

Paulo Vitor Larroyd

**UM MODELO DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA
COM REPRESENTAÇÃO INDIVIDUALIZADA DAS USINAS
HIDRELÉTRICAS NO PLANEJAMENTO DE MÉDIO PRAZO
DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador:

Prof. Dr. Erlon Cristian Finardi.

Florianópolis
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Larroyd, Paulo Vitor

UM MODELO DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA COM REPRESENTAÇÃO
INDIVIDUALIZADA DAS USINAS HIDRELÉTRICAS NO PLANEJAMENTO DE
MÉDIO PRAZO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA / Paulo Vitor Larroyd ;
orientador, Erlon Cristian Finardi - Florianópolis, SC,
2016.

190 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica.

Inclui referências

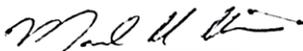
1. Engenharia Elétrica. 2. Programação Estocástica. 3.
Planejamento de Médio Prazo da Operação Hidrotérmica. 4.
Modelagem de Usinas Hidrelétricas. I. , Erlon Cristian
Finardi. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Paulo Vitor Larroyd

**UM MODELO DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA
COM REPRESENTAÇÃO INDIVIDUALIZADA DAS USINAS
HIDRELÉTRICAS NO PLANEJAMENTO DE MÉDIO PRAZO
DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA**

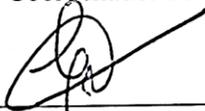
Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração Sistemas de Energia Elétrica, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 30 de novembro de 2016.



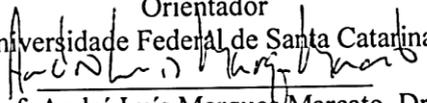
Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:



Prof. Erlon Cristian Finardi, Dr.
Orientador

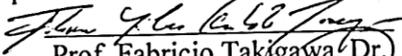
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. André Luís Marques Marcato, Dr.
Universidade Federal de Juiz de Fora



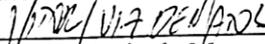
Eng. Vitor Silva Duarte, Dr.
Operador Nacional do Sistema Elétrico



Prof. Fabricio Takigawa, Dr.
Instituto Federal de Santa Catarina



Prof. Rafael Nilson Rodrigues, Dr.
Instituto Federal de Santa Catarina



Eng. Vitor Luiz de Matos, Dr.
Plan4 Engenharia Ltda

AGRADECIMENTOS

Esta dissertação foi desenvolvida no Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica (LabPlan), para o curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina (PPGEEL). Gostaria de agradecer todas as pessoas que contribuíram na concepção e desenvolvimento deste trabalho. Dentre as quais se valem citar:

O professor Erlon Cristian Finardi, pela orientação, ensinamentos, amizade, incentivos e discussões durante todo o período do doutorado, que culminaram nesta tese.

O colega Vitor Luiz de Mattos, pelas discussões, amizade, e constante apoio durante todo o trabalho, inclusive pela participação como membro da banca de avaliação.

Os demais membros da banca avaliadora, André Luís Marques Marcato, Vitor Silva Duarte, Fabrício Takigawa e Rafael Nilson Rodrigues, pelas discussões e contribuições na avaliação do presente trabalho.

Os demais professores do LabPlan, do Laboratório de Sistemas de Potência (Labspot) e do PPGEEL, pelas importantes contribuições para a minha formação.

Destaco TODAS as amigas dos colegas de laboratório e programa de pós-graduação realizadas nesse período. Assim como os demais amigos de longa data que sempre me auxiliaram e apoiaram.

A minha família, pelo incessante apoio ao longo desse período. Em especial, ao meu falecido pai, Luiz Larroyd, minha mãe, Elzira, e meus irmãos, Carmen, Marlene, Fábio, Aretusa e Angela, por todo o suporte, incentivo e carinho.

Agradeço também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte para realização desse trabalho.

Finalmente, agradeço à minha esposa e melhor amiga Morgana Moretti pelo apoio e carinho em todo o período da pós-graduação.

You develop an instant global consciousness, a people orientation, an intense dissatisfaction with the state of the world, and a compulsion to do something about it. From out there on the moon, international politics look so petty. You want to grab a politician by the scruff of the neck and drag him a quarter of a million miles out and say, 'Look at that, you son of a bitch'.

(Edgar D. Mitchell)

RESUMO

O problema do Planejamento de Médio Prazo da Operação hidrotérmica (PMPO) possui papel fundamental na coordenação dos sistemas elétricos que dependem fortemente de eletricidade proveniente de fontes hídricas. O objetivo do PMPO é definir uma política de operação ótima que minimiza o custo de operação para o atendimento da demanda por energia em um horizonte de médio prazo. Nesse contexto, o método da Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) é amplamente utilizado para o cálculo de políticas de operação na solução do problema do PMPO. Além disso, destaca-se que para a incorporação das incertezas associadas às afluências, um modelo linear multiestágio estocástico é atribuído ao PMPO. No caso brasileiro, algumas simplificações são adotadas na representação das decisões hidrelétricas com o objetivo de se reduzir o esforço computacional. A principal simplificação adotada é a modelagem de Reservatórios Equivalentes de Energia (REE) na representação de um conjunto de decisões hidrelétricas mensais. Neste trabalho, as decisões de cada hidrelétrica do sistema são modeladas individualmente, de modo que a abordagem por REEs é completamente sobrepujada. Assim, o desempenho do cálculo da política de operação na PDDE é diretamente afetado pela elevada dimensão do modelo individualizado do PMPO. Logo, o principal objetivo deste trabalho consiste em calcular políticas de operação de boa qualidade para o modelo individualizado estocástico do PMPO, em um tempo razoável de execução da PDDE. Para que esse objetivo seja alcançado, algumas melhorias em termos da modelagem do PMPO e do algoritmo da PDDE são propostas. Os resultados acerca das melhorias propostas são apresentados, de modo que o sistema hidrotérmico brasileiro é considerado nos experimentos computacionais. A partir dos resultados obtidos, podem-se observar vantagens consideráveis na modelagem individual das decisões hidrelétricas no PMPO, em relação à utilização de REEs, para um tempo razoável de execução da PDDE.

Palavras-chave: Programação Estocástica, Planejamento de Médio Prazo da Operação Hidrotérmica, Modelagem de Usinas Hidrelétricas.

ABSTRACT

The Long-Term Hydrothermal Scheduling (LTHS) problem plays an important role in power systems that rely heavily on hydroelectricity. The purpose of the LTHS problem is to define an optimal operation policy that minimizes the operation costs to meet demand over a long horizon. A popular solution approach to this problem is called Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP). To incorporate the inflow uncertainties, the LTHS problem is modeled as a multi-stage linear stochastic problem. In the Brazilian LTHS problem, some simplifications are made in the hydro power plants representation in order to reduce the computational burden. The main simplification is the Equivalent Energy Reservoir (EER) modeling that replaces set of hydro plants monthly decisions. In this work, the EERs approach is overcome and individual decisions for each hydro plant in the hydrothermal system are modeled. As a result, the operation policy computation in SDDP is directly affected by the dimension of the LTHS stochastic framework with individual hydro plant decisions. Consequently, the goal of this work is to achieve reasonable operation policies for the individualized LTHS stochastic modeling in an acceptable and practicable computational time. To accomplish this objective, improvements in the LTHS modeling and SDDP algorithm design are proposed. The results regarding these aspects are presented, which the Brazilian hydrothermal power system are considered. The results show advantages in individual hydro plant decisions modeling, in relation to EERs, for practical computational time assumptions in SDDP execution.

Keywords: Stochastic Programming, Long-Term Hydrothermal Scheduling Problem, Hydro Power Plant Modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação Generalizada de uma Usina Hidrelétrica.	30
Figura 2 – Comparação entre Representações da FPH: não-linear e linear.....	37
Figura 3 – Comparação entre Representações da FPH de P. Primavera.	39
Figura 4 – Exemplo de Cascata Hidráulica.	41
Figura 5 – Comparação das Afluências da Usina de Jaguará.....	44
Figura 6 – Bacias Hidrográficas Consideradas no Modelo do PMPO. .	47
Figura 7 – Afluências Incrementais Observadas e Obtidas a Partir da Bacia.....	48
Figura 8 – Curvas Típicas de Produção de Unidades Termelétricas.	50
Figura 9 – Representação da Rede de Transmissão e Subsistemas Brasileiros.	52
Figura 10 – Modulação da Demanda em Patamares de Carga.	57
Figura 11 – Séries Observadas de Afluência: DocePiracicaba, Itaipu e Paraguai.....	60
Figura 12 – FAP Estimada Para a Bacia do Grande.....	64
Figura 13 – Correlação Espacial da Bacia do São Francisco.	78
Figura 14 – Estatística Básica da Bacia do São Francisco.	79
Figura 15 – Box-Plots da Bacia do São Francisco.	80
Figura 16 – Diferentes Configurações de Árvores de Cenário.....	83
Figura 17 – Árvore de Cenários Aninhada com Amostra Comum.	85
Figura 18 – Exemplos de Suportes Lineares para $Z(y)$	99
Figura 19 – Limite Inferior Estimado com Custos Totais de 10 Árvores.	123
Figura 20 – Limite Superior Estimado com Custo Totais de 10 Árvores.	124
Figura 21 – Brecha de Otimalidade com 100 realizações por estágio.	125
Figura 22 – Brecha de Otimalidade com 100 e 200 realizações por estágio.	126
Figura 23 – Brecha de Otimalidade com 100, 200 e 400 realizações por estágio.	126
Figura 24 – Limites Inferiores Estimados com 5 Árvores nos Casos Proxy.	133
Figura 25 – Limites Superiores Estimados com 5 Árvores nos Casos Proxy.	134
Figura 26 – Brecha de Otimalidade Estimada com IC 95% nos Casos Proxy.	135

Figura 27 – Melhores Resultados dos Casos Avaliados no Tempo Disponível.	137
Figura 28 – Melhores Resultados dos Casos Avaliados em 5 Horas Disponíveis.	139
Figura 29 – Séries Históricas Utilizadas na Simulação de Horizonte Rolante.	141
Figura 30 – Simulação de Horizonte Rolante em 1951 com Modelo a RIN.	143
Figura 31 – Simulação de Horizonte Rolante em 1951 com Modelo a REE.	144
Figura 32 – Custo de Operação Mensal do SIN.	146
Figura 33 – Custo Total de Operação do SIN.	147
Figura 34 – Atendimento à Demanda do SIN.	149
Figura 35 – CMO Médio do Subsistema SE/CO.	150
Figura 36 – Energia Armazenada do SIN.	152
Figura 37 – Custo Total de Operação x Energia Armazenada Final do SIN.	153
Figura 38 – Estratégias de implementação da PDDE.	158

LISTA DE SIGLAS

ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
AS	Amostragem Seletiva
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
CCEE	Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CEPEL	Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CMO	Custo Marginal de Operação
CVaR	<i>Conditional Value-at-Risk</i>
CVU	Custo Variável Unitário
DA	Decomposição Aninhada
DB	Decomposição de Benders
DBG	Decomposição de Benders Generalizada
EA	Energia Armazenada
ENA	Energia Natural Afluente
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
FAP	Função de Autocorrelação Parcial
FC	Nó Fictício: Imperatriz
FCF	Função de Custo Futuro
FCJ	Função de Cota Jusante
FCM	Função de Cota Montante
FPH	Função de Produção Hidrelétrica
HR	Horizonte Rolante
IEA	<i>International Energy Agency</i>
IT50	Nó Fictício: Itaipu 50Hz
IT60	Nó Fictício: Itaipu 60Hz
IV	Nó Fictício: Ivaiporã
LHS	<i>Latin Hypercube Sampling</i>
MC	Monte Carlo
N	Norte
NE	Nordeste
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico

PAR	<i>Periodic AutoRegressive</i> (AutoRegressivo Periódico)
PCPO	Planejamento de Curto Prazo da Operação Hidrotérmica
PD	Programação Dinâmica
PDD	Programação Dinâmica Dual
PDDE	Programação Dinâmica Dual Estocástica
PDE	Programa Diário da Operação Eletroenergético
PDEE	Plano Decenal de Expansão de Energia
PDO	Programação Diária da Operação Hidrotérmica
PE	Programação Estocástica
PEN	Plano da Operação Energética
PG&E	<i>Pacific Gas & Electricity</i>
PH	<i>Progressive Hedging</i>
PL	Programação Linear
PLD	Preço de Liquidação das Diferenças
PMO	Programa Mensal da Operação Energética
PMPO	Planejamento de Médio Prazo da Operação Hidrotérmica
PNL	Programação Não-Linear
POE	Planejamento da Operação Energética
POH	Planejamento da Operação Hidrotérmica
QMC	<i>Quasi-Monte Carlo</i>
REE	Reservatório Equivalente de Energia
RIN	Reservatório Individual
S	Sul
SDP	<i>Stochastic Dynamic Programming</i> (Programação Dinâmica Estocástica)
SE/CO	Sudeste/Centro-Oeste
SEB	Setor Elétrico Brasileiro
SIN	Sistema Interligado Nacional
TF	Thomas & Fiering

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. JUSTIFICATIVA, MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	9
1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
1.3. CONTRIBUIÇÕES	24
1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO	26
2. MODELAGEM DO PROBLEMA	28
2.1. COMPONENTES DO SISTEMA HIDROTÉRMICO	28
2.1.1. Usinas Hidrelétricas	29
2.1.1.1. Função de Produção	31
2.1.1.2. Balanço Hídrico nos Reservatórios	40
2.1.1.3. Caracterização da Representação das Afluências.....	42
2.1.1.4. Afluências por Hidrelétricas e por Bacias Hidrográficas	45
2.1.2. Usinas Termelétricas	49
2.1.2.1. Função de Custo Total de Produção.....	49
2.1.3. Subsistemas	51
2.1.3.1. Intercâmbios de Energia.....	53
2.1.3.2. Demanda de Energia	53
2.1.3.3. Déficit de Energia.....	54
2.1.3.4. Atendimento à Demanda.....	55
2.1.3.5. Patamares de Carga	56
2.2. MODELOS DE GERAÇÃO DE AFLUÊNCIAS	58
2.2.1. O Modelo Periódico Autoregressivo (PAR)	58
2.2.2. O Modelo PAR Lognormal a Três Parâmetros	66
2.2.2.1. Versão com Resíduos Dependentes.....	72
2.2.3. O Modelo Independente (IND) Lognormal	74
2.2.4. O Modelo IND Lognormal a Três Parâmetros	75
2.2.5. A Correlação Espacial Hidrográfica	76
3. ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO	81
3.1. REPRESENTAÇÃO MULTITESTÁGIO ESTOCÁSTICA.....	81
3.1.1. Decomposição Por Estágios	91
3.1.2. Decomposição de Benders	93

3.1.3. Formulação com Modelos Independente Lognormal	100
3.1.4. Formulação com Modelos PAR Lognormal	105
3.2. GERAÇÃO DE AFLUÊNCIAS	111
3.3. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL	113
3.4. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA	116
4. RESULTADOS COMPUTACIONAIS	119
4.1. BASE DE DADOS DO SIN E MODELOS DO PMPO	120
4.2. AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DA SOLUÇÃO	122
4.3. PDDE COM REALIZAÇÕES PROXY	127
4.4. SIMULAÇÕES DE HORIZONTE ROLANTE	140
5. CONCLUSÕES	154
5.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	156
APÊNDICE A - ASPECTOS GERAIS DE IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO	157
REFERÊNCIAS	159

1. INTRODUÇÃO

Caracterizado pelas proporções continentais, o Setor Elétrico Brasileiro (SEB) é o nono maior produtor mundial de energia elétrica – 552 TWh, 2,5% da produção mundial em 2012 – e o segundo maior produtor de eletricidade a partir de recursos hídricos, segundo a *International Energy Agency* (IEA) (IEA, 2014). O Brasil também ocupa a terceira posição nos países com maior importação de energia elétrica e impulsiona o Paraguai como maior exportador do segmento. Ainda, ao se observar atentamente o mercado de energia do continente sul americano, percebe-se que o país possui poucas interligações com as nações vizinhas, de modo que a posição no ranking mundial de importação se dá, em sua grande parte, por conta do acordo comercial da construção da hidrelétrica de Itaipu. Logo, podem-se destacar a relevância do SEB no cenário mundial em termos da magnitude da produção e consumo de eletricidade, bem como a necessidade de autossuficiência na geração de energia elétrica.

Atualmente cerca de 3.500 empreendimentos são responsáveis pela produção elétrica no país, cuja capacidade instalada é de aproximadamente 138 GW. Desse montante, cerca de 67% corresponde às usinas de fonte hídrica, 19% às usinas movidas a combustíveis fósseis, 9% às usinas biomassas e 4% aos parques eólicos e demais fontes renováveis (ANEEL, 2015). A maioria das usinas está conectada aos principais centros de consumo por linhas de transmissão de 138 kV à 750 kV CA e 600 kV CC, cuja extensão total ultrapassa a marca dos exorbitantes 110.000 km (ONS, 2014a). Inclusive, encontra-se no SEB a linha de transmissão de alta tensão mais extensa do mundo, com 2.375 km, interligando subestações dos estados de Rondônia e São Paulo (ABB, 2014).

Ao se observar a preponderância da geração com base na hidroeletricidade, aproximadamente 75% da produção do país, pode-se justificar a necessidade de um sistema cuja rede de transmissão seja altamente robusta e extensa. Isso porque as regiões mais atrativas para a construção desse tipo de recurso de geração não necessariamente são as mais próximas dos centros de consumo, o que pode requerer deslocamentos massivos de energia via linhas de transmissão.

Todavia, destaca-se que a hidroeletricidade possui papel fundamental no desenvolvimento do Brasil em que, desde os primórdios do SEB, as usinas desta natureza são utilizadas como fontes primárias de energia. No caso brasileiro isso é justificado uma vez que a geração por

hidrelétricas é extremamente atrativa, vista a produção massiva de energia por uma fonte barata, abundante e renovável, dado pelo potencial hidráulico dos rios. Contudo, é importante salientar que, por mais que o país possua condições favoráveis para tais empreendimentos, um sistema puramente hidrelétrico dificilmente é implementável na vida real. Isso porque, mesmo que novos projetos de hidrelétricas sejam viáveis, os ciclos de secas das bacias hidrográficas podem perdurar combinadamente por períodos consideráveis ocasionando, dentre outros problemas, o déficit de produção de energia. Além disso, como a capacidade máxima de produção das hidrelétricas é dimensionada para níveis nominais de volumes nos reservatórios, a escassez de água no sistema propicia a redução significativa dos níveis de armazenamento e, por consequência, a redução da capacidade de produção de eletricidade. Logo, um sistema puramente hidrelétrico pode não ser seguro o suficiente para garantir o fornecimento contínuo de energia para o consumo.

Assim, a combinação de usinas hidrelétricas e termelétricas é amplamente encontrada em sistemas elétricos do mundo todo, sistemas esses denominados como hidrotérmicos. Em geral, quando a produção termelétrica é consideravelmente maior que a hidrelétrica, pode-se dizer que o sistema é de base térmica com complementação hídrica. Caso contrário, como ocorre no Brasil, descreve-se o sistema como de base hídrica com complementação térmica. Valem-se ressaltar nesses dois casos que, embora o *mix* de fontes utilizado seja o mesmo, as estratégias de operação e os custos resultantes tendem a ser completamente diferentes (WOOD; WOLLENBERG, 1984).

Um ponto importante na caracterização dos sistemas hidrotérmicos consiste no fator que indica o quanto se pode produzir de energia continuamente, com a capacidade de armazenamento de água do sistema. Esse fator é denominado de regularização do sistema e, quanto maior o seu valor, maior é o período ininterrupto de produção, ao longo de períodos de seca inclusive. Logo, observa-se que o armazenamento nas hidrelétricas pode servir como uma apólice de seguro para um sistema elétrico, uma vez que a segurança energética é incrementada significativamente a partir da construção de usinas com reservatórios de alta capacidade de deplecionamento de água para a produção elétrica.

Historicamente, hidrelétricas com essa característica foram construídas no entorno das regiões de maior demanda de energia do país. Contudo, devido às restrições ambientais, sociais e orçamentárias atuais, a construção desse tipo de empreendimento é cada vez mais limitada. Além disso, com o esgotamento de opções próximas aos centros de carga,

as regiões Norte e Centro-Oeste são aquelas com maiores disponibilidades para novas hidrelétricas, respectivamente com cerca de 80% e 70% do potencial hidrelétrico disponível do total estimado para essas regiões (ELETROBRAS, 2014).

Nesse contexto, o que se observa no panorama recente do SEB é a presença crescente de termelétricas e, também, hidrelétricas que não possuem capacidade significativa de armazenamento dos reservatórios e muito distantes dos principais centros de consumo. Como resultado, a capacidade de regularização do sistema vem decrescendo ao longo dos anos (ARFUX, 2011) e, dessa maneira, novos paradigmas são adicionados nas concepções da produção e segurança energética do país.

No Brasil, o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) é o agente responsável por operar e garantir o funcionamento do SEB, além de definir a parcela de geração de cada usina, conhecido também como o despacho do sistema. Assim, para cumprir com todas as suas atribuições, o ONS é guiado por normativas denominadas de Procedimentos de Rede (ONS, 2014b), cujos módulos descrevem as responsabilidades e procedimentos que o operador deve seguir. Como grande parte da produção elétrica depende das condições hidrológicas, cuja parcela de imprevisibilidade é constante, planejar a operação do sistema é tarefa de suma importância para que o operador garanta um nível satisfatório de segurança no suprimento energético. Assim, dentre os módulos dos Procedimentos de Rede, o Módulo 7 trata do Planejamento da Operação Energética (POE) do SEB.

Ao se atentar para o fato de que o mercado de energia elétrica brasileiro se encontra em um ambiente institucionalmente desregulamentado (NERY, 2012), as características físicas do sistema, tais como as usinas em cachoeiras, podem prover implicações naturais na competição da produção hidrelétrica. Por consequência disso, o operador controla a produção das hidrelétricas, baseando-se, inclusive, em diretrizes do POE, e determina o restante do despacho a partir das ofertas de preço e disponibilidade das termelétricas. Logo, além da segurança do suprimento energético, o POE visa também a otimização dos recursos do SEB. Assim, destaca-se que o modelo de despacho utilizado no Brasil, conhecido como *tight pool* (DA SILVA, 2012), é centralizado no operador e busca o menor custo de operação do sistema dado um critério de risco de suprimento energético pré-estabelecido.

Dentre os submódulos contidos nos procedimentos de rede relacionados com o POE, valem-se destacar os submódulos 7.2 e 7.3, denominados respectivamente como: (i) planejamento anual da operação

energética, o qual resulta no Plano da Operação Energética (PEN); (ii) programação mensal da operação energética, o qual resulta no Programa Mensal da Operação Energética (PMO). Basicamente o PEN consiste nos resultados de uma série de estudos acerca da otimização da operação e de condições estratégicas do Sistema Interligado Nacional (SIN) em um horizonte de cinco anos, em que alguns cenários são avaliados a partir de um cenário de referência. O PEN é elaborado anualmente, embora novas revisões possam ser elaboradas dentro desse período, comumente a cada quadrimestre do ano corrente.

No caso do PMO, o horizonte é o mesmo do PEN, cinco anos, contudo, estudos mais pragmáticos em relação à otimização e segurança da operação do SIN são realizados. O PMO é elaborado mensalmente e revisado semanalmente, no qual importantes diretivas eletroenergéticas são obtidas para a programação do despacho e operação em tempo real do sistema brasileiro – contemplada pelo Módulo 8 programação diária da operação eletroenergética, a qual resulta no Programa Diário da Operação Eletroenergético (PDE).

Nos submódulos PEN e PMO, a base dos estudos consiste na otimização dos recursos eletroenergéticos do SIN em um período de planejamento de cinco anos. A otimização desses recursos implica diretamente na busca pelo menor custo de operação para o sistema. Contudo, resolver matematicamente esse tipo de problema não é tarefa trivial, principalmente por conta das características, muitas delas peculiares, de sistemas hidrotérmicos de grandes proporções (PEREIRA, 1985).

Dentre as principais características observadas, pode-se inicialmente destacar a dimensão do problema associado à operação elétrica em um período de dezenas de meses à frente da operação em tempo real. Além disso, inúmeras incertezas estão intimamente ligadas ao sistema hidrotérmico, tais como aquelas associadas à previsão de aflúências nos rios, à manutenção forçada de unidades de produção das usinas, às contingências nos sistemas de transmissão, à previsão do consumo de energia elétrica, ao preço e disponibilidade de combustíveis e ao cronograma de entrada de novas usinas, linhas de transmissão e demais equipamentos do sistema. Destaca-se também que, quanto maior o número de componentes do sistema hidrotérmico, maior o número de variáveis, coeficientes e equações dos modelos matemáticos correspondentes, modelos esses muitas vezes definidos a partir de funções não lineares e multivariáveis de alta complexidade (ROSENTHAL, 1981).

Ainda, valem-se destacar os acoplamentos espacial e temporal que invulneravelmente estão intrínsecos à operação plurianual do sistema hidrotérmico. O acoplamento espacial pode ser definido como a interação das decisões a serem tomadas no problema, a partir da existência da rede de transmissão e das cascatas hidráulicas no sistema hidrotérmico. Por sua vez, o acoplamento temporal, ocasionado pela possibilidade de armazenamento de água nos reservatórios das hidrelétricas, eleva essa interação para decisões intertemporais ao longo do período de planejamento. Por exemplo, a decisão de quanto produzir de energia em uma hidrelétrica no sul do Brasil em um determinado mês pode influenciar imediatamente na decisão da usina à sua jusante, assim como nas decisões de várias usinas espalhadas por todo o país no mês seguinte.

Na literatura especializada esse tipo de problema é muitas vezes denominado como Planejamento da Operação Hidrotérmica (POH), Coordenação Hidrotérmica, *Hydrothermal Coordination* ou *Hydrothermal Scheduling*. Na maioria dos casos o número de usinas, linhas de transmissão e meses do período de planejamento, além de comportamentos e diversas restrições de tratabilidade complexas, inviabilizam a concepção e solução de um único modelo de otimização, equivalente ao problema completo (LARSON, 1980). Nessas situações, é muito comum que o POH seja tratado por uma cadeia de subproblemas, coordenados entre si, conforme o que vem sendo discutido ao longo das quatro últimas décadas (MOORE; YEH, 1980; PEREIRA; PINTO, 1983, 1984a; SOARES; CARNEIRO, 1991; KLIGERMAN, 1992; GJELSVIK; MO; HAUGSTAD, 2010). Assim os subproblemas podem ser resolvidos, ainda que em alguns casos de maneira simplificada, e uma solução operacional razoável pode ser encontrada para o problema completo.

Seguindo a linha que é utilizada pelo SEB, o POH pode ser dividido em três subproblemas em que, em cada um, procura-se capturar distintas características do problema principal. Nesse trabalho os subproblemas são denominados, conforme a nomenclatura local, como Planejamento de Médio Prazo da Operação Hidrotérmica (PMPO), Planejamento de Curto Prazo da Operação Hidrotérmica (PCPO) e Programação Diária da Operação Hidrotérmica (PDO).

No planejamento de médio prazo a atenção é voltada para todo o período que corresponde ao futuro da operação em tempo real. Assim, as incertezas de médio prazo ganham destaque na modelagem do PMPO, de maneira que outros aspectos importantes do problema principal são simplificados ou mesmo não são considerados nesta etapa. Além disso, nesse tipo de abordagem, as decisões geralmente são tomadas em estágios

de base mensal. Contudo, mesmo com certas aproximações na modelagem, a representação das incertezas do sistema hidrotérmico em termos do número de estágios do horizonte de planejamento pode inviabilizar a solução de um modelo matemático único para o PMPO.

Assim, conforme discutido em Araripe Neto *et al.* (1985); Terry *et al.* (1986); Carvalho e Soares (1987); Maceira *et al.* (1993); Finardi (1999); de Matos (2008) e Larroyd (2012), estratégias de modelagem e solução baseadas na decomposição do subproblema são amplamente utilizadas nesta etapa. No caso do PMPO, a decomposição por estágios é extremamente atrativa porque, a partir do uso de técnicas baseadas na Programação Dinâmica (PD) (BELLMAN, 2003), a solução do problema associado pode resultar em políticas ótimas de operação de médio prazo as quais, por sua vez, podem ser utilizadas na coordenação do PMPO com as etapas subsequentes da cadeia do POH.

A principal vantagem no uso de políticas de operação no acoplamento de subproblemas, tais como as de médio e curto prazos, está na sinalização apropriada do uso da água para a produção de energia no presente, em termos das consequências econômicas incorridas no futuro. Com isso, as decisões a serem tomadas no PCPO podem compreender um período de poucas semanas ou meses, uma vez que o restante do horizonte do POH pode ser representado pela política de operação. Assim, a complexidade da modelagem do planejamento de curto prazo pode ser consideravelmente incrementada em relação ao médio prazo, de maneira que mais detalhes acerca da operação hidrotérmica possam ser representados nesta etapa.

Nesse contexto, a otimização dos recursos eletroenergéticos no PCPO é operacionalmente mais elaborada que no PMPO, embora parte do foco do subproblema continua voltado à representação das incertezas no período da tomada de decisões. No caso brasileiro, esse período é de dois meses, em que no primeiro mês as decisões são tomadas em base semanal e no segundo mês em base mensal. Todavia, destaca-se que como o período da tomada de decisões é relativamente curto e, em sua totalidade, próximo da operação em tempo real, o número e o grau de incertezas deste subproblema são muito menores que o encontrado na abordagem de médio prazo.

Ainda, diferentemente do subproblema do PMPO, geralmente o PCPO pode ser representado matematicamente em um único modelo de otimização. Contudo, a viabilidade de solução depende diretamente da complexidade da modelagem dos componentes do sistema hidrotérmico. Em Pereira e Pinto (1983); dos Santos *et al.* (2009); Gonçalves, Finardi e

da Silva (2012); Gonçalves, Gendreau e Finardi (2013) diferentes estratégias de decomposição são discutidas para a solução do subproblema de curto prazo, de acordo com a modelagem e grau de detalhamento utilizados.

A partir da solução do PCPO, diretrizes operacionais e metas de geração de energia, bem como intercâmbios e armazenamento nos reservatórios, mais assimiláveis à operação em tempo real, podem ser elaboradas para a etapa da PDO. Ainda, dependendo da interação entre as etapas da PCPO e PDO, políticas de operação podem ser obtidas com a solução do subproblema de curto prazo e repassadas para a programação diária. Também é válido mencionar que no caso brasileiro os Custos Marginais de Operação (CMOs) do sistema hidrotérmico, obtidos com a solução do modelo de planejamento de curto prazo, compõem a base do Preço de Liquidação das Diferenças (PLD); ou seja, o preço da energia elétrica no mercado de curto prazo é formado com a solução do modelo matemático do PCPO.

Por fim, na última etapa da cadeia do POH, dada pela programação diária da operação, a tomada de decisão normalmente é de base horária em um horizonte de planejamento que pode variar de alguns dias até duas semanas. Nesta etapa o número de incertezas é significativamente menor que o visto nas etapas anteriores, uma vez que o comportamento e condições aleatórias da operação energética podem ser, de antemão, razoavelmente previstos. Assim, ainda mais detalhes e comportamentos complexos do sistema hidrotérmico podem ser representados na modelagem da PDO. Destaca-se que requisitos elétricos, segurança e confiabilidade da operação do sistema ganham maior atenção na PDO que nas etapas do PCPO e PMPO.

Conforme discutido em Pereira e Pinto (1982); Pereira e Pinto (1984b); Nilsson e Sjelvgren (1996); Svoboda *et al.* (1997); Finardi (2003); Finardi e da Silva (2006); Takigawa (2010); Caicedo Aristizál (2012) e Finardi e Scuzziato (2013), diversas estratégias de solução podem ser aplicadas ao modelo da programação diária dependendo das características e complexidade da modelagem adotada. Logo, os resultados da PDO fornecem importantíssimas diretrizes a serem utilizadas pelo operador para programar o despacho e a operação em tempo real do sistema hidrotérmico.

No caso brasileiro, diversos estudos do PEN estão diretamente associados à solução do subproblema do PMPO para condições estratégicas de interesse do ONS. Além disso, o Plano Decenal de

Expansão de Energia (PDEE¹), realizado pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE), também se baseia em estudos do PMPO para horizontes de longuíssimo prazo. No que diz respeito à elaboração mensal do PMO, ambos os subproblemas de médio e curto prazo são abordados. Nesse caso, uma política de operação é calculada mensalmente a partir da solução do PMPO e repassada para o subproblema do PCPO que, por sua vez, é resolvido semanalmente. Conseqüentemente, os resultados semanais do planejamento de curto prazo são utilizados como metas e diretrizes na execução da PDE e da operação em tempo real do SIN, além de prover o preço semanal do mercado brasileiro de energia por subsistema e patamar de carga. Ainda nesse contexto, destaca-se que não há, oficialmente, um modelo de otimização sendo usado para a PDO, a ser implicitamente resolvido na execução da PDE.

Existem no Brasil ferramentas computacionais específicas para a otimização eletroenergética do SIN, referentes à modelagem e solução dos subproblemas de médio e curto prazos. Essas ferramentas são chamadas de NEWAVE e DECOMP, as quais estão respectivamente associadas ao PMPO e PCPO atribuídos ao caso brasileiro (ONS, 2014b), Procedimentos de Rede Módulo 18. Ambas foram desenvolvidas pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) e são utilizadas pelo ONS na coordenação do POH brasileiro, pela Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) no cálculo semanal do PLD, por demais órgãos estatais e agentes do setor elétrico. Além disso, é de competência da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) a validação dessas ferramentas, que também são conhecidas no setor elétrico como modelos NEWAVE e DECOMP.

Ao se observar o planejamento energético do SEB e, em particular, o problema do POH, pode-se perceber a importância das etapas do PMPO e PCPO tanto para estudos estruturais e de base do sistema hidrotérmico, quanto para a coordenação das etapas do planejamento da operação. Logo, as soluções de médio e curto prazo influenciam diretamente no despacho do sistema e no mercado de energia elétrica brasileiro, quando calculadas com a execução do PMO, e na expansão e estruturação do SEB, quando calculadas na PDEE, PEN e demais estudos não listados.

Assim como em outros países de características hidrotérmicas de base hídrica, a solução e coordenação das etapas do PMPO e PCPO do caso brasileiro consiste em um problema extremamente desafiador, cuja

¹ Originalmente denominado de PDE, porém renomeado para evitar confusão com a sigla da Programação Diária da Operação Eletroenergética.

solução implica no uso de técnicas avançadas de programação matemática, demandando elevado esforço computacional. Consequentemente, todo o avanço de modelagem dos componentes do sistema hidrotérmico representados nessas etapas, estratégias de solução dos modelos de otimização associados e eficiência no uso dos recursos computacionais, é benéfico para a operação e robustez do SEB.

Por esse motivo, o presente trabalho tem como objetivo estudar a etapa do PMPO, com viés no caso brasileiro, de modo que avanços relevantes à operação do SIN possam ser alcançados. Na próxima seção, as motivações e justificativas do trabalho são apresentadas, assim como a descrição dos objetivos gerais e específicos a serem alcançados.

1.1. JUSTIFICATIVA, MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Em meados de 2000 e 2002 o uso dos programas NEWAVE e DECOMP respectivamente foi autorizado pela ANEEL para o planejamento e operação do SIN, além do uso na formação do preço no mercado de curto prazo de energia elétrica brasileiro (ANEEL, 2000, 2002). Desde então, os modelos NEWAVE e DECOMP vêm sendo constantemente atualizados, aperfeiçoados e homologados pelo CEPEL, em que cada nova versão está sujeita à validação da ANEEL.

No caso do PMPO, como a concepção dessa etapa é muito particular à região ou país em que o sistema hidrotérmico se encontra, destaca-se que a modelagem e a estratégia de solução empregadas no NEWAVE decorrem das principais características encontradas no SIN e da cadeia do POH concebida para o caso brasileiro. Assim, segundo Cepel (2013), os principais pontos de modelagem do PMPO representados no NEWAVE podem ser descritos como:

- Formulação linear no modelo matemático de otimização, o que implica que as funções acerca da operação do sistema hidrotérmico sejam linearmente representadas. Assim, comportamentos não lineares, intrínseco às características do sistema, são aproximados por modelos lineares;
- Substituição da rede básica de transmissão por barras interligadas em quatro subsistemas ou, como também conhecidos, submercados de energia: Norte (N), Nordeste (NE), Sul (S) e Sudeste/Centro-Oeste (SE/CO), além do nó fictício Imperatriz (FC). Nesse caso, intercâmbios de

energia entre os subsistemas e nó fictício são utilizados para representar a interligação do SIN;

- Modulação da carga em três patamares: leve, médio e pesado. A modulação da carga por patamar propicia diferentes condições e, conseqüentemente, decisões operativas no modelo de médio prazo. Busca-se, dessa maneira, representar condições extremas da operação do sistema propiciadas pela variação diária do consumo de energia;
- Representação do comportamento das hidrelétricas por Reservatórios Equivalentes de Energia (REEs) (KLIGERMAN, 1992). Dessa maneira, as grandezas hídricas passíveis à produção elétrica são convertidas em energia, de modo que diversos parâmetros são atribuídos aos REEs para descrever o comportamento energético mensal de um grande conjunto de hidrelétricas de características distintas. Com isso, alguns artifícios extras de modelagem são utilizados para retratar o acoplamento hidráulico de usinas presentes em diferentes REEs;
- Representação das incertezas associadas às Energias Naturais Afluentes (ENAs) ao longo do horizonte de planejamento. No caso brasileiro, somente a ENA de cada REE, calculada a partir das aflúncias das hidrelétricas correspondentes, é apropriadamente descrita por um processo estocástico correlacionado. Assim, as demais incertezas do POH são estimadas e tratadas de forma determinística nos casos de referência do PMPO;
- Utilização de um modelo Autoregressivo Periódico (PAR) (MACEIRA et al., 2008), de ordem máxima igual a seis, no processo de geração das ENAs. Isso implica em aprimorar o acoplamento temporal do modelo de médio prazo, a partir da representação das autocorrelações mensais das ENAs;
- Configuração dinâmica do SIN no horizonte de planejamento do PMPO. Com isso, a entrada de novas usinas, mudança da configuração hidrotérmica e alteração de parâmetros do sistema podem ser contempladas dinamicamente ao longo do horizonte do estudo;
- Utilização da Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) como estratégia de solução para o cálculo das

políticas de operação do SIN. No caso da PDDE implementada no NEWAVE, uma variação da modelagem tradicional é utilizada para o cálculo de políticas de operação com aversão a risco baseada no *Conditional Value at Risk* (CVaR) (DINIZ et al., 2012). Além disso, um método alternativo para a amostragem e seleção de cenários do problema, denominado de Amostragem Seletiva (AS) (PENNA; MACEIRA; DAMÁZIO, 2011), é utilizado na PDDE.

Dentre os aspectos de modelagem previamente citados, destaca-se que as representações lineares do comportamento operativo do sistema, a simplificação da rede básica de transmissão e a utilização de REEs na descrição do comportamento hidrelétrico são tópicos que ainda carecem de muito aprimoramento no contexto da otimização dos recursos energéticos do SIN.

No caso da representação linear na modelagem do PMPO, a mesma está intimamente ligada à estratégia de solução utilizada para o cálculo das políticas de operação. Como na etapa de médio prazo são visadas as incertezas do horizonte de planejamento, a representação do processo estocástico dessas incertezas torna a concepção matemática do subproblema muito complexa, cuja modelagem resultante tende a ser arborescente (KALLIO; PORTEUS, 1977) que, nesse caso, cresce exponencialmente com o número de estágios.

Assim, a aplicação da PDDE é bastante atrativa no tratamento do PMPO, pois propicia o cálculo de boas políticas de operação a partir de uma amostra do problema de interesse (DE MATOS, 2012). Contudo, o uso da PDDE necessita que haja garantia da convexidade do problema (SHAPIRO, 2011), o que é verificado no PMPO a partir da modelagem linear. Uma representação não convexa dos componentes do sistema será possível com aprimoramentos significativos na PDDE, conforme os trabalhos de Li, Tomsgard e Barton (2011) e Tomé (2013), ou por meio da utilização de outra estratégia para o cálculo das políticas de operação, que possibilite o tratamento não convexo do subproblema de médio prazo.

Ainda, a premissa de uma modelagem linear para o PMPO também pode ser associada, em parte, à aproximação da rede de transmissão nesta etapa. Embora existam modelos lineares para a representação da rede elétrica, compatíveis com a premissa do PMPO, o número de variáveis para a descrição do sistema de transmissão brasileiro implica em uma expansão radical da dimensão do modelo de otimização, exigindo mais

tempo de processamento na execução da PDDE. Logo, a representação por subsistemas faz com que todos os componentes presentes em um mesmo subsistema sejam implicitamente interconectados, simplificando a concepção do acoplamento eletro-energético existente.

Quanto à utilização de REEs na representação do comportamento de um grupo de hidrelétricas do sistema, pode-se dizer que isso está diretamente associado à redução do número de variáveis de acoplamento temporal na modelagem adotada na etapa do PMPO. Anteriormente à PDDE, no caso brasileiro, estratégias baseadas na Programação Dinâmica Dual (PDD) eram utilizadas para a solução do subproblema de médio prazo (CEPEL, 1977). Contudo, dependendo do número de variáveis correspondentes ao acoplamento temporal hidrelétrico, a explosão combinatorial implícita às estratégias de discretização baseadas na PDD inviabiliza a solução do PMPO. Assim, baseando-se no conceito de que economicamente uma sequência de decisões mensais do total de energia produzido tem maior importância que a alocação desta energia em cada hidrelétrica (ARVANITIDIS; ROSING, 1970a, 1970b), a representação por REE foi adotada. Dessa maneira, aderiu-se a uma configuração de um REE por subsistema, o que associou o número total de REEs ao número de acoplamentos temporais e, também, à quantidade de incertezas a serem representados no modelo de médio prazo.

A partir do uso da PDDE na solução do PMPO, o tamanho do horizonte de planejamento e a qualidade da representação das incertezas puderam ser significativamente aprimorados na modelagem de médio prazo. Contudo, embora na PDDE o número de variáveis com acoplamento temporal, de maneira geral, não inviabiliza a solução do problema de interesse, a representação por REEs continuou a ser adotada no PMPO brasileiro. Todavia, salienta-se que a quantidade de acoplamentos temporais no modelo pode dificultar significativamente a sua solução, mesmo com a utilização da PDDE.

Assim, uma vez que a representação por REEs já era utilizada no subproblema de médio prazo do POH brasileiro e seus principais aspectos familiarizados pelos especialistas do setor elétrico, esse tipo de representação de hidrelétricas continuou sendo utilizado na modelagem do PMPO, a qual propiciou ganhos significativos na implementação e no tempo de execução da PDDE.

Desde então, cerca de duas décadas à frente, muitos avanços foram observados na área da Programação Estocástica (PE), extremamente relevantes à etapa do PMPO. Os principais avanços listados incluem o próprio método da PDDE, (INFANGER; MORTON, 1996; PHILPOTT;

GUAN, 2008; SHAPIRO, 2011; DE MATOS; PHILPOTT; FINARDI, 2012; SHAPIRO; DENTCHEVA; RUSZCZYŃSKI, 2014), novas técnicas de geração e sorteio de cenários, (HOMEM-DE-MELLO; MATOS; FINARDI, 2011; HOMEM-DE-MELLO; BAYRAKSAN, 2014), avaliação da qualidade da política de operação (BAYRAKSAN; MORTON, 2009; CHIRALAKSANAKUL; MORTON, 2004), e aprimoramento da modelagem de problemas do gênero (CERISOLA; LATORRE; RAMOS, 2012; TOMÉ, 2013).

Destaca-se também o constante aprimoramento dos *solvers* comerciais e *open-sources* de Programação Linear (PL) e Não Linear (PNL), muito utilizados pelos métodos de solução da PE. Ainda, destaca-se a grande evolução, ao longo desses anos, dos recursos computacionais de alto desempenho, tanto em linguagens de programação e engenharia de *software*, quanto em armazenamento, processamento e protocolos de comunicação entre equipamentos. Logo, todos esses aspectos evolutivos servem como base motivacional para que a modelagem e a estratégia de solução da etapa do PMPO sejam revistas e aprimoradas.

Em particular, nesse trabalho, uma boa parte da atenção é voltada para a representação do comportamento hidrelétrico na etapa de médio prazo por usinas individualizadas. Com isso, os REEs são desconsiderados na formulação do PMPO, de maneira que decisões operativas individuais a cada usina possam ser tomadas na otimização dos recursos energéticos dessa etapa.

O principal objetivo da individualização na representação das hidrelétricas está na melhor aproximação do modelo matemático com o problema real da operação hidrotérmica, conforme o que já se observa no tratamento do POH de alguns países (GJELSVIK; MO; HAUGSTAD, 2010; PHILPOTT; DE MATOS, 2012). Consequentemente, as políticas de operação são, de fato, calculadas em termos de todas as hidrelétricas em operação no sistema, aumentando a precisão da sinalização econômica do uso dos recursos do SIN ao longo do horizonte de planejamento e aprimorando, inclusive, o acoplamento entre as etapas da PMPO e PCPO. Isso elimina completamente a necessidade da desagregação da política de operação na etapa de curto prazo, necessária na concepção atual, evitando também a propagação de erros intrínsecos a esse tipo de aproximação.

Além disso, a expansão da modelagem do PMPO a partir da representação individualizada das usinas serve como um passo inicial, e fundamental, para que, no futuro, o comportamento de diversos outros atributos do sistema hidrotérmico possa ser incorporado na etapa de médio prazo. Nesse contexto, valem-se mencionar as respostas não

lineares das decisões acerca da produção hidrelétrica e a própria representação da rede de transmissão, a qual interconecta individualmente as usinas do SIN.

Consequentemente, o aprimoramento sugerido no tratamento do subproblema de médio prazo incorre em impactos diretos e profundos nos aspectos da modelagem atual do PMPO, listados anteriormente. Esses impactos vão desde a própria substituição da representação por REEs, e a conversão implícita da água em energia, à representação das incertezas associadas; agora, as afluições que chegam individualmente nas hidrelétricas e não mais as ENAs dos REEs.

Vale destacar que, no panorama atual, a configuração de médio prazo utilizada na execução do PMO prevê a operação, por meio de REEs, de mais de uma centena de hidrelétricas ao longo do horizonte dos próximos cinco anos (ONS, 2015a). Isso reflete diretamente no tamanho do impacto da representação individualizada no modelo, pois algumas poucas decisões de caráter generalizado serão substituídas por centenas outras de caráter próprio, com características físicas mais precisas. Embora nesse trabalho as decisões individuais de médio prazo ainda sejam associadas a aproximações lineares, os números de acoplamentos temporais e espaciais existentes, além do número de incertezas, em termos das afluições, aumentam significativamente a dificuldade do tratamento do modelo matemático correspondente. Assim, pode-se afirmar que a tarefa da representação individual de hidrelétricas na etapa de médio prazo do POH brasileiro é extremamente complexa, desafiadora e relevante à operação ótima do SIN.

Nesse contexto, o objetivo principal desse trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para lidar com a etapa do PMPO do caso brasileiro, a partir da modelagem das decisões individuais a cada usina hidrelétrica na otimização dos recursos energéticos do SIN, dadas as demais premissas atuais do POE. Para que essa tarefa seja cumprida, os objetivos específicos a serem tratados nesse trabalho são:

1. Propor um modelo para a etapa do PMPO, cuja formulação matemática inclua a representação individualizada das hidrelétricas e seja compatível com o método de solução da PDDE. Assim, políticas de operação devem ser calculadas de maneira a descrever apropriadamente o custo futuro da operação do sistema, em termos da operação individual de cada hidrelétrica;

2. Tratar de maneira apropriada as incertezas associadas às afluências nas hidrelétricas. Uma vez que os processos estocásticos das afluências sejam representados no modelo de médio prazo individualizado, a forma com que as variáveis aleatórias correspondentes são utilizadas pode tanto não condizer com a realidade hidrológica do sistema, quanto não ser compatível com as premissas da PDDE. Assim, alternativas para esse tipo de representação devem ser estudadas e avaliadas;
3. Avaliar diferentes estratégias na implementação do algoritmo da PDDE, de maneira a se obter políticas de operação com maior qualidade e em menor tempo computacional. Nesse contexto, buscar também a otimização do uso dos recursos computacionais para incrementar a eficiência do algoritmo;
4. Utilizar uma metodologia robusta para comparar as políticas de operação obtidas com as modelagens por REEs e por hidrelétricas individualizadas.

1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Além da grande contribuição da PE no tratamento do problema do POH, destaca-se também que desde os trabalhos pioneiros de Dantzig (1955); Beale (1955) e Charnes e Cooper (1959), a PE tem se firmado ao longo das últimas décadas como um importante gênero da programação matemática, por meio de desenvolvimentos teóricos bem estabelecidos. Adicionalmente, pesquisas associadas aos algoritmos baseados na PE, e suas relações com aplicações práticas, recebem muita atenção nos dias atuais, o que reflete em um crescente número de especialistas na área. Assim, no contexto do desenvolvimento teórico e aplicação da PE, valem-se citar os trabalhos de Prékopa e Wets (1986), Ermoliev e Wets (1988), Kali e Wallace (1994); Hagle e Sen (1996); Censor (1997); Birge (1997); Dupacová, Hurt e Stepan (2002); Birge e Louveaux (2011), os quais possuem uma extensa lista de referências para outros livros, periódicos entre outros.

