EQM obtido através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e do modelo proposto (linha tracejada escura). O valor do EQM em regime permanente é indicado por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\mu = 0,1$ . (c) e (d)  $\mu = \mu_0 = 0,28$ . (e) e (f)  $\mu = 1,5$ . ..... 124

Figura 5.7 – Exemplo 3. Amostras de  $w_1$  (linha sólida cinza) e  $w_2$  (linha sólida escura). ..... 125

Figura 5.8 – Exemplo 3. Comportamento médio de alguns coeficientes do filtro adaptativo (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulação de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha tracejada escura). Os coeficientes do sistema variante no tempo  $w_0(n)$  e o valor médio do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\omega_0 = \pi/1000$ . (c) e (d)  $\omega_0 = \pi/500$ . (e) e (f)  $\omega_0 = \pi/250$ . ..... 127

Figura 5.9 – Exemplo 4. Valor médio do EQM em regime permanente obtido através de simulações de MC (marcadores cinzas) e do modelo proposto (linhas escuras). (a) Sinal de entrada branco gaussiano. (b) Sinal de entrada correlacionado gaussiano com  $\chi = 114,04$ . ..... 128

Figura A.1 – Comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos (a) e EQM (b) obtidos por simulação de MC considerando as fases  $\theta_q$  e  $\phi_q$  fixas (linhas cinza) e a Suposição A4 (linhas escuras). ..... 136

Figura E.1 – Coeficientes dos filtros adaptativos em regime permanente obtidos através do algoritmo NLMS (linha sólida cinza) e do algoritmo LMS (linha pontilhada escura), considerando sinal de entrada correlacionado com  $\chi = 110,58$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ ]. (a)  $M = 22$ . (b)  $M = 26$ . (c)  $M = N = 30$ . (d)  $M = 60$ . ..... 153

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EQM - erro quadrático médio

EQME - erro quadrático médio em excesso

PEQM - pseudo-erro quadrático médio

FxLMS - *filtered-x least-mean-square*

MC - Monte Carlo

NANC - *narrowband active noise control*

NANE - *narrowband active noise equalization*

NLMS - *normalized least-mean-square*



## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>23</b>
1.1 Aplicações e Campo de Pesquisa .....	23
1.2 Objetos de Estudo da Tese .....	24
1.3 Organização da Tese .....	24
<b>2. MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO ALGORITMO FXLMS OPERANDO EM SISTEMAS DE EQUALIZAÇÃO ATIVA DE RUÍDO PERIÓDICO .....</b>	<b>25</b>
2.1 Introdução .....	25
2.2 Algoritmo FxLMS Operando em Sistemas de NANE .....	28
2.3 Modelo Estocástico Proposto .....	32
2.3.1 Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo .....	34
2.3.2 Filtro adaptativo em regime permanente.....	35
2.3.3 Erro quadrático médio.....	37
2.3.4 Matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo...	37
2.3.5 Pseudo-erro quadrático médio .....	40
2.3.6 Erro quadrático médio em regime permanente .....	40
2.3.7 Pseudo-erro quadrático médio em regime permanente .....	44
2.4 Resultados de Simulação.....	44
2.4.1 Exemplo 1 .....	45
2.4.2 Exemplo 2 .....	48
2.4.3 Exemplo 3 .....	51
2.5 Conclusões .....	54
<b>3. MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO ALGORITMO FXLMS OPERANDO EM SISTEMAS MULTICANAL DE NANC .....</b>	<b>55</b>
3.1 Revisitando os Sistemas Multicanal de Controle Ativo de Ruído Periódico .....	56
3.2 Modelo Estocástico Proposto.....	57
3.2.1 Comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos .....	59

3.2.2	Filtros adaptativos em regime permanente .....	60
3.2.3	Erro quadrático médio .....	62
3.2.4	Matrizes de Correlação dos Vetores dos Filtros Adaptativos .....	63
3.3	Resultados de Simulação .....	65
3.3.1	Exemplo 1 .....	67
3.3.2	Exemplo 2 .....	69
3.3.3	Exemplo 3 .....	71
3.4	Conclusões .....	74
<b>4.</b>	<b>MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO ALGORITMO NLMS CONSIDERANDO FILTRO ADAPTATIVO E PLANTA COM DIFERENTES ORDENS .....</b>	<b>75</b>
4.1	Estabelecimento do Problema .....	76
4.2	Modelo Estocástico Proposto .....	78
4.2.1	Modelo estocástico para sinal de entrada branco gaussiano	78
4.2.1.1	Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo .....	78
4.2.1.2	Filtro adaptativo em regime permanente .....	79
4.2.1.3	Erro quadrático médio .....	79
4.2.1.4	Matrizes de correlação .....	80
4.2.1.5	EQM em regime permanente .....	82
4.2.2	Modelo estocástico para sinal de entrada correlacionado gaussiano .....	84
4.2.2.1	Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo .....	84
4.2.2.2	Filtro adaptativo em regime permanente .....	84
4.2.2.3	Erro quadrático médio .....	85
4.2.2.4	Matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo .....	86
4.2.2.5	EQM em regime permanente .....	88
4.3	Resultados de Simulação .....	90

4.3.1 Exemplo 1 .....	90
4.3.2 Exemplo 2 .....	95
4.3.3 Exemplo 3 .....	96
4.3.4 Exemplo 4 .....	98
4.4 Conclusões .....	99
<b>5. MODELO ESTOCÁSTICO DO ALGORITMO NLMS OPERANDO EM AMBIENTES VARIANTES NO TEMPO.....</b>	<b>101</b>
5.1 Introdução .....	101
5.2 Estabelecimento do Problema .....	102
5.3 Modelo Estocástico Proposto.....	104
5.3.1 Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo .....	105
5.3.2 Expressão fechada para o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo .....	106
5.3.3 Coeficientes do filtro adaptativo em regime permanente... ..	109
5.3.4 Erro quadrático médio.....	111
5.3.5 Matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo. ..	112
5.3.6 EQM em regime permanente .....	115
5.4 Resultados de Simulação.....	119
5.4.1 Exemplo 1 .....	119
5.4.2 Exemplo 2 .....	122
5.4.3 Exemplo 3 .....	124
5.4.4 Exemplo 4 .....	127
5.5 Conclusões .....	128
<b>6. CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>130</b>
6.1 Sumário e discussão dos resultados .....	130
6.2 Artigos Científicos Publicados.....	132
6.3 Sugestões de Trabalhos Futuros.....	133
<b>A. DISCUSSÃO ACERCA DA SUPOSIÇÃO A4.....</b>	<b>134</b>
<b>B. DETERMINAÇÃO DE <math>H_{q,r}(n)</math> .....</b>	<b>137</b>

<b>C. DETERMINAÇÃO DE <math>V_q^{0,0}(n)</math> .....</b>	<b>139</b>
<b>D. DETERMINAÇÃO DE <math>R_1, R_2, R_3</math> E <math>R_4</math> .....</b>	<b>141</b>
D.1 Determinação de $R_1$ .....	141
D.2 Sinal de entrada branco .....	143
D.3 Sinal de entrada correlacionado .....	143
D.4 Determinação da matriz $R_2$ .....	144
D.5 Determinação de $R_3$ .....	147
D.6 Determinação de $R_4$ .....	147
D.7 Sinal de entrada branco .....	149
D.8 Sinal de entrada correlacionado .....	149
<b>E. VERIFICAÇÃO DA RELAÇÃO <math>R_1^{-1}R_2 = R_{M,M}^{-1}R_{M,N}</math> .....</b>	<b>151</b>
<b>F. DETERMINAÇÃO DE <math>R_5(n)</math> .....</b>	<b>154</b>
F.1 Sinal de entrada branco.....	156
F.2 Sinal de entrada correlacionado.....	157

## INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, algoritmos de filtragem adaptativa vêm sendo amplamente utilizados em diversas aplicações práticas, pois além de serem capazes de operar em ambientes variantes no tempo (rastreamento das variações das estatísticas dos sinais envolvidos e/ou do ambiente considerado), eles não necessitam que sejam fornecidas *a priori* as estatísticas do sinal de entrada para que um filtro ótimo<sup>1</sup> (em algum sentido estatístico) seja obtido. Em compensação, os algoritmos de filtragem adaptativa necessitam apenas que algum sinal de referência (utilizado para gerar uma métrica de desempenho para direcionar a atualização do filtro adaptativo) esteja disponível, o que é comum em diversas aplicações práticas [1]–[5].

### 1.1 APLICAÇÕES E CAMPO DE PESQUISA

No contexto das aplicações que utilizam filtragem adaptativa pode-se destacar: o cancelamento de eco acústico ou de rede (envolvendo voz ou dados), a equalização de canal, o cancelamento adaptativo de ruído, a conformação de feixe em arranjo de antenas, a identificação de sistemas, o controle ativo de ruído, dentre outras [6]–[10]. Devido, principalmente, ao seu grande campo de aplicação, a filtragem adaptativa tem se consolidado como uma área de pesquisa importante, a qual apresenta ainda inúmeros desafios teóricos e práticos a serem superados. Especificamente, os campos de pesquisa em filtragem adaptativa compreendem o desenvolvimento de novos algoritmos, a determinação de parâmetros ótimos e a análise estocástica de algoritmos adaptativos.

Particularmente, a análise estocástica visa derivar expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo adaptativo em diferentes condições de operação, fornecendo um entendimento mais profundo de seu comportamento, sem que seja necessário o uso extensivo de simulações de Monte Carlo (MC). Através de expressões de modelo, pode-se estabelecer relações entre métricas de desempenho e parâmetros do algoritmo adaptativo, auxiliando o projetista no ajuste desses parâmetros. Além disso, um modelo estocástico preciso pode também

---

<sup>1</sup> Em diversas aplicações em ambiente estacionário, o filtro adaptativo converge (no sentido médio) para a solução ótima de Wiener [3].

revelar comportamentos anômalos (indesejados) do algoritmo sob análise, dando suporte ao desenvolvimento de novas soluções visando superar esses problemas [11].

## 1.2 OBJETOS DE ESTUDO DA TESE

Neste trabalho de pesquisa, são derivados modelos estocásticos para dois algoritmos adaptativos bem conhecidos na literatura, a saber: o algoritmo FxLMS (*filtered-x least-mean-square*) e algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*). Para o algoritmo FxLMS [12], [13] são derivados dois modelos, ambos considerando aplicações de controle e/ou equalização ativa de ruído periódico, porém em diferentes estruturas (especificamente, monocanal ou multicanal). Para o algoritmo NLMS [14], [15], também são derivados dois modelos estocásticos, ambos considerando a aplicação de identificação de sistemas, porém com distintas configurações. Especificamente, para o primeiro modelo, assume-se que o sistema a ser identificado pode possuir ordem diferente do filtro adaptativo e, para o segundo modelo, adota-se uma representação matemática mais geral para o sistema a ser identificado.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Esta tese está organizada como segue. No Capítulo 2, expressões de modelo descrevendo os momentos de primeira e segunda ordens do algoritmo FxLMS operando em um sistema monocanal de equalização ativa de ruído periódico são derivadas. No Capítulo 3, um modelo estocástico para o algoritmo FxLMS operando em um sistema multicanal de controle ativo de ruído periódico é obtido. No Capítulo 4, o algoritmo NLMS, no contexto de um problema de identificação de sistemas, é analisado considerando que o filtro adaptativo e o sistema a ser identificado possuem ordens diferentes. No Capítulo 5, expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo NLMS operando em um problema de identificação de sistema são obtidas, considerando uma formulação mais geral para o sistema a ser identificado do que as formulações consideradas em trabalhos apresentados na literatura até então. Finalmente, no Capítulo 6, as conclusões e considerações finais desta tese são apresentadas.

## MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO ALGORITMO FXLMS OPERANDO EM SISTEMAS DE EQUALIZAÇÃO ATIVA DE RuíDO PERIÓDICO

### 2.1 INTRODUÇÃO

O desafio de manter a intensidade de ruídos acústicos sob níveis aceitáveis é um problema de grande relevância em diversos ambientes e tem motivado um significativo número de trabalhos de pesquisa [16]–[20]. Visando atender tal desafio, usualmente são utilizadas técnicas passivas baseadas em barreiras e silenciadores projetados para atenuar ruídos indesejados. No entanto, uma vez que tais técnicas necessitam de dispositivos com dimensões proporcionais aos comprimentos das ondas acústicas envolvidas, elas são, em geral, ineficientes e de alto custo quando o ruído a ser atenuado é de baixa frequência (nesse caso, devido ao comprimento da onda acústica ser elevado, materiais de grandes dimensões são requeridos) [16], [20]. Nesse contexto, sistemas de controle ativo de ruído (também referenciados como sistemas de ANC – *active noise control*) têm emergido como soluções práticas atrativas. Tais sistemas são baseados no princípio da interferência destrutiva, o qual estabelece que uma onda acústica pode ser cancelada por outra com igual amplitude e fase oposta. Mais especificamente, os sistemas de ANC utilizam dispositivos eletroacústicos (tais como, alto-falantes) para introduzir no domínio acústico uma onda sonora visando cancelar o ruído indesejado [16]–[20].

Dentre os diversos tipos de sistemas de ANC, aqueles que visam o cancelamento de ruído acústico periódico<sup>2</sup> são os que apresentam os maiores níveis de atenuação do ruído acústico. O diagrama básico de um sistema de ANC para ruído periódico (também denominado sistema de NANC<sup>3</sup>) é apresentado na Figura 2.1. Nota-se, através dessa figura, que no sistema considerado um sensor de referência (por exemplo, tacômetro) acoplado à fonte de ruído é utilizado para medir as frequências que compõem o ruído acústico. Essa informação é utilizada para sintetizar

---

<sup>2</sup> Ruído acústico periódico é também denominado na literatura de ANC como ruído de banda estreita [69]–[73].

<sup>3</sup> A sigla NANC refere-se ao controle ativo de ruído de banda estreita (narrowband active noise control).



No contexto das técnicas de controle e equalização ativa de ruído baseadas em processamento digital de sinais, o uso de filtragem adaptativa vem demonstrando grande eficácia. Em muitas aplicações, as condições de operação modificam-se continuamente. Por exemplo, em um ambiente em que se está realizando o controle de ruído, mudanças na temperatura e no fluxo de ar resultam em modificações na velocidade do som. Assim, nesses casos, é desejável que o sistema de controle e/ou equalização ativa de ruído possua a capacidade de adaptação. Dentre os algoritmos de filtragem adaptativa, o mais difundido em aplicações de NANC e NANE é o algoritmo FxLMS (*filtered-x least-mean-square*), o qual foi desenvolvido independentemente em [12], [13] e [25].

Levando em consideração o grande número de aplicações práticas nas quais se desejam equalizar ou cancelar ruídos periódicos, a análise estocástica do algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE e NANC torna-se um importante tópico de pesquisa, que ainda está aberto, apesar de alguns estudos preliminares terem sido apresentados na literatura.

Em particular, a análise estocástica do algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE foi objeto de estudo em [26], onde apenas a determinação de limites de estabilidade no sentido médio foi considerada. Em outras palavras, um modelo estocástico descrevendo o comportamento do algoritmo FxLMS em sistemas de NANE, tanto na fase transiente quanto em regime permanente (em ambos os sentidos médio e médio quadrático), não foi apresentado até o momento.

Para o caso particular em que o algoritmo FxLMS opera em sistemas de NANC, alguns modelos estocásticos foram apresentados na literatura [27]–[30]. Por exemplo, expressões de modelo descrevendo o comportamento médio dos coeficientes adaptativos, o erro quadrático médio (EQM) e o erro quadrático médio em regime permanente são apresentados em [27]. Em [28]–[30], o comportamento do algoritmo FxLMS é analisado em outras estruturas particulares de sistemas de NANC (especificamente, com estimação em tempo real do caminho secundário [28], [29], e com computação eficiente dos sinais de referência filtrados [30]). Entretanto, a suposição de variação lenta<sup>4</sup>, considerada em [27]–[30], pode degradar a precisão dos modelos derivados, especialmente quando o passo de adaptação se aproxima do limite de estabilidade. Embora o uso de tal suposição seja aceitável para realizar

---

<sup>4</sup> Tal suposição considera que os filtros adaptativos são invariantes durante um intervalo igual ao comprimento do filtro que modela o caminho secundário.

um estudo introdutório sobre o algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE e NANC (restrito a valores de passo de adaptação pequenos), os modelos obtidos sob tal condição são incapazes de prever algumas situações de operação importantes, tais como convergência irregular e instabilidade (associadas a valores de passo de adaptação próximos do limite de estabilidade). Assim, visando superar tal deficiência, a análise estocástica realizada em [27] é aprimorada neste capítulo; especificamente, aqui é analisado o algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE (mais gerais do que NANC) sem invocar a suposição de variação lenta, resultando em um novo conjunto de expressões de modelo descrevendo o comportamento dinâmico do algoritmo FxLMS.

Visando satisfazer tais objetivos, este capítulo é organizado como segue. Na Seção 2.2, o algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE é revisado. Na Seção 2.3, expressões analíticas descrevendo o comportamento médio dos coeficientes adaptativos, o EQM e o pseudo-erro quadrático médio (PEQM) são derivadas. Adicionalmente, expressões para predição dos valores em regime permanente dos filtros adaptativos, do EQM e do PEQM são obtidas. Comparações entre resultados de simulação de MC e predições teóricas obtidas a partir do modelo proposto são apresentadas na Seção 2.4.

## 2.2 ALGORITMO FXLMS OPERANDO EM SISTEMAS DE NANE

Em aplicações nas quais é desejado controlar a intensidade de ruídos acústicos de banda estreita visando satisfazer requerimentos de segurança acústica, sistemas de NANE operando com o algoritmo FxLMS podem ser utilizados. Em tais sistemas, a amplitude de cada senoide do ruído acústico é individualmente ponderada por um parâmetro de ganho  $\beta_q$ , que pode ser ajustado tanto para reduzir ( $0 \leq \beta_q < 1$ ) quanto para amplificar ( $\beta_q \geq 1$ ) a senoide envolvida. O diagrama de blocos de um sistema de NANE [24] é ilustrado na Figura 2.2, onde  $d(n)$  caracteriza um ruído acústico dado por

$$d(n) = z(n) + \sum_{q=1}^Q D_q \cos(\omega_q n + \varphi_q) \quad (2.1)$$

com  $Q$  representando o número de senoides,  $D_q$ ,  $\omega_q$  e  $\theta_q$  denotando, respectivamente, a amplitude, a frequência e a fase da  $q$ -ésima senoide, e  $z(n)$ , um ruído de medição.

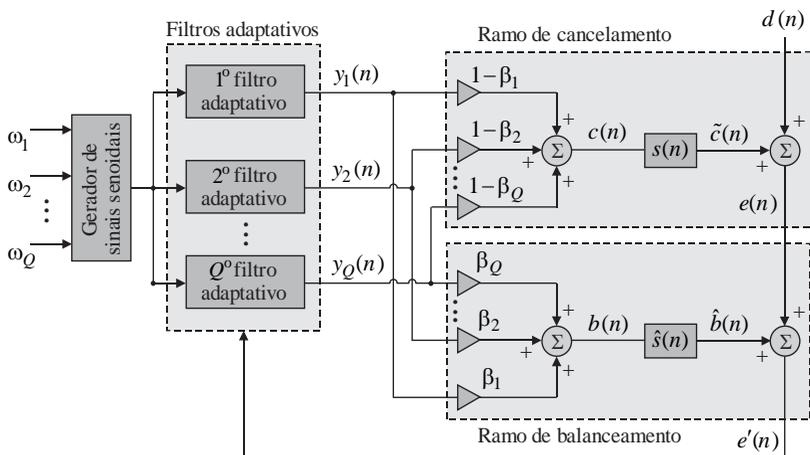


Figura 2.2 - Diagrama de blocos de um sistema de NANE [24].

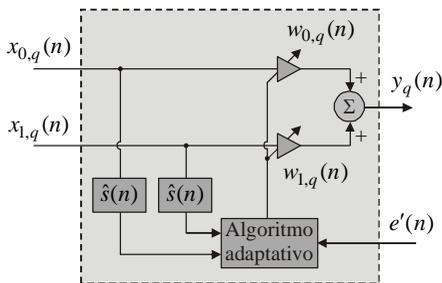


Figura 2.3 - Diagrama de blocos do  $q$ -ésimo filtro adaptativo.

Note nas Figuras 2.1 e 2.2 que o sistema de NANE considerado utiliza  $Q$  filtros adaptativos em paralelo, cada um com dois coeficientes adaptativos com sinais de referência (ou de entrada) em quadratura, os quais são dados por

$$\mathbf{x}_q(n) = \begin{bmatrix} x_{0,q}(n) \\ x_{1,q}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_q n + \theta_q) \\ \text{sen}(\omega_q n + \theta_q) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde  $\theta_q$  representa a fase dos sinais de referência do vetor  $\mathbf{x}_q(n)$  e  $\omega_q$  caracteriza a frequência medida através de um sensor (por exemplo, tacômetro) conectado à fonte de ruído [10], [17]. O sinal de saída de cada filtro adaptativo é dado por

$$y_q(n) = \mathbf{w}_q^T(n) \mathbf{x}_q(n) \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{w}_q = [w_{0,q}(n) \ w_{1,q}(n)]^T$  é o vetor de coeficientes do  $q$ -ésimo filtro adaptativo.

O sinal sintetizado  $y_q(n)$  é então utilizado como entrada para os ramos de cancelamento e balanceamento [23]. Particularmente, no ramo de cancelamento, os sinais sintetizados são primeiramente multiplicados por  $(1 - \beta_q)$  e, então, somados entre si, resultando no sinal  $c(n)$ , que é inserido no domínio acústico por meio de um transdutor (por exemplo, alto-falante). Esta última operação, representada na Figura 2.3 através da convolução de  $c(n)$  com a resposta ao impulso  $s(n)$  do caminho secundário<sup>5</sup>, é descrita por

$$\begin{aligned} \tilde{c}(n) &= c(n) * s(n) \\ &= \left[ \sum_{q=1}^Q (1 - \beta_q) y_q(n) \right] * s(n) \end{aligned} \quad (2.4)$$

com  $*$  denotando a operação de convolução linear. Desse modo, o sinal de erro (medido através de um microfone) é dado por

$$e(n) = d(n) + \tilde{c}(n). \quad (2.5)$$

Em contraste com o ramo de cancelamento, no ramo de balanceamento todas as operações ocorrem no domínio elétrico (por exemplo, dentro de um processador digital de sinais). Nesse ramo, as saídas dos filtros adaptativos são inicialmente multiplicadas por  $\beta_q$  e, então, somadas entre si, produzindo  $b(n)$ ; na sequência, tal sinal é processado por um filtro com resposta ao impulso  $\hat{s}(n)$ , que representa o caminho secundário estimado (obtido através de um processo de identificação *offline*, veja [17] para detalhes). Finalmente, o sinal de saída do ramo de balanceamento é expresso como

$$\begin{aligned} \hat{b}(n) &= b(n) * \hat{s}(n) \\ &= \left[ \sum_{q=1}^Q \beta_q y_q(n) \right] * \hat{s}(n) \end{aligned} \quad (2.6)$$

e o sinal de pseudo-erro  $e'(n)$  como

---

<sup>5</sup> O caminho secundário modela o caminho acústico e os componentes utilizados na interface dos domínios elétrico e acústico.

$$\begin{aligned} e'(n) &= e(n) + \hat{b}(n) \\ &= d(n) + \tilde{c}(n) + \hat{b}(n). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Em particular, em um sistema de NANE, os filtros adaptativos são atualizados com o objetivo de minimizar o valor instantâneo do sinal de pseudo-erro quadrático [17], dado por

$$e'^2(n) = [d(n) + \tilde{c}(n) + \hat{b}(n)]^2. \quad (2.8)$$

Tal problema de minimização origina a regra de adaptação baseada no algoritmo FxLMS, que é expressa como

$$\mathbf{w}_q(n+1) = \mathbf{w}_q(n) - \mu_q e'(n) \hat{\mathbf{x}}_q(n) \quad (2.9)$$

com  $\mu_q$  denotando o passo de adaptação e

$$\hat{\mathbf{x}}_q(n) = \begin{bmatrix} x_{0,q}(n) * \hat{s}(n) \\ x_{1,q}(n) * \hat{s}(n) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

o vetor contendo os  $q$ -ésimos sinais de referência filtrados pelo caminho secundário estimado.

Em um cenário ideal [ruído de medição nulo e caminho secundário perfeitamente estimado, isto é,  $z(n) = 0$  e  $\hat{s}(n) = s(n)$ , respectivamente], a minimização de (2.8) produz  $e'^2(n) = 0$  em regime permanente. Nesse cenário, o sinal de erro é dado por

$$e(n) = \sum_{q=1}^Q \beta_q D_q \cos(\omega_q n + \varphi_q). \quad (2.11)$$

Note que, nessa condição ideal de operação, o sinal de erro em regime permanente contém as senoides de  $d(n)$  ponderadas por  $\beta_q$ . Assim, verifica-se que o sistema de NANE [24] exibe (para cada frequência) quatro diferentes modos de operação, denominados: cancelamento ( $\beta_q = 0$ ), atenuação ( $0 < \beta_q < 1$ ), neutro ( $\beta_q = 1$ ) e amplificação ( $\beta_q > 1$ ). Em particular, os sistemas de NANE e NANC são equivalentes para  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_Q = 0$ . Observe também que, no cenário ideal considerado acima, o parâmetro  $\beta_q$  delinea o comportamento do sistema de NANE em regime permanente. Entretanto, para se obter um entendimento mais profundo de tal sistema, operando em cenários mais realistas (isto é, ruído de medição não nulo e caminho secundário estimado imprecisamente), um modelo estocástico preciso torna-se necessário.

### 2.3 MODELO ESTOCÁSTICO PROPOSTO

Nesta seção, são derivadas as expressões do modelo descrevendo o comportamento do algoritmo FxLMS operando no sistema de NANE previamente apresentado. Para tal, as suposições e aproximações utilizadas na derivação do modelo são, primeiramente, apresentadas como segue:

S1) O caminho secundário  $s(n)$  e o caminho secundário estimado  $\hat{s}(n)$  são modelados por filtros FIR (*finite impulse response*) com ordens  $L$  e  $\hat{L}$ , respectivamente [27]–[30].

S2) O ruído de medição  $z(n)$  é assumido gaussiano branco com variância  $\sigma_z^2$  e decorrelacionado de qualquer outro sinal no sistema [27]–[33].

S3) Os valores esperados do tipo  $E[\mathbf{x}_r(n)\mathbf{x}_q^T(n-j)\mathbf{w}_q(n-j)]$  são aproximados<sup>6</sup> por  $E[\mathbf{x}_r(n)\mathbf{x}_q^T(n-j)]E[\mathbf{w}_q(n-j)]$  para qualquer valor de  $j$  [27]–[30], [32], [33].

S4) Considera-se que as fases iniciais  $\varphi_q$  e  $\theta_q$  de  $d(n)$ ,  $x_{0,q}(n)$  e  $x_{1,q}(n)$  podem assumir valores diferentes entre realizações dos sistemas de NANE [2, pp. 122], [27]–[30] (para detalhes, veja Apêndice A).

Agora, visando simplificar a derivação do modelo, algumas expressões introduzidas na Seção 2.2 são reescritas utilizando as suposições previamente apresentadas. Por exemplo, o ruído  $d(n)$  pode ser reescrito como

$$d(n) = z(n) + \sum_{q=1}^Q D_q \cos(\omega_q n + \theta_q + \Delta\varphi_q) \quad (2.12)$$

onde  $\Delta\varphi_q = \varphi_q - \theta_q$ . Ou ainda,

$$d(n) = z(n) + \sum_{q=1}^Q \mathbf{d}_q^T \mathbf{x}_q(n) \quad (2.13)$$

com

---

<sup>6</sup> Em particular, a validade de tal aproximação é analisada em [37].

$$\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} D_q \cos(\Delta\varphi_q) \\ -D_q \sin(\Delta\varphi_q) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Tendo em vista que a diferença de fase  $\Delta\varphi_q$  afeta diretamente o valor em regime permanente do  $q$ -ésimo filtro adaptativo (como será discutido na Seção 2.3.2), para fins de análise, deve-se assumir que  $\Delta\varphi_q$  é invariante, a qual precisa ser escolhida *a priori* para ser utilizada no modelo estocástico. Assim, o modelo proposto visa descrever o comportamento do sistema para cada valor particular de  $\Delta\varphi_q$ .

Agora, em (2.4), utilizando a Suposição S1, a convolução  $y_q(n) * s(n)$  pode ser reescrita como

$$y_q(n) * s(n) = \sum_{\ell=0}^{L-1} s(\ell) \mathbf{w}_q^T(n-\ell) \mathbf{x}_q(n-\ell) \quad (2.15)$$

onde  $s(\ell)$  denota o  $\ell$ -ésimo coeficiente do filtro que caracteriza o caminho secundário e

$$\mathbf{x}_q(n-\ell) = \mathbf{\Omega}_{\ell,q}^T \mathbf{x}_q(n) \quad (2.16)$$

com

$$\mathbf{\Omega}_{\ell,q} = \begin{bmatrix} \cos(\ell\omega_q) & -\sin(\ell\omega_q) \\ \sin(\ell\omega_q) & \cos(\ell\omega_q) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Nota-se de (2.16) e (2.17), que as amostras dos sinais de referência no instante  $n-\ell$  podem ser obtidas a partir das amostras do sinais de referência no instante  $n$ , utilizando apenas a matriz  $\mathbf{\Omega}_{\ell,q}$ .

Assim, (2.4) pode ser reescrita como

$$\tilde{c}(n) = \sum_{q=1}^Q (1-\beta_q) \mathbf{p}_q^T(n) \mathbf{x}_q(n) \quad (2.18)$$

com

$$\mathbf{p}_q(n) = \sum_{\ell=0}^{L-1} s(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q} \mathbf{w}_q(n-\ell). \quad (2.19)$$

De forma similar, para (2.6), tem-se

$$\hat{b}(n) = \sum_{q=1}^Q \beta_q \hat{\mathbf{p}}_q^T(n) \mathbf{x}_q(n) \quad (2.20)$$

com

$$\hat{\mathbf{p}}_q(n) = \sum_{\ell=0}^{\hat{L}-1} \hat{s}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q} \mathbf{w}_q(n-\ell) \quad (2.21)$$

onde  $\hat{s}(\ell)$  é o  $\ell$ -ésimo coeficiente do filtro que representa o caminho secundário estimado. Então, substituindo (2.13) e (2.18) em (2.5), o sinal de erro é agora dado por

$$e(n) = z(n) + \sum_{q=1}^Q [\mathbf{d}_q + (1-\beta_q) \mathbf{p}_q(n)]^T \mathbf{x}_q(n). \quad (2.22)$$

De forma similar, para o sinal de pseudo-erro (2.7), tem-se

$$e'(n) = z(n) + \sum_{q=1}^Q [\mathbf{d}_q + (1-\beta_q) \mathbf{p}_q(n) + \beta_q \hat{\mathbf{p}}_q(n)]^T \mathbf{x}_q(n). \quad (2.23)$$

Finalmente, utilizando a Suposição S1, o vetor do sinal de referência filtrado  $\hat{\mathbf{x}}_q(n)$  pode ser reescrito como

$$\hat{\mathbf{x}}_q(n) = \hat{\mathbf{\Gamma}}_q^T \mathbf{x}_q(n) \quad (2.24)$$

com

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_q = \sum_{\ell=0}^{\hat{L}-1} \hat{s}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q}. \quad (2.25)$$

Portanto, tendo em mãos expressões mais tratáveis descrevendo o algoritmo FxLMS operando no sistema de NANE [24], a derivação do modelo estocástico pode então ser realizada.

### 2.3.1 Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo

Com o objetivo de derivar uma expressão descrevendo o comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos, (2.23) e (2.24) são, primeiramente, utilizados em (2.9). Na sequência, o valor esperado é computado em ambos os lados da expressão resultante e, então, considerando as Suposições S2-S4, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_q(n+1)] &= E[\mathbf{w}_q(n)] - \frac{1}{2} \mu_q \hat{\mathbf{\Gamma}}_q^T \mathbf{d}_q \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu_q \hat{\mathbf{\Gamma}}_q^T \sum_{\ell=0}^{M-1} [s(\ell) + \beta_q \Delta s(\ell)] \mathbf{\Omega}_{\ell,q} E[\mathbf{w}_q(n-\ell)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

com  $M = \max(L, \hat{L})$ ,  $\Delta s(\ell) = \hat{s}(\ell) - s(\ell)$ ,  $s(\ell) = 0$  para  $\ell \geq L$ ,  $\hat{s}(\ell) = 0$  para  $\ell \geq \hat{L}$  e  $E[\mathbf{w}_q(n)] = [0 \ 0]^T$  para  $n \leq 0$ . Além disso, analisando a expressão acima, os seguintes pontos podem ser observados:

- a) Quando  $\hat{s}(n) = s(n)$ , o comportamento médio dos coeficientes adaptativos torna-se independente de  $\beta_q$ , isto é, (2.26) exibe o mesmo comportamento para qualquer modo de operação considerado.
- b) Particularmente, para  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_Q = 0$ , (2.26) fornece uma descrição mais precisa do comportamento médio dos coeficientes adaptativos do que a expressão dada em [27]. Tal resultado é esperado, visto que (2.26) é obtida sem invocar a suposição de variação lenta utilizada em [27], a qual considera que os filtros adaptativos são invariantes durante um intervalo igual ao comprimento do filtro FIR que representa o caminho secundário.

### 2.3.2 Filtro adaptativo em regime permanente

Agora, tomando (2.26) e assumindo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}_q(n)] = \mathbf{w}_q(\infty) \quad (2.27)$$

o  $q$ -ésimo filtro adaptativo em regime permanente pode ser expresso como

$$\mathbf{w}_q(\infty) = -[\Gamma_q - \beta_q(\Gamma_q - \hat{\Gamma}_q)]^{-1} \mathbf{d}_q \quad (2.28)$$

com  $\hat{\Gamma}_q$  dado por (2.25) e

$$\Gamma_q = \sum_{\ell=0}^{L-1} s(\ell) \Omega_{\ell,q}. \quad (2.29)$$

Então, levando em consideração (2.27)-(2.29), destaca-se que:

- a) Em todas as situações, o valor em regime permanente do  $q$ -ésimo filtro adaptativo é afetado pela diferença de fase  $\Delta\phi_q$  entre a  $q$ -ésima senóide de  $d(n)$  e o correspondente sinal de referência [veja (2.14) e (2.28)]. Assim, para cada valor particular de  $\Delta\phi_q$ , um  $\mathbf{w}_q(\infty)$  diferente é obtido.
- b) Nos sistemas de NANE, o filtro adaptativo considerado ótimo é aquele que minimiza o valor esperado do pseudo-erro quadrático médio, isto é,  $E[e'^2(n)]$ . Com o objetivo de derivar uma expressão

para tal filtro, primeiramente o quadrado de  $e'(n)$  é computado, em seguida, toma-se o valor esperado utilizando as Suposições S2-S4 e, então, minimiza-se a expressão resultante com respeito a  $\mathbf{w}_q^{\text{opt}}$ .

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_q^{\text{opt}} &= -[\mathbf{\Gamma}_q - \beta_q(\mathbf{\Gamma}_q - \hat{\mathbf{\Gamma}}_q)]^{-1} \mathbf{d}_q \\ &= \mathbf{w}_q(\infty).\end{aligned}\quad (2.30)$$

Portanto, nos sistemas de NANE, quando a convergência ocorre, cada filtro adaptativo converge para seu valor ótimo, isto é,  $\mathbf{w}_q(\infty) = \mathbf{w}_q^{\text{opt}}$ , mesmo quando  $\hat{s}(n) \neq s(n)$ . Particularmente, tal afirmação não é válida para os sistemas de ANC que visam o tratamento de ruídos de banda larga [32].

c) Considere para as matrizes  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_q$  e  $\mathbf{\Gamma}_q$  [definidas em (2.25) e (2.29), respectivamente], as seguintes notações:

$$\mathbf{\Gamma}_q = \begin{bmatrix} \alpha_q & -\gamma_q \\ \gamma_q & \alpha_q \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

e

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_q = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_q & -\hat{\gamma}_q \\ \hat{\gamma}_q & \hat{\alpha}_q \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

onde

$$S(e^{j\omega_q}) = \alpha_q + j\gamma_q \quad (2.33)$$

e

$$\hat{S}(e^{j\omega_q}) = \hat{\alpha}_q + j\hat{\gamma}_q \quad (2.34)$$

são, respectivamente, as respostas em frequência do caminho secundário e do caminho secundário estimado na frequência  $\omega_q$ . Assim, tendo em vista (2.31)-(2.34) e (2.28), nota-se que quando  $\hat{s}(n)$  modela precisamente  $s(n)$  na frequência  $\omega_q$  [isto é,  $\hat{S}(e^{j\omega_q}) = S(e^{j\omega_q})$ , implicando  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_q = \mathbf{\Gamma}_q$ ] o filtro adaptativo em regime permanente, dado por (2.28), torna-se independente de  $\beta_q$ ; em outras palavras,  $\mathbf{w}_q(n)$  atinge o mesmo valor em regime permanente em qualquer modo de operação considerado.

### 2.3.3 Erro quadrático médio

Visando obter uma expressão analítica para prever o EQM (isto é, a potência média do sinal de erro) do algoritmo FxLMS operando no sistema de NANE [24], primeiramente o vetor de erro do  $q$ -ésimo filtro adaptativo é definido por

$$\mathbf{v}_q(n) \triangleq \mathbf{w}_q(\infty) - \mathbf{w}_q(n). \quad (2.35)$$

Assim, o sinal de erro (2.22) pode ser reescrito como

$$e(n) = z(n) + \sum_{q=1}^Q [\mathbf{d}_q + (1 - \beta_q)\mathbf{\Gamma}_q \mathbf{w}_q(\infty) - (1 - \beta_q)\boldsymbol{\eta}_q(n)]^T \mathbf{x}_q(n) \quad (2.36)$$

com

$$\boldsymbol{\eta}_q(n) = \sum_{\ell=0}^{L-1} s(\ell)\boldsymbol{\Omega}_{\ell,q} \mathbf{v}_q(n - \ell). \quad (2.37)$$

Então, elevando  $e(n)$  ao quadrado, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S2-S4, o EQM pode ser expresso como

$$\begin{aligned} J(n) &\triangleq E[e^2(n)] \\ &= \sigma_z^2 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}_q^T \mathbf{u}_q - \sum_{q=1}^Q (1 - \beta_q) \mathbf{u}_q^T \sum_{\ell=0}^{L-1} s(\ell)\boldsymbol{\Omega}_{\ell,q} E[\mathbf{v}_q(n - \ell)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q (1 - \beta_q)^2 \text{tr} \left[ \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} s(\ell)s(m)\boldsymbol{\Omega}_{m,q} \mathbf{V}_q^{m,\ell}(n)\boldsymbol{\Omega}_{\ell,q}^T \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n) \triangleq E[\mathbf{v}_q(n - m)\mathbf{v}_q^T(n - \ell)]$  é a matriz de correlação do vetor de erro do  $q$ -ésimo filtro adaptativo e  $\mathbf{u}_q = \mathbf{d}_q + (1 - \beta_q)\mathbf{\Gamma}_q \mathbf{w}_q(\infty)$ . Note de (2.38) que o EQM será completamente determinado apenas se todas as matrizes de correlação  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n)$  (para  $q=1, 2, \dots, Q$ ) forem conhecidas.

### 2.3.4 Matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo

Nesta seção, são derivadas duas expressões recursivas para determinar as matrizes de correlação dos vetores de erro dos filtros adaptativos, sendo que a primeira expressão é utilizada para computar  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n)$  com  $m = \ell$  e a segunda, para  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n)$  com  $m \neq \ell$  [33]. Para

tal, inicialmente a regra de atualização (2.9) é reescrita em termos de  $\mathbf{v}_q(n)$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_q(n+1) &= \mathbf{v}_q(n) + \mu_q \hat{\mathbf{\Gamma}}_q^T \mathbf{x}_q(n) z(n) \\ &\quad - \mu_q \hat{\mathbf{\Gamma}}_q^T \mathbf{x}_q(n) \sum_{r=1}^Q \mathbf{x}_r^T(n) [(1-\beta_r) \boldsymbol{\eta}_r(n) + \beta_r \hat{\boldsymbol{\eta}}_r(n)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde  $\boldsymbol{\eta}_r(n)$  é dado por (2.37) e

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_r(n) = \sum_{\ell=0}^{\hat{L}-1} \hat{s}(\ell) \boldsymbol{\Omega}_{\ell,r} \mathbf{v}_r(n-\ell). \quad (2.40)$$

A fim de derivar uma expressão recursiva para computar  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n)$  para  $m = \ell$ , primeiramente identifica-se que

$$\mathbf{V}_q^{m,m}(n) = \mathbf{V}_q^{0,0}(n-m). \quad (2.41)$$

Assim, a determinação da matriz  $\mathbf{V}_q^{m,m}(n)$  exige apenas a computação de  $\mathbf{V}_q^{0,0}(n)$ . Então, determinando o produto vetorial  $\mathbf{v}_q(n+1)\mathbf{v}_q^T(n+1)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S2-S4, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q^{0,0}(n+1) &= \mathbf{V}_q^{0,0}(n) + \frac{1}{2} \mu_q^2 \hat{\mathbf{\Gamma}}_q^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_q \sigma_z^2 + \mu_q^2 \hat{\mathbf{\Gamma}}_q^T \left[ \sum_{r=1}^Q \mathbf{H}_{q,r}(n) \right] \hat{\mathbf{\Gamma}}_q \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu_q \sum_{\ell=0}^{M-1} [(1-\beta_q) s(\ell) + \beta_q \hat{s}(\ell)] [\mathbf{A}_{\ell,q}^T(n) + \mathbf{A}_{\ell,q}(n)] \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde  $M = \max(L, \hat{L})$ ,  $s(\ell) = 0$  para  $\ell \geq L$ ,  $\hat{s}(\ell) = 0$  para  $\ell \geq \hat{L}$  e  $\mathbf{A}_{\ell,q}(n) = \hat{\mathbf{\Gamma}}_q^T \boldsymbol{\Omega}_{\ell,q} \mathbf{V}_q^{\ell,0}(n)$ . A matriz  $\mathbf{H}_{q,r}(n)$  é dada por

$$\mathbf{H}_{q,r}(n) = E[\mathbf{x}_q(n) \mathbf{x}_r^T(n) \mathbf{G}_r(n) \mathbf{x}_r(n) \mathbf{x}_q^T(n)] \quad (2.43)$$

com

$$\mathbf{G}_r(n) = [(1-\beta_r) \boldsymbol{\eta}_r(n) + \beta_r \hat{\boldsymbol{\eta}}_r(n)] [(1-\beta_r) \boldsymbol{\eta}_r^T(n) + \beta_r \hat{\boldsymbol{\eta}}_r^T(n)]. \quad (2.44)$$

Utilizando os resultados apresentados no Apêndice B, a matriz  $\mathbf{H}_{q,r}(n)$ , para  $q = r$ , pode ser expressa como

$$\mathbf{H}_{q,r}(n) = \frac{1}{8} \{ \text{tr}[\mathbf{K}_r(n)] \mathbf{I} + \mathbf{K}_r(n) + \mathbf{K}_r^T(n) \} \quad (2.45)$$

e, para  $q \neq r$ , como

$$\mathbf{H}_{q,r}(n) = \frac{1}{4} \text{tr}[\mathbf{K}_r(n)]\mathbf{I} \quad (2.46)$$

com

$$\mathbf{K}_r(n) = \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_r^{\ell,m} \boldsymbol{\Omega}_{m,r} \mathbf{V}_r^{m,\ell}(n) \boldsymbol{\Omega}_{\ell,r}^T \quad (2.47)$$

para

$$a_r^{\ell,m} = (1 - \beta_r)^2 s(\ell)s(m) + \beta_r(1 - \beta_r)[s(\ell)\hat{s}(m) + \hat{s}(\ell)s(m)] + \beta_r^2 \hat{s}(\ell)\hat{s}(m). \quad (2.48)$$

De (2.42) e (2.47), nota-se que a determinação de  $\mathbf{V}_q^{0,0}(n+1)$  ainda depende do conhecimento da matriz  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n)$  para  $m \neq \ell$ . Portanto, visando derivar uma expressão para determinar tal matriz, primeiramente, identifica-se que

$$\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n) = \begin{cases} \mathbf{V}_q^{m-\ell,0}(n-\ell), & m > \ell \\ \mathbf{V}_q^{0,\ell-m}(n-m), & m < \ell \end{cases} \quad (2.49)$$

e

$$\mathbf{V}_q^{0,\ell-m}(n-m) = [\mathbf{V}_q^{\ell-m,0}(n-m)]^T. \quad (2.50)$$

Então, para obter  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n)$  com  $m \neq \ell$ , é necessário apenas computar tal matriz na forma  $\mathbf{V}_q^{g,0}(n)$ . Assim, pré-multiplicando ambos os lados do transposto de (2.39) por  $\mathbf{v}_q(n+1-g)$ , tomando o valor esperado da expressão resultante e utilizando as Suposições S2-S4, tem-se

$$\mathbf{V}_q^{g,0}(n+1) = \mathbf{V}_q^{g-1,0}(n) - \frac{1}{2} \mu_q \sum_{\ell=0}^{M-1} [(1 - \beta_q)s(\ell) + \beta_q \hat{s}(\ell)] \mathbf{V}_q^{g-1,\ell}(n) \boldsymbol{\Omega}_{\ell,q}^T \hat{\Gamma}_q. \quad (2.51)$$

Portanto, a matriz de correlação  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n)$  pode ser completamente determinada através de (2.42) e (2.51), juntamente com (2.41), (2.49) e (2.50). Adicionalmente, considera-se  $\mathbf{V}_q^{m,\ell}(n) = \mathbf{w}_q(\infty) \mathbf{w}_q^T(\infty)$  para  $n \leq m$  e  $n \leq \ell$ .

### 2.3.5 Pseudo-erro quadrático médio

Para obter o PEQM, primeiramente o sinal de pseudo-erro deve ser expresso como

$$e'(n) = z(n) - \sum_{q=1}^Q [(1 - \beta_q) \mathbf{n}_q^T(n) + \beta_q \hat{\mathbf{n}}_q^T(n)] \mathbf{x}_q(n). \quad (2.52)$$

Então, elevando  $e'(n)$  ao quadrado, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S2-S4, o PEQM é escrito como

$$\begin{aligned} J'(n) &\triangleq \mathbb{E}[e'(n)^2] \\ &= \sigma_z^2 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \text{tr}[\mathbf{K}_q(n)] \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde  $\mathbf{K}_q(n)$  é dado por (2.47).

### 2.3.6 Erro quadrático médio em regime permanente

Agora, visando obter uma expressão analítica descrevendo o EQM em regime permanente, toma-se o limite de (2.38) para  $n \rightarrow \infty$ . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J(n) &\triangleq J(\infty) \\ &= \sigma_z^2 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}_q^T \mathbf{u}_q - \sum_{q=1}^Q (1 - \beta_q) \mathbf{u}_q^T \sum_{\ell=0}^{L-1} s(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbf{v}_q(n - \ell)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q (1 - \beta_q)^2 \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} s(\ell) s(m) \text{tr} \{ \mathbf{\Omega}_{m,q} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_q^{m,\ell}(n) \mathbf{\Omega}_{\ell,q}^T \}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Adicionalmente, assumindo convergência, pode-se considerar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbf{v}_q(n - \ell)] = \mathbf{0} \quad (2.55)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}_q^{m,\ell}(n) \cong \mathbf{V}_q^{0,0}(\infty). \quad (2.56)$$

Note que (2.56) é equivalente à suposição de variação lenta utilizada em [27]; entretanto, no caso da análise em regime permanente, o uso de tal suposição é justificado pelo fato de que em regime permanente os filtros adaptativos tendem a ser aproximadamente constantes, contanto que a

convergência tenha sido atingida. Além disso, utilizando os resultados do Apêndice C, (2.56) pode ser expressa como

$$\mathbf{V}_q^{0,0}(\infty) = \frac{1}{2} \mu_q \frac{(\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2)}{\tau_q} \frac{1}{1-\xi} \sigma_z^2 \mathbf{I} \quad (2.57)$$

com

$$\xi = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \mu_q \frac{(\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2) \lambda_q}{\tau_q} \quad (2.58)$$

$$\tau_q = (1-\beta_q)(\hat{\alpha}_q \alpha_q + \hat{\gamma}_q \gamma_q) + \beta_q (\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2) \quad (2.59)$$

e

$$\lambda_q = (1-\beta_q)^2 (\alpha_q^2 + \gamma_q^2) + 2\beta_q (1-\beta_q) (\hat{\alpha}_q \alpha_q + \hat{\gamma}_q \gamma_q) + \beta_q^2 (\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2). \quad (2.60)$$

Em (2.57)-(2.60),  $\alpha_q$ ,  $\hat{\alpha}_q$ ,  $\gamma_q$  e  $\hat{\gamma}_q$  são os elementos de (2.31) e (2.32). Finalmente, substituindo (2.55) e (2.56) em (2.54) e, além disso, utilizando (2.31) e (2.32) para reescrever o produto interno  $\mathbf{u}_q^T \mathbf{u}_q$ , o EQM em regime permanente é dado por

$$J(\infty) = J_{\min} + J_{\text{ex}}(\infty) \quad (2.61)$$

com

$$J_{\text{ex}}(\infty) = \frac{\sigma_z^2}{2(1-\xi)} \sum_{q=1}^Q \mu_q \frac{(1-\beta_q)^2 (\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2) (\alpha_q^2 + \gamma_q^2)}{\tau_q}. \quad (2.62)$$

e

$$J_{\min} = \sigma_z^2 + \sum_{q=1}^Q \psi_q \frac{\beta_q^2 D_q^2}{2} \quad (2.63)$$

sendo

$$\psi_q = \frac{\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2}{[\alpha_q + \beta_q (\hat{\alpha}_q - \alpha_q)]^2 + [\gamma_q + \beta_q (\hat{\gamma}_q - \gamma_q)]^2}. \quad (2.64)$$

Note que o EQM em regime permanente apresenta as seguintes características:

- a) A partir de (2.61), verifica-se que o EQM em regime permanente consiste de duas parcelas. A primeira, representada por  $J_{\min}$ , caracteriza o EQM mínimo obtido em regime permanente considerando os parâmetros  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_Q\}$ . A segunda parcela,

denotada por  $J_{\text{ex}}(\infty)$ , representa o EQM em excesso em regime permanente.

b) O EQM mínimo obtido em regime permanente  $J_{\text{min}}$  é função da variância do ruído de medição  $\sigma_z^2$  e da potência de cada senoide em  $d(n)$ , dada por  $\beta_q^2 D_q^2 / 2$ , multiplicada pelo termo de desajuste  $\psi_q$ . A partir de (2.63) e (2.64), verifica-se que a potência da senoide com frequência  $\omega_q$  é ajustada para o valor desejado apenas se  $\psi_q = 1$ , o que é obtido quando  $\hat{\alpha}_q = \alpha_q$  e  $\hat{\gamma}_q = \gamma_q$  ou, equivalentemente, quando  $\hat{S}(e^{j\omega_q}) = S(e^{j\omega_q})$  [veja (2.33) e (2.34)]. Em outras palavras, para se obter a equalização desejada, as respostas em frequência do caminho secundário e do caminho secundário estimado devem ser iguais nas frequências de operação do sistema de NANE. Uma análise inicial sobre a equalização imperfeita foi apresentada em [34], utilizando, porém, uma abordagem diferente. Aqui, o problema da equalização imperfeita é apresentado como um dos resultados da modelagem estocástica do sistema de NANE.

c) Para o cenário ideal (isto é,  $\sigma_z^2 = 0$  e  $\psi_q = 1$  para todo  $q$ ) o EQM em regime permanente é dado por

$$J_o = \sum_{q=1}^Q \frac{\beta_q^2 D_q^2}{2} \quad (2.65)$$

caracterizando o EQM em regime permanente ideal.

d) A equalização imperfeita também pode ser medida pela diferença absoluta entre  $J_o$  e as potências das senoides do ruído acústico. Assim,

$$\Delta P = \sum_{q=1}^Q |1 - \psi_q| \frac{\beta_q^2 D_q^2}{2}. \quad (2.66)$$

Tal medida pode ser utilizada pelo projetista para selecionar um caminho secundário estimado de menor ordem e que modele precisamente o caminho secundário nas frequências de operação, visando, ao mesmo tempo, reduzir a complexidade computacional e prevenir uma distorção indesejada na equalização. Por exemplo, a partir de uma estimativa precisa e de alta ordem do caminho secundário, diversos caminhos secundários com menor ordem são estimados através de um procedimento de identificação de sistemas

[3]. Então, a estimativa que produzir um pequeno valor de  $\Delta P$  (isto é, uma distorção negligenciável na equalização) é a escolhida para ser utilizada no sistema de NANE.

e) A distorção na equalização (causada por uma estimativa imprecisa do caminho secundário) pode também ser avaliada através de (2.64) e (2.66). Para tal, considere (2.64) reescrita como

$$\Psi_q = \frac{(\alpha_q + \Delta\alpha_q)^2 + (\gamma_q + \Delta\gamma_q)^2}{(\alpha_q + \beta_q\Delta\alpha_q)^2 + (\gamma_q + \beta_q\Delta\gamma_q)^2} \quad (2.67)$$

com  $\Delta\alpha_q = \hat{\alpha}_q - \alpha_q$  e  $\Delta\gamma_q = \hat{\gamma}_q - \gamma_q$  denotando, respectivamente, a diferença entre as partes reais e imaginárias das respostas em frequência do caminho secundário e do caminho secundário estimado na frequência  $\omega_q$  [veja (2.33) e (2.34)]. Assim, com respeito à equalização de cada senoide do ruído acústico, os seguintes pontos podem ser destacados:

- 1) Para  $\beta_q = 1$  (modo neutro), tem-se  $\psi_q = 1$  e, como consequência  $|1 - \psi_q| = 0$ . Em outras palavras, no modo neutro não há distorção na equalização, independentemente dos valores de  $\Delta\alpha_q$  e  $\Delta\gamma_q$ .
- 2) Para  $\beta_q = 0$  (modo de cancelamento), tem-se  $|1 - \psi_q| \neq 0$ ; entretanto, uma vez que  $|1 - \psi_q|$  é multiplicado por  $\beta_q^2$  (que é zero) em (2.66), também não ocorre distorção na equalização nesse caso.
- 3) Para  $0 < \beta_q < 1$  (modo de atenuação), à medida que  $\beta_q$  é reduzido de 1 para 0, a diferença  $|1 - \psi_q|$  é aumentada. Entretanto, nesse caso, a distorção na equalização é limitada, pois, em (2.66),  $|1 - \psi_q|$  é multiplicado por  $\beta_q^2$  (que possui valor pouco significativo devido a  $0 < \beta_q < 1$ ).
- 4) Para  $\beta_q > 1$  (modo de amplificação), à medida que  $\beta_q$  é aumentado, a diferença  $|1 - \psi_q|$  também aumenta, sendo ainda amplificada pelo valor de  $\beta_q^2$  no numerador de (2.66). Assim, especialmente no modo de amplificação, é de suma importância

que  $\hat{s}(n)$  modele apropriadamente  $s(n)$ , visando reduzir  $\Delta\alpha_q$  e  $\Delta\gamma_q$  de forma a prevenir uma distorção proibitiva na equalização.

5) A partir de (2.67), verifica-se que o valor de  $\psi_q$  pode ser arbitrariamente elevado se  $\beta_q\Delta\alpha_q = -\alpha_q$  e  $\beta_q\Delta\gamma_q = -\gamma_q$ , produzindo uma distorção proibitiva na equalização.

### 2.3.7 Pseudo-erro quadrático médio em regime permanente

Para completar a análise estocástica do algoritmo FxLMS operando no sistema de NANE [24], uma expressão para predição do PEQM em regime permanente é derivada. Para tal, tomando o limite em (2.53) com  $n \rightarrow \infty$  e utilizando (2.56), (2.57), (2.31) e (2.32), obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J'(n) &\triangleq J'(\infty) \\ &= \sigma_z^2 + \frac{\xi}{1-\xi} \sigma_z^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde  $\xi$  é dado por (2.58).

## 2.4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, visando avaliar a precisão do modelo estocástico proposto, as predições do modelo são comparadas com os resultados obtidos por simulações de MC (média de 300 realizações independentes<sup>7</sup>). Para tal, são apresentados três exemplos considerando diferentes cenários de operação. Nos cenários considerados, a variância do ruído de medição é  $\sigma_z^2 = 10^{-2}$  e a diferença de fase  $\Delta\phi_q$  é assumida igual a zero para todo  $q$ . Com o objetivo de padronizar a apresentação dos resultados, a amplitude  $D_q$  de cada senoide em  $d(n)$  é  $\sqrt{2/Q}$ , resultando em potência unitária para a parcela periódica de  $d(n)$ . Além disso, o caminho secundário é modelado por um filtro FIR com 64 coeficientes (veja Figura 2.4) obtido de [17]. Em todos os exemplos, exceto quando especificado o contrário, o caminho secundário estimado

<sup>7</sup> Entre cada realização do algoritmo FxLMS são utilizados diferentes ruídos de medição (porém com a mesma variância e distribuição de probabilidade) e diferentes valores para a fase inicial dos sinais de referência.

é modelado por um filtro FIR de 32 coeficientes<sup>8</sup> obtido através de um procedimento de identificação de sistemas [3] (modelando a resposta ao impulso mostrada na Figura 2.4 e utilizando como sinal de entrada um ruído branco gaussiano com variância unitária). Adicionalmente, quando o modo de cancelamento é considerado (isto é,  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_Q = 0$ ), o modelo proposto é comparado com o modelo dado em [27] (o qual contempla apenas o caso em que o algoritmo FxLMS é utilizado em um sistema de controle ativo de ruído).

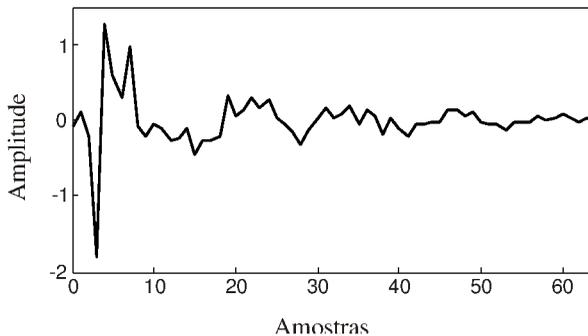


Figura 2.4 - Resposta ao impulso típica de um caminho secundário obtida de [17].

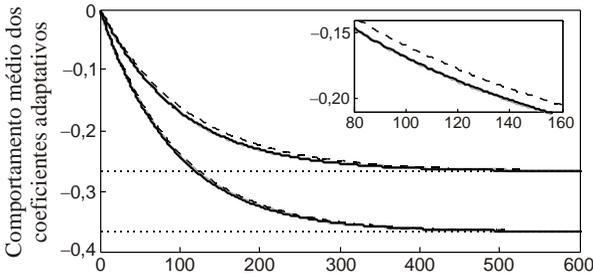
### 2.4.1 Exemplo 1

Neste exemplo, a precisão do modelo proposto é avaliada em um cenário no qual o sistema de NANE é configurado para cancelar uma senoide com frequência  $\omega_1 = 0,3\pi$  rad/amostra e amplitude  $D_1 = \sqrt{2}$ . Para o passo de adaptação  $\mu_1$  são considerados os seguintes valores: 0,002, 0,02 e 0,03. A Figura 2.5 ilustra o comportamento médio dos coeficientes adaptativos e os EQMs obtidos via simulação de MC, para ambos o modelo dado em [27] e o modelo proposto. Nota-se a partir das Figuras 2.4(a) e (b) que, quando um passo de adaptação pequeno<sup>9</sup>

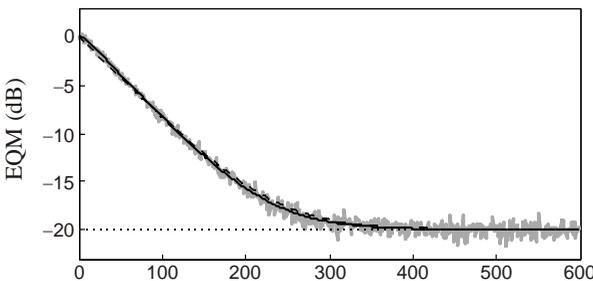
<sup>8</sup> Tal número de coeficientes foi escolhido de modo que o caminho secundário estimado  $\hat{s}(n)$  não modele perfeitamente o caminho secundário  $s(n)$ , visando analisar nos exemplos que seguem o efeito da modelagem imprecisa do caminho secundário na equalização das senoides que compõem o sinal de erro.

<sup>9</sup> Para fins de comparação, o passo máximo de adaptação (ou seja, o maior valor de  $\mu$  que garante estabilidade), é aproximadamente 0,053 no cenário considerado (tal valor foi obtido experimentalmente através de simulações de MC).

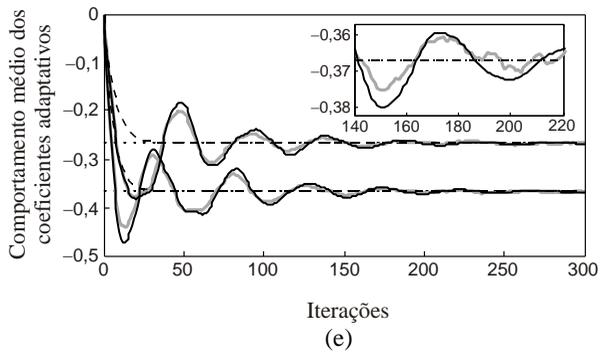
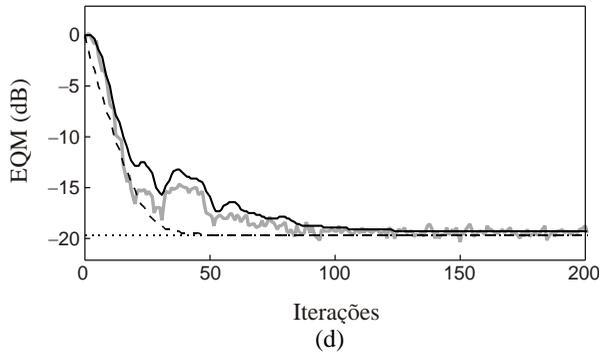
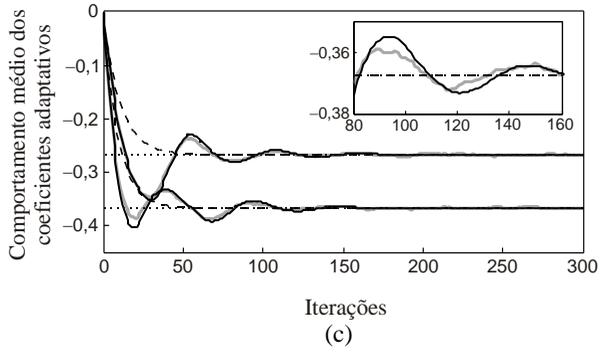
$\mu_1 = 0,002$  é utilizado, ambos os modelos predizem satisfatoriamente os resultados de simulação (tanto na fase transiente quanto em regime permanente). Entretanto, quando o passo de adaptação é ajustado para  $\mu_1 = 0,02$ , nota-se das Figuras 2.4(c) e (d) que o modelo proposto supera o modelo dado em [27], principalmente em regime transiente. Nesse caso, enquanto o modelo dado em [27] descreve (erroneamente) uma convergência suave para os coeficientes do filtro adaptativo e o EQM, o modelo proposto mostra que o sistema exibe uma convergência irregular, estando de acordo com os resultados de simulação. Finalmente, aumentando o passo de adaptação para  $\mu = 0,03$ , verifica-se através Figura 2.5(f) que o modelo proposto apresenta uma certa discrepância com os resultados de simulação. Entretanto, em contraste com o modelo de [27], o modelo estocástico proposto é ainda capaz de descrever (mesmo de forma aproximada) a real tendência de comportamento do EQM (por exemplo, uma taxa de convergência menor é obtida quando o valor do passo de adaptação é aumentado de 0,02 para 0,03).



(a)



(b)



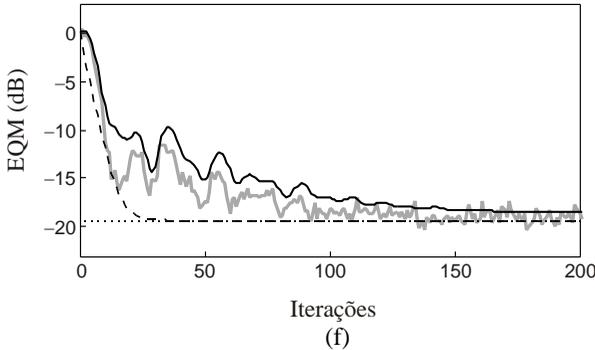


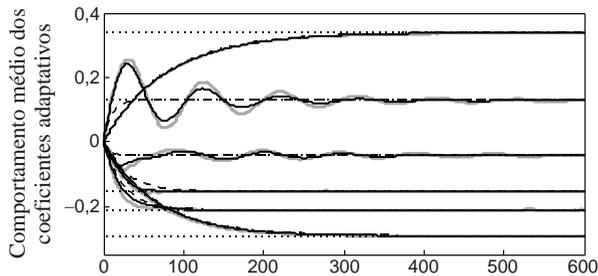
Figura 2.5 - Exemplo 1. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza), pelo modelo dado em [27] (linha tracejada escura) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\mu_1 = 0,002$ . (c) e (d)  $\mu_1 = 0,02$ . (e) e (f)  $\mu_1 = 0,03$ .

#### 2.4.2 Exemplo 2

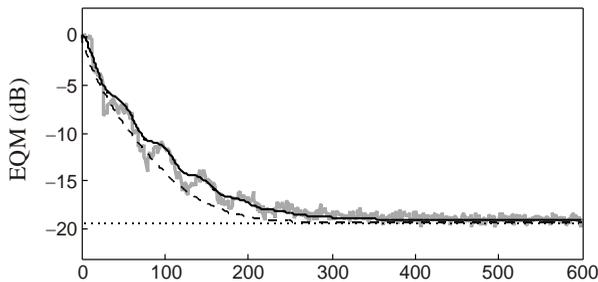
Neste exemplo, o sinal  $d(n)$  é composto por três senoides com amplitudes  $D_1 = D_2 = D_3 = \sqrt{2/3}$  e frequências  $\omega_1 = 0,15\pi$ ,  $\omega_2 = 0,30\pi$  e  $\omega_3 = 0,45\pi$  rad/amostra. Aqui, são utilizados três conjuntos diferentes de parâmetros  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ . No primeiro caso, adota-se o modo de cancelamento para todas as frequências, isto é,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ . No segundo, assume-se  $\beta_1 = 0,2$  e  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ , visando manter apenas uma pequena proporção do componente fundamental de  $d(n)$ . No terceiro caso, uma configuração mais geral é considerada com  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 3$ . Para os passos de adaptação utiliza-se  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0,0075$  (para fins de comparação tem-se  $\mu_{\text{máx}} \cong 0,015$ , o qual foi obtido experimentalmente através de simulações de MC).

A Figura 2.6 apresenta o comportamento médio dos coeficientes adaptativos e o EQM obtidos por simulações de MC, pelo modelo dado em [27] (apenas quando  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ ) e pelo modelo proposto. A partir da Figura 2.6, verifica-se que o modelo proposto descreve satisfatoriamente os resultados obtidos através das simulações de MC em todos os cenários de operação considerados, superando mais uma vez o modelo dado em [27], veja Figuras 2.5(a) e (b). Adicionalmente,

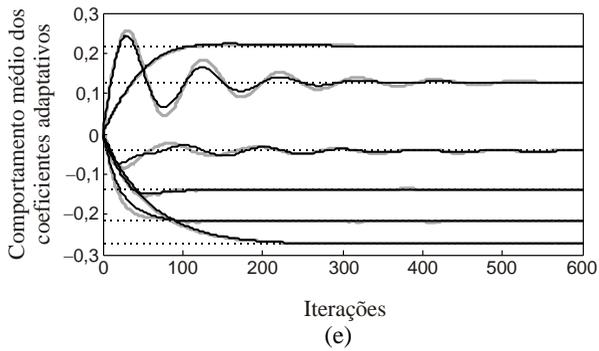
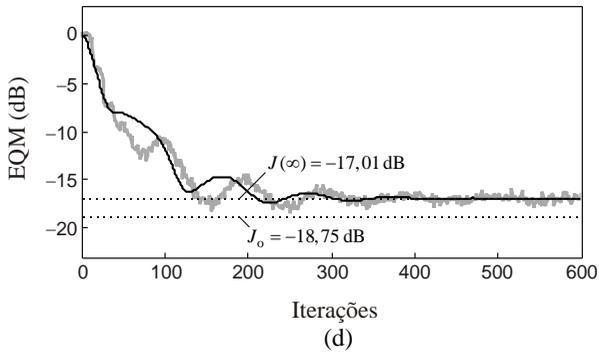
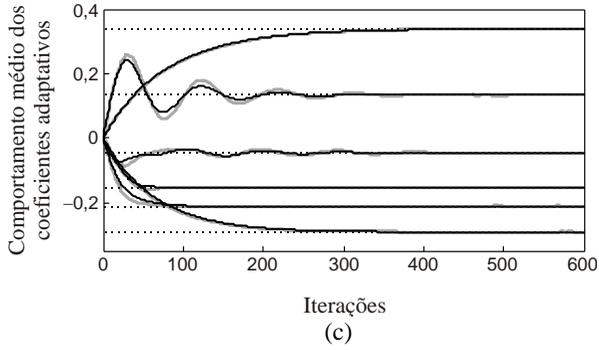
verifica-se que, quando parâmetros de ganho não nulos são utilizados, o EQM em regime permanente  $J(\infty)$  [obtido através de (2.61)] é diferente do valor desejado  $J_o$  [dado por (2.65)]. Por exemplo, na Figura 2.6(d) tem-se  $J(\infty) = -17,01$  dB, entretanto  $J_o = -18,75$  dB. O mesmo é observado na Figura 2.6(f), onde  $J(\infty) = 4,00$  dB e  $J_o = 5,23$  dB. Em particular, tais discrepâncias ocorrem devido a equalização imperfeita das senoides em  $d(n)$ . Nota-se das expressões de modelo (2.66) e (2.67), que a equalização imperfeita pode ser controlada melhorando a estimação do caminho secundário nas frequências de operação do sistema de NANE.



Iterações  
(a)



Iterações  
(b)



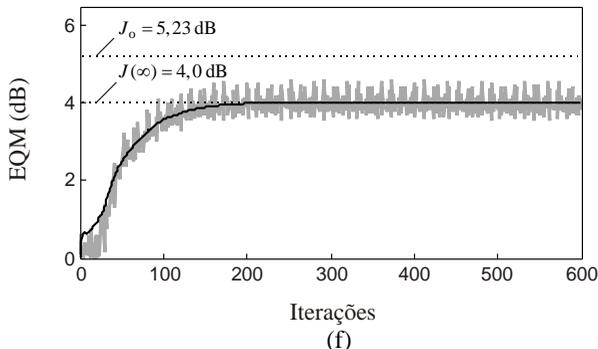


Figura 2.6 - Exemplo 2. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza), pelo modelo dado em [27] (linha tracejada escura) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ . (c) e (d)  $\beta_1 = 0,2$  e  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ . (e) e (f)  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 3$ .

### 2.4.3 Exemplo 3

Neste exemplo, o procedimento apresentado na Seção 2.3.6-d para selecionar um caminho secundário estimado apropriado é realizado visando reduzir a distorção na equalização observada no Exemplo 2 quando  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 3$ . Agora, partindo com uma estimativa precisa e de alta ordem do caminho secundário (veja Figura 2.4), diversos caminhos secundários estimados  $\hat{s}(n)$  de menor ordem são obtidos através de um processo de identificação de sistema (cuja estrutura típica é ilustrada na Figura 2.7). Então, a estimativa que produzir um valor de  $\Delta P$  negligenciável (como discutido na Seção 2.3.6-d) é a escolhida para ser utilizada no sistema de NANE.

Na estrutura de identificação de sistema mostrada na Figura 2.7, visando modelar precisamente o caminho secundário nas frequências de operação do sistema de NANE, um sinal de entrada  $v(n)$  com potência concentrada em tais frequências é utilizado, isto é,

$$v(n) = \sqrt{1 - \lambda} r(n) + \sum_{q=1}^Q \sqrt{\frac{2\lambda}{Q}} \cos(\omega_q n) \quad (2.69)$$

com  $r(n)$  denotando um ruído branco gaussiano<sup>10</sup> de potência unitária e  $0 < \lambda < 1$  definindo a percentagem de potência alocada nas frequências  $\omega_q$  para  $q = 1, 2, \dots, Q$  [quanto mais próximo  $\lambda$  é de 1, mais ênfase é dada na modelagem de  $s(n)$  nas frequências  $\omega_q$ ]. Aqui, o valor de  $\Delta P$  é computado para respostas ao impulso  $\hat{s}(n)$  com ordens  $\hat{L} = 16, 24, 28$  e 32, com  $\lambda$  variando de 0,2 até 0,9.

A Figura 2.8 confirma que, quando o caminho secundário não é apropriadamente modelado nas frequências de operação [devido a  $\lambda \ll 1$  em (2.69)], uma distorção grande é obtida no processo de equalização. Por isso, escolhe-se aqui  $\hat{s}(n)$  com  $\hat{L} = 24$  obtido com  $\lambda = 0,9$ , devido à ordem reduzida do filtro e ao valor baixo de  $\Delta P$  (implicando uma distorção negligenciável na equalização desejada, como consequência de uma estimação apropriada do caminho secundário nas frequências de operação do sistema de NANE). A Figura 2.9 apresenta o comportamento médio dos coeficientes adaptativos e o EQM obtidos por simulação de MC e pelo modelo proposto utilizando  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0,0075$ . Nota-se agora que o EQM em regime permanente é  $J(\infty) = 5,16$  dB, o que é muito próximo do valor desejado, isto é,  $J_0 = 5,23$  dB. Portanto, constata-se (através do modelo proposto) que a diferença observada no terceiro cenário do Exemplo 2 entre  $J(\infty)$  e  $J_0$  decorre da estimação imprecisa do caminho secundário nas frequências de operação do sistema de NANE.

---

<sup>10</sup> O ruído branco gaussiano  $r(n)$  é utilizado aqui para compor o sinal de entrada  $u(n)$ , visando excitar todos os modos do sistema a ser identificado (melhorando, assim, a precisão do processo de identificação).

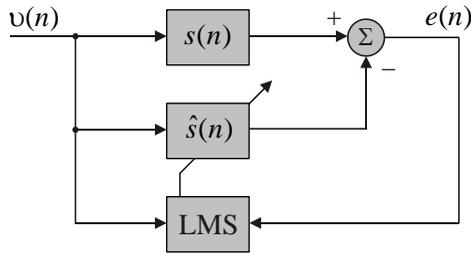


Figura 2.7 - Exemplo 3. Estrutura típica utilizada para identificação de sistema utilizando o algoritmo LMS (*least-mean-square*) [3].

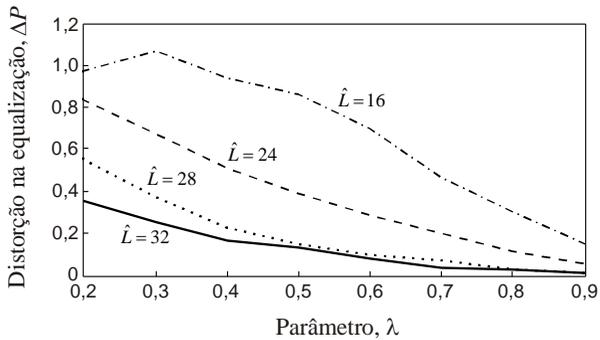
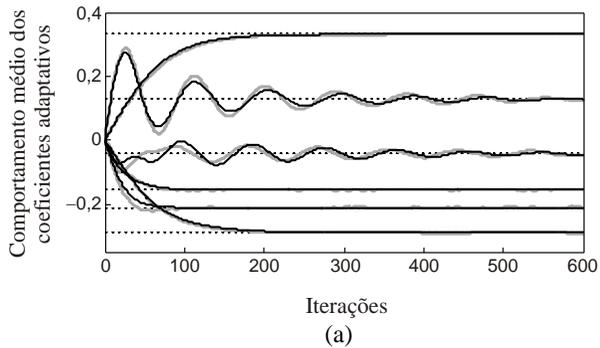


Figura 2.8 - Exemplo 3. Distorção na equalização desejada para diversos valores de  $\hat{L}$ .



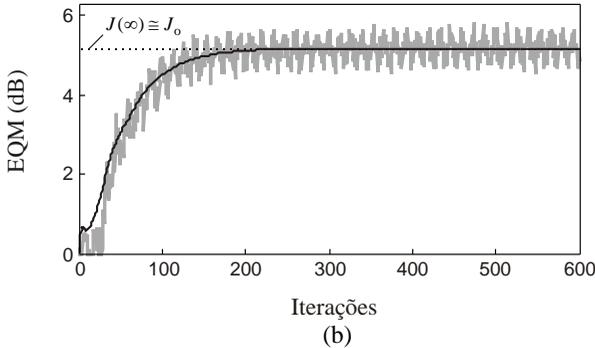


Figura 2.9 - Exemplo 3. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (a) e EQM (b) obtidos por simulação de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha sólida escura), utilizando  $\hat{s}(n)$  com ordem  $\hat{L} = 24$  e  $\lambda = 0,9$ .

## 2.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo, um modelo estocástico para o algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE foi desenvolvido. Em contraste com outros modelos discutidos na literatura, o modelo proposto é derivado levando em consideração o comportamento dinâmico dos coeficientes adaptativos durante todo o processo de adaptação. Tal procedimento tem como resultado expressões de modelo que descrevem precisamente o comportamento médio dos coeficientes adaptativos, o EQM e o PEQM. Utilizando as expressões de modelo aqui derivadas, importantes aspectos do comportamento do algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE foram determinados, fornecendo um melhor entendimento do comportamento de tais sistemas na fase transitória e em regime permanente. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto foi avaliada para diferentes condições de operação.

## MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO ALGORITMO FxLMS OPERANDO EM SISTEMAS MULTICANAL DE NANC

Em aplicações em que se deseja reduzir a intensidade de ruídos acústicos periódicos em regiões de médio e grande volume (por exemplo, cabine de automóveis), sistemas multicanal de NANC podem ser utilizados [16], [17], [35]–[39]. Em tais sistemas, diversas fontes secundárias (por exemplo, alto-falantes) e microfones de erro são distribuídos no espaço tridimensional visando ampliar a região de atenuação do ruído acústico. Tendo em vista que o algoritmo adaptativo FxLMS é um dos mais difundidos em aplicações de ANC, a sua análise teórica quando operando em um sistema multicanal de NANC é um tópico importante de pesquisa que ainda está em aberto, mesmo considerando alguns trabalhos interessantes da literatura. Por exemplo, em [40] e [41] o comportamento do algoritmo FxLMS operando em sistemas multicanal de NANC é analisado frente a modelagens imprecisas dos caminhos secundários. Em [18], as condições de convergência<sup>11</sup> dos sistemas multicanal de NANC são apresentadas. Agora, em [24], utilizando a teoria desenvolvida em [42], sistemas multicanal de NANC (operando com o algoritmo FxLMS) são representados através de suas funções de transferência, visando analisar seu comportamento em regime permanente. Por outro lado, com respeito especificamente à análise estocástica do algoritmo FxLMS operando em sistemas multicanal de NANC, não se tem conhecimento até o momento de algum trabalho. Portanto, visando preencher essa lacuna, este trabalho de pesquisa estende a análise estocástica realizada no Capítulo 2 para o caso de sistemas multicanal de NANC.

Este capítulo é organizado como segue. Na Seção 3.1, os sistemas multicanal de NANC operando com o algoritmo FxLMS são revisitados. Na Seção 3.2, expressões de modelo descrevendo o comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos e o EQM são derivadas. Adicionalmente, expressões para a predição dos valores em regime permanente dos filtros adaptativos são obtidas. Comparações entre

---

<sup>11</sup> Em [18] é apresentada uma expressão para determinar o passo de adaptação máximo, tal valor entretanto é obtido a partir de uma análise em regime permanente e assume que o passo de adaptação é pequeno.

resultados de simulação de MC e predições obtidas do modelo proposto são apresentadas na Seção 3.3.

### 3.1 REVISITANDO OS SISTEMAS MULTICANAL DE CONTROLE ATIVO DE RUÍDO PERIÓDICO

A Figura 3.1 apresenta o diagrama de um sistema multicanal de NANC contendo  $Q$  sinais de referência,  $G$  fontes secundárias (por exemplo, alto-falantes) e  $K$  microfones de erro. Em tal sistema, o ruído primário no  $k$ -ésimo microfone de erro é modelado como

$$d_k(n) = z_k(n) + \sum_{q=1}^Q D_{q,k} \cos(\omega_q n + \varphi_{k,q}). \quad (3.1)$$

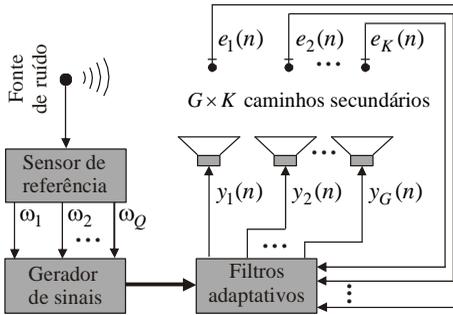


Figura 3.1 - Diagrama de um sistema multicanal de NANC.