No panorama geral, a utilização da PE na concepção das etapas do POH é extremamente atrativa, uma vez que as incertezas de médio e curto prazo da cadeia de planejamento, que impactam significativamente na operação e nos custos do sistema hidrotérmico, podem ser explicitamente incorporadas no problema. Todavia, destaca-se que a ligação da PE com

o próprio problema do planejamento hidrotérmico é bastante natural, uma vez que a concepção e aprimoramento da modelagem dos subproblemas do POH foi possível, em grande parte, graças ao desenvolvimento teórico da PE.

Nesse sentido, vale-se mencionar que, no início da década de 60, a proposta do cálculo do custo incremental da água nos reservatórios das usinas, (STAGE; LARSSON, 1961), e a consolidação da técnica da PD, (BELLMAN; DREYFUS, 1959; BELLMAN, 2003), serviram para o desenvolvimento de métodos para o tratamento da operação hidrotérmica conhecidos como *water value methods* (LINDQVIST, 1962). Basicamente nesses métodos os algoritmos de solução foram concebidos em termos da Programação Dinâmica Estocástica (SDP – *Stochastic Dynamic Programming*). Assim, decisões mensais eram tomadas recursivamente no tempo, de maneira a se obter pontos de uma curva de valores incrementais esperados, os quais formavam a política de operação do sistema. Destaca-se que, embora a representação estocástica das afluições já fosse compreendida nos trabalhos iniciais, a política de operação hídrica era calculada em termos do montante total de armazenamento do sistema, uma vez que esse tipo de abordagem é limitado pela conhecida “Maldição da Dimensionalidade” da SDP.

Um aprimoramento significativo na representação das políticas de operação dos *water value methods* pôde ser obtido a partir da concepção do problema em termos da Programação Dinâmica Dual (PDD) (PEREIRA, 1989; PEREIRA; PINTO, 1985). Nesse caso, incluem-se também os algoritmos denominados *L-Shaped* (VAN SLYKE; WETS, 1969) e *Nested Decomposition* (BIRGE, 1985), compreendidos nesse texto como Decomposição Aninhada (DA). Assim, as políticas passaram a ser calculadas mais eficientemente com o uso recursivo e aninhado da Decomposição de Benders (DB) (BENDERS, 1962), de modo que o empecilho da maldição da dimensionalidade pode ser contornado. Contudo, a solução via PDD passou a ser limitada pelo número de estágios do horizonte de planejamento e o número de realizações das variáveis aleatórias associadas às incertezas do problema.

Proposto como uma extensão da PDD, a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), (PEREIRA, 1989; PEREIRA; PINTO, 1991), surgiu para tratar de problemas estocásticos multiestágio de considerável porte, baseando-se na amostragem da representação das incertezas do problema. Destaca-se também que a proposta inicial da PDDE foi aplicada a uma modelagem baseada no PMPO brasileiro, com horizonte de 10 estágios e representação individual de 39 hidrelétricas do SIN. Na

PDDE, o número de estágios, reservatórios e realizações concebidos na modelagem do problema não inviabilizam, de maneira geral, a obtenção de políticas de operação; porém, implicam diretamente no tempo de execução do algoritmo.

Além disso, como na PDDE as políticas de operação são calculadas iterativamente, visando uma determinada amostra de cenários, não se pode garantir em que ponto da execução do algoritmo as políticas encontradas se referem à solução ótima do problema completo. Contudo, é de consenso que políticas de boa qualidade podem ser obtidas com a PDDE. Assim, conforme se observa em Pereira e Pinto (1991), Philpott e Guan (2008), Shapiro (2011) e Homem-de-Mello, De Matos e Finardi (2011), diversas propostas e discussões acerca do critério de parada do algoritmo podem ser encontradas na literatura especializada. Ainda, pode-se também encontrar trabalhos que discutem a qualidade da política encontrada para o problema modelado, em relação ao problema multiestágio estocástico real (BAYRAKSAN; MORTON, 2009; CHIRALAKSANAKUL; MORTON, 2004; SHAPIRO; PHILPOTT, 2007). Ademais, salienta-se que o método da PDDE é amplamente utilizado nos dias atuais e que muitos aprimoramentos envolvendo a eficiência e eficácia do algoritmo podem ser encontrados em pesquisas recentes (HOMEM-DE-MELLO; MATOS; FINARDI, 2011; SHAPIRO, 2011; DE MATOS; PHILPOTT; FINARDI, 2012; PHILPOTT; DE MATOS, 2012; SHAPIRO et al., 2013; TOMÉ, 2013; DE QUEIROZ; MORTON, 2013; BRANDI et al., 2015).

Outra metodologia que vem sendo utilizada para resolver problemas de planejamento de sistemas de energia elétrica é o *Progressive Hedging* (PH) (ROCKAFELLAR; WETS, 1991), já aplicada em diferentes áreas de conhecimento, como o mercado financeiro (MULVEY; VLADIMIROU, 1991) e fluxo de redes (WATSON; WOODRUFF, 2011). Neste método, separa-se o problema estocástico em vários subproblemas determinísticos, um para cada cenário. Nesse sentido, para garantir a igualdade da solução dos nós comuns aos diferentes cenários, utiliza-se uma técnica baseada no Lagrangiano Aumentado, em que determinadas restrições são relaxadas e penalizadas.

Na área de sistemas de energia elétrica, o PH tem sido aplicado desde a programação diária ao planejamento de longo prazo. Nos trabalhos de Takriti, Birge e Long (1996) e Ryan *et al.* (2013), o PH é utilizado para resolver o problema de programação da geração de termelétricas em que, a diferença entre eles, é que no mais recente são testados vários ajustes para tornar o algoritmo do PH mais eficiente. Por

sua vez, nos trabalhos de Dos Santos *et al.* (2009) e Gonçalves, Finardi e Da Silva (2012) o PH é aplicado ao problema de operação hidrotérmica de curto prazo em que, no primeiro, os autores mostram que o PH é competitivo e no segundo utilizam-se estratégias de parametrização e paralelização do algoritmo para torná-lo mais eficiente. Por fim, existem ainda alguns trabalhos aplicados ao curto/médio prazo que usam o PH como alternativa à PDDE (AWE; GUILLERMO, 2013; CARPENTIER; GENDREAU; BASTIN, 2013a).

Também, valem-se destacar, no contexto da PE, alguns trabalhos que contribuíram de maneira significativa para a modelagem e solução de problemas do gênero. Em Drew e Homem-de-Mello (2006), Homem-de-Mello (2008), Homem-de-Mello, De Matos e Finardi (2011) e Homem-de-Mello e Bayraksan (2014), métodos de sorteio e amostragem alternativos ao tradicional *Monte Carlo* (MC) são utilizados e avaliados em problemas multiestágio estocásticos. Com isso, os métodos de *Quasi-Monte Carlo* (QMC) (NIEDERREITER, 1978, 1992), e *Latin Hypercube Sampling* (LHS) (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979), são incorporados à concepção dos algoritmos da PE, de maneira a reduzir a variância intrínseca à aleatoriedade da representação do processo estocástico das incertezas.

Ademais, destacam-se os trabalhos de Shapiro (2011); Philpott e De Matos (2012), Shapiro *et al.* (2013) e Brandi *et al.* (2015) que contribuíram tanto na modelagem do problema quanto no algoritmo de solução da PDDE com a inclusão de uma métrica de aversão a risco baseada no CVaR para o cálculo de políticas ótimas de operação. Ressalva-se ainda que a avaliação metodológica e qualitativa das políticas com aversão a risco foi realizada na solução de problemas baseados no PMPO brasileiro e neozelandês.

Ao se atentar ao contexto do planejamento de médio prazo, em que as incertezas do POH ganham destaque na formulação do subproblema, percebe-se que os modelos de previsão de afluências são os componentes mais relevantes em termos da representação estocástica desta etapa. Assim, modelos aprimorados de previsão de afluências necessariamente implicam em políticas de operação ressoantes com os ciclos hidrológicos que o sistema hidrotérmico está sujeito.

Conforme discutido em Hipel e Mcleod (1994), o comportamento da vazão afluente dos rios depende de características ambientais e climáticas da região em que a bacia hidrográfica se encontra. Assim, uma representação fidedigna do comportamento das afluências deve, no mínimo, levar em conta a interação entre a atmosfera, solo, subsolo,

lençóis freáticos, aquíferos, demais rios e lagos ao longo do percurso do rio de interesse. Na prática, em problemas como o do POH, todas essas interações são consideradas implícitas nas representações da vazão afluente, de modo que a atenção dos modelos é voltada para correlações temporais e espaciais do comportamento hidrológico de uma região específica.

Inicialmente, destaca-se que em Thomas e Fiering (1962) um modelo pioneiro para a simulação sintética de bacias hidrográficas foi proposto. Esse modelo, conhecido como Thomas & Fiering (TF), permitiu a simulação do comportamento de uma determinada bacia a partir da correlação serial entre dois períodos subsequentes, observada nos registros históricos de afluições. Em contribuição ao modelo mencionado, em Matalas (1967) a partir da utilização de um estimador baseado na condição de máxima verossimilhança, foram feitos muitos aprimoramentos em termos da representação multivariável das afluições e estimação dos parâmetros utilizados.

Em 1970, na primeira edição de Box, Jenkins e Reinsel (2008), os estatísticos George Box e Gwilym Jenkins iniciaram o desenvolvimento da base teórica acerca do tratamento de séries temporais. Dentre as inúmeras contribuições, vale-se citar a modelagem de comportamentos autoregressivos e/ou de médias móveis das séries, utilizando-se das seguintes etapas: identificação do modelo, estimação de parâmetros e verificação do modelo. Os modelos compreendidos por esse trabalho são denominados como modelos Box & Jenkins, em que o modelo TF é concebido como um caso particular dos modelos apresentados.

Ao longo dos anos, muitos trabalhos contribuíram no aprimoramento e consolidação teórica dos modelos Box & Jenkins, dentre os quais se valem destacar os trabalhos de Hipel, Mcleod e Lennox (1977), Mcleod, Hipel e Lennox (1977), Salas, Delleur e Yevjevich (1980); Noakes, Mcleod e Hipel (1985); Hamilton (1994) e Hipel e Mcleod (1994). Nesse contexto, ressalva-se que o modelo PAR recorrentemente é apontado nesses trabalhos como uma das melhores maneiras de representar, mensalmente, o comportamento sazonal de afluições em rios e bacias hidrográficas. Desde então, o modelo PAR é amplamente empregado na geração de séries sintéticas de afluições para estudos como o do POH brasileiro (CEPEL, 2001; MACEIRA; DAMAZIO, 2004; MACEIRA et al., 2008; DE CASTRO et al., 2015; FERREIRA; SOUZA; MARCATO, 2015), que envolvem a previsão e simulação do comportamento hidrológico de determinada região.

Entretanto, conforme observado em Jardim, Maceira e Falcao (2001), a representação das aflúncias via modelo PAR Box & Jenkins é incompatível com a modelagem estocástica e estratégia de solução atualmente empregadas no subproblema de médio prazo, pois, implica no uso de transformações não lineares para o cálculo dos valores de aflúncia. Assim, baseado nos trabalhos de Pereira *et al.* (1984) e Charbeneau (1978), um modelo PAR foi concebido, a partir de alterações na modelagem Box & Jenkins original, e vem sendo utilizado oficialmente no subproblema estocástico do PMPO do caso brasileiro. Contudo, conforme o discutido em de Matos e Finardi (2012), o modelo PAR atribuído ao subproblema brasileiro ainda incorre em não linearidades na modelagem estocástica de médio prazo, que, por consequência, implica que políticas de operação de má qualidade possam ser calculadas e utilizadas na coordenação do POH.

Para contornar esse problema, uma abordagem alternativa ao modelo PAR aplicado ao PMPO brasileiro foi proposta em de Matos, Larroyd e Finardi (2014). Com isso, pôde-se garantir o cálculo de políticas de operação ótimas via PE, sem comprometer a representação das ENAs via correlação temporal. Além disso, o modelo proposto também se mostrou bastante atrativo nas comparações de previsão e simulação de aflúncias, realizadas entre os demais modelos empregados nesse tipo de aplicação.

Contudo, destaca-se que com a modelagem individual das hidrelétricas, a aplicação dos modelos PAR pode ser feita diretamente nas aflúncias incrementais que chegam aos reservatórios das usinas. Esse fato pode complicar significativamente a modelagem de médio prazo, vistas as dezenas de variáveis a serem incluídas na formulação do PMPO, dado o número de hidrelétricas e a ordem autoregressiva identificada, e o mal condicionamento numérico entre os valores observados nas aflúncias. Logo, salienta-se que outras estratégias para o tratamento das aflúncias no modelo de médio prazo precisam ser avaliadas, de modo a garantir a viabilidade e qualidade de solução do PMPO. Nesse caso, vale-se citar a representação das aflúncias de médio e curto prazo por bacias hidrográficas, conforme discutido recentemente em Lima, Popova e Damien (2014) e Sutlovic, Cujic-Coko e Medic (2014).

Como motivação para que os aprimoramentos sugeridos por esse trabalho sejam incorporados na modelagem do PMPO brasileiro, alguns estudos que apontam para avanços significativos nas etapas do POH merecem ser destacados. Nesse contexto, destaca-se que, na maioria dos

casos, os trabalhos citados nos próximos parágrafos resultaram em modelos computacionais aplicados.

Inicialmente, valem-se citar os trabalhos de Pereira (1989) e Pereira e Pinto (1991), os quais culminaram no desenvolvimento do método da PDDE e em um modelo computacional de despacho hidrotérmico estocástico com restrições de transmissão, denominado SDDP. Segundo os seus desenvolvedores, o modelo SDDP propicia o cálculo de políticas de operação levando em conta os detalhes operativos das hidrelétricas, modelos detalhados de termelétricas, rede de transmissão, rede de gás, incerteza hidrológica dentre outros. (PSR, 2015). Contudo, ressalva-se que o modelo SDDP é uma ferramenta licenciada e de uso corporativo. Logo, detalhes acerca da implementação da estratégia de solução empregada, modelagem dos componentes do sistema hidrotérmico e processo estocástico das incertezas de médio e curto prazo não são disponibilizados para o público em geral.

Utilizando-se do método da DA, em Jacobs *et al.* (1995), um modelo computacional denominado SOCRATES foi desenvolvido para fazer a operação das usinas hidrelétricas da Pacific Gas & Electricity (PG&E). O SOCRATES considera a operação individualizada dos reservatórios das hidrelétricas além de algumas melhorias na decomposição do problema, como a partida quente e múltiplos cortes. Contudo, o horizonte de planejamento e a qualidade da representação das incertezas são bastante limitados.

Devido à grande parcela de hidroeletricidade no mercado de energia dos países nórdicos, modelos computacionais baseados na representação da incerteza hidrológica também são utilizados na concepção das etapas do PMPO e PCPO desses países. Nesses casos, conforme Gjelsvik, Belsnes e Haugstad (1999), Fosso *et al.* (1999) e Wallace e Fleten (2003), geralmente há uma coordenação entre um modelo denominado local, em referência a uma área geográfica específica do sistema, na qual o preço é representado por uma variável estocástica exógena, e um modelo global, cuja modelagem das aflúncias, do ponto de vista de todo o sistema, é mais aprimorada. O método de solução utilizado é a PDDE, em que, em alguns casos, uma combinação entre SDP e PDDE também é implementada Gjelsvik, Mo e Haugstad (2010).

Em Marcato (2002), um modelo híbrido na representação das decisões de REEs e hidrelétricas individualizadas foi avaliado e comparado com a representação a REEs em uma configuração estática do SIN. A PDDE foi utilizada e os resultados obtidos nas simulações *out-of-sample* foram bastantes similares, levando o autor a afirmar que a

representação a REE ainda era a melhor alternativa para o caso brasileiro. Contudo, não foram apresentados detalhes explícitos do modelo de geração de aflúências utilizado, correlação das aflúências com as ENAs da árvore de cenário e, em todos os casos avaliados, foram consideradas apenas 20 realizações na árvore híbrida de cenários.

Também com foco no caso brasileiro, um modelo computacional baseado na SDP foi desenvolvido por Dias *et al.* (2010) e Dias *et al.* (2013) para o cálculo de políticas de operação de médio prazo, a partir da modelagem estocástica do PMPO. Basicamente, a construção das políticas operativas é realizada a cada estágio, via *Convex Hull*, em que se buscam o mínimo necessário de aproximações para a representação do comportamento econômico da operação futura do sistema. Além disso, diferentes técnicas de processamento paralelo são empregadas para aumentar a eficiência do algoritmo. Contudo, não há comparações de desempenho e qualidade de solução da estratégia proposta com ao método tradicional da PDDE.

No trabalho de de Matos (2012), um modelo computacional para o planejamento energético utilizando técnicas avançadas de otimização estocástica foi desenvolvido. Esse modelo, denominado SMERA, baseia-se na etapa do PMPO do caso brasileiro, em que se utilizou, além dos REEs por subsistema, REEs por bacia hidrográfica na representação hidrelétrica do SIN. Também, novas técnicas de seleção de cenários e estratégias de seleção de cortes foram implementadas para o método da PDDE, além de uma modelagem factível para a utilização de uma métrica de aversão a risco baseada no CVaR para o cálculo das políticas de operação. Ainda, o trabalho se propôs a avaliar a qualidade da política operativa obtida com a PDDE para o caso brasileiro.

Em Zambon *et al.* (2012); Zambon (2013) e Palfi e Zambon (2013), um modelo para o suporte de decisões acerca do POH brasileiro é apresentado. Denominado HIDROTERM, os autores sugerem que o modelo proposto pode ser decomposto em dois sub módulos, HIDRO e TERM, que respectivamente otimizam, de maneira separada ou integrada, a operação hidrelétrica e termelétrica do SIN. A solução de ambos os módulos se baseia na Programação Não-Linear (PNL), de modo que o problema completo é tratado via PE de dois estágios com recursão. Contudo, muitos detalhes acerca das estratégias de solução empregadas, garantia da viabilidade e otimalidade da solução, além da própria modelagem estocástica do problema, não são esclarecidos nas publicações.

Quanto à representação não linear nas etapas do POH, podem-se também citar os trabalhos de Carvalho e Soares (1987); Oliveira e Soares (1995); Siqueira *et al.* (2006) e Zambelli (2009), que contribuíram no desenvolvimento de um modelo computacional para a otimização do despacho do SIN, denominado ODIN. Nesse modelo, comportamentos não lineares do POH brasileiro são modelados, com atenção especial para as variações das cotas das hidrelétricas ao longo do horizonte de planejamento. Contudo, a representação das aflúências é considerada determinística, baseada, principalmente, na média mensal dos registros históricos de aflúências.

Nessa mesma linha, em Castro e González (2004), um pacote de otimização não linear para a coordenação de médio/longo prazo de sistemas hidrotérmicos, denominado de HTCOOR, foi proposto. No HTCOOR são consideradas as não linearidades na representação das hidrelétricas e termelétricas do sistema. Além disso, geração hidrelétrica é considerada estocástica a partir de uma distribuição multiblocos em horizontes de um ou dois anos.

No caso do tratamento do PCPO, valem destacar os trabalhos de dos Santos *et al.* (2009) e Gonçalves, Finardi e da Silva (2012) que utilizaram a estratégia do PH na solução do subproblema brasileiro, baseando-se em uma modelagem estocástica decomposta por cenários. Além disso, Gonçalves (2011) implementou a versão tradicional do PCPO, baseado na DA, com decomposição por nós, e comparou os resultados das duas estratégias de solução. O PH se mostrou mais eficiente computacionalmente que a DA, principalmente nos casos em que o horizonte de planejamento foi estendido. Contudo, destaca-se que para aproximações mais precisas na representação da produção hidrelétrica, o método do PH sofreu os maiores danos de performance quando comparado à DA.

Ainda no tratamento das etapas do POH via PH, destacam-se também os trabalhos de Carpentier, Gendreau e Bastin (2012, 2013a, 2013b), que implementaram o PH em modelos computacionais para lidar com as etapas de médio e curto prazo da Hydro-Québec Canadá. Nesses trabalhos os autores propõem alternativas mais eficientes, particulares à PH, para a representação de cenários em modelagens com maiores horizontes de planejamento, além do ajuste de parâmetros associados ao método.

Como pode ser observado dos trabalhos citados, inúmeros pesquisadores contribuíram de forma significativa em avanços tanto em termos da concepção teórica e modelagem matemática dos problemas de

interesse, quanto em estratégias, métodos e algoritmos de solução dos respectivos modelos. Assim, de maneira a destacar as contribuições provenientes deste trabalho de Doutorado, na seção seguinte a relevância dos principais objetivos almejados nesta proposta é apontada, em detrimento do que se observa atualmente em termos de desafios relacionados ao problema do PMPO.

1.3. CONTRIBUIÇÕES

Com base no estado da arte da modelagem e solução de problemas de médio e curto prazo do POH, observado em grande parte nas contribuições dos trabalhos citados na revisão bibliográfica, destaca-se que o conjunto de aprimoramentos sugeridos na presente proposta de trabalho de Doutorado pode ser classificado como complexo e, conseqüentemente, desafiador.

Inicialmente vale apontar o caráter inovador intrínseco às políticas de operação de médio prazo calculadas a partir de decisões individuais mensais das hidrelétricas do SIN. O que geralmente se observa no panorama atual do tratamento do problema do PMPO são trabalhos que: (i) priorizam a modelagem aprimorada dos componentes do sistema hidrotérmico e desprezam a representação das incertezas no horizonte de planejamento (CARVALHO; SOARES, 1987; OLIVEIRA; SOARES, 1995; SIQUEIRA et al., 2006; ZAMBELLI, 2009) ou; (ii) simplificam consideravelmente a modelagem do comportamento operativo do sistema e representam boa parte da estocacidade do período de planejamento (PEREIRA; PINTO, 1991; KLIGERMAN, 1992; MACEIRA; COSTA; MARCATO, 1993; MACEIRA et al., 2008; DE MATOS; FINARDI, 2012).

Este trabalho implica em um avanço consistente na segunda linha de tratamento do PMPO, de maneira que muitas das aproximações implícitas na operação coletiva de um conjunto de hidrelétricas são completamente abolidas pela representação individual do comportamento operativo de cada usina. Embora decisões individuais às hidrelétricas são recorrentes em trabalhos acerca da modelagem estocástica do PMPO (PEREIRA; PINTO, 1985; MARCATO, 2002; GOOR; KELMAN; TILMANT, 2011; PHILPOTT; DE MATOS, 2012; SOUZA THOMÉ, 2013), ainda não há resultados documentados desse tipo de representação em um sistema hidrotérmico de grande porte, da magnitude do SIN.

Nesse contexto, destaca-se que as principais complexidades encontradas neste trabalho estão associadas à dimensão do modelo de médio prazo resultante da individualização das decisões hidrelétricas. Isso porque, conforme discutido nos capítulos seguintes, as incertezas do modelo estão relacionadas com a quantidade mensal de água que chega a cada hidrelétrica. Além disso, há o acoplamento temporal das decisões operativas do sistema, diretamente associado com a capacidade de armazenamento e deplecionamento dos reservatórios das hidrelétricas e com a correlação temporal observada nas afluições dos rios correspondentes.

Em termos da PE, isso implica em um modelo multiestágio estocástico de grande dimensão, com dezenas de variáveis aleatórias na representação do processo estocástico e outras dezenas de variáveis de estado que expandem significativamente o espaço de estados do acoplamento multiestágio do modelo. Consequentemente, o cálculo de políticas de operação de boa qualidade, a partir das estratégias existentes, pode requisitar um esforço computacional exorbitante. Logo, observa-se a necessidade de se avaliar estratégias sofisticadas para o cálculo das políticas de operação (DE MATOS, 2012; DE MATOS; PHILPOTT; FINARDI, 2012), de maneira a se obter uma solução razoável em um tempo de processamento adequado.

Assim, vale também ressaltar os desafios de engenharia de software implícitos na implementação computacional do modelo do PMPO por usinas individualizadas. Nesse caso, com o extenso horizonte de planejamento do problema, o montante de informação processada e armazenada requer que a ferramenta computacional desenvolvida priorize pela eficiência no uso dos recursos computacionais disponíveis. Com isso, a paralelização do processamento deve ser profundamente aprimorada, de modo que diferentes filosofias de decomposição, comunicação e armazenamento de dados entre os processos utilizados no algoritmo de solução sejam avaliadas (FINARDI, 1999; NORBIATO; DINIZ; BORGES, 2014).

Destaca-se ainda que a ferramenta para o cálculo das políticas de operação deve ser robusta o suficiente quanto ao tratamento numérico do modelo. Isso implica que estratégias de orientação a objetos (DOS SANTOS, 2004) e *solvers* especializados de alta confiabilidade também sejam utilizados na implementação computacional.

Ainda, salienta-se que outro grande desafio deste trabalho consiste em avaliar modelos de dependência temporal para as afluições das hidrelétricas, factíveis com a representação real do fenômeno físico e com

as premissas do algoritmo de PE multiestágio empregado. Embora possam ser encontrados muitos trabalhos que utilizam modelos PAR Lognormal com Resíduos Dependentes na representação da dependência temporal de energias afluentes (CEPEL, 2001; MACEIRA; DAMAZIO, 2004), destaca-se que alguns problemas metodológicos dessa abordagem podem ser demasiadamente amplificados pela individualização da operação hidrelétrica na modelagem do PMPO.

Ademais, também vale destacar que afluições incrementais negativas podem ser observadas nas hidrelétricas, o que é um fator complicador para a utilização desse tipo de representação no modelo de médio prazo. Logo, alternativas factíveis para a representação da dependência temporal das afluições precisam ser investigadas, conforme propõem de Matos, Larroyd e Finardi (2014).

1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

No próximo capítulo os aspectos de modelagem matemática relevantes ao problema do PMPO são apresentados, dentre os quais, destacam-se: os principais componentes do sistema hidrotérmico como hidrelétricas, termelétricas e subsistemas; os principais modelos de geração de afluição empregados nesse tipo de abordagem, como os modelos PAR BOX & JENKINS, PAR Lognormal a Três Parâmetros – versões com e sem Resíduos Dependentes, IND Lognormal – a Dois e Três Parâmetros. Ainda quanto à representação das afluições, são discutidos alguns aspectos acerca da caracterização das mesmas, como a definição de afluições por hidrelétricas e por bacias hidrográficas e a correlação espacial existente.

No Capítulo 3 o problema do PMPO é caracterizado de acordo com as premissas adotadas para a decomposição por estágios no modelo multiestágio estocástico. Assim, a formulação geral da DB é apresentada de modo que, em seguida, as formulações dos problemas de otimização do modelo do PMPO são definidas de acordo com cada modelo de geração de afluições adotado. Na sequência, os pré-requisitos para a geração de cenários de afluições são discutidos, de maneira que os mesmos sejam compatíveis com as estratégias de solução empregadas. Em seguida, os processos para o cálculo de políticas de operação via PDD e PDDE são apresentados e suas aplicabilidades discutidas.

Por sua vez, no Capítulo 4 são apresentados e analisados os resultados do cálculo de políticas de operação para o SIN obtidos a partir

de um caso base de janeiro de 2015 para: (i) determinação do número de realizações por estágio da árvore de cenários; (ii) avaliação da qualidade da solução com a estratégia de realizações *proxy* na PDDE; (iii) comparação da simulação de horizonte rolante da operação do sistema com o modelo desenvolvido neste trabalho e um modelo a REE.

Por fim, no Capítulo 5, as considerações finais são apresentadas e avanços futuros deste trabalho de doutorado são discutidos.

2. MODELAGEM DO PROBLEMA

Este capítulo é destinado à modelagem matemática do PMPO, de modo que as formulações dos aspectos físicos e estratégicos pertinentes ao problema são apresentadas e discutidas.

Na primeira seção, a formulação dos componentes do sistema hidrotérmico é apresentada, de acordo com a proposta do planejamento de médio prazo brasileiro discutida no capítulo anterior. Na seção seguinte, modelos de geração de aflúências também são apresentados e analisados.

Conforme observado anteriormente, este trabalho segue a linha da representação multiestágio estocástica para o problema do PMPO. Desse modo, a última seção do capítulo é destinada à caracterização e formulação da modelagem de médio prazo a partir da utilização da decomposição de Benders por estágios. Assim, de acordo com o modelo de geração de aflúências empregado, uma formulação decomposta para o PMPO é apresentada.

2.1. COMPONENTES DO SISTEMA HIDROTÉRMICO

Conforme amplamente discutido em Pereira e Pinto (1983); Kligerman (1992); Gjelsvik, Belsnes e Haugstad (1999); Cepel (2001); de Matos (2008) e Larroyd (2012), uma representação detalhada e aprimorada do sistema hidrotérmico é inviável do ponto de vista do planejamento de médio prazo. Dentre outros aspectos, vale-se destacar que o elevado número de componentes do sistema, a extensão do horizonte de planejamento e a natureza estocástica do modelo de geração de aflúências, são responsáveis pela classificação do problema como de grande porte. Além disso, conforme observado na Seção 3, a utilização da decomposição de Benders implica em uma modelagem contínua e linear, conseqüentemente convexa, na representação do problema. Assim, todo o comportamento não linear de uma representação aprimorada do problema deve ser tratado por aproximações lineares ou, dependendo do caso, aproximações convexas.

Dessa maneira, os componentes do sistema elétrico relevantes à modelagem do planejamento de médio prazo são apresentados nas próximas seções. Logo, as formulações e aproximações empregadas no comportamento desses componentes também são apresentadas.

2.1.1. Usinas Hidrelétricas

Do ponto de vista da produção e consumo de eletricidade, as usinas hidrelétricas podem ser definidas como empreendimentos que utilizam a água dos rios para gerar energia elétrica (FINARDI, 2003; QUINTERO, 2013). Logo, observa-se que os projetos das hidrelétricas são elaborados de forma a se obter o máximo aproveitamento energético, dadas as características hidrográficas e topológicas da região a qual uma usina é construída.

Quanto ao aspecto construtivo, as hidrelétricas podem ser classificadas como empreendimentos de pequeno porte, de operação e construção simplificadas, até gigantescas construções, de operação e construção extremamente complexas. Entretanto, em ambos os casos, um grande número de equipamentos e mecanismos de controle, produção e proteção podem ser observados atuando na operação da usina. Embora todos esses elementos sejam extremamente relevantes à operação em tempo real da usina, no contexto das etapas de médio e curto prazo do POH, a representação do comportamento de uma hidrelétrica pode ser efetuada a partir da consideração dos seguintes componentes:

- Reservatório,
- Casa de Força,
- Vertedouro.

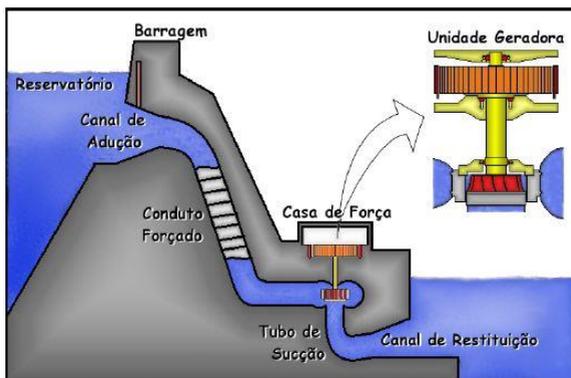
No contexto da produção hidrelétrica, os reservatórios são utilizados para conter e armazenar a água dos rios para a produção de energia elétrica. Quando um reservatório possui uma capacidade considerável de armazenamento de água, a qual viabiliza a produção elétrica por um período significativo mesmo com pouca ou nenhuma vazão afluente no rio correspondente, esse reservatório é denominado como de regularização. Contudo, dadas as características do empreendimento, as usinas também podem ser designadas a operar constantemente em um determinado nível nominal de armazenamento, de forma a maximizar o aproveitamento potencial da água. Nesse caso, os reservatórios e as próprias hidrelétricas são denominados como de compensação ou fio d'água.

Do ponto de vista da etapa de médio prazo, os reservatórios são considerados de regularização quando há capacidade substancial de armazenamento de água para viabilizar a produção mensal nominal da hidrelétrica. Caso contrário, são considerados como fio d'água.

Quanto à casa de força, pode-se dizer que é o local em que efetivamente o potencial hidráulico do rio é transformado em energia elétrica. Assim, generalizando-se o processo de produção hidrelétrica destaca-se que, com a abertura das comportas dos canais de adução, fluxos controlados de água do reservatório são admitidos e direcionados às casas de força da usina. Na casa de força, esse fluxo d'água movimenta as pás de uma turbina que é conectada mecanicamente a um gerador elétrico. Por sua vez, os geradores são conectados às subestações que transmitem a energia via linhas de transmissão para o restante do sistema elétrico. Conseqüentemente, o fluxo d'água utilizado na produção elétrica é direcionado pelo canal de restituição para seguir no curso defluente do rio.

Nesse processo, destaca-se que a produção de energia elétrica depende da elevação do nível de água no reservatório, da quantidade de água admitida nos canais de adução e da elevação do nível defluente do rio que recebe água do canal de restituição. Na Figura 1, a disposição dos componentes citados no processo de produção hidrelétrica pode ser visualizada.

Figura 1 – Representação Generalizada de uma Usina Hidrelétrica.



Fonte: Scuzziato (2011).

Ao se observar a composição das hidrelétricas, pode-se dizer que uma única unidade de produção é composta pelo canal de adução, casa de força e canal de restituição. Na prática, um conjunto de produção hidrelétrica pode ser definido como um conjunto de unidades de produção

de características idênticas. Assim, muitas vezes uma aproximação na representação da produção elétrica da usina é feita a partir da modelagem do comportamento de um ou mais conjuntos de produção, considerando a operação paralela das unidades, ao invés do comportamento individual de cada unidade. Contudo, vale-se destacar que os empreendimentos hidrelétricos podem ser constituídos por unidades de produção de características distintas, as quais compõem diferentes conjuntos de produção hidrelétricos.

Finalmente, no caso do vertedouro, o mesmo pode ser interpretado como um dispositivo de controle e segurança da usina que, por exemplo, garante a integridade operacional em uma condição de elevada afluência no rio correspondente. Assim, caso o nível de armazenamento do reservatório seja o máximo e há mais água chegando à usina que o utilizado na produção elétrica, o excedente de água é direcionado pelas comportas do vertedouro ao curso defluente do rio. Com isso, evita-se o alagamento e a interrupção operacional da usina. Vale ainda destacar que, dependendo do projeto da usina, o vertedouro pode afetar significativamente na produção de energia elétrica. Isso porque o nível defluente do rio, imediatamente na saída dos canais de restituição da hidrelétrica, pode ser elevado dependendo do fluxo d'água que sai do vertedouro.

2.1.1.1. Função de Produção

Conforme citado anteriormente, a produção de energia de uma hidrelétrica pode depender do nível de armazenamento d'água no reservatório, da quantidade de água admitida nas unidades da usina e do nível defluente do rio. O nível d'água, ou cota, do reservatório é representado por uma função denominada de Função de Cota Montante (FCM), que cresce de acordo com o volume armazenado no reservatório. No caso brasileiro, a FCM geralmente é descrita por um polinômio de quarto grau, estimado a partir da topologia do reservatório.

Uma vez que a água é admitida na unidade de produção, o caminho percorrido pelo fluxo d'água até a saída do canal de restituição incorre em perdas no potencial hidráulico da água que, por sua vez, também afetam a produção hidrelétrica. Logo, as perdas hidráulicas, como são conhecidas, são estimadas a partir das características de projeto das unidades de produção e geralmente são representadas em termos da redução da cota de montante da usina.

Na casa de força, o conjunto turbina-gerador se baseia no princípio da conversão eletromecânica do potencial hidráulico da água em energia elétrica. Logo, perdas intrínsecas a esse tipo de processo também devem ser levadas em conta na representação da produção hidrelétrica. Nesse caso, essas perdas geralmente são agrupadas e representadas em termos de um rendimento global do grupo turbina-gerador, definido a partir das características de projeto e operação designadas pelos fabricantes dos equipamentos.

Após o acionamento da turbina o fluxo d'água é restituído ao curso defluente do rio. Conseqüentemente a elevação do nível defluente do rio implica diretamente na redução do potencial hidráulico da água armazenada no reservatório da usina e, por consequência, na redução da produção elétrica. Assim, o nível defluente é calculado por uma função denominada de Função de Cota Jusante (FCJ), que leva em conta a vazão total turbinada na usina e, dependendo do caso, a vazão vertida. Como no caso das perdas hidráulicas, a cota de jusante também é deduzida da cota de montante, definindo assim a queda líquida do aproveitamento hidráulico da usina.

Matematicamente, todas essas características do comportamento da produção hidrelétrica podem ser representadas em termos de uma Função de Produção Hidrelétrica (FPH). Geralmente a FPH de uma unidade de produção é descrita levando em conta o produto da vazão turbinada, queda líquida e rendimento do grupo turbina-gerador, o que a torna não linear, não convexa e com pontos de descontinuidade (QUINTERO, 2013). Assim, a função de produção de uma unidade u da hidrelétrica h que opera no instante de tempo t pode ser descrita conforme:

$$PU_t^u (HL_t^u, NE_t^u, qu_t^u) = gv \cdot HL_t^u \cdot NE_t^u \cdot qu_t^u, \quad u \in \mathcal{U}_t^h, \quad h \in \mathcal{H}_t, \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_t = \{h : h \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq h \leq nh_t\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{U}_t^h = \{u : u \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq u \leq nu_t^h\}. \quad (3)$$

em que:

\mathcal{H}_t : conjunto das hidrelétricas em operação em t ,

\mathcal{U}_t^h : conjunto das unidades de h em operação em t ,

gv : constante definida por 0,00981 (MW/(m³/s).m),

qu_t^u : vazão turbinada na unidade u em t (m³/s),

PU_t^u : função de produção da unidade u em t (MW).

Os termos HL_t^u e NE_t^u são respectivamente as funções que representam a queda líquida e o rendimento do conjunto turbina-gerador da unidade, expressos por:

$$HL_t^u (HM_t^h, HJ_t^h, HK_t^u) = HM_t^h - HJ_t^h - HK_t^u, \quad (4)$$

$$NE_t^u (HL_t^h, qu_t^u) = ne^{0,u} + ne^{1,u} \cdot (qu_t^u) + ne^2 \cdot (qu_t^u)^2 + ne^{3,u} \cdot (HL_t^h) + ne^{4,u} \cdot (HL_t^h)^2 + ne^{5,u} \cdot (qu_t^u \cdot HL_t^h). \quad (5)$$

Na função de rendimento NE_t^u , os termos $ne^{0,\dots,5}$ são coeficientes determinados a partir do tipo e características do conjunto turbina-gerador, de modo que $0 \leq NE_t^u \leq 1$.

Já na função de queda líquida, os termos HM_t^h , HJ_t^h e HK_t^u são funções que representam em metros respectivamente as cotas à montante e à jusante da hidrelétrica e as perdas hidráulicas da unidade de produção. Essas funções são descritas por:

$$HM_t^h (vh_t^h) = hm^{0,u} + hm^{1,u} \cdot (vh_t^h)^1 + hm^{2,u} \cdot (vh_t^h)^2 + hm^{3,u} \cdot (vh_t^h)^3 + hm^{4,u} \cdot (vh_t^h)^4, \quad (6)$$

$$HJ_t^h (qh_t^h, sh_t^h) = hj^{0,u} + hj^{1,u} \cdot (qh_t^h + sh_t^h)^1 + hj^{2,u} \cdot (qh_t^h + sh_t^h)^2 + hj^{3,u} \cdot (qh_t^h + sh_t^h)^3 + hj^{4,u} \cdot (qh_t^h + sh_t^h)^4, \quad (7)$$

$$HK_t^u (qu_t^u) = hk^{0,u} \cdot (qu_t^u)^2, \quad (8)$$

em que:

vh_t^h : volume d'água no reservatório de h em t (hm^3),

sh_t^h : vazão vertida em h em t (m^3/s),

qh_t^h : vazão total turbinada em h em t (m^3/s), definida por:

$$qh_t^h = \sum_{u \in U_t^h} qu_t^u. \quad (9)$$

Na expressão (6), percebe-se que a cota à montante é descrita em função do volume d'água da hidrelétrica em t , sendo que os termos $hm^{0:4,u}$ são coeficientes especificados a partir da topologia do reservatório. Em (7), a FCJ pode depender do turbinamento total e vertimento da hidrelétrica, em que os coeficientes $hj^{0:4,u}$ são estimados a partir das

características do leito defluente do rio, canal de restituição e vertedouro da usina. Por fim, pode ser visto em (8) que a função de perdas hidráulicas depende exclusivamente da vazão turbinada da unidade de produção hidrelétrica. O termo $hk^{0,u}$ é especificado a partir das características da barragem da usina e condutos forçados da unidade.

Uma vez que todos os termos de (1) são descritos, a FPH da usina h em t pode ser escrita como:

$$PH_t^h(PU_t^u) = \sum_{u \in \mathcal{U}_t^h} PU_t^u, \quad h \in \mathcal{H}_t. \quad (10)$$

Embora a FPH apresentada em (10) já seja uma versão aproximada de representações muito detalhadas da produção hidrelétrica, como visto em (FINARDI, 2003), a sua aplicação ainda é inviável na modelagem do planejamento de médio prazo. Podem-se apontar, por exemplo, como principais empecilhos os polinômios (5)-(8) e o comportamento não linear de (10).

Assim, devido às dificuldades intrínsecas à representação da operação e produção hidrelétrica, diferentes formulações da FPH podem ser empregadas dependendo do estudo e dos recursos computacionais disponíveis para a solução do problema de interesse. No contexto do PMPO, um ponto de partida razoável para uma formulação adequada da FPH pode ser dado ao se considerar que as nu_t^h unidades de produção sejam idênticas e operadas igualmente em t , de maneira que:

$$qh_t^h = nu_t^h \cdot qu_t^u, \quad u \in \mathcal{U}_t^h. \quad (11)$$

A partir de (11) todos os termos dependentes da vazão turbinada da unidade u podem ser escritos em função da vazão turbinada total da usina. Logo, a função de produção da unidade u pode ser reescrita como:

$$PU_t^u(HL_t^u, NE_t^u, qh_t^h, nu_t^h) = gv \cdot HL_t^u \cdot NE_t^u \cdot \frac{qh_t^h}{nu_t^h}, \quad u \in \mathcal{U}_t^h. \quad (12)$$

Conseqüentemente, a FPH da hidrelétrica h pode ser definida com a substituição de (12) em (10) conforme:

$$PH_t^h(HL_t^u, NE_t^u, qh_t^h, nu_t^h) = \sum_{u \in \mathcal{U}_t^h} \left(gv \cdot HL_t^u \cdot NE_t^u \cdot \frac{qh_t^h}{nu_t^h} \right), \quad u \in \mathcal{U}_t^h. \quad (13)$$

Ou:

$$PH_t^h(HL_t^u, NE_t^u, qh_t^h, nu_t^h) = nu_t^h \cdot \left(gv \cdot HL_t^u \cdot NE_t^u \cdot \frac{qh_t^h}{nu_t^h} \right), u \in \mathcal{U}_t^h, \quad (14)$$

$$PH_t^h(HL_t^u, NE_t^u, qh_t^h) = gv \cdot HL_t^u \cdot NE_t^u \cdot qh_t^h, u \in \mathcal{U}_t^h. \quad (15)$$

A FPH formulada em (15) descreve produção hidrelétrica em uma usina cujas unidades são consideradas idênticas e que a operação é feita simultaneamente da mesma maneira. Destaca-se que ainda se podem observar em (15) os termos apontados como empecilhos na modelagem do PMPO. Para simplificar a representação apresentada em (15) no PMPO brasileiro, a função do rendimento do grupo turbina-gerador, também conhecida como curva colina, é substituída por um coeficiente de rendimento médio, denominado ne^u_{PE} . Ao se multiplicar o coeficiente de rendimento médio pela constante gv , um termo denominado de produtibilidade específica é definido e utilizado na representação da produção da usina. Assim:

$$pe^h \triangleq gv \cdot ne^u_{PE}, u \in \mathcal{U}_t^h. \quad (16)$$

A produtibilidade específica de cada usina do SIN a ser considerada no PMPO é informada pelo ONS no arquivo `hidr.dat` de entrada de dados do modelo NEWAVE.

Ainda no planejamento de médio prazo brasileiro a função de queda líquida é substituída por um coeficiente calculado a partir da cota média de montante hm^h_{PEt} , de um nível médio estimado para o canal de fuga hj^h_{PEt} e de uma perda média estimada hk^h_{PE} . A perda média pode ser proporcional ou não à queda bruta da usina. Assim:

$$hm^h_{PEt} = \frac{\int_{vh_t^h}^{vh_t^h} HM_t^h(vh_t^h) dvh_t^h}{vh_t^h - \underline{vh_t^h}}, \quad (17)$$

$$hl^h_{PEt} \triangleq (hm^h_{PEt} - hj^h_{PEt}) \cdot \left(1 - \frac{hk^h_{PE}}{100} \right) \text{ ou} \quad (18)$$

$$hl^h_{PEt} \triangleq hm^h_{PEt} - hj^h_{PEt} - hk^h_{PE}.$$

em que:

$\underline{v}h_t^h, \overline{v}h_t^h$: volumes mínimo e máximo operativos no reservatório de h em t (hm^3).

Os coeficientes da função HM_t^h , os valores máximo e mínimo operativos de armazenamento, o nível médio do canal de fuga e as perdas médias são informadas pelo ONS no arquivo `hydr.dat` do NEWAVE. Dependendo da hidrelétrica, os valores máximo e mínimo operativos de armazenamento e o nível médio do canal de fuga podem variar ao longo do horizonte de planejamento, de acordo com os registros do arquivo `modif.dat` do NEWAVE.

Um coeficiente de produtividade é então definido conforme:

$$pr_t^h \triangleq pe^h \cdot hl_{PEt}^h. \quad (19)$$

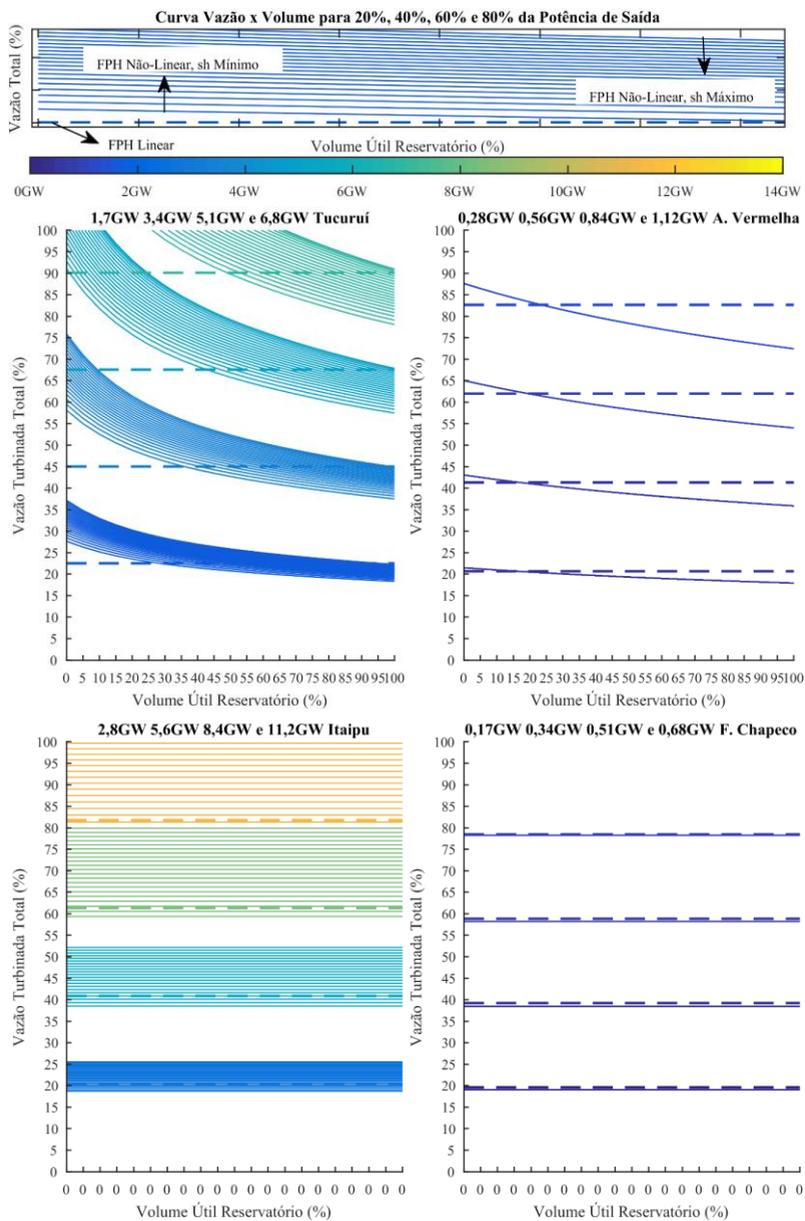
Assim, a FPH de uma usina hidrelétrica pode ser representada de maneira simplificada a partir do produto de um termo conhecido, pr_t^h , estipulado com base nas características e condições predefinidas para a usina, com a vazão turbinada total qh_t^h :

$$PH_{PEt}^h(qh_t^h) = pr_t^h \cdot qh_t^h. \quad (20)$$

Conforme apontado em Quintero (2013), as hidrelétricas do SIN podem ser classificadas em 4 grupos de acordo com as variáveis a serem consideradas na FPH. No primeiro grupo, que abrange cerca de 46% da capacidade hidrelétrica brasileira, vh , qh e sh são as variáveis da função de produção, conforme apresentado em (15). No segundo grupo, com 8% de capacidade instalada, o vertimento não interfere no nível de jusante da usina. Logo as variáveis na FPH são vh e sh . O terceiro grupo correspondente à 37% da capacidade do parque hidrelétrico é composto por hidrelétricas fio d'água, ou que operam como tal, em que o vertimento influencia na cota à jusante. As variáveis da FPH do terceiro grupo são qh e sh . O quarto e último grupo é formado por usinas fio d'água que dependem somente de qh na produção hidrelétrica.