O sistema multicanal de NANC considerado aqui utiliza  $Q \times G$  filtros adaptativos em paralelo, cada um contendo dois coeficientes adaptativos com dois sinais de referência em quadratura, dados por

$$\mathbf{x}_q(n) = \begin{bmatrix} x_{0,q}(n) \\ x_{1,q}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_q n + \theta_q) \\ \text{sen}(\omega_q n + \theta_q) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde  $\theta_q$  denota a fase inicial dos  $q$ -ésimos sinais de referência. O sinal de saída de cada filtro adaptativo é dado por

$$\mathbf{y}_{q,g}(n) = \mathbf{w}_{q,g}^T(n) \mathbf{x}_q(n) \quad (3.3)$$

com  $\mathbf{w}_{q,g}(n) = [w_0^{q,g}(n) w_1^{q,g}(n)]^T$  denotando o vetor de coeficientes do filtro adaptativo que processa os  $q$ -ésimos sinais de referência e que é conectado à  $g$ -ésima fonte secundária. Assim, o sinal introduzido no domínio acústico através da  $g$ -ésima fonte secundária é

$$y_g(n) = \sum_{q=1}^Q y_{q,g}(n). \quad (3.4)$$

Em um sistema multicanal de NANC, as saídas das fontes secundárias são acopladas acusticamente com todos os microfones de erro por meio dos  $G \times K$  caminhos secundários existentes. Particularmente, no  $k$ -ésimo microfone de erro, tem-se

$$e_k(n) = d_k(n) - \sum_{g=1}^G y_g(n) * s_{g,k}(n) \quad (3.5)$$

No sistema multicanal de NANC considerado aqui, os filtros adaptativos são atualizados com o objetivo de minimizar o valor instantâneo da soma dos erros quadráticos, isto é,

$$\tilde{J}(n) = \sum_{k=1}^K e_k^2(n). \quad (3.6)$$

Tal problema de otimização origina a seguinte regra de adaptação baseada no algoritmo FxLMS, expressa como:

$$\mathbf{w}_{q,g}(n+1) = \mathbf{w}_{q,g}(n) + \mu_{q,g} \sum_{k=1}^K e_k(n) \hat{\mathbf{x}}_{q,g,k}(n) \quad (3.7)$$

com  $\mu_{q,g}$  denotando o passo de adaptação e

$$\hat{\mathbf{x}}_{q,g,k}(n) = \begin{bmatrix} x_{0,q}(n) * \hat{s}_{g,k}(n) \\ x_{1,q}(n) * \hat{s}_{g,k}(n) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

o vetor contendo os  $q$ -ésimos sinais de referência filtrados pelo caminho secundário estimado  $\hat{s}_{g,k}(n)$ .

### 3.2 MODELO ESTOCÁSTICO PROPOSTO

Nesta seção, são derivadas as expressões de modelo descrevendo o comportamento do sistema multicanal de NANC previamente apresentado. Para tal, as suposições e aproximações utilizadas na derivação do modelo são as seguintes:

- S1) Os caminhos secundários e os caminhos secundários estimados são modelados por filtros FIR (*finite impulse response*) com ordens  $L$  e  $\hat{L}$ , respectivamente [28]-[34].

S2) Os ruídos de medição  $z_k(n)$ , para  $k = 1, 2, \dots, K$ , são assumidos brancos gaussianos com variância  $\sigma_k^2$ , sendo decorrelacionados entre si e com qualquer outro sinal no sistema [28]-[34].

S3) Os valores esperados do tipo  $E[\mathbf{x}_r(n)\mathbf{x}_q^T(n-j)\mathbf{w}_{q,g}(n-j)]$  são aproximados por  $E[\mathbf{x}_r(n)\mathbf{x}_q^T(n-j)]E[\mathbf{w}_{q,g}(n-j)]$  para qualquer valor de  $j$  [28]-[31], [32], [33].

S4) As fases iniciais dos sinais  $d_k(n)$ ,  $x_{0,q}(n)$  e  $x_{1,q}(n)$  podem variar entre realizações do sistema de NANC multicanal [2, pp. 122], [28]-[31].

Agora, utilizando as suposições acima, algumas expressões apresentadas na seção anterior são reescritas. Então, considerando o ruído acústico  $d_k(n)$  dado por

$$d_k(n) = z_k(n) + \sum_{q=1}^Q D_{q,k} \cos(\omega_q n + \Delta\varphi_{k,q} + \theta_q) \quad (3.9)$$

com  $\Delta\varphi_{k,q} = \varphi_{k,q} - \theta_q$ , tem-se

$$d_k(n) = z_k(n) + \sum_{q=1}^Q \mathbf{d}_{q,k}^T \mathbf{x}_q(n) \quad (3.10)$$

para

$$\mathbf{d}_{q,k} = \begin{bmatrix} D_{q,k} \cos(\Delta\varphi_{q,k}) \\ -D_{q,k} \sin(\Delta\varphi_{q,k}) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Em (3.5), utilizando a Suposição S1, a convolução  $y_g(n) * s_{g,k}(n)$  pode ser reescrita como

$$y_g(n) * s_{g,k}(n) = \sum_{\ell=0}^{L-1} s_{g,k}(\ell) \mathbf{w}_{q,g}^T(n-\ell) \mathbf{x}_q(n-\ell) \quad (3.12)$$

onde  $s_{g,k}(\ell)$  é o  $\ell$ -ésimo coeficiente do filtro FIR que representa o caminho secundário entre a  $g$ -ésima fonte secundária e o  $k$ -ésimo microfone de erro. Agora, utilizando (3.10) e

$$\mathbf{x}_q(n-\ell) = \mathbf{\Omega}_{\ell,q}^T \mathbf{x}_q(n) \quad (3.13)$$

com

$$\mathbf{\Omega}_{\ell,q} = \begin{bmatrix} \cos(\ell\omega_q) & -\text{sen}(\ell\omega_q) \\ \text{sen}(\ell\omega_q) & \cos(\ell\omega_q) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

a expressão (3.5) pode ser reescrita como

$$e_k(n) = z_k(n) + \sum_{q=1}^Q \left[ \mathbf{d}_{q,k} - \sum_{g=1}^G \mathbf{p}_{q,g,k}(n) \right]^T \mathbf{x}_q(n) \quad (3.15)$$

onde

$$\mathbf{p}_{q,g,k}(n) = \sum_{\ell=0}^{L-1} s_{g,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q} \mathbf{w}_{q,g}(n-\ell). \quad (3.16)$$

Finalmente, utilizando a Suposição S1, (3.8) pode ser expressa como

$$\hat{\mathbf{x}}_{q,g,k}(n) = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{q,g,k}^T \mathbf{x}_q(n) \quad (3.17)$$

com

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{q,g,k} = \sum_{\ell=0}^{\hat{L}-1} \hat{s}_{g,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q}. \quad (3.18)$$

Portanto, considerando as expressões anteriores (descrevendo o sistema multicanal de NANC), a derivação do modelo estocástico pode então ser realizada.

### 3.2.1 Comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos

Com o objetivo de derivar uma expressão descrevendo o comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos, (3.15) e (3.17) são, primeiramente, substituídos em (3.7). Na sequência, o valor esperado é computado na expressão resultante e, então, as Suposições S2-S4 são utilizadas. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_{q,g}(n+1)] &= E[\mathbf{w}_{q,g}(n)] \\ &+ \frac{1}{2} \mu_{q,g} \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{\Gamma}}_{q,g,k}^T \left\{ \mathbf{d}_{q,k} - \sum_{h=1}^G \sum_{\ell=0}^{L-1} s_{h,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q} E[\mathbf{w}_{q,h}(n-\ell)] \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{w}_{q,g}(n) = [0 \ 0]^T$  para  $n \leq 0$ . Nota-se, do último termo do lado direito de (3.19), que o comportamento dos filtros adaptativos conectados à  $g$ -ésima fonte secundária {isto é,  $E[\mathbf{w}_{q,g}(n)]$ } sofre influência dos filtros adaptativos acoplados às demais fontes secundárias {isto é,

$E[\mathbf{w}_{q,h}(n)]$  com  $h=1,2,\dots,G$ . Fisicamente, tal influência é resultado do acoplamento acústico existente entre as fontes secundárias e os microfones de erro<sup>12</sup>.

### 3.2.2 Filtros adaptativos em regime permanente

Nesta seção são apresentadas as expressões dos filtros adaptativos em regime permanente<sup>13</sup> para diferentes configurações do sistema multicanal de NANC. Assim, considerando (3.19) e assumindo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}_{q,g}(n)] = \mathbf{w}_{q,g}(\infty) \quad (3.20)$$

tem-se

$$\sum_{k=1}^K \hat{\Gamma}_{q,g,k}^T \sum_{h=1}^G \Gamma_{q,h,k} \mathbf{w}_{q,h}(\infty) = \sum_{k=1}^K \hat{\Gamma}_{q,g,k}^T \mathbf{d}_{q,k} \quad (3.21)$$

onde  $\hat{\Gamma}_{q,g,k}$  é dado por (3.18) e

$$\Gamma_{q,h,k} = \sum_{\ell=0}^{L-1} s_{h,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q}. \quad (3.22)$$

Efetuada algumas manipulações algébricas, (3.21) pode ser reescrita como

$$\hat{\mathbf{K}}_q^T \mathbf{K}_q \mathbf{w}_q(\infty) = \hat{\mathbf{K}}_q^T \mathbf{d}_q \quad (3.23)$$

ou ainda, como

$$\hat{\mathbf{K}}_q^T [\mathbf{K}_q \mathbf{w}_q(\infty) - \mathbf{d}_q] = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

sendo

$$\hat{\mathbf{K}}_q = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma}_{q,1,1} & \hat{\Gamma}_{q,2,1} & \cdots & \hat{\Gamma}_{q,G,1} \\ \hat{\Gamma}_{q,1,2} & \hat{\Gamma}_{q,2,2} & \cdots & \hat{\Gamma}_{q,G,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\Gamma}_{q,1,K} & \hat{\Gamma}_{q,2,K} & \cdots & \hat{\Gamma}_{q,G,K} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

<sup>12</sup> Tal acoplamento acústico é modelado matematicamente pelas respostas ao impulso dos caminhos secundários, como pode ser notado através do último termo do lado direito de (3.19).

<sup>13</sup> Vale destacar, que [18], [40] e [41] também apresentam expressões para os filtros adaptativos em regime permanente para sistemas multicanal de NANC, sendo equivalentes às obtidas nesta seção. Aqui, a derivação de tais expressões é mais detalhada, sendo oriunda da expressão de modelo (3.19).

$$\mathbf{K}_q = \begin{bmatrix} \Gamma_{q,1,1} & \Gamma_{q,2,1} & \cdots & \Gamma_{q,G,1} \\ \Gamma_{q,1,2} & \Gamma_{q,2,2} & \cdots & \Gamma_{q,G,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{q,1,K} & \Gamma_{q,2,K} & \cdots & \Gamma_{q,G,K} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{d}_q^T = [\mathbf{d}_{q,1}^T \ \mathbf{d}_{q,2}^T \ \cdots \ \mathbf{d}_{q,K}^T] \quad (3.27)$$

e

$$\mathbf{w}_q^T(\infty) = [\mathbf{w}_{q,1}^T(\infty) \ \mathbf{w}_{q,2}^T(\infty) \ \cdots \ \mathbf{w}_{q,G}^T(\infty)]. \quad (3.28)$$

Então, levando em consideração as expressões anteriores, os seguintes pontos podem ser destacados:

a) Para  $G = K$  (número de fontes secundárias e número de microfones de erro iguais), em (3.24),  $\hat{\mathbf{K}}_q^T$  é uma matriz quadrada com posto completo e, por consequência, seu espaço nulo contempla apenas o vetor nulo. Assim, para que (3.24) seja satisfeita, deve-se ter

$$\mathbf{K}_q \mathbf{w}_q(\infty) - \mathbf{d}_q = \mathbf{0}. \quad (3.29)$$

Portanto, para  $G = K$ , os filtros adaptativos em regime permanente são computados por

$$\mathbf{w}_q(\infty) = \mathbf{K}_q^{-1} \mathbf{d}_q. \quad (3.30)$$

b) Para  $G > K$  (número de fontes secundárias maior do que o número de microfones de erro), em (3.24),  $\hat{\mathbf{K}}_q^T$  é uma matriz retangular com vetores coluna linearmente independentes. Também nesse caso, o espaço nulo de  $\hat{\mathbf{K}}_q^T$  contempla apenas o vetor nulo, ou seja, (3.24) é satisfeita somente para (3.29). Entretanto, uma vez que  $\mathbf{K}_q$  é agora uma matriz retangular, (3.29) representa um sistema linear subdeterminado, isto é, com infinitas soluções; particularmente, a solução de menor norma é dada por

$$\mathbf{w}_q(\infty) = \mathbf{K}_q^T (\mathbf{K}_q \mathbf{K}_q^T)^{-1} \mathbf{d}_q. \quad (3.31)$$

c) Para  $G < K$  (número de fontes secundárias menor do que o número de microfones de erro), em (3.24),  $\hat{\mathbf{K}}_q^T$  é uma matriz retangular com vetores coluna linearmente dependentes. Nesse caso, o espaço nulo de  $\mathbf{K}_q^T$  não contém apenas o vetor nulo; em outras palavras, (3.24) pode ser satisfeita inclusive para  $\mathbf{K}_q \mathbf{w}_q(\infty) - \mathbf{d}_q \neq \mathbf{0}$ . Portanto, para

$G < K$ , o cálculo dos filtros adaptativos em regime permanente deve considerar obrigatoriamente (3.23). Assim,

$$\mathbf{w}_q(\infty) = (\hat{\mathbf{K}}_q^T \mathbf{K}_q)^{-1} \hat{\mathbf{K}}_q^T \mathbf{d}_q. \quad (3.32)$$

d) Os filtros adaptativos ótimos  $\mathbf{w}_q^{\text{opt}}$  (isto é, aqueles que minimizam o erro quadrático médio) são apresentados em [18] e [24], sendo equivalentes às expressões (3.30)-(3.32) quando os caminhos secundários são perfeitamente estimados, isto é,  $\hat{s}_{g,k}(n) = s_{g,k}(n)$  para todo  $g$  e  $k$ .

### 3.2.3 Erro quadrático médio

Visando obter uma expressão analítica para prever o  $k$ -ésimo EQM obtido do sistema multicanal de NANC, primeiramente eleva-se  $e_k(n)$  ao quadrado. Na sequência, toma-se o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e, então, as Suposições S2-S4 são utilizadas. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} E[e_k^2(n)] &\triangleq J_k(n) \\ &= \sigma_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \mathbf{d}_{q,k}^T \left\{ \mathbf{d}_{q,k} - 2 \sum_{g=1}^G \sum_{\ell=0}^{L-1} s_{g,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q} E[\mathbf{w}_{q,g}(n-\ell)] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^G \text{tr} \left[ \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} s_{h,k}(m) \mathbf{\Omega}_{m,q} \mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n) s_{g,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q}^T \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde

$$\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n) = E[\mathbf{w}_{q,h}(n-m) \mathbf{w}_{q,g}^T(n-\ell)] \quad (3.34)$$

é a matriz de correlação dos filtros adaptativos<sup>14</sup>. Note, a partir de (3.33), que o EQM é completamente determinado apenas se todas as matrizes de correlação  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n)$  são conhecidas.

<sup>14</sup> Aqui, em contraste com o modelo estocástico derivado no Capítulo 2, os vetores de erro dos filtros adaptativos  $\mathbf{v}_{g,k}(n)$  não são utilizados na derivação do erro quadrático médio. Isso decorre do fato de os vetores  $\mathbf{v}_{g,k}(n)$  devem ser inicializados com os valores de  $\mathbf{w}_{q,g}(\infty)$ , os quais não podem ser computados precisamente para o caso em que  $G > K$ , devido à existência de infinitas soluções para o sistema linear (3.31).

### 3.2.4 Matrizes de Correlação dos Vetores dos Filtros Adaptativos

Nesta seção, são derivadas duas expressões recursivas para determinar as matrizes de correlação dos filtros adaptativos, sendo a primeira utilizada para computar  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n)$  com  $m = \ell$  e, a segunda, para  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n)$  com  $m \neq \ell$ . Para tal, inicialmente a regra de atualização (3.7) é reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{q,g}(n+1) = & \mathbf{w}_{q,g}(n) + \mu_{q,g} \sum_{k=1}^K \hat{\Gamma}_{q,g,k}^T \mathbf{x}_q(n) z_k(n) \\ & + \mu_{q,g} \sum_{k=1}^K \sum_{r=1}^Q \hat{\Gamma}_{q,g,k}^T \mathbf{x}_q(n) \mathbf{x}_r^T(n) \mathbf{u}_{r,k}(n) \end{aligned} \quad (3.35)$$

com

$$\mathbf{u}_{r,k}(n) = \mathbf{d}_{r,k} - \sum_{f=1}^G \mathbf{p}_{r,f,k}(n). \quad (3.36)$$

A fim de derivar uma expressão recursiva para computar  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{\ell,m}(n)$  para  $m = \ell$ , primeiramente, identifica-se que

$$\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,m}(n) = \mathbf{W}_{q,(h,g)}^{0,0}(n-m). \quad (3.37)$$

Assim, a determinação da matriz  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,m}(n)$  exige apenas a determinação de  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{0,0}(n)$ . Então, computando o produto vetorial  $\mathbf{w}_{q,h}(n+1)\mathbf{w}_{q,g}^T(n+1)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S2-S4, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{q,(h,g)}^{0,0}(n+1) = & \mathbf{W}_{q,(h,g)}^{0,0}(n) + \frac{1}{2} \mu_{q,h} \mu_{q,g} \sum_{k=1}^K \hat{\Gamma}_{q,h,k}^T \hat{\Gamma}_{q,g,k} \sigma_k^2 \\ & + \frac{1}{2} \mu_{q,g} \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_{q,h,k}^T(n) \hat{\Gamma}_{q,g,k} + \frac{1}{2} \mu_{q,h} \sum_{k=1}^K \hat{\Gamma}_{q,h,k}^T \mathbf{A}_{q,g,k}(n) \\ & + \mu_{q,h} \mu_{q,g} \sum_{r=1}^Q \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^K \hat{\Gamma}_{q,h,k}^T \mathbf{H}_{(q,r),(k,p)}(n) \hat{\Gamma}_{q,g,p} \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde

$$\mathbf{A}_{q,h,k}(n) = \mathbf{d}_{q,k} \mathbf{E}[\mathbf{w}_{q,h}^T(n)] - \sum_{f=1}^G \sum_{\ell=0}^{L-1} s_{f,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q} \mathbf{W}_{q,(f,h)}^{\ell,0}(n) \quad (3.39)$$

e

$$\mathbf{H}_{(q,r),(k,p)}(n) = \mathbf{E}[\mathbf{x}_q(n) \mathbf{x}_r^T(n) \mathbf{u}_{r,k}(n) \mathbf{u}_{r,p}^T(n) \mathbf{x}_r(n) \mathbf{x}_q^T(n)]. \quad (3.40)$$

De forma similar ao desenvolvido no Capítulo 2, para  $q = r$ , tem-se

$$\mathbf{H}_{(q,r),(k,p)}(n) = \frac{1}{8} \{ \text{tr}[\mathbf{K}_{r,(k,p)}(n)] \mathbf{I} + \mathbf{K}_{r,(k,p)}(n) + \mathbf{K}_{r,(k,p)}^T(n) \} \quad (3.41)$$

e agora, para  $q \neq r$ ,

$$\mathbf{H}_{(q,r),(k,p)}(n) = \frac{1}{4} \text{tr}[\mathbf{K}_{r,(k,p)}(n)] \mathbf{I} \quad (3.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{r,(k,p)}(n) &= \mathbf{d}_{r,k} \mathbf{d}_{r,p}^T - \mathbf{d}_{r,k} \sum_{g=1}^G \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{E}[\mathbf{w}_{r,g}^T(n-\ell)] s_{g,p}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,r}^T \\ &\quad - \sum_{g=1}^G \sum_{\ell=0}^{L-1} s_{g,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q} \mathbf{E}[\mathbf{w}_{r,g}(n-\ell)] \mathbf{d}_{r,p}^T \\ &\quad + \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^G \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{L-1} s_{h,k}(m) \mathbf{\Omega}_{m,r} \mathbf{W}_{r,(h,g)}^{m,\ell}(n) s_{g,p}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,r}^T. \end{aligned} \quad (3.43)$$

De (3.38), (3.39) e (3.43), nota-se que a expressão recursiva para o cálculo de  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{0,0}(n+1)$  [dada por (3.38)] depende ainda do conhecimento das matrizes  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n)$  para  $m \neq \ell$ . Portanto, visando derivar uma expressão para calcular  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n)$  com  $m \neq \ell$ , primeiramente, identifica-se que

$$\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n) = \begin{cases} \mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m-\ell,0}(n-\ell), & m > \ell \\ \mathbf{W}_{q,(h,g)}^{0,\ell-m}(n-m), & m < \ell \end{cases} \quad (3.44)$$

e

$$\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{0,\ell-m}(n-m) = [\mathbf{W}_{q,(g,h)}^{\ell-m,0}(n-m)]^T. \quad (3.45)$$

Então, para determinar  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n)$ , para  $m \neq \ell$ , é necessário obter uma expressão recursiva para computar as matrizes  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{\tau,0}(n)$ . Assim, pré-multiplicando ambos os lados do transposto de (3.35) por

$\mathbf{w}_{q,h}(n+1-\tau)$ , tomando o valor esperado da expressão resultante e utilizando as Suposições S2-S4, tem-se

$$\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{\tau,0}(n+1) = \mathbf{W}_{q,(h,g)}^{\tau-1,0}(n) + \frac{1}{2} \mu_{q,g} \sum_{k=1}^K \mathbf{B}_{q,h,k}(n) \hat{\Gamma}_{q,g,k} \quad (3.46)$$

com

$$\mathbf{B}_{q,h,k}(n) = E[\mathbf{v}_{q,h}(n+1-\tau) \mathbf{d}_{q,k}^T] - \sum_{f=1}^G \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{W}_{q,(h,f)}^{\tau-1,\ell}(n) s_{f,k}(\ell) \mathbf{\Omega}_{\ell,q}^T. \quad (3.47)$$

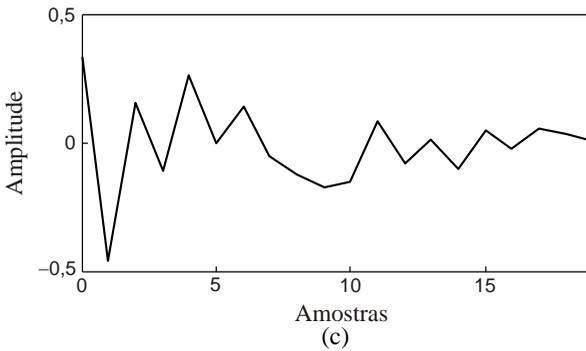
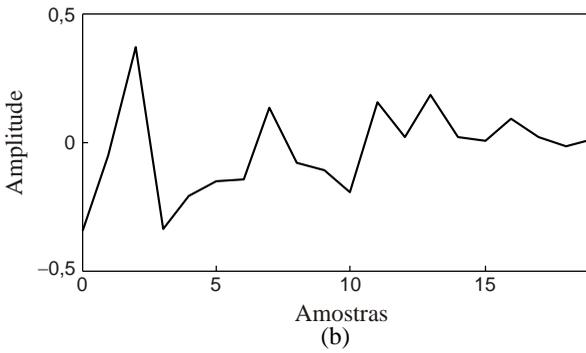
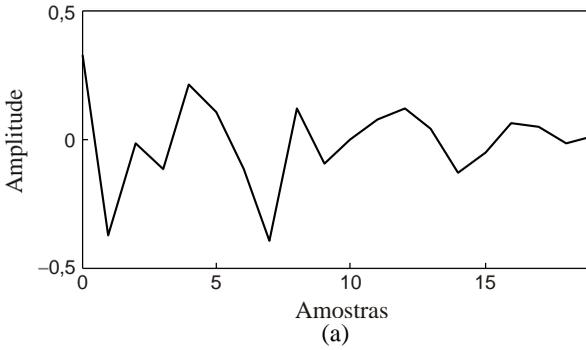
Assim, a matriz de correlação  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n)$  pode ser completamente determinada através das expressões (3.38) e (3.46), juntamente com (3.37), (3.44) e (3.45). Adicionalmente, considera-se  $\mathbf{W}_{q,(h,g)}^{m,\ell}(n) = \mathbf{0}$  para  $n \leq m$  e  $n \leq \ell$ .

### 3.3 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, visando avaliar a precisão do modelo estocástico proposto, as previsões do modelo obtido são comparadas com os resultados de simulação de MC (média de 300 realizações independentes). Para tal, são apresentados três exemplos considerando diferentes cenários de operação. Nos cenários considerados, a variância do ruído de medição é  $\sigma_k^2 = 10^{-3}$  e a diferença de fase  $\Delta\varphi_{q,k}$  é assumida igual a zero para todo  $q$ . Com o objetivo de padronizar a apresentação dos resultados, a amplitude  $D_{q,k}$  de cada senoide em  $d_k(n)$  é  $\sqrt{2/Q}$ , resultando em potência unitária para a parcela periódica de  $d_k(n)$ . Além disso, os caminhos secundários são modelados por filtros FIR com 20 coeficientes (veja Figura 3.2), de [43]<sup>15</sup>. Em todos os exemplos, os caminhos secundários estimados são modelados por filtros FIR com 12 coeficientes determinados através de um procedimento de identificação de sistema [3] (modelando as respostas ao impulso mostradas na Figura 3.2 e utilizando como sinal de entrada um ruído branco gaussiano com variância unitária). Além disso, tendo em vista que não se tem conhecimento de outro modelo estocástico para o algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANC multicanal, nos exemplos que seguem,

<sup>15</sup> As respostas ao impulso mostradas na Figura 3.2 são utilizadas em [43] e foram fornecidas pelo seus autores através de contato por correio eletrônico.

os resultados do modelo estocástico proposto são comparados apenas com os resultados obtidos por simulações de MC.



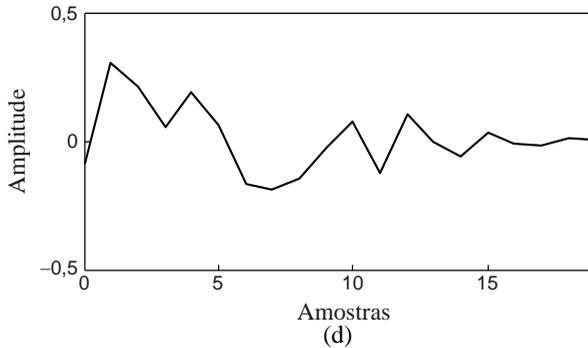
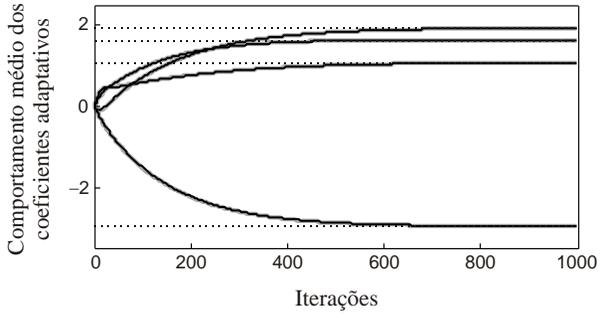


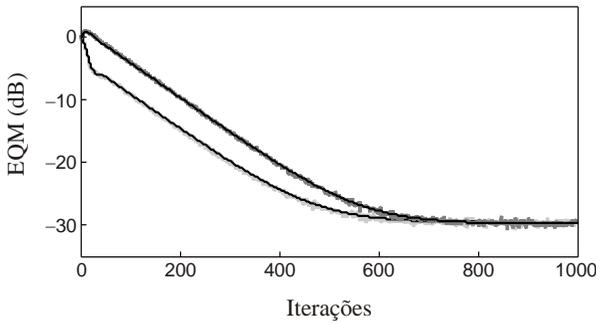
Figura 3.2 - Respostas ao impulso típicas de caminhos secundários de um sistema multicanal de NANC, de [43]. (a) Resposta ao impulso  $s_{1,1}(n)$ . (b) Resposta ao impulso  $s_{1,2}(n)$ . (c) Resposta ao impulso  $s_{2,1}(n)$ . (d) Resposta ao impulso  $s_{2,2}(n)$ .

### 3.3.1 Exemplo 1

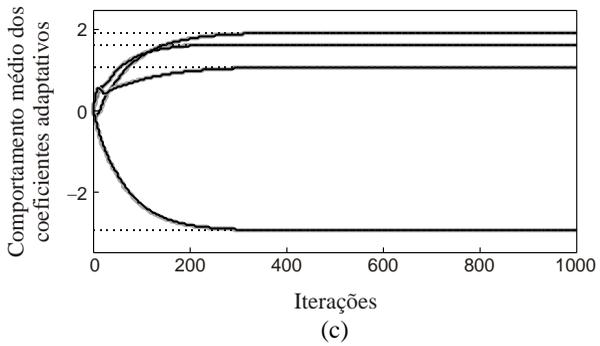
Neste exemplo, a precisão do modelo proposto é avaliada em um cenário no qual o sistema multicanal de NANC configurado com  $G = 2$  e  $K = 2$  é utilizado para cancelar um ruído acústico senoidal com frequência  $\omega_1 = 0,3$  rad/amostra. No cenário adotado, assume-se que  $D_{1,1} = D_{1,2} = \sqrt{2}$ . Para os passos de adaptação dos filtros adaptativos são considerados os valores:  $\mu_{1,1} = \mu_{1,2} = 0,1$  e  $\mu_{1,1} = \mu_{1,2} = 0,2$  (para fins de comparação, tem-se  $\mu_{\text{máx}} \cong 0,64$ , o qual foi obtido experimentalmente utilizando simulações de MC). A Figura 3.3 ilustra o comportamento médio dos coeficientes adaptativos e os EQM obtidos por simulações de MC e pelo modelo proposto. A partir dessa figura, verifica-se que o modelo proposto descreve satisfatoriamente as simulações em ambos os cenários considerados, tanto no regime transitório quanto em regime permanente.



(a)



(b)



(c)

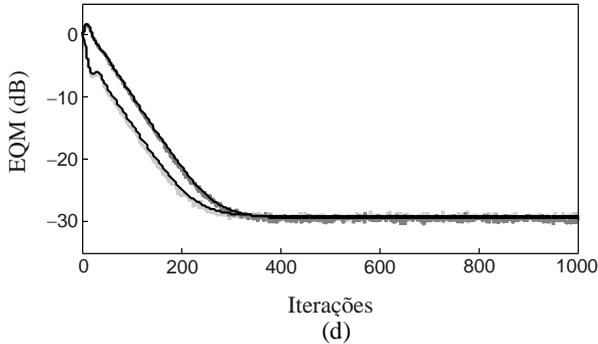


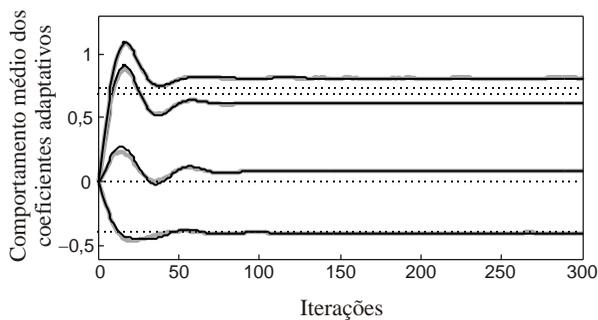
Figura 3.3 - Exemplo 1. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\mu = 0,1$ . (c) e (d)  $\mu = 0,2$ .

### 3.3.2 Exemplo 2

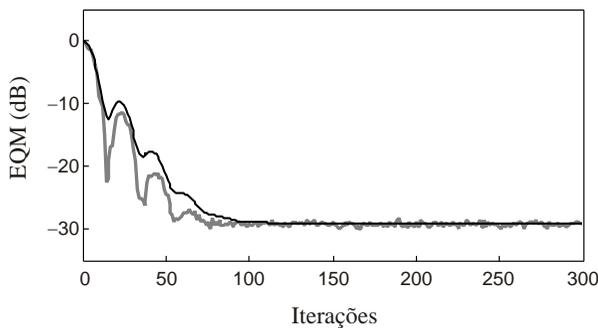
Neste exemplo, assume-se que o mesmo ruído acústico do Exemplo 1 deve ser cancelado utilizando agora o sistema multicanal de NANC em duas configurações diferentes. Na primeira, considera-se  $G = 2$  e  $K = 1$  e, na segunda,  $G = 1$  e  $K = 2$ . Para o passo de adaptação, é considerado o valor de 0,2 para todos os filtros adaptativos (para fins de comparação, tem-se  $\mu_{\text{máx}} \cong 0,69$  para o primeiro cenário e  $\mu_{\text{máx}} \cong 0,86$  para o segundo, sendo ambos os valores de passo máximo obtidos experimentalmente através de simulações de MC, considerando o mesmo valor de passo para todos os filtros adaptativos).

A Figura 3.4 ilustra o comportamento médio dos coeficientes adaptativos e as curvas do EQM obtidos por simulações e pelo modelo proposto. Nota-se que a utilização de um passo de adaptação igual a 0,2 produz convergências irregulares (isto é, com algumas oscilações na fase transitória) em ambas as configurações, as quais são satisfatoriamente descritas pelo modelo proposto. Particularmente, verifica-se que, para a configuração  $G = 2$  e  $K = 1$ , os coeficientes adaptativos não convergem para as soluções de menor norma [computadas por (3.31) e indicadas pelas linhas tracejadas na Figura 3.4(a)], o que é corretamente descrito por (3.19). Adicionalmente, observa-se que para a configuração  $G = 1$  e  $K = 2$  (isto é, número de fontes secundárias menor do que o número de microfones), os EQM em regime permanente apresentam valores elevados. Tal comportamento decorre do fato do sistema ser

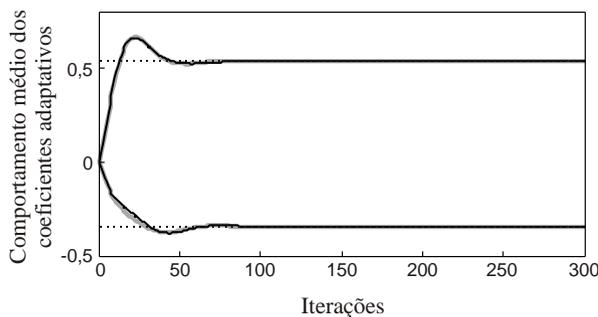
subdeterminado (isto é,  $G < K$ ), como explicado em [18], [24]. Vale ressaltar que tal configuração não é usualmente considerada em aplicações práticas.



(a)



(b)



(c)

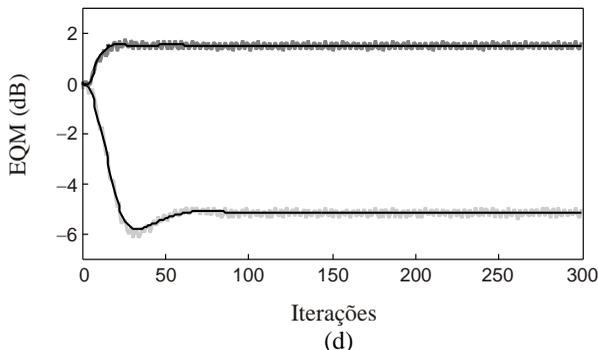
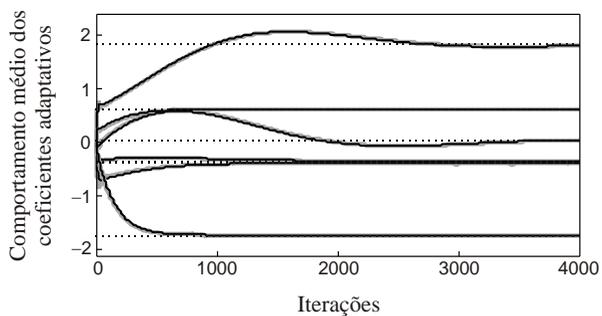


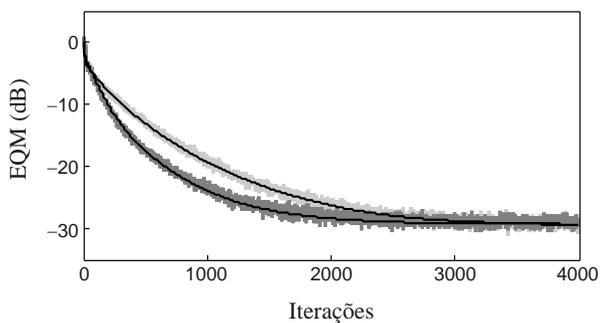
Figura 3.4 - Exemplo 2. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $G=2$  e  $K=1$ . (c) e (d)  $G=1$  e  $K=2$ .

### 3.3.3 Exemplo 3

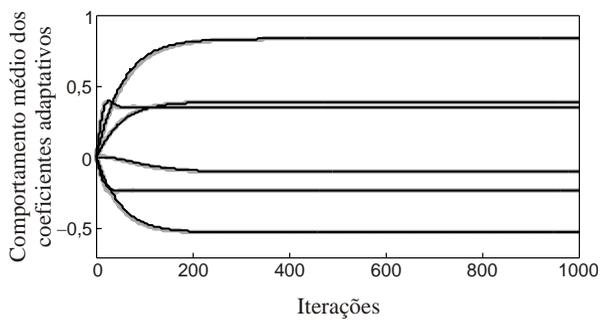
Aqui, considera-se que o sistema multicanal de NANC deve cancelar um ruído senoidal com componentes de frequência dadas por  $\omega_1=0,1\pi$ ,  $\omega_2=0,2\pi$  e  $\omega_3=0,3\pi$  rad/amostra e amplitude  $D_{q,k} = \sqrt{2/3}$  para todo  $q$  e  $k$ . Além disso, nesse exemplo são considerados três conjuntos de valores para  $G$  e  $K$ . No primeiro cenário utiliza-se  $G=2$  e  $K=2$ , no segundo  $G=2$  e  $K=1$  e no terceiro cenário  $G=1$  e  $K=3$ . Para os passos de adaptação, o valor de 0,1 é utilizado para todos os filtros adaptativos (para fins de comparação, tem-se  $\mu_{\text{máx}} \cong 0,14$  para o primeiro cenário,  $\mu_{\text{máx}} \cong 0,31$  para o segundo e  $\mu_{\text{máx}} \cong 0,76$  para o terceiro). A Figura 3.5 ilustra o comportamento médio dos coeficientes adaptativos e os EQM obtidos por simulações de MC e pelo modelo proposto. Verifica-se que o modelo proposto descreve satisfatoriamente os resultados das simulações em todos os cenários considerados, tanto em regime transitório quanto em regime permanente. Particularmente, para uma melhor visualização, nas Figuras 3.5(a) e (c) são apresentados os comportamentos médios apenas de alguns coeficientes adaptativos.



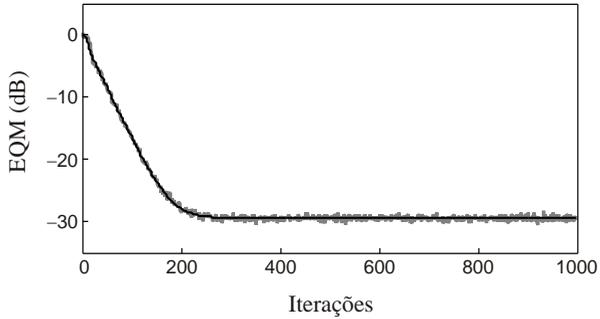
(a)



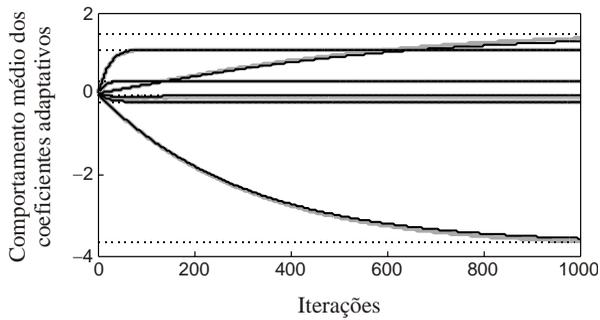
(b)



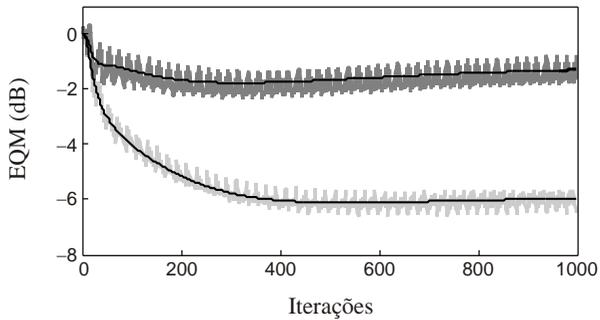
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.5 - Exemplo 3. Comportamento médio dos coeficientes adaptativos (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulações de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha sólida escura). Os valores em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $G=2$  e  $K=2$ . (c) e (d)  $G=2$  e  $K=1$ . (e) e (f)  $G=1$  e  $K=2$ .

### 3.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo, um modelo estocástico para o algoritmo FxLMS operando em sistemas multicanal de NANC foi apresentado. De forma similar ao discutido no Capítulo 2, o modelo proposto é derivado levando em consideração o comportamento dinâmico dos filtros adaptativos durante o processo de adaptação. Tal procedimento tem como resultado expressões de modelo que descrevem precisamente o comportamento médio dos coeficientes adaptativos como também o EQM. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto foi avaliada para diversas condições de operação, incluindo diferentes valores de passo de adaptação, distintas configurações quanto ao número de fontes secundárias e número de microfones de erro, além de diferentes senoides para a representação do ruído acústico.

## MODELAGEM ESTOCÁSTICA DO ALGORITMO NLMS CONSIDERANDO FILTRO ADAPTATIVO E PLANTA COM DIFERENTES ORDENS

Dentre os mais importantes algoritmos adaptativos da literatura, o NLMS (*normalized least-mean-square* [1]–[5]) é um dos mais utilizados em aplicações práticas (tais como identificação de sistemas, equalização de canal e cancelamento de eco [44]–[47]), devido, principalmente, à sua simplicidade, baixo custo computacional e robustez. Tais características têm promovido o interesse crescente na modelagem estocástica do algoritmo NLMS nos mais diferentes âmbitos de operação.

No contexto da modelagem estocástica do algoritmo NLMS, o estudo de seu comportamento quando utilizado para estimar plantas variantes no tempo é um tópico de pesquisa relevante que ainda está aberto, mesmo considerando alguns trabalhos interessantes da literatura [48]–[52]. Por exemplo, em [48], são derivadas expressões de modelo descrevendo o EQM em regime permanente de alguns algoritmos adaptativos (incluindo o NLMS), considerando especificamente o problema de estimação de uma planta representada por um modelo de caminhada aleatória (*random walk*) [53]. Os resultados de [48] foram então estendidos em [49] e [50], assumindo um cenário diferente no qual o algoritmo NLMS é utilizado para estimar uma planta periódica com coeficientes complexos. Recentemente, em [51], foi apresentado um modelo estocástico descrevendo o comportamento do algoritmo NLMS complexo em um cenário no qual uma planta representada por um processo de Markov de primeira ordem [53] é estimada. Adicionalmente, outro modelo estocástico foi derivado em [52], também assumindo a estimação de uma planta representada por um modelo de caminhada aleatória (tal como em [48]), porém utilizando agora um sinal de entrada branco gaussiano com variância cíclica.

Apesar dos diferentes cenários variantes no tempo considerados nos trabalhos citados anteriormente, um ponto comum entre eles é a suposição de que o filtro adaptativo e a planta variante no tempo possuem a mesma ordem. A utilização de tal suposição simplifica a derivação do modelo estocástico, porém não é condizente com situações práticas. Portanto, visando preencher tal lacuna, neste trabalho de pesquisa, é derivado um modelo estocástico para o algoritmo NLMS operando com

sinais de entrada branco e correlacionado (ambos com distribuição gaussiana), contemplando cenários em que o filtro adaptativo e a planta possuem ordens distintas<sup>16</sup>.

Este capítulo é organizado como segue. Na Seção 4.1, o algoritmo NLMS é revisitado e a formulação da planta variante no tempo considerada aqui é discutida. A Seção 4.2 apresenta expressões analíticas descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo, o EQM e o passo de adaptação ótimo que minimiza o EQM em regime permanente (este último apenas para o caso de sinal de entrada branco). Comparações entre resultados de simulação e as previsões obtidas pelo modelo proposto são mostradas na Seção 4.3. Finalmente, a Seção 4.4 apresenta as conclusões deste capítulo.

#### 4.1 ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA

Em diversas aplicações é recorrente a necessidade de identificar sistemas práticos, representando-os através de expressões matemáticas. Em particular, a identificação de diversos tipos de sistemas práticos pode ser realizada utilizando algoritmos adaptativos operando na estrutura mostrada na Figura 4.1.

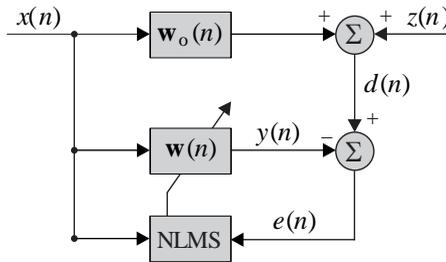


Figura 4.1 - Configuração típica de um problema de identificação de sistemas utilizando o algoritmo NLMS.

No diagrama de blocos da Figura 4.1,  $w_o(n)$  representa a resposta ao impulso (de ordem  $N$ ) de uma planta variante no tempo, cujas mudanças devem ser rastreadas pelo filtro adaptativo<sup>17</sup>  $w(n)$  (de ordem

<sup>16</sup> Em [74], uma análise estocástica é apresentada considerando que o filtro adaptativo possui dimensão menor do que a planta a ser identificada; entretanto, tal trabalho considera especificamente o algoritmo LMS operando em um ambiente estacionário (isto é, com planta invariante no tempo).

<sup>17</sup> Em uma aplicação de identificação de sistemas, como a mostrada na Figura 4.1, o algoritmo adaptativo direciona a atualização de  $w(n)$  visando aproximar

$M$ ) através da equação de atualização do algoritmo NLMS, a qual é dada por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\mathbf{x}_M(n)e(n)}{\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) + \vartheta}. \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{w}(n) = [w_0(n) w_1(n) \dots w_{M-1}(n)]^T$  denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo,  $\mu$ , o passo de adaptação,  $\mathbf{x}_M(n) = [x(n) x(n-1) \dots x(n-M+1)]^T$ , um vetor contendo as últimas  $M$  amostras do sinal de entrada,  $\vartheta > 0$ , o parâmetro de regularização que previne divisão por zero [3] e  $e(n)$ , o sinal de erro, dado por

$$e(n) = z(n) + \mathbf{x}_N^T(n)\mathbf{w}_o(n) - \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{w}(n) \quad (4.2)$$

com  $\mathbf{x}_N = [x(n) x(n-1) \dots x(n-N+1)]^T$ ,  $z(n)$  denotando o ruído de medição. Além disso,  $\mathbf{w}_o(n)$  representa o vetor de coeficientes da planta variante no tempo, o qual é dado por [2, pp. 273]

$$\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}(n) \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{w}_2$  é um vetor de ordem  $N$  com elementos constantes e

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) = \alpha \boldsymbol{\varepsilon}(n) + \boldsymbol{\varphi}(n) \quad (4.4)$$

é um processo de Markov de primeira ordem, que possui como entrada o vetor  $\boldsymbol{\varphi}(n) = [\varphi(n) \varphi(n-1) \dots \varphi(n-N+1)]^T$ , contendo amostras de um processo gaussiano branco com variância  $\sigma_\varphi^2$ . A saída do processo de Markov (4.4) é dada pelo vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)$ , o qual contém amostras de um processo gaussiano correlacionado, onde o nível de correlação é controlado pelo valor de  $\alpha$  [quanto mais próximo  $\alpha$  for de 1, mais correlacionado é o ruído]. Assim,  $\mathbf{w}_o(n)$  pode representar um sistema com resposta ao impulso que varia de forma aleatória em torno de um valor constante (representado por  $\mathbf{w}_2$ ). Para o caso em que  $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ , a planta  $\mathbf{w}_o(n)$  apresenta também uma variação determinística de sua resposta ao impulso, variando de  $\mathbf{w}_1$  para  $\mathbf{w}_2$ .

---

gradativamente o seu sinal de saída  $y(n)$  do sinal  $d(n)$  [note que quanto mais próximo (em um dado sentido) o sinal  $y(n)$  for do sinal  $d(n)$ , mais similares serão o filtro adaptativo  $\mathbf{w}(n)$  e o sistema desconhecido  $\mathbf{w}_o(n)$ ].

Nesse caso, o filtro adaptativo deve rastrear, além das alterações aleatórias, a variação determinística da planta de  $\mathbf{w}_1$  para  $\mathbf{w}_2$ .

## 4.2 MODELO ESTOCÁSTICO PROPOSTO

Nesta seção, são derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo NLMS operando no cenário descrito na Seção 4.1. Para tal, algumas suposições e aproximações utilizadas na derivação do modelo são apresentadas a seguir:

S1) O sinal de entrada  $x(n)$  é obtido de um processo gaussiano de média zero e com variância  $\sigma_x^2$ .

S2) O parâmetro de regularização pode ser negligenciado na modelagem estocástica sob certas condições, isto é,  $\mathfrak{G} \ll E[\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n)]$  [51] e [54].

S3) O ruído de medição  $z(n)$  é obtido de um processo de média zero com variância  $\sigma_z^2$ , sendo descorrelacionado de qualquer outro sinal no sistema [48]–[52].

S4) Para condição de adaptação lenta,  $\mathbf{w}(n)$  e  $\mathbf{x}_M(n)$  são assumidos não correlacionados [48]–[52].

Especificamente, para o caso de sinal de entrada branco a seguinte suposição também é considerada:

S5) Para  $N$  grande, as flutuações de energia no sinal de entrada tornam-se pequenas o suficiente para justificar a seguinte aproximação [3], [52]:

$$E \left[ \frac{\mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n)} \right] \cong \frac{E[\mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_M^T(n)]}{E[\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n)]}. \quad (4.5)$$

### 4.2.1 Modelo estocástico para sinal de entrada branco gaussiano

#### 4.2.1.1 Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo

Nesta seção, é derivada uma expressão descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo. Para tal, primeiramente, (4.3) é substituído em (4.2) e o resultado em (4.1). Na sequência, o valor esperado é computado em ambos os lados da expressão resultante, e, então, as Suposições S1-S5 são consideradas. Assim, obtém-se

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = \left(1 - \frac{\mu}{M}\right) E[\mathbf{w}(n)] + \frac{\mu}{M} \Lambda_{M,N} E[\mathbf{w}_o(n)] \quad (4.6)$$

com

$$\Lambda_{M,N} = [\mathbf{I}_{M,M} \quad \mathbf{0}_{M,N-M}] \quad (4.7)$$

para  $M \leq N$ , onde  $\mathbf{I}_{M,M}$  é uma matriz identidade de dimensão  $M \times M$  e  $\mathbf{0}_{M,N-M}$  denota uma matriz nula com dimensão  $M \times N - M$  (em particular, para  $N = M$ , tem-se  $\Lambda_{M,N} = \mathbf{I}_{M,M}$ ). Alternativamente,

$$\Lambda_{M,N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N,N} \\ \mathbf{0}_{M-N,N} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

para  $M > N$ . Além disso,

$$E[\mathbf{w}_o(n)] = \mathbf{w}_2 + E[\boldsymbol{\varepsilon}(n)] \quad (4.9)$$

com

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}(n)] = \alpha^n \boldsymbol{\varepsilon}(0). \quad (4.10)$$

#### 4.2.1.2 Filtro adaptativo em regime permanente

Agora, tomando o limite de (4.6) para  $n \rightarrow \infty$  e assumindo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] = E[\mathbf{w}(\infty)] \quad (4.11)$$

o filtro adaptativo em regime permanente pode ser expresso como

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = \Lambda_{M,N} \mathbf{w}_2. \quad (4.12)$$

Note que, para sinal de entrada branco e  $M < N$ ,  $E[\mathbf{w}(\infty)]$  é apenas uma versão truncada do vetor  $\mathbf{w}_2$ .

#### 4.2.1.3 Erro quadrático médio

Visando obter uma expressão analítica para predizer o EQM do algoritmo NLMS, primeiramente, define-se o vetor de erro do filtro adaptativo como

$$\mathbf{v}(n) \triangleq \mathbf{w}(n) - \Lambda_{M,N} \mathbf{w}_o(n). \quad (4.13)$$

Agora, utilizando (4.13) em (4.2), o sinal de erro pode ser reescrito como

$$e(n) = z(n) + [\mathbf{x}_N^T(n) - \mathbf{x}_M^T(n) \Lambda_{M,N}] \mathbf{w}_o(n) - \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{v}(n). \quad (4.14)$$

Então, elevando  $e(n)$  ao quadrado, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S1, S3 e S4, o EQM é dado por

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &\triangleq J(n) \\ &= J_{\min} + J_{\delta}(n) + J_{\text{ex}}(n) \end{aligned} \quad (4.15)$$

com

$$J_{\min} = \sigma_z^2 \quad (4.16)$$

caracterizando o EQM mínimo que pode ser obtido em regime permanente e

$$J_{\delta}(n) = \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(n)] \quad (4.17)$$

denotando a parcela do EQM que surge quando  $M < N$  [em particular,  $M \geq N$  implica  $J_{\delta}(n) = 0$ ]. Além disso,  $\mathbf{K}_1(n) = E[\mathbf{w}_o(n) \mathbf{w}_o^T(n)]$  e

$$\mathbf{Z}_{N,N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M,M} & \mathbf{0}_{M,N-M} \\ \mathbf{0}_{N-M,M} & \mathbf{I}_{N-M,N-M} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

onde  $\mathbf{I}_{N-M,N-M}$  é uma matriz identidade de dimensão  $N - M \times N - M$  e  $\mathbf{0}_{M,M}$  denota uma matriz nula de dimensão  $M \times M$  (as demais matrizes nulas possuem dimensões indicadas pelos seus respectivos índices). Adicionalmente,

$$J_{\text{ex}}(n) = \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{K}(n)] \quad (4.19)$$

é o EQM em excesso (EQME), onde  $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)]$  é a matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo. Levando em consideração (4.17) e (4.19), nota-se que o EQM (4.15) será completamente determinado apenas se as matrizes de correlação  $\mathbf{K}_1(n)$  e  $\mathbf{K}(n)$  forem conhecidas.

#### 4.2.1.4 Matrizes de correlação

Nesta seção, visando completar a derivação das expressões que descrevem o comportamento do EQM, expressões recursivas para o cálculo das matrizes de correlação  $\mathbf{K}_1(n)$  e  $\mathbf{K}(n)$  são obtidas. Primeiramente, para determinar  $\mathbf{K}_1(n)$ , computa-se o produto externo  $\mathbf{w}_o(n) \mathbf{w}_o^T(n)$  e, então, toma-se o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante. Assim,

$$\mathbf{K}_1(n) = \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^T + \alpha^n [\mathbf{w}_2 \boldsymbol{\varepsilon}^T(0) + \boldsymbol{\varepsilon}(0) \mathbf{w}_2^T] + \mathbf{K}_2(n) \quad (4.20)$$

com

$$\mathbf{K}_2(n+1) = \alpha^2 \mathbf{K}_2(n) + \sigma_{\varphi}^2 \mathbf{I}_{N,N}. \quad (4.21)$$

Agora, visando derivar uma expressão recursiva para computar  $\mathbf{K}(n)$ , primeiramente, a regra de atualização (4.1) é reescrita em termos de  $\mathbf{v}(n)$ , isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) = & \mu \frac{\mathbf{x}_M(n)z(n)}{\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) + \vartheta} + \left[ \mathbf{I}_{M,M} - \mu \frac{\mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) + \vartheta} \right] \mathbf{v}(n) \\ & + \mu \frac{\mathbf{x}_M(n)[\mathbf{x}_N^T(n) - \mathbf{x}_M^T(n)\Lambda_{M,N}] \mathbf{w}_o(n)}{\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) + \vartheta} \\ & + (1 - \alpha)\Lambda_{M,N}\boldsymbol{\varepsilon}(n) - \Lambda_{M,N}\boldsymbol{\varphi}(n). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Então, determinando o produto externo  $\mathbf{v}(n+1)\mathbf{v}^T(n+1)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S1-S5, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) = & \left(1 - \frac{2\mu}{M}\right)\mathbf{K}(n) + \frac{\mu^2}{M(M+2)}\{\text{tr}[\mathbf{K}(n)]\mathbf{I}_{M,M} + 2\mathbf{K}(n)\} \\ & + \frac{\mu^2}{\sigma_x^2 M(M+2)}\{J_{\min} + \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N}\mathbf{K}_1(n)]\}\mathbf{I}_{M,M} + \boldsymbol{\Gamma}(n) \end{aligned} \quad (4.23)$$

com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}(n) = & (1 - \alpha)\left(1 - \frac{\mu}{M}\right)[\mathbf{K}_3(n)\Lambda_{M,N}^T + \Lambda_{M,N}\mathbf{K}_3^T(n)] \\ & + (1 - \alpha)^2\Lambda_{M,N}\mathbf{K}_2(n)\Lambda_{M,N}^T + \sigma_\varphi^2\Lambda_{M,N}\Lambda_{M,N}^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde  $\mathbf{K}_3(n) = E[\mathbf{v}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)]$ . Visando obter uma expressão recursiva para calcular  $\mathbf{K}_3(n)$ , primeiramente, o produto externo  $\mathbf{v}(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)$  é determinado, na sequência, o valor esperado é computado de ambos os lados da expressão resultante e, então, as Suposições S1-S5 são consideradas. Assim,

$$\mathbf{K}_3(n+1) = \alpha\left(1 - \frac{\mu}{M}\right)\mathbf{K}_3(n) - \sigma_\varphi^2\Lambda_{M,N} + \alpha(1 - \alpha)\Lambda_{M,N}\mathbf{K}_2(n). \quad (4.25)$$

Portanto, o EQM do algoritmo NLMS pode ser agora completamente determinado utilizando (4.15) juntamente com (4.20) e (4.23). Adicionalmente, as matrizes  $\mathbf{K}(n)$ ,  $\mathbf{K}_1(n)$ ,  $\mathbf{K}_2(n)$  e  $\mathbf{K}_3(n)$  são inicializadas como segue:

$$\mathbf{K}(0) = \Lambda_{M,N}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_1^T\Lambda_{M,N}^T \quad (4.26)$$

$$\mathbf{K}_1(0) = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T \quad (4.27)$$

$$\mathbf{K}_2(0) = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T \quad (4.28)$$

e

$$\mathbf{K}_3(0) = -\Lambda_{M,N} \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T. \quad (4.29)$$

#### 4.2.1.5 EQM em regime permanente

Nesta seção, uma expressão analítica descrevendo o EQM em regime permanente é derivada. Para tal, toma-se o limite de (4.15) para  $n \rightarrow \infty$ . Assim,

$$J(\infty) = J_{\min} + J_{\delta}(\infty) + J_{\text{ex}}(\infty) \quad (4.30)$$

com

$$J_{\delta}(\infty) = \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)] \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{K}_1(\infty)$  é obtido tomando o limite de (4.20) para  $n \rightarrow \infty$ , resultando em

$$\mathbf{K}_1(\infty) = \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^T + \frac{\sigma_{\varphi}^2}{1 - \alpha^2} \mathbf{I}_{N,N}. \quad (4.32)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(\infty) &= \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{K}(\infty)] \\ &= \sigma_x^2 \mathbf{1}^T \mathbf{k}(\infty) \end{aligned} \quad (4.33)$$

denota o EQME em regime permanente, onde  $\mathbf{1}$  é um vetor de 1's com dimensão  $M$  e  $\mathbf{k}(\infty)$ , o vetor com os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{K}(\infty)$ . Particularmente, para determinar  $\mathbf{k}(\infty)$ , primeiramente, computa-se o limite da expressão resultante para  $n \rightarrow \infty$  e, então, toma-se os elementos da diagonal de (4.23). Assim,

$$\mathbf{k}(\infty) = \mathbf{C}^{-1} \left\{ \frac{\mu^2 J_{\min} + \mu^2 \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)]}{\sigma_x^2 M(M+2)} \mathbf{1} + \frac{2\mu}{(1+\alpha)[M(1+\alpha) + \alpha\mu]} \boldsymbol{\tau} \right\} \quad (4.34)$$

com

$$\mathbf{C} = \frac{2\mu}{M} \left[ \left( 1 - \frac{\mu}{M+2} \right) \mathbf{I}_{M,M} - \frac{\mu}{2(M+2)} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \right] \quad (4.35)$$

e  $\boldsymbol{\tau}$  denotando um vetor de ordem  $M$ , com os primeiros  $N$  elementos unitários e os demais nulos (particularmente, para  $M \leq N$ , tem-se  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{1}$ ).

Para o cálculo de  $\mathbf{C}^{-1}$  [requerido em (4.34)], pode-se utilizar a fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury [55], o que resulta em

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{M}{2\mu(M+2-\mu)} \left[ \frac{(M+2)(2-\mu)\mathbf{I}_{M,M} + \mu\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{2-\mu} \right]. \quad (4.36)$$

Agora, substituindo (4.36) em (4.34) e o resultado obtido em (4.33), o EQME em regime permanente pode ser expresso como

$$J_{\text{ex}}(\infty) = J_{\text{ex},0}(\infty) + J_{\text{ex},1}(\infty) \quad (4.37)$$

com

$$J_{\text{ex},0}(\infty) = \frac{M}{(M+2)} \frac{\mu}{(2-\mu)} \{J_{\text{min}} + \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)]\} \quad (4.38)$$

caracterizando a parcela do EQME relacionada ao ruído do gradiente no processo de adaptação [1]–[5] e

$$J_{\text{ex},1}(\infty) = \frac{2\sigma_x^2 \sigma_\varphi^2 M \min(N, M)}{(1+\alpha)[M(1-\alpha) + \alpha\mu](2-\mu)} \quad (4.39)$$

a parcela do EQME correspondente ao rastreamento da planta variante no tempo.

É bem conhecido da literatura, [2]–[5] e [56], que  $J_{\text{ex},0}(\infty)$  é uma função crescente com respeito ao passo de adaptação  $\mu$ , enquanto  $J_{\text{ex},1}(\infty)$  é uma função decrescente com respeito a  $\mu$  [tendo em vista que valores maiores de passo são requeridos para que o filtro adaptativo  $\mathbf{w}(n)$  possa rastrear adequadamente as variações da planta, reduzindo  $J_{\text{ex},1}(\infty)$ ]. Esse comportamento antagônico de  $J_{\text{ex},0}(\infty)$  e  $J_{\text{ex},1}(\infty)$  em relação ao passo de adaptação faz com que  $J_{\text{ex}}(\infty)$  [dado por (4.37)] apresente um ponto de mínimo sob certas condições de operações (como discutido em [51]). O valor de passo  $\mu_o$  que leva o EQME ao menor valor possível em regime permanente pode ser determinado encontrando o mínimo de (4.37). Assim, tomando a derivada de (4.37) com respeito a  $\mu$ , igualando o resultado a zero e considerando  $\mu = \mu_o$ , obtém-se

$$\mu_o = \frac{\sqrt{1 + \lambda[2\alpha + M(1-\alpha)]} - 1 - \lambda M(1-\alpha)}{\alpha\lambda} \quad (4.40)$$

para

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_\varphi^2} \left\{ \frac{J_{\text{min}}}{\sigma_x^2} + \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)] \right\} \frac{(1+\alpha)}{(M+2) \min(N, M)}. \quad (4.41)$$

Note que o descasamento entre a ordem do filtro adaptativo e a ordem do sistema a ser estimado implica o surgimento dos termos  $\text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N}\mathbf{K}_1(\infty)]$  e  $\min(N, M)$  nas expressões de modelo do EQM em regime permanente e do passo de adaptação ótimo [veja (4.31), (4.38), (4.39) e (4.41)]. Em particular, para o caso em que  $M = N$  (usualmente considerado na análise estocástica de algoritmos adaptativos), tem-se  $\text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N}\mathbf{K}_1(\infty)] = 0$  e  $\min(N, M) = M$ .

## 4.2.2 Modelo estocástico para sinal de entrada correlacionado gaussiano

### 4.2.2.1 Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo

Nesta seção, é derivada uma expressão descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo quando o sinal de entrada é correlacionado. Para tal, primeiramente, (4.3) é substituído em (4.2) e o resultado em (4.1). Na sequência, o valor esperado é computado em ambos os lados da expressão resultante e, então, as Suposições S1-S4 são consideradas. Assim, obtém-se

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = (\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{R}_1)E[\mathbf{w}(n)] + \mu\mathbf{R}_2E[\mathbf{w}_o(n)] \quad (4.42)$$

onde  $E[\mathbf{w}_o(n)]$  é dado por (4.9),

$$\mathbf{R}_1 = E \left[ \begin{array}{c} \mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_M^T(n) \\ \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) \end{array} \right] \quad (4.43)$$

e

$$\mathbf{R}_2 = E \left[ \begin{array}{c} \mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_N^T(n) \\ \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) \end{array} \right] \quad (4.44)$$

são as matrizes de autocorrelação normalizadas (de dimensões  $M \times M$  e  $M \times N$ , respectivamente) do sinal de entrada  $x(n)$ . Em particular, os cálculos de  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  são apresentados no Apêndice D.

### 4.2.2.2 Filtro adaptativo em regime permanente

Agora, tomando o limite de (4.42) para  $n \rightarrow \infty$  e assumindo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] = E[\mathbf{w}(\infty)] \quad (4.45)$$

os valores dos coeficientes do filtro adaptativo em regime permanente podem ser calculados como

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{w}_2. \quad (4.46)$$

Note que para o caso de sinal de entrada correlacionado e  $M < N$ , o filtro adaptativo em regime permanente não é apenas uma versão truncada do vetor  $\mathbf{w}_2$  [como ocorre para o caso de sinal de entrada branco, veja (4.12)].

#### 4.2.2.3 Erro quadrático médio

Visando obter uma expressão analítica para modelar o EQM do algoritmo NLMS para sinal de entrada correlacionado, primeiramente, define-se o vetor de erro do filtro adaptativo como

$$\mathbf{v}(n) \triangleq \mathbf{w}(n) - \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{w}_o(n). \quad (4.47)$$

Agora, utilizando (4.47) em (4.2), o sinal de erro pode ser reescrito como

$$e(n) = z(n) + [\mathbf{x}_N^T(n) - \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2] \mathbf{w}_o(n) - \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{v}(n). \quad (4.48)$$

Então, elevando  $e(n)$  ao quadrado, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S1, S3 e S4, o EQM pode ser computado como

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &\triangleq J(n) \\ &= \sigma_z^2 + \text{tr}[\mathbf{R}_{M,M} \mathbf{K}(n)] + \text{tr}[\mathbf{R}_{N,N} \mathbf{K}_1(n)] - \text{tr}[\mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_{M,N} \mathbf{K}_1(n)] \\ &\quad - \text{tr}[\mathbf{R}_{N,M} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}_1(n)] + \text{tr}[\mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_{M,M} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}_1(n)] \\ &\quad - \text{tr}\{(\mathbf{R}_{N,M} - \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_{M,M}) E[\mathbf{v}(n) \mathbf{w}_o^T(n)]\} \\ &\quad - \text{tr}\{(\mathbf{R}_{M,N} - \mathbf{R}_{M,M} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2) E[\mathbf{w}_o(n) \mathbf{v}^T(n)]\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde  $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)]$  denota a matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo e  $\mathbf{K}_1(n) = E[\mathbf{w}_o(n) \mathbf{w}_o^T(n)]$  é dado por (4.20). Além disso, em (4.49),  $\mathbf{R}_{M,M}$ ,  $\mathbf{R}_{M,N}$  e  $\mathbf{R}_{N,M}$  são, respectivamente, as matrizes de autocorrelação do sinal de entrada de dimensões  $M \times M$ ,  $M \times N$  e  $N \times M$ . Agora, fazendo uso das relações  $\mathbf{R}_{M,N} = \mathbf{R}_{N,M}^T$  e  $\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{M,M}^{-1} \mathbf{R}_{M,N}$  (para detalhes veja Apêndice E), (4.49) pode ser reescrita como

$$J(n) = J_{\min} + J_{\delta}(n) + J_{\text{ex}}(n) \quad (4.50)$$

com  $J_{\min}$  [dado por (4.16)] caracterizando o EQM mínimo que pode ser obtido em regime permanente e

$$J_{\delta}(n) = \text{tr}[(\mathbf{R}_{N,N} - \mathbf{R}_{N,M} \mathbf{R}_{M,M}^{-1} \mathbf{R}_{M,N}) \mathbf{K}_1(n)] \quad (4.51)$$

denotando a parcela do EQM que surge quando  $M < N$  [em particular,  $M \geq N$  implica  $J_{\delta}(n) = 0$ ]. Adicionalmente,

$$J_{\text{ex}}(n) = \text{tr}[\mathbf{R}_{M,M} \mathbf{K}(n)] \quad (4.52)$$

representa o EQME. Levando em consideração (4.51) e (4.52), nota-se que o EQM (4.50) será completamente determinado apenas se a matriz de correlação  $\mathbf{K}(n)$  for conhecida.

#### 4.2.2.4 Matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo

Agora, visando derivar uma expressão recursiva para computar  $\mathbf{K}(n)$ , primeiramente, a regra de atualização (4.1) é reescrita em termos de  $\mathbf{v}(n)$  [dado por (4.47) para o caso de sinal de entrada correlacionado], isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) = & \left[ \mathbf{I}_{M,M} - \mu \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} \right] \mathbf{v}(n) + \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 [(1-\alpha)\boldsymbol{\varepsilon}(n) - \boldsymbol{\varphi}(n)] \\ & + \mu \left[ \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_N^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} - \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \right] \mathbf{w}_0(n) + \mu \frac{\mathbf{x}_M(n) z(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Então, determinando o produto externo  $\mathbf{v}(n+1) \mathbf{v}^T(n+1)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, utilizando as Suposições S1-S4 e aproximações do tipo

$$\begin{aligned} \text{E} \left[ \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} \mathbf{A}_{M,M}(n) \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} \right] & \cong 2 \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_{M,M}(n) \mathbf{R}_1 \\ & + \mathbf{R}_1 \text{tr}[\mathbf{R}_1 \mathbf{A}_{M,M}(n)] \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \text{E} \left[ \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_N^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} \mathbf{A}_{N,M}(n) \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} \right] & \cong 2 \mathbf{R}_2 \mathbf{A}_{N,M}(n) \mathbf{R}_1 \\ & + \mathbf{R}_1 \text{tr}[\mathbf{R}_2 \mathbf{A}_{N,M}(n)] \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \text{E} \left[ \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} \mathbf{A}_{M,N}(n) \frac{\mathbf{x}_N(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)} \right] & \cong 2 \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_{M,N}(n) \mathbf{R}_2^T \\ & + \mathbf{R}_1 \text{tr}[\mathbf{R}_2^T \mathbf{A}_{M,N}(n)] \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_N^T(n) \\ \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) \end{bmatrix} \mathbf{A}_{N,N}(n) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N(n)\mathbf{x}_M^T(n) \\ \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) \end{bmatrix} &\cong 2\mathbf{R}_2\mathbf{A}_{N,N}(n)\mathbf{R}_2^T \\ &+ \mathbf{R}_1\text{tr}[\mathbf{R}_3\mathbf{A}_{N,N}(n)] \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde os índices de  $\mathbf{A}(n)$  em (4.54)-(4.57) indicam sua dimensão e

$$\mathbf{R}_3 = \mathbb{E} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N(n)\mathbf{x}_N^T(n) \\ \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

é uma matriz de autocorrelação normalizada cujo cálculo é apresentado no Apêndice D. Assim, a expressão recursiva para computar a matriz de correlação  $\mathbf{K}(n)$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{K}(n) - \mu\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_1 - \mu\mathbf{R}_1\mathbf{K}(n) \\ &+ \mu^2\{2\mathbf{R}_1\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_1 + \text{tr}[\mathbf{R}_1\mathbf{K}(n)]\} + \mu^2\sigma_z^2\mathbf{R}_4 \\ &+ \mu^2\mathbf{R}_1\text{tr}[(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2)\mathbf{K}_1(n)] + \Gamma(n) \end{aligned} \quad (4.59)$$

com

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (1-\alpha)(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{R}_1)\mathbf{K}_3(n)\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^{-1} \\ &+ (1-\alpha)\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{K}_3^T(n)(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{R}_1) \\ &+ \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2[(1-\alpha)^2\mathbf{K}_2(n) + \sigma_\varphi^2\mathbf{I}_{N,N}]\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^{-1} \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde  $\mathbf{K}_2(n)$  é dado por (4.21),  $\mathbf{K}_3(n) = \mathbb{E}[\mathbf{v}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)]$  e

$$\mathbf{R}_4 = \mathbb{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_M^T(n)}{[\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n)]^2} \right\} \quad (4.61)$$

representa um momento de quarta ordem normalizado do sinal de entrada cujo cálculo é apresentado no Apêndice D. Agora, visando derivar uma expressão recursiva para computar  $\mathbf{K}_3(n)$ , primeiramente, o produto externo  $\mathbf{v}(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)$  é determinado, na sequência, o valor esperado é computado em ambos os lados da expressão resultante e, então, as Suposições S1-S4 são utilizadas, resultando em,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_3(n+1) &= \alpha(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{R}_1)\mathbf{K}_3(n) \\ &+ \alpha(1-\alpha)\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{K}_2(n) - \varphi^2\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Portanto, o EQM do algoritmo NLMS, para o caso de sinal de entrada correlacionado, pode ser agora completamente determinado utilizando

(4.50) juntamente com (4.20) e (4.59). Adicionalmente, as matrizes  $\mathbf{K}(n)$ ,  $\mathbf{K}_1(n)$ ,  $\mathbf{K}_2(n)$  e  $\mathbf{K}_3(n)$  são inicializadas como segue<sup>18</sup>:

$$\mathbf{K}(0) = \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \quad (4.63)$$

$$\mathbf{K}_1(0) = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T \quad (4.64)$$

$$\mathbf{K}_2(0) = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T \quad (4.65)$$

e

$$\mathbf{K}_3(0) = -\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T. \quad (4.66)$$

#### 4.2.2.5 EQM em regime permanente

Nesta seção, uma expressão analítica descrevendo o EQM em regime permanente é derivada. Para tal, toma-se o limite de (4.50) para  $n \rightarrow \infty$ . Assim,

$$J(\infty) = J_{\min} + J_{\delta}(\infty) + J_{\text{ex}}(\infty) \quad (4.67)$$

com

$$J_{\delta}(\infty) = \text{tr}[(\mathbf{R}_{N,N} - \mathbf{R}_{N,M} \mathbf{R}_{M,M}^{-1} \mathbf{R}_{M,N}) \mathbf{K}_1(\infty)] \quad (4.68)$$

onde  $\mathbf{K}_1(\infty)$  é dado por (4.32). Além disso,

$$J_{\text{ex}}(\infty) = \text{tr}[\mathbf{R}_{M,M} \mathbf{K}(\infty)] \quad (4.69)$$

denota o EQME em regime permanente. Utilizando a autodecomposição de  $\mathbf{R}_{M,M}$ , isto é,  $\mathbf{R}_{M,M} = \mathbf{Q}_M \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T$  [onde  $\mathbf{Q}_M$  é a matriz de autovetores de  $\mathbf{R}_{M,M}$  e  $\mathbf{\Lambda}_M$  uma matriz diagonal com os autovalores de  $\mathbf{R}_{M,M}$ ], (4.69) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(\infty) &= \text{tr}[\mathbf{Q}_M \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T \mathbf{K}(\infty)] \\ &= \text{tr}[\mathbf{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T \mathbf{K}(\infty) \mathbf{Q}_M] \\ &= \text{tr}[\mathbf{\Lambda}_M \mathbf{K}'(\infty)] \\ &= \boldsymbol{\lambda}_M^T \mathbf{k}'(\infty) \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde  $\boldsymbol{\lambda}_M$  é o vetor contendo os autovalores de  $\mathbf{R}_{M,M}$  e  $\mathbf{k}'(\infty)$  é o vetor contendo os elementos da diagonal da matriz  $\mathbf{K}'(\infty) = \mathbf{Q}_M^T \mathbf{K}(\infty) \mathbf{Q}_M$ . Para determinar  $\mathbf{k}'(\infty)$ , primeiramente, computa-se o limite de (4.59)

---

<sup>18</sup> Os valores de inicialização utilizados para  $\mathbf{K}(n)$ ,  $\mathbf{K}_1(n)$ ,  $\mathbf{K}_2(n)$  e  $\mathbf{K}_3(n)$  decorrem do fato de que o filtro adaptativo é inicializado com um vetor nulo, isto é,  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ .

para  $n \rightarrow \infty$ , pré- e pós-multiplica-se a expressão resultante por  $\mathbf{Q}_M^T$  e  $\mathbf{Q}_M$ , respectivamente, e, então, toma-se os elementos da diagonal principal da matriz obtida. Assim,

$$\mathbf{k}'(\infty) = \mathbf{C}^{-1} \{ \mu^2 \sigma_z^2 \mathbf{r}_4 + \mu^2 \mathbf{h}_1 \text{tr}[(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2) \mathbf{K}_1(\infty)] + \boldsymbol{\rho} \} \quad (4.71)$$

com

$$\mathbf{C} = \mu [2(\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{H}_1) \mathbf{H}_1 - \mu \mathbf{H}_1 \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{H}_1] \quad (4.72)$$

onde  $\mathbf{H}_1$  é uma matriz diagonal computada como  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{Q}_M^T \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_M$  (para detalhes veja Apêndice D),  $\mathbf{h}_1 = \text{diag}(\mathbf{H}_1) = \text{diag}(\mathbf{Q}_M^T \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_M)$  é o vetor contendo os elementos da diagonal de  $\mathbf{H}_1$  e  $\mathbf{1}$  é um vetor de dimensão  $M$  de 1's. Além disso,  $\mathbf{r}_4 = \text{diag}(\mathbf{H}_4) = \text{diag}(\mathbf{Q}_M^T \mathbf{R}_4 \mathbf{Q}_M)$  e  $\boldsymbol{\rho} = \text{diag}[\mathbf{Q}_M^T \boldsymbol{\Gamma}(\infty) \mathbf{Q}_M]$ , com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}(\infty) &= (1 - \alpha)(\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{R}_1) \mathbf{K}_3(\infty) \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \\ &\quad + (1 - \alpha) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{K}_3^T(\infty) (\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{R}_1) \\ &\quad + \frac{2\sigma_\varphi^2}{1 + \alpha} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \end{aligned} \quad (4.73)$$

onde  $\mathbf{K}_1(\infty)$  é dado por (4.32) e  $\mathbf{K}_3(\infty)$  é computado tomando-se o limite de (4.62) para  $n \rightarrow \infty$ , resultando em

$$\mathbf{K}_3(\infty) = -\frac{\sigma_\varphi^2}{1 + \alpha} [(1 - \alpha) \mathbf{I}_{M,M} + \alpha \mu \mathbf{R}_1]^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2. \quad (4.74)$$

Agora, substituindo (4.71) em (4.70), o EQME em regime permanente (para o caso de sinal de entrada correlacionado) pode ser expresso como

$$J_{\text{ex}}(\infty) = J_{\text{ex},0}(\infty) + J_{\text{ex},1}(\infty) \quad (4.75)$$

com

$$J_{\text{ex},0}(\infty) = \boldsymbol{\lambda}_M^T \mathbf{C}^{-1} \{ \mu^2 \sigma_z^2 \mathbf{r}_4 + \mu^2 \mathbf{h}_1 \text{tr}[(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2) \mathbf{K}_1(\infty)] \} \quad (4.76)$$

denotando a parcela do EQME relacionada ao ruído do gradiente no processo de adaptação [2]–[5] e

$$J_{\text{ex},1}(\infty) = \boldsymbol{\lambda}_M^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\rho} \quad (4.77)$$

representando a parcela do EQME correspondente ao rastreamento da planta variante no tempo.

### 4.3 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, visando avaliar a precisão do modelo proposto, resultados de simulação de MC (média de 300 realizações independentes) são comparados com as predições do modelo para diferentes cenários de operação. Em todos os exemplos, a variância do ruído de medição é  $\sigma_z^2 = 10^{-2}$ , o parâmetro de regularização  $\vartheta = 10^{-3}$  e  $x(n)$  é um ruído gaussiano de média zero, obtido a partir de

$$x(n) = -\beta_1 x(n-1) - \beta_2 x(n-2) + v(n) \quad (4.78)$$

onde  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os coeficientes do processo AR(2) e  $v(n)$  é um ruído gaussiano branco com variância determinada por

$$\sigma_v^2 = \left( \frac{1-\beta_2}{1+\beta_2} \right) [(1+\beta_2)^2 - \beta_1^2]. \quad (4.79)$$

Note que considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $x(n)$  é reduzido a um ruído branco gaussiano com variância unitária [isto é,  $x(n) = v(n)$  e  $\sigma_v^2 = 1$ ]. Para  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ , são utilizados vetores com dimensão 30, cujos elementos são ilustrados na Figura 4.2.

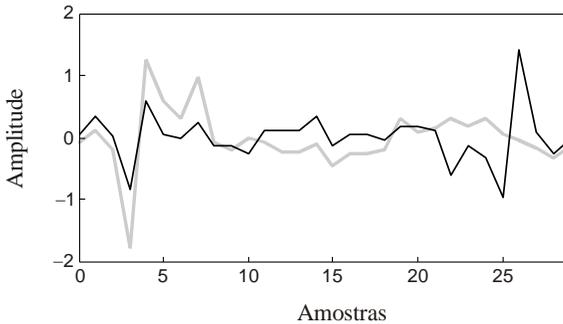


Figura 4.2 - Amostras dos vetores  $\mathbf{w}_1$  (linha cinza) e  $\mathbf{w}_2$  (linha escura).