De maneira a ilustrar as implicações operativas de (15) ou (20) no modelo do PMPO, algumas curvas de vazão turbinada total x volume útil de hidrelétricas que possuem alta relevância nos respectivos grupos são plotadas na figura seguinte com ambas as formulações da FPH.

Figura 2 – Comparação entre Representações da FPH: não-linear e linear.



Fonte: do Autor.

Na Figura 2 as hidrelétricas exibidas são Tucuruí (grupo 1), A. Vermelha (grupo 2), Itaipu (grupo 3) e Fox Chapecó (grupo 4). Basicamente as linhas nos gráficos são curvas de vazão turbinada total x volume útil para faixas específicas de potência de saída. As linhas contínuas representam os valores obtidos a partir da FPH (15), não-linear, e as linhas tracejadas da FPH (20), linear. Em ambas as formulações as produtibilidades específicas das usinas foram utilizadas devido à falta de informações detalhadas acerca de NE_t'' . Por motivo semelhante, a perda hidráulica considerada em ambos os casos foi o valor proporcional de queda bruta, hk^h_{PE} , disponibilizado nos dados do NEWAVE.

Ao se observar as curvas de Tucuruí e Itaipu se percebe que para um mesmo nível de potência de saída diversas linhas contínuas são plotadas. Essas linhas são variações da curva de vazão turbinada x volume ocasionada pela presença de vertimento na usina. Nos gráficos exibidos, o vertimento considerado nessas curvas varia de zero à três vezes o valor de turbinamento máximo da usina. Em Itaipu, é interessante observar que para a saída de 8,4GW e 11,2GW ambas as representações da FPH são muito parecidas quando o vertimento é nulo. Contudo, para níveis mais elevados de vertimento, a representação não-linear incorre em maior turbinamento na usina para compensar o efeito negativo do vertimento na cota jusante, que é completamente ignorado na formulação linear.

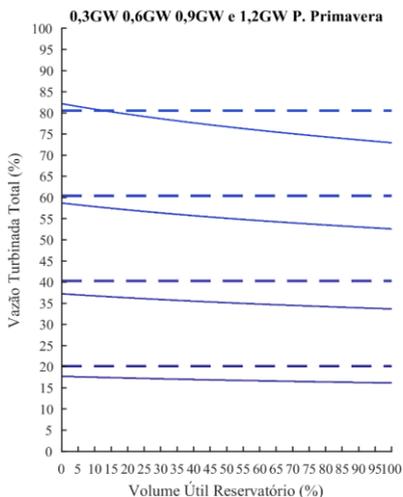
Em Tucuruí a mesma interpretação pode ser feita, porém, com a análise também em termos da evolução do volume útil do reservatório. Por exemplo, supõe-se que por motivos extraordinários seja necessário garantir a vazão defluente em um nível elevado, muito acima do turbinamento máximo. Observa-se na Figura 2 que nesse caso manter 6,8GW de saída pode requerer que todas as máquinas estejam turbinando em níveis muito elevado, próximos do máximo e, dependendo do volume útil do reservatório e do montante de vertimento necessário, potências acima de 6,8GW podem ser inviáveis de serem mantidas na operação da usina. Ou seja, pode ocorrer perda de capacidade por excesso de água. Novamente este tipo de comportamento não é captado pela representação linear.

O ponto crucial de usinas que dependem de vh e são representadas por (20) é a necessidade de elevação de qh para a manutenção de determinada potência de saída em função da diminuição da queda de montante. Ainda em Tucuruí, na representação não-linear, caso o volume útil esteja abaixo de 35% a vazão turbinada necessária para manter 3,4GW de saída deve ser superior à 45% da vazão máxima. Já na representação linear, os 45% de qh máximo são sempre suficientes para

manter a potência de saída em 3,4GW. Este fenômeno também pode ser observado em A. Vermelha, porém, com menor variação de qh em termos de vh . É interessante observar que para a usina de Foz Chapecó, que depende somente de qh , ambas as representações estão muito próximas.

De maneira geral o que se pode extrair da Figura 2 é que dependendo da usina e das condições operativas observadas, ambas as representações podem ser próximas ou distantes. Assim, é importante ressaltar que em alguns casos a utilização de uma FPH linear no modelo do PMPO pode ser justificada, além da questão do menor esforço computacional, também pela perfeita aplicabilidade à usina e/ou à condição operativa esperada. Nesse contexto, é interessante também observar a curva de vazão turbinada total x volume útil da usina de P. Primavera (grupo 2) na figura seguinte.

Figura 3 – Comparação entre Representações da FPH de P. Primavera.



Fonte: do Autor.

Embora a FPH da usina de P. Primavera dependa de vh , a variação de qh x vh é considerada pequena e, na maioria dos casos, a representação linear é mais conservadora (requer mais turbinamento) que a própria representação não-linear. Logo, no modelo do PMPO P. Primavera é considerada como uma usina fio d'água, com seu volume útil anulado. Semelhante consideração também é feita para outras usinas que são

efetivamente operadas como fio'd'água embora a FPH dependa de vh , como a própria usina de Itaipu.

No médio prazo a operação hidrotérmica é concebida em base mensal e a utilização de (15) ou (20) na modelagem do PMPO implica na obtenção de uma potência média mensal fornecida ao sistema no estágio t , a partir de valores mensais de vazão turbinada e volume no reservatório. Logo, excursões horárias, diárias ou semanais desses valores não são compreendidas no médio prazo. Destaca-se que no caso de (20) uma aproximação razoável para o volume mensal pode ser obtida a partir da média entre os volumes verificados no início (vh_t) e no fim (vh_{t+1}) do mês de referência. Isso porque, conforme discutido na próxima seção, há uma dinâmica a ser respeitada envolvendo os montantes de água que chegam no reservatório e são expelidos pelos canais e vertedouros da usina.

2.1.1.2. Balanço Hídrico nos Reservatórios

A partir da Figura 1 se percebe que a dinâmica do reservatório de uma hidrelétrica depende do estado inicial de armazenamento, da vazão afluyente que chega à usina e da produção hidrelétrica. Assim, por exemplo, em um mês que se utilize menos água na produção elétrica que o montante afluyente registrado e o reservatório não esteja em seu nível máximo, a diferença pode ser armazenada para utilização futura.

No sentido de modelar o comportamento mensal de um determinado reservatório isolado, uma equação denominada de balanço hídrico pode ser inicialmente definida como:

$$vh_t^h - vh_{t+1}^h + vz_t \cdot (yn_t^h - qh_t^h - sh_t^h) = 0, \quad (21)$$

em que:

- vz_t : coeficiente de conversão de vazão mensal (m^3/s) para volume (hm^3) em t ,
- vh_t^h, vh_{t+1}^h : volumes inicial e final no mês (hm^3),
- yn_t^h : vazão afluyente natural na hidrelétrica (m^3/s).

Contudo, em situações reais, um rio pode conter inúmeras hidrelétricas instaladas em seu curso. Assim, a vazão defluente de uma usina pode influenciar diretamente no montante d'água que chega à usina subsequente. Essa configuração é denominada de cascata hidráulica e pode ser observada na Figura 4.

Figura 4 – Exemplo de Cascata Hidráulica.



Fonte: Scuzziato (2011).

Para uma usina h que é afetada pela vazão defluente das usinas m à sua montante, a equação de balanço hídrico pode ser escrita como:

$$vh_t^h - vh_{t+1}^h + vz_t \cdot \left[yh_t^h - qh_t^h - sh_t^h + \sum_{m \in \mathcal{M}_t^h} (qh_t^m + sh_t^m) \right] = 0, \quad (22)$$

em que:

$\mathcal{M}_t^h \subseteq \mathcal{H}_t$: conjunto das hidrelétricas m à montante de h ,
 yh_t^h : vazão afluyente incremental na hidrelétrica h em t .

A partir do balanço hídrico (22), pressupõe-se que toda a água defluente ($qh_t^h + sh_t^h$) da usina m em um determinado mês associado à t chega à usina h ainda no mês decorrente. Salienta-se também que algumas características específicas encontradas em configurações reais como canais pluviais e desvio d'água não estão representadas em (22).

Por fim, algumas hidrelétricas possuem restrições de defluência mínima a serem respeitadas para que os rios possam ser aproveitados para navegação, irrigação, captação de água e balneabilidade. Assim:

$$qh_t^h + sh_t^h \geq \underline{dh}_t^h, \quad (23)$$

em que:

\underline{dh}_t^h : vazão defluente mínima da hidrelétrica h em t .

2.1.1.3. Caracterização da Representação das Afluências

No modelo do PMPO a atenção é voltada para a representação das incertezas de médio prazo do SIN. Atualmente as incertezas de médio prazo estão associadas às vazões incrementais das hidrelétricas. Embora os principais detalhes da representação intertemporal e espacial das afluências incrementais sejam discutidos na Seção 2.2, alguns aspectos que influenciam na definição e representação das afluências devem ser inicialmente apresentados.

Inicialmente, é importante se atentar aos registros históricos de afluências utilizados na parametrização dos modelos de geração de afluência da Seção 2.2. Neste trabalho, os registros são obtidos do arquivo vazões.dat do NEWAVE e são compreendidos como valores médios mensais de afluências naturais em (m^3/s). Esses valores são estipulados a partir do valor total de água que chega às usinas, desconsiderando-se a presença das demais hidrelétricas da cascata hidráulica.

Conforme discutido anteriormente, a afluência a ser considerada no balanço hídrico de uma usina h é a afluência incremental yh_t^h . Esta afluência corresponde à uma vazão líquida, definida como o montante de água proveniente de chuvas, nascentes e rios afluentes, subtraído o total evaporado, infiltrado ou desviado no curso principal do rio, compreendido desde os postos de registro de vazões defluentes das usinas à montante m até o posto de h . Logo, observa-se que dependendo das condições geográficas, hidrográficas e climáticas da região, a liquidez da afluência incremental pode ser negativa.

Levando em consideração (22) e os valores históricos de afluência natural da hidrelétrica h e das usinas diretamente à sua montante m , um valor observado de afluência incremental pode ser calculado em h como:

$$yh_t^h = yn_t^h - \sum_{m \in \mathcal{N}^h} yn_t^m, \quad t \in \mathcal{T}_-, \quad (24)$$

em que:

yn_t^h : afluência natural da hidrelétrica h em t (m^3/s),

\mathcal{T}_- : conjunto de estágios t com registro de afluência natural.

Ao se observar a equação (24), percebe-se que para as hidrelétricas instaladas no topo das respectivas cascatas hidráulicas, sem usinas à montante, $yh_t^h = yn_t^h$.

É fato que (24) pode propiciar valores negativos de yh_t^h , devido ao caráter físico da afluência natural. Contudo, com valores negativos nos registros históricos o processo de estimação de parâmetros e o próprio desempenho dos modelos de geração de afluências discutidos na Seção 2.2 são comprometidos. Uma variável denominada de afluência do processo estocástico yp_t^h é introduzida de maneira que se possa produzir registros históricos de afluência com valores positivos que sejam utilizados pelos modelos de geração de afluência.

Uma forma prática de se lidar com valores negativos ou quase nulos de $yh_t^h: t \in \mathcal{T}$. seria substituí-los por 1, vide a compatibilidade numérica com os modelos da Seção 2.2. Logo, $yp_t^h: t \in \mathcal{T}$. poderia ser definido na parametrização dos modelos de geração de afluência como:

$$yp_t^h \triangleq \max(yh_t^h, 1), \quad t \in \mathcal{T}_-. \quad (25)$$

A definição (25) de $yp_t^h: t \in \mathcal{T}$. pode ser razoável para registros com pequenos desvios de valores no entorno de 0. Contudo, em casos de presença substancial de valores negativos, as propriedades estatísticas do registro histórico de afluências incrementais poderiam ser distorcidas com a utilização de yp_t^h .

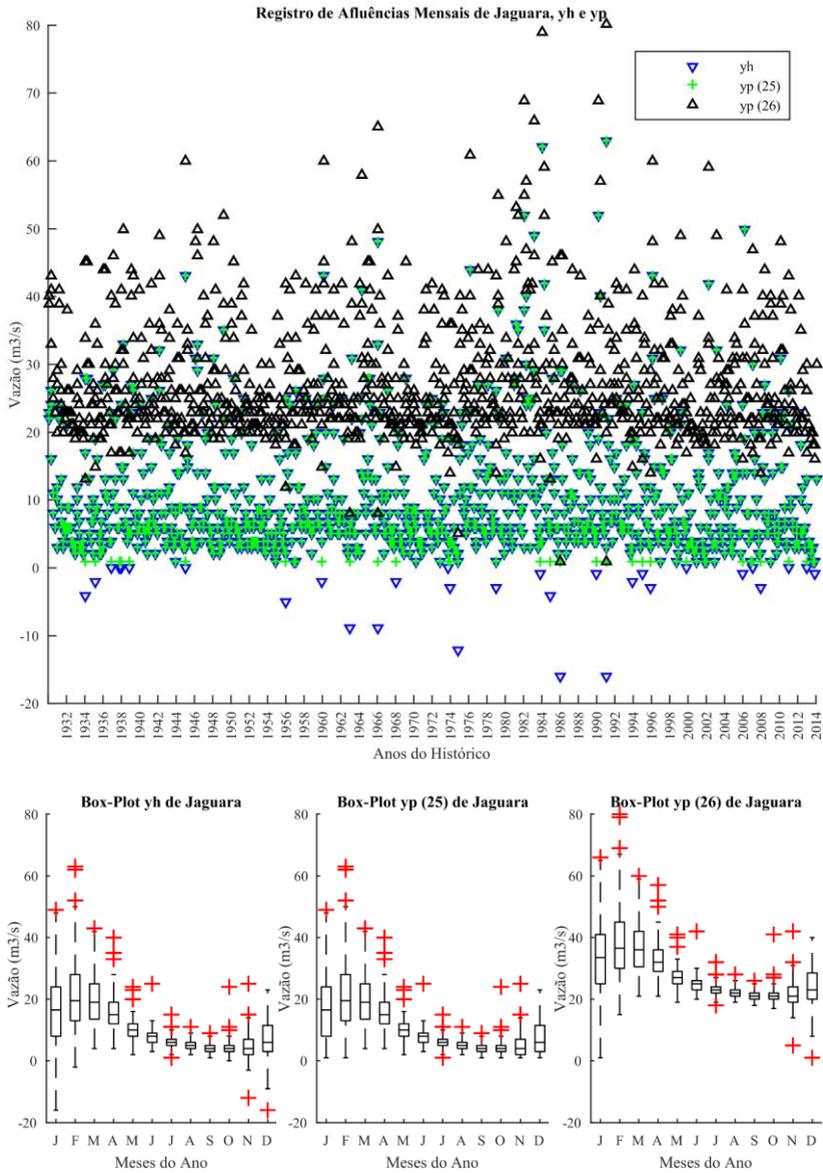
Uma melhor opção para a definição de yp_t^h consiste em adequar as transformações BOX-COX, previstas dos modelos de geração de afluências apresentados na Seção 2.2, à concepção linear do modelo do PMPO. Para a nova definição de yp_t^h um coeficiente denominado de grau de liberdade do histórico incremental, δyh_t^h , deve ser computado após o cálculo dos yh_t^h observados para uma hidrelétrica h em todo $t \in \mathcal{T}$. Assim, caso algum valor de $yh_t^h \leq 0$ seja verificado, δyh_t^h é definido como 1 mais o módulo do menor valor yh_t^h de todo $t \in \mathcal{T}$. Caso contrário, se todo $yh_t^h > 0$, $\delta yh_t^h = 0$.

Determinado o grau de liberdade do histórico incremental, a afluência do processo estocástico observada em $t \in \mathcal{T}$. deve ser definida como:

$$yp_t^h \triangleq yh_t^h + \delta yh_t^h, \quad t \in \mathcal{T}_-. \quad (26)$$

Ao se proceder com (26) para a formação do registro histórico de afluências, as propriedades estatísticas de $yp_t^h: t \in \mathcal{T}$. são compatíveis com as propriedades originais de $yh_t^h: t \in \mathcal{T}$., conforme se pode observar nas informações sazonais tipo Box-Plot da Figura 5.

Figura 5 – Comparação das Afluências da Usina de Jaguara.



Fonte: do Autor.

Uma vez que os modelos de geração de afluições da Seção 2.2 são parametrizados com a afluição incremental definida em (26), valores sintéticos de yp_t^h poderão ser gerados para todos os estágios do horizonte de planejamento, $t \in \mathcal{T}_+$. O cálculo de yh_t^h a ser utilizado no balanço hídrico deve então ser procedido conforme:

$$yh_t^h = yp_t^h - \delta y h_t^h, \quad t \in \mathcal{T}_+. \quad (27)$$

A utilização do grau de liberdade $\delta y h^h$ implica em modelos de afluições com as propriedades estatísticas do processo original, diferentemente da estratégia prática de (25), em que a estatística do processo é alterada.

Todavia, observa-se que, conforme discutido nas seções 3.1.3 e 3.1.4, é necessário que haja o relaxamento do balanço hídrico, pois, valores negativos provenientes de (27) podem inviabilizar o modelo do PMPO.

2.1.1.4. Afluições por Hidrelétricas e por Bacias Hidrográficas

Em uma modelagem do PMPO em que as decisões operacionais podem ser tomadas para cada hidrelétrica e o balanço hídrico pode ser realizado em cada reservatório, é natural que, no primeiro momento, se considere conveniente que a representação do processo estocástico de afluição incremental seja feita individualmente para cada usina. Porém, em sistemas hidrotérmicos de grande porte como o SIN, pode-se requisitar que centenas de hidrelétricas sejam representadas no modelo de médio prazo. Nesse caso, a dimensão do espaço amostral de todo o processo aleatório intrínseco à representação das afluições pode ser consideravelmente alta.

Muitas vezes em sistemas com um grande número de hidrelétricas grandes concentrações de usinas próximas umas das outras podem ser identificadas dada a disposição das usinas nas cascatas hidráulicas. Dependendo dos ciclos de chuvas, da geografia da região e da quantidade de rios afluentes em uma bacia hidrográfica, o comportamento das afluições incrementais que chegam à essas usinas pode ser muito parecido. Assim, uma alternativa à representação do processo estocástico de afluição incremental por hidrelétrica consiste na representação estocástica das afluições totais das cascatas hidráulicas ou das bacias hidrográficas (DE MATOS, 2008; LIMA; POPOVA; DAMIEN, 2014; SUTLOVIC; CUJIC-COKO; MEDIC, 2014).

No presente trabalho ambas as representações são implementadas no modelo do PMPO: por hidrelétricas e por cascatas/bacias hidrográficas. Além disso, para simplificação da nomenclatura empregada na modelagem do PMPO, cascatas hidráulicas serão apropriadamente generalizadas como bacias hidrográficas.

Para que a representação do processo estocástico por bacia possa ser efetivada, alguns requisitos devem ser apresentados. Inicialmente, salienta-se que os cálculos das afluências incrementais observadas $yh_t^h : t \in \mathcal{T}$ e do grau de liberdade do histórico incremental δyh_t^h devem ser realizados para cada hidrelétrica do sistema, conforme descrito na seção anterior. O valor observado do processo estocástico de afluência em uma bacia hidrográfica b é calculado para $t \in \mathcal{T}$ como:

$$yp_t^b \triangleq \sum_{h \in \mathcal{H}^b} yh_t^h + \delta yh_t^h, \quad t \in \mathcal{T}_-. \quad (28)$$

$$\mathcal{B} = \{b : b \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq b \leq nb\}, \quad (29)$$

$$\mathcal{H}^b = \{h : h \in \mathcal{H}, b = fb(h)\}, \quad (30)$$

em que:

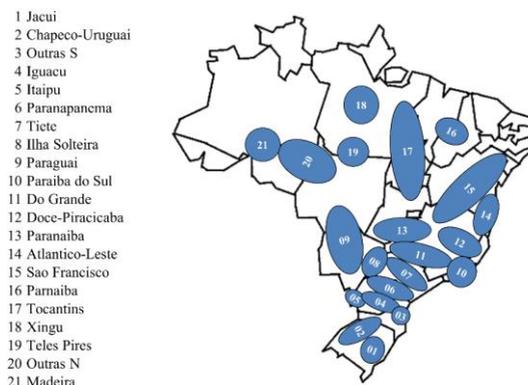
- \mathcal{B} : conjunto de bacias hidrográficas b do sistema,
- $fb(h) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$, função que retorna a bacia b da hidrelétrica h ,
- \mathcal{H}^b : conjunto de hidrelétricas h localizadas na bacia b ,
- yp_t^b : afluência do processo estocástico de b em t (m^3/s).

É interessante observar que a afluência do processo estocástico definida por bacia pode ser compreendida como uma generalização da definição (26). Logo, uma única hidrelétrica pode ser associada à yp_t^b , desde que o conjunto \mathcal{H}^b seja exclusivamente composto pela hidrelétrica em questão. Neste trabalho, a bacia denominada de Itaipu está associada exclusivamente à hidrelétrica de Itaipu. Na Figura 6, as 21 bacias utilizadas neste trabalho são apontadas no mapa brasileiro em termos da área abrangida pela localização das respectivas instalações hidrelétricas.

Segundo Lima (2011), um coeficiente de participação que define a proporção da afluência observada de cada hidrelétrica h em relação ao total da respectiva bacia b é definido como:

$$rh_t^h = \frac{yh_t^h + \delta yh_t^h}{yp_t^b}, \quad h \in \mathcal{H}^b, \quad t \in \mathcal{T}_-. \quad (31)$$

Figura 6 – Bacias Hidrográficas Consideradas no Modelo do PMPO.



Fonte: do Autor.

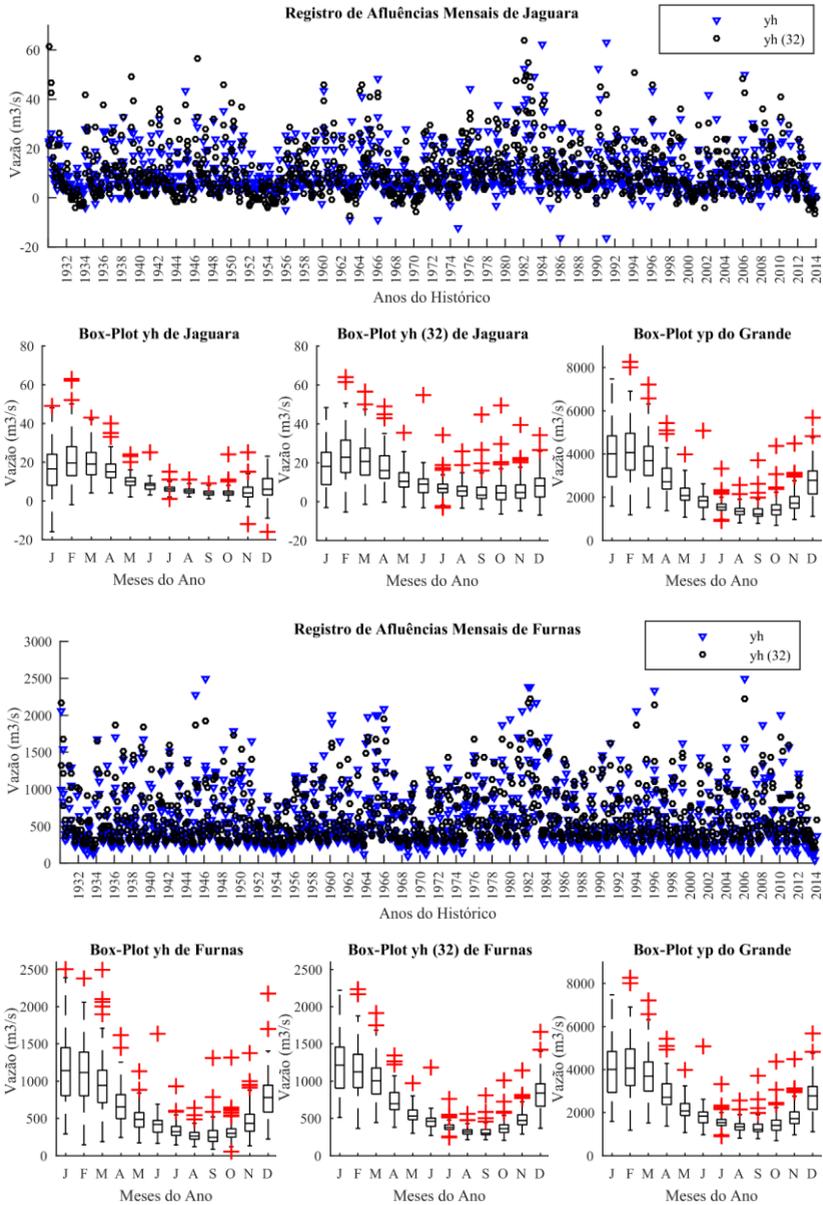
O coeficiente médio de participação μrh_t^h é definido como a média dos valores calculados de $rh_t^h : t \in \mathcal{T}$ associados à estação do ano de t . Uma vez que os valores de yp_t^b para $t \in \mathcal{T}_+$ são obtidos, a afluência incremental a ser utilizada no balanço hídrico de h localizada em b é calculada como:

$$yh_t^h = yp_t^b \cdot \mu rh_t^h - \delta y h^h, \quad h \in \mathcal{H}^b, \quad t \in \mathcal{T}_+. \quad (32)$$

A representação estocástica por bacia permite que o número de variáveis de estado do modelo do PMPO seja reduzido em comparação com a representação por hidrelétrica, facilitando a solução via PDDE. Contudo, ao se considerar o processo estocástico por bacia mais uma simplificação é admitida no modelo do PMPO. Exemplificando o impacto que a representação por bacia incorre na caracterização da afluência do balanço hídrico, na Figura 7 os valores históricos de yh_t^h de Jaguará e Furnas são comparados com os respectivos valores obtidos de (32), dados os valores do processo estocástico da bacia do Grande segundo (28).

A contribuição de Jaguará para a afluência yp_t^b da bacia do Grande é pequena, média de participação de 1,5%. Logo, o comportamento estatístico dos yh_t^h histórico e calculado possui um nível maior de discrepância que o comportamento observado para Furnas, por exemplo. No caso de Furnas, a participação média na afluência da bacia é de 28%. Por esse motivo, a representação estocástica por bacia pode ser considerada uma representação razoável para o SIN visto que pouco se altera o comportamento estatístico das incrementais relevantes.

Figura 7 – Afluências Incrementais Observadas e Obtidas a Partir da Bacia.



Fonte: do Autor.

2.1.2. Usinas Termelétricas

As usinas termelétricas podem ser compreendidas por complexos industriais que utilizam o calor resultante da queima ou da reação atômica de determinados combustíveis para produzir energia elétrica.

Basicamente, podem-se listar dois processos principais para a produção elétrica, ambos baseados no acionamento do gerador elétrico por turbinas. No primeiro a queima do combustível é realizada na própria turbina, enquanto que no segundo o acionamento da turbina é realizado a partir do vapor produzido com o uso do combustível em caldeiras (FLYNN, 2003). Assim, os principais combustíveis utilizados para a produção de energia elétrica podem ser listados como:

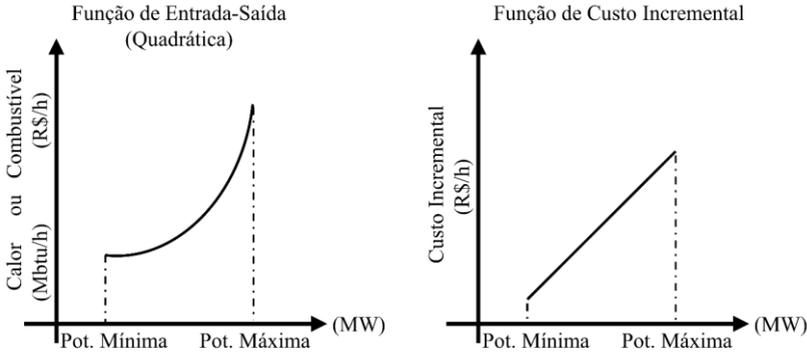
- Carvão Mineral, Gás Natural,
- Querosene, Gasolina, Álcool, Diesel,
- Urânio, Plutônio, Tório,
- Bagaço de Cana, Casca de Arroz, Cavaco de Madeira.

A opção pela produção termelétrica pode ser motivada pela facilidade de construção e instalação das usinas, quando comparada à hidrelétrica, pela falta de regiões favoráveis a outros tipos de empreendimentos, pela abundância de determinado combustível na região ou pela confiabilidade na produção energética. O fato é que no cenário mundial existem inúmeras usinas termelétricas em operação e a parcela de produção termelétrica é predominante às demais (IEA, 2014).

2.1.2.1. Função de Custo Total de Produção

Como o calor provido pela queima ou reação atômica de combustíveis é o elemento básico do ciclo de produção termelétrico, a geração de energia depende da relação entre o calor de entrada, provido pelo combustível, e a potência elétrica líquida de saída da unidade térmica. Essa relação geralmente é expressa por uma função de ordem quadrática denominada função de entrada-saída ou função de entrada de calor (WOOD; WOLLENBERG, 1984), conforme pode ser visualizado na Figura 8.

Figura 8 – Curvas Típicas de Produção de Unidades Termelétricas.



Fonte: adaptado de Wood e Wollenberg (1984).

A partir do produto da função de entrada-saída estimada pelo custo do combustível, em R\$/MBtu por exemplo, e acrescentando-se os demais custos operativos incorridos na produção elétrica, uma função de custo de produção nominal pode ser definida para cada unidade termelétrica f em t como:

$$FC_i^f (pf_i^f) = fc^{0,f} + fc^{1,f} \cdot pf + fc^{2,f} \cdot (pf_i^f)^2, \quad (33)$$

em que:

- pf_i^f : potência termelétrica líquida de f em t (MW),
- FC_i^f : função de custo total de produção em t (R\$/h),
- $fc^{0,2,f}$: coeficientes da função de custo total de f .

Para o despacho termelétrico de um sistema é importante se atentar ao custo incremental de geração de cada unidade, definido a partir da derivada de $FC_i^f (pf_i^f)$ em relação à pf_i^f (DA SILVA, 2012).

Contudo, a fim de simplificação matemática para a aplicabilidade de modelos de mercado, muitas vezes a função de custo total de produção é composta por um único coeficiente, denominado de Custo Variável Unitário (CVU), descrito por cf^f .

Logo, (33) pode ser redefinido como:

$$FC_{CFt}^f (pf_i^f) = cf^f \cdot pf_i^f, \quad (34)$$

em que:

$$cf^f : \text{custo variável unitário de } f \text{ (R\$/MWh),}$$

$$FC_{CFi}^f : \text{custo aproximado de produção de } f \text{ em } t \text{ (R\$/h).}$$

Além dos custos de produção, um modelo detalhado para o comportamento de unidades termelétricas necessita considerar as restrições impostas pelo processo termodinâmico que a unidade está sujeita. Como esse tipo de comportamento implica em dinâmicas horárias e/ou diárias na operação termelétrica, no PMPO as restrições que envolvem custos e tempos mínimos de partida/desligamento das unidades não são consideradas. Por fim, vale destacar que o conjunto das unidades termelétricas em operação no sistema em t é representado por:

$$\mathcal{F}_t = \{f : f \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq f \leq nf_t\}, \quad (35)$$

em que:

$$nf_t : \text{número de unidades termelétricas em operação em } t.$$

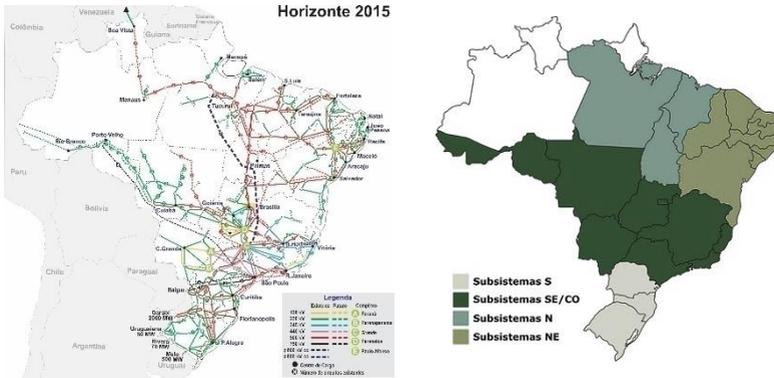
No contexto do planejamento de médio prazo, as decisões são tomadas para cada unidade termelétrica em operação f , em termos da potência líquida mensal despachada.

2.1.3. Subsistemas

A representação de barras e linhas de transmissão de um sistema elétrico é prevista em grande parte dos modelos encontrados na literatura de planejamento de sistemas elétricos (PESCHON; BREE; HAJDU, 1972) e coordenação hidrotérmica (SIFUENTES; VARGAS, 2007). Dadas as dimensões de um sistema elétrico de grande porte algumas simplificações são aplicadas ao modelo de forma a viabilizar a solução.

Nesse contexto, é muito comum o uso de aproximações lineares para as equações da rede de transmissão, além da redução do número total de barras do sistema para modelos de planejamento hidrotérmico (PEREIRA; PINTO, 1983). No entanto, além da maior complicação para o problema, a representação da rede em modelos de despacho baseados no custo marginal de operação pode decorrer em soluções na qual o preço formado na barra seja único e diferente das demais barras do sistema. Esse tipo de solução tornaria extremamente complexa a estrutura e implantação de um mercado de energia, caso o preço obtido a partir dos modelos fosse utilizado na contabilização dos agentes.

Figura 9 – Representação da Rede de Transmissão e Subsistemas Brasileiros.



Fonte: ONS (2015b).

Uma prática muito utilizada no planejamento de médio prazo consiste em assimilar uma região com diversas barras do sistema como um subsistema. Assim, um subsistema pode ser interpretado como uma única barra fictícia na região em que um único preço é formado e uma única decisão é tomada. A Figura 9 exibe as principais linhas de transmissão e barras do sistema brasileiro e os subsistemas correspondentes.

A representação do conjunto dos subsistemas a serem considerados no estudo é dada por:

$$S = \{s : s \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq s \leq ns\}, \quad (36)$$

em que:

ns : número de subsistemas.

Como o modelo de planejamento de médio prazo também pode ser um modelo formador de preço no mercado de energia elétrica, os preços obtidos nos subsistemas podem ser utilizados na contabilização dos agentes. Contudo, é recomendável que o mercado possua um mecanismo de reconciliação (DA SILVA, 2012), na qual seja possível cobrir a diferença do custo obtido com o despacho ideal, baseado no modelo aproximado, com o custo incorrido no despacho real do sistema.

2.1.3.1. Intercâmbios de Energia

Com a representação dos subsistemas no planejamento de médio prazo, torna-se necessário modelar a conexão elétrica entre os próprios subsistemas. A forma mais direta e precisa seria modelar paralelamente as linhas de transmissão das regiões de fronteiras dos subsistemas. Entretanto, dependendo das ramificações da rede, do número de linhas a serem consideradas e das respectivas variáveis e das equações do modelo linear de rede, a dimensão do modelo do PMPO pode se tornar consideravelmente grande.

Os resultados no médio prazo são voltados para decisões massivas de energia logo, no caso brasileiro, a conexão entre subsistemas é representada via intercâmbios de energia. Em uma abordagem básica, o transporte de energia de um intercâmbio é representado por uma injeção de potência no subsistema importador e um déficit de potência no subsistema exportador. Assim, a partir de restrições de potência das linhas de transmissão e estudos de confiabilidade, estabilidade e curto-circuito, as condições máximas e mínimas nos sentidos dos intercâmbios entre os subsistemas são definidas.

Todos os intercâmbios entre os subsistemas podem ser elencados em um conjunto como:

$$\mathcal{I} = \{i : i \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq i \leq ni\}, \quad (37)$$

em que:

ni : número de intercâmbios entre subsistemas.

2.1.3.2. Demanda de Energia

No modelo de médio prazo, a demanda de energia no subsistema pode ser compreendida como o valor agregado da demanda mensal de todas as barras representadas pelo subsistema. Desse modo, o valor líquido de demanda pl_i^s de s em t pode ser definido como a soma da demanda de energia com as perdas internas por transmissão estimadas, subtraindo-se o montante local de geração média estimada, que é compreendido por usinas de pequeno porte não modeladas no PMPO.

Naturalmente muita incerteza pode incorrer sobre os valores estimados de demanda de eletricidade ao longo do horizonte de estudo. Embora a modelagem multiestágio estocástica seja designada para tratar desse tipo de incerteza no problema, no modelo de médio prazo brasileiro

a demanda líquida de energia por subsistema é determinística em todo o horizonte de estudo. Novamente, essa aproximação é utilizada a fim de se reduzir a dimensão do problema (PEREIRA; PINTO, 1983).

Uma forma alternativa de se incorporar a incerteza da demanda no planejamento da operação hidrotérmica consiste em calcular diferentes políticas de operação para diferentes cenários de projeção de demanda. Assim o planejador pode traçar diferentes estratégias de operação dependendo da tendência e do comportamento do consumo observado.

2.1.3.3. Déficit de Energia

Em sistemas hidrotérmicos em que a capacidade de geração termelétrica é inferior à carga instalada no sistema, não se pode garantir com 100% de confiabilidade o atendimento interrupto à demanda (DA SILVA, 2012). Isso se dá pelo fato de que cenários críticos de afluência podem ocorrer na maioria das hidrelétricas e o período de escassez pode perdurar por anos. Desse modo, mesmo que os reservatórios estejam em níveis satisfatórios no início do período de escassez, um período muito longo de baixa afluência, ou seca, pode levar ao deplecionamento quase que completo dos reservatórios e ao déficit de energia.

Embora não se consiga prever com exatidão a extensão e a quantidade de água associada aos próximos períodos de seca, observando os registros históricos de afluências pode se constatar que os períodos de secas e cheias se intercalam ao longo dos anos.

Uma vez que o modelo de planejamento de médio prazo se atente ao comportamento histórico das afluências, a política de operação obtida pode propiciar estratégias de operação de modo que se atenda à demanda na maioria dos cenários previstos. Contudo, o risco de déficit de energia não deixa de estar presente na operação do sistema.

O déficit energético é um fato real a ser enfrentado pela operação de sistemas hidrotérmicos e a sua representação é fundamental para modelos de planejamento de médio prazo. No caso brasileiro, o déficit de energia é subdividido em patamares de potência na qual, a cada patamar, um custo social estimado é associado (CEPEL, 2001).

Um conjunto que compreende todos os patamares de déficit estipulados para o subsistema s em t pode ser definido como:

$$\mathcal{D}_i^s = \{d : d \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq d \leq nd_i^s\}, \quad (38)$$

em que:

nd_i^s : número total de patamares de déficit de s em t .

2.1.3.4. Atendimento à Demanda

A partir das considerações acerca da modelagem dos componentes do sistema hidrotérmico no contexto do médio prazo, pode-se definir uma equação que faz o balanço de potência disponível para atender à demanda do sistema. Vale salientar que embora a potência média (MW_{médio}) do sistema seja convenientemente apresentada nos estudos de médio prazo, conforme é apresentado na seção 3.1.1, as variáveis do problema de otimização do PMPO são definidas em termos da potência horária (MWh/h) em MW, de maneira que a função de custo de operação seja definida em R\$/h e o CMO em R\$/MWh. Entretanto, como a base das decisões do PMPO é mensal, os resultados de potência são interpretados como a potência média no mês em MW_{médios} e a energia pode ser calculada em MW_{mês} ao se multiplicar a potência horária pelo número de horas do mês.

A equação de atendimento à demanda é definida para cada subsistema $s \in \mathcal{S}$ como:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_t^s} ph_t^h + \sum_{f \in \mathcal{F}_t^s} pf_t^f + \sum_{d \in \mathcal{D}_t^s} pd_t^d + \sum_{i \in \mathcal{I}_+^s} pi_t^i - \sum_{i \in \mathcal{I}^-} pi_t^i - pl_t^s = 0, \quad (39)$$

em que:

- $\mathcal{H}_t^s \subseteq \mathcal{H}_t$: conjunto de hidrelétricas de s em operação em t ,
- $\mathcal{F}_t^s \subseteq \mathcal{F}_t$: conjunto de termelétricas f de s em operação em t ,
- $\mathcal{I}_+^s \subseteq \mathcal{I}$: conjunto de intercâmbios i de importação em s ,
- $\mathcal{I}^- \subseteq \mathcal{I}$: conjunto de intercâmbios i de exportação em s ,
- ph_t^h : potência líquida da hidrelétrica h em t (MW),
- pd_t^d : potência do patamar de déficit d em t (MW),
- pi_t^i : potência do intercâmbio i em t (MW).

No atendimento à demanda o déficit de energia corresponde à variável de folga da equação. Uma vez que a soma das potências do subsistema seja inferior ao valor de demanda líquida, os patamares de déficit assumem os valores do montante não suprido, viabilizando o modelo de otimização correspondente à operação hidrotérmica.

Finalmente, vale demonstrar um exemplo da representação dos intercâmbios i pela variável pi_t^i na equação (39). Dado que s é conectado a outros 2 subsistemas por 4 intercâmbios, dois exportadores $i=1$ e $i=2$ e outros dois importadores de energia $i=3$ e $i=4$, logo $\mathcal{I}_+^s = \{3, 4\}$ e $\mathcal{I}^- = \{1, 2\}$. Assim, quanto à representação dos intercâmbios na equação de atendimento à demanda de s em t , tem-se: $\dots + pi_t^3 + pi_t^4 - pi_t^1 - pi_t^2 + \dots$

2.1.3.5. Patamares de Carga

Os patamares de carga consistem em modulações da demanda líquida dos subsistemas por períodos mais curtos que o período de tempo correspondido pelo estágio t . A utilização de patamares de carga busca representar a flutuação média da carga do sistema, que ocorre diariamente, propiciando maior estresse na utilização dos recursos para o atendimento à demanda.

No PMPO brasileiro são admitidos 3 patamares de carga: leve, médio e pesado. Nesse trabalho, o conjunto de patamares de carga l em t é generalizadamente representado por:

$$\mathcal{L}_t = \{l : l \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq l \leq nl_t\}, \quad (40)$$

em que:

nl_t : número total de patamares de carga em t .

A adoção de patamares de carga no modelo de médio prazo implica que uma equação de atendimento à demanda deve ser formulada para cada patamar. Assim, as variáveis correspondentes também devem ser definidas por cada patamar l em t conforme:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_t^s} ph_t^{h,l} + \sum_{f \in \mathcal{F}_t^s} pf_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t^s} pd_t^{d,l} + \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} pi_t^{i,l} - \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} pi_t^{i,l} = pl_t^{s,l} \cdot tl_t^l, \quad (41)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_t} pl_t^{s,l} \cdot tl_t^l = pl_t^s, \quad (42)$$

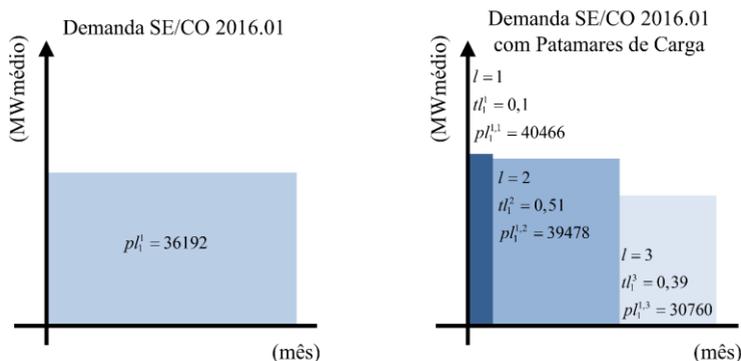
$$\sum_{l \in \mathcal{L}_t} tl_t^l = 1, \quad (43)$$

em que:

tl_t^l : duração de l em t (%).

Segundo (41), cada valor modulado de demanda associado à um determinado patamar deve ser ponderado pela parcela de tempo em t correspondente ao patamar. Ainda, (42) estabelece que o somatório da demanda por patamar com as respectivas parcelas de tempo dos patamares deve ser igual à demanda líquida prevista para o estágio t . Consequentemente as parcelas de tempo devem ser definidas de maneira que o somatório em $l \in \mathcal{L}_t$ seja igual à 1. Um exemplo da modulação da demanda em patamares de carga pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – Modulação da Demanda em Patamares de Carga.



Fonte: do Autor.

As variáveis associadas à produção e ao balanço hídrico também devem ser redefinidas para a utilização dos patamares de carga. Nesse caso é necessário diferenciar o balanço hídrico para usinas à fio d'água e de regularização conforme:

$$\begin{aligned}
 &vh_t^h - vh_{t+1}^h + vz_t \cdot yh_t^h - \\
 &vz_t \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}_t} tl_t^l \cdot \left[qh_t^{h,l} + sh_t^{h,l} - \sum_{m \in \mathcal{M}_t^h} (qh_t^{m,l} + sh_t^{m,l}) \right] = 0, \quad h \in \mathcal{V}_t \subseteq \mathcal{H}_t, \quad (44)
 \end{aligned}$$

$$yh_t^h - qh_t^{h,l} - sh_t^{h,l} + \sum_{m \in \mathcal{M}_t^h} (qh_t^{m,l} + sh_t^{m,l}) = 0, \quad h \in \mathcal{Q}_t \subseteq \mathcal{H}_t, \quad (45)$$

em que:

$\mathcal{V}_t \subseteq \mathcal{H}_t$: conjunto de usinas de regularização em operação em t ,

$\mathcal{Q}_t \subseteq \mathcal{H}_t$: conjunto de usinas à fio d'água em operação em t .

Com a utilização de patamares de carga no modelo do PMPO são necessários 2 vezes mais equações de atendimento à demanda e variáveis de produção, déficit, intercâmbio, turbinamento e vertimento, que um modelo que desconsidere patamares. Além disso também são necessários 2 vezes mais o número de balanços hídricos de usinas à fio d'água.

Nos mercados de energia elétrica, uma implicação prática da modulação da demanda por patamares consiste na obtenção de um CMO por cada patamar.

2.2. MODELOS DE GERAÇÃO DE AFLUÊNCIAS

Conforme discutido no Capítulo 1, devido à dimensão do modelo de planejamento de médio prazo, é comum se representar as incertezas apenas das vazões afluentes que chegam às hidrelétricas. Isso se deve ao fato de que com a grande quantidade de hidrelétricas no sistema e de meses do horizonte de planejamento, a atenção dada às incertezas das afluências é predominante às demais incertezas do problema (PEREIRA et al., 1984; PEREIRA; PINTO, 1985; LARROYD, 2012; FINARDI; DECKER; MATOS, 2013).

Com isso, vale-se atentar à importância da representação estocástica das afluências no planejamento de médio prazo a partir da modelagem de processos aleatórios que descrevam razoavelmente o seu comportamento observado. Nas próximas seções os principais modelos de geração de afluências da família do modelo utilizado neste trabalho são apresentados e detalhadamente discutidos.

Ressalva-se que segundo o apresentado ao longo da seção, os modelos de geração de afluência dependem de realizações de variáveis aleatórias calculadas a partir de ruídos brancos. As estratégias de sorteio e obtenção de ruído branco são discutidas na Seção 3.

2.2.1. O Modelo Periódico Autoregressivo (PAR)

O modelo periódico autoregressivo (PAR) é um modelo de previsão e simulação de séries temporais sazonais, amplamente utilizado e difundido na comunidade científica. Inúmeros pesquisadores contribuíram e ainda contribuem no desenvolvimento do modelo e muitas vertentes podem ser encontradas na literatura especializada. A formulação utilizada neste trabalho se baseia na proposta clássica denominada de BOX & JENKINS (BOX; JENKINS; REINSEL, 2008; HIPEL; MCLEOD; LENNOX, 1977; MCLEOD; HIPEL; LENNOX, 1977).

O modelo PAR discutido deste ponto em diante é voltado exclusivamente à representação de afluências e, ao longo da seção, algumas variações da notação original são utilizadas. Dessa maneira, busca-se facilitar a inclusão do modelo PAR na formulação multiestágio estocástica da Sessão 3.