#### 4.3.1 Exemplo 1

Neste exemplo, a precisão do modelo estocástico proposto é verificada (por meio da curva do EQM) considerando diferentes ordens para o filtro adaptativo; a saber,  $M = 22$ ,  $M = 26$ ,  $M = N = 30$ ,  $M = 60$  e  $M = 120$ . Além disso, utiliza-se aqui  $\sigma_\varphi^2 = 5 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha = 0,999$ ,  $\mu = 0,2$  e dois diferentes sinais de entrada  $x(n)$ , isto é, sinal

branco gaussiano com dispersão de autovalores<sup>19</sup>  $\chi = 1$  [obtido de (4.78) utilizando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ] e sinal correlacionado gaussiano com  $\chi = 110,58$  [obtido<sup>20</sup> de (4.78) utilizando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,80$ ]. Observa-se da Figura 4.3 que o modelo proposto descreve com precisão muita boa o comportamento do EQM para ambos os sinais de entrada branco [Figuras 4.3(a) e (b)] e correlacionado [Figuras 4.3(c) e (d)], independente da ordem utilizada para o filtro adaptativo.

Observa-se da Figura 4.3 que as curvas do EQM apresentam um comportamento não monotônico na fase transitória. Tal comportamento deve-se a variação determinística da planta  $\mathbf{w}_o(n)$  de  $\mathbf{w}_1$  para  $\mathbf{w}_2$  na fase transitória. Além disso, nota-se, das Figuras 4.3(a) e (c), que o valor do EQM em regime permanente aumenta à medida que a ordem do filtro adaptativo é reduzida em relação à ordem da planta  $\mathbf{w}_o(n)$ . Tal acréscimo no valor do EQM em regime permanente é devido à submodelagem<sup>21</sup> da planta  $\mathbf{w}_o(n)$  pelo filtro adaptativo  $\mathbf{w}(n)$ , sendo considerada na expressão de modelo (4.38) (válida para sinal de entrada branco) pelo termo  $\text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)]$ , e na expressão (4.76) (válida para sinal de entrada correlacionado) pelo termo  $\text{tr}[(\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{R}_2) \mathbf{K}_1(\infty)]$ .

Agora, verifica-se das Figuras 4.3(b) e (d) que, quanto maior a ordem do filtro adaptativo, menor é a velocidade de convergência do EQM e maior é o seu valor em regime permanente. Particularmente, para o caso de sinal de entrada branco, a redução na velocidade de convergência do EQM como consequência do aumento da ordem  $M$  do filtro adaptativo, pode ser compreendida analisando a expressão de modelo (4.23), que descreve a atualização de  $\mathbf{K}(n)$  [o qual é utilizado no cálculo do EQM em (4.19)]. Em (4.23), nota-se que diversos elementos da recursão são multiplicados por ganhos inversamente proporcionais a  $M$ , implicando que quando maior o valor de  $M$ , menor o valor de cada

<sup>19</sup> A dispersão de autovalores é uma medida do nível de correlação de um sinal (quanto maior o valor da dispersão de autovalores, mais correlacionado é o sinal), sendo calculada como a razão entre o maior e o menor autovalor de sua matriz de autocorrelação.

<sup>20</sup> Vale destacar, que tal valor da dispersão de autovalores é obtido para  $M = N = 30$ , para outras ordens do filtro adaptativo são obtidos diferentes valores de dispersão de autovalores.

<sup>21</sup> O termo submodelagem refere-se à situação na qual o filtro adaptativo possui ordem menor do que a da planta a ser identificada.

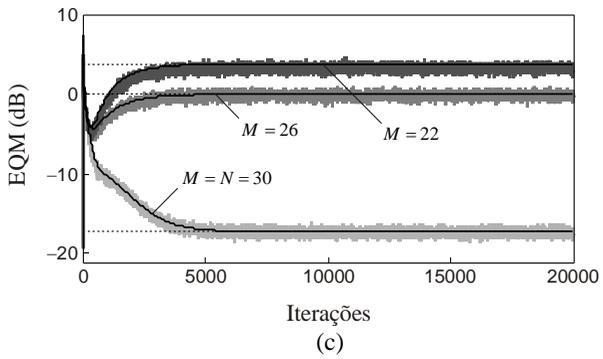
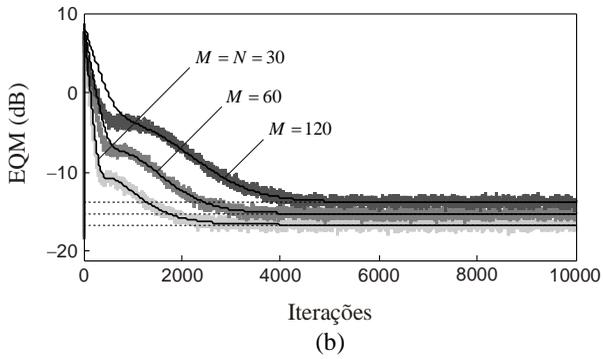
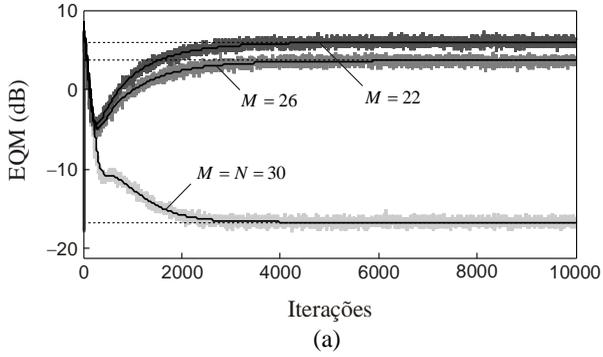
ganho e, conseqüentemente, mais lenta a atualização de  $\mathbf{K}(n)$ . Note que a velocidade de convergência é reduzida à medida que  $M$  aumenta, mesmo que os últimos coeficientes do filtro adaptativo não estejam rastreando coeficientes da planta.

Agora, o acréscimo do EQM em regime permanente devido ao aumento da ordem do filtro adaptativo pode ser analisado (para o caso de sinal de entrada branco) particularizando a expressão (4.39) para o caso em que  $M \geq N$ . Em (4.39), que modela a parcela do EQM relacionada com a planta não estacionária [i.e.,  $J_{\text{ex},1}(\infty)$ ], um aumento no valor do EQM devido ao incremento do valor de  $M$  implica o aumento de ambos o numerador e o denominador de (4.39). Entretanto, tendo em vista que  $M$  é multiplicado no denominador apenas por  $1 - \alpha$  (onde  $0 < \alpha < 1$ ), o incremento no valor do denominador devido ao aumento de  $M$  é menor do que o verificado no numerador, assim, o valor de  $J_{\text{ex},1}(\infty)$  tem o seu valor aumentado quando  $M$  é incrementado.

Tal comportamento, pode também ser explicado sobre outro ponto de vista. Em particular, no cenário em que a ordem  $M$  do filtro adaptativo é maior do que a ordem  $N$  da planta a ser identificada, os coeficientes adicionais do filtro adaptativo (isto é, aqueles que não rastreiam coeficientes da planta), não são constantes e iguais a zeros, mas apresentam comportamento ruidoso. Tal comportamento contribui indiretamente (através da matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo) com o aumento do EQM em regime permanente. Além disso, a medida em que a ordem  $M$  é aumentada, maior é o número de coeficientes adaptativos com esse comportamento ruidoso, aumentando também o valor do EQM em regime permanente. Vale ressaltar, que esse comportamento é significativo apenas quando  $\sigma_{\phi}^2 \neq 0$ , ou seja, quando os coeficientes da planta possuem comportamento aleatório<sup>22</sup>. Na Figura 4.4, são apresentados os EQMs considerando  $\sigma_{\phi}^2 = 0$  (todos os demais parâmetros são mantidos). Verifica-se que, nesse caso, o aumento da ordem  $M$  não altera de forma relevante o valor do EQM em regime permanente.

---

<sup>22</sup> Para o caso em que  $\sigma_{\phi}^2 = 0$ , os coeficientes adicionais do filtro adaptativo também apresentam comportamento ruidoso, porém com uma menor variância, não impactando de forma significativa no aumento do EQM em regime permanente.



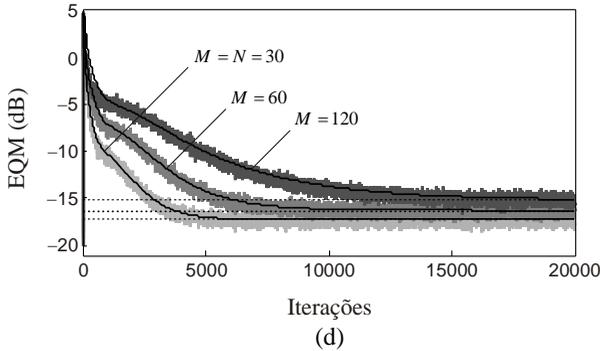
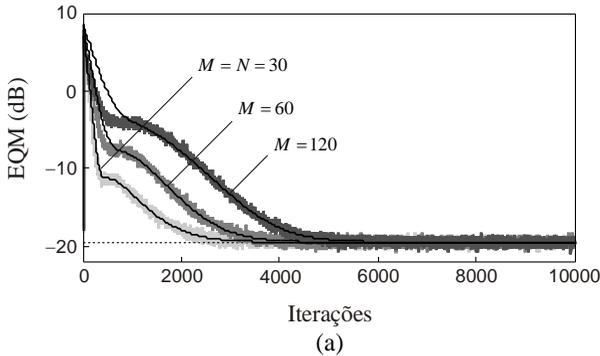


Figura 4.3 - Exemplo 1. Curvas do EQM obtidas por simulação de MC (linhas irregulares cinza) e através do modelo proposto (linhas sólidas escuras). Os valores do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. Para fins de comparação, a curva do EQM para  $M = N = 30$  é mostrada em todas as figuras. (a) e (b) Sinal de entrada branco com  $\chi = 1$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ]. (c) e (d) Sinal de entrada correlacionado com  $\chi = 110,58$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ ].



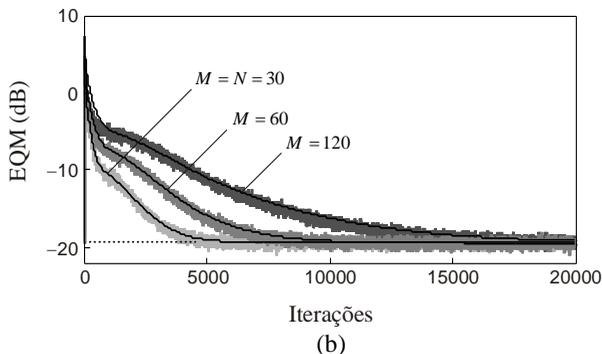


Figura 4.4 – Exemplo 1. Curvas do EQM obtidas por simulação de MC (linhas irregulares cinza) e através do modelo proposto (linhas sólidas escuras), considerando  $\sigma_{\phi}^2 = 0$ . Os valores do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) Sinal de entrada branco com  $\chi = 1$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ]. (b) Sinal de entrada correlacionado com  $\chi = 110,58$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ ].

#### 4.3.2 Exemplo 2

Agora, considerando apenas sinal de entrada branco e o mesmo cenário do Exemplo 1, o EQM em regime permanente é obtido [através de simulações de MC e da expressão de modelo (4.30)] para diversas ordens do filtro adaptativo; porém, utilizando agora o passo de adaptação ótimo [dado por (4.40)] para cada valor de  $M$ . Observa-se da Figura 4.5, que o modelo proposto descreve com precisão muito boa os resultados obtidos por simulação de MC. Além disso, verifica-se que, mesmo utilizando o passo de adaptação ótimo para cada valor de  $M$ , o EQM em regime permanente atinge seu menor valor somente quando a ordem do filtro adaptativo coincide com a ordem da planta (nesse caso  $M = N = 30$ ). Portanto, para o cenário do Exemplo 1 (especificamente, considerando planta não estacionária) observa-se que a curva do EQM em regime permanente apresenta um comportamento convexo em relação à ordem  $M$  do filtro adaptativo<sup>23</sup>. Observe que, do ponto de vista de aumento do EQM em regime permanente, o uso de  $M > N$  é menos prejudicial do que a situação de submodelagem, isto é,  $M < N$ .

<sup>23</sup> Especificamente, para o caso de planta constante, a curva do EQM em regime permanente não apresenta um comportamento convexo (como o apresentado na Figura 4.5).

Entretanto, é importante destacar que a escolha de um valor arbitrariamente elevado para  $M$  deve ser evitado para não tornar a convergência do algoritmo adaptativo demasiadamente lenta.

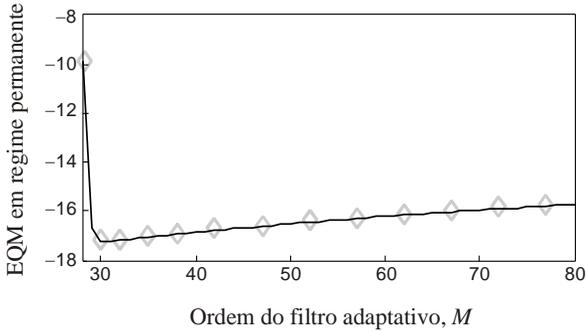
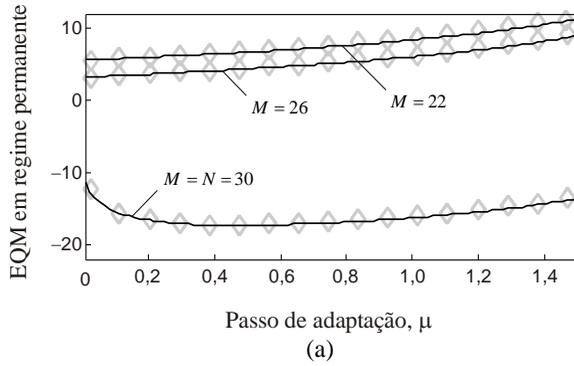


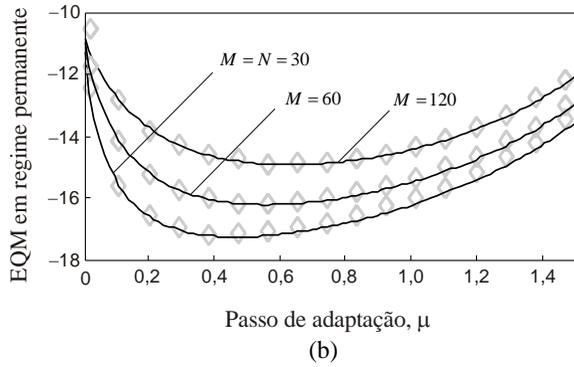
Figura 4.5 – Exemplo 2. EQM em regime permanente obtido através de simulações de MC (marcadores cinza) e do modelo proposto (linha escura) utilizando o passo de adaptação ótimo.

### 4.3.3 Exemplo 3

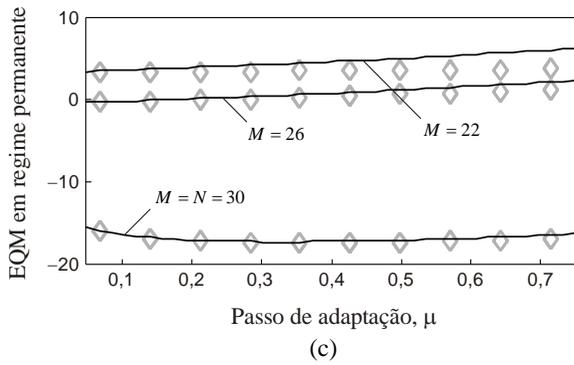
Neste exemplo, as expressões de modelo descrevendo o EQM em regime permanente são avaliadas considerando o mesmo cenário do Exemplo 1 para diversos valores de passo de adaptação. As Figuras 4.5(a) e (b) apresentam os resultados para sinal de entrada branco com  $\chi = 1$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ] e as Figuras 4.5(c) e (d), para sinal de entrada correlacionado com  $\chi = 110,58$  [obtido de (4.78) utilizando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,80$ ]. Observa-se que o modelo proposto descreve com precisão muito boa o EQM em regime permanente para todos os valores utilizados para o passo de adaptação e para todas as ordens do filtro adaptativo consideradas. Especificamente, para o caso de sinal de entrada correlacionado e  $M = 22$ , uma certa discrepância é observada entre os resultados de simulação e as previsões do modelo; entretanto, a expressão de modelo (4.67) [juntamente com (4.16), (4.68) e (4.69)] é ainda capaz de descrever a tendência de comportamento da curva do EQM em regime permanente na medida em que é aumentado o valor do passo de adaptação.



(a)



(b)



(c)

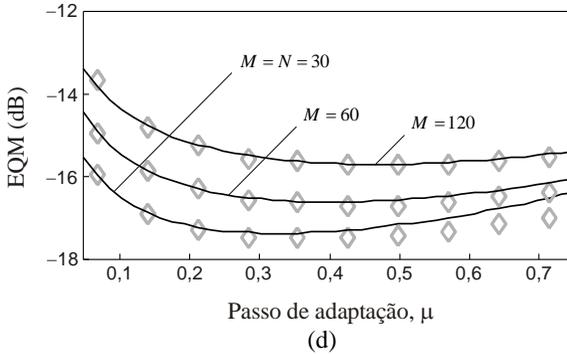


Figura 4.6 - Exemplo 3. Valores do EQM em regime permanente obtidos por simulação de MC (marcadores cinza) e através do modelo proposto (linhas escuras) considerando diferentes dimensões para os filtros adaptativos. Para fins de comparação, a curva do EQM em regime permanente para  $M = N = 30$  é mostrada em todas as figuras. (a) e (b) Sinal de entrada branco com  $\chi = 1$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ]. (c) e (d) Sinal de entrada correlacionado com  $\chi = 110,58$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ ].

#### 4.3.4 Exemplo 4

Aqui, a precisão do modelo proposto é avaliada (por meio da curva do EQM) considerando o mesmo cenário do Exemplo 1, com  $M = 28$  e diferentes níveis de perturbação na planta  $\mathbf{w}_o(n)$ , isto é,  $\sigma_\varphi^2 = 10^{-6}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-4}$ . A Figura 4.7 mostra as curvas do EQM obtidas por simulação de MC e através do modelo proposto. Observa-se novamente que o modelo proposto descreve satisfatoriamente o comportamento do algoritmo adaptativo, inclusive quando a planta  $\mathbf{w}_o(n)$  é submetida a um valor significativo de perturbação (isto é,  $\sigma_\varphi^2 = 10^{-4}$ ).

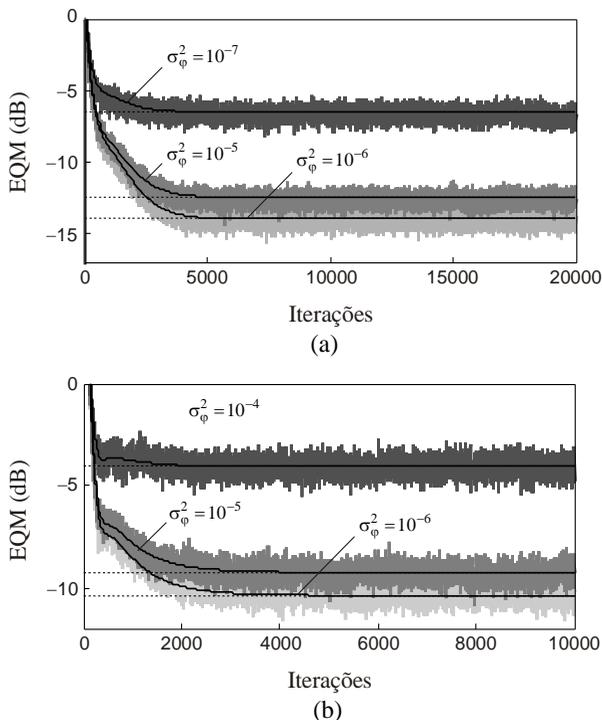


Figura 4.7 – Exemplo 4. Curvas do EQM obtidas por simulação de MC (linhas irregulares cinza) e através do modelo proposto (linhas sólidas escuras) considerando diferentes níveis de perturbação na planta  $\mathbf{w}_o(n)$ . Os valores do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) Sinal de entrada branco com  $\chi=1$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ]. (b) Sinal de entrada correlacionado obtido de (4.78) com  $\chi=110,58$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ ].

#### 4.4 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foi derivado um modelo estocástico para o algoritmo NLMS considerando que o filtro adaptativo e a planta possuem diferentes ordens. Particularmente, foram derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo e o EQM (tanto para a fase transitória quanto para o regime permanente). Adicionalmente, para o caso de sinal de entrada branco, uma expressão para determinar o passo de adaptação ótimo foi obtida. Os resultados de simulação apresentados ratificaram a precisão das

expressões de modelo derivadas para uma ampla faixa de condições de operação.

## MODELO ESTOCÁSTICO DO ALGORITMO NLMS OPERANDO EM AMBIENTES VARIANTES NO TEMPO

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, dando continuidade ao assunto tratado no capítulo anterior, o comportamento do algoritmo NLMS é analisado no contexto de uma aplicação de identificação de sistemas variantes no tempo, porém considerando agora uma representação matemática mais geral para o sistema a ser identificado (em comparação com as representações utilizadas em trabalhos anteriores [48]–[52]). Em particular, o sistema variante no tempo considerado aqui é composto de um processo de Markov de primeira ordem (caracterizando a parte transitória e não estacionária do sistema) e também de uma parte determinística de comportamento periódico, a qual pode representar, por exemplo, um sistema periodicamente variante no tempo (PTV – *periodically time varying*). Especificamente, sistemas PTV são caracterizados por possuírem parâmetros que variam periodicamente no tempo, sendo encontrados frequentemente em aplicações envolvendo sistemas de comunicação, mecânicos e eletromecânicos [57]–[63]. Em particular, a identificação de tais sistemas é uma aplicação importante que pode ser realizada utilizando algoritmos adaptativos [64] (como, por exemplo, o bem conhecido algoritmo NLMS).

Embora [49] e [50] também apresentem uma análise teórica do algoritmo NLMS em cenários periodicamente variantes no tempo, vale mencionar que existem algumas diferenças importantes entre o modelo estocástico apresentado neste capítulo e os modelos de [49] e [50]. Por exemplo, neste trabalho, é considerado que os sistemas PTV podem variar de acordo com diversos tipos de funções periódicas (não apenas uma função exponencial complexa como em [49] e [50]), o que permite avaliar o modelo proposto em uma maior variedade de cenários de operação. Além disso, visto que (em nosso caso) o EQM apresenta um comportamento oscilatório em regime permanente (em contraste com [49] e [50]), uma nova estratégia é utilizada para representá-lo. Especificamente, uma expressão fechada é derivada para determinar o valor em torno do qual o EQM oscila em regime permanente. Adicionalmente, aqui, o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo é descrito através de uma expressão em forma fechada, a qual

tem a vantagem de mostrar as diversas funções que modelam (por exemplo, exponenciais e/ou periódicos) cada coeficiente adaptativo, o que não é tão evidenciado através de uma expressão recursiva.

Este capítulo está organizado como segue. Na Seção 5.2, o algoritmo NLMS é revisitado e a formulação do sistema variante no tempo é discutida. A Seção 5.3 apresenta expressões analíticas descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo e o EQM, tanto para a fase transitente quanto para o regime permanente. Comparações entre resultados de simulação de Monte Carlo (MC) e o modelo proposto são apresentadas na Seção 5.4. Finalmente, a Seção 5.5 apresenta as conclusões do capítulo.

## 5.2 ESTABELECIMENTO DO PROBLEMA

Nesta seção, as expressões gerais do algoritmo NLMS são revisitadas e a formulação do sistema variante no tempo considerado aqui é apresentada.

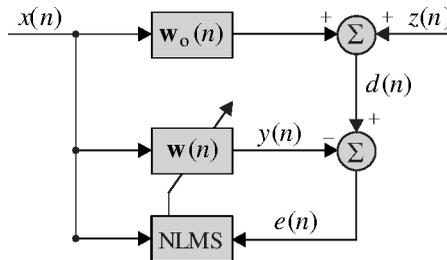


Figura 5.1 - Diagrama de blocos de uma estrutura de identificação de sistemas utilizando o algoritmo NLMS.

Especificamente, na modelagem estocástica realizada neste trabalho, considera-se que o algoritmo NLMS é utilizado em um problema de identificação de sistemas, como ilustrado na Figura 5.1. Nessa figura,  $\mathbf{w}_0(n)$  representa a resposta ao impulso do sistema variante no tempo, cujas alterações são rastreadas pelo filtro adaptativo  $\mathbf{w}(n)$  através da equação de atualização do algoritmo NLMS, isto é,

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\mathbf{x}_M(n)e(n)}{\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) + \vartheta} \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{w}(n) = [w_0(n) w_1(n) \cdots w_{M-1}(n)]^T$  denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo,  $\mathbf{x}(n) = [x(n) x(n-1) \cdots x(n-M+1)]^T$ , o vetor de

amostras do sinal de entrada,  $\mu$ , o passo de adaptação,  $\vartheta > 0$ , o parâmetro de regularização que previne divisão por zero [3], e  $e(n)$ , o sinal de erro, dado por

$$e(n) = z(n) + \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{w}_o(n) - \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{w}(n) \quad (5.2)$$

com  $z(n)$  representando o ruído de medição. Em (5.2),  $\mathbf{w}_o(n)$  é a resposta ao impulso variante no tempo do sistema a ser identificado, a qual é dada por

$$\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_p(n) + \boldsymbol{\varepsilon}(n) \quad (5.3)$$

onde

$$\mathbf{w}_p(n) = \mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)p(n) \quad (5.4)$$

denota a parte periódica de  $\mathbf{w}_o(n)$  e

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \alpha \boldsymbol{\varepsilon}(n-1) + \boldsymbol{\varphi}(n-1) \quad (5.5)$$

é um processo de Markov de primeira ordem denotando a parte transitória e não estacionária de  $\mathbf{w}_o(n)$ . Especificamente, em (5.4),  $p(n)$  é uma função periódica, a qual pode ser descrita através de uma série de Fourier truncada, isto é,

$$p(n) = P_0 + \sum_{q=1}^Q P_q \cos(q\omega_0 n + \theta_q) \quad (5.6)$$

com  $P_q$  e  $\theta_q$  denotando, respectivamente, o coeficiente e a fase de cada componente harmônico da série de Fourier [65],  $\omega_0$ , a frequência fundamental da função periódica e  $P_0$ , o valor médio de  $p(n)$ . Em particular,  $P_0$ ,  $P_q$  e  $\theta_q$  (para  $q=1, 2, \dots, Q$ ) são computados considerando que a amplitude de  $p(n)$  deve variar entre 0 e 1 [garantindo que  $\mathbf{w}_p(n)$  varie entre  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ ]. Além disso, em (5.5),  $\boldsymbol{\varphi}(n)$  é um vetor contendo amostras de um ruído gaussiano branco com variância  $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}^2$  e  $0 \leq \alpha \leq 1$  é o coeficiente que controla o nível de correlação do processo de Markov de primeira ordem  $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$  [quanto mais próximo  $\alpha$  for de 1, maior o nível de correlação de  $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$ ].

Observe que a resposta ao impulso  $\mathbf{w}_o(n)$ , dada por (5.3), pode representar diversos tipos de sistemas, por exemplo,

- a) Considerando  $p(n) = 0$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \mathbf{0}$ , tem-se  $\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_1$  [nesse caso,  $\mathbf{w}_o(n)$  representa um sistema invariante no tempo].

b) Utilizando,  $p(n)=0$ ,  $\alpha < 1$  e  $\sigma_\varphi^2 = 0$ , tem-se  $\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}(n)$ , com  $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \alpha\boldsymbol{\varepsilon}(n-1)$ ; assim,  $\mathbf{w}_o(n)$  representa um sistema variante no tempo, cuja resposta ao impulso varia de  $\mathbf{w}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}(0)$  para  $\mathbf{w}_1$ . Para o caso em que  $\sigma_\varphi^2 \neq 0$ , um comportamento aleatório é adicionado em cada coeficiente do sistema variante no tempo  $\mathbf{w}_o(n)$ .

c) Considerando,  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ ,  $p(n)=0$  e  $\alpha=1$ , tem-se  $\mathbf{w}_o(n) = \boldsymbol{\varepsilon}(n)$ , com  $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \boldsymbol{\varepsilon}(n-1) + \boldsymbol{\varphi}(n-1)$ ; assim,  $\mathbf{w}_o(n)$  é particularizado para um modelo de caminhada aleatória, também comumente utilizado para analisar algoritmos adaptativos em ambientes variantes no tempo.

d) Assumindo  $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \mathbf{0}$ , tem-se  $\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_p(n)$ , o qual representa um sistema PTV com resposta ao impulso variando entre  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ . Tendo em vista que diversas funções periódicas podem ser representadas (ou pelo menos, muito bem aproximadas) por (5.6), tem-se que  $\mathbf{w}_p(n)$  pode descrever a resposta ao impulso de diversos sistemas PTV.

e) Utilizando  $\alpha < 1$  e  $\sigma_\varphi^2 = 0$ , tem-se  $\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_p(n) + \boldsymbol{\varepsilon}(n)$ , com  $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \alpha\boldsymbol{\varepsilon}(n-1)$ ; assim,  $\mathbf{w}_o(n)$  apresenta um comportamento transitório [devido ao termo  $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$ ] e um comportamento periódico em regime permanente. Adicionalmente, considerando  $\sigma_\varphi^2 \neq 0$ , um comportamento aleatório é adicionado em cada coeficiente do sistema variante no tempo  $\mathbf{w}_o(n)$ .

Note que o modelo estocástico apresentado neste capítulo pode ser particularizado para estudar o comportamento do algoritmo NLMS para cada tipo de sistema variante no tempo mencionado anteriormente, bastando ajustar apropriadamente os parâmetros do sistema  $\mathbf{w}_o(n)$  nas expressões de modelo derivadas.

### 5.3 MODELO ESTOCÁSTICO PROPOSTO

Nesta seção, expressões de modelo são derivadas descrevendo o comportamento do algoritmo NLMS operando no ambiente variante no tempo discutido na seção anterior. Para tal, as suposições e aproximações utilizadas na derivação do modelo são, primeiramente, apresentadas como segue:

S1) O sinal de entrada é obtido de um processo gaussiano com variância  $\sigma_x^2$  e matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}_{M,M} \triangleq E[\mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_M^T(n)]$  [2]–[5].

S2) O parâmetro de regularização  $\vartheta$  é negligenciado (para propósitos de simplificação) no desenvolvimento do modelo estocástico proposto [51], [54].

S3) O ruído de medição  $z(n)$  é obtido de um processo de média zero com variância  $\sigma_z^2$ , o qual é descorrelacionado com qualquer outro sinal no sistema [2]–[5], [48]–[52].

S4) Para a condição de adaptação lenta,  $\mathbf{w}(n)$  e  $\mathbf{x}_M(n)$  são assumidos descorrelacionados [2]–[5], [48]–[52].

### 5.3.1 Comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo

Com o objetivo de derivar uma expressão descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo, primeiramente, (5.2) é substituído em (5.1), o valor esperado é computado em ambos os lados da expressão resultante e, então, as Suposições S1-S4 são consideradas. Assim,

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = (\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{R}_1)E[\mathbf{w}(n)] + \mu\mathbf{R}_1E[\mathbf{w}_o(n)] \quad (5.7)$$

com  $\mathbf{I}_{M,M}$  denotando a matriz identidade de dimensão  $M \times M$  e

$$E[\mathbf{w}_o(n)] = \mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)p(n) + \alpha^n \boldsymbol{\varepsilon}(0) \quad (5.8)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}(0)$  é o valor inicial do processo de Markov de primeira ordem  $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$  [dado por (5.5)], e

$$\mathbf{R}_1 = E \left[ \begin{array}{c} \mathbf{x}_M(n)\mathbf{x}_M^T(n) \\ \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) \end{array} \right] \quad (5.9)$$

denota a matriz de autocorrelação normalizada, a qual pode ser expressa como (veja Apêndice D)

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_M \mathbf{H}_1 \mathbf{Q}_M^T \quad (5.10)$$

onde  $\mathbf{Q}_M$  é a matriz de autovetores originada da decomposição em autovalores de  $\mathbf{R}_{M,M}$  (isto é,  $\mathbf{R}_{M,M} = \mathbf{Q}_M \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T$  [55], com  $\boldsymbol{\Lambda}_M$  representando uma matriz diagonal contendo os autovalores de  $\mathbf{R}_{M,M}$ ).

Além disso,  $\mathbf{H}_1$  é uma matriz diagonal, para a qual diferentes soluções

são obtidas dependendo se o sinal de entrada gaussiano é branco ou correlacionado (para detalhes veja Apêndice D).

### 5.3.2 Expressão fechada para o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo

Nesta seção, partindo da expressão recursiva (5.7), uma expressão fechada descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo é obtida. Tal formulação tem a vantagem de mostrar os diversos comportamentos (por exemplo, exponenciais e/ou periódicos) que modelam cada coeficiente adaptativo, tanto para fase transitória quanto em regime permanente. Assim, visando derivar uma expressão fechada descrevendo o comportamento dos coeficientes do filtro adaptativo, primeiramente, (5.10) é utilizado em (5.7) e a expressão resultante é pre- e pós-multiplicada por  $\mathbf{Q}_M^T$  e  $\mathbf{Q}_M$ , respectivamente. Portanto,

$$E[\mathbf{w}'(n+1)] = (\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)E[\mathbf{w}'(n)] + \mu\mathbf{H}_1E[\mathbf{w}'_o(n)] \quad (5.11)$$

com

$$E[\mathbf{w}'(n)] = \mathbf{Q}_M^T E[\mathbf{w}(n)] \quad (5.12)$$

e

$$E[\mathbf{w}'_o(n)] = \mathbf{Q}_M^T E[\mathbf{w}_o(n)]. \quad (5.13)$$

Tendo em vista que todas as matrizes em (5.11) são diagonais, tem-se que cada coeficiente de  $E[\mathbf{w}'(n)]$  é atualizado de forma independente dos demais, isto é,

$$E[w'_i(n+1)] = [1 - \mu H_1(i)]E[w'_i(n)] + \mu H_1(i)E[w'_{o,i}(n)] \quad (5.14)$$

onde  $H_1(i)$  denota o  $i$ -ésimo elemento da diagonal de  $\mathbf{H}_1$  e  $E[w'_i(n)]$  e  $w'_{o,i}(n)$  representam, respectivamente, os  $i$ -ésimos coeficientes de  $E[\mathbf{w}'(n)]$  e  $E[\mathbf{w}'_o(n)]$ . Note que (5.14) pode ser interpretada como uma equação de diferenças linear com coeficientes constantes [a saber,  $1 - \mu H_1(i)$  e  $\mu H_1(i)$ ], com entrada  $E[w'_{o,i}(n)]$ . Portanto, uma expressão fechada descrevendo o comportamento médio de cada coeficiente  $E[w'_i(n)]$  pode ser obtida através da determinação da transformada Z de (5.14), resultando em

$$Z\{E[w'_i(n)]\} = \frac{\mu H_1(i)}{z - 1 + \mu H_1(i)} Z\{E[w'_{o,i}(n)]\} \quad (5.15)$$

onde  $Z\{E[w'_i(n)]\}$  e  $Z\{E[w'_{0,i}(n)]\}$  são as transformadas  $Z$  de  $E[w'_i(n)]$  e  $E[w'_{0,i}(n)]$ , respectivamente. Agora, computando a transformada  $Z$  de cada elemento de (5.13), utilizando os resultados obtidos em (5.15), computando a transformada  $Z$  inversa e expressando o resultado na forma vetorial, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}'(n)] &= \Gamma_1(n) \mathbf{Q}_M^T [\mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) P_0] \\ &\quad - [\Gamma_2(n) + \Gamma_3(n)] \mathbf{Q}_M^T (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \\ &\quad + \Gamma_3(n) \mathbf{Q}_M^T \boldsymbol{\varepsilon}(0) \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde  $\Gamma_1(n)$ ,  $\Gamma_2(n)$ ,  $\Gamma_3(n)$  e  $\Gamma_4(n)$  são matrizes diagonais com elementos dados por

$$\Gamma_1(n, i) = 1 - [1 - \mu H_1(i)]^n \quad (5.17)$$

$$\Gamma_2(n, i) = \sum_{q=1}^Q A_{i,q} P_q \cos(q\omega_0 n + \theta_q + \psi_{i,q}) \quad (5.18)$$

$$\Gamma_3(n, i) = \sum_{q=1}^Q B_{i,q} P_q [1 - \mu H_1(i)]^n \quad (5.19)$$

e

$$\Gamma_4(n, i) = C_i \{ \alpha^n - [1 - \mu H_1(i)]^n \} \quad (5.20)$$

onde  $n \geq 0$  e  $i$  denota o  $i$ -ésimo elemento da diagonal de cada matriz. Além disso,

$$A_{i,q} = \frac{\mu H_1(i)}{\sqrt{1 - 2\cos(q\omega_0)[1 - \mu H_1(i)] + [1 - \mu H_1(i)]^2}} \quad (5.21)$$

$$B_{i,q} = \mu H_1(i) \frac{\{ [1 - \mu H_1(i)] \cos(q\omega_0) - \cos(q\omega_0 - \theta_q) \}}{1 - 2\cos(q\omega_0)[1 - \mu H_1(i)] + [1 - \mu H_1(i)]^2} \quad (5.22)$$

$$C_i = \frac{\mu H_1(i)}{\alpha - [1 - \mu H_1(i)]} \quad (5.23)$$

e

$$\psi_{i,q} = \arctan \left[ \frac{\text{sen}(q\omega_0)}{1 - \mu H_1(i) - \cos(q\omega_0)} \right]. \quad (5.24)$$

Finalmente, utilizando (5.12) e (5.16), a expressão fechada do comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{w}(n)] &= \mathbf{Q}_M \Gamma_1(n) \mathbf{Q}_M^T [\mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) P_0] \\
&\quad - \mathbf{Q}_M [\Gamma_2(n) + \Gamma_3(n)] \mathbf{Q}_M^T (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \\
&\quad + \mathbf{Q}_M \Gamma_3(n) \mathbf{Q}_M^T \boldsymbol{\varepsilon}(0).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Analisando as expressões anteriores, os seguintes pontos podem ser destacados:

a) Cada termo em (5.25) aparece como resposta a um componente particular do sistema variante no tempo  $\mathbf{w}_o(n)$ . Por exemplo, o primeiro termo do lado direito de (5.25), o qual apresenta um comportamento exponencial, surge como resposta à parcela constante de  $\mathbf{w}_o(n)$ . O segundo termo do lado direito de (5.25), de comportamento exponencial e periódico, surge como resposta à parte periódica de (5.25). Finalmente, o terceiro termo do lado direito de (5.25), de comportamento exponencial, surge como resposta ao componente transitório  $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$  de  $\mathbf{w}_o(n)$ .

b) Em particular, quando o sinal de entrada  $x(n)$  é gaussiano e branco, tem-se  $\mathbf{Q}_M = \mathbf{I}_{M,M}$  e  $H_1(i) = 1/M$  (veja Apêndice D). Assim, (5.25) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
E[\mathbf{w}(n)] &= [\mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) P_0] r_1(n) \\
&\quad - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) [r_2(n) + r_3(n)] + \boldsymbol{\varepsilon}(0) r_4(n)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

com

$$r_1(n) = 1 - \left(1 - \frac{\mu}{M}\right)^n \tag{5.27}$$

$$r_2(n) = \sum_{q=1}^Q A_q P_q \cos(q\omega_0 n + \theta_q + \psi_q) \tag{5.28}$$

$$r_3(n) = \sum_{q=1}^Q B_q P_q \left(1 - \frac{\mu}{M}\right)^n \tag{5.29}$$

e

$$r_4(n) = C \left[ \alpha^n - \left(1 - \frac{\mu}{M}\right)^n \right] \tag{5.30}$$

onde  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $C$  e  $\psi_q$  são computados, respectivamente, por (5.21), (5.22), (5.23) e (5.24) usando  $H_1(i) = 1/M$ .

### 5.3.3 Coeficientes do filtro adaptativo em regime permanente

Tendo em vista o cenário variante no tempo apresentado na Seção 5.2, tem-se que os coeficientes de  $\mathbf{w}(n)$  variam em regime permanente visando rastrear as alterações periódicas de  $\mathbf{w}_o(n)$ . Assim, nesta seção, uma expressão descrevendo o comportamento do filtro adaptativo em regime permanente [denotado aqui  $\mathbf{w}_s(n)$ ] é derivada. Em particular, considerando  $0 < \mu < 2/\max[H_1(i)]$  [o que é necessário para garantir estabilidade no sentido médio, como pode ser deduzido de (5.17), (5.19) e (5.20)], em regime permanente, tem-se  $\Gamma_1(n) = \mathbf{I}_{M,M}$ ,  $\Gamma_3(n) = \Gamma_4(n) = \mathbf{0}_{M,M}$  e o filtro adaptativo pode ser expresso como

$$E[\mathbf{w}_s(n)] = \mathbf{w}_1 - \mathbf{Q}_M [P_0 \mathbf{I}_{M,M} + \Gamma_2(n)] \mathbf{Q}_M^T (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) + \delta(\alpha - 1) \boldsymbol{\varepsilon}(0) \quad (5.31)$$

onde  $\delta(\alpha - 1)$  é a função delta de Kronecker, a qual é igual a 1 quando  $\alpha = 1$  e 0 para os demais valores de  $\alpha$ ; assim, o último termo do lado direito de (5.31) existe apenas se  $\alpha = 1$ .

Agora, analisando (5.18) e (5.31) e tendo em vista que

$$E[\mathbf{w}_{o,s}(n)] = \mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)p(n) + \delta(\alpha - 1)\boldsymbol{\varepsilon}(0) \quad (5.32)$$

é o comportamento médio da resposta ao impulso  $\mathbf{w}_o(n)$  em regime permanente, os seguintes pontos podem ser destacados:

- a) Os valores das magnitudes  $A_{i,q}$  e dos atrasos de fase  $\psi_{i,q}$  (para  $i = 1, 2, \dots, M - 1$ ) em  $\Gamma_2(n)$  [a qual aparece em (5.31)] indicam o quão bom é o rastreamento do sistema variante no tempo pelo filtro adaptativo. Em particular, o rastreamento é melhorado quando  $A_{i,q} \rightarrow 1$  e  $\psi_{i,q} \rightarrow 0$ . Especificamente, na situação ideal [isto é,  $A_{i,q} = 1$  e  $\psi_{i,q} = 0$  para todo  $i$ ], tem-se

$$\begin{aligned} P_0 + \Gamma_2(n, i) &= P_0 + \sum_{q=1}^Q P_q \cos(q\omega_0 n + \theta_q) \\ &= p(n) \end{aligned} \quad (5.33)$$

e, conseqüentemente, (5.31) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_s(n)] &= \mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)p(n) + \delta(\alpha - 1)\boldsymbol{\varepsilon}(0) \\ &= E[\mathbf{w}_{o,s}(n)]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Nesse caso, o filtro adaptativo rastreia perfeitamente o comportamento médio da resposta ao impulso  $\mathbf{w}_o(n)$  em regime permanente. Entretanto, é importante destacar que geralmente (5.34) não pode ser obtida na prática, pois isso exigiria um valor elevado para o passo de adaptação (usualmente maior do que o limite de estabilidade); isto é ilustrado na Figura 5.2.

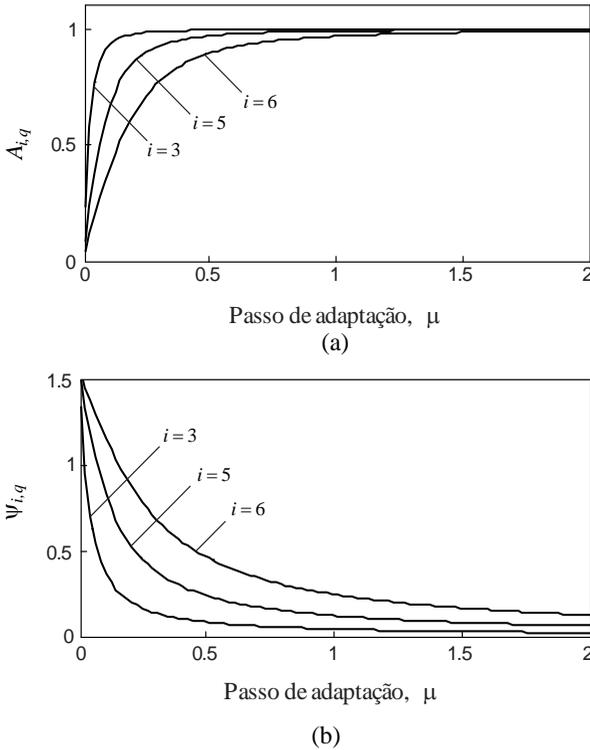


Figura 5.2 - Comportamento de  $A_{i,q}$  (a) e  $\Psi_{i,q}$  (b) com respeito ao passo de adaptação (considerando os mesmos parâmetros do terceiro cenário do Exemplo 1 para  $i=3, 5$  e  $6$ ).

b) Para o caso de sinal de entrada gaussiano branco, tem-se  $H_1(i) = 1/M$  (veja Apêndice D). Assim,

$$P_0 + \Gamma_2(n, i) = \sum_{q=1}^Q A_q P_q \cos[q\omega_0 n + \theta_q + \psi_q] \quad (5.35)$$

$$\triangleq p_s(n).$$

Logo,  $P_0 \mathbf{I}_{M,M} + \Gamma_2(n) = p_s(n) \mathbf{I}_{M,M}$ . Adicionalmente, tendo em vista que nesse caso  $\mathbf{Q}_M = \mathbf{I}_{M,M}$ , (5.31) pode ser simplificada para

$$E[\mathbf{w}_s(n)]_{\text{branco}} = \mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) p_s(n) + \delta(\alpha - 1) \mathbf{e}(0). \quad (5.36)$$

Em particular, tem-se que o comportamento periódico do  $i$ -ésimo coeficiente de  $\mathbf{w}_p(n)$  [dado por (5.4)] resulta em valor não nulo para o correspondente elemento de  $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ , o que de acordo com (5.36) impõe variações apenas no  $i$ -ésimo coeficiente de  $E[\mathbf{w}_s(n)]_{\text{branco}}$ . Em outras palavras, quando o sinal de entrada  $x(n)$  é branco, cada coeficiente variante no tempo de  $\mathbf{w}_p(n)$  é rastreado exclusivamente pelo correspondente coeficiente do filtro adaptativo. Tal comportamento não ocorre quando o sinal de entrada  $x(n)$  é correlacionado, como pode ser verificado de (5.31) dado que  $\mathbf{Q}_M$  não é uma matriz diagonal nesse caso.

#### 5.3.4 Erro quadrático médio

Nesta seção, visando derivar uma expressão analítica para descrever o erro quadrático médio (EQM), primeiramente, define-se o vetor de erro do filtro adaptativo como

$$\mathbf{v}(n) \triangleq \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_o(n) \quad (5.37)$$

Agora, utilizando (5.37), o sinal de erro (5.2) pode ser reescrito como

$$e(n) = z(n) - \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{v}(n). \quad (5.38)$$

Então, elevando  $e(n)$  ao quadrado, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S1, S3 e S4, o EQM é expresso como

$$E[e^2(n)] \triangleq J(n) \quad (5.39)$$

$$= J_{\min} + J_{\text{ex}}(n)$$

com

$$J_{\min} = \sigma_z^2 \quad (5.40)$$

denotando o EQM mínimo que pode ser atingido em regime permanente e

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= \text{tr}[\mathbf{R}_{M,M} \mathbf{K}(n)] \\ &= \boldsymbol{\lambda}_M^T \mathbf{k}'(n) \end{aligned} \quad (5.41)$$

representando o EQM em excesso (EQME), onde  $\boldsymbol{\lambda}_M$  caracteriza o vetor contendo os autovalores da matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}_{M,M}$  e  $\mathbf{k}'(n)$ , o vetor dos elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n) = \mathbf{Q}_M^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q}_M$ , sendo  $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)]$  a matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo. Note de (5.41) que o EQM é completamente determinado apenas se os elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n)$  são conhecidos.

### 5.3.5 Matriz de correlação do vetor de erro do filtro adaptativo

Nesta seção, visando completar a derivação do EQM, uma expressão recursiva é derivada para computar os elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n)$ . Para tal, inicialmente a regra de atualização (5.1) é reescrita em termos de  $\mathbf{v}(n)$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \left[ \mathbf{I}_{M,M} - \mu \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n) + \mathfrak{G}} \right] \mathbf{v}(n) \\ &\quad + \mu \frac{\mathbf{x}_M(n) z(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n) + \mathfrak{G}} + (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) u(n) \\ &\quad + (1 - \alpha) \boldsymbol{\varepsilon}(n) - \boldsymbol{\phi}(n) \end{aligned} \quad (5.42)$$

com

$$u(n) = p(n+1) - p(n). \quad (5.43)$$

Agora, computando o produto externo  $\mathbf{v}(n+1) \mathbf{v}^T(n+1)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as Suposições S2-S4, obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(n+1) = & \mathbf{K}(n) - \mu \mathbf{K}(n) \mathbf{R}_1 - \mu \mathbf{R}_1 \mathbf{K}(n) + \mu^2 \mathbf{R}_5(n) + \mu^2 J_{\min} \mathbf{R}_4 \\
& + u^2(n)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T \\
& + (1 - \alpha)[(\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{R}_1) \mathbf{K}_2(n) + \mathbf{K}_2^T(n)(\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{R}_1)] \\
& + u(n)(\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{R}_1) \mathbf{E}[\mathbf{v}(n)](\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T \\
& + u(n)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \mathbf{E}[\mathbf{v}^T(n)](\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{R}_1) \\
& + (1 - \alpha) \alpha^n u(n)[(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \boldsymbol{\varepsilon}^T(0) + \boldsymbol{\varepsilon}(0)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T] \\
& + (1 - \alpha)^2 \mathbf{K}_3(n) + \sigma_\varphi^2 \mathbf{I}_{M,M}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

com  $\mathbf{K}_2(n) = \mathbf{E}[\mathbf{v}(n) \boldsymbol{\varepsilon}^T(n)]$ ,  $\mathbf{K}_3(n) = \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(n) \boldsymbol{\varepsilon}^T(n)]$ , e

$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{[\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)]^2} \right\} \tag{5.45}$$

e

$$\mathbf{R}_5(n) = \mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{[\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n)]^2} \right\} \tag{5.46}$$

denotando os momentos de quarta ordem do sinal de entrada  $x(n)$  [66]. Agora, visando obter uma expressão recursiva para determinar  $\mathbf{K}_2(n)$ , primeiramente, o produto externo  $\mathbf{v}(n+1) \boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)$  deve ser computado e, então, o valor esperado da expressão resultante deve ser calculado (para tal, as Suposições S2-S4 são utilizadas). Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_2(n+1) = & \alpha(\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{R}_1) \mathbf{K}_2(n) + \alpha^{n+1} u(n)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \boldsymbol{\varepsilon}^T(0) \\
& + \alpha(1 - \alpha) \mathbf{K}_3(n) - \sigma_\varphi^2 \mathbf{I}_{M,M}.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Similarmente, para determinar  $\mathbf{K}_3(n)$ , computa-se o produto externo  $\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) \boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)$ , toma-se o valor esperado da expressão resultante e considera-se as Suposições S2-S4. Portanto,

$$\mathbf{K}_3(n+1) = \alpha^2 \mathbf{K}_3(n) + \sigma_\varphi^2 \mathbf{I}_{M,M}. \tag{5.48}$$

Em particular, a série geométrica (5.48), pode ser reescrita como

$$\mathbf{K}_3(n) = \alpha^{2n} \mathbf{K}_3(0) + \frac{1 - \alpha^{2n}}{1 - \alpha^2} \sigma_\varphi^2 \mathbf{I}_{M,M}. \tag{5.49}$$

Agora, substituindo (5.49) em (5.44) e (5.47), pre- e pós-multiplicando a expressão resultante por  $\mathbf{Q}_M^T$  e  $\mathbf{Q}_M$ , respectivamente, e considerando apenas os elementos da diagonal principal, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'(n+1) &= [\mathbf{I}_{M,M} - 2\mu\mathbf{H}_1 + \mu^2(2\mathbf{T} + \mathbf{L})]\mathbf{k}'(n) \\ &\quad + 2(1-\alpha)(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)\mathbf{k}'_2(n) \\ &\quad + \mu^2 J_{\min} \mathbf{r}_4 + 2u(n)(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)\boldsymbol{\gamma}(n) \\ &\quad + (1-\alpha)^2 \alpha^{2n} \boldsymbol{\eta} + u^2(n)\boldsymbol{\xi} \\ &\quad + 2(1-\alpha)\alpha^n u(n)\boldsymbol{\rho} + \left[ \frac{1-\alpha}{1+\alpha}(1-\alpha^{2n}) + 1 \right] \sigma_\phi^2 \mathbf{1} \end{aligned} \quad (5.50)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'_2(n+1) &= \alpha(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)\mathbf{k}'_2(n) + \alpha^{n+1}u(n)\boldsymbol{\rho} \\ &\quad + (1-\alpha)\alpha^{2n+1} \boldsymbol{\eta} + \left[ \frac{\alpha}{1+\alpha}(1-\alpha^{2n}) - 1 \right] \sigma_\phi^2 \mathbf{1} \end{aligned} \quad (5.51)$$

onde  $\mathbf{1}$  é um vetor de dimensão  $M$  com 1's e

$$\boldsymbol{\gamma}(n) = \text{diag}\{\mathbf{Q}_M^T \mathbf{E}[\mathbf{v}(n)](\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T \mathbf{Q}_M\} \quad (5.52)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \text{diag}[\mathbf{Q}_M^T (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T \mathbf{Q}_M] \quad (5.53)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \text{diag}[\mathbf{Q}_M^T (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)\boldsymbol{\varepsilon}^T(0)\mathbf{Q}_M] \quad (5.54)$$

e

$$\boldsymbol{\eta} = \text{diag}[\mathbf{Q}_M^T \boldsymbol{\varepsilon}(0)\boldsymbol{\varepsilon}^T(0)\mathbf{Q}_M]. \quad (5.55)$$

Particularmente, em (5.50), a matriz diagonal  $\mathbf{T}$ , a matriz cheia  $\mathbf{L}$  e o vetor  $\mathbf{r}_4$  são provenientes da relação  $\text{diag}[\mathbf{Q}_M^T \mathbf{R}_5(n)\mathbf{Q}_M] = (2\mathbf{T} + \mathbf{L})\mathbf{k}'(n)$  e  $\text{diag}(\mathbf{Q}_M^T \mathbf{R}_4 \mathbf{Q}_M) = \mathbf{r}_4$ . Especificamente, o vetor  $\mathbf{r}_4$  e as matrizes  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{L}$  possuem soluções distintas dependendo se o sinal de entrada gaussiano é branco ou correlacionado (para detalhes veja Apêndices D e F).

Assim, utilizando (5.50), o EQM [dado por (5.39)-(5.41)] pode ser agora completamente determinado.

## 5.3.6 EQM em regime permanente

Tendo em vista que o EQM apresenta em regime permanente um comportamento oscilatório, nesta seção, uma expressão fechada para determinar o valor em torno do qual tais oscilações ocorrem é derivada (visando caracterizar o EQM em regime permanente). Especificamente, tal valor pode ser determinado por

$$\bar{J} = J_{\min} + \bar{J}_{\text{ex}} \quad (5.56)$$

com  $J_{\min}$  dado por (5.40) e

$$\bar{J}_{\text{ex}} = \lambda_M^T \bar{\mathbf{k}}' \quad (5.57)$$

onde  $\bar{\mathbf{k}}'$  denota o valor médio de  $\mathbf{k}'(n)$  em regime permanente. Para computar  $\bar{\mathbf{k}}'$ , uma expressão descrevendo o vetor de erro do filtro adaptativo em regime permanente deve ser primeiramente obtida. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{v}_s(n)] &= \mathbf{E}[\mathbf{w}_s(n)] - \mathbf{E}[\mathbf{w}_{o,s}(n)] \\ &= -\mathbf{Q}_M \tilde{\Gamma}(n) \mathbf{Q}_M^T (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde  $\tilde{\Gamma}(n)$  é uma matriz diagonal com elementos dados por

$$\tilde{\Gamma}(n, i) = P_0 + \Gamma_2(n, i) - p(n). \quad (5.59)$$

Então, substituindo (5.58) em (5.52) e o resultado obtido em (5.50), o comportamento de  $\mathbf{k}'(n)$  em regime permanente pode ser descrito por

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'_s(n+1) &= [\mathbf{I}_{M,M} - 2\mu\mathbf{H}_1 + \mu^2(2\mathbf{T} + \mathbf{L})]\mathbf{k}'_s(n) \\ &\quad + 2(1-\alpha)(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)\mathbf{k}'_{2,s}(n) + \left\{ \frac{1-\alpha}{1+\alpha} [1 - \delta(\alpha-1)] + 1 \right\} \sigma_\varphi^2 \mathbf{1} \\ &\quad + \mu^2 J_{\min} \mathbf{r}_4 + [u^2(n)\mathbf{I}_{M,M} - 2(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)\tilde{\Gamma}(n)u(n)]\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (5.60)$$

onde  $\mathbf{k}'_{2,s}(n)$  é  $\mathbf{k}'_2(n)$  em regime permanente, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'_{2,s}(n+1) &= \alpha(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)\mathbf{k}'_{2,s}(n) + \delta(\alpha-1)u(n)\boldsymbol{\rho} \\ &\quad + \left\{ \frac{\alpha}{1+\alpha} [1 - \delta(\alpha-1)] - 1 \right\} \sigma_\varphi^2 \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Em particular, verifica-se que o comportamento oscilatório de  $\mathbf{k}'_s(n)$  deve-se aos termos  $u^2(n)$  e  $\tilde{\Gamma}(n)u(n)$  em (5.60) e ao termo  $u(n)$  em (5.61). Agora, para obter  $\bar{\mathbf{k}}'$ , o valor médio das funções periódicas  $u^2(n)$ ,

$\tilde{\Gamma}(n,i)u(n)$  e  $u(n)$  devem ser determinados. Especificamente, o valor médio de  $u^2(n)$  é dado por

$$\begin{aligned}\overline{u^2(n)} &= g_1 \\ &= \sum_{q=1}^Q P_q^2 [1 - \cos(q\omega_0)].\end{aligned}\quad (5.62)$$

Para o valor médio de  $\tilde{\Gamma}(n,i)u(n)$ , tem-se

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{\Gamma}(n,i)u(n)} &= G(i) \\ &= \frac{g_1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q P_q^2 A_{i,q} [\cos(q\omega_0 - \psi_{i,q}) - \cos(\psi_{i,q})].\end{aligned}\quad (5.63)$$

O valor médio de  $u(n)$  é

$$\overline{u(n)} = 0. \quad (5.64)$$

Agora, substituindo (5.64) em (5.61), o valor médio de  $\mathbf{k}'_{2,s}(n)$  pode ser computado por

$$\overline{\mathbf{k}'_{2,s}} = \left\{ \frac{\alpha}{1+\alpha} [1 - \delta(\alpha - 1)] - 1 \right\} \sigma_\phi^2 [(1-\alpha)\mathbf{I}_{M,M} + \mu\mathbf{H}_1]^{-1} \mathbf{1}. \quad (5.65)$$

Substituindo (5.62), (5.63) e (5.65) em (5.60) e considerando  $\mathbf{k}'_s(n+1) = \mathbf{k}'_s(n) = \bar{\mathbf{k}}'$ , obtém-se

$$\bar{\mathbf{k}}' = \mathbf{B}^{-1} \left\{ \mu^2 J_{\min} \mathbf{r}_4 + \frac{2\mu\sigma_\phi^2}{1+\alpha} \mathbf{f} + [g_1 \mathbf{I}_{M,M} - 2(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)\mathbf{G}] \boldsymbol{\xi} \right\} \quad (5.66)$$

onde  $\mathbf{f} = \mathbf{H}_1[\mathbf{I}_{M,M} - \alpha(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)]^{-1} \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{G}$  é uma matriz diagonal com elementos dados por (5.63) e

$$\mathbf{B} = 2\mu \left[ (\mathbf{H}_1 - \mu\mathbf{T}) - \frac{\mu}{2} \mathbf{L} \right]. \quad (5.67)$$

Então, substituindo (5.66) em (5.57), tem-se

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{J}}_{\text{ex}} &= \lambda_M^T \mathbf{B}^{-1} \left\{ \mu^2 J_{\min} \mathbf{r}_4 + \frac{2\mu\sigma_\phi^2}{1+\alpha} \mathbf{f} + [g_1 \mathbf{I}_{M,M} - 2(\mathbf{I}_{M,M} - \mu\mathbf{H}_1)\mathbf{G}] \boldsymbol{\xi} \right\}. \\ &\quad (5.68)\end{aligned}$$

Assim, o valor em torno do qual o EQM oscila em regime permanente pode ser completamente determinado através de (5.68) e (5.56). Além disso, destaca-se que:

a) A expressão de  $\bar{J}_{\text{ex}}$  pode ser decomposta como

$$\bar{J}_{\text{ex}} = \bar{J}_{\text{ex},0} + \bar{J}_{\text{ex},1} \quad (5.69)$$

com

$$\bar{J}_{\text{ex},0} = \mu^2 J_{\text{min}} \lambda_M^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r}_4 \quad (5.70)$$

e

$$\bar{J}_{\text{ex},1} = \lambda_M^T \mathbf{B}^{-1} \left\{ \frac{2\mu\sigma_\varphi^2}{1+\alpha} \mathbf{f} + [g_1 \mathbf{I}_{M,M} - 2(\mathbf{I}_{M,M} - \mu \mathbf{H}_1) \mathbf{G}] \boldsymbol{\xi} \right\}. \quad (5.71)$$

Especificamente,  $\bar{J}_{\text{ex},0}$  é a parte do EQME em regime permanente relacionada com o ruído do gradiente no processo de adaptação [56], o qual ocorre em ambos os ambientes variante e invariante no tempo. Por outro lado,  $\bar{J}_{\text{ex},1}$  é a parte do EQME em regime permanente relacionada exclusivamente com o atraso do rastreamento de  $\mathbf{w}_o(n)$  por  $\mathbf{w}(n)$  [56]; ocorrendo, portanto, somente em ambientes variantes no tempo.

É bem conhecido da literatura [2]–[5], [56] que  $\bar{J}_{\text{ex},0}$  é uma função crescente com respeito ao passo de adaptação  $\mu$ , enquanto  $\bar{J}_{\text{ex},1}$  é uma função decrescente de  $\mu$ . Visando ilustrar esse comportamento antagônico, a Figura 5.3 mostra  $\bar{J}_{\text{ex},0}$ ,  $\bar{J}_{\text{ex},1}$  e o resultante  $\bar{J}_{\text{ex}}$  para diversos valores de passo de adaptação, utilizando os mesmos parâmetros do Exemplo 1 (primeiro cenário). Nota-se que  $\bar{J}_{\text{ex}}$  exhibe forma convexa, implicando que existe um valor de passo  $\mu_o$  que minimiza  $\bar{J}_{\text{ex}}$  (e, conseqüentemente  $\bar{J}$ ). Em particular, a derivação de uma expressão fechada para obter  $\mu_o$  não pôde ser obtida devido à forma intrincada de (5.68); entretanto,  $\mu_o$  pode ser determinado numericamente para diversas condições de operação utilizando (5.68).

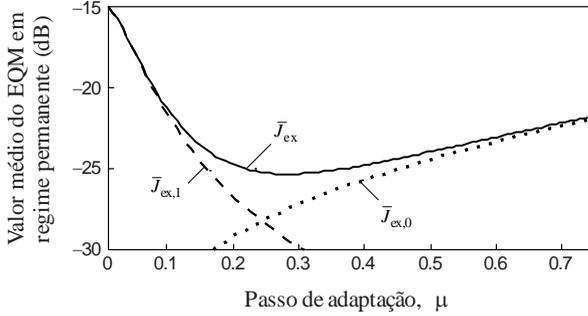


Figura 5.3 - Comportamento do valor médio do EQME em regime permanente em relação ao passo de adaptação.

b) Tendo em vista que para sinal de entrada gaussiano branco os elementos de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{L}$  e o vetor  $\mathbf{r}_4$  são dados, respectivamente, por (F.12), (F.13) e (D.41), tem-se que a inversa de  $\mathbf{B}$  pode ser determinada analiticamente utilizando a fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury [55]. Assim,

$$\mathbf{B}_{\text{branco}}^{-1} = \frac{M(M+2)}{2\mu(M+2-\mu)} \left[ \mathbf{I}_{M,M} + \frac{\mu \mathbf{1}\mathbf{1}^T}{(M+2)(2-\mu)} \right]. \quad (5.72)$$

Agora, substituindo (5.72) em (5.68) e considerando  $\lambda_M = \sigma_x^2 \mathbf{1}$ , obtém-se

$$\bar{J}_{\text{ex}}|_{\text{branco}} = \bar{J}_{\text{ex},0}|_{\text{branco}} + \bar{J}_{\text{ex},1}|_{\text{branco}} \quad (5.73)$$

com

$$\bar{J}_{\text{ex},0}|_{\text{branco}} = \frac{\mu}{(2-\mu)} \frac{M}{(M-2)} J_{\min} \quad (5.74)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\text{ex},1}|_{\text{branco}} = & \frac{\sigma_x^2 M}{\mu(2-\mu)} \left\{ \frac{2\mu\sigma_\phi^2 M}{(1+\alpha)[M-\alpha(M-\mu)]} \right. \\ & \left. + \left[ g_1 - 2 \left( \frac{M-\mu}{M} \right) g_2 \right] \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.75)$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma euclidiana e

$$g_2 = \frac{g_1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^Q P_q^2 A_q [\cos(q\omega_0 - \psi_q) - \cos(\psi_q)]. \quad (5.76)$$

## 5.4 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, visando avaliar a precisão do modelo estocástico proposto, os resultados obtidos das simulações de MC (média de 300 realizações independentes) são comparados com as predições do modelo em diversas condições de operação (isto é, cobrindo diferentes sistemas variantes no tempo, vários valores de passo de adaptação e diferentes níveis de correlação do sinal de entrada). Em todos os exemplos, a menos que seja mencionado o contrário, a variância do ruído de medição é  $\sigma_z^2 = 10^{-2}$ , o parâmetro de regularização,  $\vartheta = 10^{-3}$  e o sinal de entrada  $x(n)$  é um processo gaussiano de média zero, dado por

$$x(n) = -\beta_1 x(n-1) - \beta_2 x(n-2) + v(n) \quad (5.77)$$

onde  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os coeficientes do processo AR(2) e  $v(n)$  é um ruído gaussiano branco com variância determinada por

$$\sigma_v^2 = \left( \frac{1 - \beta_2}{1 + \beta_2} \right) [(1 + \beta_2)^2 - \beta_1^2]. \quad (5.78)$$

Note que, considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $x(n)$  é reduzido a um ruído gaussiano branco com variância unitária [isto é,  $x(n) = v(n)$  com  $\sigma_v^2 = 1$ ].

## 5.4.1 Exemplo 1

Neste exemplo, a precisão do modelo proposto é avaliada para diferentes níveis de correlação do sinal de entrada. Para tal, considera-se aqui um cenário no qual a resposta ao impulso do sistema [isto é,  $\mathbf{w}_o(n)$  dada por (5.3)] varia periodicamente entre os vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  (cujas amostras são ilustradas na Figura 5.5) de acordo com a seguinte função periódica:

$$p(n) = 0,5 + 0,5 \cos(\omega_0 n) \quad (5.79)$$

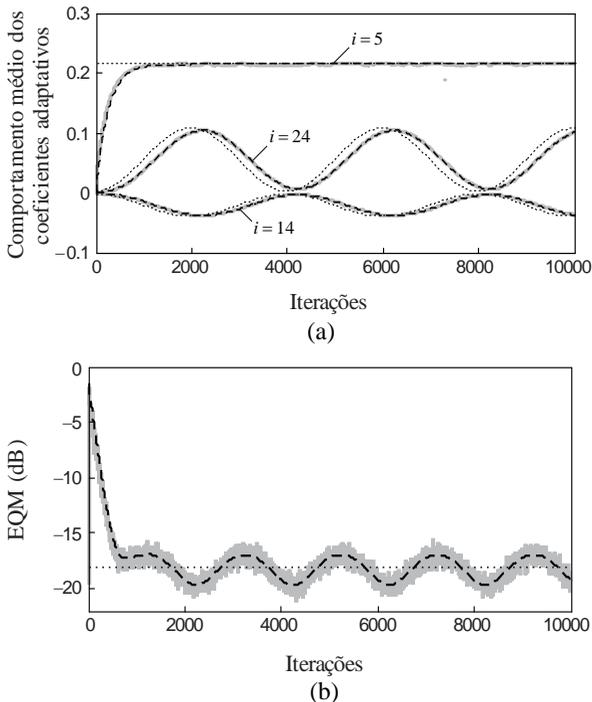
onde  $\omega_0 = \pi/2000$ . Além disso, considera-se  $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\sigma_\varphi^2 = 0$ ,  $\mu = 0,125$  e sinais de entrada com três diferentes níveis de dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação<sup>24</sup>, isto é,  $\chi = 1$  (sinal de entrada

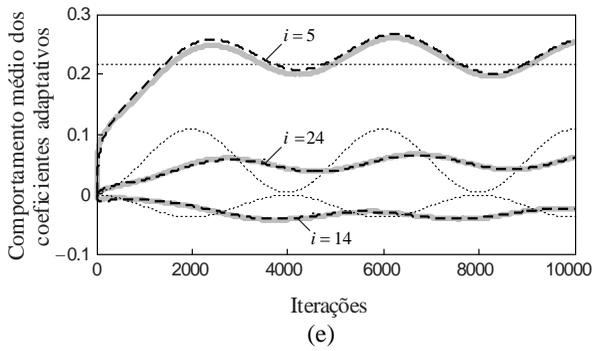
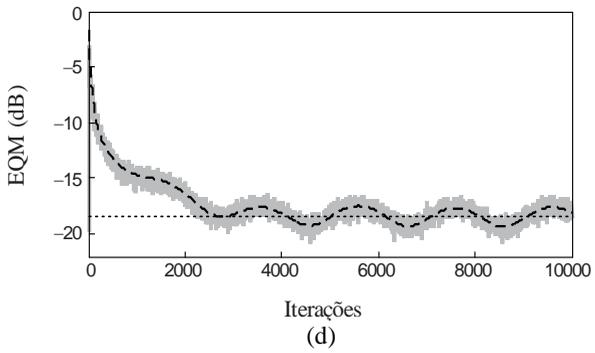
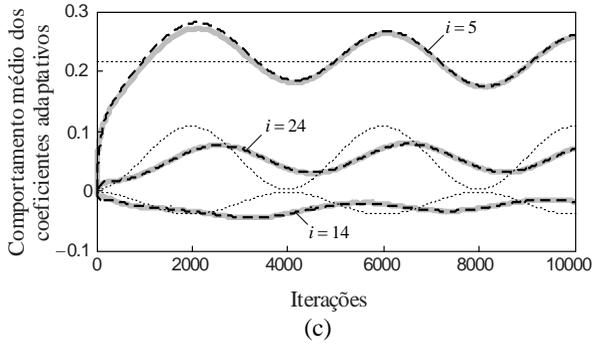
---

<sup>24</sup> A dispersão de autovalores é uma medida do nível de correlação de um sinal (quanto maior o valor da dispersão de autovalores, mais correlacionado é o sinal), sendo calculada como a razão entre o maior e o menor autovalor de sua matriz de autocorrelação.

branco),  $\chi = 114,04$  [obtido de (5.77) assumindo  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,80$ ] e  $\chi = 559,14$  (alterando  $\beta_2$  para 0,93).

Figura 5.4 ilustra o comportamento médio de alguns coeficientes do filtro adaptativo e o EQM obtidos através de simulações de MC e do modelo proposto. Nota-se que o modelo proposto descreve satisfatoriamente os resultados das simulações de MC tanto na fase transitória quanto em regime permanente, independentemente do nível de correlação do sinal de entrada  $x(n)$ . Além disso, comparando a Figura 5.4(a) com as Figuras 5.5(c) e (e), observa-se que os coeficientes do sistema variante no tempo (denotados pelas linhas pontilhadas escuras) são individualmente rastreados pelos respectivos coeficientes do filtro adaptativo (denotados pelas linhas tracejadas escuras) apenas quando o sinal de entrada é branco [caso apresentado na Figura 5.4(a)]. Para as situações nas quais o sinal de entrada é correlacionado [Figura 5.4(c) e (e)], verifica-se que não existe uma relação de um-para-um entre os coeficientes da planta variante no tempo e os coeficientes do filtro adaptativo (esses resultados corroboram a discussão apresentada na Seção 5.3.3).





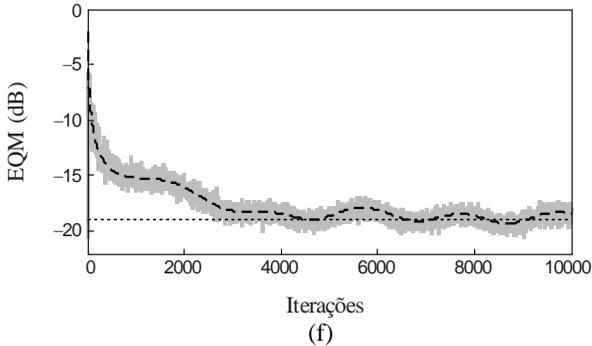


Figura 5.4 – Exemplo 1. Comportamento médio de alguns coeficientes do filtro adaptativo (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulação de MC (linha irregular cinza) e do modelo proposto (linha tracejada escura). Os coeficientes do sistema variante no tempo  $\mathbf{w}_o(n)$  e o valor médio do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\chi = 1$ . (c) e (d)  $\chi = 114,04$ . (e) e (f)  $\chi = 559,14$ .

### 5.4.2 Exemplo 2

Neste exemplo, o modelo proposto é avaliado considerando diferentes valores de passo de adaptação, visando ilustrar o comportamento do valor médio do EQM em regime permanente (isto é,  $\bar{J}$ ) com respeito ao passo  $\mu$ . Para tal, considera-se o mesmo cenário do Exemplo 1 (com sinal de entrada branco gaussiano) e os seguintes valores de passo de adaptação:  $\mu = 0,1$ ,  $\mu = \mu_o = 0,28$  [passo ótimo que minimiza  $\bar{J}$ , o qual foi obtido numericamente através da minimização de (5.68)] e  $\mu = 1,5$ . A partir da Figura 5.6, observa-se que o modelo proposto descreve com precisão muito boa os resultados das simulações de MC para todas as condições de operação consideradas. Além disso, como satisfatoriamente previsto pelo modelo proposto, nota-se que à medida que o valor do passo de adaptação é aumentado, em um primeiro momento, de  $\mu = 0,1$  para  $\mu = \mu_o = 0,28$ , ambas as oscilações do EQM e seu valor médio em regime permanente são reduzidos. Por outro lado, aumentando novamente o valor do passo do adaptação, de  $\mu = \mu_o = 0,28$  para  $\mu = 1,5$ , observa-se que embora as oscilações no EQM tenham sido mais uma vez reduzidas, o valor médio do EQM em regime permanente

é agora aumentado (ilustrando o comportamento convexo de  $\bar{J}$  com respeito ao passo de adaptação  $\mu$ ).

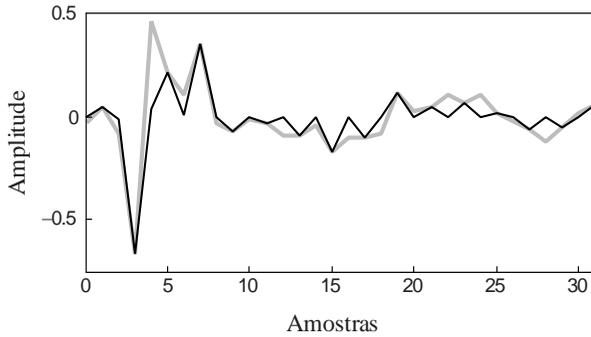
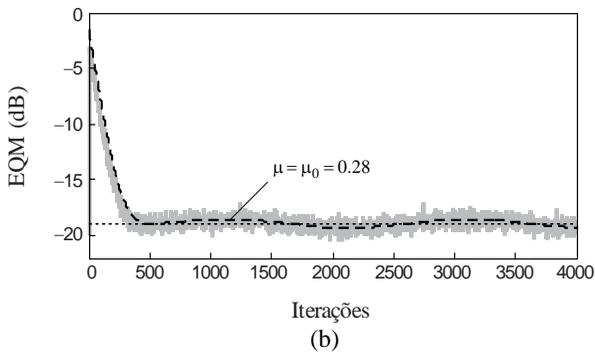
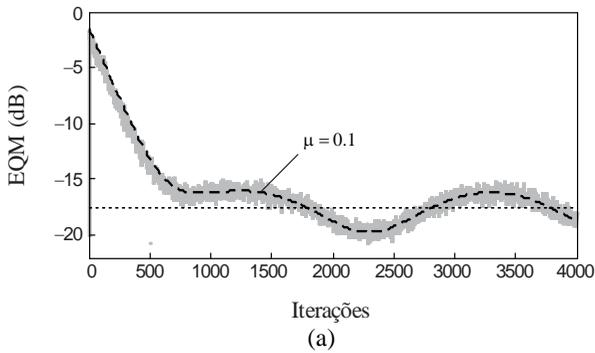


Figura 5.5 – Exemplo 1. Amostras de  $w_1$  (linha cinza) e  $w_2$  (linha escura).



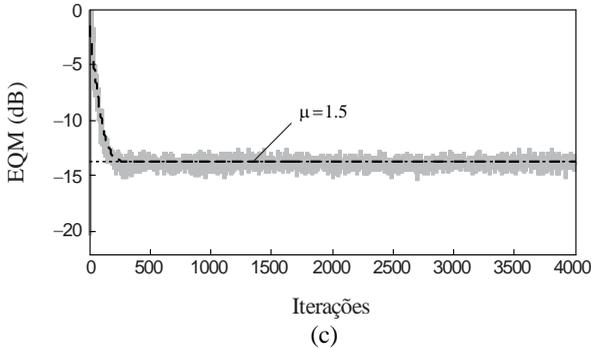


Figura 5.6 – Exemplo 2. Curvas do EQM obtido através de simulações de MC (linhas cinza irregulares) e do modelo proposto (linha tracejada escura). O valor do EQM em regime permanente é indicado por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\mu = 0,1$ . (c) e (d)  $\mu = \mu_o = 0,28$ . (e) e (f)  $\mu = 1,5$ .

### 5.4.3 Exemplo 3

Neste exemplo, o modelo proposto é avaliado em cenários nos quais o sistema variante no tempo  $\mathbf{w}_o(n)$  apresenta alterações lentas, moderadas e rápidas. Para tal, considera-se que  $\mathbf{w}_o(n)$  varia entre os vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  (cujas amostras são ilustradas na Figura 5.7) de acordo com a seguinte função triangular:

$$r'(n) = 0,5 + 0,4344 \cos\left(\omega_0 n + \frac{\pi}{2}\right) - 0,0483 \cos\left(3\omega_0 n + \frac{\pi}{2}\right) + 0,0174 \cos\left(5\omega_0 n + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.80)$$

para a qual três diferentes valores de  $\omega_0$  são considerados, isto é,  $\pi/1000$ ,  $\pi/500$  e  $\pi/250$ . Além disso, utiliza-se aqui  $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \mathbf{1}$ ,  $\alpha = 0,999$ ,  $\sigma_\varphi^2 = 10^{-5}$ ,  $\mu = 1$  e um sinal de entrada  $x(n)$  correlacionado obtido de (5.77) com  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,90$  (implicando  $\chi = 340,14$ ).

A Figura 5.8 apresenta o comportamento médio de alguns coeficientes do filtro adaptativo e o EQM obtidos por simulação de MC e do modelo proposto. Verifica-se que o modelo proposto descreve muito bem os resultados das simulações de MC para todos os valores de  $\omega_0$  considerados. Além disso, nota-se que à medida que  $\mathbf{w}_o(n)$  varia mais

rápido (o que é obtido aumentando o valor de  $\omega_0$ ), seu rastreamento é deteriorado. Como consequência, tanto o valor médio do EQM em regime permanente [denotado pelas linhas pontilhadas escuras nas Figuras 5.8(b), (d) e (f)], quanto a amplitude de suas oscilações aumentam.