A fim de exemplificação para a definição da notação, supõem-se que um valor estocástico de afluência yp_t^b que chega à bacia hidrográfica b será previsto para o estágio t do horizonte de planejamento cuja estação

periódica mensal, nesse caso o mês do ano associado à t , é representado por e . O número total de estágios do horizonte de planejamento é nt . Conforme discutido na Seção 2.1.1.3, à bacia b é atribuído um histórico de afluições mensais observadas, com um número de observações no . A periodicidade mensal das afluições no modelo é o número total de estações no ano $ne = 12$. Portanto, os valores observados do histórico são representados por $yp_t^b : t \in \mathcal{T}$ dadas as definições de:

$$\mathcal{E} = \{e : e \in \mathbb{Z}_+ : 1 \leq e \leq ne\}, \quad (46)$$

$$\mathcal{T}_+ = \{t : t \in \mathbb{Z}_+ : 1 \leq t \leq nt\}, \quad (47)$$

$$\mathcal{T}_- = \{t : t \in \mathbb{Z} : -no < t < 1\}, \quad (48)$$

$$\mathcal{T}_-^e = \{t : t \in \mathcal{T}_- : e = fe(t)\}, \quad (49)$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_+ \cup \mathcal{T}_-, \quad (50)$$

em que:

- \mathcal{E} : conjunto de estações e do ano,
- \mathcal{T}_+ : conjunto de estágios t do horizonte de planejamento,
- \mathcal{T}_- : conjunto de estágios t do horizonte observado,
- \mathcal{T}_-^e : conjunto de estágios t observados na estação e ,
- \mathcal{T} : conjunto total de estágios t ,
- $fe(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}$, função que retorna a estação e do estágio t .

No modelo PAR se pressupõe que os valores observados da série temporal são providos por um processo de comportamento Normal, com certa sazonalidade e estacionário no tempo. Como na prática os valores de afluição $yp_t^b : t \in \mathcal{T}$ não possuem comportamento Normal, uma transformação denominada de “BOX-COX”, proposta pelos famosos estatísticos George Box e Sir David Cox (BOX; COX, 1964), pode ser utilizada para designar um comportamento Normal ao processo observado como:

$$xp_t^b \triangleq BC\left(yp_t^b\right), \quad t \in \mathcal{T}_-, \quad (51)$$

em que:

- BC : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transformação BOXCOX,
- xp_t^b : serie temporal normalizada.

Assumindo-se uma sazonalidade mensal nos valores de yp_t^b : $t \in \mathcal{T}$, ao se estimar os padrões regulares observados na série histórica de afluência, nesse caso a média e o desvio padrão, uma série não sazonal pode ser obtida como:

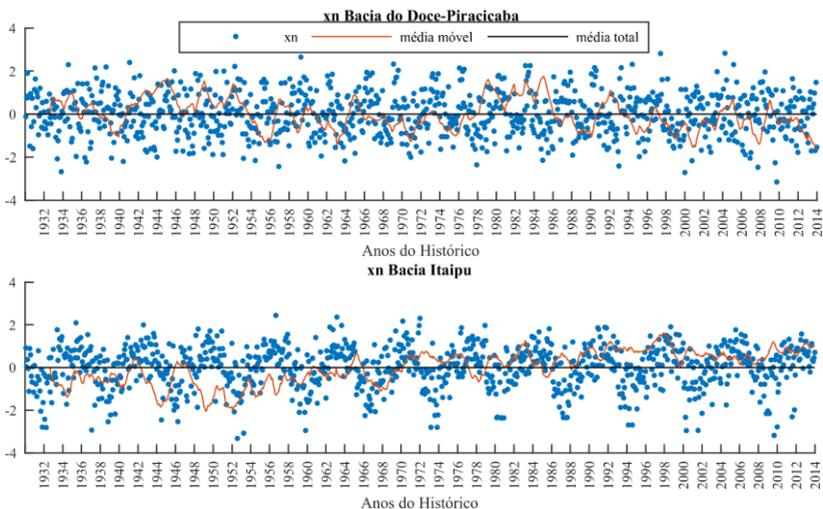
$$xn_t^b = \frac{xp_t^b - \mu xp_t^b}{\sigma xp_t^b}, t \in \mathcal{T}, \quad (52)$$

em que:

- xn_t^b : série temporal normalizada e dessazonalizada,
- μxp_t^b : média dos valores observados e normalizados nos estágios da estação $e = fe(t)$,
- σxp_t^b : desvio padrão dos valores observados e normalizados nos estágios da estação $e = fe(t)$.

Calculados os valores de xn_t^b : $t \in \mathcal{T}$, avaliações e testes podem ser realizados para determinar se a série observada possui alguma tendência de longo prazo, caracterizando assim um processo não estacionário no tempo. Na Figura 11 são exibidos os valores obtidos segundo (52) para as bacias do Doce-Piracicaba, Itaipu e Paraguai.

Figura 11 – Séries Observadas de Afluência: DocePiracicaba, Itaipu e Paraguai.





Fonte: do Autor.

Sem entrar em detalhes mais aprofundados na discussão acerca da avaliação e caracterização de séries não estacionárias, alguns aspectos visuais dos resultados apresentados na Figura 11 merecem ser apontados. A série da bacia do Doce-Piracicaba é apresentada como a referência de série estacionária dentre as três séries avaliadas. Nota-se que visualmente não há indícios de componentes de longo prazo ou interferência na série. Entretanto, ao se observar a média móvel da série de Itaipu, calculada com \sqrt{no} elementos passados, pode-se perceber uma tendência de aumento do valor médio ao longo dos anos, o que caracterizaria um comportamento não estacionário à série. No caso da série da bacia do Paraguai, embora não haja evidências claras de componentes de longo prazo, há indícios de componentes de interferência nos valores observados das décadas de 60 e 70.

É importante salientar que os possíveis componentes não estacionários observados na Figura 11 podem afetar o desempenho dos modelos PAR apresentados nesta seção. Logo, destaca-se que embora atualmente no SEB não haja discussões relevantes acerca da integridade dos dados das séries históricas de afluência, uma futura pauta de como a reconstrução histórica dos dados de afluência natural pode interferir na representação das afluências no modelo do PMPO merece ser discutida.

Uma vez que as séries obtidas a partir de (52) possam ser caracterizadas como estacionárias e de comportamento normal, um modelo PAR para a previsão do valor de $xn_t^b : t \in \mathcal{T}_+$ é definido a partir da dependência linear entre os np_t^b valores passados de xn_t^b como:

$$xn_t^b \triangleq m_t^b + \sum_{p=1}^{np_t^b} fn_{t,p}^b \cdot xn_{t-p}^b, \quad (53)$$

$$m_t^b \triangleq rb_t^b \cdot \sigma m_t^b, \quad (54)$$

em que:

- rn_t^b : resíduo de distribuição normal de variância $(\sigma rn_t^b)^2$ em t ,
- rb_t^b : ruído branco de média zero e desvio padrão unitário em t ,
- np_t^b : número de períodos, estágios, de dependência em t ,
- $fn_{t,p}^b$: coeficiente linear de dependência de t com $t-p$.

Com a definição do modelo, torna-se necessário estimar o número de períodos de dependência, ou ordem do modelo np_t^b , os valores dos coeficientes $fn_{t,p}^b$ e a variância do resíduo rn_t^b .

Ao se substituir os termos xn_t^b segundo (52) e multiplicar a expressão (53) por:

$$\left(\frac{xp_{t-k}^b - \mu xp_{t-k}^b}{\sigma xp_{t-k}^b} \right), \quad (55)$$

Obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{xp_t^b - \mu xp_t^b}{\sigma xp_t^b} \right) \cdot \left(\frac{xp_{t-k}^b - \mu xp_{t-k}^b}{\sigma xp_{t-k}^b} \right) = \\ & \left[rn_t^b + \sum_{p=1}^{np_t^b} fn_{t,p}^b \cdot \left(\frac{xp_{t-p}^b - \mu xp_{t-p}^b}{\sigma xp_{t-p}^b} \right) \right] \cdot \left(\frac{xp_{t-k}^b - \mu xp_{t-k}^b}{\sigma xp_{t-k}^b} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Calculando o Valor Esperado em ambos os lados da equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.** se obtém:

$$\rho xp_{t,k}^b = E \left[rn_t^b \cdot \left(\frac{xp_{t-k}^b - \mu xp_{t-k}^b}{\sigma xp_{t-k}^b} \right) \right] + \sum_{p=1}^{np_t^b} fn_{t,p}^b \cdot \rho xp_{t-p,k}^b, \quad (57)$$

em que:

- $\rho xp_{t,k}^b$: coeficiente de autocorrelação estimado entre xp_t^b e xp_{t-k}^b ,
- $\rho xp_{t-p,k}^b$: coeficiente de autocorrelação estimado entre xp_{t-p}^b e xp_{t-k}^b .

Para $k = 0$, a expressão (57) pode ser escrita como:

$$1 = (\sigma r_t^b)^2 + \sum_{p=1}^{np_t^b} f n_{p,t}^b \cdot \rho x p_{t-p,k}^b, \quad (58)$$

$$(\sigma r_t^b)^2 = 1 - \sum_{p=1}^{np_t^b} f n_{p,t}^b \cdot \rho x p_{t-p,k}^b.$$

Logo a variância do resíduo r_n^b pode ser calculada a partir dos coeficientes lineares $f n_{t,p}^b$ e de autocorrelação $\rho x p_{t-p,t}^b$.

Para melhor compreensão da notação, vale destacar os seguintes pontos acerca dos coeficientes de autocorrelação:

- a autocorrelação entre mesmos estágios é unitária. Por exemplo: $\rho x p_{t,t}^b = 1$, $\rho x p_{p,p}^b = 1$;
- a ordem dos índices não altera a autocorrelação. Por exemplo: $\rho x p_{t,k}^b = \rho x p_{k,t}^b$, $\rho x p_{p,k}^b = \rho x p_{k,p}^b$.

A expressão (57) pode ser escrita agora para $k = 1, \dots, np_t^b$ como:

$$\begin{aligned} \rho x p_{t,1}^b &= f n_{t,1}^b && + f n_{t,2}^b \cdot \rho x p_{t-2,1}^b && + \dots && + f n_{t,np_t^b}^b \cdot \rho x p_{t-np_t^b,1}^b, \\ \rho x p_{t,2}^b &= f n_{t,1}^b \cdot \rho x p_{t-1,2}^b && + f n_{t,2}^b && + \dots && + f n_{t,np_t^b}^b \cdot \rho x p_{t-np_t^b,2}^b, \\ &\vdots && \vdots && \vdots && \vdots \\ \rho x p_{t,np_t^b}^b &= f n_{t,1}^b \cdot \rho x p_{t-1,np_t^b}^b && + f n_{t,2}^b \cdot \rho x p_{t-2,np_t^b}^b && + \dots && + f n_{t,np_t^b}^b. \end{aligned} \quad (59)$$

Ao se reescrever matricialmente (59), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho x p_{t-2,1}^b & \cdots & \rho x p_{t-np_t^b,1}^b \\ \rho x p_{t-1,2}^b & 1 & \cdots & \rho x p_{t-np_t^b,2}^b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho x p_{t-1,np_t^b}^b & \rho x p_{t-2,np_t^b}^b & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f n_{t,1}^b \\ f n_{t,2}^b \\ \vdots \\ f n_{t,np_t^b}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho x p_{t,1}^b \\ \rho x p_{t,2}^b \\ \vdots \\ \rho x p_{t,np_t^b}^b \end{bmatrix}. \quad (60)$$

O sistema linear exibido por (59) e (60) é conhecido como equações de Yule-Walker. Assim, a partir do número de períodos de dependência np_t^b atribuído ao modelo, (60) pode ser resolvido de forma a se estimar os coeficientes lineares $f n_{t,p}^b$, $p=1, \dots, np_t^b$.

Embora existam outros estimadores para os coeficientes $f n_{t,p}^b$, como o baseado na máxima verossimilhança (HIPEL; MCLEOD, 1994), para o propósito deste trabalho, pode-se assumir que é suficiente o uso

das equações de Yule-Walker como estimador. Isso porque esse é o estimador utilizado atualmente no modelo oficial do PMPO brasileiro (CEPEL, 2001).

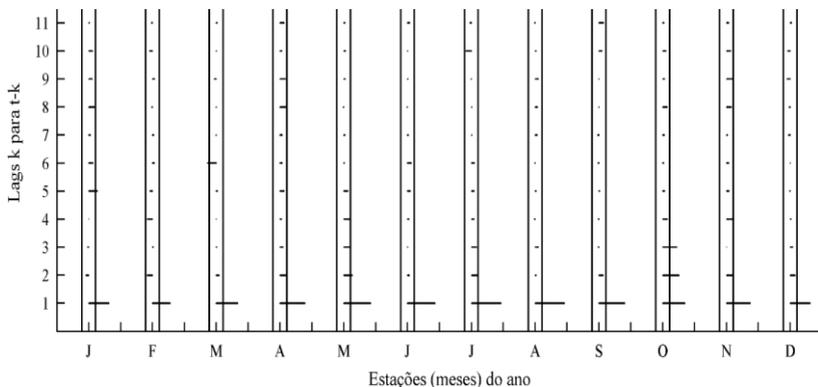
Como último requisito para a definição do modelo PAR, resta-se identificar o número de períodos de dependência np_i^b a ser utilizado no modelo. Dentre inúmeros métodos e estratégias de identificação de ordem do modelo PAR (HAMILTON, 1994), o utilizado neste trabalho consiste na avaliação da Função de Autocorrelação Parcial (FAP).

Para o cálculo da FAP, inicialmente é preciso definir o número máximo de períodos de dependência. No caso de um modelo ajustado para a periodicidade mensal das afluições, o número máximo de np_i^b é igual a ne , 12 meses.

Nesse caso a FAP é obtida resolvendo-se ne vezes as equações de Yule-Walker, em que na primeira resolução $np_i^b = 1$, na segunda $np_i^b = 2$ e assim sucessivamente até $np_i^b = ne$. Os valores são armazenados a cada resolução e, ao final do processo, verifica-se o maior valor significativo de $fn_{t,np}^b$ em relação a um intervalo de confiança estabelecido.

Uma vez identificado o maior valor, o respectivo np_i^b é atribuído ao modelo. Assim, os $fn_{t,p}^b$ finais devem ser calculados através de (60) para a ordem np_i^b identificada. Naturalmente o processo de identificação da ordem do modelo é realizado somente para os primeiros ne estágios, pois as estações do ano são cíclicas. Como exemplo do processo descrito, na Figura 12 se pode observar a FAP estimada para a bacia do Grande.

Figura 12 – FAP Estimada Para a Bacia do Grande.



Fonte: do Autor.

Uma vez definida a ordem do modelo em t via FAP e estimados os coeficientes $fn_{t,p}^b$ por (60), ao se realizar um sorteio normalmente distribuído de variância $(\sigma m_{t,p}^b)^2$, uma realização r do resíduo $m_{t,p}^b$ é obtida. Reescrevendo (53) segundo (52), um valor $xp_t^b: t \in \mathcal{T}_+$ pode ser calculado a partir do valor sorteado $rn_{t,r}^b$ e dos np_t^b valores de afluência observados ou gerados anteriormente à t conforme:

$$xp_t^b \triangleq rp_{t,r}^b + \sum_{p=1}^{np} fp_{t,p}^b \cdot xp_{t-p}^b, \quad t \in \mathcal{T}_+, \quad (61)$$

em que:

$$fp_{t,p}^b \triangleq fn_{t,p}^b \cdot \left(\frac{\sigma xp_t^b}{\sigma xp_{t-p}^b} \right), \quad p \leq np_t^b, \quad (62)$$

$$fp_{t,p}^b \triangleq 0, \quad np_t^b < p \leq np, \quad (63)$$

$$rp_{t,r}^b \triangleq \mu xp_t^b + \sigma xp_t^b \cdot rn_{t,r}^b - \sum_{p=1}^{np} fp_{t,p}^b \cdot \mu xp_{t-p}^b, \quad (64)$$

np : número máximo de estágios de dependência em t .

Calculado $xp_t^b: t \in \mathcal{T}_+$, o valor de afluência é obtido a partir da transformação inversa de BOX-COX conforme:

$$yp_t^b = BC^{-1}(xp_t^b), \quad t \in \mathcal{T}_+. \quad (65)$$

A definição de BC é bastante generalizada e, dependendo do comportamento da série, a sua aplicação pode incorrer em inúmeras dificuldades. Nesse sentido, um caso particular de BC é utilizado neste trabalho em que as afluências são transformadas em $xp_t^b: t \in \mathcal{T}$ por uma função Logarítmica Natural $LN: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Logo:

$$xp_t^b \triangleq LN(yp_t^b), \quad t \in \mathcal{T}_-. \quad (66)$$

Finalmente, utilizando as propriedades da função Exponencial Neperiana NE , os valores de $yp_t^b: t \in \mathcal{T}_+$ podem ser obtidos conforme:

$$yp_t^b \triangleq EN(rp_{t,r}^b) \cdot \prod_{p=1}^{np} (yp_{t-p}^b)^{fp_{t,p}^b}, \quad t \in \mathcal{T}_+. \quad (67)$$

Observando (61), percebe-se que o modelo PAR é linear no caso de valores observados nos registros históricos serem normalmente distribuídos. Devido às transformações necessárias para a aplicação do modelo PAR, pode-se perceber em (67) uma relação não linear da afluência prevista com as afluências anteriores à t . Esse tipo de comportamento é indesejável do ponto de vista do modelo do planejamento de médio prazo e faz com que a formulação BOX & JENKINS apresentada necessite de adequações (MACEIRA; DAMAZIO, 2004), conforme discutido na próxima sessão.

2.2.2. O Modelo PAR Lognormal a Três Parâmetros

Na formulação apresentada na seção anterior, especificamente (67), percebe-se o comportamento não linear do modelo PAR com vistas às transformações envolvidas. Ainda, conforme discutido anteriormente, a transformação por LN é bastante utilizada na normalização de afluências, implicando que os valores observados se comportam segundo uma distribuição Lognormal. A partir desta premissa, um modelo periódico autoregressivo denominado neste trabalho de PAR Lognormal pode ser definido segundo Cepel (2001), Maceira e Damarzio (2004) e Maceira *et al.* (2008) como:

$$\frac{yp_t^b - \mu yp_t^b}{\sigma yp_t^b} = rl_t^h + \sum_{p=1}^{np} fl_{t,p}^b \cdot \left(\frac{yp_{t-p}^b - \mu yp_{t-p}^b}{\sigma yp_{t-p}^b} \right), \quad (68)$$

em que:

rl_t^h : resíduo de distribuição Lognormal de média μrl_t^h e variância $(\sigma rl_t^h)^2$ em t ,

$fl_{t,p}^b$: coeficiente linear de dependência de t com $t - p$,

μyp_t^b : média dos valores observados nos estágios da estação $e = fe(t)$,

σyp_t^b : desvio padrão dos valores observados nos estágios da estação $e = fe(t)$.

De forma semelhante ao modelo PAR BOX & JENKINS da seção anterior, ao se multiplicar a expressão (68) pelo termo de (69) e calcular o Valor Esperado em ambos os lados da equação resultante, obtém-se a expressão (70).

$$\left(\frac{yp_{t-k}^b - \mu yp_{t-k}^b}{\sigma yp_{t-k}^b} \right), \quad (69)$$

$$\rho yp_{t,k}^b = E \left[rl_t^b \cdot \left(\frac{yp_{t-k}^b - \mu yp_{t-k}^b}{\sigma yp_{t-k}^b} \right) \right] + \sum_{p=1}^{np_t^b} fl_{t,p}^b \cdot \rho yp_{t-p,k}^b, \quad (70)$$

em que:

$\rho yp_{t,k}^b$: coeficiente de autocorrelação estimado entre yp_t^b e yp_{t-k}^b ,
 $\rho yp_{t-p,k}^b$: coeficiente de autocorrelação estimado entre yh_{t-p}^b e yh_{t-k}^b .

Para $k = 0$, a expressão (70) pode ser escrita como:

$$1 = (\sigma rl_t^b)^2 + \sum_{p=1}^{np_t^b} fl_{t,p}^b \cdot \rho yp_{t-p,0}^b, \quad (71)$$

$$(\sigma rl_t^b)^2 = 1 - \sum_{p=1}^{np_t^b} fl_{t,p}^b \cdot \rho yh_{t-p,0}^b.$$

Também para $k = 1, \dots, np_t^b$, a expressão (70) pode ser descrita na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho yp_{t-2,1}^b & \cdots & \rho yp_{t-np_t^b,1}^b \\ \rho yp_{t-1,2}^b & 1 & \cdots & \rho yp_{t-np_t^b,2}^b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho yp_{t-1,np_t^b}^b & \rho yp_{t-2,np_t^b}^b & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} fl_{t,1}^b \\ fl_{t,2}^b \\ \vdots \\ fl_{t,np_t^b}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho yp_{t,1}^b \\ \rho yp_{t,2}^b \\ \vdots \\ \rho yp_{t,np_t^b}^b \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Segundo (CEPEL, 2001), a expressão (72) pode ser utilizada como estimador dos coeficientes lineares do modelo PAR Lognormal. Assim, com o mesmo procedimento descrito para o modelo PAR da seção anterior, a ordem do modelo pode ser definida a partir de uma FAP estimada com (72).

Ao se comparar as equações de Yule-Walker apresentadas em (60) com as equações do modelo Lognormal (72), percebe-se como grande semelhança o uso de coeficientes de autocorrelação para o cálculo dos coeficientes lineares. Contudo, vale-se ressaltar que $\rho xp_{t,k}^b \neq \rho yp_{t,k}^b$ e, portanto, $fn_{t,p}^b \neq fl_{t,p}^b$.

Com a definição da ordem do modelo e do cálculo de $fl_{t,p}^b$, algumas considerações acerca dos resíduos rl_t^b devem ser feitas.

Uma distribuição Lognormal pode ser definida como a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória na qual seu logaritmo é normalmente distribuído. Assim, no caso dos resíduos do modelo PAR Lognormal, assume-se que uma variável $rx_t^b = LN(rl_t^b)$ seja normalmente distribuída.

Com o objetivo de representar o comportamento Normal da variável aleatória dos resíduos, a seguinte equação pode ser definida:

$$rx_t^b = rb_t^b \cdot \sigma rx_t^b + \mu rx_t^b, \quad (73)$$

em que:

μrx_t^b : média de rx_t^b nos estágios da estação $e = fe(t)$,

σrx_t^b : desvio padrão de rx_t^b nos estágios da estação $e = fe(t)$.

Valores de rl_t^b podem então ser calculados a partir do histórico observado de aflúncias com (68) para todo $t \in \mathcal{T}$, obtendo-se assim um “histórico” de resíduos rl_t^b . Por sua vez, valores observados de rx_t^b podem ser obtidos com o cálculo dos logaritmos dos rl_t^b estimados. Calculando-se a média e o desvio padrão dos valores obtidos de rx_t^b , os valores de μrx_t^b e σrx_t^b podem ser respectivamente estimados.

Uma vez computados μrx_t^b e σrx_t^b , os resíduos rl_t^b podem ser calculados a partir de realizações de $rb_t^b : t \in \mathcal{T}_+$ como:

$$rl_t^b = EN \left(rb_t^b \cdot \sigma rx_t^b + \mu rx_t^b \right). \quad (74)$$

Vale ressaltar que, diferentemente de uma distribuição Normal, a distribuição Lognormal é classificada como assimétrica em relação ao seu valor médio. Desta maneira, percebe-se que uma boa aproximação do formato da distribuição Lognormal pode ser encontrada a partir da estimativa do coeficiente de assimetria da amostra. Com isso, além da parametrização dos resíduos por μrx_t^b e σrx_t^b , o próprio coeficiente de assimetria estimado a partir dos rl_t^b observados pode ser usado no aprimoramento do comportamento Lognormal de rl_t^b . Esse artifício geralmente é empregado nos casos de forte assimetria da amostra, como aqueles encontrados em alguns meses de aflúncias nas hidrelétricas.

Utilizando como referência os trabalhos de Charbeneau (1978), Pereira *et al.* (1984) e De Matos, Larroyd e Finardi (2014), uma nova formulação denominada de Resíduos a Três Parâmetros pode ser definida para a representação de rl_t^b . Logo a parametrização da distribuição

Lognormal é alterada, de forma a se incorporar a assimetria da amostra na formulação.

A formulação para a distribuição Lognormal dos resíduos a Três Parâmetros é definida como:

$$rl_t^b = EN\left(rb_t^b \cdot \sigma rx_t^b + \mu rx_t^b\right) + \delta rx_t^b. \quad (75)$$

Na equação (75), os termos μrx_t^b , σrx_t^b e δrx_t^b são os parâmetros a serem estimados. Observa-se que μrx_t^b , σrx_t^b possuem interpretações diferentes daquelas definidas para (74), de modo que os mesmos são redefinidos juntamente com δrx_t^b a seguir.

A partir da definição de assimetria da distribuição Lognormal, descrita como:

$$\gamma rl_t^b = \frac{\left\{ EN\left[3 \cdot (\sigma rx_t^b)^2\right] - 3 \cdot EN\left[(\sigma rx_t^b)^2\right] + 2\right\}}{\left\{ EN\left[(\sigma rx_t^b)^2\right] - 1\right\}^{\frac{3}{2}}}, \quad (76)$$

em que:

γrl_t^b : assimetria da distribuição Lognormal rl_t^b em t .

Ao se estimar o valor de γrl_t^b a partir dos resíduos observados, definir $er_t^b = EN[(\sigma rx_t^b)^2]$ e reescrever os termos da equação (76), tem-se:

$$(er_t^b)^3 + 3 \cdot (er_t^b)^2 - \left[4 + (\gamma rl_t^b)^2\right] = 0. \quad (77)$$

Segundo Abramowitz e Stegun (1964), para $\gamma rl_t^b \geq 0$ só há a seguinte raiz real para (77):

$$er_t^b = \left\{ \left[1 + \frac{(\gamma rl_t^b)^2}{2} \right] + \left[(\gamma rl_t^b)^2 + \frac{(\gamma rl_t^b)^4}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \left[1 + \frac{(\gamma rl_t^b)^2}{2} \right] - \left[(\gamma rl_t^b)^2 + \frac{(\gamma rl_t^b)^4}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}} - 1. \quad (78)$$

Segundo a definição de er_t^b , o parâmetro $\sigma r x_t^b$ pode então ser obtido a partir do resultado da equação (78) como:

$$\sigma r x_t^b = \sqrt{LN(e r_t^b)}. \quad (79)$$

Utilizando agora a definição de variância da distribuição Lognormal conforme:

$$(\sigma r l_t^b)^2 = \left\{ EN \left[(\sigma r x_t^b)^2 \right] - 1 \right\} \cdot EN \left[(\sigma r x_t^b)^2 + 2 \cdot \mu r x_t^b \right]. \quad (80)$$

A partir da equação (71), que define $(\sigma r l_t^b)^2$ a partir dos coeficientes de autocorrelação e lineares do modelo, o parâmetro $\mu r x_t^b$ pode ser calculado ao se reescrever (80) como:

$$\mu r x_t^b = \frac{1}{2} \cdot LN \left[\frac{(\sigma r l_t^b)^2}{e r_t^b \cdot (e r_t^b - 1)} \right]. \quad (81)$$

Finalmente, segundo a definição de média da distribuição Lognormal:

$$\mu r l_t^b = EN \left[\mu r x_t^b + \frac{(\sigma r x_t^b)^2}{2} \right]. \quad (82)$$

Pode-se observar que a equação (82) corresponde ao comportamento da média de rl_t^b definido em (74).

Entretanto, na definição a Três Parâmetros de (75), o termo $\delta r x_t^b$ é somado à distribuição Lognormal. Esse termo pode ser interpretado como um grau de liberdade a ser adicionado à distribuição para viabilizar a inclusão da assimetria no modelo. Assim a equação (82) precisa ser balanceada de modo a incorporar $\delta r x_t^b$ segundo:

$$\mu r l_t^b = EN \left[\mu r x_t^b + \frac{(\sigma r x_t^b)^2}{2} \right] + \delta r x_t^b. \quad (83)$$

Dessa forma ao se substituir (79) e (81) em (83), δrx_t^b pode ser calculado a partir da estimativa da média e desvio padrão dos resíduos observados como:

$$\delta rx_t^b = \mu r l_t^b - \left[\frac{(\sigma r l_t^b)^2}{(e r_t^b - 1)} \right]^{1/2}. \quad (84)$$

Um ponto extremamente importante a ser destacado no cálculo dos parâmetros $\mu r x_t^b$, $\sigma r x_t^b$ e $\delta r x_t^b$ é que ao se observar (79), (81) e (84), percebe-se que pode haver indefinição no modelo com $e r_t^b \leq 1$. Neste caso, segundo Charbeneau (1978), para incluir a assimetria da amostra no modelo, é necessário que a distribuição Lognormal seja substituída por uma distribuição Gamma, por exemplo. Neste trabalho, caso os valores de $e r_t^b$ inviabilizem o modelo a Três Parâmetros, a formulação (74) sem a inclusão da assimetria é utilizada.

Ao se observar a equação (84), percebe-se que o valor de $\delta r x_t^b$ é diretamente dependente da relação:

$$\begin{aligned} \delta r x_t^b > 0 & : (e r_t^b - 1) > \frac{\sigma r l_t^b}{\mu r l_t^b}, \\ \delta r x_t^b < 0 & : (e r_t^b - 1) < \frac{\sigma r l_t^b}{\mu r l_t^b}. \end{aligned} \quad (85)$$

Com isso, observa-se que dependendo dos valores de $\delta r x_t^b$, $f l_{t,p}^b$ e $y p_{t-p}^b$ em (68), o modelo PAR Lognormal a Três Parâmetros pode gerar valores negativos de afluências. Isso pode ocorrer mesmo quando o modelo é parametrizado por valores positivos observados nos registros históricos e a entrada corresponda a $n p$ valores de afluências, também positivos, anteriores ao estágio t .

De maneira semelhante ao procedido na seção anterior, a partir dos valores estimados de $f l_{t,p}^b$ para $p=1, \dots, n p$ e do valor do resíduo (75) calculado a partir da realização r sorteada para o ruído branco, o modelo PAR Lognormal a Três Parâmetros pode ser definido para o modelo PMPO como:

$$y p_t^b \triangleq r p_{t,r}^b + \sum_{p=1}^{n p} f p_{t,p}^b \cdot y p_{t-p}^b, \quad t \in T_+, \quad (86)$$

em que:

$$fp_{i,p}^b = fl_{i,p}^b \cdot \left(\frac{\sigma y p_i^b}{\sigma y p_{i-p}^b} \right), \quad p \leq np_i^b, \quad (87)$$

$$fp_{i,p}^b = 0, \quad np_i^b < p \leq np, \quad (88)$$

$$rp_{i,r}^b = \mu y p_i^b + \sigma y p_i^b \cdot rl_{i,r}^b - \sum_{p=1}^{np} fp_{i,p}^b \cdot \mu y p_{i-p}^b. \quad (89)$$

Diferentemente do modelo BOX-JENKINS visto em (67), em (86) se percebe uma relação linear entre o valor de afluência a ser previsto e os valores passados de afluência.

2.2.2.1. Versão com Resíduos Dependentes

A variação do modelo PAR Lognormal a Três Parâmetros, denominada neste trabalho de Resíduos Dependentes, é proposta e utilizada por Pereira *et al.* (1984); Maceira e Damazio (2004) e Maceira *et al.* (2008) e também é utilizada no modelo oficial de médio prazo do SEB para a geração de ENAs (CEPEL, 2001).

Basicamente, a proposta da versão com Resíduos Dependentes surge como uma alternativa ao tratamento dos valores negativos de afluências intrínsecos ao modelo PAR Lognormal. Assim, a parametrização do modelo continua sendo representada pelas equações (68) e (75), contudo os parâmetros μrx_i^b , σrx_i^b e δrx_i^b do resíduo são redefinidos de maneira que se consiga garantir valores positivos de afluência.

Ao se rearranjar (68) se obtém:

$$yp_i^b = \mu y p_i^b + \sigma y p_i^b \cdot rl_i^b + \sigma y p_i^b \cdot \sum_{p=1}^{np_i^b} fl_{i,p}^b \cdot \left(\frac{yp_{i-p}^b - \mu y p_{i-p}^b}{\sigma y p_{i-p}^b} \right). \quad (90)$$

Observando (90), pode-se constatar que para $yp_i^b \geq 0$:

$$\mu y p_i^b + \sigma y p_i^b \cdot rl_i^b + \sigma y p_i^b \cdot \sum_{p=1}^{np_i^b} fl_{i,p}^b \cdot \left(\frac{yp_{i-p}^b - \mu y p_{i-p}^b}{\sigma y p_{i-p}^b} \right) \geq 0. \quad (91)$$

E, por sua vez:

$$rl_t^b \geq -\frac{\mu y p_t^b}{\sigma y p_t^b} - \sum_{p=1}^{np^b} fl_{t,p}^b \cdot \left(\frac{y p_{t-p}^b - \mu y p_{t-p}^b}{\sigma y p_{t-p}^b} \right). \quad (92)$$

Ao se definir o grau de liberdade do resíduo $\delta r x_t^b$ como o RHS de (92):

$$\delta r x_t^b = -\frac{\mu y p_t^b}{\sigma y p_t^b} - \sum_{p=1}^{np^b} fl_{t,p}^b \cdot \left(\frac{y p_{t-p}^b - \mu y p_{t-p}^b}{\sigma y p_{t-p}^b} \right). \quad (93)$$

Com isso, segundo (75) as condições de (92) e, por consequência, de (91) são sempre garantidas. Assim, o modelo PAR Lognormal com Resíduos Dependentes é definido de maneira que a sua saída implica em valores positivos de afluições.

Segundo Maceira e Damazio (2004), os demais parâmetros do resíduo são calculados como:

$$er_t^b = 1 + \left[\frac{(\sigma r l_t^b)^2}{(\delta r x_t^b)^2} \right], \quad (94)$$

$$\sigma r x_t^b = \sqrt{LN(er_t^b)}, \quad (95)$$

$$\mu r x_t^b = \frac{1}{2} \cdot LN \left[\frac{(\sigma r l_t^b)^2}{er_t^b \cdot (er_t^b - 1)} \right]. \quad (96)$$

A partir das definições dos parâmetros dos resíduos (93)-(96), percebe-se que todos os termos são indiretamente relacionados à $\delta r x_t^b$. Como o grau de liberdade $\delta r x_t^b$ depende de p valores de afluição anteriores a t , $y p_{t-p}^b$, constata-se que os resíduos do modelo possuem dependência temporal direta com $t-p$. Esse comportamento é o responsável pela denominação do modelo como PAR Lognormal a Três Parâmetros com Resíduos Dependentes.

Embora a designação da dependência temporal ao modelo PAR possa produzir resultados satisfatórios quanto à previsão e simulação de afluições, essa característica pode não ser compatível com a modelagem do planejamento de médio prazo. Na Seção 3.1.4 são discutidos alguns aspectos quanto à utilização da versão com Resíduos Dependentes no modelo multiestágio estocástico de médio prazo.

2.2.3. O Modelo Independente (IND) Lognormal

No modelo Independente Lognormal, ou como denominado nesse trabalho IND Lognormal, um valor de afluência yp_t^b calculado não possui dependência temporal direta dos valores anteriores ao estágio t (FINARDI; DECKER; MATOS, 2013). Esse modelo se baseia no preponderante comportamento Lognormal mensal que eventualmente seja observado na distribuição de probabilidade dos registros históricos das afluências.

Assim, dado o comportamento Lognormal de yp_t^b , uma componente xp_t^b , de distribuição Normal, pode ser calculada a partir das afluências observadas em $t \in \mathcal{T}$ conforme (66). A partir dos valores observados de xp_t^b , a média μxp_t^b e o desvio padrão σxp_t^b da amostra associada à estação de $fe(t)$ podem ser obtidos. Assim, para que seja possível gerar realizações distribuídas normalmente com média igual à μxp_t^b e desvio padrão igual à σxp_t^b , o processo aleatório de xp_t^b deve ser definido como:

$$xp_t^b = rb_t^b \cdot \sigma xp_t^b + \mu xp_t^b, \quad t \in \mathcal{T}_+. \quad (97)$$

Ao se substituir (97) em (66) e utilizar as propriedades da função exponencial, o cálculo do valor de afluência pode ser definido em termos da realização do ruído branco $rb_{t,r}^b$ como:

$$yp_t^b = EN \left(rb_t^b \cdot \sigma xp_t^b + \mu xp_t^b \right), \quad t \in \mathcal{T}_+. \quad (98)$$

Dessa maneira, o modelo IND Lognormal é definido para a geração de afluências mensais com distribuição Lognormal. Observando o modelo PAR definido na Seção 2.2.1, percebe-se que ao se atribuir valores nulos para os coeficientes $fn_{t,p}^b$ nas equações (61), (64) e (58) se obtêm:

$$xp_t^b = rp_t^b, \quad (99)$$

$$rp_{t,r}^b = \mu xp_t^b + \sigma xp_t^b \cdot rn_{t,r}^b, \quad (100)$$

$$\left(\sigma rn_t^b \right)^2 = 1. \quad (101)$$

Segundo (101), $rn_t^b = rb_t^b$. Logo, substituindo (100) em (99) e aplicando a transformação inversa via EN , a afluência yp_t^b também é

obtida como (98). Logo, pode-se concluir que o modelo IND Lognormal pode ser interpretado como um caso particular do modelo PAR, em que não há dependência temporal direta entre os valores de afluência.

Ademais, na Seção 3.1.3 é discutida a forma de inclusão do modelo IND Lognormal no modelo de planejamento de médio prazo.

2.2.4. O Modelo IND Lognormal a Três Parâmetros

Utilizando da mesma estratégia da Seção 2.2.2, em que a assimetria estimada de uma amostra é incluída no modelo de distribuição Lognormal, também se pode definir um modelo de geração de afluências independentes. Neste trabalho esse modelo é denominado de IND Lognormal a Três Parâmetros.

Nesse caso, yp_t^b pode ser definida como:

$$yp_t^b = EN \left(rb_t^b \cdot \sigma xp_t^b + \mu xp_t^b \right) + \delta xp_t^b. \quad (102)$$

A partir do mesmo raciocínio utilizado nas definições de (75)-(84) e com os valores estimados de assimetria γyp_t^b , média μyp_t^b e desvio padrão σyp_t^b dos valores históricos observados das afluências, os parâmetros do modelo podem ser definidos como:

$$ex_t^b = \left[\left(1 + \frac{(\gamma yp_t^b)^2}{2} \right) + \left((\gamma yp_t^b)^2 + \frac{(\gamma yp_t^b)^4}{4} \right)^{1/2} \right]^{1/3} + \left[\left(1 + \frac{(\gamma yp_t^b)^2}{2} \right) - \left((\gamma yp_t^b)^2 + \frac{(\gamma yp_t^b)^4}{4} \right)^{1/2} \right]^{1/3} - 1, \quad (103)$$

$$\sigma xp_t^b = \sqrt{LN(ex_t^b)}, \quad (104)$$

$$\mu xp_t^b = \frac{1}{2} \cdot LN \left[\frac{(\sigma yp_t^b)^2}{ex_t^b \cdot (ex_t^b - 1)} \right], \quad (105)$$

$$\delta xp_t^b = \mu yp_t^b - \left[\frac{(\sigma yp_t^b)^2}{(ex_t^b - 1)} \right]^{1/2}. \quad (106)$$

Para um valor de $ex_t^b \leq 1$, o modelo a Três Parâmetros se torna indefinido. Nesse caso, o modelo IND Lognormal (98) é utilizado. Ainda, para valores de $(1 - ex_t^b)$ inferiores à $(\sigma y_t^b / \mu y_t^b)$, o valor de saída do modelo pode ser negativo.

2.2.5. A Correlação Espacial Hidrográfica

Os modelos de previsão PAR apresentados nas seções anteriores lidam com a dependência temporal característica de vazões afluentes observadas em sistemas hidráulicos. Contudo, um aspecto muito importante da representação de múltiplas afluências de um sistema hidrotérmico consiste na consideração da correlação espacial entre os rios, cascatas ou bacias hidrográficas (PEREIRA et al., 1984). Nesse caso, a correlação espacial hidrográfica pode existir, uma vez que o comportamento climático entre regiões interaja nas condições de chuvas das mesmas.

Uma estratégia amplamente utilizada na representação da correlação espacial em modelos de afluências consiste na ponderação dos ruídos brancos do modelo de cada afluência pelas correlações estimadas (MACEIRA; DAMAZIO, 2004; DE MATOS, 2012). Assim, definindo:

$$\mathbf{rb}_t = [rb_t^1 \quad rb_t^2 \quad \cdots \quad rb_t^{nb}], \quad (107)$$

$$\mathbf{rc}_t = [rc_t^1 \quad rc_t^2 \quad \cdots \quad rc_t^{nb}], \quad (108)$$

$$\mathbf{rc}_t = \mathbf{RC}_t \cdot \mathbf{rb}_t, \quad (109)$$

em que:

\mathbf{rb}_t : vetor de ruídos brancos $rb_t^b : b \in \mathcal{B}_t$, de dimensão $(nb, 1)$,

\mathbf{rc}_t : vetor de ruídos correlacionados $rc_t^b : b \in \mathcal{B}_t$, de dimensão $(nb, 1)$,

\mathbf{RC}_t : matriz de carga triangular inferior, de dimensão (nb, nb) .

Ao se multiplicar (109) pelo transposto do vetor de ruídos correlacionados, \mathbf{rc}_t^\top , e calcular o Valor Esperado:

$$E[\mathbf{rc}_t \cdot \mathbf{rc}_t^\top] = E[\mathbf{RC}_t \cdot \mathbf{rb}_t \cdot \mathbf{rc}_t^\top], \quad (110)$$

Substituindo o transposto de (109) em (110):

$$E[\mathbf{rc}_t \cdot \mathbf{rc}_t^\top] = E[\mathbf{RC}_t \cdot \mathbf{rb}_t \cdot \mathbf{rb}_t^\top \cdot \mathbf{RC}_t^\top], \quad (111)$$

Segundo a definição, \mathbf{rb}_t^b é obtido com média zero, desvio padrão unitário e independente dos demais valores de $b \in \mathcal{B}_t$. Portanto, $E[\mathbf{rb}_t \times \mathbf{rb}_t^\top]$ corresponde a uma matriz identidade de dimensão (nb, nb) . Assim:

$$E[\mathbf{rc}_t \cdot \mathbf{rc}_t^\top] = \mathbf{RC}_t \cdot \mathbf{RC}_t^\top, \quad (112)$$

Dado \mathbf{rc}_t como o vetor dos ruídos já correlacionados, ao se fazer $E[\mathbf{rc}_t \times \mathbf{rc}_t^\top]$ obtém-se a própria correlação entre os $\mathbf{rc}_t^b : b \in \mathcal{B}_t$. Logo:

$$E[\mathbf{rc}_t \cdot \mathbf{rc}_t^\top] = \boldsymbol{\rho} \mathbf{RC}_t, \quad (113)$$

em que:

$\boldsymbol{\rho} \mathbf{RC}_t$: matriz de correlação, estimada a partir dos resíduos observados para todo $b \in \mathcal{B}_t$ da estação $fe(t) : t \in \mathcal{T}$, de dimensão (nb, nb) .

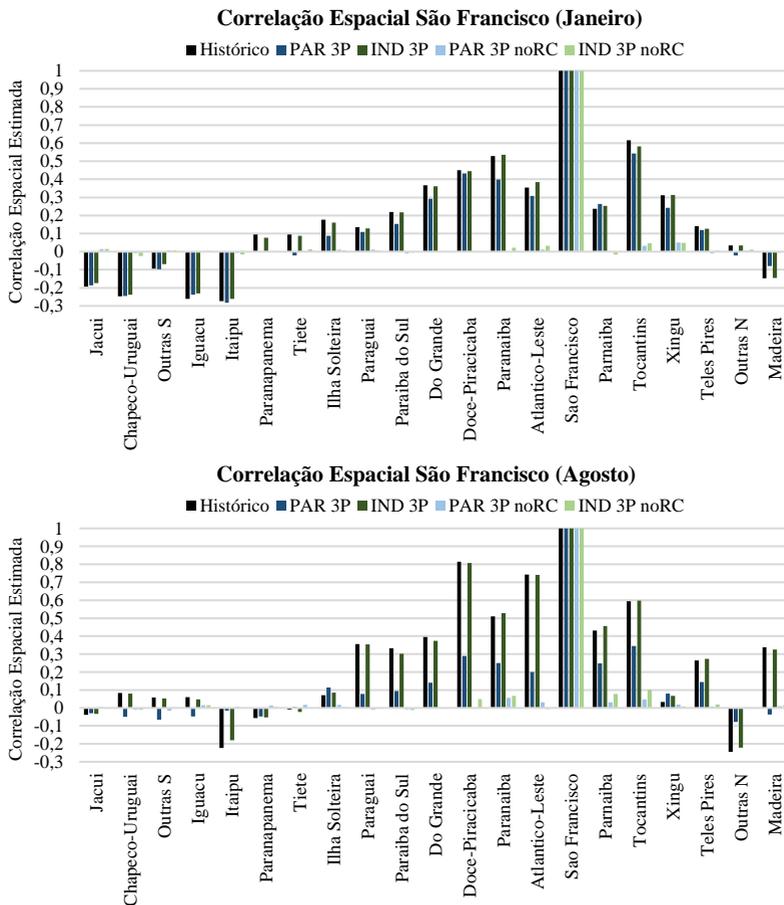
Finalmente, tem-se que:

$$\mathbf{RC}_t \cdot \mathbf{RC}_t^\top = \boldsymbol{\rho} \mathbf{RC}_t. \quad (114)$$

Uma vez que \mathbf{RC}_t é definida como triangular inferior, observando-se (114), percebe-se que os elementos da matriz de carga podem ser obtidos a partir da inspeção dos elementos da matriz de correlação estimada. Percebe-se em (109) que \mathbf{RC}_t parametriza os ruídos brancos obtidos aleatoriamente de acordo com a correlação dos resíduos observados.

Para exemplificar o efeito da matriz de carga no processo de geração sintética de aflúncias, na Figura 13 são exibidos valores de correlação espacial estimados na série de aflúncias histórica da bacia do São Francisco e em séries sintéticas de aflúncias gerada para a mesma bacia com os modelos PAR Lognormal a 3 Parâmetros (PAR 3P), PAR 3P sem matriz de carga (PAR 3P noRC), Independente a 3 Parâmetros (IND 3P) e IND 3P no RC. As séries sintéticas foram calculada com o mesmo conjunto de 10.000 realizações do ruído branco, correlacionadas conforme (109) quando se considerou \mathbf{RC}_t .

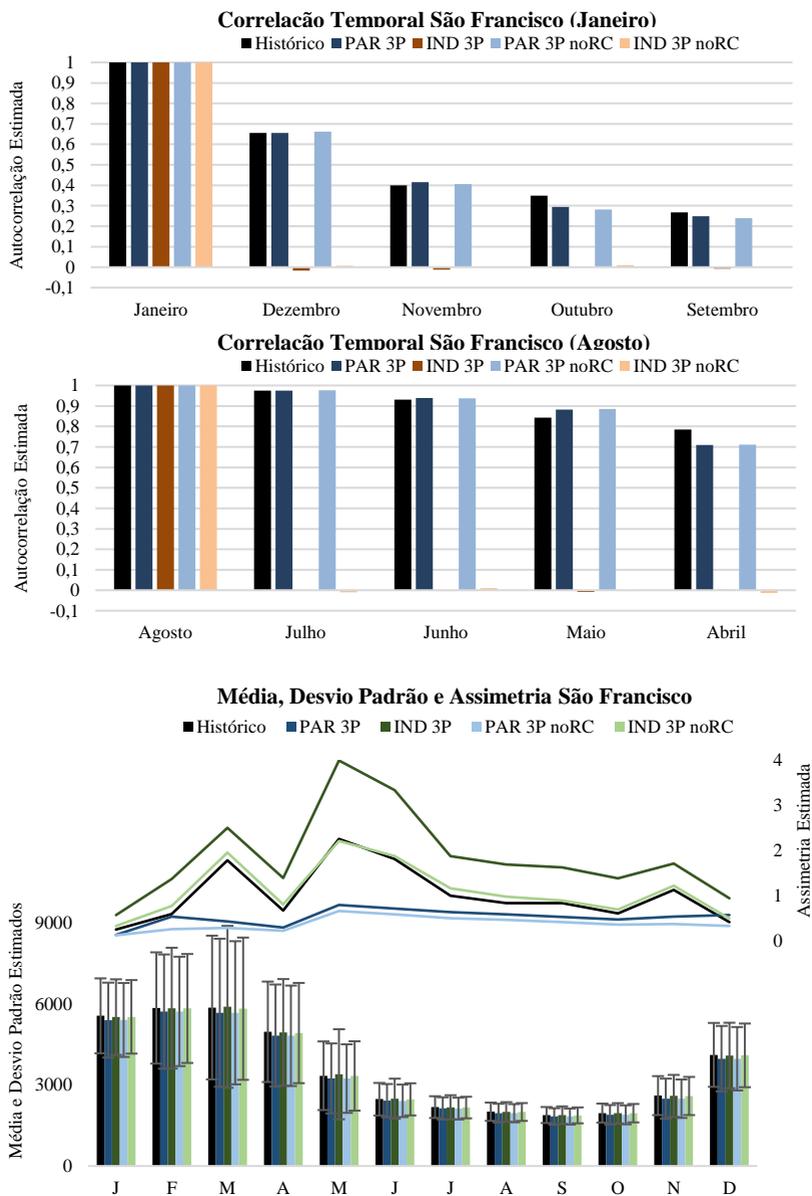
Figura 13 – Correlação Espacial da Bacia do São Francisco.



Fonte: do Autor.

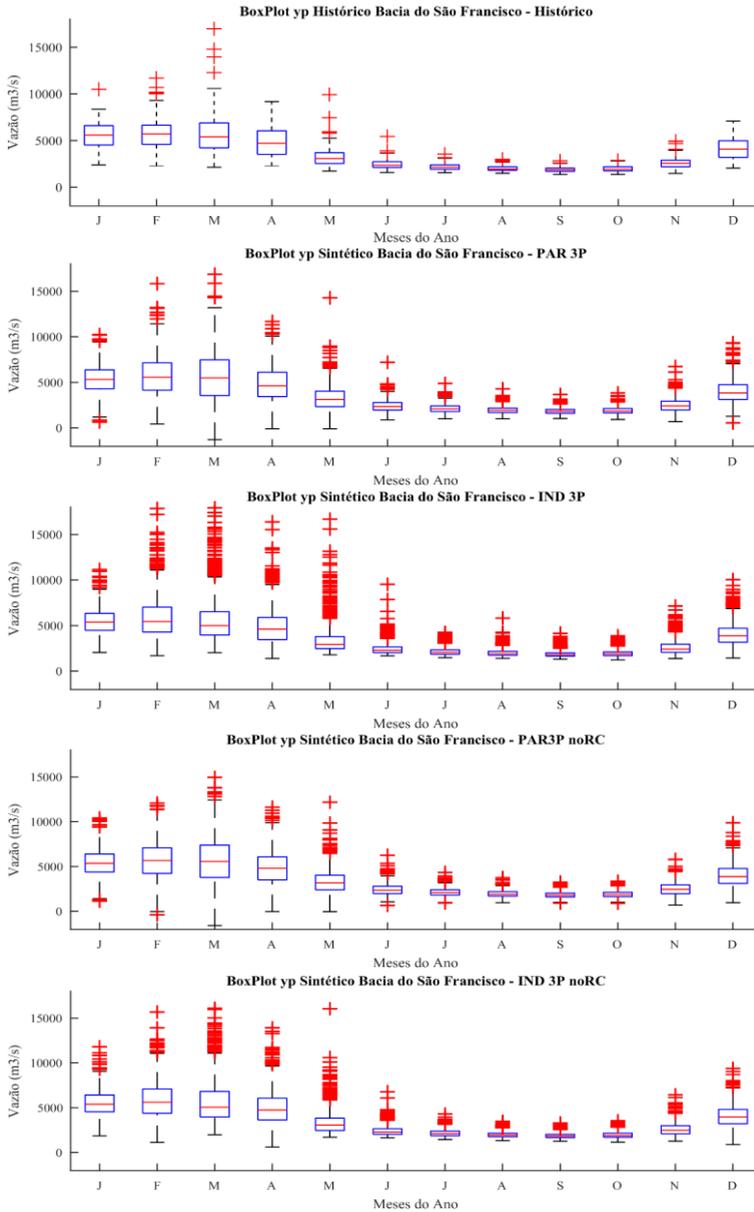
Em janeiro a correlação espacial da bacia do São Francisco com as demais bacias, estimada de ambos PAR 3P e IND 3P, foi equiparável à correlação estimada no histórico de afluições. Já em agosto se observa que a correlação estimada de PAR 3P ficou aquém do histórico e de IND 3P. Embora o modelo IND 3P provenha melhor correlação espacial que o PAR 3P, é importante observar que ao considera-lo a correlação temporal das afluições observada no histórico não é reproduzida na série sintética, conforme exibido na Figura 14.

Figura 14 – Estatística Básica da Bacia do São Francisco.



Fonte: do Autor.

Figura 15 – Box-Plots da Bacia do São Francisco.



Fonte: do Autor.

3. ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

No capítulo anterior se discutiu acerca da representação dos principais componentes do sistema hidrotérmico e dos modelos de geração de aflúências relevantes à representação multiestágio estocástica do PMPO. Com isso, nas próximas seções, a representação multiestágio estocástica do PMPO em termos da otimização da operação hidrotérmica do SIN é definida. Em seguida a DB e a formulação do PMPO em termos da DB são apresentadas. Por fim, são apresentados os métodos de solução da PDD e PDDE.

Vale ressaltar que as características predominantes do sistema hidrotérmico brasileiro condicionam, em muitos casos, a determinadas aproximações no modelo de médio prazo a ser tratado neste trabalho. Isso ocorre para que um comportamento mais relevante à operação do SIN seja evidenciado no modelo e que o problema possa ser resolvido em um tempo razoável.

3.1. REPRESENTAÇÃO MULTIESTÁGIO ESTOCÁSTICA

Na etapa do PMPO quanto mais distante no tempo é a representação dos componentes do sistema hidrotérmico, mais incertezas incorrem em sua modelagem. Desse modo, percebe-se que a natureza do planejamento de médio prazo está diretamente relacionada com as incertezas associadas aos componentes do sistema. Contudo, uma modelagem fidedigna que incorpore todas as incertezas incorridas ao longo do horizonte de planejamento nem sempre é trivial ou factível.

Conforme argumentado no capítulo anterior, muitas aproximações são realizadas para a concepção do modelo de médio prazo. Essas aproximações são realizadas tanto na quantidade de elementos a serem considerados, quanto na qualidade da representação matemática dos componentes e comportamentos do sistema hidrotérmico.

Inicialmente é importante destacar a representação das incertezas associadas às aflúências no modelo. De acordo com o discutido na Seção 2.2, no médio prazo há grande atenção quanto ao comportamento das vazões afluentes nos rios, uma vez que estas estão diretamente associadas com a produção hidrelétrica de energia. Ressalva-se que o comportamento hídrico é de interesse amplo à sociedade, uma vez que os recursos são utilizados também para o abastecimento de cidades, irrigação e navegação. Logo, as vazões dos rios e bacias hidrográficas são constantemente monitorados e registrados pelos órgãos responsáveis.

Estatisticamente, ao se observar os registros históricos de vazões afluentes nos rios, percebe-se que muita informação relevante ao comportamento sazonal das bacias hidrográficas pode ser obtida. Assim, processos estocásticos associados aos comportamentos das vazões afluentes das bacias podem ser representados por variáveis aleatórias que incorporam a estatística observada no histórico de vazões dos rios.

Uma vez que as incertezas das vazões afluentes sejam incorporadas por variáveis aleatórias, de distribuição de probabilidade conhecidas, o subproblema do PMPO pode ser concebido em termos da otimização estocástica (PEREIRA; PINTO, 1985; SHAPIRO, 2011; FINARDI; DECKER; MATOS, 2013). Nesse tipo de problema, decisões ótimas acerca da operação hidrotérmica são tomadas no presente visando a expectativa dos custos incorridos em todas as possíveis condições operativas previstas no futuro, definidas em termos das variáveis aleatórias das afluições.

Uma representação contínua da variável aleatória pode ser concebida para poucos problemas de otimização estocástica, de características peculiares (SHAPIRO; PHILPOTT, 2007). Dadas a dimensão e complexidade do planejamento de médio prazo, a representação da variável aleatória é feita de maneira discreta. Dessa forma, um conjunto de realizações da variável aleatória pode ser gerado a partir de algum mecanismo de amostragem que se baseia na distribuição de probabilidade associada. Logo, ao se obter aleatoriamente um número suficiente de realizações da variável aleatória, as propriedades estatísticas da amostra gerada devem representar satisfatoriamente o processo estocástico original.

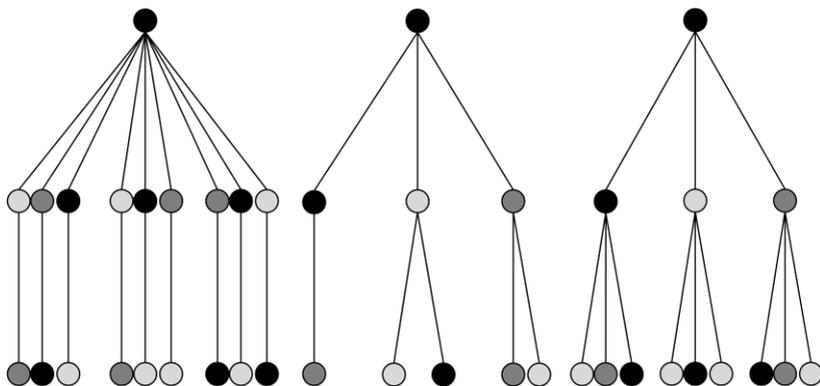
Em decorrência do acoplamento temporal entre as decisões operativas, que são tomadas mensalmente de acordo com incertezas do problema, o modelo de médio prazo é denominado de multiestágio. Todavia, como as decisões operativas estão diretamente associadas às condições provenientes das realizações das variáveis aleatórias, a concepção da modelagem multiestágio estocástica do PMPO está intimamente ligada à representação do processo estocástico das afluições. Uma das maneiras mais usuais de se formular um modelo do gênero consiste em se representar a árvore de cenários associada ao processo estocástico do problema (HEITSCH; RÖMISCH, 2009).

Uma árvore de cenários do processo estocástico ser definida como uma disposição por grafos da variável aleatória, em que os nós representam as realizações amostradas em um estágio $t \in \mathcal{T}_+$ e os traços indicam as conexões temporais possíveis entre as realizações. Destaca-se

também que probabilidades são intrinsecamente associadas às realizações. Ou seja, as condições operativas provenientes das realizações em um determinado estágio podem possuir diferentes probabilidades de acontecerem. Ainda, conforme é discutido adiante, o nó do primeiro estágio corresponde um valor observado ou conhecido da variável aleatória. Esse nó é denominado de nó determinístico. Com o objetivo de se ilustrar alguns exemplos de árvores de cenários, na Figura 16 são apresentadas três configurações de árvores em arranjo multiestágio.

Na primeira configuração a incerteza da variável aleatória é representada somente no segundo estágio, uma vez que as realizações desse estágio em diante são conectadas, sem exceção, a uma única realização futura. Nesse caso, um modelo de otimização estocástica de dois estágios pode ser definido para o problema associado.

Figura 16 – Diferentes Configurações de Árvores de Cenário.



Fonte: do Autor.

Já na segunda configuração, percebe-se um arranjo assimétrico da árvore de cenários. Esse tipo de arranjo pode ser decorrente de quando o processo estocástico é bem mapeado, por exemplo, a partir de informações especializadas, ou de quando são efetuadas aproximações por eliminação ou agregação das realizações da variável aleatória. Percebe-se que nessa configuração a incerteza da variável aleatória é representada em todos os estágios.

Na terceira configuração, de maneira semelhante à anterior, um modelo multiestágio estocástico pode ser definido para o problema

associado. Nesse caso em particular, pode-se perceber uma simetria em relação ao eixo vertical central da árvore de cenários. Ou seja, todas as realizações de um estágio são conectadas ao mesmo número de realizações futuras. Nesse trabalho, essa configuração é denominada como arranjo aninhado.

A disposição simétrica do arranjo aninhado geralmente é obtida a partir de processos automáticos de geração de realizações. Dessa maneira, percebe-se que a representação da árvore de cenários pode contribuir na caracterização tanto do processo estocástico quanto dos mecanismos utilizados para a obtenção das realizações da variável aleatória associada.

Ainda observando a Figura 16, é importante notar que, para efeito de visualização, o preenchimento de um determinado nó caracteriza o valor da realização associada. Desse modo, ao se observar as conexões futuras das realizações do segundo estágio no arranjo aninhado, percebe-se a diferença entre os conjuntos de realizações do terceiro estágio conectados a cada nó do segundo. Do ponto de vista do processo estocástico isso implica que a representação futura da variável aleatória é diferente a partir de cada realização do segundo estágio.

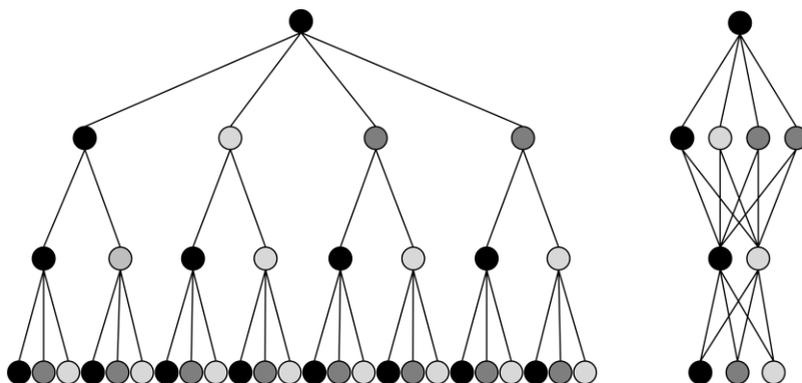
Um exemplo de processo estocástico com esse tipo de comportamento é a representação de afluições com dependência temporal. Nesse caso, os valores das realizações passadas condicionam os valores dos conjuntos de realizações futuras de afluição e, por esse motivo, esses conjuntos tendem a ser diferentes uns dos outros. Outro exemplo pode ser dado a partir de uma representação de afluições agora com independência temporal. Porém, nesse caso, assume-se que o processo de geração de realizações fornece aleatoriamente todas as realizações a serem consideradas no estágio. De maneira geral, quando a representação futura da variável aleatória é diferente para cada realização do mesmo estágio, denomina-se neste trabalho que a árvore possui arranjo com amostras dessemelhantes.

Observando atentamente a árvore de arranjo aninhado de amostras dessemelhantes, percebe-se que para um número considerado pequeno de estágios no médio prazo, por exemplo $nt \leq 12$, muitas realizações precisam ser fornecidas pelo processo de geração de afluições para formar a árvore. No caso de horizontes de planejamento de 60, 120 estágios, a própria dimensão da árvore de cenários é numericamente proibitiva. Por consequência, torna-se inviável uma representação adequada de qualquer processo estocástico desse porte via amostras dessemelhantes.

No sentido de viabilizar a representação multiestágio de médio e longo prazo, outras formas de representação da variável aleatória devem ser avaliadas. Uma estratégia amplamente utilizada em processos estocásticos com muitos estágios consiste na representação da variável aleatória por amostras comuns, conforme o assumido em PEREIRA e PINTO (PEREIRA; PINTO, 1991). Dessa maneira, apenas um conjunto de realizações de dimensão viável é gerado aleatoriamente e disposto como a representação futura da variável aleatória para cada realização de um estágio. Neste trabalho a estratégia em questão é representada por uma árvore denominada de arranjo aninhado com amostras comuns e é ilustrada pela Figura 17.

Embora o arranjo com amostras comuns viabilize a representação multiestágio da variável aleatória, é relevante observar que essa estratégia pode corresponder a uma aproximação ou um caso particular do arranjo por amostras dessemelhantes. Contudo, no modelo do planejamento de médio prazo assim como em outros modelos multiestágio estocásticos, a melhor maneira de representar adequadamente a variável aleatória no processo estocástico das afluências é com amostras comuns.

Figura 17 – Árvore de Cenários Aninhada com Amostra Comum.



Fonte: do Autor.

Vale-se destacar que na Figura 17 são ilustradas duas formas de representação da árvore de cenários de arranjo aninhado com amostras comuns. Quando observada a disposição da esquerda, denominada representação completa, a dimensão total do modelo multiestágio

estocástico associado pode ser facilmente assimilada. Contudo, ao se observar a disposição da direita, representação compacta, a decomposição por estágios do modelo pode se tornar mais intuitiva, conforme discutido na Seção 3.1.1.

Com o objetivo de incorporar a representação do processo estocástico das afluições por árvore de cenários no modelo de médio prazo é importante que algumas caracterizações sejam definidas como:

$$\mathcal{R}_t = \{r : r \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq r \leq nr_t, t \in \mathcal{T}_+\}, \quad (115)$$

$$\mathcal{C} = \{c : c \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq c \leq nc\}, \quad (116)$$

$$fr(c, t) : \mathcal{C} \times \mathcal{T}_+ \rightarrow \mathcal{R}_t, \quad (117)$$

em que:

\mathcal{R}_t : conjunto de índices r das realizações no estágio t ,

\mathcal{C} : conjunto de índices c dos cenários da árvore de cenários.

Cada c representa um único caminho de conexões temporais entre as realizações de $t = 1, \dots, nt$,

$fr(c, t)$: função que retorna o índice r da realização no estágio t , associada ao cenário c .

Com a definição da representação multiestágio estocástica das afluições o modelo para o planejamento da operação hidrotérmica de médio prazo pode ser formulado. Atentando-se à representação dos principais componentes do sistema descritos na Seção 2.1, uma função composta do custo de operação hidrotérmica incorrida pelas realizações de índice $r \in \mathcal{R}_{t=nt}$ do último estágio pode ser definida em termos do volume inicial das hidrelétricas e das afluições passadas do processo estocástico das bacias como:

$t = nt :$

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} ph_t^{1:nh_t,1}, \dots, ph_t^{1:nh_t,nl_t} & pf_t^{1:nf_t,1}, \dots, pf_t^{1:nf_t,nl_t} & pd_t^{1:nd_t,1}, \dots, pd_t^{1:nd_t,nl_t} & \dots \\ pi_t^{1:ni_t,1}, \dots, pi_t^{1:ni_t,nl_t} & qh_t^{1:nh_t,1}, \dots, qh_t^{1:nh_t,nl_t} & sh_t^{1:nh_t,1}, \dots, sh_t^{1:nh_t,nl_t} & \dots \\ vh_t^{1:nh} & vh_{t+1}^{1:nh} & yh_t^{1:nh_t} & yp_t^{1:nb} \end{bmatrix}, \quad (118)$$

$$ZT_{t,r} \left(v h_t^{l:nh}, y p_{t-1}^{l:nb}, \dots, y p_{t-np}^{l:nb} \right) \triangleq$$

$$\text{minimizar}_{x_t} \sum_{l \in \mathcal{L}_t} t l_t^l \cdot \left(\sum_{f \in \mathcal{F}_t} c f^f \cdot p f_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t} c d^d \cdot p d_t^{d,l} \right), \quad (119)$$

sujeito a:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_t^s} p h_t^{h,l} + \sum_{f \in \mathcal{F}_t^s} p f_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t^s} p d_t^{d,l} + \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} p i_t^{i,l} - \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} p i_t^{i,l} = p t_t^{s,l} \cdot t l_t^l, \quad (120)$$

$$\forall l \in \mathcal{L}_t, \forall s \in \mathcal{S},$$

$$v h_{t+1}^h + v z_t \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}_t} t l_t^l \cdot \left[q h_t^{h,l} + s h_t^{h,l} - \sum_{m \in \mathcal{N}_t^h} (q h_t^{m,l} + s h_t^{m,l}) \right] - v z_t \cdot y h_t^h = v h_t^h, \quad (121)$$

$$\forall h \in \mathcal{V},$$

$$y h_t^h - q h_t^{h,l} - s h_t^{h,l} + \sum_{m \in \mathcal{N}_t^h} (q h_t^{m,l} + s h_t^{m,l}) = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{Q}_t, \quad (122)$$

$$y h_t^h - y p_t^b \cdot \mu r h_t^h = -\delta y h_t^h, \quad h \in \mathcal{H}^b, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (123)$$

$$y p_t^b = r p_{t,r}^b + \sum_{p=1}^{np} f p_{t,p}^b \cdot y p_{t-p}^b, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (124)$$

$$p h_t^{h,l} - q h_t^{h,l} \cdot p r_t^h = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t, \quad (125)$$

$$\underline{v h}_t^h \leq v h_{t+1}^h \leq \overline{v h}_t^h, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad (126)$$

$$\underline{p f}_t^f \leq p f_t^{f,l} \leq \overline{p f}_t^f, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall f \in \mathcal{F}_t, \quad (127)$$

$$\underline{p d}_t^d \leq p d_t^{d,l} \leq \overline{p d}_t^d, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall d \in \mathcal{D}_t, \quad (128)$$

$$\underline{p i}_t^i \leq p i_t^{i,l} \leq \overline{p i}_t^i, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall i \in \mathcal{I}, \quad (129)$$

$$0 \leq q h_t^{h,l} \leq \overline{q h}_t^h, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t, \quad (130)$$

$$s h_t^{h,l} \geq 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t, \quad (131)$$

em que:

$ZT_{t,r}$: função de custo de operação hidrotérmica associada à realização r no estágio t em R\$/h.

Em (119) se percebe que o custo de operação em $t=nt$ é definido como a minimização do custo total de produção das unidades

termelétricas somado aos custos ocasionados por déficits, ambos ponderados pelas parcelas de tempo dos patamares. Além disso, restrições operativas são adicionadas ao problema de otimização conforme discutido na Seção 2.1. Dentre as principais restrições, vale destacar (120) que corresponde ao atendimento à demanda de cada subsistema em cada patamar, as restrições (121) e (122) que são os balanços hídricos das hidrelétricas de regularização e fio d'água respectivamente, (123) que corresponde à caracterização da afluência incremental de cada hidrelétrica, (124) que incorpora o modelo PAR 3P à função de custo de operação e (125) que define a produção hidrelétrica. As demais restrições (126)-(131) representam os limites físicos atribuídos as variáveis do problema como, por exemplo, os limites mínimo e máximo de potência termelétrica (127) e os limites mínimo e máximo de volume útil nos reservatórios (126).

A função $ZT_{t,r}$ é definida a partir dos valores conhecidos das realizações de índice r no RHS da restrição do modelo PAR (124), o que implica que o conjunto $\mathcal{R}_{t=nt}$ da árvore de cenários de arranjo aninhado e amostras comuns foi previamente determinado. Além disso é importante notar que as variáveis da função $ZT_{t,r}$ são incorporadas ao problema de otimização pelo RHS de (121) com vh_t^h e pelo RHS de (124) com $yp_{t-1}^b, \dots, yp_{t-np}^b$.

Assumindo-se que as realizações da variável aleatória $r \in \mathcal{R}_{t=nt}$ possuem uma probabilidade intrínseca de ocorrência em $t=nt$, denominada $\varphi z_{t,r}$, uma função denominada de Função de Custo Futuro (FCF) pode ser definida para o estágio $t=nt-1$ em termos da expectância de $ZT_{t,r}$ para todo $r \in \mathcal{R}_{t=nt}$ como:

$$ZF_t(vh_{t+1}^{l:nh}, yp_t^{l:nb}, \dots, yp_{t-np+1}^{l:nb}) \triangleq E[ZT_{t+1,r}(vh_{t+1}^{l:nh}, yp_t^{l:nb}, \dots, yp_{t-np+1}^{l:nb})], \quad (132)$$

$$ZF_t(vh_{t+1}^{l:nh}, yp_t^{l:nb}, \dots, yp_{t-np+1}^{l:nb}) \triangleq \sum_{r \in \mathcal{R}_{t+1}} \varphi z_{t+1,r} \cdot ZT_{t+1,r}(vh_{t+1}^{l:nh}, yp_t^{l:nb}, \dots, yp_{t-np+1}^{l:nb}), \quad (133)$$

em que:

ZF_t : função do custo futuro de operação no estágio t .

Com isso, a função composta do custo de operação hidrotérmica em $t=nt-1$ possui duas componentes principais de custo: uma em termos da operação presente no estágio $t=nt-1$ e outra em termos da operação futura em $t=nt$. Logo, os volumes finais das hidrelétricas e as afluências

dos processos estocásticos das bacias são as variáveis que acoplam ambas as componentes no modelo.

Com o mesmo raciocínio de (118)-(131) e as considerações acerca da definição da FCF, uma função composta do custo total de operação hidrotérmica pode ser definida em $t = nt-1$ para cada realização $r \in \mathcal{R}_{t=nt-1}$ como:

$$t = nt - 1, \dots, 2:$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} ph_t^{1:nh_t,1}, \dots, ph_t^{1:nh_t,nh_t} & pf_t^{1:nf_t,1}, \dots, pf_t^{1:nf_t,nh_t} & pd_t^{1:nd_t,1}, \dots, pd_t^{1:nd_t,nh_t} & \dots \\ pl_t^{1:ni_t,1}, \dots, pl_t^{1:ni_t,nh_t} & qh_t^{1:nh_t,1}, \dots, qh_t^{1:nh_t,nh_t} & sh_t^{1:nh_t,1}, \dots, sh_t^{1:nh_t,nh_t} & \dots \\ vh_t^{1:nh} & vh_{t+1}^{1:nh} & yh_t^{1:nh} & yp_t^{1:nh} \end{bmatrix}, \quad (134)$$

$$ZT_{t,r}(\mathbf{v}h_t^{1:nh}, yp_{t-1}^{1:nh}, \dots, yp_{t-np}^{1:nh}) \triangleq$$

$$\underset{\mathbf{x}_t}{\text{minimizar}} \sum_{l \in \mathcal{L}_t} tl^l \cdot \left(\sum_{f \in \mathcal{F}_t} cf^f \cdot pf_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t} cd^d \cdot pd_t^{d,l} \right) + ZF_t(\mathbf{v}h_{t+1}^{1:nh}, \dots), \quad (135)$$

sujeito a:

(120)-(131).

Análoga à definição em $t = nt-1$, nos estágios $t = nt-2, \dots, 2$ a função objetivo do custo total de operação hidrotérmica também é definida por (135). No caso de $t=1$, ambos os valores de volumes iniciais e de afluições das hidrelétricas são conhecidos. Dessa maneira, o custo total de operação no primeiro estágio, que é considerado determinístico, representa o custo total de operação de todo o horizonte de estudo e pode ser definido por um problema de otimização conforme:

$$\mathbf{x}_1 \triangleq \begin{bmatrix} ph_1^{1:nh_1,1}, \dots, ph_1^{1:nh_1,nh_1} & pf_1^{1:nf_1,1}, \dots, pf_1^{1:nf_1,nh_1} & pd_1^{1:nd_1,1}, \dots, pd_1^{1:nd_1,nh_1} & \dots \\ pl_1^{1:ni_1,1}, \dots, pl_1^{1:ni_1,nh_1} & qh_1^{1:nh_1,1}, \dots, qh_1^{1:nh_1,nh_1} & sh_1^{1:nh_1,1}, \dots, sh_1^{1:nh_1,nh_1} & \dots \\ vh_1^{1:nh} & vh_2^{1:nh} & & \end{bmatrix}, \quad (136)$$

$$zt \triangleq$$

$$\underset{\mathbf{x}_1}{\text{minimizar}} \sum_{l \in \mathcal{L}_1} tl^l \cdot \left(\sum_{f \in \mathcal{F}_1} cf^f \cdot pf_1^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_1} cd^d \cdot pd_1^{d,l} \right) + ZF_1(\mathbf{v}h_2^{1:nh}, \dots), \quad (137)$$

sujeito a:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_1^s} p h_1^{h,l} + \sum_{f \in \mathcal{F}_1^s} p f_1^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_1^s} p d_1^{d,l} + \sum_{i \in \mathcal{I}_1^s} p i_1^{i,l} - \sum_{i \in \mathcal{I}_1^s} p i_1^{i,l} = p l_1^{s,l} \cdot t l_1^l, \quad (138)$$

$$\forall l \in \mathcal{L}_1, \forall s \in \mathcal{S},$$

$$v h_2^h + v z_1 \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}_1} t l_1^l \cdot \left[q h_1^{h,l} + s h_1^{h,l} - \sum_{m \in \mathcal{M}_1^h} (q h_1^{m,l} + s h_1^{m,l}) \right] = v h_1^h + v z_1 \cdot y h_1^h, \quad (139)$$

$$\forall h \in \mathcal{Y}_1,$$

$$q h_1^{h,l} + s h_1^{h,l} - \sum_{m \in \mathcal{M}_1^h} (q h_1^{m,l} + s h_1^{m,l}) = y h_1^h, \quad \forall l \in \mathcal{L}_1, \forall h \in \mathcal{Q}_1, \quad (140)$$

(125)-(131).

em que:

$z t$: custo total de operação do modelo do PMPO em R\$/h.

Segundo Birge e Louveaux (2011), um modelo de otimização estocástica escrito na forma de (125)-(131) e (136)-(140) é denominado como um equivalente determinístico do problema estocástico original. Isso porque, particularmente nesse caso, as decisões do primeiro estágio são tomadas deterministicamente, uma vez que os valores de $y h_1^h$ e a função $Z F_1$ são conhecidos.

Definindo a FCF do primeiro ao penúltimo estágio conforme observado em (133), percebe-se que o modelo equivalente determinístico do PMPO implica em um encadeamento arborescente das componentes dos custos presentes para as realizações $r \in \mathcal{R}_{t=2, \dots, m}$. Esse encadeamento segue as conexões do arranjo aninhado da árvore de cenários, conforme a representação completa exibida na Figura 17. Logo, o modelo resultante corresponderia a um problema de otimização único, cujo o número de decisões operacionais a serem tomadas dependeria de uma relação exponencial do número de realizações por estágio com o número de estágios do horizonte.

Na prática, a representação das variáveis e restrições do problema de otimização único é inviabilizada pelo número de realizações e estágios do PMPO. Por exemplo, para um horizonte de 60 meses com um número constante de realizações igual a 10, a árvore de cenários possui nada menos que $1,11 \times 10^{59}$ conexões temporais. Isso corresponde a um número absurdamente maior que, por exemplo, o número estimado de estrelas existentes em todo o universo observável (HOWELL, 2014).

Assim, destaca-se que na prática é impossível tratar de todas as restrições e variáveis associadas ao arranjo aninhado em um único problema de otimização, de maneira que as incertezas do processo

estocástico sejam razoavelmente representadas. Pode-se então afirmar que um modelo equivalente determinístico é viável no PMPO para poucas realizações e em horizontes menores que um ou, no máximo, dois anos.

Além disso, conforme discutido na próxima seção, o principal resultado do modelo de planejamento de médio prazo corresponde à política de operação obtida a partir da estimação das FCFs. Dessa maneira, é esperado que o modelo de médio prazo seja definido de algum modo em termos das FCFs, ou mesmo que sua solução implique em uma aproximação das FCFs.

Percebe-se então que a formulação apresentada até então não é suficiente para uma solução factível do modelo e muito menos para a estimação da FCF. Assim, com objetivo de viabilizar uma solução para o planejamento de médio prazo e, conseqüentemente, estimar a FCF, uma estratégia de decomposição do modelo por estágios é apresentada.

3.1.1. Decomposição Por Estágios

Conforme discutido anteriormente, a solução do modelo equivalente determinístico não é factível para o médio prazo, vista a complexidade da incorporação de todo o arranjo aninhado em um único problema de otimização. Conseqüentemente, estratégias de decomposição de problemas multiestágio estocásticos podem ser empregadas na definição do modelo do PMPO. Dentre as estratégias mais utilizadas se podem destacar a decomposição por estágios e a decomposição por cenários (KLEYWEGT; SHAPIRO; HOMEM-DE-MELLO, 2002; GONÇALVES; FINARDI; SILVA, 2012).

Ambas as estratégias citadas possuem uma vasta gama de aplicações e, em muitos casos, um problema multiestágio pode ser modelado tanto por estágios quanto por cenários. No caso de longos horizontes de estudo como o do médio prazo, a decomposição por estágios pode ser apontada como a estratégia predominante. De modo geral, vale-se dizer que esse tipo de abordagem é extremamente conveniente à representação e aproximação da FCF.

Todavia, um ponto extremamente vantajoso na decomposição por estágios de um problema multiestágio é o uso da Programação Dinâmica (PD) na solução do modelo. Desse modo, o problema de otimização pode ser dividido em subproblemas resolvíveis de acordo com os princípios de otimalidade de Bellman (BELLMAN, 2003).

Ao se observar a função de custo total dada por (120)-(131) e (134)-(135), percebe-se que o estágio t possui informações

acerca de $t+1$ sob forma de ZF_t . Uma vez que ZF_t seja conhecida e represente com exatidão o comportamento do custo futuro em $t+1$, no contexto da PD, ZF_t pode ser interpretada como uma função de recursão ótima ou uma política ótima. Destaca-se também que, como ZF_t depende de decisões a serem tomadas em t , logo, também no contexto da PD, as variáveis de estado do problema são definidas pelo próprio volume vh_{t+1}^h e aflúências $yp_{t,\dots}^b, yp_{t-nt+1}^b$.

A resolução do modelo do PMPO em termos da PD implica na discretização das variáveis de estado por estágio de maneira que os problemas de otimização descritos na seção anterior são resolvidos regressivamente de $t = nt, \dots, 1$, para uma certa amostra de valores de volume útil e aflúências. O grande problema dessa estratégia é a conhecida maldição da dimensionalidade, pois, para um espaço multidimensional considerável, a explosão combinatória provida pela combinação de todos os valores discretizados é tamanha que inviabiliza a resolução do problema (YAKOWITZ, 1982).

Nesse contexto, uma estratégia amplamente utilizada para a resolução desse problema consiste na utilização dos princípios da PD para o cálculo iterativo de aproximações da FCF em cada estágio. Essa estratégia é a PDD e utiliza DB para o cálculo das aproximações da FCF (PEREIRA; PINTO, 1991).

Na PDD, as variáveis de estado não são necessariamente discretizadas, sendo que, dependendo das características dos problemas de otimização, valores factíveis de volume podem ser obtidos ao se resolver os problemas de otimização progressivamente no tempo. Assim, para cada cenário, o problema de otimização do estágio $t=1$ é resolvido, inicialmente sem aproximações da FCF. Os valores vh_2^h obtidos são repassados como condições iniciais em $t=2$. Esse procedimento é realizado progressivamente para o restante dos problemas de $t=2, \dots, nt-1$, em todos os cenários, e é denominado como recursão progressiva.

Na sequência, as aproximações da FCF são calculadas regressivamente no tempo a partir da DB. Nesse caso, para cada cenário a ser regressivamente percorrido, os problemas de otimização de todas as realizações de aflúências no estágio $t = nt$ são resolvidos utilizando como condição inicial o estado obtido em $t=nt-1$ na recursão progressiva. Uma aproximação é então calculada por cenário e inserida no problema do estágio $t=nt-1$. Esse procedimento, denominado de recursão regressiva, continua sendo realizado em $t=nt-1, \dots, 2$ para todos os cenários.

Com isso, um processo iterativo da PDD pode ser definido a partir da execução de sucessivas recursões progressivas e regressivas, até que a

FCF de cada estágio seja satisfatoriamente aproximada. Assim, dada a representação final da FCF, os estados obtidos com a última recursão progressiva estão na solução ótima do modelo multiestágio estocástico.

Ao se observar o processo recursivo clássico da PDD, percebe-se que algumas condições acerca dos problemas de otimização devem ser asseguradas de modo que a solução ótima do modelo seja alcançada. Inicialmente, vale mencionar o uso dessa estratégia implica que o problema de otimização de cada realização em t deve ser viável para qualquer estado $t-1$ repassado. Ou seja, no contexto da PE multiestágio, o modelo deve ser caracterizado como de recurso relativamente completo (SHAPIRO; DENTCHEVA; RUSZCZYŃSKI, 2014).

Além disso, uma vez que um problema de otimização em termos da minimização do custo total é designado em cada realização do estágio, faz-se necessário garantir que cada aproximação calculada seja um limite inferior válido em todo o domínio da FCF original. Como é visto na Seção 3.1.2, a DB atende a essas condições embora algumas considerações na modelagem do PMPO devem ser procedidas de maneira a se assegurar a aplicabilidade da DB.

3.1.2. Decomposição de Benders

A DB é uma técnica de decomposição para a resolução de problemas com variáveis mistas multidimensionais que podem ser arranjados canonicamente de modo que os subproblemas resultem em problemas de Programação Linear. A DB clássica consiste no trabalho proposto por Benders (1962) e é utilizada em inúmeras aplicações envolvendo a Programação Linear e Programação Linear Inteira Mista, inclusive no âmbito da Otimização Estocástica Multiestágio.

Ao se observar na literatura de programação matemática, uma expansão da DB a estende para uma classe de problemas em que os subproblemas não necessariamente são lineares. A expansão da DB proposta por Geoffrion (1972) é denominada de Decomposição de Benders Generalizada (DBG) e a sua notação convenientemente é utilizada ao longo desta seção. Porém, vale ressaltar que a estratégia utilizada para a aproximação da FCF neste trabalho é mesmo a DB clássica, definida aqui a partir de um caso particular da DBG.

Assim, dado o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
& \underset{\mathbf{x}, \mathbf{y}}{\text{minimizar}} \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\
& \text{sujeito a:} \quad L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \\
& \quad \quad \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, \\
& \quad \quad \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}, \\
& \quad \quad \quad \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^{n_y},
\end{aligned} \tag{141}$$

em que:

$$\begin{aligned}
& F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ função convexa em } \mathbf{x} \text{ para cada valor} \\
& \quad \text{fixado de } \mathbf{y}, \\
& L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_l}, \text{ funções lineares em } \mathbf{x} \text{ para cada valor} \\
& \quad \text{fixado de } \mathbf{y}, \\
& G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_g}, \text{ funções convexas em } \mathbf{x} \text{ para cada valor} \\
& \quad \text{fixado de } \mathbf{y}.
\end{aligned}$$

A variável \mathbf{y} pode ser denominada de variável complicante, seguindo a tradução literal de *complicating variable*, e para um valor conhecido $\mathbf{y}^k \in \mathcal{Y}$, um problema primal de (141) pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
z_{UB}^k &= \underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k), \\
& \text{sujeito a:} \\
& \quad L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k) = \mathbf{0} \quad : \boldsymbol{\lambda}^k, \\
& \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k) \leq \mathbf{0} \quad : \boldsymbol{\psi}^k, \\
& \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned} \tag{142}$$

Assumindo-se que o problema (142) seja viável e a solução \mathbf{x}^k associada aos multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}^k$ e $\boldsymbol{\psi}^k$ possa ser encontrada, o valor de z_{UB}^k corresponde a um limite superior da solução do problema (141).

Agora, uma vez que se assegurem as condições elencadas em Floudas (1995), a projeção de (141) no espaço \mathbf{y} pode ser realizada a partir da reformulação do problema como:

$$\begin{aligned}
& \underset{\mathbf{y}}{\text{minimizar}} \quad \underset{\mathbf{x}}{\text{ínfimo}} \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\
& \text{sujeito a:} \quad L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \\
& \quad \quad \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}, \\
& \quad \quad \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \\
& \quad \quad \quad \mathbf{y} \in \mathcal{Y}.
\end{aligned} \tag{143}$$

Assim, uma função $Z(\mathbf{y})$ pode ser definida de modo que:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{y}) &= \underset{\mathbf{x}}{\text{ínfimo}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \text{sujeito a: } L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{0}, \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\leq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (144)$$

Uma vez que o conjunto $\mathcal{Z} = \{\mathbf{y}: L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}$ represente os valores de \mathbf{y} na qual o problema (141) é viável em \mathbf{x} , o problema (143) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{y}}{\text{minimizar}} Z(\mathbf{y}), \\ \text{sujeito a: } \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}. \end{aligned} \quad (145)$$

A partir de (144), a versão dual de $Z(\mathbf{y})$ pode ser formulada como:

$$Z(\mathbf{y}) = \sup_{\lambda, \psi \geq 0} \underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}{\text{ínfimo}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda, \psi), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}. \quad (146)$$

A função $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda, \psi)$ é a Função Lagrangiana de (144) e pode ser definida como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda, \psi) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^\top L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \psi^\top G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (147)$$

Substituindo (146) em (145):

$$\underset{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}}{\text{minimizar}} \sup_{\lambda, \psi \geq 0} \underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}{\text{ínfimo}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda, \psi). \quad (148)$$

A partir da definição de supremo, o menor valor de limite superior, e da inclusão de uma variável auxiliar z , o problema (148) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, z}{\text{minimizar}} z, \\ \text{sujeito a: } z \geq \underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}{\text{ínfimo}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda, \psi), \quad \lambda, \psi \geq 0. \end{aligned} \quad (149)$$

Uma vez que a solução ótima de $Z(\mathbf{y})$ é limitada em $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$, o ínfimo de $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ pode ser substituído por um problema de minimização. Assim:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, z}{\text{minimizar}} \quad z, \\ \text{sujeito a:} \quad & z \geq \underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\psi}), \quad \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\psi} \geq 0. \end{aligned} \quad (150)$$

Dessa maneira o problema descrito por (150) é então denominado de problema mestre e se equivale ao problema original de (141). Pode-se observar que para a solução ótima de (150) é necessário um número infinito de restrições no problema. Contudo, uma versão relaxada do problema mestre é utilizada na prática, em que um número limitado de restrições é considerado. Assim, garante-se um limite inferior para a solução do problema original (141).

Além disso, a função composta do lado direito da restrição de (150) pode ser considerada uma função suporte de $Z(\mathbf{y})$. Uma vez que $Z(\mathbf{y})$ seja convexa em \mathbf{y} , a função suporte aproxima o problema mestre por hiperplanos tangentes à $Z(\mathbf{y})$. Conforme demonstrado em FLOUDAS (FLOUDAS, 1995), a função $Z(\mathbf{y})$ pode ser convexa em \mathbf{y} mesmo que o problema (141) não seja convexo no espaço $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Com a definição dos problemas primal e mestre do problema original, um algoritmo para o cálculo da solução ótima de (141) a partir da inclusão de funções suporte no problema mestre é descrito como:

- **Configuração:** Inicializar $nk = 1$, atribuir valores iniciais viáveis para \mathbf{y}^1 , resolver o problema primal (142), guardar os valores de $\boldsymbol{\lambda}^1$ e $\boldsymbol{\psi}^1$ e atribuir z^1_{UB} como limite superior z_{UB} .
- **Passo 1:** Resolver o problema mestre relaxado (151) :

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, z_{LB}}{\text{minimizar}} \quad z_{LB}, \\ \text{sujeito a:} \quad & z_{LB} \geq \underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\psi}^k), \quad k = 1, \dots, nk. \end{aligned} \quad (151)$$

Se $z_{UB} - z_{LB}$ for menor que certa tolerância, pare o algoritmo. Senão, atualizar $k = nk + 1$ e, por seguinte, $nk = k$, atribuir a solução ótima de (151) à \mathbf{y}^k e avançar para o Passo 2;

- Passo 2: resolver o problema primal (142) para k , guardar os valores de λ^k e ψ^k e calcular o limite superior z_{UB} como o mínimo valor de z_{UB} e z^k_{UB} . Voltar para o Passo 1.

Ao se observar o algoritmo, percebe-se que a maior dificuldade do processo está na resolução do problema mestre descrito por (151). Isso se deve à presença de um subproblema de minimização interno às restrições do problema. Entretanto, é pertinente considerar que o problema (141) corresponde a uma extensão da aplicação da DB clássica, em que nesse caso $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ necessitam ser somente convexas em \mathbf{x} para valores fixados de \mathbf{y} .

Para um caso específico de (141) em que $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sejam também lineares em \mathbf{y} e separáveis entre \mathbf{y} e \mathbf{x} , o problema mestre de (151) pode ser reescrito a partir de (147) como:

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, z_{LB}}{\text{minimizar}} \quad z_{LB}, \\ & \text{sujeito a:} \\ & z_{LB} \geq \underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} \quad F_x(\mathbf{x}) + F_y(\mathbf{y}) + \lambda^{k\top} [L_x(\mathbf{x}) + L_y(\mathbf{y})] + \\ & \quad \psi^{k\top} [G_x(\mathbf{x}) + G_y(\mathbf{y})], \quad k = 1, \dots, nk. \end{aligned} \tag{152}$$

Ao se separar os termos em \mathbf{y} do problema de minimização interno à restrição de (152):

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, z_{LB}}{\text{minimizar}} \quad z_{LB}, \\ & \text{sujeito a:} \quad z_{LB} \geq F_y(\mathbf{y}) + \lambda^{k\top} L_y(\mathbf{y}) + \psi^{k\top} G_y(\mathbf{y}) + \\ & \quad \underset{\mathbf{x} \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} \quad [F_x(\mathbf{x}) + \lambda^{k\top} L_x(\mathbf{x}) + \psi^{k\top} G_x(\mathbf{x})], \\ & \quad k = 1, \dots, nk. \end{aligned} \tag{153}$$

Pode-se perceber que a solução do problema interno de minimização em (153) para os valores λ^k e ψ^k é a própria solução \mathbf{x}^k obtida com a resolução do problema primal. Com isso, (153) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \underset{y \in \mathcal{Y}, z_{LB}}{\text{minimizar}} \quad z_{LB}, \\
& \text{sujeito a:} \quad z_{LB} \geq F_y(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\lambda}^{k\top} L_y(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\psi}^{k\top} G_y(\mathbf{y}) + \\
& \quad F_x(\mathbf{x}^k) + \boldsymbol{\lambda}^{k\top} L_x(\mathbf{x}^k) + \boldsymbol{\psi}^{k\top} G_x(\mathbf{x}^k), \quad k = 1, \dots, nk.
\end{aligned} \tag{154}$$

Ao se escrever a função Lagrangiana do problema primal com as soluções encontradas se obtém:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\psi}^k) &= F_x(\mathbf{x}^k) + F_y(\mathbf{y}^k) + \\
& \quad \boldsymbol{\lambda}^{k\top} [L_x(\mathbf{x}^k) + L_y(\mathbf{y}^k)] + \\
& \quad \boldsymbol{\psi}^{k\top} [G_x(\mathbf{x}^k) + G_y(\mathbf{y}^k)] = z_{UB}^k,
\end{aligned} \tag{155}$$

ou:

$$\begin{aligned}
F_x(\mathbf{x}^k) + \boldsymbol{\lambda}^{k\top} L_x(\mathbf{x}^k) + \boldsymbol{\psi}^{k\top} G_x(\mathbf{x}^k) &= \\
z_{UB}^k - F_y(\mathbf{y}^k) - \boldsymbol{\lambda}^{k\top} L_y(\mathbf{y}^k) - \boldsymbol{\psi}^{k\top} G_y(\mathbf{y}^k).
\end{aligned} \tag{156}$$

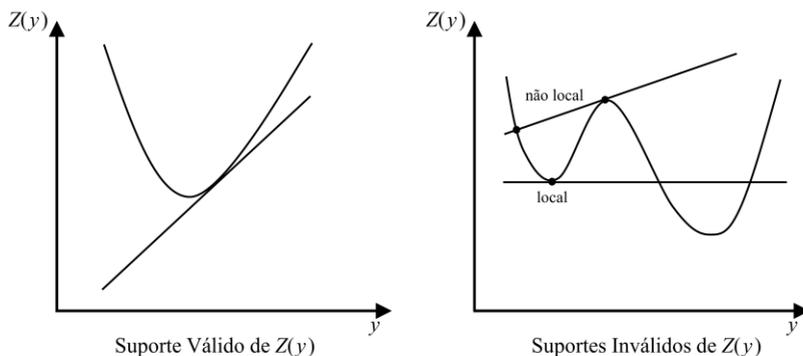
Por fim, substituindo-se (156) em (154) se obtém:

$$\begin{aligned}
& \underset{y \in \mathcal{Y}, z_{LB}}{\text{minimizar}} \quad z_{LB}, \\
& \text{sujeito a:} \\
& z_{LB} - F_y(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\lambda}^{k\top} L_y(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\psi}^{k\top} G_y(\mathbf{y}) \geq \\
& z_{UB}^k - F_y(\mathbf{y}^k) - \boldsymbol{\lambda}^{k\top} L_y(\mathbf{y}^k) - \boldsymbol{\psi}^{k\top} G_y(\mathbf{y}^k), \quad k = 1, \dots, nk.
\end{aligned} \tag{157}$$

Logo, a partir da solução k do problema primal para valores \mathbf{y}^k , a k -ésima aproximação do problema mestre pode ser calculada com os valores obtidos de z_{UB}^k , $\boldsymbol{\lambda}^k$ e $\boldsymbol{\psi}^k$, além das funções lineares e separáveis em \mathbf{y} com os valores \mathbf{y}^k . Percebe-se que para $F_y(\mathbf{y})$, $L_y(\mathbf{y})$ e $G_y(\mathbf{y})$ lineares em \mathbf{y} , as funções suporte do problema mestre também são lineares.

Assim, pode-se atestar que nesse caso como a função $Z(\mathbf{y})$ é linear e convexa em \mathbf{y} , e sua aproximação válida é realizada por hiperplanos tangentes no problema mestre (157). Na Figura 18 são encontrados exemplos gráficos de aproximações válidas e inválidas de $Z(\mathbf{y})$.

Figura 18 – Exemplos de Suportes Lineares para $Z(y)$.



Fonte: Adaptado de Floudas (1995).

A função suporte em (157) pode ser interpretada como a aproximação descrita pela DB clássica, para problemas de PL. Conforme apontado na Seção 3.1.1 e discutido anteriormente, é extremamente conveniente que a FCF definida para os problemas de otimização do PMPO se comporte como $Z(y)$, uma vez que as aproximações do problema mestre garantem um limite inferior válido do problema original.