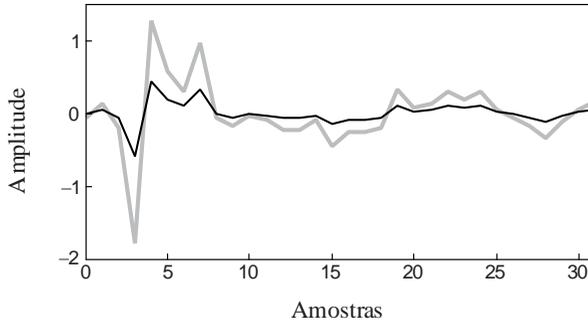
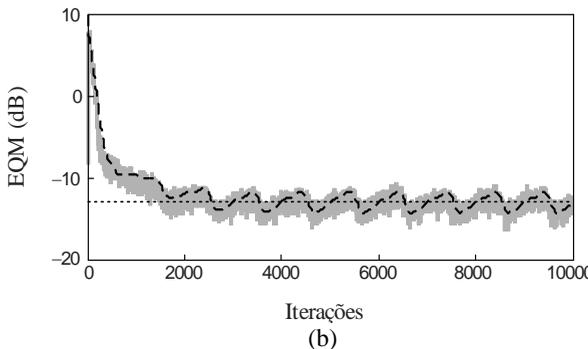
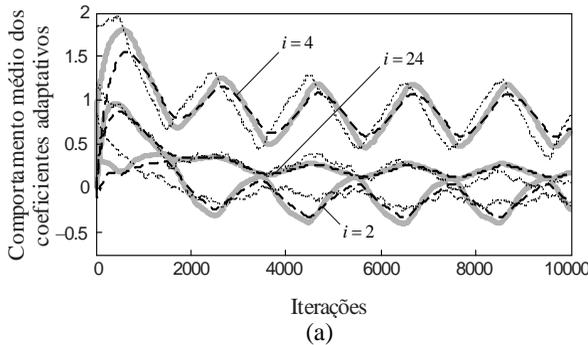
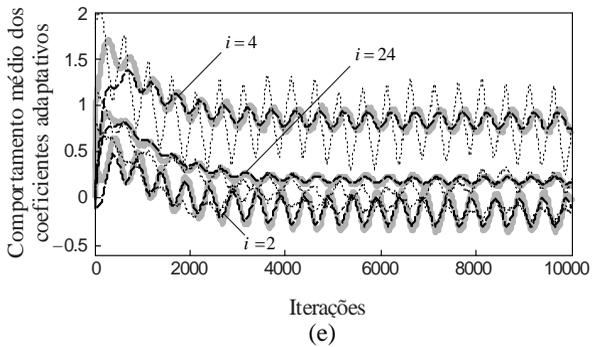
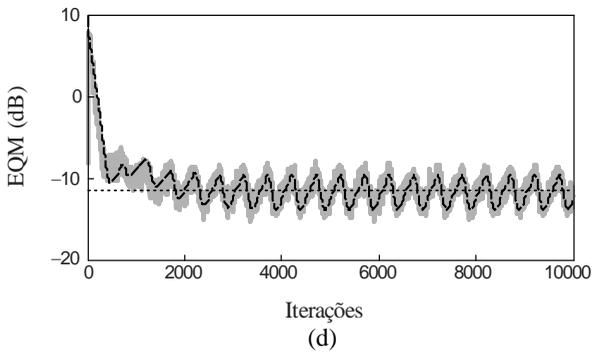
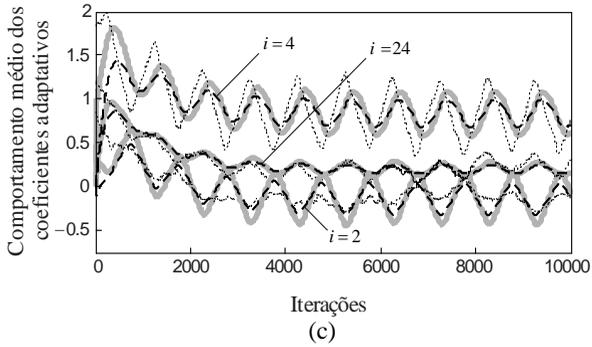


Figura 5.7 – Exemplo 3. Amostras de  $w_1$  (linha sólida cinza) e  $w_2$  (linha sólida escura).





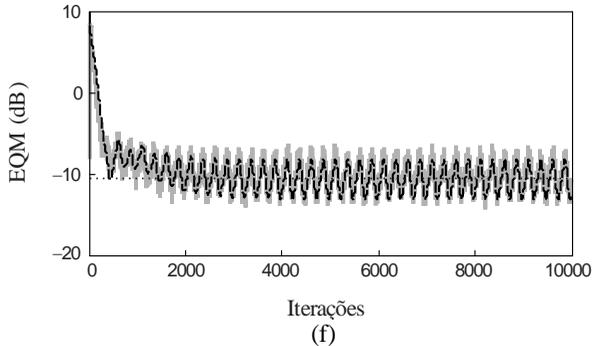


Figura 5.8 – Exemplo 3. Comportamento médio de alguns coeficientes do filtro adaptativo (esquerda) e EQM (direita) obtidos por simulação de MC (linha irregular cinza) e pelo modelo proposto (linha tracejada escura). Os coeficientes do sistema variante no tempo  $\mathbf{w}_o(n)$  e o valor médio do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras. (a) e (b)  $\omega_0 = \pi/1000$ . (c) e (d)  $\omega_0 = \pi/500$ . (e) e (f)  $\omega_0 = \pi/250$ .

#### 5.4.4 Exemplo 4

Neste exemplo, a precisão das expressões de modelo utilizadas para computar o valor médio do EQM em regime permanente [isto é, (5.56), (5.68) e (5.73)-(5.75)] é verificada. Para esse fim, utiliza-se aqui o mesmo sistema variante no tempo do Exemplo 3 com  $\omega_0 = \pi/1000$  e dois diferentes sinais de entrada; no primeiro caso, considera-se um sinal branco gaussiano [obtido de (5.77) com  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ] e no segundo caso, um sinal correlacionado gaussiano [obtido de (5.77) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ , implicando  $\chi = 114,04$ ].

A Figura 5.9 mostra os valores médio do EQM em regime permanente obtidos por simulação de MC e pelo modelo proposto considerando diversos valores de passo de adaptação e três diferentes variâncias do ruído de medição, isto é,  $\sigma_z^2 = 10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  e  $10^{-1}$ . Observa-se que o modelo proposto descreve com precisão muito boa os resultados obtidos por simulação de MC. Especificamente, para o caso de sinal correlacionado com  $\sigma_z^2 = 10^{-3}$ , uma pequena discrepância é observada entre os resultados de simulação e as predições do modelo. Todavia, nota-se que o modelo proposto é ainda capaz de descrever satisfatoriamente a tendência de comportamento do valor médio do EQM

em regime permanente, indicando inclusive a região do passo de adaptação ótimo.

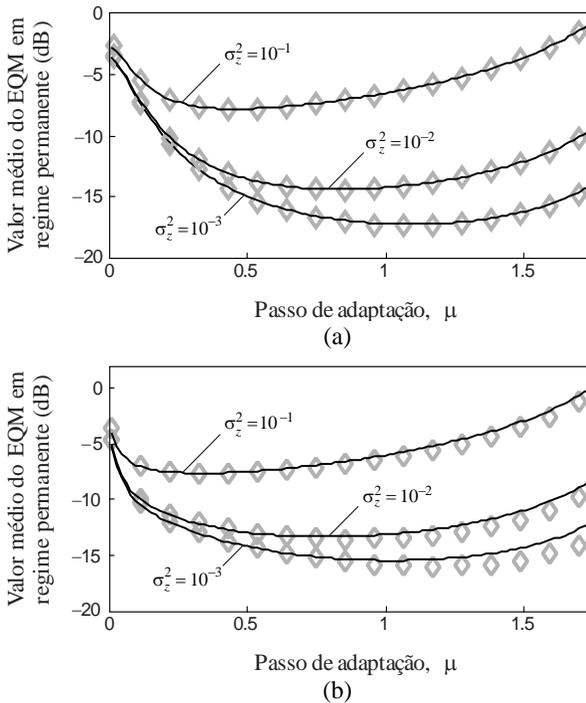


Figura 5.9 – Exemplo 4. Valor médio do EQM em regime permanente obtido através de simulações de MC (marcadores cinzas) e do modelo proposto (linhas escuras). (a) Sinal de entrada branco gaussiano. (b) Sinal de entrada correlacionado gaussiano com  $\chi = 114,04$ .

## 5.5 CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou um modelo estocástico para o algoritmo NLMS operando em um ambiente variante no tempo, considerando sinais de entrada branco e correlacionado (ambos com distribuição gaussiana). Comparando com outros modelos estocásticos apresentados na literatura, uma representação mais geral de sistemas variantes no tempo foi discutida, a qual permite avaliar o modelo proposto em uma extensa gama de cenários práticos (incluindo, por exemplo, ambientes periódicos). Particularmente, evitando o uso de algumas suposições simplificativas comumente consideradas na literatura, expressões de modelo precisas foram derivadas descrevendo o comportamento médio dos coeficientes

do filtro adaptativo e o EQM do algoritmo NLMS, tanto para a fase transitória quanto para o regime permanente. Baseado nas expressões de modelo proposto, uma análise aprofundada do comportamento do algoritmo NLMS operando em ambientes variantes no tempo também foi realizada. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto foi verificada para diferentes cenários de operação, confirmando que o modelo apresentado pode ser utilizado para prever com vantagem o comportamento do algoritmo NLMS (evitando o uso extensivo de simulações de MC).

## CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões e considerações finais deste trabalho de pesquisa. Inicialmente, as principais contribuições de cada capítulo são sumarizadas. Na sequência, são listados os artigos científicos publicados a partir das contribuições originais desta tese de doutorado. Por fim, algumas sugestões para trabalhos futuros na área de filtragem adaptativa são propostas.

### 6.1 SUMÁRIO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste trabalho de pesquisa, algumas contribuições originais à modelagem estocástica dos algoritmos adaptativos FxLMS e NLMS foram apresentadas. Particularmente, para o algoritmo FxLMS foram derivados dois modelos, ambos considerando aplicações de controle e/ou equalização ativa de ruído periódico, porém com diferentes estruturas (a saber, monocanal e multicanal). Para o algoritmo NLMS foram propostos dois modelos estocásticos, ambos considerando uma aplicação de identificação de sistemas com sinais de entrada branco gaussiano e correlacionado gaussiano. Especificamente, o primeiro modelo do algoritmo NLMS foi obtido assumindo que o filtro adaptativo e a planta a ser estimada podem possuir ordens diferentes. Para o segundo modelo do algoritmo NLMS, considerou-se uma formulação matemática mais geral para a planta a ser identificada (em comparação com trabalhos publicados na literatura), capaz de representar diversos tipos de sistemas variantes no tempo.

No Capítulo 1, foi apresentado uma introdução sobre o trabalho de pesquisa realizado. Especificamente, foram citadas algumas aplicações da filtragem adaptativa e seus principais campos de pesquisa. Além disso, foram discutidos alguns aspectos a respeito da modelagem estocástica de algoritmos adaptativos como também foram estabelecidos os objetivos gerais desta tese.

No Capítulo 2, um modelo estocástico para o algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE foi desenvolvido. Em contraste com outros modelos apresentados na literatura, o modelo proposto foi derivado levando em consideração o comportamento dinâmico dos coeficientes adaptativos durante todo o processo de adaptação, resultando em expressões de modelo que descrevem precisamente o comportamento médio dos coeficientes adaptativos, o EQM e o PEQM (tanto na fase

transitória quanto em regime permanente). A partir das expressões de modelo obtidas, importantes aspectos do comportamento do algoritmo FxLMS operando em sistemas de NANE foram discutidos, fornecendo um melhor entendimento do comportamento de tais sistemas (por exemplo, a distorção na equalização do ruído periódico causada por uma modelagem imprecisa do caminho secundário). Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto foi verificada para diferentes condições de operação.

No Capítulo 3, um modelo estocástico para o algoritmo FxLMS operando em sistemas multicanal de NANC foi apresentado. Em particular, o modelo proposto também foi derivado levando em consideração o comportamento dinâmico dos filtros adaptativos durante todo o processo de adaptação (de forma similar ao desenvolvido no Capítulo 2). Tal procedimento teve como resultado expressões de modelo que descrevem adequadamente o comportamento médio dos coeficientes adaptativos e o EQM. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto foi avaliada para diversas condições de operação, incluindo diferentes valores de passo de adaptação, distintas configurações quanto ao número de fontes secundárias e microfones de erro, além de diferentes números de senoides no ruído acústico.

No Capítulo 4, considerando sinais de entrada branco gaussiano e correlacionado gaussiano, um modelo estocástico para o algoritmo NLMS foi derivado, assumindo que o filtro adaptativo pode possuir dimensão diferente daquela da planta a ser identificada. Tal suposição que é condizente com cenários práticos, não é usualmente tratada na literatura devido à dificuldade matemática acrescida ao desenvolvimento da modelagem estocástica. Particularmente, foram derivadas expressões de modelo descrevendo precisamente o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo e o EQM, tanto para a fase transitória quanto para o regime permanente. Adicionalmente, para o caso de sinal de entrada branco, uma expressão para determinar o passo de adaptação ótimo (isto é, aquele que minimiza o EQM em regime permanente) foi obtida. A partir das expressões de modelo desenvolvidas, alguns aspectos do comportamento do algoritmo NLMS foram discutidos, como, por exemplo, o comportamento convexo da curva do EQM em regime permanente em relação à ordem do filtro adaptativo, quando a planta a ser identificada é não estacionária. Os resultados de simulação apresentados ratificaram a precisão das expressões de modelo derivadas para uma ampla faixa de condições de operação (incluindo, diversos valores do passo de adaptação, filtro adaptativo e planta a ser estimada com diferentes ordens).

No Capítulo 5, considerando sinais de entrada branco gaussiano e correlacionado gaussiano, um modelo estocástico para o algoritmo NLMS operando em ambiente variante no tempo foi derivado. Em particular, para a planta a ser identificada foi considerada uma formulação mais geral (em comparação com trabalhos publicados na literatura) capaz de representar diversos tipos de sistemas variantes no tempo; originando um modelo estocástico capaz de prever o comportamento do algoritmo NLMS em uma ampla gama de cenários de operação. Adicionalmente, evitando o uso de algumas suposições simplificativas comumente consideradas na literatura, expressões de modelo precisas foram derivadas descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo e o EQM do algoritmo NLMS, tanto para a fase transitória quanto para o regime permanente. Em específico, o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo foi também descrito através de uma expressão de forma fechada, a qual tem a vantagem de mostrar os diversos comportamentos (por exemplo, exponenciais e/ou periódicos) que modelam cada coeficiente adaptativo, o que pode não ser evidenciado através de uma expressão recursiva. Tendo como base as expressões de modelo obtidas, uma análise do comportamento do algoritmo NLMS operando em ambientes variantes no tempo também foi realizada. Através de resultados de simulação, a precisão do modelo proposto foi verificada para diferentes cenários de operação, confirmando que o modelo desenvolvido pode ser utilizado para prever o comportamento do algoritmo NLMS (evitando o uso extensivo de simulações de MC).

Portanto, tendo em vista as contribuições apresentadas, acredita-se que os objetivos inicialmente estabelecidos foram alcançados com sucesso durante a realização deste trabalho de pesquisa. Em específico, neste trabalho, uma ampliação da base teórica no que tange os algoritmos adaptativos FxLMS e NLMS foi obtida, a qual pode ser utilizada no desenvolvimento de novos modelos estocásticos como também de novos algoritmos adaptativos.

## 6.2 ARTIGOS CIENTÍFICOS PUBLICADOS

Durante a realização deste trabalho de pesquisa três artigos científicos foram publicados (sendo dois artigos em periódicos internacionais e um artigo em congresso nacional), os quais são listados a seguir:

- M.V. Matsuo e R. Seara, “On the stochastic analysis of the NLMS algorithm for white and correlated Gaussian inputs in time-varying environments”, *Signal Processing*, v. 128, pp. 291-302, Nov.

2016.

- M.V. Matsuo e R. Seara, “On the Stochastic Modeling of FxLMS-Based Narrowband Active Noise Equalization Systems”, *Signal Processing*, v. 115, pp. 214-226, Out. 2015.
- M.V. Matsuo e R. Seara, “Sobre a Modelagem Estocástica do Algoritmo NLMS em Ambientes Não Estacionários para Filtros Adaptativos e Plantas do Sistema com Ordens Diferentes”, in *XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Juiz de Fora, MG, Brasil, Set. 2015, pp. 1-5.

### 6.3 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Como propostas para trabalhos futuros, sugere-se:

- Desenvolvimento de um sistema de NANE cuja equalização do ruído acústico seja robusta a modelagens imprecisas do caminho secundário.
- Estender os modelos estocásticos apresentados nos Capítulos 4 e 5 para o caso de sinais de entrada complexos.
- Estender a modelagem estocástica desenvolvida no Capítulo 4 (no qual foi considerado que o filtro adaptativo e a planta a ser estimada podem possuir ordens diferentes) para outros algoritmos adaptativos, como, por exemplo, para os algoritmos AP (*affine projection*), RLS (*recursive least square*) e os algoritmos da família PNLMS (*proportionate normalized least-mean-square*).
- Derivar modelos estocásticos para os algoritmos da família PNLMS considerando a formulação de planta variante no tempo utilizada no Capítulo 5, visando comparar o desempenho de tais algoritmos em diversos tipos de ambientes variantes no tempo.

## DISCUSSÃO ACERCA DA SUPOSIÇÃO A4

Neste apêndice, é analisado o efeito da adoção da Suposição S4 (utilizada na derivação do modelo estocástico do Capítulo 2) nos resultados obtidos para o comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos e para o EQM do algoritmo FxLMS operando no sistema de NANE. Para tal, resultados de simulação de MC obtidos utilizando a Suposição S4 [fases iniciais dos sinais periódicos  $d(n)$ ,  $x_{0,q}(n)$  e  $x_{1,q}(n)$  variando entre realizações do sistemas de NANE] são comparados com os resultados obtidos considerando que as fases iniciais dos sinais senoidais são fixas (também comumente adotado em simulações de MC para avaliar o desempenho de sistemas de NANC).

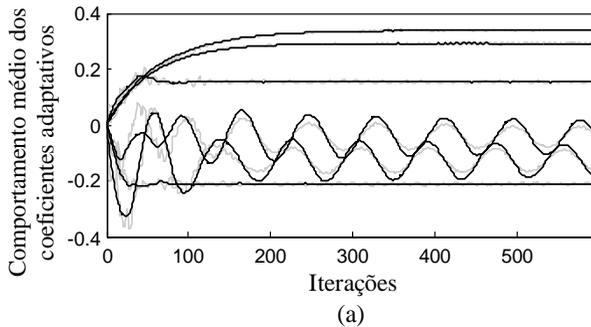
Considere um cenário em que o sistema de NANE é configurado para processar um ruído periódico composto por três componentes senoidais com amplitudes  $D_1 = D_2 = D_3 = \sqrt{2/3}$  e frequências  $\omega_1 = 0,15\pi$ ,  $\omega_2 = 0,30\pi$  e  $\omega_3 = 0,45\pi$  rad/s, utilizando  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$  e  $\beta_3 = 3$  e  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0,0075$ . Adicionalmente, considere  $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \Delta\phi_3 = \pi/2$ ,  $\sigma_z^2 = 0$  e que o caminho secundário estimado  $\hat{s}(n)$  modela perfeitamente o caminho secundário real  $s(n)$  (cuja resposta ao impulso é ilustrada na Figura 2.4). A Figura A.1 apresenta o comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos e o EQM obtidos por simulação de MC (300 realizações independentes), assumindo, em um primeiro momento, que as fases iniciais são fixas (dadas por,  $\theta_q = 0$  e  $\phi_q = \Delta\phi_q = \pi/2$  para  $q = 1, 2$  e  $3$ ) e, em um segundo momento, considerando a Suposição A4 (isto é,  $\theta_q \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$  e  $\phi_q = \theta_q + \Delta\phi_q$  para  $q = 1, 2$  e  $3$ ).

Nota-se da Figura A.1(a) que o comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos considerando a Suposição S4 é muito similar aos resultados obtidos assumindo que as fases iniciais  $\theta_q$  e  $\phi_q$  (para  $q = 1, 2$  e  $3$ ) são fixas para todas as realizações da simulação de MC. Assim, verifica-se que a adoção da Suposição S4 basicamente não

tem efeito nas curvas que descrevem o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo.

Agora, da Figura A.1(b), observa-se que ao se considerar  $\theta_q$  e  $\phi_q$  fixos para todas as realizações da simulação de MC, o EQM resultante (representando pela linha cinza) é composto por senoides elevadas ao quadrado, representando essencialmente a potência instantânea do sinal de erro. Nota-se que essa curva de EQM dificulta a avaliação de desempenho do sistema de NANE. Por exemplo, é difícil saber apenas observando tal curva de EQM se as amplitudes de cada senoide (que compõem o sinal de erro) foram ajustadas para os valores desejados. Por outro lado, ao se considerar a Suposição S4, nota-se que o EQM resultante (representado pela linha escura) é uma descrição da potência média do sinal de erro (e não mais da potência instantânea, como no caso anterior). Note que a curva do EQM obtida considerando a Suposição S4 possibilita uma melhor avaliação do desempenho do sistema de NANE. Em particular, pode-se constatar que a potência média do sinal de erro converge para o valor de 5,23 dB, indicando que cada senoide teve a sua amplitude ajustada para o valor desejado.

Além disso, do ponto de vista da modelagem estocástica, a adoção da Suposição S4 resulta em equações de modelo mais simples do que aquelas que seriam obtidas caso fosse considerado valores fixos para as fases iniciais  $\theta_q$  e  $\phi_q$  (para todo  $q$ ).



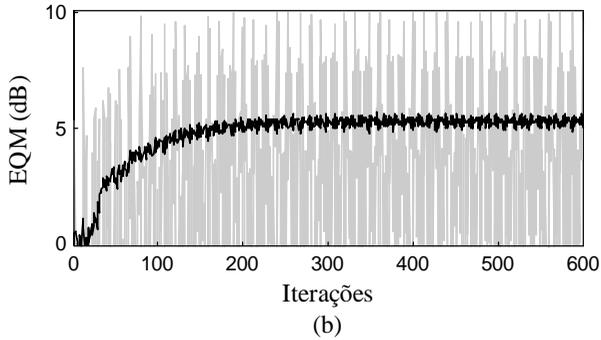


Figura A.1 – Comportamento médio dos coeficientes dos filtros adaptativos (a) e EQM (b) obtidos por simulação de MC considerando as fases  $\theta_q$  e  $\phi_q$  fixas (linhas cinza) e a Suposição A4 (linhas escuras).

DETERMINAÇÃO DE  $\mathbf{H}_{q,r}(n)$

Neste apêndice, a abordagem utilizada para computar o momento de quarta ordem (2.43) dos vetores dos sinais de referência é apresentada. Para tal, as matrizes (2.43) e (2.44) são primeiramente escritas como

$$\mathbf{H}_{q,r}(n) \triangleq \begin{bmatrix} h_{q,r}^{1,1}(n) & h_{q,r}^{1,2}(n) \\ h_{q,r}^{2,1}(n) & h_{q,r}^{2,2}(n) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

e

$$\mathbf{G}_r(n) \triangleq \begin{bmatrix} g_r^{1,1}(n) & g_r^{1,2}(n) \\ g_r^{2,1}(n) & g_r^{2,2}(n) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Assim, utilizando (B.1) e (B.2) em (2.43), o elemento da primeira linha e primeira coluna da matriz  $\mathbf{H}_{q,r}(n)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} h_{q,r}^{1,1}(n) = & \text{E}[\cos(\varpi_r) \cos(\varpi_r) \cos(\varpi_q) \cos(\varpi_q) g_r^{1,1}(n)] \\ & + \text{E}[\cos(\varpi_r) \text{sen}(\varpi_r) \cos(\varpi_q) \cos(\varpi_q) g_r^{1,2}(n)] \\ & + \text{E}[\text{sen}(\varpi_r) \cos(\varpi_r) \cos(\varpi_q) \cos(\varpi_q) g_r^{2,1}(n)] \\ & + \text{E}[\text{sen}(\varpi_r) \text{sen}(\varpi_r) \cos(\varpi_q) \cos(\varpi_q) g_r^{2,2}(n)] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

com

$$\varpi_r \triangleq \omega_r(n-1) + \theta_r \quad (\text{B.4})$$

e

$$\varpi_q \triangleq \omega_q(n-1) + \theta_q. \quad (\text{B.5})$$

Agora, utilizando as Suposições S3 e S4 (veja Seção 3.2) e as identidades trigonométricas

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \quad (\text{B.6})$$

$$\text{sen}(x) \text{sen}(y) = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \quad (\text{B.7})$$

e

$$\text{sen}(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\text{sen}(x-y) + \text{sen}(x+y)] \quad (\text{B.8})$$

a expressão (B.3) pode ser reduzida para

$$h_{q,r}^{1,1}(n) = \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \delta(q-r) \right] E[g_r^{1,1}(n)] + \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \delta(q-r) \right] E[g_r^{2,2}(n)] \quad (\text{B.9})$$

onde  $\delta(n)$  denota a função delta de Kronecher. Então, para determinar os elementos restantes de  $\mathbf{H}_{q,r}(n)$ , utiliza-se um procedimento similar ao realizado para obter (B.9). Assim,

$$h_{q,r}^{1,2}(n) = h_{q,r}^{2,1}(n) = \frac{1}{8} \delta(q-r) \{E[g_r^{1,2}(n)] + E[g_r^{2,1}(n)]\} \quad (\text{B.10})$$

e

$$h_{q,r}^{2,2}(n) = \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \delta(q-r) \right] E[g_r^{1,1}(n)] + \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \delta(q-r) \right] E[g_r^{2,2}(n)]. \quad (\text{B.11})$$

Então, utilizando (B.9)-(B.11) e considerando  $q=r$ , a matriz  $\mathbf{H}_{q,r}(n)$  é expressa como

$$\mathbf{H}_{q,r}(n) = \frac{1}{8} \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} 3g_r^{1,1}(n) + g_r^{2,2}(n) & g_r^{1,2}(n) + g_r^{2,1}(n) \\ g_r^{1,2}(n) + g_r^{2,1}(n) & g_r^{1,1}(n) + 3g_r^{2,2}(n) \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{B.12})$$

Agora, definindo  $\mathbf{K}_r(n) \triangleq E[\mathbf{G}_r(n)]$ , (B.12) pode ser reescrita como (2.45). Similarmente, utilizando (B.9)-(B.11) e considerando  $q \neq r$ , tem-se

$$\mathbf{H}_{q,r}(n) = \frac{1}{4} \mathbf{E} \{ [g_r^{1,1}(n) + g_r^{2,2}(n)] \mathbf{I} \} \quad (\text{B.13})$$

da qual (2.46) segue. Finalmente, a matriz  $\mathbf{K}_r(n)$  é obtida substituindo (2.37) e (2.40) em (2.44) e tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante.

### DETERMINAÇÃO DE $\mathbf{V}_q^{0,0}(n)$

Neste apêndice, é mostrado que  $\mathbf{V}_q^{0,0}(\infty)$  pode ser aproximada por uma matriz diagonal. Para tal, considere  $\mathbf{V}_q^{0,0}(\infty)$  expressa como  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{0,q}(n)] = 0$ . Assim,

$$\mathbf{V}_q^{0,0}(\infty) = \begin{bmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{0,q}^2(n)] & \lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{0,q}(n)v_{1,q}(n)] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{0,q}(n)v_{1,q}(n)] & \lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{1,q}^2(n)] \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

com  $v_{0,q}(n)$  e  $v_{1,q}(n)$  denotando os elementos do vetor (2.35). Similarmente a [27], tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{1,q}(n)] = 0$ . Agora, substituindo (2.35) em (2.26) e utilizando a condição de passo de adaptação pequeno (isto é,  $\mu_q \ll 1$ ), tem-se

$$E[v_{0,q}(n+1)] \cong \left(1 - \frac{1}{2}\mu_q\tau_q\right)E[v_{0,q}(n+1)] \quad (\text{C.2})$$

e

$$E[v_{1,q}(n+1)] \cong \left(1 - \frac{1}{2}\mu_q\tau_q\right)E[v_{1,q}(n+1)] \quad (\text{C.3})$$

onde  $\tau_q$  é dado por (2.59). Assim, sob a condição de passo de adaptação pequeno, nota-se que  $E[v_{0,q}(n)]$  e  $E[v_{1,q}(n)]$  são atualizados de forma independente um do outro. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{0,q}(n)v_{1,q}(n)] &\cong \lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{0,q}(n)]E[v_{1,q}(n)] \\ &\cong 0. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Portanto, (C.1) pode ser reescrita como uma matriz diagonal, isto é,

$$\mathbf{V}_q^{0,0}(\infty) = \begin{bmatrix} E[v_{0,q}^2(\infty)] & 0 \\ 0 & E[v_{1,q}^2(\infty)] \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

com  $E[v_{0,q}^2(\infty)] \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{0,q}^2(n)]$  e  $E[v_{1,q}^2(\infty)] \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} E[v_{1,q}^2(n)]$ . Agora, substituindo (2.56) e (C.5) em (2.42) e levando em consideração que os elementos fora da diagonal são nulos, a seguinte relação é obtida:

$$\begin{aligned} & \{E[v_{0,q}^2(\infty)] - E[v_{1,q}^2(\infty)]\} \{ (1 - \beta_q)(\hat{\alpha}_q \gamma_q + \alpha_q \hat{\gamma}_q) \\ & + 0,5\mu_q(\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2)[(1 - \beta_q)^2 \alpha_q \gamma_q + \beta_q^2 \hat{\alpha}_q \hat{\gamma}_q \\ & + \beta_q(1 - \beta_q)(\hat{\alpha}_q \gamma_q + \alpha_q \hat{\gamma}_q) \} = 0. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Tal expressão é satisfeita se

$$E[v_{0,q}^2(\infty)] = E[v_{1,q}^2(\infty)] = \varepsilon_q. \quad (C.7)$$

Para computar  $\varepsilon_q$ , toma-se o limite com  $n \rightarrow \infty$  de (2.42), utilizando (C.5) e (C.7). Assim,

$$\varepsilon_q \lambda_q = \frac{1}{2} \mu_q \frac{(\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2) \lambda_q}{\tau_q} \sigma_z^2 + \frac{1}{2} \mu_q \frac{(\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2) \lambda_q}{\tau_q} \sum_{r=1}^Q \varepsilon_r \lambda_r \quad (C.8)$$

com  $\tau_q$  e  $\lambda_q$  dados por (2.59) e (2.60), respectivamente. Agora, somando todos os valores de (C.8) para  $q = 1, 2, \dots, Q$ , obtém-se

$$\sum_{q=1}^Q \varepsilon_q \lambda_q = \frac{\xi}{1 - \xi} \sigma_z^2 \quad (C.9)$$

onde  $\xi$  é dado por (2.58). Agora, substituindo (C.9) em (C.8),  $\varepsilon_q$  é expresso como

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \mu_q \frac{(\hat{\alpha}_q^2 + \hat{\gamma}_q^2)}{\tau_q} \frac{1}{1 - \xi} \sigma_z^2. \quad (C.10)$$

Finalmente, substituindo (C.10) e (C.7) em (C.5), segue (2.57).

## DETERMINAÇÃO DE $\mathbf{R}_1$ , $\mathbf{R}_2$ , $\mathbf{R}_3$ E $\mathbf{R}_4$

Neste apêndice, são apresentados os procedimentos para  $\mathbf{R}_4$  a determinação das matrizes  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  e  $\mathbf{R}_4$  [dadas por (4.43), (4.44), (4.58) e (4.61), respectivamente]. Em particular, o procedimento para determinação de  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_4$  já foi apresentado em [66] (para sinal de entrada correlacionado) e em [67] (para sinal de entrada branco), sendo repetido aqui visando tornar esse documento autocontido. Agora, para a determinação de  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_3$  é utilizado um procedimento similar ao apresentado em [68] (porém não exatamente igual).

### D.1 DETERMINAÇÃO DE $\mathbf{R}_1$

Especificamente, a matriz de autocorrelação normalizada  $\mathbf{R}_1$  [dada por (4.43)] pode ser computada como<sup>25</sup>

$$\mathbf{R}_1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \frac{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^T}{\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M} f(\mathbf{x}_M) d\mathbf{x}_M \quad (\text{D.1})$$

onde  $f(\mathbf{x}_M)$  representa a função densidade de probabilidade do vetor  $\mathbf{x}_M(n)$  e  $M$  denota a dimensão de  $\mathbf{x}_M(n)$ . Visando dar proceguimento ao cálculo de  $\mathbf{R}_1$ , a seguinte função matricial auxiliar é definida:

$$\mathbf{F}_1(\varpi) \triangleq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \frac{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^T}{\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M} e^{-j\varpi \mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M} f(\mathbf{x}_M) d\mathbf{x}_M. \quad (\text{D.2})$$

Note que  $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} \mathbf{F}_1(\varpi) = 0$  e  $\mathbf{F}_1(0) = \mathbf{R}_1$ . Agora, utilizando em (D.2) a definição da função densidade de probabilidade de um vetor de variáveis gaussianas, isto é,

---

<sup>25</sup> O índice de tempo  $n$  é aqui desconsiderado visando simplificar a notação.

$$f(\mathbf{x}_M) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det(\mathbf{R}_{M,M})}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}_M^T \mathbf{R}_{M,M}^{-1} \mathbf{x}_M} \quad (\text{D.3})$$

onde  $\mathbf{R}_{M,M}$  é a matriz de autocorrelação de  $\mathbf{x}_M(n)$ , e, na sequência, derivando a expressão resultante em relação a  $\varpi$ , obtém-se

$$\frac{d\mathbf{F}_1(\varpi)}{d\varpi} \triangleq - \sqrt{\frac{\det[\mathbf{L}_{M,M}(\varpi)]}{\det(\mathbf{R}_{M,M})}} \mathbf{L}_1(\varpi) \quad (\text{D.4})$$

com

$$\mathbf{L}_1(\varpi) = (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{R}_{M,M})^{-1} \mathbf{R}_{M,M}. \quad (\text{D.5})$$

Substituindo (D.5) em (D.4) e utilizando a decomposição de autovalores  $\mathbf{R}_{M,M} = \mathbf{Q}_M \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T$  na expressão resultante (onde  $\mathbf{Q}_M$  é a matriz de autovetores de  $\mathbf{R}_{M,M}$  e  $\mathbf{\Lambda}_M$  é uma matriz diagonal, cujos elementos correspondem aos autovalores de  $\mathbf{R}_{M,M}$ ), tem-se

$$-\frac{\partial \mathbf{F}_1(\varpi)}{\partial \varpi} \triangleq \mathbf{Q}_M \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)}} (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T \quad (\text{D.6})$$

Integrando (D.6) em relação a  $\varpi$ ,

$$-\int_0^{\infty} \frac{d\mathbf{F}_1(\varpi)}{d\varpi} d\varpi \triangleq \mathbf{Q}_M \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)}} (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M d\varpi \right] \mathbf{Q}_M^T \quad (\text{D.7})$$

com

$$-\int_0^{\infty} \frac{d\mathbf{F}_1(\varpi)}{d\varpi} d\varpi = - \left[ \lim_{\varpi \rightarrow \infty} \mathbf{F}_1(\varpi) - \mathbf{F}_1(0) \right] = \mathbf{R}_1 \quad (\text{D.8})$$

tendo em vista que  $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} \mathbf{F}_1(\varpi) = 0$  e  $\mathbf{F}_1(0) = \mathbf{R}_1$  [veja (D.2)]. Agora, considerando (D.7) e (D.8), tem-se

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_M \mathbf{H}_1 \mathbf{Q}_M^T \quad (\text{D.9})$$

onde  $\mathbf{H}_1$  é uma matriz diagonal cujos elementos são computados como

$$\begin{aligned}
 H_1(i) &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda_i}{(1 + 2\lambda_i \varpi) \sqrt{\prod_{k=1}^M (1 + 2\lambda_k \varpi)}} d\varpi \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{V_1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\varpi - \varpi_i) \sqrt{\prod_{k=1}^M (\varpi - \varpi_k)}} d\varpi
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

com

$$V_1 = 2^M \prod_{k=1}^M \lambda_k \tag{D.11}$$

e

$$\varpi_k = -\frac{1}{2\lambda_k} \tag{D.12}$$

onde  $\lambda_k$  é o  $k$ -ésimo elemento da diagonal de  $\Lambda_M$ . A partir desse ponto, a solução de (D.10) difere para sinal de entrada branco e correlacionado.

### D.2 SINAL DE ENTRADA BRANCO

Especificamente, assumindo  $M$  par e sinal de entrada  $x(n)$  branco [implicando  $\varpi_k = -1/2\sigma_x^2$  para todo  $k$ , com  $\sigma_x^2$  denotando a variância de  $x(n)$ ], a raiz quadrada do denominador de (D.10) pode ser eliminada e a integral resultante pode ser resolvida analiticamente, resultando em [67]

$$H(i) = \frac{1}{N}. \tag{D.13}$$

### D.3 SINAL DE ENTRADA CORRELACIONADO

Agora, considerando sinal de entrada correlacionado e  $M$  par, cada par adjacente de variáveis  $\varpi_k$  é substituído por sua média geométrica com multiplicidade dois [visando eliminar a raiz quadrada do denominador de (D.10)]. Assim,

$$H_1(i) \cong \frac{1}{2\sqrt{V_1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\varpi - \varpi_i) \prod_{k=1}^{M/2} (\varpi - \tilde{\varpi}_k)} d\varpi \tag{D.14}$$

onde  $\tilde{\omega}_k = -\sqrt{\omega_{2k}\omega_{2k-1}}$  com  $k = 1, 2, \dots, M/2$ .

Agora, utilizando expansão por frações parciais no integrando de (D.14) (assumindo que o denominador possui apenas raízes distintas, o que é usual para sinal correlacionado) e integrando cada fração resultante, tem-se [66]

$$H_1(i) \cong -\frac{1}{2\sqrt{V_1}} \left[ a_{1,i} \ln(-\omega_i) + \sum_{\ell=1}^{N/2} b_{\ell,i} \ln(-\tilde{\omega}_\ell) \right] \quad (D.15)$$

com

$$a_{1,i} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{N/2} (\omega_i - \tilde{\omega}_k)} \quad (D.16)$$

e

$$b_{\ell,i} = \frac{1}{(\tilde{\omega}_\ell - \omega_i) \prod_{k=1}^{N/2} (\tilde{\omega}_\ell - \tilde{\omega}_k)}. \quad (D.17)$$

Assim,  $\mathbf{R}_1$  pode ser completamente determinada utilizando (D.9) e (D.15).