No contexto do modelo de médio prazo, essa é a principal justificativa para que a função de produção hidrelétrica, a função de custo total de produção termelétrica e o modelo PAR das bacias sejam representados em termos de aproximações lineares nos problemas de otimização. Desse modo, garante-se que as funções de custos totais de produção $ZT_{t,r}$, sejam formuladas por problemas de PL, convexas. Por consequência, as FCFs definidas como a expectância de $ZT_{t,r}$ também são convexas. A assimilação das FCFs lineares e convexas por $Z(y)$ implica que os problemas primal e mestre a serem resolvidos para a aproximação de ZF_t também sejam definidos como problemas de PL. Com isso, além de se garantir a convexidade das FCFs, os problemas definidos como PLs geralmente são mais fáceis, rápidos e factíveis de se resolver a outros gêneros de problemas de otimização (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

A formulação do PMPO para a estratégia da PDD com DB na aproximação da FCF é apresentada nas próximas seções. Vale salientar que é necessário que a formulação seja definida de acordo com o modelo de previsão de afluência empregado, uma vez que ZF_t pode depender ou não das afluências passadas.

3.1.3. Formulação com Modelos Independente Lognormal

Conforme discutido nas seções 2.2.3 e 2.2.4, o modelo de previsão de aflúências IND Lognormal e sua variação a Três Parâmetros dependem exclusivamente dos parâmetros estatísticos do histórico observado e do ruído branco/correlacionado. Logo, as variáveis de estado do modelo do PMPO correspondem somente aos volumes nos reservatórios das hidrelétricas.

O modelo de geração de aflúências a ser utilizado é definido em termos de cada realização $r \in \mathcal{R}_t$ a partir de (98), ou (102) para a variação a Três Parâmetros. Com isso, no contexto do processo estocástico estipulado, as realizações da variável aleatória são definidas em termos do ruído que é o único componente variável no cálculo de yp_t^b .

Ao se observar a restrição de balanço hídrico em (121), percebe-se que, dependendo do estado vh_t^h , o problema de otimização pode ser inviável para valores negativos de aflúências incrementais. Isso violaria a condição de recursos relativamente completos do modelo. Consequentemente, uma variável de aflúência complementar, yc_t^h , é definida como uma folga extra no balanço hídrico de maneira a garantir a viabilidade do problema para a utilização dos modelos IND.

A função $ZT_{t,r}$ do último estágio pode ser representada por um problema mestre em termos da DB. Assim, as funções de suporte (digase cortes de Benders ou aproximações inferiores de ZF_t) são calculadas a partir da solução de um problema primal do último estágio, linearmente definido para o valor conhecido de índice k , $vh_t^{h,k}$, como:

$$t = nt, \quad np = 0 :$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} ph_t^{1:nh,1}, \dots, ph_t^{1:nh,nl_t} & pf_t^{1:nf,1}, \dots, pf_t^{1:nf,nl_t} & pd_t^{1:nd,1}, \dots, pd_t^{1:nd,nl_t} & \dots \\ pi_t^{1:ni,1}, \dots, pi_t^{1:ni,nl_t} & qh_t^{1:nh,1}, \dots, qh_t^{1:nh,nl_t} & sh_t^{1:nh,1}, \dots, sh_t^{1:nh,nl_t} & \dots \\ vh_{t+1}^{1:nh} & yh_t^{1:nh} & yp_t^{1:nb} & yc_t^{1:nh} \end{bmatrix}, \quad (158)$$

$$z_{UBt,r}^k =$$

$$\underset{x_t}{\text{minimizar}} \sum_{l \in \mathcal{L}_t} tl_l^l \cdot \left(\sum_{f \in \mathcal{F}_t} cf^f \cdot pf_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t} cd^d \cdot pd_t^{d,l} \right) + \sum_{h \in \mathcal{H}_t} cy^h \cdot yc_t^h, \quad (159)$$

sujeito a:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_t^s} ph_t^{h,l} + \sum_{f \in \mathcal{F}_t^s} pf_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t^s} pd_t^{d,l} + \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} pi_t^{i,l} - \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} pi_t^{i,l} = pl_t^{s,l} \cdot tl_l^l,$$

$$\forall l \in \mathcal{L}_t, \quad \forall s \in \mathcal{S},$$

$$vh_{t+1}^h + vz_t \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}_t} tl_t^l \cdot \left[qh_t^{h,l} + sh_t^{h,l} - \sum_{m \in \mathcal{N}_t^h} (qh_t^{m,l} + sh_t^{m,l}) \right] - vz_t \cdot (yh_t^h + yc_t^h) \quad (160)$$

$$= vh_t^{h,k}, \quad \forall h \in \mathcal{V},$$

$$yh_t^h + yc_t^h - qh_t^{h,l} - sh_t^{h,l} + \sum_{m \in \mathcal{N}_t^h} (qh_t^{m,l} + sh_t^{m,l}) = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{Q}, \quad (161)$$

$$yh_t^h - yp_t^b \cdot \mu r h_t^h = -\delta y h^h, \quad h \in \mathcal{H}^b, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$yp_t^b = rp_{t,r}^b, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (162)$$

$$ph_t^{h,l} - qh_t^{h,l} \cdot pr_t^h = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t,$$

$$\underline{vh}_t^h \leq vh_{t+1}^h \leq \overline{vh}_t^h, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

$$\underline{pf}_t^f \leq pf_t^{f,l} \leq \overline{pf}_t^f, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall f \in \mathcal{F}_t,$$

$$\underline{pd}_t^d \leq pd_t^{d,l} \leq \overline{pd}_t^d, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall d \in \mathcal{D}_t,$$

$$\underline{pi}_t^i \leq pi_t^{i,l} \leq \overline{pi}_t^i, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall i \in \mathcal{I},$$

$$0 \leq qh_t^{h,l} \leq \overline{qh}_t^h, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t,$$

$$sh_t^{h,l} \geq 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t,$$

$$yc_t^h \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}_t, \quad (163)$$

em que:

$z^{kUBt,r}$: custo do problema primal associado à k e r em t ,

cy^h : valor de penalização da afluência complementar.

Com a resolução do problema primal, os multiplicadores de Lagrange da restrição (160) associados à k , denominados $\lambda bh_{t,r}^{h,k}$, e um limite superior para $ZT_{t,r}$, $z_{t,r}^{kUB}$ são obtidos. Uma vez que somente as restrições de igualdade de balanço hídrico de usinas com regularização dependem de vh_t^h , variável de estado e complicante do modelo, a formulação do problema mestre de $ZT_{t,r}$ do último estágio pode ser definida a partir de (157) como:

$t = nt, np = 0$:

minimizar $z_{t_{LBt,r}}$,
 $vh_t^{nh}, z_{t_{LBt,r}}$

sujeito a:

$$z_{t_{LBt,r}} + \sum_{h \in \mathcal{H}} \lambda b h_{t,r}^{h,k} \cdot v h_t^h \geq z_{t_{UBt,r}}^k + \sum_{h \in \mathcal{H}} \lambda b h_{t,r}^{h,k} \cdot v h_t^{h,k}, \quad k = 1, \dots, nk_t, \quad (164)$$

$$\underline{v h_t^h} \leq v h_t^h \leq \overline{v h_t^h}, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Como um limite inferior $z_{t_{LBt,r}}$ da função de custo total em $t = nt$ é obtido a partir de (164), a expectância dos $z_{t_{LBt,r}}$ para $r=1, \dots, nr_t$ consequentemente é um limite inferior válido da função de custo futuro ZF_{t-1} . Contudo, uma vez que ZF_{t-1} é linearmente separável em termos de $v h_t^h$, uma única aproximação para o problema mestre da FCF pode ser calculada com a expectância dos nr_t valores obtidos de $z_{t_{UBt,r}}^k$ e $\lambda b h_{t,r}^{h,k}$ em k , ao invés de se estimar o limite inferior de ZF_{t-1} com o Valor Esperado de nr_t aproximações $z_{t_{LBt,r}}$. Dessa maneira, o número de variáveis e restrições do modelo podem ser consideravelmente reduzidos, poupando esforço computacional.

Supondo que as realizações de índice r possuam a mesma probabilidade de ocorrência, $1/nr_{t=nt}$, o problema mestre em termos do limite inferior de $ZF_{t=nt-1}$ pode ser definido no penúltimo estágio como:

$t = nt - 1, np = 0$:

minimizar $z_{t_{LBt}}$,
 $vh_{t+1}^{nh}, z_{t_{LBt}}$

sujeito a:

$$z_{t_{LBt}} + \frac{1}{nr_{t+1}} \cdot \sum_{r=1}^{nr_{t+1}} \sum_{h \in \mathcal{H}} \lambda b h_{t+1,r}^{h,k} \cdot v h_{t+1}^h \geq \quad (165)$$

$$\frac{1}{nr_{t+1}} \cdot \sum_{r=1}^{nr_{t+1}} z_{t_{UBt+1,r}}^k + \frac{1}{nr_{t+1}} \cdot \sum_{r=1}^{nr_{t+1}} \sum_{h \in \mathcal{H}} \lambda b h_{t+1,r}^{h,k} \cdot v h_{t+1}^{h,k}, \quad k = 1, \dots, nk_{t+1},$$

$$\underline{v h_{t+1}^h} \leq v h_{t+1}^h \leq \overline{v h_{t+1}^h}, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

em que:

$z_{t_{LBt}}$: Limite inferior do custo futuro de operação em t .

Uma representação em $t=nt-1$ da expectância dos termos $\lambda b h_{t+1,r}^{h,k}$ e $z_{t_{UBt+1,r}}^k$ para $r=1, \dots, nr_{t+1}$ pode ser definida conforme:

$$zf_{UBt}^k = \frac{1}{nr_{t+1}} \cdot \sum_{r=1}^{nr_{t+1}} zt_{UBt+1,r}^k, \quad (166)$$

$$\pi v h_{t+1}^{h,k} = \frac{1}{nr_{t+1}} \cdot \sum_{r=1}^{nr_{t+1}} \lambda b h_{t+1,r}^{h,k}, \quad h \in \mathcal{H}. \quad (167)$$

Ainda, uma constante pode ser definida para a representação de todo o lado direito da equação da aproximação do problema mestre:

$$zf_{RS_t}^k = zf_{UB_t}^k + \sum_{h \in \mathcal{H}} \pi v h_{t+1}^{h,k} \cdot v h_t^{h,k}, \quad (168)$$

O problema (165) pode ser reescrito por meio dos termos das k -ésimas aproximações definidos a partir de (166)-(168) como:

$$t = nt - 1, \quad np = 0:$$

$$\underset{v h_{t+1}^{h,k}, z f_{LB_t}}{\text{minimizar}} \quad z f_{LB_t},$$

sujeito a:

$$z f_{LB_t} + \sum_{h \in \mathcal{H}} \pi v h_{t+1}^{h,k} \cdot v h_{t+1}^h \geq z f_{RS_t}^k, \quad k = 1, \dots, nk_{t+1},$$

$$\underline{v h}_{t+1}^h \leq v h_{t+1}^h \leq \overline{v h}_{t+1}^h, \quad \forall h \in \mathcal{H}. \quad (169)$$

Ao se substituir a FCF original $ZF_{t=nt-1}$ pelo problema mestre de (169), admitindo-se que nk_{t+1} aproximações sejam suficientes para representar adequadamente ZF_t , o problema primal do penúltimo estágio pode ser definido para valores conhecidos $v h_t^{h,k}$ como:

$$t = nt - 1, \quad np = 0:$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} p h_t^{1:nh_t,1}, \dots, p h_t^{1:nh_t,nl_t} & p f_t^{1:nf_t,1}, \dots, p f_t^{1:nf_t,nl_t} & p d_t^{1:nd_t,1}, \dots, p d_t^{1:nd_t,nl_t} & \dots \\ p t_t^{1:ni_t,1}, \dots, p t_t^{1:ni_t,nl_t} & q h_t^{1:nh_t,1}, \dots, q h_t^{1:nh_t,nl_t} & s h_t^{1:nh_t,1}, \dots, s h_t^{1:nh_t,nl_t} & \dots \\ v h_{t+1}^{1:nh} & y h_t^{1:nh_t} & y p_t^{1:nb} & y c_t^{1:nh_t} & z f_{LB_t} \end{bmatrix}, \quad (170)$$

$$z_{UBt,r}^k =$$

$$\underset{x_t}{\text{minimizar}} \sum_{l \in \mathcal{L}_t} t_l^l \cdot \left(\sum_{f \in \mathcal{F}_t} c f^f \cdot p f_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t} c d^d \cdot p d_t^{d,l} \right) + \sum_{h \in \mathcal{H}_t} c y^h \cdot y c_t^h + z_{f_{LBt}}, \quad (171)$$

sujeito a:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_t^s} p h_t^{h,l} + \sum_{f \in \mathcal{F}_t^s} p f_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t^s} p d_t^{d,l} + \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} p i_t^{i,l} - \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} p i_t^{i,l} = p l_t^{s,l} \cdot t_l^l,$$

$$\forall l \in \mathcal{L}_t, \forall s \in \mathcal{S},$$

$$v h_{t+1}^h + v z_t \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}_t} t_l^l \cdot \left[q h_t^{h,l} + s h_t^{h,l} - \sum_{m \in \mathcal{M}^h} (q h_t^{m,l} + s h_t^{m,l}) \right] - v z_t \cdot (y h_t^h + y c_t^h)$$

$$= v h_t^{h,k}, \quad \forall h \in \mathcal{V}_t,$$

$$y h_t^h + y c_t^h - q h_t^{h,l} - s h_t^{h,l} + \sum_{m \in \mathcal{M}^h} (q h_t^{m,l} + s h_t^{m,l}) = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{Q}_t,$$

$$y h_t^h - y p_t^b \cdot \mu r h_t^h = -\delta y h_t^h, \quad h \in \mathcal{H}^b, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$y p_t^b = r p_{t,r}^b, \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

$$p h_t^{h,l} - q h_t^{h,l} \cdot p r_t^h = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t,$$

$$\underline{v h}_t^h \leq v h_{t+1}^h \leq \overline{v h}_t^h, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

$$\underline{p f}_t^f \leq p f_t^{f,l} \leq \overline{p f}_t^f, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall f \in \mathcal{F}_t,$$

$$\underline{p d}_t^d \leq p d_t^{d,l} \leq \overline{p d}_t^d, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall d \in \mathcal{D}_t,$$

$$\underline{p i}_t^i \leq p i_t^{i,l} \leq \overline{p i}_t^i, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall i \in \mathcal{I}_t,$$

$$0 \leq q h_t^{h,l} \leq \overline{q h}_t^h, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t,$$

$$s h_t^{h,l} \geq 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t,$$

$$y c_t^h \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}_t,$$

$$z_{f_{LBt}} + \sum_{h \in \mathcal{H}_t} \pi v h_{t+1}^{h,k} \cdot v h_{t+1}^h \geq z_{f_{RS t}}^k, \quad k = 1, \dots, n k_{t+1}. \quad (172)$$

Observando as restrições do problema primal do penúltimo estágio, percebe-se que novamente que a incidência dos valores conhecidos $\nu h_t^{h,k}$ ocorre somente no balanço hídrico. Portanto, um problema mestre em termos do custo futuro em $t = nt - 2$ também pode ser definido a partir da formulação descrita em (169) e assim sucessivamente até a definição do problema de $t=1$.

Basicamente nessa formulação, o problema mestre de último estágio é repassado ao problema primal do estágio antecessor e assim sucessivamente até que o problema mestre do segundo estágio seja repassado ao problema determinístico do primeiro estágio.

Logo, uma vez que as FCFs dos subproblemas de $t = 1, \dots, nt-1$ são bem representadas pelas aproximações do problema mestre subsequente, a solução do modelo multiestágio estocástico é obtida com a solução da representação equivalente determinística, descrita pelo problema do primeiro estágio.

É importante salientar que o acoplamento pela variável complicante é garantido desde que o estado obtido em t pertença ao conjunto de soluções viáveis do problema mestre em $t+1$. Nesse sentido, conforme discutido na Seção 3.1.1, uma vez que o modelo multiestágio estocástico seja caracterizado como “de recursos relativamente completos”, pode-se garantir que a solução em t implique em soluções viáveis em $t+1$. No caso do modelo apresentado essa condição pode ser facilmente atestada uma vez que os volumes nos reservatórios são positivos e a soma das afluições incremental e complementar das hidrelétricas são viáveis. Logo, para qualquer valor factível $\nu h_t^{h,k}$ o respectivo problema de otimização é viável.

Por fim, uma vez apresentada a formulação do modelo com DB resta definir uma estratégia para o cálculo das aproximações das FCFs. Conforme discutido na Seção 3.1.1, a PDD possibilita a estimação de valores viáveis de νh_{t+1}^h via recursão progressiva, de modo que o cálculo de aproximações válidas da FCF seja procedido via recursão regressiva. Na Seção 3 são apresentados os detalhes acerca das estratégias de solução associadas à PDD.

3.1.4. Formulação com Modelos PAR Lognormal

Diferentemente dos modelos IND Lognormal, os modelos de geração de afluições PAR são definidos a partir da dependência temporal de afluições passadas. Assim, também no contexto da PD, as variáveis de afluições dos estágios anteriores também podem ser interpretadas

como variáveis de estado do modelo de planejamento de médio prazo. Logo, uma política ótima em termos da FCF pode depender tanto das variáveis de volume nos reservatórios, vh^h , quanto das variáveis de afluências em np estágios anteriores, $yp^b_{t-p}, \dots, yp^b_{t-np}$.

Conforme discutido na seção anterior, um valor de afluência incremental deve ser definido de maneira a se garantir a viabilidade do problema de otimização. Semelhante ao estabelecido para a formulação com modelo independente, o problema de otimização com modelo PAR também irá incorporar a variável complementar de afluência yc^h_t .

Assumindo que valores $vh^h_{t-1}, y_{t-1}, \dots, y_{t-np}$ são conhecidos, o problema primal de último estágio é descrito como:

$t = nt :$

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} ph_t^{1:nh,1}, \dots, ph_t^{1:nh,nl_t} & pf_t^{1:nf,1}, \dots, pf_t^{1:nf,nl_t} & pd_t^{1:nd,1}, \dots, pd_t^{1:nd,nl_t} & \dots \\ pi_t^{1:ni,1}, \dots, pi_t^{1:ni,nl_t} & qh_t^{1:nh,1}, \dots, qh_t^{1:nh,nl_t} & sh_t^{1:nh,1}, \dots, sh_t^{1:nh,nl_t} & \dots \\ vh_{t+1}^{1:nh} & yp_t^{1:nb} & yp_{t-1}^{1:nb}, \dots, yp_{t-np}^{1:nb} & yh_t^{1:nh} & yc_t^{1:nh} \end{bmatrix}, \quad (173)$$

$z_t^k =$

$$\text{minimizar}_{\mathbf{x}_t} \sum_{l \in \mathcal{L}_t} tl_t^l \cdot \left(\sum_{f \in \mathcal{F}_t} cf^f \cdot pf_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t} cd^d \cdot pd_t^{d,l} \right) + \sum_{h \in \mathcal{H}_t} cy^h \cdot yc_t^h,$$

sujeito a:

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_t^s} ph_t^{h,l} + \sum_{f \in \mathcal{F}_t^s} pf_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t^s} pd_t^{d,l} + \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} pi_t^{i,l} - \sum_{i \in \mathcal{I}_t^s} pi_t^{i,l} = pl_t^{s,l} \cdot tl_t^l,$$

$$\forall l \in \mathcal{L}_t, \forall s \in \mathcal{S},$$

$$vh_{t+1}^h + vz_t \cdot \sum_{l \in \mathcal{L}_t} tl_t^l \cdot \left[qh_t^{h,l} + sh_t^{h,l} - \sum_{m \in \mathcal{M}_t^h} (qh_t^{m,l} + sh_t^{m,l}) \right] - vz_t \cdot (yh_t^h + yc_t^h)$$

$$= vh_t^{h,k}, \quad \forall h \in \mathcal{V}_t,$$

$$yh_t^h + yc_t^h - qh_t^{h,l} - sh_t^{h,l} + \sum_{m \in \mathcal{M}_t^h} (qh_t^{m,l} + sh_t^{m,l}) = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{Q}_t,$$

$$yh_t^h - yp_t^b \cdot \mu rh_t^h = -\delta y^h, \quad h \in \mathcal{H}^b, \forall b \in \mathcal{B},$$

$$yp_t^b - \sum_{p=1}^{np} fp_{t,p}^b \cdot yp_{t-p}^b = rp_{t,r}^b, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \quad (174)$$

$$ph_t^{h,l} - qh_t^{h,l} \cdot pr_t^h = 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t,$$

$$\underline{vh}_t^h \leq vh_{t+1}^h \leq \overline{vh}_t^h, \quad \forall h \in \mathcal{H},$$

$$\begin{aligned}
\underline{pf}_t^f &\leq pf_t^{f,l} \leq \overline{pf}_t^f, & \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall f \in \mathcal{F}_t, \\
\underline{pd}_t^d &\leq pd_t^{d,l} \leq \overline{pd}_t^d, & \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall d \in \mathcal{D}_t, \\
\underline{pi}_t^i &\leq pi_t^{i,l} \leq \overline{pi}_t^i, & \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall i \in \mathcal{I}, \\
0 &\leq qh_t^{h,l} \leq \overline{qh}_t^h, & \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t, \\
sh_t^{h,l} &\geq 0, & \forall l \in \mathcal{L}_t, \forall h \in \mathcal{H}_t, \\
yc_t^h &\geq 0, & \forall h \in \mathcal{H}_t, \\
yp_{t-p}^b &= yp_{t-p}^{b,k}, \quad p = 1, \dots, np, & \forall b \in \mathcal{B}.
\end{aligned} \tag{175}$$

Com a solução do problema primal os multiplicadores de Lagrange das restrições (160) e (175), ambas associada às variáveis complicantes, e um limite superior para $ZT_{t,r}$ são obtidos. Com a definição do multiplicador de (175) como $\lambda yp_{t-p,r}^{b,k}$, o problema mestre de último estágio é definido como:

$$t = nt :$$

$$\text{minimizar } zT_{LBt,r},$$

$$vh_t^{zh}, yp_{t-p}^{znb}, \dots, yp_{t-mp}^{znb}, zT_{LBt,r}$$

sujeito a:

$$zT_{LBt,r} + \sum_{h \in \mathcal{H}_t} \lambda b h_{t,r}^{h,k} \cdot v h_t^h + \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{p=1}^{np} \lambda y p_{t-p,r}^{b,k} \cdot y p_{t-p}^b \geq \tag{176}$$

$$zT_{UBt,r}^k + \sum_{h \in \mathcal{H}_t} \lambda b h_{t,r}^{h,k} \cdot v h_t^{h,k} + \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{p=1}^{np} \lambda y p_{t-p,r}^{b,k} \cdot y p_{t-p}^{b,k}, \quad k = 1, \dots, nk_t,$$

$$\underline{vh}_t^h \leq v h_t^h \leq \overline{vh}_t^h, \quad \forall h \in \mathcal{H}_t.$$

A expectância dos termos das aproximações de (176) para $r=1, \dots, nr_{t=nt}$ pode ser definida do ponto de vista do penúltimo estágio por (166)-(167) e:

$$\pi y p_{t+1-p}^{b,k} = \frac{1}{nr_{t+1}} \cdot \sum_{r=1}^{nr_{t+1}} \lambda y p_{t+1-p,r}^{b,k}, \quad p = 1, \dots, np, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \tag{177}$$

$$z f_{RS t}^k = z f_{UB t}^k + \sum_{h \in \mathcal{H}_t} \pi v h_t^{h,k} \cdot v h_t^{h,k} + \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{p=1}^{np} \pi y p_{t+1-p}^{b,k} \cdot y h_{t+1-p}^{b,k}. \tag{178}$$

O problema mestre pode ser reescrito em termos do custo futuro do penúltimo estágio como:

$$\begin{aligned}
 & t = nt - 1: \\
 & \text{minimizar} \quad z f_{LBt}, \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & z f_{LBt} + \sum_{h \in \mathcal{H}} \pi v h_{t+1}^{h,k} \cdot v h_{t+1}^h + \sum_{b \in \mathcal{B}} \sum_{p=1}^{np} \pi y p_{t+1-p}^{b,k} \cdot y p_{t+1-p}^b \geq z f_{RS t}^k, \quad k = 1, \dots, nk_{t+1}, \\
 & \underline{v h}_{t+1}^h \leq v h_{t+1}^h \leq \overline{v h}_{t+1}^h, \quad \forall h \in \mathcal{H}.
 \end{aligned} \tag{179}$$

Em (179) as aproximações podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
 & t = nt - 1: \\
 & \text{minimizar} \quad z f_{LBt}, \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & z f_{LBt} + \sum_{h \in \mathcal{H}} \pi v h_{t+1}^{h,k} \cdot v h_{t+1}^h + \sum_{b \in \mathcal{B}} \left(\pi y p_t^{b,k} \cdot y p_t^b + \sum_{p=1}^{np-1} \pi y p_{t-p}^{b,k} \cdot y p_{t-p}^b \right) \geq z f_{RS t}^k, \\
 & k = 1, \dots, nk_{t+1}, \\
 & \underline{v h}_{t+1}^h \leq v h_{t+1}^h \leq \overline{v h}_{t+1}^h, \quad \forall h \in \mathcal{H}.
 \end{aligned} \tag{180}$$

Logo, a formulação do problema primal em $t = nt - 1$ pode ser escrita a partir de valores conhecidos $v h_t^{1:nh,k}$, $y p_{t-1}^{1:nb,k}$, ..., $y p_{t-np}^{1:nb,k}$:

$$\begin{aligned}
 & t = nt - 1: \\
 & \mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} p h_t^{1:nh_1,1}, \dots, p h_t^{1:nh_1,nl_1} & p f_t^{1:nf_1,1}, \dots, p f_t^{1:nf_1,nl_1} & p d_t^{1:nd_1,1}, \dots, p d_t^{1:nd_1,nl_1} & \dots \\ p i_t^{1:ni_1,1}, \dots, p i_t^{1:ni_1,nl_1} & q h_t^{1:nh_2,1}, \dots, q h_t^{1:nh_2,nl_2} & s h_t^{1:nh_3,1}, \dots, s h_t^{1:nh_3,nl_3} & \dots \\ v h_{t+1}^{1:nh} & y p_t^{1:nb} & y p_{t-1}^{1:nb}, \dots, y p_{t-np}^{1:nb} & y h_t^{1:nh} & y c_t^{1:nh} & z f_{LBt} \end{bmatrix}, \\
 & z t_{UBt,r}^k = \\
 & \text{minimizar}_{\mathbf{x}_t} \sum_{l \in \mathcal{L}_t} t l_l^l \cdot \left(\sum_{f \in \mathcal{F}_t} c f^f \cdot p f_t^{f,l} + \sum_{d \in \mathcal{D}_t} c d^d \cdot p d_t^{d,l} \right) + \\
 & \sum_{h \in \mathcal{H}_t} c y^h \cdot y c_t^h + z f_{LBt}, \\
 & \text{sujeito a:}
 \end{aligned} \tag{181}$$

A concepção da formulação apresentada é baseada nos trabalhos de Cepel (2001); Maceira e Damazio (2004) e de Matos (2012), os quais lidam com um modelo PAR Lognormal de Resíduos Dependentes no modelo do PMPO para a geração de energias afluentes em REEs. Inclusive a estratégia de geração de energias afluentes à Resíduos Dependentes é adotada no modelo oficial de médio prazo brasileiro. Contudo, conforme se pode observar em (93), os resíduos do modelo dependem dos valores de afluições incrementais passadas. Como essa dependência está presente em todos os parâmetros do resíduo e é não linear em termos de yp^b_{t-p} , a mesma não é apresentada na formulação do modelo do PMPO desta seção. Conforme apontado matematicamente por de Matos e Finardi (2012) e numericamente por de Matos, Larroyd e Finardi (2014), a utilização do modelo de Resíduos Dependentes pode prover políticas de operação de qualidade questionável para o planejamento de médio prazo. Por este motivo políticas de operação com o modelo PAR Lognormal de Resíduos Dependentes não são avaliadas nesse trabalho.

Na Seção 3.1.1 a decomposição por estágio do modelo multiestágio estocástico viabiliza o uso da PD na solução do problema. Como a Maldição da Dimensionalidade impede que problemas com múltiplas dimensões sejam resolvidos via PD clássica é muito comum que uma estratégia baseada na PDD seja empregada. Assim, utilizando-se dos preceitos da PD, na PDD um encadeamento de problemas primais e mestres são definidos de maneira que as aproximações da FCF sejam obtidas a partir da DB.

Embora a concepção do modelo multiestágio estocástico em termos da PDD não necessariamente impeça que uma estratégia baseada na discretização das variáveis de estado seja adotada, em problemas de grande porte, como o planejamento da operação hidrotérmica brasileiro, a Maldição da Dimensionalidade ainda pode inviabilizar esse tipo de abordagem. Assim, a estratégia discutida na Seção 3.1.1, baseada nas recursões progressiva e regressiva, é amplamente utilizada no cálculo das políticas ótimas em problemas multidimensionais.

Salienta-se que a solução do modelo a ser resolvido a partir da PDD via recursões não é inerente à dimensão do espaço de estados do problema. Ou seja, um número elevado de variáveis de estado pode requisitar muito mais recursões, tempo computacional, ou até mesmo inviabilizar o cálculo de políticas ótimas de operação. Logo, um dos objetivos deste trabalho também consiste na avaliação da qualidade da solução perante o elevado número de variáveis de estado utilizado.

A partir das formulações do modelo multiestágio estocástico do planejamento de médio prazo apresentadas nas seções 3.1.3 e 3.1.4, que contemplam as aproximações da FCF em termos da DB, a implementação da estratégia recursiva da PDD nesses modelos pode ser apropriadamente definida. Desse modo, inicialmente vale discutir como as realizações da variável aleatória e , por consequência, as afluições são geradas para a representação do processo estocástico.

3.2. GERAÇÃO DE AFLUÊNCIAS

Conforme discutido na Seção 3.1, a representação discreta do processo estocástico das afluições no horizonte de planejamento de médio prazo requer que um número suficiente de realizações da variável aleatória seja utilizado. Ainda, destaca-se que uma vez que as variáveis aleatórias são representadas por árvore de cenários, a quantidade de estágios a ser considerada no processo estocástico pode requisitar que um número elevado de realizações seja necessário. Uma forma de contornar a explosão do número de realizações do modelo consiste em atribuir uma representação das variáveis aleatórias por árvores de cenários de arranjo aninhado com amostras comuns. Assim, dado que o número de realizações da amostra comum por estágio $nr_t: t = 2, \dots, nt$ seja estipulado, os valores dos ruídos e resíduos dos modelos de geração de afluição associados podem ser calculados.

Nesse contexto, ao se observar os modelos de afluições apresentados na seção 2.2, percebe-se que todos os modelos dependem da geração de ruído branco normalmente distribuído de média zero e desvio padrão unitário. Por definição, o ruído branco deve ser homogêneo, estacionário e sem dependência temporal (HIPEL; MCLEOD, 1994), logo, o primeiro requisito para o cálculo das afluições consiste em um mecanismo de geração de valores aleatórios que forneçam $nr_t \times nb$ valores de ruídos brancos para $t = 2, \dots, nt$, que atendam aos critérios mencionados.

Em problemas de otimização estocástica multiestágio é muito comum que o método de MC seja empregado na obtenção das realizações da variável aleatória (BIRGE; LOUVEAUX, 2011). Consequentemente, a partir da distribuição de probabilidade conhecida da variável aleatória, um conjunto de realizações independentes e identicamente distribuídas pode ser obtido para a representação dos resíduos das afluições dado o sorteio não enviesado de ruídos brancos.

Com a geração de valores $rb_{t,r}^b$, ruídos correlacionados $rc_{t,r}^b$ são calculados por estágio, a partir da matriz de carga definida na Seção 2.2.5. A utilização de ruídos correlacionados ao invés de ruídos brancos nos modelos de afluência permite a representação da correlação espacial entre os rios e/ou bacias hidrográficas relevantes à produção hidrelétrica do sistema. Uma vez calculados os $rc_{t,r}^{1:nb}$ para todo $r \in \mathcal{R}_t$, para que os valores de afluências associados possam ser obtidos é necessário avaliar o modelo de geração de afluências utilizado.

Nos modelos IND, como os valores das afluências dependem somente da parametrização do modelo e do ruído, percebe-se que, nesse caso, os valores $rp_{t,r}^b$ computados com cada $rc_{t,r}^b$ representam a variável aleatória do modelo, isto é, a afluência do processo estocástico. Logo, as realizações da árvore de cenários são os próprios valores obtidos de $yp_{t,r}^{1:nb}$ para todo $r \in \mathcal{R}_t$.

No caso dos modelos PAR os valores das afluências dependem das afluências anteriores, dos resíduos e dos parâmetros do modelo. Percebe-se que nesses modelos os resíduos e os parâmetros do modelo são termos definidos sazonalmente com independência² temporal. Logo a componente aleatória do modelo multiestágio estocástico é o resíduo do modelo PAR utilizado. Assim, as realizações da árvore de cenários são os valores de $rp_{t,r}^b$, calculados para o modelo PAR Lognormal 3P de acordo com a Seção 2.2.2. Vale ressaltar que, como no caso dos modelos IND, ruídos correlacionados $rc_{t,r}^b$ são utilizados na obtenção de $rp_{t,r}^b$.

Observando a dependência temporal dos modelos PAR e a disposição da árvore de cenários de resíduos, cada valor $yp_{t,r}^b$ a ser calculado depende do resíduo de índice r no estágio t e dos p -ésimos valores de afluência anteriores à $yp_{t,r}^b$. Percebe-se então que o cálculo de $yp_{t,r}^b$ está associado ao cenário c da árvore, de maneira a representar a conexão temporal da realização r no estágio t com as demais realizações adjacentes da árvore de cenário. Logo, o valor de afluência pode ser convenientemente representado em termos do estágio t e do cenário c por:

$$yp_{t,r}^b = yp_{t,fr(c,t)}^b \quad (183)$$

Com (183) o valor conhecido $yp_{t-p}^{b,k}$ em (175) pode ser facilmente definido como o valor $yp_{t-p,fr(c,t-p)}^b$, que é o p -ésimo valor de afluência anterior à $yp_{t,r}^b: r=fr(c,t)$ obtido a partir do cenário c árvore de cenários.

² Conforme discutido na Seção 2.2.2.1, esta afirmação não é verdadeira no modelo PAR Lognormal com Resíduos Dependentes.

Em suma, com o mecanismo de geração de valores aleatórios os ruídos brancos são obtidos para todo $r \in \mathcal{R}_t$ e $b \in \mathcal{B}$. Na sequência, os ruídos correlacionados são calculados via matriz de carga. Assim, os valores das realizações das variáveis aleatórias são calculados com $rc^h_{t,r}$, de acordo com a formulação do modelo de geração de afluições adotado. Para os modelos IND, os valores $yp^h_{t,r}$ são as próprias realizações no estágio t . Já para os modelos PAR, os valores $yp^h_{t,r}$ precisam ser calculados a partir dos resíduos $rp^b_{t,r}$ dos $yp^h_{t-p,fr(c,t-p)}$ valores de afluições anteriores ao valor de índice $r=fr(c,t)$, associados ao cenário c .

3.3. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL

Uma vez obtidas as realizações da variável aleatória para o modelo de médio prazo, as políticas de operação, ou aproximações da FCF, podem ser calculadas a partir das recursões progressiva e regressiva mencionadas na Seção 3.1.1 e das formulações apresentadas nas seções 3.1.3 e 3.1.4.

A fim de exemplificar o processo recursivo da PDD, supõe-se que as políticas sejam obtidas para um modelo de médio prazo de $nt=4$ estágios e $nr_t=2$ realizações por estágio $t=2,\dots,4$. Nesse caso, as afluições de todas as bacias são regidas pelo modelo IND Lognormal. Logo, $nc=8$ cenários podem ser elencados a partir da árvore de cenários com amostras comuns.

A primeira recursão a ser executada é a recursão progressiva. O contador de iterações z é iniciado em 0. Para garantir a viabilidade do modelo em $z=0$, a seguinte restrição deve ser adicionada aos problemas primais em $t=1,\dots,nt-1$:

$$zf_{LBt} \geq 0. \quad (184)$$

Na recursão progressiva, o problema determinístico do primeiro estágio é resolvido e valores de zf_{LB1} e $vh_2^{1.nh}$ são obtidos. Observa-se que para o problema determinístico do primeiro estágio são necessários valores iniciais conhecidos e viáveis dos volumes dos reservatórios, $vh^{1.nh}_1$, das afluições do primeiro mês, yp^b_1 , e das afluições anteriores yp^b_{1-p} . A solução $vh_2^{1.nh}$ é repassada como $vh_2^{1.nh,k}$ aos problemas primais de $t=2$ e $r=fr(c,t)$: $c=1,\dots,nc$. Nesse caso, k é associado aos cenários visitados ao longo das iterações z conforme $k = fk(c,z)$ em que:

$$fk(c, z) \triangleq z \cdot nc + c, \quad c \in \mathcal{C}, \quad z \geq 0. \quad (185)$$

Ao se substituir os índices r e k respectivamente por $fr(c, t)$ e $fk(c, z)$ nas formulações apresentadas nas seções 3.1.3 e 3.1.4 os problemas primais de todos os estágios podem ser interligados conforme a disposição dos cenários na árvore de cenários.

Em seguida, ainda na recursão progressiva, todos os cenários são visitados paralelamente ou individualmente em $t = 2, \dots, 4$ e os problemas primais associados à $c = 1, \dots, nc$ são resolvidos. Para cada problema primal resolvido, as soluções vh^h_{t+1} e $zt_{UB}^{fk(c,0)}_{t,fr(c,t)}$ são encontradas. Os valores de vh^h_{t+1} são repassados como $vh^h_{t+1, fk(c,0)}$ para o problema primal subsequente. Já com os valores $zt_{UB}^{fk(c,0)}_{t,r}$ o seguinte termo pode ser calculado:

$$zp_{UBt,r}^k = zt_{UBt,r}^k - zf_{LBt}, \quad k = fk(c, z), \quad r = fr(c, t), \quad (186)$$

em que:

$zp_{UBt,r}^k$: custo presente de operação associado à realização de índice r e estágio t dados valores conhecidos k .

Logo, no final da recursão progressiva, sequências de valores de volumes finais e custos presentes são obtidos em $t = 2, \dots, 4$ para cada cenário $c = 1, \dots, nc$.

Uma vez que as realizações em cada estágio possuem a mesma probabilidade de ocorrência, $1/nr_t$, pode-se verificar que os cenários c também são equiprováveis. Com isso, um valor de limite superior do custo futuro em $t = 1$ pode ser calculado conforme:

$$zf_{UB1}^z = \sum_{t=2}^m \sum_{c=1}^{nc} \frac{zp_{UBt,fr(c,t)}^{fk(c,z)}}{nc}, \quad z \geq 0. \quad (187)$$

Caso o valor de zf_{LB1} seja igual à zf_{UB1}^z , a partir da condição da brecha de otimalidade se pode afirmar que as aproximações da FCF representam com exatidão o futuro incorrido no primeiro estágio, de modo que a solução encontrada é ótima (PEREIRA; PINTO, 1991). Logo, novas aproximações da FCF não são necessárias em quaisquer estágios. Caso contrário, novas aproximações da FCF são requeridas.

Na iteração inicial o problema do primeiro estágio não possui aproximações da FCF e, conseqüentemente, $zf_{LB1} = 0$. Ainda, o valor de

$z^z_{UB1} \gg 0$ uma vez que os custos presentes obtidos são decorrentes de decisões tomadas nos estágios $t=2, \dots, nt$ sem representação das FCFs. Logo é necessário que a PDD prossiga com uma nova iteração, de maneira a calcular aproximações para as FCFs.

O contador de iterações é então incrementado, $z=1$, e a etapa da recursão regressiva é procedida. Na recursão regressiva da iteração z o número de aproximações das FCFs a ser calculado por estágio corresponde ao número total de cenários da árvore, nc . Nesse caso cada aproximação associada à $c \in C$ é calculada segundo as formulações das seções 3.1.3 e 3.1.4, resolvendo-se os problemas primais de $t = nt, \dots, 2$ e todo $r \in \mathcal{R}_t$ a partir dos valores $vh_t^{1:nh, fk(c, z-1)}$ obtidos na recursão progressiva da iteração anterior. Na recursão regressiva, uma vez que os problemas primais de um determinado estágio foram resolvidos e a aproximação associada à c foi calculada, a mesma é imediatamente adicionada ao problema primal do estágio anterior para melhorar a representação da FCF. Com isso, observa-se que os problemas primais são constantemente atualizados a medida que novas aproximações das FCFs são calculadas.

Para avaliar se as aproximações calculadas são suficientes, uma nova recursão progressiva é necessária de modo que os valores de z^z_{LB1} e z^z_{UB1} da iteração atual sejam comparados. Caso se necessite de mais aproximações, uma nova iteração com a sequência de recursões regressiva-progressiva deve ser procedida.

Ao se observar as premissas do uso básico da PDD no modelo de médio prazo, percebe-se que o mapeamento de todos os cenários da árvore de cenários é extremamente complicado para horizontes de planejamento maiores que um ano e meio e que a execução das recursões progressiva e regressiva necessariamente requisitaria um tempo computacional proibitivo. Acima de dois anos de horizonte, pode-se afirmar que o número de cenários da árvore impossibilita a resolução do problema completo.

Assim, estratégias que permitem o cálculo de políticas de boa qualidade, ou quase ótimas, a partir de versões aproximadas do modelo de médio prazo devem ser avaliadas. Na próxima seção, uma versão aproximada da PDD recursiva denominada de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) é discutida, a qual possibilita o cálculo de políticas de operação a partir da amostragem de cenários da árvore de cenários.

3.4. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA

Como expansão da estratégia da PDD recursiva, a PDDE consiste em um método para o cálculo de políticas de operação em modelos de PE multiestágio. Nesse caso, ao se utilizar a PDDE, um número razoável de cenários é aleatoriamente visitado nas recursões progressivas, de modo a se obter os k -ésimos valores das variáveis de estado. Contudo, uma vez que todos os cenários da árvore sejam visitados, PDDE funcionará de maneira idêntica à PDD recursiva.

É importante salientar que dada a formulação linear dos problemas descritos em 3.1.3 e 3.1.4 e o arranjo aninhado com amostras comuns da árvore de cenário, uma aproximação calculada com cada $v/h_t^{h,k}$ na PDDE é um limite inferior válido para a função de custo esperado de operação em $t-1$ dos problemas associados aos demais cenários da árvore, assim como ocorre na PDD.

Na PDDE um número razoável de cenários da árvore de cenários deve ser visitado pelas recursões progressiva e regressiva ao longo das iterações. Nesse contexto algumas redefinições podem ser feitas para o uso da PDDE:

$$\mathcal{A} = \{a : a \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq a \leq na\}, \quad (188)$$

$$fr(a, t) : \mathcal{A} \times \mathcal{T}_+ \rightarrow \mathcal{R}_t, \quad (189)$$

$$fk(a, z) \triangleq z \cdot na + a, \quad a \in \mathcal{A}, z \geq 0, \quad (190)$$

em que:

\mathcal{A} : conjunto de índices a atribuído aos cenários da árvore de cenários a serem visitados na PDDE,

$fr(a, t)$: função que retorna o índice r da realização no estágio t associado à a .

Os na cenários a serem visitados na PDDE podem ser definidos no início da execução a partir do sorteio de $r \in \mathcal{R}_t$ em $t=2, \dots, nt$. A execução da PDDE é feita de maneira semelhante à PDD, observando que os cenários visitados a são utilizados nas associações dos problemas primais com $r=fr(a, t)$ e $k=fk(a, z)$. Nesse caso, o número de aproximações por estágio calculado por iteração é igual à na .

Ao se calcular inúmeras aproximações visitando sempre os mesmos cenários ao longo das iterações, as políticas de operação podem

ser ótimas para um determinado problema associado a uma subárvore da representação estocástica original. Contudo, do ponto de vista do modelo completo de médio prazo, essas políticas podem ser consideradas de péssima qualidade, uma vez que somente uma pequena porção da representação das variáveis aleatórias é levada em conta. Desse modo, conforme o proposto por Pereira e Pinto (1991), na PDDE as realizações que compõem o conjunto de cenários visitados \mathcal{A} são reamostradas no início de cada recursão progressiva. Assim, a política obtida é muito mais representativa quanto ao processo estocástico original.

Como na PDDE uma parcela dos cenários da árvore original é visitada em cada recursão progressiva, o limite superior calculado iterativamente com os cenários $a \in \mathcal{A}$ não corresponde ao limite superior do modelo completo de médio prazo como (187). Isso implica que não se pode atestar a otimalidade da política encontrada com a comparação direta dos valores de $z_{f_{LB1}}$ e $z_{f_{UB1}}$ na PDDE. Nesse contexto, salienta-se que políticas ótimas dificilmente são encontradas com a PDDE, uma vez que tamanho do modelo multiestágio estocástico associado é imensurável. Assim, o grande desafio é parar o processo da PDDE de maneira a se garantir boas aproximações das FCFs. Embora algumas alternativas quanto ao critério de parada da PDDE possam ser encontradas em Pereira e Pinto (1991), Philpott e Guan (2008), Homem-de-Mello, de Matos e Finardi (2011), não há um consenso geral sobre uma maneira de se atestar o quão próximo as políticas estão do valor ótimo (SHAPIRO, 2011). Assim, é muito comum que o critério de parada de algoritmos da PDDE seja baseado no número de aproximações calculadas e/ou no número de iterações do processo iterativo designado (LARROYD, 2012).

Conforme o apresentado nesta seção e na anterior, procedimentos básicos para a utilização da PDD com recursões no cálculo de políticas ótimas em modelos completos e da PDDE no cálculo de políticas subótimas em modelos de grandes proporções do PMPO são discutidos. Algoritmos específicos para a aplicação da PDD e PDDE podem ser desenvolvidos de modo que se otimize o tempo computacional e/ou se calcule melhores aproximações a cada recursão regressiva. Nesse contexto, vale citar o trabalho de de Matos, Philpott e Finardi (2012), o qual apresenta variações do algoritmo da PDDE na obtenção de políticas de operação de médio prazo.

Por fim, salienta-se que a PDD e PDDE descritas nesta seção se enquadram em uma classe de algoritmos de PE para a resolução de problemas de otimização com incertezas. Vale notar que todas as condições e aproximações adotadas na formulação do modelo do PMPO

fazem parte dos critérios generalizados já estabelecidos para a PE e, particularmente nesse caso, para a PE multiestágio. Nos trabalhos de Birge (1997); Kleywegt, Shapiro e Homem-de-Mello (2002), Shapiro e Philpott (2007), Birge e Louveaux (2011) e Shapiro, Dentcheva e Ruszczyński (2014) podem se encontrar as principais condições e pré-requisitos para uma abordagem mais generalizada de problemas de PE multiestágio.

4. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Os resultados obtidos com a utilização da PDDE na solução do modelo do PMPO desenvolvido nesse trabalho são apresentados neste capítulo. Conforme observado nos capítulos anteriores, o número de variáveis e restrições dos problemas de PL a serem resolvidos na PDDE podem influenciar significativamente no montante de recursos computacionais requisitado pelo algoritmo. Consequentemente na Seção 4.1 os principais parâmetros e componentes do SIN presentes na base de dados utilizada no modelo do PMPO deste trabalho são apresentados. Além disso, é feita uma discussão acerca do número de variáveis e restrições dos problemas de PL do modelo utilizado.

Ainda, independentemente da dimensão dos problemas de PL, o modelo multiestágio estocástico associado ao PMPO é classificado como de grande dimensão. O tempo computacional cresce com o número de estágios do horizonte de planejamento e o número de realizações por estágio das variáveis aleatórias. O tamanho do horizonte de planejamento geralmente é definido de acordo com escopo do PMPO, contudo, o número de realizações por estágio geralmente é arbitrado com um valor que provenha uma representatividade estatística adequada ao modelo e seja compatível com o tempo esperado para a execução da PDDE. Para saber se o número de realizações por estágio é adequado ao modelo do PMPO é necessário avaliar a qualidade da solução, nesse caso as aproximações das FCFs, que é calculada na PDDE. Na Seção 4.2 a qualidade da FCF obtida na solução do modelo do PMPO com diferentes números de realizações por estágio é avaliada através de estimativas da brecha de otimalidade do problema original.

Uma vez que o número de realizações das variáveis aleatórias pode ser definido com base em um critério robusto, como a estimativa da brecha de otimalidade do problema original, na Seção 4.3 uma estratégia para a melhoria da performance computacional da PDDE é avaliada. A estratégia em questão é denominada neste trabalho como realizações *proxy*, a qual estabelece que apenas uma parcela dos problemas primais de cada estágio pode ser resolvida para o cálculo das aproximações das FCFs.

Por fim, o ponto alto deste capítulo é a comparação dos resultados da simulação de médio prazo da operação do SIN dada a solução do modelo proposto, caracterizado pela representação das hidrelétricas, com a solução de um modelo de REEs. Os resultados foram obtidos com uma simulação de Horizonte Rolante (HR) e são apresentados na Seção 4.4.

4.1. BASE DE DADOS DO SIN E MODELOS DO PMPO

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo para o PMPO utilizando a PDDE como estratégia de solução que represente as decisões operativas das hidrelétricas do SIN. Os dados necessários para a definição dos parâmetros e componentes do SIN no PMPO, discutidos no Capítulo 2, foram obtidos através dos arquivos de entrada do modelo NEWAVE. Especificamente, utilizou-se o *deck* de arquivos para a reprodução dos preços da CCEE do mês de janeiro de 2015 (CCEE, 2015).

Embora alguns aspectos gerais do SIN foram apresentados ao longo dos capítulos anteriores, valem-se apresentar os dados principais contidos no *deck* utilizado. Ao todo 152 hidrelétricas são consideradas no PMPO, em que 5 são reservatórios sem produção elétrica. Além disso, 10 usinas iniciam a operação após o estágio inicial, janeiro de 2015. Quanto às termelétricas, 144 unidades são consideradas no PMPO das quais 12 iniciam a operação após o estágio inicial. As demais fontes e empreendimentos, denominados de usinas não simuladas, são representadas como uma demanda negativa nos subsistemas, em MW, com variação mensal.

Cinco subsistemas são considerados no PMPO: S, SE/CO, NE, N (Figura 9) e Imperatriz (nó fictício). As conexões dos subsistemas por intercâmbios, importador e exportador, são dadas por: $S \leftrightarrow SE/CO$, $SE/CO \leftrightarrow NE$, $SE/CO \leftrightarrow Imperatriz$, $NE \leftrightarrow Imperatriz$ e $N \leftrightarrow Imperatriz$. Os valores mínimos e máximos dos intercâmbios possuem variação mensal.

Os submercados de energia possuem 4 patamares constantes de déficit definidos pela redução consecutiva da demanda de 5%, 5%, 10% e 80%. Os respectivos custos são 1.024,34 R\$/MW, 3.064,15 R\$/MW, 6.403,31 R\$/MW e 7.276,4 R\$/MW. Além disso, a demanda dos submercados é dada por 3 patamares de carga com variação mensal da duração (%) e potência (MW).

Os aspectos apresentados até então podem ser compartilhados pelo modelo do PMPO de usinas individualizadas ou Reservatórios Individualizados (RIN), objeto deste trabalho, e o modelo a REE de uso oficial no Brasil. Um atributo muito importante do SIN que deve ser definido no modelo a RIN é a configuração das bacias hidráulicas do sistema, conforme Figura 6. O número de bacias determina o número de variáveis aleatórias representadas na árvore de cenários e o número de variáveis de estado nas FCFs. Na Tabela 1 os principais dados acerca dos modelos RIN e REE utilizados podem ser observados.

Tabela 1 – Parâmetros dos Modelos Utilizados.

Parâmetro	RIN		REE	
	Valor	Observação	Valor	Observação
Variáveis Aleatórias	21	Por Bacia Hidrográfica	4	Por REE (Subsistema)
Variáveis de Estado	~100	Por Reservatório Reg. + Afluências Passadas	~10	Por REE + ENAs Passadas
Variáveis de Decisão no PL	~2.300	Varia Conforme Número de Usinas em Operação em t	501	
Restrições no PL*	~800		16	

* Sem aproximações da FCF.

Fonte: do autor.

Basicamente os parâmetros da PDDE adotados nos modelos seguem as premissas do NEWAVE. O número de cenários visitados na PDDE por iteração é igual a 200. No caso do modelo a REE o número de realizações por estágio é igual a 20 e o número de estágios igual a 120. No modelo a RIN o número de estágios é igual a 60 e o número de realizações por estágio igual a 200, sendo esse valor obtido a partir da avaliação da qualidade da solução, Seção 4.2. Em ambos os casos o limite máximo de iterações da PDDE foi de 40 iterações e um limite prático de tempo de execução foi adotado conforme será discutido na Seção 4.4.

O modelo do PMPO a RIN foi implementado em C++ e compilado para rodar em Windows® 64bit. O solver de PL utilizado foi o Gurobi® na versão 6.5. Além disso, a plataforma MPICH2® foi utilizada para paralelizar a execução do modelo. O modelo a REE utilizado nas comparações da Seção 4.4 é o Plan4LTHS®, o qual é um produto comercial e foi desenvolvido com base no trabalho de de Matos (2012) para ser uma alternativa ao NEWAVE. O Plan4LTHS também é executado em Windows® 64bit e utiliza ambos Gurobi® 6.5 e MPICH2®. Ambos os modelos foram implementados com seleção de cortes (DE MATOS; PHILPOTT; FINARDI, 2012).

Todas as execuções dos casos apresentados nas seções seguintes foram procedidas em um servidor dedicado com dois processadores Intel® Xeon® X5690, de 12 núcleos físicos e 24 lógicos, e 32GB de memória RAM. Devido às características de implementação dos modelos, são executados 20 processos em paralelo do modelo a RIN e 10 processos a REE. A diferença no número de processos ocorre pelas diferentes implementações no gerenciamento de memória de cada modelo.

4.2. AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DA SOLUÇÃO

Segundo o apresentado na Seção 2.2.5, um número adequado de realizações por estágio das variáveis aleatórias deve ser escolhido para que a árvore de cenários utilizada possua a representatividade do processo estocástico original das afluições, não discreto. Conforme se pode observar em 3.4, o cálculo das aproximações das FCFs na PDDE implica que os nr_t problemas primais de cada estágio sejam resolvidos. Logo se percebe que o número de realizações atribuído à árvore de cenários impacta diretamente na qualidade da representação do problema e no tempo requerido pelo algoritmo da PDDE na recursão regressiva, maior o valor de nr_t mais tempo se passa resolvendo LPs por estágio.

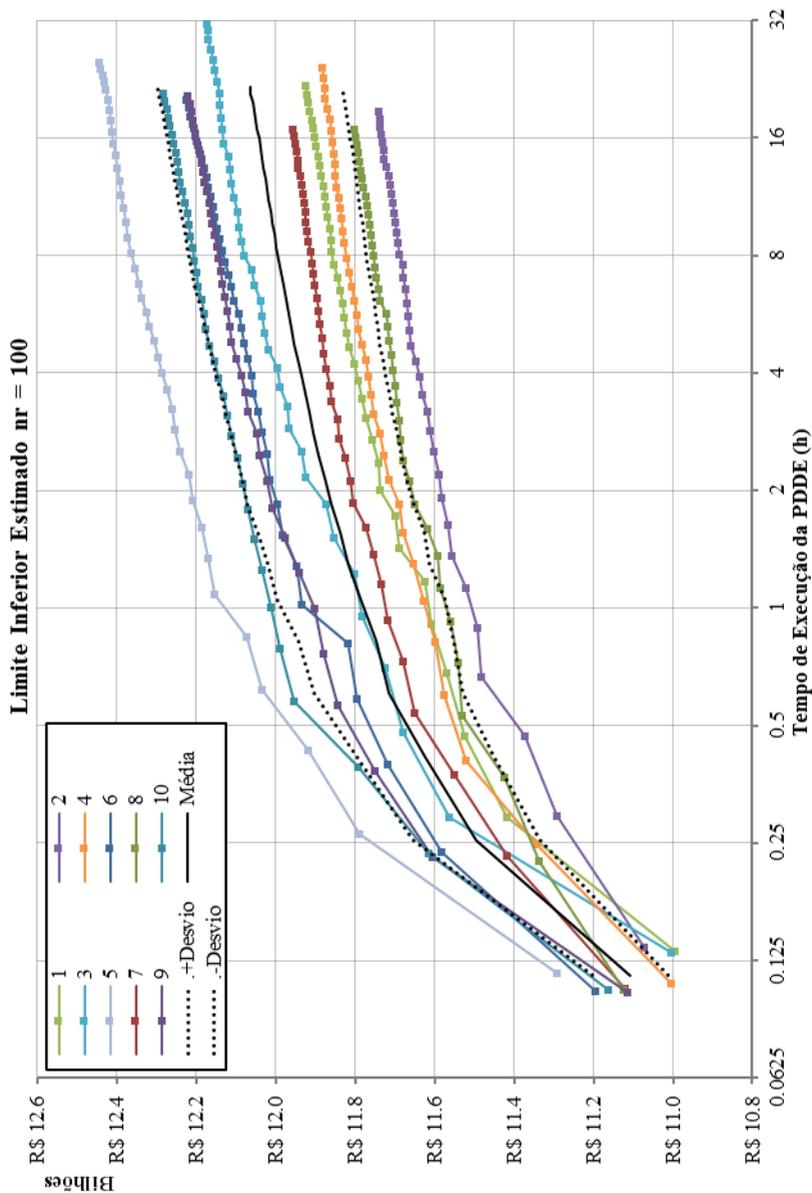
A avaliação da qualidade da solução da PDDE é utilizada nesse trabalho para mensurar o custo-benefício do aumento do número de realizações por estágio no modelo do PMPO por RINs. Desse modo, o valor de nr_t é incrementado e a relação entre qualidade da solução e tempo de execução é avaliada.

Basicamente para se avaliar a qualidade da solução é necessário estimar a brecha de otimalidade entre solução da PDDE, obtida com árvore de cenários de nr_t realizações por estágio, com a solução do problema original de processo estocástico contínuo. Conforme discutido em de Matos (2012), um intervalo de confiança unilateral para a brecha de otimalidade pode ser calculado a partir da distribuição *t-student* e estimativas de limites inferior e superior válidos do problema original.

O limite inferior do problema original foi estimado a partir da média e desvio padrão dos custos totais de operação z_t obtidos em 10 execuções da PDDE com diferentes árvores de cenários. Embora haja alternativas menos dispendiosas para uma estimativa do limite inferior, (BAYRAKSAN; MORTON, 2009), o modo de cálculo utilizado nesse trabalho é o mais confiável para estimativa de brecha de otimalidade. Na Figura 19 os valores de z_t obtidos com as 10 execuções da PDDE são exibidos em termos do tempo de execução da PDDE, para cada iteração procedida. As 10 árvores foram geradas com 100 realizações por estágio.

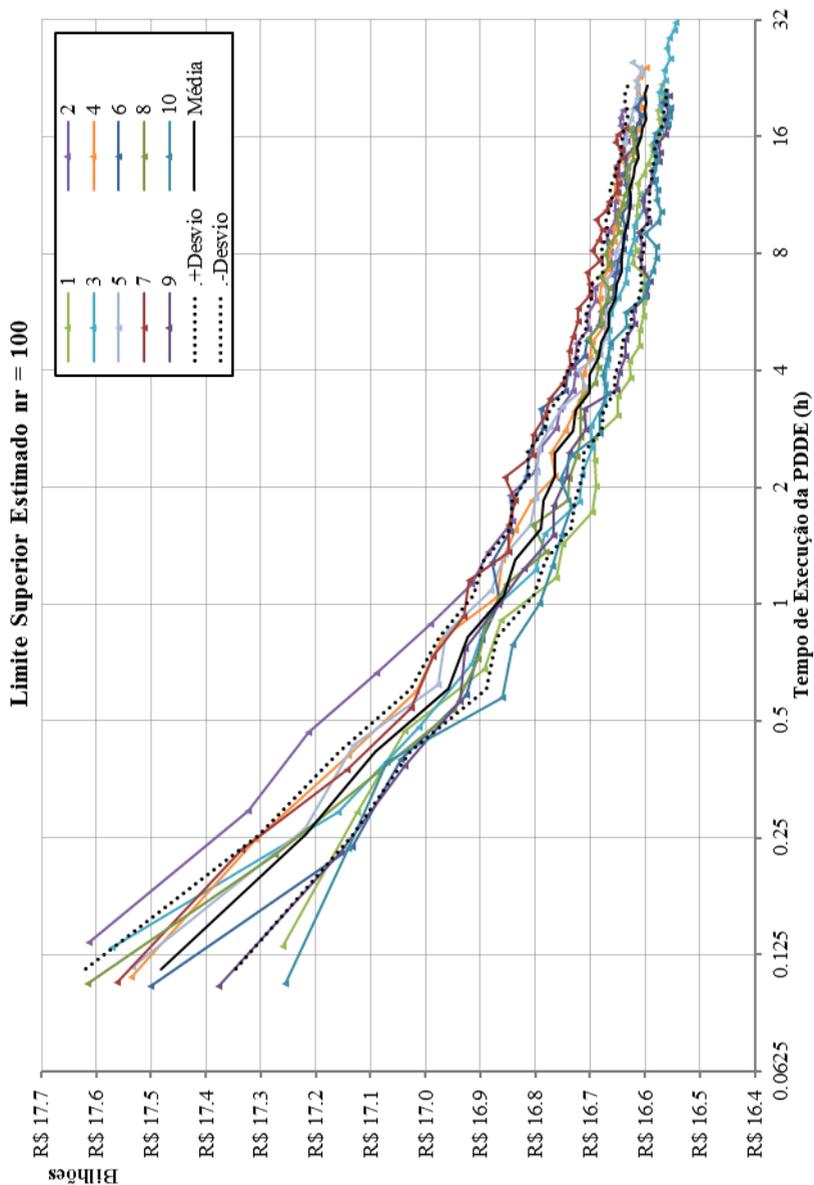
No caso do limite superior, o mesmo foi estimado com a média e desvio padrão de 10 valores de z_t obtidos agora com a simulação da operação de 2.500 cenários de afluições *out-of-sample* nas FCFs resultantes das execuções da PDDE do limite inferior. Basicamente a simulação da operação é uma recursão progressiva da PDDE nos cenários desejados, em que as FCFs foram previamente calculadas. Na Figura 20 os valores de z_t simulados para cada iteração da PDDE podem ser vistos.

Figura 19 – Limite Inferior Estimado com Custos Totais de 10 Árvores.



Fonte: do Autor.

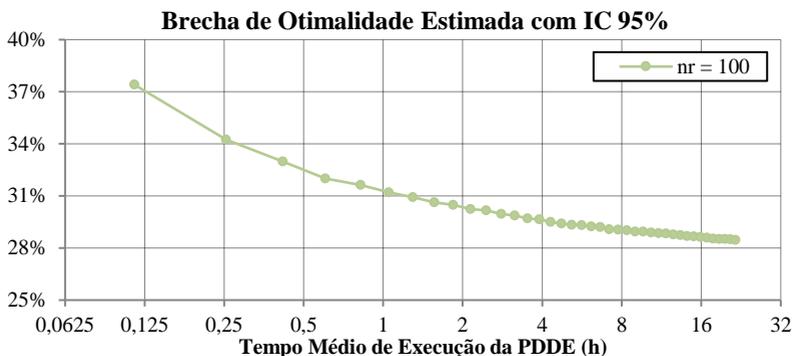
Figura 20 – Limite Superior Estimado com Custo Totais de 10 Árvores.



Fonte: do Autor.

Com os limites inferior e superior estimados a partir de 10 árvores de cenários com nr_i igual à 100 em todos os estágios, o intervalo de confiança de 95% da brecha de otimalidade é calculado segundo de Matos (DE MATOS, 2012) e apresentado na Figura 21.

Figura 21 – Brecha de Otimalidade com 100 realizações por estágio.



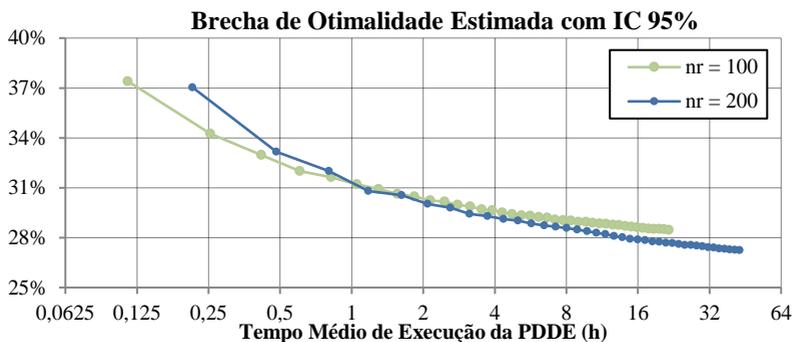
Fonte: do Autor.

Quanto menor o intervalo de confiança da brecha de otimalidade melhor a solução do modelo. Nos casos avaliados, com 100 realizações na árvore, uma brecha de 28,46% foi obtida com 40 iterações da PDDE sendo que, em média, essas iterações levaram 21,6 horas para serem executadas. Percebe-se também na Figura 21 que quanto mais tempo se gasta na PDDE melhor a solução a ser obtida. Além disso, como o tempo de execução está em base 2 logarítmica, pode-se perceber que uma redução da brecha de otimalidade a ser obtida com uma nova iteração tende a ser computacionalmente mais onerosa que a redução provida pela iteração anterior.

Atentando-se ao fato que dependendo do estudo de médio prazo há limitação de tempo para a execução do modelo, mais que 10 horas pode ser inviável, nesse trabalho, dadas as especificações da seção anterior, o intervalo factível de tempo a ser aceito para a execução dos modelos é de 1 a 5 horas. Assim, buscar-se-á um número de realizações para a árvore que apresente a melhor estimativa de brecha para o intervalo de tempo especificado.

De maneira idêntica ao procedido com 100 realizações, o intervalo de confiança obtido com 200 realizações é exibido na Figura 22.

Figura 22 – Brecha de Otimalidade com 100 e 200 realizações por estágio.

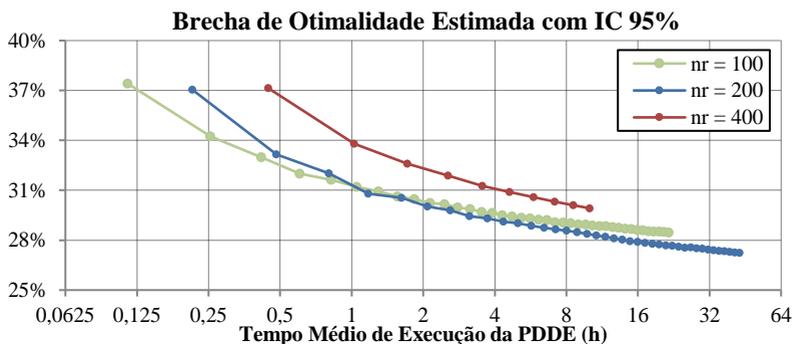


Fonte: do Autor.

Percebe-se que a solução obtida a partir de 1,2h de execução do modelo é sempre melhor com 200 realizações. Também é interessante observar que o tempo médio de execução de 40 iterações foi de 42,8 horas, praticamente o dobro do obtido com 100 realizações. Isso implica que, a partir de 1,2h de execução do modelo, uma solução obtida com um número menor de iterações e $nr_i = 200$ pode ser melhor que uma solução com mais iterações e $nr_i = 100$.

Baseando-se nas curvas da Figura 22, optou-se como próximo passo avaliar a solução de $nr_i = 400$ conforme se observa na Figura 23.

Figura 23 – Brecha de Otimalidade com 100, 200 e 400 realizações por estágio.



Fonte: do Autor.

Na avaliação de 400 realizações a execução do modelo foi convenientemente limitada em 10 iterações, uma vez que o tempo de 40 iterações pode chegar a 4 vezes o tempo de execução de $nr_t = 100$. Nesse caso é importante salientar que a utilização de 400 realizações por estágio na árvore indiscutivelmente tende a melhor representar o processo estocástico original no modelo do PMPO. Contudo, percebe-se na Figura 23 que o tempo médio por iteração de $nr_t = 400$ não o torna competitivo para a execução no intervalo de tempo estabelecido.

Por fim, vale comentar acerca do tempo computacional total despendido nos casos exibidos nesta seção. Com as execuções do modelo em 10 árvores diferentes para a obtenção dos z_t e aproximações das FCFs foram requeridas aproximadamente 744 horas de processamento. Além disso, para cada execução anterior, procedeu-se com uma simulação da operação com o conjunto total de aproximações da FCF a cada iteração. Todo o processo de simulação levou em torno de 500 horas de processamento. Ao todo, 1.244 horas ou 52 dias de processamento foram utilizadas para determinar que 200 realizações por estágio é uma escolha razoável para o modelo a RINs deste trabalho.

4.3. PDDE COM REALIZAÇÕES PROXY

No planejamento de médio prazo as aproximações da FCF para cada estágio são calculadas a partir da expectância de problemas de otimização associados ao conjunto de realizações correlacionadas das variáveis aleatórias \mathcal{R} . Ao de observar (142), os problemas primais podem ser generalizadamente escritos para $r=1, \dots, nr$ conforme:

$$\begin{aligned} z_{UB,r}^k &= \underset{\mathbf{x}}{\text{minimizar}} \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x}, \\ &\text{sujeito a:} \\ & -L_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}^k - \mathbf{b}_r = \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{\lambda}_r^k] \\ & -G_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k) \triangleq \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y}^k - \mathbf{d}_r \geq \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{\psi}_r^k] \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}. \end{aligned} \tag{191}$$

Em (191) diferentes valores de realizações de afluência implicam em diferentes valores dos elementos dos vetores \mathbf{b}_r e \mathbf{d}_r , logo percebe-se que os problemas de otimização de $r=1, \dots, nr$ são distintos. O problema mestre que corresponderá às aproximações da FCF é escrito a partir da expectância ou média, uma vez que a mesma probabilidade de ocorrência

de $1/nr$ é assumida para todas as realizações, das distintas soluções de (191) conforme:

$$\begin{aligned}
 & \underset{y, z_{LB}}{\text{minimizar}} \quad z_{LB}, \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & z_{LB} + \boldsymbol{\lambda}^{k\top} \mathbf{B} \mathbf{y} + \boldsymbol{\psi}^{k\top} \mathbf{D} \mathbf{y} \geq \\
 & \frac{1}{nr} \cdot \sum_{r=1}^{nr} z_{UB,r}^k + \boldsymbol{\lambda}^{k\top} \mathbf{B} \mathbf{y}^k + \boldsymbol{\psi}^{k\top} \mathbf{D} \mathbf{y}^k, \quad k=1, \dots, nk, \\
 & \underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y} \leq \overline{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{ny},
 \end{aligned} \tag{192}$$

em que:

$$\boldsymbol{\lambda}^k \triangleq \left[\sum_{r=1}^{nr} \frac{\lambda_{1,r}^k}{nr} \quad \sum_{r=1}^{nr} \frac{\lambda_{2,r}^k}{nr} \quad \sum_{r=1}^{nr} \frac{\lambda_{c,r}^k}{nr} \quad \sum_{r=1}^{nr} \frac{\lambda_{nc,r}^k}{nr} \right]^\top, \tag{193}$$

$$\boldsymbol{\psi}^k \triangleq \left[\sum_{r=1}^{nr} \frac{\psi_{1,r}^k}{nr} \quad \sum_{r=1}^{nr} \frac{\psi_{2,r}^k}{nr} \quad \sum_{r=1}^{nr} \frac{\psi_{g,r}^k}{nr} \quad \sum_{r=1}^{nr} \frac{\psi_{ng,r}^k}{nr} \right]^\top, \tag{194}$$

$\lambda_{c,r}^k$: c -ésimo elemento do vetor $\boldsymbol{\lambda}_r^k$,

$\psi_{g,r}^k$: g -ésimo elemento do vetor $\boldsymbol{\psi}_r^k$.

Conforme visto em Philpott e Guan (PHILPOTT; GUAN, 2008), o problema mestre pode ser escrito em termos das soluções duais de (191) e dos vetores \mathbf{b}_r e \mathbf{d}_r conforme:

$$\begin{aligned}
 & \underset{y, z_{LB}}{\text{minimizar}} \quad z_{LB}, \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & z_{LB} + \boldsymbol{\lambda}^{k\top} \mathbf{B} \mathbf{y} + \boldsymbol{\psi}^{k\top} \mathbf{D} \mathbf{y} \geq \frac{1}{nr} \cdot \sum_{r=1}^{nr} (\boldsymbol{\lambda}_r^{k\top} \mathbf{b}_r + \boldsymbol{\psi}_r^{k\top} \mathbf{d}_r), \quad k=1, \dots, nk, \\
 & \underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y} \leq \overline{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{ny},
 \end{aligned} \tag{195}$$

Na formulação do problema mestre (195), para cada aproximação k a ser calculada pelos algoritmos da PDD e PDDE é necessário resolver nr problemas primais na forma de (191). Desse modo, supondo um problema de médio prazo com $nr=200$ realizações de afluências por estágio, ao se utilizar a PDDE para o cálculo de 8.000 aproximações das FCFs é necessário que se execute 1.600.000 vezes o *solver* de PL na

recursão regressiva de um determinado estágio. Supondo um problema com 60 estágios, é necessário executar o *solver* de PL 96.000.000 vezes, ao todo, nas recursões regressivas.

Os *solvers* encontrados atualmente no mercado são considerados bastantes eficientes e rápidos, dadas as grandes dimensões de problemas de PL práticos. Contudo, o total de quase cem milhões de execuções do *solver* implica que necessariamente o algoritmo da PDDE requisitará um tempo considerável para calcular as 8.000 aproximações das FCFs. Isso foi observado inclusive nas execuções da seção anterior.

Por esse motivo a utilização das realizações *proxy* na PDD e PDDE tem por objetivo reduzir o número de execuções do *solver* e o tempo computacional do algoritmo mantendo o mesmo número de realizações de afluições do problema original. Para isso, apenas os problemas primais de certa parcela do total de realizações (realizações *proxy*) são resolvidos via *solver* na recursão regressiva. Assim, as soluções duais obtidas nestes problemas são utilizadas como soluções viáveis para calcular um limitante inferior para os problemas primais associados ao restante das realizações.

Supondo que um conjunto $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$, de dimensão nr' , seja definido como o conjunto das realizações *proxy*, o número de problemas primais a ser resolvido via *solver* para o cálculo de cada k -ésima aproximação da FCF é igual a nr' . Logo, as soluções duais λ_r^k e ψ_r^k obtidas propiciarão aproximações apertadas segundo (157), para os problemas mestres de cada $r \in \mathcal{R}'$. Entretanto, pode-se observar que para calcular uma aproximação da FCF com a expectância dos problemas primais segundo (195), é necessário que as soluções duais dos $nr - nr'$ problemas restantes sejam obtidas. Este é o ponto de maior destaque da estratégia de realizações *proxy*, pois, ao invés de se resolver os demais problemas via *solver*, as soluções duais dos problemas associados à $r \in \mathcal{R}'$ são utilizadas como soluções duais viáveis para os demais problemas de $r \in \{\mathcal{R} - \mathcal{R}'\}$. Assim, a k -ésima aproximação da FCF é calculada segundo (195), porém, resolvendo-se via *solver* apenas nr' problemas primais.

Ao se utilizar as soluções duais λ_r^k e ψ_r^k ótimas de $r \in \mathcal{R}'$ como soluções duais viáveis para $r \in \{\mathcal{R} - \mathcal{R}'\}$, a aproximação calculada será sempre um limitante inferior válido para a FCF. Contudo, é importante observar que a distância entre a aproximação e a FCF pode ser significativamente grande, implicando em uma aproximação de pior qualidade, frouxa, dependendo das soluções duais viáveis utilizadas em (195). Logo o tamanho do conjunto de realizações *proxy* nr' , a forma como este conjunto *proxy* é selecionado e a maneira com que as soluções

duais de $r \in \mathcal{R}'$ são repassadas aos demais problemas, são todos fatores que influenciam diretamente na qualidade da aproximação a ser calculada.

O número de maneiras com que se pode proceder para determinar o tamanho do conjunto \mathcal{R}' é ilimitado no contexto da PDD e PDDE. Isso porque a utilização da solução dual proxy sempre garantirá aproximações inferiores para as FCFs, independentemente do valor de nr' . Assim, nr' pode ser atribuído com um único valor para todos os estágios e se manter constante até o final da execução dos algoritmos ou pode ser atribuído com valores diferentes por estágio, diferentes inclusive entre o mesmo estágio em diferentes cenários visitados, e variando ao longo da execução do algoritmo. É importante salientar que, quanto menor for o tamanho do conjunto *proxy*, a aproximação tenderá à uma pior qualidade e o cálculo à maior velocidade. Nesse trabalho o tamanho do conjunto *proxy* é avaliado com valores iguais para todos os estágios, tanto esses valores permanecendo constantes quanto incrementando ao longo da execução da PDDE. Além disso, uma sensibilidade com diferentes valores de nr' também é avaliada no modelo.

Assim como o tamanho do conjunto \mathcal{R}' não implica em aproximação inválidas nos algoritmos da PDD e PDDE, a composição deste conjunto também não compromete a viabilidade das aproximações calculadas pelos algoritmos. Neste caso, é interessante observar que estratégias sofisticadas para a seleção de elementos $r \in \mathcal{R}'$ significativos ao processo estocástico das afluências podem ser utilizadas para que uma boa qualidade das aproximações da FCF seja garantida. Contudo, estas estratégias devem ser estatisticamente bem elaboradas para não enviesar as aproximações da FCF em determinadas condições de afluência. Justamente para evitar que as aproximações da FCF sejam enviesadas à uma parcela não significativa dos cenários do processo estocástico das afluências, no modelo desenvolvido nesse trabalho a seleção dos elementos do conjunto *proxy* é feita de maneira completamente aleatória. Com isso, um sorteio aleatório é utilizado para a seleção de elementos $r \in \mathcal{R}'$ cada vez que uma aproximação é calculada na recursão regressiva dos algoritmos da PDD e PDDE.

Por fim, o critério de seleção da solução dual *proxy* a ser adotado pelo modelo é o ponto restante da estratégia a ser discutido. Ao se assumir que as soluções λ_r^k e ψ_r^k dos problemas primais de $r \in \mathcal{R}'$, obtidas com o *solver* de PL, são repassadas como solução dual viável dos problemas de $r \in \{\mathcal{R}-\mathcal{R}'\}$, torna-se necessário estabelecer um critério para determinar quais soluções serão repassadas para cada $r \in \{\mathcal{R}-\mathcal{R}'\}$. É importante

salientar que a implementação de tal critério deve levar em conta o contraponto entre a qualidade da aproximação da FCF e o tempo incorrido na seleção de uma solução dual entre as nr' soluções disponíveis.

Dentre diversos critérios factíveis de implementação para a seleção da solução dual *proxy*, nesse trabalho se optou por utilizar um critério de seleção que buscasse encontrar a solução dual que provesse a aproximação de melhor qualidade em relação à todas as outras possíveis aproximações provenientes das demais soluções. Nesse contexto, nos próximos parágrafos é discutido acerca de como se pode garantir que a solução encontrada efetivamente resulte em uma aproximação de melhor qualidade perante as demais soluções.

Assim como (195) o problema mestre associado à uma única realização não *proxy* $r \in \{\mathcal{R}-\mathcal{R}'\}$ dado um estado $\mathbf{y} = \mathbf{y}^k \mid \underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y}^k \leq \overline{\mathbf{y}}$ pode ser escrito em termos da solução dual como:

$$\begin{aligned} & \underset{z_{LB,r}}{\text{minimizar}} \quad z_{LB,r}, \\ & \text{sujeito a:} \\ & z_{LB,r} \geq \boldsymbol{\lambda}_r^{k\top} (\mathbf{b}_r - \mathbf{B}\mathbf{y}^k) + \boldsymbol{\psi}_r^{k\top} (\mathbf{d}_r - \mathbf{D}\mathbf{y}^k). \end{aligned} \tag{196}$$

A partir de (196) se pode afirmar que a aproximação que melhor representa a FCF original de $r \in \{\mathcal{R}-\mathcal{R}'\}$ no estado \mathbf{y}^k é a aproximação de maior valor no lado direito da desigualdade que, na estratégia tradicional, seria a aproximação calculada com $\boldsymbol{\lambda}_r^k$ e $\boldsymbol{\psi}_r^k$ do problema primal resolvido via *solver* em \mathbf{y}^k . Como $\boldsymbol{\lambda}_r^k$ e $\boldsymbol{\psi}_r^k$ viáveis podem ser obtidos com a resolução de qualquer problema primal de realização *proxy*, logo a aproximação de melhor qualidade de $r \in \{\mathcal{R}-\mathcal{R}'\}$ será obtida com a solução dual de $r \in \mathcal{R}'$ que propiciará o maior valor no lado direito da desigualdade de (196). Isso implica que para determinar a melhor aproximação de cada $r \in \{\mathcal{R}-\mathcal{R}'\}$, nr' soluções duais deverão ser testadas na expressão do lado direito da desigualdade de (196).

Mais uma vez é importante salientar que o critério adotado garante o cálculo da melhor aproximação dadas as nr' soluções duais disponíveis, contudo, pode requerer um considerável tempo computacional para tal. Supondo 200 realizações por estágio, das quais 20 são realizações *proxy*, para o cálculo de uma aproximação da FCF será necessário resolver 20 problemas primais via *solver* e calcular o lado direito da desigualdade $180 \times 20 = 3.600$ vezes. Nesse caso, a utilização de realizações *proxy* só acarretaria em vantagem nos algoritmos da PDD e PDDE se o tempo de resolução via *solver* de 200 PLs (estratégia tradicional) fosse

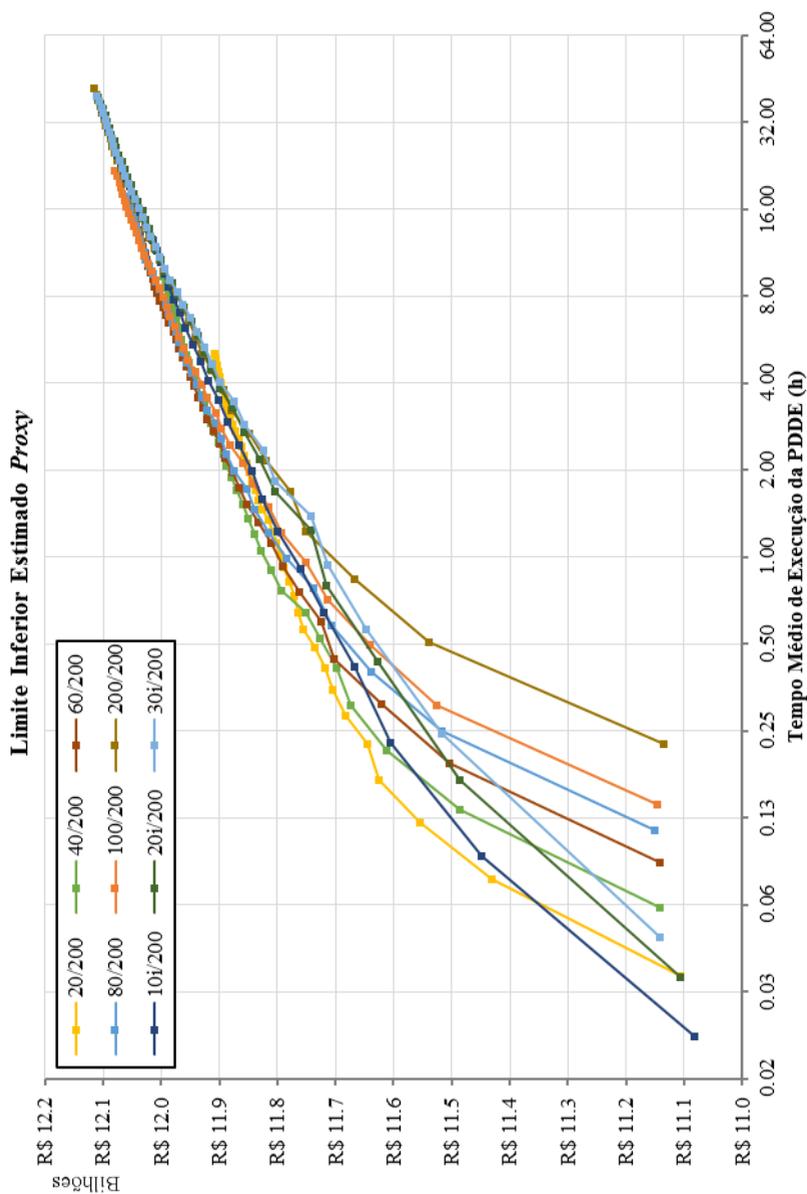
significativamente maior que o tempo para resolver 20 PLs mais o tempo para o cálculo de 3.600 vezes o lado direito da desigualdade.

Os casos avaliados com a utilização das realizações *proxy* no modelo a RINs foram os seguintes:

- Caso de referência: 200/200. No caso de referência o modelo é executado de maneira tradicional, conforme as execuções da seção anterior. Resolvem-se 200 problemas primais de 200 realizações por estágio;
- Casos com conjunto *proxy* de tamanho fixo: 20/200, 40/200, 60/200, 80/200 e 100/200. Nesses casos, o tamanho do conjunto de realizações *proxy* é constante ao longo da execução do modelo. Por exemplo, no caso 20/200, o tamanho fixo do conjunto *proxy* é igual a 20, sendo o mesmo obtido de um total de 200 realizações por estágio;
- Casos com conjunto *proxy* de tamanho variável: 10i/200, 20i/200 e 30i/200. Nesses casos, o tamanho do conjunto de realizações *proxy* é incrementado ao longo da execução do modelo. Por exemplo, no caso 10i/200, o tamanho do conjunto *proxy* inicia igual à 10 e passa a ser incrementado por 10 a cada nova amostragem de cenários na PDDE. O conjunto para de ser incrementado quando o seu tamanho é igual às 200 realizações por estágio da árvore de cenários.

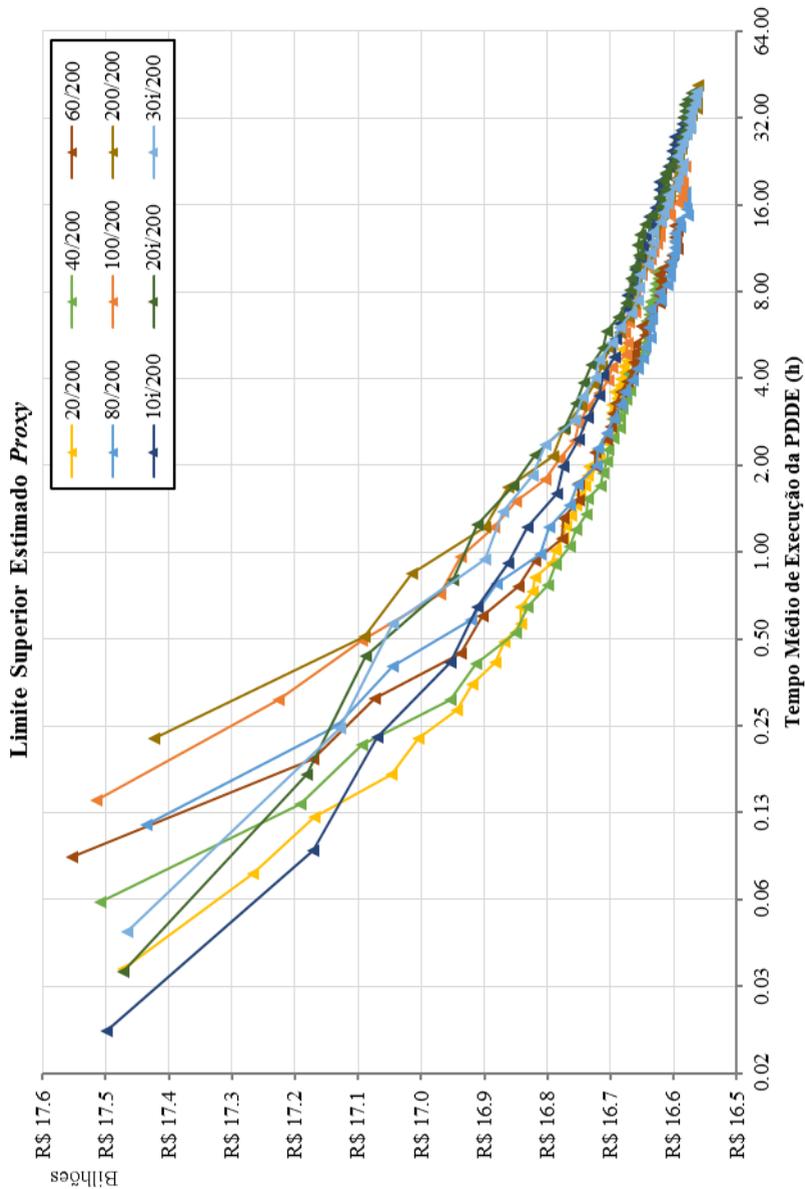
Cada um dos 9 casos foi avaliado em 5 árvores de cenários distintas. Isso significa que ao todo o modelo foi executado 45 vezes para calcular 8.000 aproximações nas respectivas FCFs de médio prazo.

Para identificar os melhores casos executados, a avaliação da qualidade da solução também é procedida para os casos com realizações *proxy*. Assim, na Figura 24 podem ser visualizados os limites inferiores do problema original estimados como a média dos 5 valores de z_t obtidos com a PDDE em cada caso. Na Figura 25 são apresentados os limites superiores estimados e na Figura 26 as brechas de otimalidade estimadas com intervalo de confiança de 95%. De maneira semelhante ao apresentado nos gráficos da seção anterior, todos os valores foram estimados para cada uma das 40 iterações da PDDE e plotados em função do tempo total médio de execução do algoritmo.

Figura 24 – Limites Inferiores Estimados com 5 Árvores nos Casos *Proxy*.

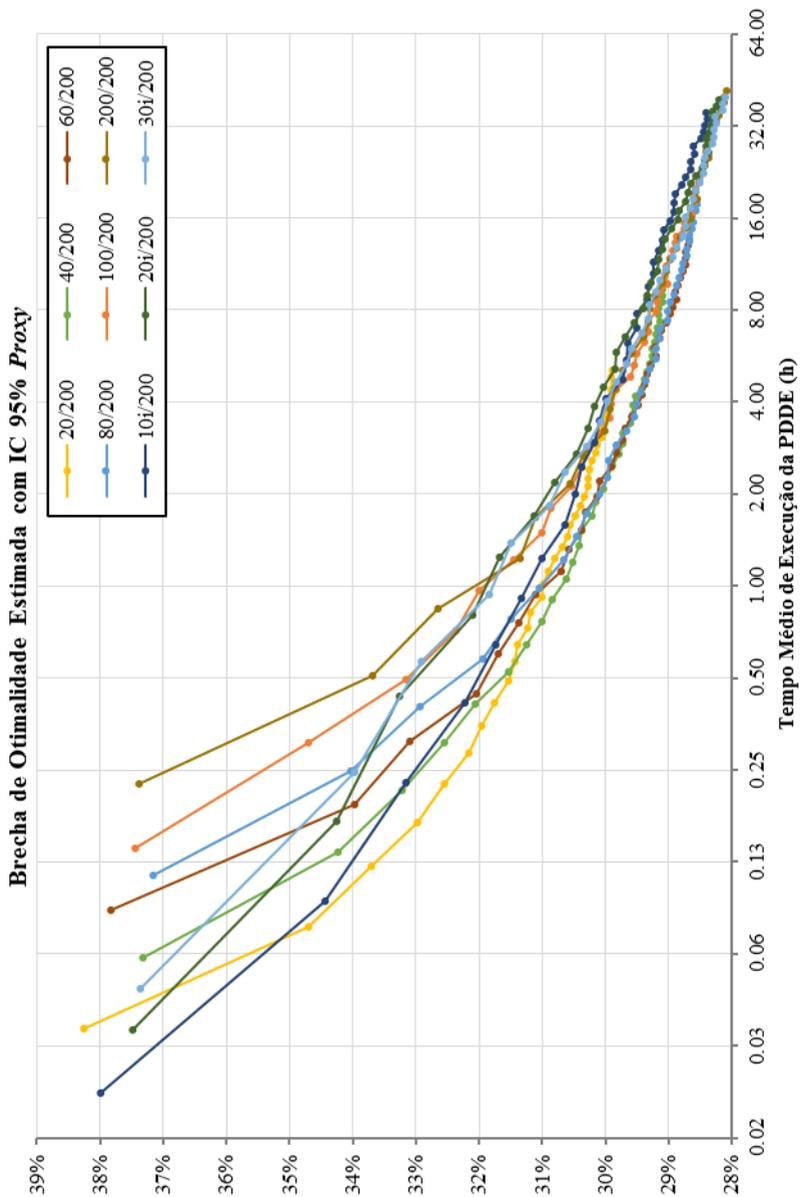
Fonte: do Autor.

Figura 25 – Limites Superiores Estimados com 5 Árvores nos Casos *Proxy*.



Fonte: do Autor.

Figura 26 – Brecha de Otimalidade Estimada com IC 95% nos Casos *Proxy*.



Fonte: do Autor.

Conforme se pode observar na Figura 26, após o primeiro conjunto de 200 aproximações calculadas em todos os casos, a brecha de otimalidade estimada fica em torno de 37-38%. Como menor a brecha de otimalidade melhor a qualidade da FCF, em todo o período médio de execução da PDDE se pode apontar os resultados de 20/200, 40/200 e 80/200 como predominantes na região inferior do gráfico da Figura 26.

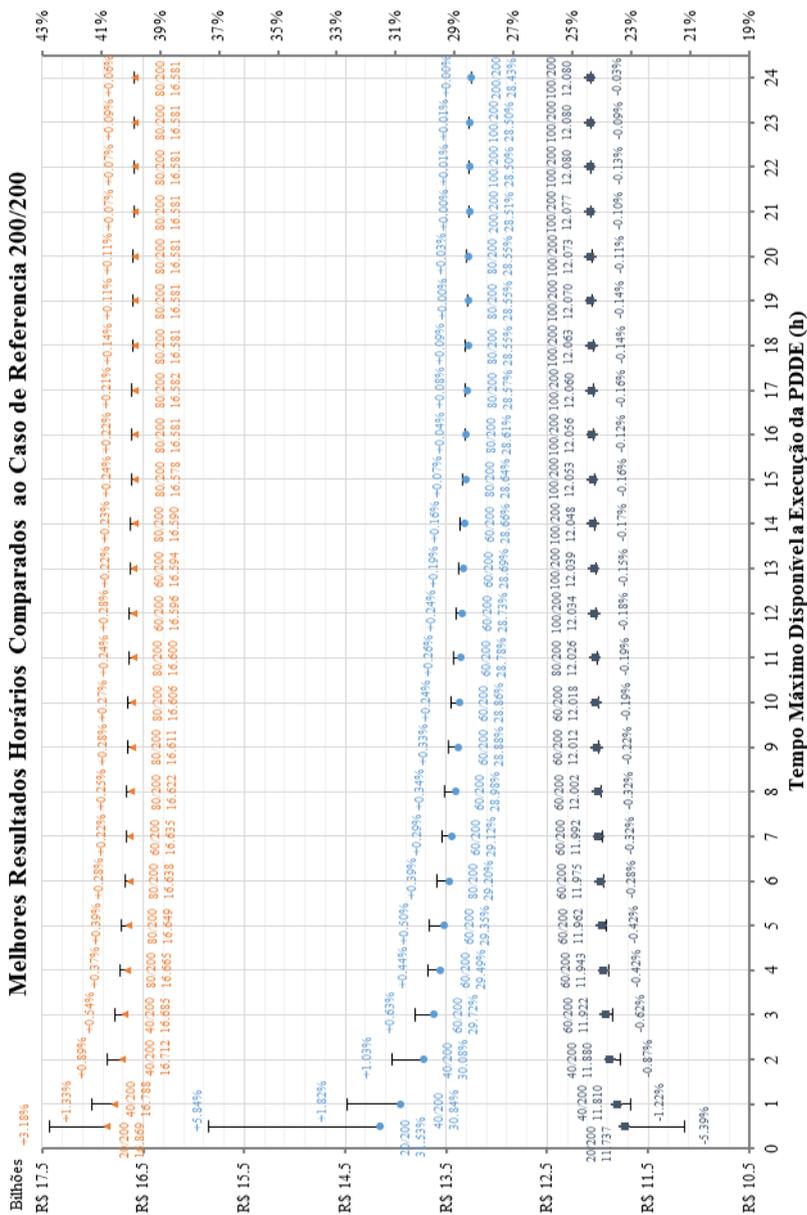
O caso de referência, 200/200, só se mostrou vantajoso em relação aos demais após 41,73 horas de execução média da PDDE, com uma brecha de otimalidade estimada de 28,09%. Em comparação aos resultados da seção anterior se percebe uma sutil diferença em termos da brecha estimada do caso 200/200 devido à redução do número de árvores avaliadas na estimativa. A redução de 10 para 5 árvores foi necessária para viabilizar a execução de todos os casos desejados de realizações *proxy*, contudo não deve interferir nas avaliações majoritárias desta seção.

Também é importante ressaltar que para a análise da performance dos diferentes casos avaliados é extremamente relevante mensurar o ganho de qualidade de solução perante o tempo de execução incorrido. Isso porque, além das complicações que execuções prolongadas do modelo do PMPO podem incorrer na coordenação das decisões do planejamento hidrotérmico, é comprovado que algoritmos da classe da PDDE são de convergência lenta para problemas de grande porte. Isso significa que uma solução razoável para o problema pode ser encontrada em um tempo computacional exacerbadamente menor que uma solução quase ótima.