#### D.4 DETERMINAÇÃO DA MATRIZ $\mathbf{R}_2$

Em particular, para determinar a matriz de autocorrelação normalizada retangular  $\mathbf{R}_2$  [dada por (4.44)] diferentes procedimentos são adotados dependendo se  $M \geq N$  ou  $M < N$ . Por exemplo, para a condição em que  $M \geq N$ , basta calcular a matriz  $\mathbf{R}_1$  (originalmente de dimensão  $M \times M$ ) e truncá-la na dimensão  $M \times N$ . Agora, caso  $M < N$ , tem-se

$$\mathbf{R}_2 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N \text{ integrais}} \frac{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_N^T}{\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M} f(\mathbf{x}_N) d\mathbf{x}_N \quad (D.18)$$

onde  $f(\mathbf{x}_N)$  denota a função densidade de probabilidade do vetor  $\mathbf{x}_N(n)$ . Visando dar proceguimento ao cálculo de  $\mathbf{R}_2$ , a seguinte função matricial auxiliar é definida:

$$\mathbf{F}_2(\varpi) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_N^T}{\mathbf{x}_N^T \mathbf{I}_S \mathbf{x}_N} e^{-\varpi \mathbf{x}_N^T \mathbf{I}_S \mathbf{x}_N} f(\mathbf{x}_N) d\mathbf{x}_N \quad (\text{D.19})$$

com

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M,M} & \mathbf{0}_{M,N-M} \\ \mathbf{0}_{N-M,M} & \mathbf{0}_{N-M,N-M} \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

onde  $\mathbf{I}_{M,M}$  é uma matriz identidade de dimensão  $M \times M$  e  $\mathbf{0}_{M,N-M}$  é uma matriz nula de dimensão  $M \times N - M$  (as demais matrizes nulas possuem dimensões indicadas pelos seus respectivos índices). Além disso, note que  $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} \mathbf{F}_2(\varpi) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{F}_2(0) = \mathbf{R}_2$ . Agora, utilizando em (D.19) a função densidade de probabilidade  $f(\mathbf{x}_N)$  de um vetor de variáveis gaussianas e derivando a expressão resultante em relação a  $\varpi$ , obtém-se

$$\frac{d\mathbf{F}_2(\varpi)}{d\varpi} \triangleq - \sqrt{\frac{\det[\mathbf{L}_2(\varpi)]}{\det(\mathbf{R}_{N,N})}} \mathbf{G}_2(\varpi) \quad (\text{D.21})$$

com

$$\mathbf{G}_2(\varpi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det[\mathbf{L}_2(\varpi)]}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_M \mathbf{x}_N^T e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{L}_2^{-1}(\varpi) \mathbf{x}_N} d\mathbf{x}_N \quad (\text{D.22})$$

e

$$\mathbf{L}_2(\varpi) = (\mathbf{I}_{N,N} + 2\varpi \mathbf{R}_{N,N} \mathbf{I}_S)^{-1} \mathbf{R}_{N,N}. \quad (\text{D.23})$$

Observe que  $\mathbf{G}_2(\varpi)$  denota o cálculo da matriz de autocorrelação retangular (de dimensão  $M \times N$ ) de um vetor de variáveis gaussianas, cuja matriz de autocorrelação quadrada (de dimensão  $N \times N$ ) é exatamente  $\mathbf{L}_2(\varpi)$ . Portanto,

$$\mathbf{G}_2(\varpi) = [\mathbf{L}_2(\varpi)]_{M,N} \quad (\text{D.24})$$

onde  $[\mathbf{L}_2(\varpi)]_{M,N}$  representa a matriz de autocorrelação  $\mathbf{L}_2(\varpi)$  truncada na dimensão  $M \times N$ . Agora, considerando a decomposição

$$\mathbf{R}_{N,N} \mathbf{I}_S = \mathbf{Q}_N \mathbf{\Lambda}_N \mathbf{Q}_N^{-1} \quad (\text{D.25})$$

onde  $\mathbf{\Lambda}_N$  é uma matriz diagonal (de dimensão  $N \times N$ ) com apenas os últimos  $M$  elementos não nulos. Então, utilizando (D.25) em (D.23) e (D.24) e os correspondentes resultados em (D.21), tem-se

$$-\frac{d\mathbf{F}_2(\varpi)}{d\varpi} \triangleq (\mathbf{Q}_N)_{M,N} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I}_{N,N} + 2\varpi\mathbf{\Lambda}_N)}} (\mathbf{I}_{N,N} + 2\varpi\mathbf{\Lambda}_N)^{-1} \mathbf{Q}_N^{-1} \mathbf{R}_{N,N}$$
(D.26)

Agora, integrando (D.26) em relação a  $\varpi$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(0) &= \mathbf{R}_2 \\ &= (\mathbf{Q}_N)_{M,N} \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}_N^{-1} \mathbf{R}_{N,N} \end{aligned}$$
(D.27)

onde  $\mathbf{H}_2$  é uma matriz diagonal cujos elementos são dados por

$$H_2(i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V_2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=N-M+1}^N (\varpi - \varpi_k)}} d\varpi, & i = 1, 2, \dots, N-M \\ \frac{1}{2\lambda_i \sqrt{V_2}} \int_0^\infty \frac{1}{(\varpi - \varpi_i) \sqrt{\prod_{k=N-M+1}^N (\varpi - \varpi_k)}} d\varpi, & i = N-M+1, \dots, N \end{cases}$$
(D.28)

onde  $V_2 = \prod_{k=N-M+1}^N 2\lambda_k$ , sendo  $\lambda_k$  o  $k$ -ésimo elemento da diagonal de

$\mathbf{\Lambda}_N$ . Agora, considerando sinal de entrada correlacionado<sup>26</sup> e  $M$  par, cada par adjacente de variáveis  $\varpi_k$  é substituído por sua média geométrica com multiplicidade dois [visando eliminar a raiz quadrada do denominador de (D.28)]. Assim,

$$H_2(i) \cong \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{V_2}} \int_0^\infty \frac{1}{\prod_{k=(N-M+1)/2}^{N/2} (\varpi - \tilde{\varpi}_k)} d\varpi, & i = 1, 2, \dots, N-M \\ \frac{1}{2\lambda_i \sqrt{V_2}} \int_0^\infty \frac{1}{(\varpi - \varpi_i) \prod_{k=(N-M+1)/2}^{N/2} (\varpi - \tilde{\varpi}_k)} d\varpi, & i = N-M+1, \dots, N \end{cases}$$
(D.29)

---

<sup>26</sup> O cálculo de  $\mathbf{R}_2$  (utilizada no Capítulo 4) é apresentado aqui apenas para sinal de entrada correlacionado, pois para sinal de entrada branco,  $\mathbf{R}_2$  é determinada através de outro procedimento baseado na Suposição S5 (veja Seção 4.2).

onde  $\tilde{\omega}_k = -\sqrt{\omega_{2k}\omega_{2k-1}}$  para  $k = (N - M + 1)/2, \dots, N/2$ . Agora, utilizando expansão por frações parciais no integrando de (D.29) (assumindo que o denominador possui raízes distintas, o que é usual para sinal correlacionado) e integrando cada fração resultante, tem-se

$$H_2(i) \cong \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{V_2}} \sum_{\ell=1}^{M/2} c_{\ell,1} \ln(-\tilde{\omega}_\ell), & i = 1, 2, \dots, N - M \\ -\frac{1}{2\lambda_i \sqrt{V_2}} \left[ a_{1,i} \ln(-\tilde{\omega}_i) + \sum_{\ell=1}^{M/2} b_{\ell,i} \ln(-\tilde{\omega}_\ell) \right], & i = N - M + 1, \dots, N \end{cases} \quad (D.30)$$

com

$$c_\ell = \frac{1}{\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq \ell}}^{M/2} (\tilde{\omega}_\ell - \tilde{\omega}_q)} \quad (D.31)$$

e com  $a_{1,i}$  e  $b_{\ell,i}$  dados por (D.16) e (D.17), respectivamente.

Finalmente,  $\mathbf{R}_2$  pode ser computada por (D.27) e (D.30).

### D.5 DETERMINAÇÃO DE $\mathbf{R}_3$

Em particular, a determinação da matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}_3$  [dada por (4.58)] é realizada através de dois procedimentos distintos dependendo se  $M \geq N$  ou  $M < N$ . Para o caso em que  $M \geq N$ , primeiramente computa-se a matriz  $\mathbf{R}_1$  com dimensão  $M \times M$  (veja Seção D.1) e, então, trunca-se a matriz obtida na dimensão  $N \times N$  para obter  $\mathbf{R}_3$ . Agora, para o caso em que  $M < N$ , adota-se um procedimento similar ao utilizado para a determinação da matriz  $\mathbf{R}_2$  (veja Seção D.4), com a diferença de que agora a matriz truncada  $(\mathbf{Q}_N)_{M,N}$  não é utilizada em (D.27), resultando em

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{Q}_N \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}_N^{-1} \mathbf{R}_{N,N}. \quad (D.32)$$

### D.6 DETERMINAÇÃO DE $\mathbf{R}_4$

Especificamente, a matriz  $\mathbf{R}_4$  dada em (4.61), pode ser computada como

$$\mathbf{R}_4 = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \frac{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^T}{(\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M)^2} f(\mathbf{x}_M) d\mathbf{x}_M \quad (\text{D.33})$$

onde  $f(\mathbf{x}_M)$  representa a função densidade de probabilidade do vetor  $\mathbf{x}_M(n)$  e  $M$  denota a dimensão de  $\mathbf{x}_M(n)$ . Visando dar proceguimento ao cálculo de  $\mathbf{R}_4$ , a seguinte função matricial auxiliar é definida:

$$\mathbf{F}_4(\varpi) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^T}{(\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M)^2} e^{-\varpi \mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M} f(\mathbf{x}_M) d\mathbf{x}_M \quad (\text{D.34})$$

Note que  $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} \mathbf{F}_4(\varpi) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{F}_4(0) = \mathbf{R}_4$ . Agora, utilizando em (D.34) a função densidade de probabilidade de um vetor de variáveis gaussianas [dada por (D.3)] e derivando a expressão resultante duas vezes em relação a  $\varpi$ , obtém-se

$$\frac{d^2 \mathbf{F}_4(\varpi)}{d\varpi^2} = \sqrt{\frac{\det[\mathbf{L}_4(\varpi)]}{\det(\mathbf{R}_{M,M})}} \mathbf{L}_4(\varpi) \quad (\text{D.35})$$

com

$$\mathbf{L}_4(\varpi) = (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{R}_{M,M})^{-1} \mathbf{R}_{M,M}. \quad (\text{D.36})$$

Então, utilizando a decomposição de autovalores  $\mathbf{R}_{M,M} = \mathbf{Q}_M \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T$  em (D.36) (onde  $\mathbf{Q}_M$  é a matriz de autovetores de e  $\mathbf{\Lambda}_M$  é uma matriz diagonal, cujos elementos correspondem aos autovalores de  $\mathbf{R}_{M,M}$ ) e substituindo o resultado obtido em (D.35), tem-se

$$\frac{d^2 \mathbf{F}_4(\varpi)}{d\varpi^2} = \mathbf{Q}_M \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)}} (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T. \quad (\text{D.37})$$

Integrando (D.37) duas vezes em relação a  $\varpi$ , obtém-se

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d^2 \mathbf{F}_4(\varpi)}{d\varpi^2} d\varpi_1 d\varpi_2 = \mathbf{Q}_M \left[ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)}} (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M d\varpi_1 d\varpi_2 \right] \mathbf{Q}_M^T. \quad (\text{D.38})$$

tendo em vista que  $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} \mathbf{F}_4(\varpi) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{F}_4(0) = \mathbf{R}_4$ , tem-se

$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{Q}_M \mathbf{H}_4 \mathbf{Q}_M^T \quad (\text{D.39})$$

com  $\mathbf{H}_4$  denotando uma matriz diagonal com elementos dados por

$$H_4(i) = -\frac{1}{2\sqrt{V_1}} \int_0^\infty \int_{\varpi_2}^\infty \frac{\lambda_i}{(\varpi - \varpi_i) \sqrt{\prod_{k=1}^M (\varpi - \varpi_k)}} d\varpi_1 d\varpi_2 \quad (\text{D.40})$$

onde  $V_1$  e  $\varpi_k$  são dados por (D.11) e (D.12), respectivamente, e  $\lambda_k$  é o  $k$ -ésimo elemento da diagonal de  $\Lambda_M$ . A partir desse ponto, a solução de (D.40) difere para sinal de entrada branco e correlacionado.

#### D.7 SINAL DE ENTRADA BRANCO

Especificamente, assumindo  $M$  par e sinal de entrada  $x(n)$  branco [implicando  $\varpi_k = -1/2\sigma_x^2$  para todo  $k$ , com  $\sigma_x^2$  denotando a variância de  $x(n)$ ], a raiz quadrada do denominador de (D.40) pode ser eliminada e a integral resultante podem ser resolvida analiticamente, resultando em [67]

$$H_4(i) = \frac{1}{M(M-2)\sigma_x^2}. \quad (\text{D.41})$$

#### D.8 SINAL DE ENTRADA CORRELACIONADO

Agora, considerando sinal de entrada correlacionado e  $M$  par, cada par adjacente de variáveis  $\varpi_k$  é substituído por sua média geométrica com multiplicidade dois [visando eliminar a raiz quadrada do denominador de (D.40)]. Assim [66],

$$H_4(i) \cong -\frac{1}{2\sqrt{V_1}} \int_0^\infty \int_{\varpi_2}^\infty \frac{\lambda_i}{(\varpi - \varpi_i) \prod_{k=1}^{M/2} (\varpi - \tilde{\varpi}_k)} d\varpi_1 d\varpi_2 \quad (\text{D.42})$$

onde  $\tilde{\varpi}_k = -\sqrt{\varpi_{2k}\varpi_{2k-1}}$  com  $k = 1, 2, \dots, M/2$ .

Agora, utilizando expansão por frações parciais no integrando de (D.42) (assumindo que o denominador possui raízes distintas, o que é usual para sinal correlacionado) e integrando cada fração resultante, tem-se

$$H_4(i) \cong \frac{1}{2\sqrt{V_1}} \left\{ a_{1,i}[1 - \ln(-\bar{\omega}_i)] + \sum_{\ell=1}^{M/2} b_{\ell,i}[1 - \ln(-\bar{\omega}_\ell)] \right\} \quad (\text{D.43})$$

onde  $a_{1,i}$  e  $b_{\ell,i}$  são dados por (D.16) e (D.17), respectivamente.

Assim, a matriz  $\mathbf{R}_4$  pode ser calculada através de (D.39) e (D.43). Para obter o vetor  $\mathbf{r}_4$  utilizado em (5.50), basta considerar  $\mathbf{r}_4 = \text{diag}(\mathbf{Q}_M^T \mathbf{R}_4 \mathbf{Q}_M) = \text{diag}(\mathbf{H}_4)$ .

VERIFICAÇÃO DA RELAÇÃO  $\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{M,M}^{-1}\mathbf{R}_{M,N}$

Neste apêndice, a relação  $\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{M,M}^{-1}\mathbf{R}_{M,N}$  utilizada para simplificar a expressão do EQM (4.49) é demonstrada. Em particular,  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  denotam matrizes de autocorrelação normalizadas de dimensões  $M \times M$  e  $M \times N$ , respectivamente, e  $\mathbf{R}_{M,M}$  e  $\mathbf{R}_{M,N}$  representam matrizes de autocorrelação (sem a normalização), também de dimensões  $M \times M$  e  $M \times N$ , respectivamente. Em particular, no Capítulo 4, o filtro adaptativo em regime permanente, para sinal de entrada correlacionado, é dado por

$$E[\mathbf{w}(\infty)]_{\text{NLMS}} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{w}_2. \quad (\text{E.1})$$

Agora, caso fosse utilizado o algoritmo LMS (que pode ser entendido como a versão não normalizada do algoritmo NLMS), o filtro adaptativo em regime permanente forneceria

$$E[\mathbf{w}(\infty)]_{\text{LMS}} = \mathbf{R}_{M,M}^{-1}\mathbf{R}_{M,N}\mathbf{w}_2. \quad (\text{E.2})$$

Tendo em vista que as equações de atualização dos algoritmos NLMS e LMS são derivadas através da minimização da mesma métrica de desempenho (isto é, o valor instantâneo do erro quadrático), tem-se que em regime permanente, o valor esperado do filtro adaptativo obtido através do algoritmo NLMS deve ser igual ao obtido através do algoritmo LMS (mesmo quando  $M \neq N$ ). Assim,

$$E[\mathbf{w}(\infty)]_{\text{NLMS}} = E[\mathbf{w}(\infty)]_{\text{LMS}}. \quad (\text{E.3})$$

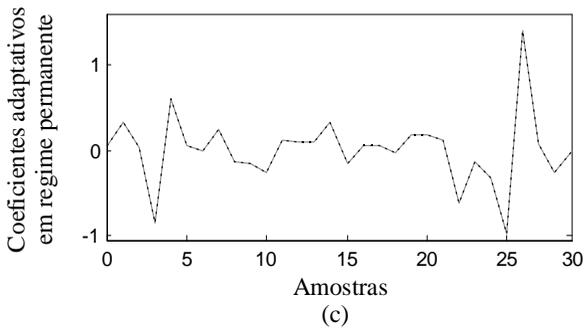
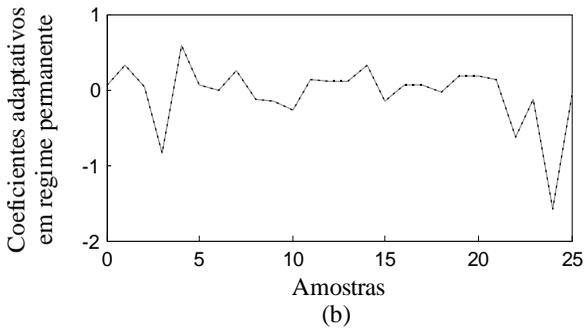
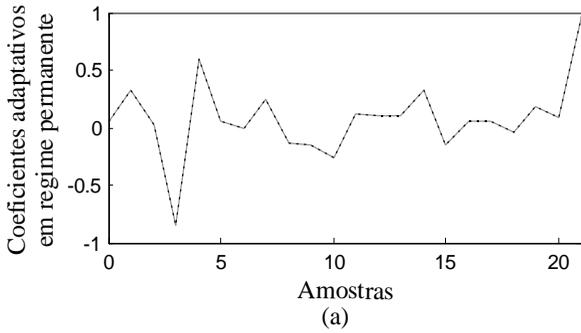
Portanto, utilizando (E.3) em (E.1) e (E.2), a relação

$$\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{M,M}^{-1}\mathbf{R}_{M,N} \quad (\text{E.4})$$

é obtida.

A título de exemplo, na Figura E.1 são apresentados os coeficientes dos filtros adaptativos em regime permanente obtidos através de (E.1) e (E.2), considerando o mesmo cenário do Exemplo 1 do Capítulo 4 e diferentes ordens  $M$  para o filtro adaptativo. Nota-se, da Figura E.1, que os coeficientes dos filtros adaptativos atualizados através dos algoritmos NLMS (linha sólida cinza) e LMS (linha pontilhada escura) atingem os

mesmos valores em regime permanente, independente da ordem  $M$  do filtro adaptativo, estando em acordo com (E.3).



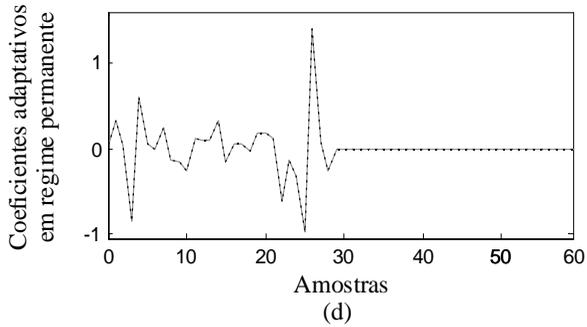


Figura E.1 – Coeficientes dos filtros adaptativos em regime permanente obtidos através do algoritmo NLMS (linha sólida cinza) e do algoritmo LMS (linha pontilhada escura), considerando sinal de entrada correlacionado com  $\chi = 110,58$  [obtido de (4.78) considerando  $\beta_1 = -0,55$  e  $\beta_2 = 0,8$ ]. (a)  $M = 22$ . (b)  $M = 26$ . (c)  $M = N = 30$ . (d)  $M = 60$ .

### DETERMINAÇÃO DE $\mathbf{R}_5(n)$

Neste apêndice, é apresentado o procedimento para a determinação do momento de quarta ordem  $\mathbf{R}_5(n)$  [definido em (5.46)]. Em particular, o procedimento para determinação dessas matrizes tem sido apresentado em [67] (para sinal de entrada branco) e em [66] (considerando sinal de entrada correlacionado), sendo reapresentado aqui visando tornar esse documento autocontido. Especificamente,  $\mathbf{R}_5(n)$  pode ser computada como<sup>27</sup>

$$\mathbf{R}_5(n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \frac{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^T \mathbf{v}(n) \mathbf{v}(n)^T \mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^T}{(\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M)^2} f(\mathbf{x}_M) d\mathbf{x}_M \quad (\text{F.1})$$

onde  $f(\mathbf{x}_M)$  representa a função densidade de probabilidade do vetor  $\mathbf{x}_M(n)$  e  $M$  denota a dimensão de  $\mathbf{x}_M(n)$ . Visando dar proceguimento ao cálculo de  $\mathbf{R}_5(n)$ , a seguinte função matricial auxiliar é definida:

$$\mathbf{F}_5(\varpi, n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{M \text{ integrais}} \frac{\mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^T \mathbf{v}(n) \mathbf{v}(n)^T \mathbf{x}_M \mathbf{x}_M^T}{(\mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M)^2} e^{-\varpi \mathbf{x}_M^T \mathbf{x}_M} f(\mathbf{x}_M) d\mathbf{x}_M. \quad (\text{F.2})$$

Note que  $\lim_{\varpi \rightarrow \infty} \mathbf{F}_5(\varpi, n) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{F}_5(\varpi = 0, n) = \mathbf{R}_5(n)$ . Agora, utilizando em (F.2) a função densidade de probabilidade de um vetor de variáveis gaussianas dada por (D.3) e, na sequência, derivando (F.2) duas vezes em relação a  $\varpi$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_5(\varpi, n)}{\partial \varpi^2} = \sqrt{\frac{\det[\mathbf{L}_5(\varpi)]}{\det(\mathbf{R}_{M,M})}} \mathbf{G}_5(\varpi, n) \quad (\text{F.3})$$

com

---

<sup>27</sup> O índice de tempo  $n$  do vetor  $\mathbf{x}_M(n)$  é desconsiderado aqui visando simplificar a notação.

$$\mathbf{G}_5(\varpi, n) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det[\mathbf{L}_5(\varpi)]}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xx}^T \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \mathbf{xx}^T e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}_M^T \mathbf{L}_5^{-1}(\varpi) \mathbf{x}_M} d\mathbf{x}_M \quad (\text{F.4})$$

e

$$\mathbf{L}_5(\varpi) = (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{R}_{M,M})^{-1} \mathbf{R}_{M,M}. \quad (\text{F.5})$$

Note que (F.4) é, por definição, um momento de quarta ordem de um vetor de variáveis gaussianas ponderado pela matriz  $\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)$ . Assim,

$$\mathbf{G}_5(\varpi, n) = 2\mathbf{L}_5(\varpi) \mathbf{K}(n) \mathbf{L}_5(\varpi) + \mathbf{L}_5(\varpi) \text{tr}[\mathbf{L}_5(\varpi) \mathbf{K}(n)] \quad (\text{F.6})$$

onde  $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)]$ . Agora, utilizando a decomposição de autovalores  $\mathbf{R}_{M,M} = \mathbf{Q}_M \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{Q}_M^T$  em (F.6), (F.5) e (F.3) (onde  $\mathbf{Q}_M$  é a matriz de autovetores de  $\mathbf{R}_{M,M}$  e  $\mathbf{\Lambda}_M$  é uma matriz diagonal, cujos elementos correspondem aos autovalores de  $\mathbf{R}_{M,M}$ ), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_5(\varpi, n)}{\partial \varpi^2} &= \mathbf{Q}_M \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)}} \{ 2(\mathbf{I}_{M,M} \\ &+ 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{K}'(n) (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \\ &+ (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \text{tr}[(\mathbf{I}_{M,M} \\ &+ 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{K}'(n)] \} \mathbf{Q}_M^T. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Agora, integrando (F.7) duas vezes em relação a  $\varpi$ , obtém-se

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_5(\varpi, n)}{\partial \varpi^2} \partial \varpi_1 \partial \varpi_2 \\ &= \mathbf{Q}_M \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{2(\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{K}'(n) (\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M}{\sqrt{\prod_{k=1}^M (1 + 2\lambda_k \varpi)}} \partial \varpi_1 \partial \varpi_2 \mathbf{Q}_M^T \\ &+ \mathbf{Q}_M \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \text{tr}[(\mathbf{I}_{M,M} + 2\varpi \mathbf{\Lambda}_M)^{-1} \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{K}'(n)]}{\sqrt{\prod_{k=1}^M (1 + 2\lambda_k \varpi)}} \partial \varpi_1 \partial \varpi_2 \mathbf{Q}_M^T. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Tendo em vista que somente os elementos da diagonal de  $\mathbf{K}'(n) = \mathbf{Q}_M^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q}_M$  são considerados em (5.50) e lembrando que o resultado obtido é pré- e pós-multiplicado por  $\mathbf{Q}_M^T$  e  $\mathbf{Q}_M$ , respectivamente, então, (F.8) é reescrita como

$$\mathbf{f}_5(n) = (2\mathbf{T} + \mathbf{L})\mathbf{k}'(n) \quad (\text{F.9})$$

onde  $\mathbf{k}'(n)$  e  $\mathbf{f}_5(n)$  denotam os elementos da diagonal de  $\mathbf{Q}_M^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q}_M$  e de  $\mathbf{Q}_M^T \mathbf{F}_5(\varpi, n) \mathbf{Q}_M$  para  $\varpi = 0$ , respectivamente. Em particular,  $\mathbf{T}$  é uma matriz diagonal com elementos dados por

$$T(i) = \frac{1}{4\sqrt{V_1}} \int_0^\infty \int_{\varpi_2}^\infty \frac{\lambda_i^2}{(\varpi - \varpi_i)^2 \sqrt{\prod_{k=1}^M (\varpi - \varpi_k)}} d\varpi_1 d\varpi_2. \quad (\text{F.10})$$

A matriz  $\mathbf{L}$  é simétrica, cujos elementos são computados por

$$L(i, j) = \frac{1}{4\sqrt{V_1}} \int_0^\infty \int_{\varpi_2}^\infty \frac{\lambda_i \lambda_j}{(\varpi - \varpi_i)(\varpi - \varpi_j) \sqrt{\prod_{k=1}^M (\varpi - \varpi_k)}} d\varpi_1 d\varpi_2 \quad (\text{F.11})$$

onde  $V_1$  e  $\varpi_k$  são dados por (D.11) e (D.12), respectivamente, e  $\lambda_k$  é o  $k$ -ésimo elemento da diagonal de  $\mathbf{\Lambda}_M$ . Nesse ponto, a solução das matrizes  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{L}$  diferem para sinais de entrada branco e correlacionado.

### F.1 SINAL DE ENTRADA BRANCO

Especificamente, assumindo  $M$  par e sinal de entrada  $x(n)$  branco [implicando  $\varpi_k = -1/2\sigma_x^2$  para todo  $k$ , com  $\sigma_x^2$  denotando a variância de  $x(n)$ ], a raiz quadrada dos denominadores de (F.10) e (F.11) pode ser eliminada e as integrais resultantes podem ser resolvidas analiticamente, resultando em [67]

$$T(i) = \frac{1}{M(M+2)} \quad (\text{F.12})$$

e

$$L(i, j) = \frac{1}{M(M+2)}. \quad (\text{F.13})$$

F.2 SINAL DE ENTRADA CORRELACIONADO

Agora, assumindo sinal de entrada  $x(n)$  correlacionado e  $M$  par, cada par adjacente de variáveis  $\varpi_k$  é substituído por sua média geométrica com multiplicidade dois [visando eliminar a raiz quadrada dos denominadores de (F.10) e (F.11)]. Assim [66],

$$T(i) \cong \frac{1}{4\sqrt{V_1}} \int_0^\infty \int_{\varpi_2}^\infty \frac{\lambda_i^2}{(\varpi - \varpi_i)^2 \prod_{k=1}^{M/2} (\varpi - \tilde{\varpi}_k)} d\varpi_1 d\varpi_2. \quad (\text{F.14})$$

e

$$L(i, j) \cong \frac{1}{4\sqrt{V_1}} \int_0^\infty \int_{\varpi_2}^\infty \frac{\lambda_i \lambda_j}{(\varpi - \varpi_i)(\varpi - \varpi_j) \prod_{k=1}^{M/2} (\varpi - \tilde{\varpi}_k)} d\varpi_1 d\varpi_2 \quad (\text{F.15})$$

onde  $\tilde{\varpi}_k = -\sqrt{\varpi_{2k} \varpi_{2k-1}}$  para  $k = 1, 2, \dots, M/2$ . Agora, utilizando expansão por frações parciais no integrando de (F.14) e (F.15) (assumindo que os denominadores possuem raízes distintas, o que é usual para sinal correlacionado), integrando cada fração resultante, tem-se

$$T(i) = L(i, i)$$

$$\cong \frac{1}{4\sqrt{V_1}} \left( -a_{1,i} \ln(-\varpi_i) + \sum_{\ell=1}^{M/2} \frac{b_{\ell,i} \{ \tilde{\varpi}_\ell [1 - \ln(-\tilde{\varpi}_\ell)] - \varpi_i [1 - \ln(-\varpi_i)] \}}{(\tilde{\varpi}_\ell - \varpi_i)} \right) \quad (\text{F.16})$$

e para  $i \neq j$ ,

$$L(i, j) \cong \frac{1}{4\sqrt{V_1}} \left\{ \frac{a_{1,i} \varpi_i [1 - \ln(-\varpi_i)]}{(\varpi_i - \varpi_j)} + \frac{a_{1,j} \varpi_j [1 - \ln(-\varpi_j)]}{(\varpi_j - \varpi_i)} + \sum_{\ell=1}^{M/2} \frac{b_{\ell,i} \tilde{\varpi}_\ell [1 - \ln(-\tilde{\varpi}_\ell)]}{(\tilde{\varpi}_\ell - \varpi_j)} \right\} \quad (\text{F.17})$$

onde  $a_{1,i}$  e  $b_{\ell,i}$  são dados por (D.16) e (D.17), respectivamente.

Assim, as matrizes **T** e **L** utilizadas em (5.50) podem ser completamente determinadas.

## REFERÊNCIAS

- [1] B. Widrow and S. D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*, 1st ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1985.
- [2] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [3] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 5 th. Pearson, 2013.
- [4] P. S. R. Diniz, *Adaptive Filtering*, 4th ed. Boston, MA: Springer, 2013.
- [5] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, 2nd ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.
- [6] B. Widrow, J. R. Glover, J. M. McCool, J. Kaunitz, C. S. Williams, R. H. Hearn, J. R. Zeidler, E. J. Dong, and R. C. Goodlin, “Adaptive noise cancelling: Principles and applications,” *Proc. IEEE*, vol. 63, no. 12, pp. 1692–1716, Dec. 1975.
- [7] L. Griffiths and C. Jim, “An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 30, no. 1, pp. 27–34, Jan. 1982.
- [8] S. U. H. Qureshi, “Adaptive equalization,” *IEEE Commun. Mag.*, vol. 73, no. 9, pp. 1349–1387, Sep. 1985.
- [9] H. Cox, R. Zeskind, and M. Owen, “Robust adaptive beamforming,” *IEEE Trans. Acoust.*, vol. ASSP-35, no. 10, pp. 1365–1376, Oct. 1987.
- [10] S. M. Kuo and D. R. Morgan, “Active noise control: A tutorial review,” *Proc. IEEE*, vol. 87, no. 6, pp. 943–973, Jun. 1999.
- [11] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, “On the constrained stochastic gradient algorithm: model, performance, and improved version,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 4, pp. 1304–1315, Apr. 2009.
- [12] B. Widrow, D. Shur, and S. Shaffer, “On adaptive inverse control,” in *Proc. 15th Asilomar Conf.*, Pacific Grove, CA, Nov. 1981, pp. 185–189.

- [13] J. C. Burgess, “Active adaptive sound control in a duct: A computer simulation,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 70, no. 3, pp. 715–726, Sep. 1981.
- [14] J. Nagumo and A. Noda, “A learning method for system identification,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 12, no. 3, pp. 282–287, Jun. 1967.
- [15] A. E. Albert and L. A. Gardner Jr., *Stochastic Approximation and Nonlinear Regression*, 1st ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1967.
- [16] S. J. Elliott and P. A. Nelson, “Active noise control,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 10, no. 4, pp. 12–35, Oct. 1993.
- [17] S. M. Kuo and D. R. Morgan, *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*, 1st ed. New-York: Wiley-Interscience, 1996.
- [18] S. J. Elliott, *Signal Processing for Active Control*, 1st ed. San Diego, CA: Academic Press, 2000.
- [19] N. V. George and G. Panda, “Advances in active noise control: A survey, with emphasis on recent nonlinear techniques,” *Signal Process.*, vol. 93, no. 2, pp. 363–377, Feb. 2013.
- [20] D. R. Morgan, “History, applications, and subsequent development of the FxLMS algorithm,” *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 30, no. 3, pp. 172–176, May 2013.
- [21] A. Gonzalez, M. Ferrer, M. de Diego, G. Piñero, and J. J. Garcia-Bonito, “Sound quality of low-frequency and car engine noises after active noise control,” *J. Sound Vib.*, vol. 265, no. 3, pp. 663–679, Aug. 2003.
- [22] M. J. Ji and S. M. Kuo, “An active harmonic noise equalizer,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Minneapolis, MN, USA, Apr. 1993, pp. 189–192.
- [23] S. M. Kuo and M. J. Ji, “Development and analysis of an adaptive noise equalizer,” *IEEE Trans. Speech, Audio Process.*, vol. 3, no. 3, pp. 217–222, May 1995.
- [24] A. Gonzalez, M. de Diego, M. Ferrer, and G. Pinero, “Multichannel active noise equalization of interior noise,” *IEEE*

- Trans. Audio, Speech Lang. Process.*, vol. 14, no. 1, pp. 110–122, Jan. 2006.
- [25] D. R. Morgan, “An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 28, no. 4, pp. 454–467, Aug. 1980.
- [26] L. Wang and W. S. Gan, “Convergence analysis of narrowband active noise equalizer system under imperfect secondary path estimation,” *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Processing*, vol. 17, no. 4, pp. 566–571, May 2009.
- [27] Y. Xiao, A. Ikuta, and K. Khorasani, “Stochastic analysis of the FXLMS-based narrowband active noise control system,” *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process.*, vol. 16, no. 5, pp. 1000–1014, Jul. 2008.
- [28] Y. Xiao, L. Ma, and K. Hasegawa, “Properties of FXLMS-based narrowband active noise control with online secondary-path modeling,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 8, pp. 2931–2949, Aug. 2009.
- [29] J. Liu, Y. Xiao, J. Sun, and L. Xu, “Analysis of online secondary-path modeling with auxiliary noise scaled by residual noise signal,” *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process.*, vol. 18, no. 8, pp. 1978–1993, Nov. 2010.
- [30] Y. Xiao, “A new efficient narrowband active noise control system and its performance analysis,” *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process.*, vol. 19, no. 7, pp. 1865–1874, Sep. 2011.
- [31] E. Bjarnason, “Analysis of the filtered-X LMS algorithm,” *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 3, no. 6, pp. 504–514, Nov. 1995.
- [32] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, and N. J. Bershad, “Mean weight behavior of the filtered-X LMS algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, no. 4, pp. 1061–1075, Apr. 2000.
- [33] O. J. Tobias, J. C. M. Bermudez, R. Seara, and N. J. Bershad, “An improved model for the second moment of the Filtered-X LMS algorithm,” in *Proc. of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control*

- Symposium*, Lake Louise, Alberta, Canada, Oct. 2000, pp. 337–341.
- [34] L. Wang and W. S. Gan, “Analysis of misequalization in a narrowband active noise equalizer system,” *J. Sound Vib.*, vol. 311, no. 3–5, pp. 1438–1446, Apr. 2008.
- [35] S. J. Elliott, P. A. Nelson, I. M. Stothers, and C. C. Boucher, “In-flight experiments on the active control of propeller-induced cabin noise,” *J. Sound Vib.*, vol. 140, no. 2, pp. 219–238, Jul. 1990.
- [36] R. W. Stewart, I. Swan, and D. Schmid, “Real world active noise cancellation using a multichannel DSP56001 system,” in *Proc. IEE Colloquium on Audio DSP - Circuits Syst.*, London, UK, Nov. 1993, pp. 1–8.
- [37] M. Winberg, S. Johansson, T. Lagö, and I. Claesson, “A new passive/active hybrid headset for a helicopter application,” *Int. J. Acoust. Vib.*, vol. 4, no. 2, pp. 51–58, 1999.
- [38] S. Johansson, I. Claesson, S. Nordebo, and P. Sjosten, “Evaluation of multiple reference active noise control algorithms on Dornier 328 aircraft data,” *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 7, no. 4, pp. 473–477, Jul. 1999.
- [39] S. Johansson, P. Sjosten, S. Nordebo, and I. Claesson, “Performance of a multiple- versus a single-reference MIMO ANC algorithm based on a Dornier 328 test data set,” *Int. J. Acoust. Vib.*, vol. 5, no. 2, pp. 77–88, Dec. 1997.
- [40] C. C. Boucher, S. J. Elliott, and P. a. Nelson, “Effect of errors in the plant model on the performance of algorithms for adaptive feedforward control,” *IEE Proc. F Radar Signal Process.*, vol. 138, no. 4, pp. 313–319, Aug. 1991.
- [41] A. Omoto and S. J. Elliott, “The effect of structured uncertainty in the acoustic plant on multichannel feedforward control systems,” *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 7, no. 2, pp. 204–212, Mar. 1999.
- [42] J. Glover Jr, “Adaptive noise canceling applied to sinusoidal interferences,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 25, no. 6, pp. 484–491, Dec. 1977.

- [43] M. Ferrer, A. Gonzalez, M. de Diego, and G. Pinero, "Convex Combination Filtered-X Algorithms for Active Noise Control Systems," *IEEE Trans. Audio. Speech. Lang. Process.*, vol. 21, no. 1, pp. 156–167, Jan. 2013.
- [44] J. Liu, "Novel adaptation scheme in the NLMS algorithm for echo cancellation," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 8, no. 1, pp. 20–22, Jan. 2001.
- [45] L. Mailaender, "Linear MIMO equalization for CDMA downlink signals with code reuse," *IEEE Trans. Wirel. Commun.*, vol. 4, no. 5, pp. 2423–2434, Sep. 2005.
- [46] C. Paleologu, S. Ciochina, and J. Benesty, "Variable step-size NLMS algorithm for under-modeling acoustic echo cancellation," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 15, pp. 5–8, Jan. 2008.
- [47] M. L. Gujrathi, J. Homer, I. V. L. Clarkson, R. Cendrillon, and M. Moonen, "A detection guided normalized least-mean-squares adaptive partial crosstalk canceller for multi-user DSL environments," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 16, no. 6, pp. 489–492, Jun. 2009.
- [48] N. R. Yousef and A. H. Sayed, "A unified approach to the steady-state and tracking analyses of adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 2, pp. 314–324, Feb. 2001.
- [49] N. R. Yousef and A. H. Sayed, "Ability of adaptive filters to track carrier offsets and channel nonstationarities," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 2, pp. 1533–1544, Jul. 2002.
- [50] M. Moinuddin and A. Zerguine, "Tracking analysis of the NLMS algorithm in the presence of both random and cyclic nonstationarities," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 10, no. 9, pp. 256–258, Sep. 2003.
- [51] E. V. Kuhn, J. E. Kolodziej, and R. Seara, "Stochastic modeling of the NLMS algorithm for complex Gaussian input data and nonstationary environment," *Digit. Signal Process.*, vol. 30, pp. 55–66, Jul. 2014.
- [52] N. J. Bershad, E. Eweda, and J. C. M. Bermudez, "Stochastic analysis of the LMS and NLMS Algorithms for cyclostationary

- white Gaussian inputs,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 9, pp. 2238–2249, May 2014.
- [53] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, 1st ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- [54] E. V. Kuhn, F. D. C. De Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, “On the stochastic modeling of the IAF-PNLMS algorithm for complex and real correlated Gaussian input data,” *Signal Process.*, vol. 99, pp. 103–115, Jun. 2014.
- [55] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.
- [56] B. Widrow, J. M. McCool, M. G. Larimore, and C. R. Johnson, “Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter,” *Proc. of the IEEE*, vol. 64, no. 8, pp. 1151–1162, Aug. 1976.
- [57] J. a. Richards, *Analysis of Periodically Time-Varying Systems*, 1st ed. Kensington, AU: Springer-Verlag, 1983.
- [58] A. S. Mehr and T. Chen, “On alias-component matrices of discrete-time linear periodically time-varying systems,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 8, no. 4, pp. 114–116, Apr. 2001.
- [59] P. Vanassche, G. Gielen, and W. Sansen, “Symbolic modeling of periodically time-varying systems using harmonic transfer matrices,” *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 21, no. 9, pp. 1011–1024, Sep. 2002.
- [60] D. C. McLernon, “Relationship between an LPTV system and the equivalent LTI MIMO structure,” *IEE Proc. - Vision, Image, Signal Process.*, vol. 150, no. 3, pp. 133–141, Jun. 2003.
- [61] W. Y. W. Yin and A. S. Mehr, “Identification of linear periodically time-varying systems using periodic sequences,” in *Proc. 2009 IEEE Control Applications (CCA) & Intelligent Control (ISIC)*, Saint Petersburg, Russia, Jul. 2009, no. 2, pp. 1455–1459.
- [62] W. Yin and a. Saadat Mehr, “Least square identification of alias components of linear periodically time-varying systems and

- optimal training signal design,” *IET Signal Process.*, vol. 4, no. October 2008, pp. 149–157, Apr. 2010.
- [63] J. Nie, R. Conway, and R. Horowitz, “Optimal H control for linear periodically time-varying systems in hard disk drives,” *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 18, no. 1, pp. 212–220, Feb. 2013.
- [64] M. Niedzwiecki, *Identification of Time-Varying Processes*, 1st ed. Chichester, UK: Wiley, 2000.
- [65] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-time Signal Processing*, 2nd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1999.
- [66] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, and R. Seara, “An improved stochastic model of the NLMS algorithm for correlated input data,” in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Poznan, Poland, Sep. 2007, pp. 360–364.
- [67] M. Rupp, “Behavior of LMS and NLMS algorithms in the presence of spherically invariant processes,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 3, pp. 1149–1160, Mar. 1993.
- [68] E. Vinicius, J. Ernesto, and R. Seara, “Analysis of the TDLMS algorithm operating in a nonstationary environment,” *Digit. Signal Process.*, vol. 45, pp. 69–83, Oct. 2015.
- [69] E. W. Ziegler and J. W. Gardner, “Active sound attenuation system for engine exhaust systems and the like,” US Patent 5097923.
- [70] D. P. Pfaff, N. S. Kapsokavathis, and N. A. Parks, “Method for actively attenuating engine generated noise,” US Patent 5146505.
- [71] R. Cabell, D. Palumbo, and J. Vipperman, “A principal component feedforward algorithm for active noise control: flight test results,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 9, no. 1, pp. 76–83, Jan. 2001.
- [72] T. Meurers, S. M. Veres, and S. J. Elliot, “Frequency selective feedback for active noise control,” *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 22, no. 4, pp. 32–41, Aug. 2002.

- 
- [73] G. Kannan, A. a Milani, I. M. S. Panahi, and R. W. Briggs, “An efficient feedback active noise control algorithm based on reduced-order linear predictive modeling of FMRI acoustic noise.,” *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 58, no. 12, pp. 3303–9, Dec. 2011.
- [74] K. Mayyas, “Performance analysis of the deficient length LMS adaptive algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 8, pp. 2727–2734, Aug. 2005.