Assim como adiantado na seção anterior, toda a análise dos resultados dos casos com realizações *proxy* será feita para intervalos específicos de tempo de execução da PDDE. Com isso, o usuário do modelo pode determinar um tempo alvo de disponibilidade para a execução do modelo, por exemplo 1 hora, e observar quais estratégias são melhores para o respectivo tempo.

Mais uma vez vale atentar que o intervalo de tempo alvo desse trabalho para a execução do modelo é de 1 a 5 horas. Contudo, para ilustrar o comportamento dos casos ao longo do tempo total de execução do modelo observado nas 40 iterações, na Figura 27 os melhores resultados estimados de limite inferior, limite superior e brecha de otimalidade dentre todos os casos avaliados são apresentados supondo uma disponibilidade de execução da PDDE de no máximo meia hora, uma hora, duas horas, três horas, ..., vinte e três horas e, finalmente, vinte e quatro horas.

Figura 27 – Melhores Resultados dos Casos Avaliados no Tempo Disponível.



Fonte: do Autor.

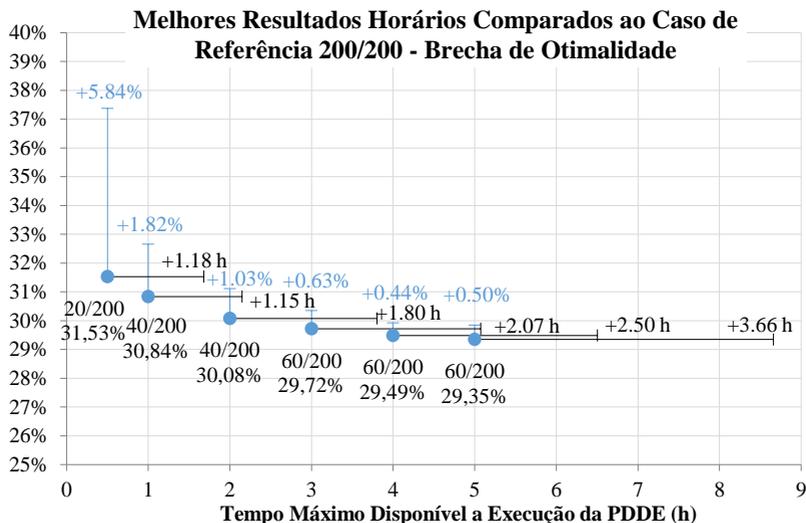
Dada uma disponibilidade máxima de execução da PDDE de 20 horas, pode-se observar na Figura 27 que todos os resultados dos casos com realização *proxy* foram melhores que os resultados providos pelo caso de referência, 200/200, tanto ao se analisar os valores estimados de limite inferior, limite superior e brecha de otimalidade do problema original. Basicamente isso significa que ao se executar o modelo com qualquer configuração das realizações *proxy* por até 20 horas, tende-se a se obter melhores decisões de médio prazo para o despacho hidrotérmico que quando utilizado a estratégia de solução tradicional da PDDE. Consequentemente, o custo de operação do sistema hidrotérmico obtido com decisões da estratégia *proxy* tenderá a ser mais barato que o custo obtido com a estratégia tradicional. Em termos práticos, para execuções de meia hora do modelo, o custo obtido com o uso de realizações *proxy* na sequência de tomada de decisões do PMPO tende de ser até 5,84% mais barato que o obtido com a PDDE tradicional.

Além disso, é interessante observar que a medida que o tempo de disponibilidade de execução do modelo aumenta, a diferença entre a brecha de otimalidade dos melhores casos *proxy* e do caso de referência diminuem consideravelmente. Contudo, vale salientar que uma diferença mínima, de 0,01% por exemplo, pode significar milhões de reais a menos no custo de operação do sistema.

Conforme já mencionado o método da PDDE é caracterizado pela convergência lenta em problemas de grande porte. Basicamente, isso significa que a partir de um determinado período da execução do algoritmo um pequeno incremento na qualidade das aproximações requisita um enorme tempo computacional. Nesse contexto, destaca-se que embora o ganho em termos do percentual da brecha de otimalidade diminua com o aumento do tempo de execução, conforme observado na Figura 27, o ganho em termos de tempo computacional cresce consideravelmente ao se utilizar a estratégia *proxy*.

Assim, na Figura 28 os melhores resultados em termos da brecha de otimalidade são exibidos em comparação com os resultados do caso de referência para o tempo de execução do modelo de no máximo cinco horas, período alvo deste trabalho. Ainda na Figura 28 são plotados os tempos computacionais necessários para que com a execução tradicional se obtenham resultados semelhantes ao da realização *proxy*. Estas diferenças de tempo podem ser observadas nas linhas horizontais de cor preta no gráfico.

Figura 28 – Melhores Resultados dos Casos Avaliados em 5 Horas Disponíveis.



Fonte: do Autor.

Observando a brecha de otimalidade do melhor caso *proxy* em comparação com a referência para a menor disponibilidade de tempo de execução do modelo, meia hora, percebe-se que uma execução do caso de referência para uma brecha menor que 31,53% leva tempo de uma hora e quarenta minutos para ser calculada. Isso significa que seria necessário executar o modelo tradicional por mais de 3 vezes o tempo do modelo com *proxy* 20/200 para a obtenção do mesmo resultado. Uma análise semelhante pode ser feita para o resultado com maior disponibilidade de tempo de execução, 5 horas, em que para alcançar a brecha do caso *proxy* 60/200 o modelo tradicional deve ser executado por quase 9 horas.

Um outro caso de realizações *proxy* foi executado, denominado de melhores/200, o qual consistiu na progressão do tamanho do conjunto de realizações *proxy* de acordo com o tamanho dos conjuntos dos melhores resultados observados ao longo do tempo de execução. Contudo, da mesma maneira que ocorreu com os casos 10i, 20i e 30i, a progressão do tamanho do conjunto *proxy* não se mostrou uma abordagem competitiva em relação às atribuições de um número constante para o tamanho do conjunto *proxy*. Por este motivo, os resultados do caso melhores/200 não são exibidos.

Ademais, vale mencionar o tempo computacional total despendido com a avaliação das realizações *proxy* desta seção. Ao todo, contabilizando execuções da PDDE mais as simulações *out-of-sample* das FCFs, aproximadamente 2.000 horas ou ~83 dias de tempo computacional foram utilizados para determinar que o modelo do PMPO proposto neste trabalho pode ter seu desempenho significativamente melhorado através do uso das realizações *proxy*.

4.4. SIMULAÇÕES DE HORIZONTE ROLANTE

Nesta seção o desempenho do modelo a RIN desenvolvido nesse trabalho é comparado ao desempenho do modelo a REE³ na operação de médio prazo do SIN. A comparação de modelos concebidos para a mesma finalidade, porém, formulados com diferentes perspectivas pode não ser tarefa trivial. De maneira a tentar estabelecer condições justas para a comparação dos modelos, a simulação de Horizonte Rolante (HR) da operação hidrelétrica é utilizada nesse trabalho.

A simulação de HR busca emular o encadeamento da sequência de decisões que são tomadas mensalmente com a execução do modelo do PMPO conforme é procedido na operação do SIN. Embora muitos aspectos da dinâmica das decisões do PMPO sejam capturados com esse tipo de simulação, é importante salientar que mesmo a simulação de HR ainda é uma aproximação bastante relaxada da operação real do sistema. Basicamente na simulação de HR deste trabalho não se consegue capturar discrepância das decisões do operador do sistema com os resultados obtidos nos modelos, além da exata coordenação entre a etapa mensal e semanal de planejamento do SIN, visto que o modelo semanal não é utilizado. Salienta-se também que dependendo do escopo do estudo e o tempo disponível de execução as simulações do tipo *out-of-sample* ainda podem ser imprescindíveis para o planejamento hidrotérmico.

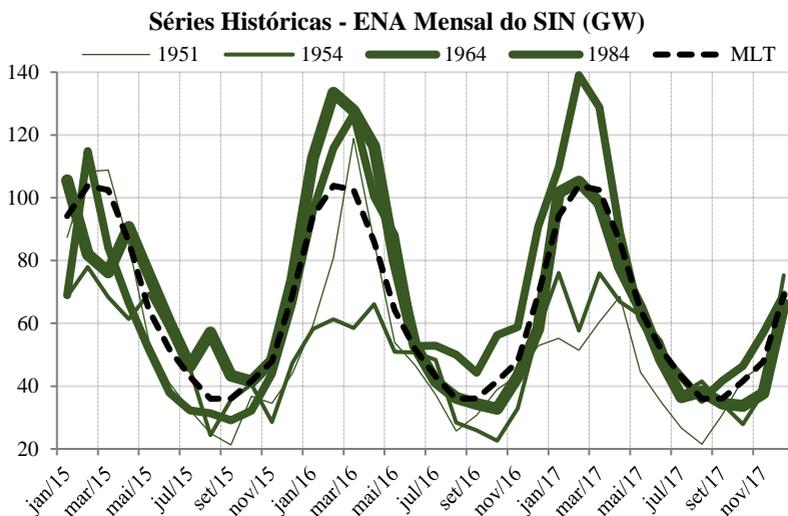
Como ponto positivo a simulação de HR capta a variação de qualidade de solução da PDDE ao longo de execuções com diferentes árvores, ao se assumir que uma árvore é gerada para cada mês do PMPO. Além disso, como há várias aproximações na representação discreta do processo estocástico das afluições a própria consistência temporal do problema pode ser alvo de diversos questionamentos. Nesse ponto, com a simulação de HR os modelos são atualizados mensalmente de acordo com os valores observados de afluição no período desejado de

³ Conforme discutido na Seção 4.1 o modelo a REE é o Plan4LTHS.

simulação. Assim, mesmo que um cenário de afluência não previsto em execuções anteriores do modelo ocorra em um determinado mês da simulação, na execução do mês seguinte o modelo é atualizado e o cenário em questão passará a condicionar o processo estocástico das afluências no período adiante.

Como primeiro passo para a execução da simulação de HR é necessário definir o período da simulação, ou seja, o número de meses que o modelo será executado, e a série de afluências a ser utilizada para representar o problema da operação real do SIN. Nesse trabalho a simulação de HR é procedida para um período de 36 meses em 4 séries de afluências do histórico. As séries utilizadas iniciam todas no mês de janeiro e são correspondidas pelos anos de 1951, 1954, 1964 e 1984. Na Figura 29 os valores de ENA das séries utilizadas na simulação de HR podem ser observados.

Figura 29 – Séries Históricas Utilizadas na Simulação de Horizonte Rolante.



Fonte: do Autor.

Cada uma das séries apresentada na Figura 29 foi escolhida por apresentar características interessantes e desafiadoras na concepção da operação do SIN. No caso da série de 1951, a mesma apresenta uma

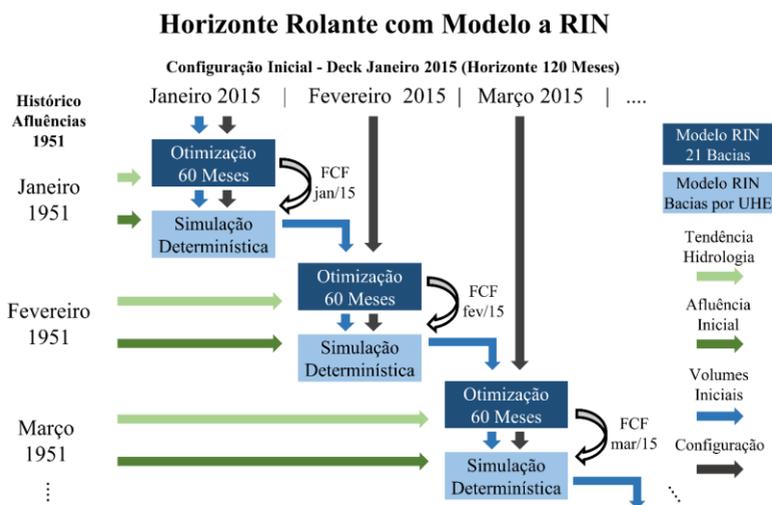
tendência confortável de ENA no início do período, inclusive com valores acima da MLT, e encerra o ano inicial com alguns dos valores mais baixos observados para o período em todo o histórico. No segundo ano há um pico extraordinário de ENA nos meses de março e abril que decai nos meses seguintes e se mantém abaixo da MLT até o fim do terceiro ano. A série de 1954 foi escolhida para representar a pior condição de afluência na simulação da operação do sistema, sendo que a mesma inicia no famigerado período crítico do SIN. Em 1964 se buscou uma série com recursos moderados no primeiro ano e elevação desses recursos nos demais anos para uma operação confortável do SIN no fim do período. Já a série de 1984 foi utilizada por apresentar valores muito bons de ENA nos dois primeiros anos, o que implica em uma operação confortável do SIN no início do período, e valores modestos, inclusive abaixo da MLT, no ano final. Por fim, é importante destacar que a ENA foi utilizada como parâmetro de escolha das séries devido à dificuldade de se avaliar com pragmatismo as consequências na operação do sistema com as afluências de todas as hidrelétricas ou bacias do SIN.

Uma vez que a série de afluência foi selecionada a simulação de HR pode ser procedida. Para a utilização do modelo a RIN, inicialmente a configuração do modelo e os volumes das hidrelétricas são atualizados com os dados de referência, janeiro de 2015, e a tendência hidrológica é atualizada com os valores de afluência anteriores ao início da série histórica. O modelo é executado com a prerrogativa de nó fantasma no estágio inicial, conforme apresentado em de Matos (2012), de maneira que as afluências do primeiro mês são consideradas estocásticas. Assim, aproximações para as FCFs de janeiro de 2015 a dezembro de 2019 são obtidas com a tendência série histórica observada no primeiro mês. Em seguida, uma simulação da operação é procedida com o modelo a RIN utilizando apenas as aproximações da FCF de janeiro de 2015 e os valores de afluência do mês inicial da série histórica. Na simulação da operação a representação por bacias é expandida com a atribuição de uma bacia para cada hidrelétrica do SIN. Logo, ao fim da simulação da operação, os volumes de fevereiro de 2015 são obtidos para todas as hidrelétricas de regularização do SIN.

Em seguida, o mês de referência é alterado para fevereiro de 2015 na configuração do modelo, os volumes das hidrelétricas são atualizados com os valores obtidos na simulação da operação de janeiro e a tendência hidrológica é atualizada com os valores de afluência anteriores ao primeiro fevereiro da série histórica. Novamente o modelo é executado e aproximações para as FCFs de fevereiro de 2015 a janeiro de 2020 são

obtidas. O próximo passo é a simulação da operação com a FCF de fevereiro de 2015 a qual culmina com os volumes iniciais das hidrelétricas em março. O processo de atualização do modelo, cálculo de FCFs e simulação da operação segue com o mês de referência sendo incrementado até dezembro de 2017, completando os 36 meses da simulação de HR. A simulação de HR para a série de 1951 com modelo a RIN é ilustrada na Figura 30.

Figura 30 – Simulação de Horizonte Rolante em 1951 com Modelo a RIN.

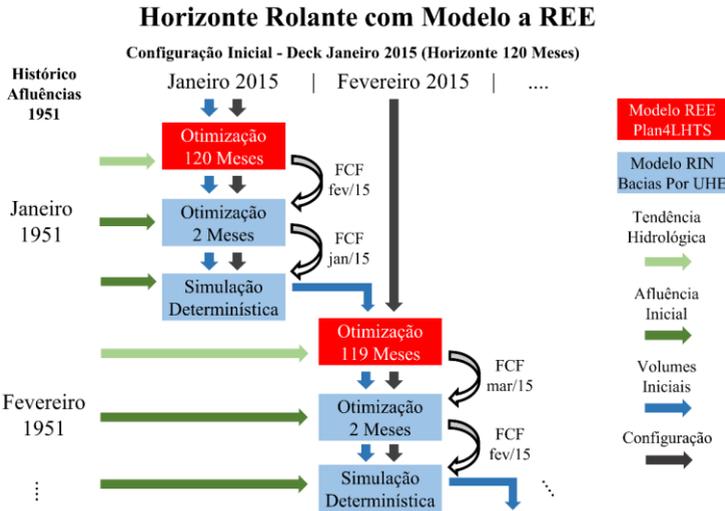


Fonte: do Autor.

Os passos da simulação de HR com o modelo a REE são semelhantes aos passos discutidos anteriormente, contudo, uma nova etapa de otimização a RIN foi incluída na simulação de HR como uma espécie de interface entre a FCF a REE e a simulação determinística. Na etapa adicional, o modelo a RIN com uma bacia por hidrelétrica recebe a FCF a REE do mês seguinte ao mês de referência e os valores de afluição do mês corrente da série. Com isso, o modelo a RIN é executado em um horizonte de 2 meses e aproximações da FCF do mês corrente são calculadas e repassadas à etapa da simulação determinística. A etapa adicional de otimização a RIN foi utilizada para amenizar o fato da

desconsideração da otimização com modelo semanal no desacoplamento de FCFs a REE, que é feito no PMO através do modelo DECOMP. Para melhor compreensão dos passos descritos, na Figura 31 é ilustrada a simulação de HR em 1951 com modelo a REE.

Figura 31 – Simulação de Horizonte Rolante em 1951 com Modelo a REE.



Fonte: do Autor.

Apresentadas as etapas da simulação de HR, é importante mencionar que no modelo a RIN a conversão das FCFs com 21 bacias para FCFs com bacias por hidrelétricas é realizada a partir de (28) e:

$$\pi y_{t-p}^h \triangleq \pi y_{t-p}^{fb(h)}, \quad p = 0, \dots, np - 1. \quad (197)$$

No caso do modelo a REE, para que a FCF seja incorporada no modelo por RIN é necessário converter os coeficientes de EA e ENA nas aproximações obtidas pelos coeficientes de volume e afluência definidos em (182). Isso pode ser realizado a partir das definições de EA e ENA (CEPEL, 2001) como:

$$\pi v h_t^h = \frac{\pi e v_t^{f_v(h)}}{v z_t} \cdot \sum_{j \in \mathcal{J}^h} p r_t^j \cdot h l_{PEt}^j, \quad (198)$$

$$\pi y p_{t-p}^h = \pi e y_{t-p}^{f_v(h)} \cdot \sum_{j \in \mathcal{J}^h} p r_t^j \cdot h l_{PEt}^j, \quad p = 0, \dots, np-1, \quad (199)$$

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq w \leq nw\}, \quad (200)$$

$$f_w(h): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{W}, \quad (201)$$

$$\mathcal{J}^h \subseteq \mathcal{H}, \quad (202)$$

em que:

\mathcal{J}^h : conjunto de todas as hidrelétricas à jusante de h , inclusive,

\mathcal{W} : conjunto de REEs w ,

f_w : função que retorna o REE w associado à usina h ,

$\pi e v_t^w$: coeficiente de EA da FCF em w (R\$/MWhês),

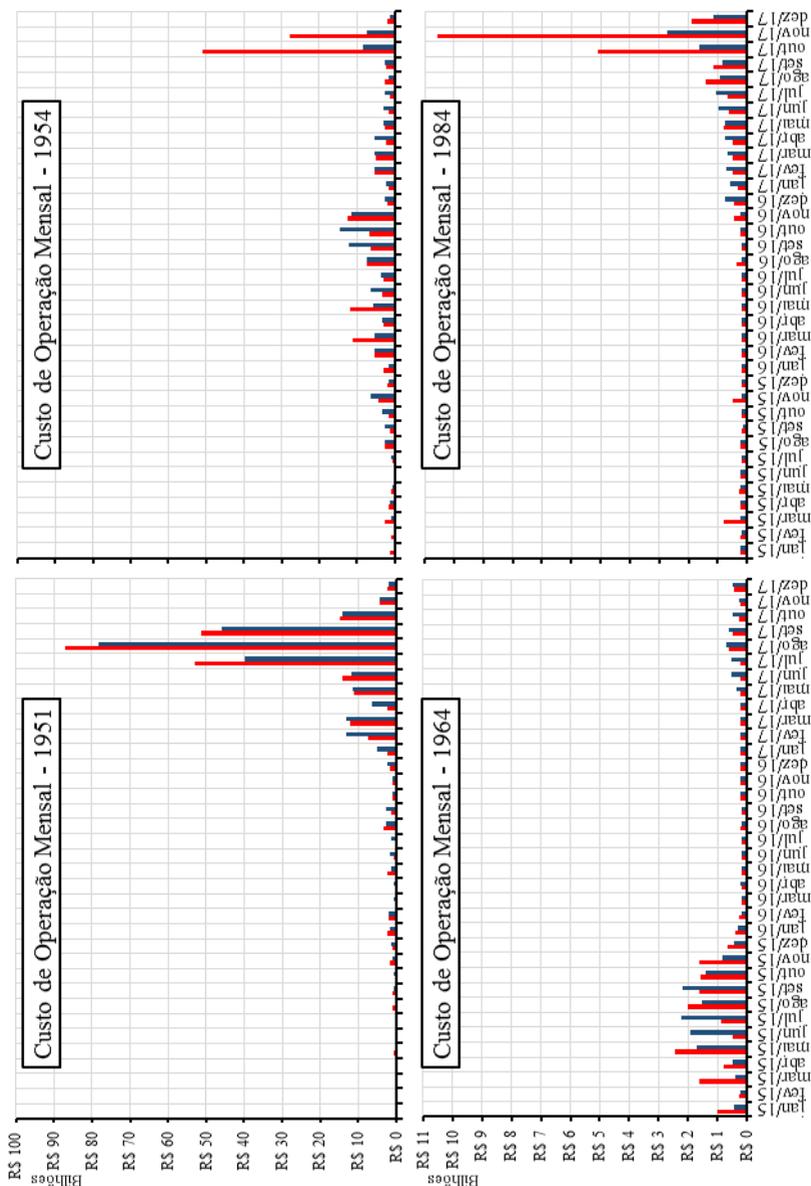
$\pi e y_t^w$: coeficiente de ENA da FCF em w (R\$/MWhês).

Conforme discutido ao longo das seções anteriores, nesse trabalho os modelos são avaliados para a execução em um período de, no máximo, 5 horas. Além disso, devido à natureza complexa da simulação de HR, em que são necessárias no mínimo 36 execuções com cálculo das FCFs, para viabilizar as simulações desta seção cada execução dos modelos a RIN e REE de horizontes de 60 e 120 meses é limitada em 2 horas. Além disso, no modelo a RIN de FCF com 21 bacias, 40 realizações *proxy* são utilizadas na PDDE seguindo o gráfico de desempenho da Figura 28.

Quanto à execução do modelo a RIN com horizonte de 2 meses e FCF com bacias por hidrelétricas, o limite de tempo é de 1 hora e 1.000 realizações das variáveis aleatórias por hidrelétrica são consideradas no segundo mês. Aproximadamente 10 iterações da PDDE são obtidas por execução do modelo intermediário.

Com a descrição de todos os parâmetros das simulações de HR dos modelos a RIN e REE nas séries de 1951, 1954, 1964 e 1984, os resultados obtidos podem ser apresentados e discutidos. Todos os resultados a serem apresentados foram obtidos na etapa da simulação da operação ocorrida em cada mês, dada a condição de afluência observada na série histórica. Os valores em vermelho foram obtidos com o modelo a REE e os valores em azul com o modelo a RIN. Inicialmente o custo de operação do SIN, compreendido pelo custo das termelétricas mais o custo de eventuais déficits de energia no sistema, é apresentado na Figura 32.

Figura 32 – Custo de Operação Mensal do SIN.



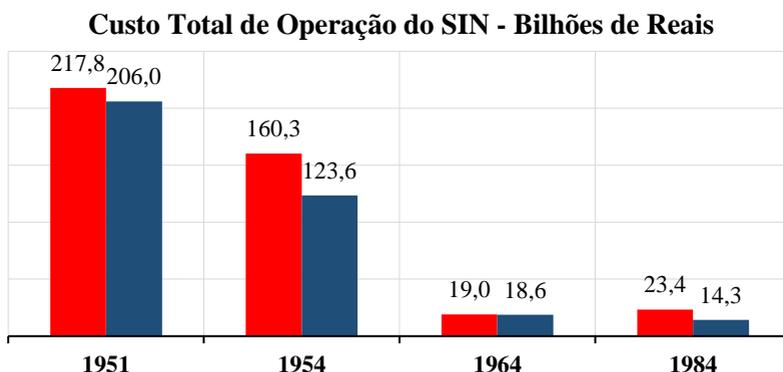
Fonte: do Autor.

De maneira geral, pode-se observar que a evolução dos custos de operação de ambos os modelos nas séries de 1951 e 1964 é bastante semelhante, entretanto, ao se observar os resultados de 1954 e 1984, percebe-se grande discrepância nos custos, principalmente no fim das séries. Nesse caso, a operação com modelo a REE propiciou picos expressivos de custos no fim dos anos de 1954 e 1984.

Um dos fatores que podem ter contribuído para o péssimo desempenho do modelo a REE nos últimos meses de 54 e 84 pode estar relacionado ao fato que o horizonte de otimização é reduzido à medida que se avançam nos meses da simulação de HR. Conforme se percebe na Figura 31, o horizonte considerado no segundo mês é de 119 meses. No último mês da simulação, dezembro de 2017, o horizonte de otimização é de 85 meses no modelo a REE. É interessante observar que mesmo o horizonte de otimização do modelo a RIN sendo fixado em 60 meses em todas as execuções, os picos no custo de operação nos meses finais da simulação são menos expressivos.

Ao se corrigir com a taxa de desconto utilizada no PMPO os valores mensais do custo de operação do SIN, o custo total de operação do sistema dos 36 meses de simulação de HR por ser calculado conforme a Figura 33.

Figura 33 – Custo Total de Operação do SIN.



Fonte: do Autor.

Em todas as séries o modelo a RIN propiciou o menor custo total de operação para o SIN, vistos os 36 meses simulados. As séries de 54 e

84 que se observou a maior discrepância nos custos mensais consequentemente foram as séries em que se obtiveram as maiores diferenças em termos do custo total.

O custo de operação basicamente reflete as decisões operativas que foram tomadas ao longo dos meses de simulação de HR. Nesse contexto, também é interessante observar a composição do despacho das usinas hidrelétricas e termelétricas no atendimento da demanda do sistema, além de eventuais déficits de energia que possam ter ocorrido. Na Figura 34 a composição do atendimento à demanda do SIN é exibida para os 36 meses de simulação de maneira que a participação hidrelétrica é preenchida em azul, a termelétrica em cinza e o déficit em preto.

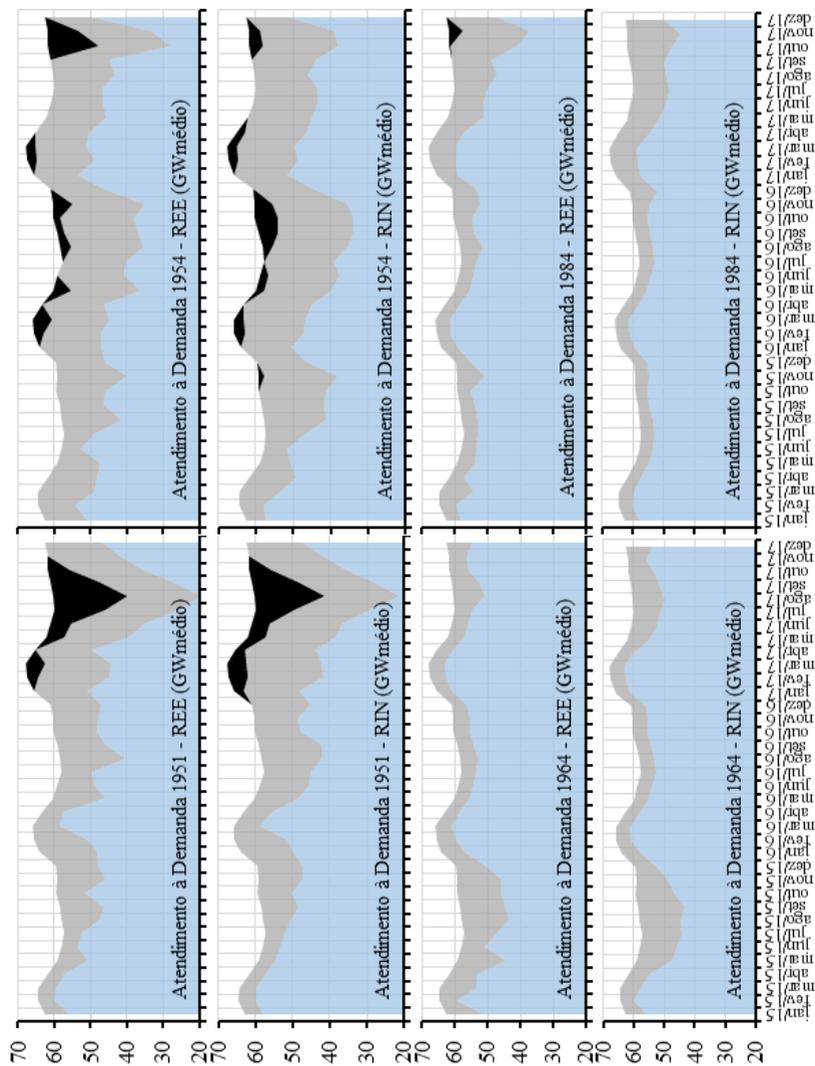
Em uma avaliação superficial do atendimento à demanda nas séries simuladas, percebe-se que ocorreu déficit de energia nas séries de 51, 54 e 84 com modelo a REE e em 51 e 54 com modelo a RIN. A ocorrência de déficit nos anos de 51 e 54, em ambos os modelos, não foi surpresa devido aos baixos valores de ENA registados nas mesmas. Contudo, era de se esperar que a série de 1984 propiciasse uma operação tranquila do SIN, visto a abundância hídrica nos anos iniciais da mesma. Mesmo na operação com FCFs do modelo a RIN, pode-se observar que a participação termelétrica ao final da série é expressiva.

Esse tipo de condição hidrologia, de períodos longos de abundância de recursos seguido de escassez repentina, tende a ser melhor encarada na operação dos modelos com a inclusão de aversão a risco no cálculo das aproximações das FCFs (PHILPOTT; DE MATOS, 2012; LARROYD, 2012; SHAPIRO et al., 2013).

Outro ponto de destaque na avaliação do atendimento à demanda nas séries simuladas é a diferença nas excursões das participações hidrelétrica e termelétrica ao longo dos meses avaliados. Pode-se perceber que nos períodos de ocorrência de déficit das séries de 51 e 54, em ambos os casos houve a antecipação de um pequeno montante de déficit de primeiro patamar na operação com FCFs por RIN. Consequentemente, nos meses seguintes os aprofundamentos dos patamares foram menos intensos na operação com tal modelo.

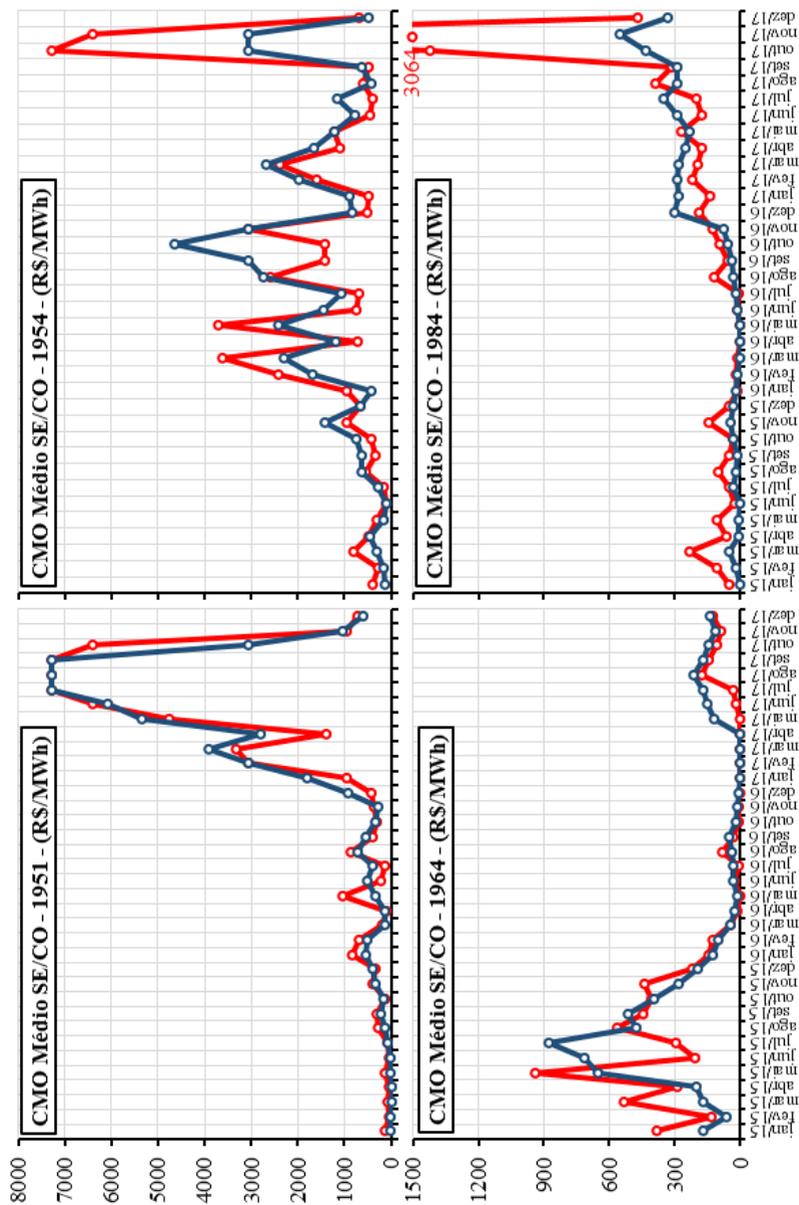
Por fim, é interessante observar que mesmo com condições hidrológicas completamente diferentes de uma série para outra, percebe-se que o modelo a RIN propiciou uma operação muito mais suave, em termos dos despachos, que o observado com o modelo a REE. Esse comportamento impacta diretamente na evolução do CMO médio dos sistemas, conforme pode ser observado na Figura 35.

Figura 34 – Atendimento à Demanda do SIN.



Fonte: do Autor.

Figura 35 – CMO Médio do Subsistema SE/CO.



Fonte: do Autor.

Na Figura 35 pode se perceber que o comportamento oscilatório do CMO observado em SE/CO com modelo a REE é predominante ao observado com modelo a RIN. Além disso, percebe-se também que mesmo que ambos os modelos apresentem oscilações significativas no CMO, em geral os saltos propiciados pela operação com REE são maiores que os observados na operação a RIN.

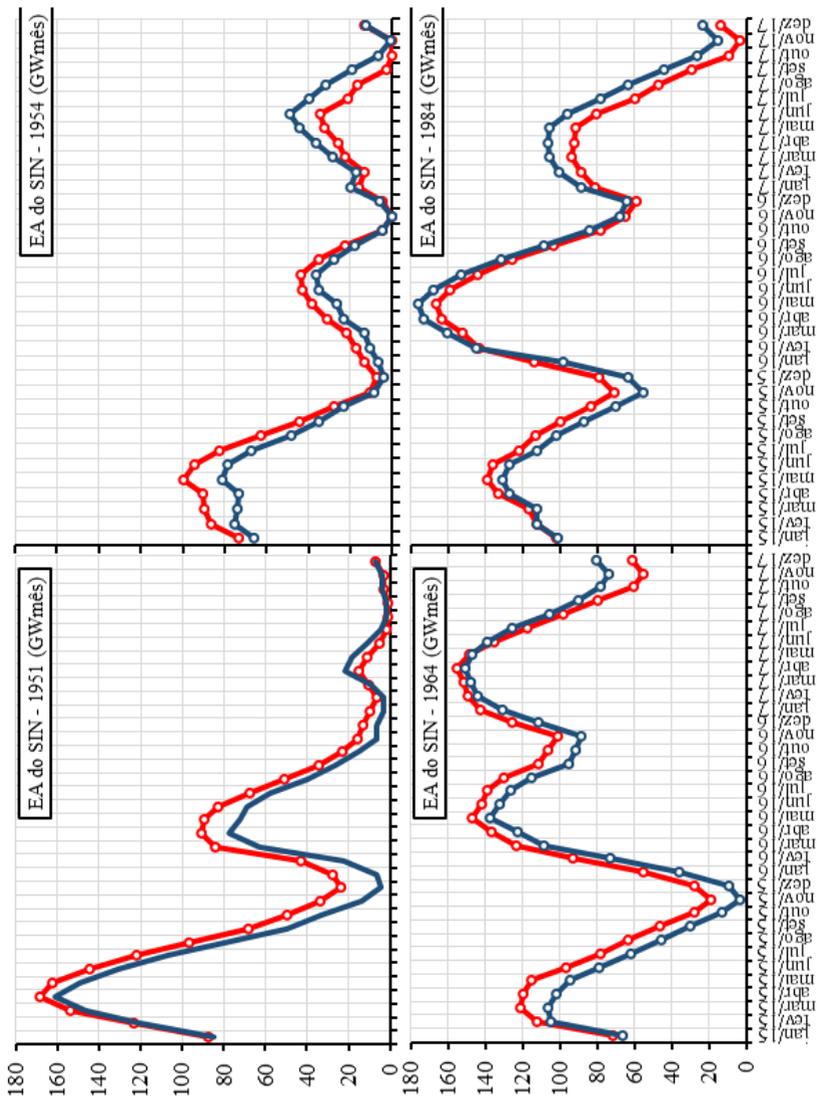
Com os resultados de CMO é importante destacar que as séries de 1951 e 1954 correspondem a condições ímpares para a operação do SIN. Mais uma vez, vale destacar que ambas as séries fazem parte do período crítico de operação do sistema. Os resultados das simulações de HR podem servir como parâmetros de validação da “sanidade” dos modelos, além de outros estudos no escopo do comportamento encadeado da operação do sistema sem aversão a risco. Isso porque na prática quando tais condições adversas são presenciadas, mesmo que os modelos possuam métricas de aversão a risco, fortes intervenções por parte do operador do sistema são efetuadas para se garantir o abastecimento de energia elétrica e se evitar o colapso do sistema.

Outro aspecto interessante de se observar na operação do SIN dadas as simulações de HR consiste na evolução do nível de armazenamento das usinas de regularização do sistema nos 36 meses avaliados. Para facilitar a observação do armazenamento sistêmico dos recursos hídricos do SIN, os volumes dos reservatórios de regularização foram convertidos em energia armazenável, MWmês, de acordo com as premissas utilizadas no setor elétrico para o cálculo de EA (CEPEL, 2001). Assim, na Figura 36 podem ser observadas a EA calculada na operação a RIN e REE das séries simuladas em HR.

Ao se observar a evolução da EA de 1951 em ambos os modelos, pode-se claramente observar que os recursos hídricos nos meses iniciais da série são significativos uma vez que o armazenamento atinge um dos maiores níveis vistos em todas as séries nos 36 meses. Contudo, a sequência de condições hidrológicas desfavoráveis que sucede o início do período faz os níveis de armazenamento despencarem já no primeiro ano. Essa sequência hidrológica desfavorável faz com que a série de 1951 seja a de maior custo total de operação dentre as séries avaliadas, vide Figura 33.

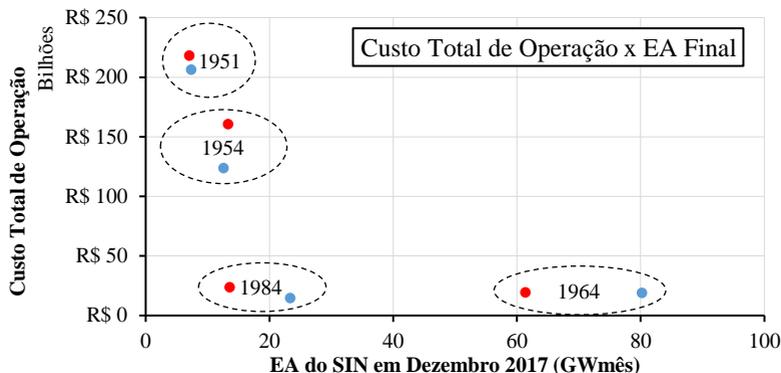
Exceto pelo armazenamento final da série de 1954, em que o armazenamento de ambos os modelos é bastante próximo, nos outros três casos o armazenamento final ocasionado pela operação a RIN é maior que o provido por REE. Na Figura 37 o armazenamento final de cada série é plotado em relação ao respectivo custo total de operação do sistema.

Figura 36 – Energia Armazenada do SIN.



Fonte: do Autor.

Figura 37 – Custo Total de Operação x Energia Armazenada Final do SIN.



Fonte: do Autor.

Um dos contrapontos mais complicados de se avaliar na operação do sistema é o custo incorrido na operação em um determinado horizonte perante o armazenamento de recursos hídricos ao final do período. Isso porque tanto o menor custo de operação quanto o maior armazenamento hídrico são ambos almejados na operação ideal de qualquer sistema hidrotérmico. Assim, muitas vezes o custo de operação pode ser baixo decorrente do deplecionamento abusivo dos recursos hídricos ou, caso contrário, o custo ser alto decorrente da segurança de se manter elevados níveis de armazenamento nos reservatórios.

Nos casos avaliados na simulação de HR é interessante observar que o contraponto de custo total de operação x EA no fim do período, dezembro 2017, é majoritariamente favorável ao caso da operação a RIN. Mesmo no caso em que o armazenamento provido por REE é sutilmente maior, algo em torno de 5,6%, o custo de operação a RIN é cerca de 23% menor que o provido por REE.

A consolidação de que a operação decorrente de modelo a RIN é melhor que a obtida com a utilização de um modelo a REE é um dos principais resultados obtidos com a simulação de HR. Percebe-se que diferentes atributos da operação foram avaliados em todas as séries e na maioria dos casos a qualidade da operação a RIN foi significativamente predominante. Embora muitos aspectos da representação de ambos os modelos podem ser aprimorados, estes resultados são robustos o suficiente para justificar a avaliação da representação individualizada de hidrelétricas no modelo do PMPO brasileiro.

5. CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho é modelar e resolver o problema do PMPO brasileiro com a representação individualizada das hidrelétricas do SIN. Nesse contexto, os principais aspectos de modelagem relevantes ao planejamento de médio prazo e abordados nesse trabalho são descritos ao longo de todo o Capítulo 2. Por sua vez, no Capítulo 3, as estratégias da PDD e PDDE para a solução do modelo multiestágio estocástico do PMPO também são apresentadas.

Ao se tratar da modelagem do PMPO com representação individualizada das usinas hidrelétricas, a caracterização do processo estocástico das aflúncias que chegam às hidrelétricas implica que os modelos de geração de aflúncias adotados sejam tanto representativos quanto a estatística observada nos registros históricos quanto factíveis no tratamento multiestágio estocástico do problema. Nesse trabalho, a política de operação obtida a partir das recursões da PDD e PDDE é o principal resultado da solução do modelo do PMPO. Assim, os modelos de geração de aflúncia devem ser definidos de maneira a garantir que a política calculada seja composta por aproximações inferiores, ou funções de suporte válidas, das FCFs concebidas para o modelo de médio prazo.

Conforme discutido nas seções 3.1.3 e 3.1.4, aproximações válidas da FCF podem ser obtidas a partir da utilização dos modelos de geração de aflúncias: IND Lognormal e variação a Três Parâmetros (IND 3P) e PAR Lognormal a Três Parâmetros (PAR 3P). Nos resultados apresentados na Seção 2.2.5 para a bacia do São Francisco, pode-se observar que embora o modelo IND 3P possui resposta positiva na estimação da correlação espacial e parâmetros estatísticos de séries sintéticas, o mesmo não se mostra satisfatório na reprodução da correlação temporal das aflúncias. Atesta-se assim que, a partir das premissas desse trabalho, o modelo PAR 3P pode ser apontado como o mais adequado para o cálculo de políticas de operação via PDD e PDDE no modelo multiestágio estocástico do PMPO brasileiro.

Em relação aos resultados apresentados no Capítulo 4 se destaca que a avaliação da qualidade da solução da PDDE foi a ferramenta utilizada para mensurar e comparar a qualidade das FCFs obtidas com a execução do modelo. Conforme observado a partir dos exaustivos tempos totais de execução, os casos avaliados foram executados por longos tempos de modo que intervalos maiores que o intervalo prático adotado nesse trabalho, máximo de 5 horas, pudessem ser avaliados. Percebeu-se que após o intervalo prático o incremento da qualidade das soluções

obtido com a PDDE é baixo em relação ao tempo computacional requerido. Logo, para o modelo a RIN desenvolvido nesse trabalho se pôde comprovar que é improvável a necessidade de execução maior que o período máximo almejado de 5 horas.

Outra questão relevante ao modelo desenvolvido que foi atestada com a avaliação da qualidade da solução foi a atribuição de um número adequado de realizações para a execução da PDDE. Nesse trabalho, chegou-se à conclusão que 200 realizações por estágio pode ser um valor razoável a ser utilizado no PMPO, no contexto das premissas adotadas na Seção 4.2. Contudo, é importante observar que a medida que estratégias de melhoria da performance da PDDE sejam aplicadas ao modelo, como realizações *proxy* por exemplo, um número maior de realizações pode se tornar vantajoso.

Um dos objetivos desse trabalho é o de avaliar uma estratégia de melhoria de desempenho da PDDE no modelo. Nesse caso, a estratégia adotada foi a denominada de realizações *proxy*, a qual foi apresentada como uma generalização da estratégia denominada por Philpott e Guan (PHILPOTT; GUAN, 2008) como *sampled cut*. Conforme observado na Seção 4.3 a vantagem de se utilizar realizações *proxy* está diretamente relacionada com o tempo disposto a se executar o algoritmo da PDDE. Para uma restrição pesada de curto tempo de execução o uso de realizações *proxy* é extremamente vantajoso, contudo, a medida que se dispõe de mais tempo para a execução do modelo a vantagem no uso de realizações *proxy* decai consideravelmente.

Por fim, o ápice da utilização do modelo do PMPO a RIN foi observado na simulação de HR, em que os resultados obtidos foram comparados com resultados da operação por um modelo a REE. No caso da simulação de HR, procurou-se criar um ambiente equilibrado em que a comparação dos resultados da operação de ambos os modelos pudesse ser realizada. Além disso para evitar equívocos na interpretação dos resultados a simulação de HR foi procedida para 4 séries históricas, com diferentes comportamentos em termos da ENA do SIN.

Praticamente em todos os casos os resultados obtidos a partir do uso do modelo a RIN se mostraram superiores aos resultados obtidos com REE. Em específico se pode apontar para a relação do custo total de operação nos meses simulação com a energia armazenada no final do período como o argumento de maior substância numérica para utilização do modelo a RIN no cálculo de FCFs para o PMPO.

Ademais, é de extrema relevância salientar que avanços mais significativos de modelagem no PMPO passam a ser viáveis com a

representação individualizada das hidrelétricas. Nesse ponto, os benefícios tenderiam a ser percebidos tanto nas decisões de médio prazo quanto nas decisões das etapas mais próximas da operação em tempo real do SIN. Isso porque as execuções dos diferentes modelos das demais etapas poderiam ser coordenadas de maneira muito mais harmoniosa, respeitando a concepção do problema global do POH.

5.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta seção algumas sugestões relevantes de trabalhos futuros são discutidas para a evolução do modelo a RIN desenvolvido nesse trabalho. Basicamente as sugestões são apresentadas uma a uma de acordo com o nível de dificuldade de implementação apontado pelo autor deste trabalho. No fim da seção um apanhado geral acerca da implementação do modelo a RIN desenvolvido e de uma estratégia avançada para a paralelização da PDDE são discutidas.

- Inclusão de aversão a risco no modelo do PMPO a RIN. Decisões tomadas com aversão a risco são fundamentais para se garantir requisitos adequados de segurança energética no SIN. Logo, é necessário avaliar estratégias que incorporem a aversão a risco no modelo a RIN e comparar os resultados de simulações de HR com o modelo a REE dotado da estratégia de aversão a risco vigente no setor.
- Representação de intercâmbios hidráulicos e restrições operativas específicas. O modelo a RIN viabiliza que canais pluviais e usinas de bombeamento/reversíveis sejam representados no problema de médio prazo. Assim, condições operativas específicas como as observadas nas usinas da bacia do Paraíba do Sul, por exemplo, podem ser representadas no modelo.
- Modelagem aprimorada das funções PH e FC . Aproximações lineares por partes podem ser incorporadas ao modelo para melhor representar as funções de produção hidrelétrica e custo termelétrico.
- Representação das perdas de transmissão e elementos principais da rede básica do SIN.
- Implementação de paralelização assíncrona do algoritmo da PDDE.

APÊNDICE A - ASPECTOS GERAIS DE IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO

No modelo a RIN desenvolvido nesse trabalho, inicialmente visou-se uma performance computacional superior da PDDE a partir da adoção de uma estratégia de paralelização do algoritmo a qual foi implementada de modo que todos os problemas de PL dos estágios $t = 1, \dots, nt$ fossem previamente alocados em cada processo lógico designado ao algoritmo. Com isso, o *solver* de PL era atualizado por estágio, de maneira síncrona em todos os processos lógicos, de acordo com os estados e realizações associadas a cada cenário. Além disso, os problemas de cada estágio eram incrementados na recursão regressiva, à medida que aproximações das FCFs eram calculadas.

Embora essa estratégia seja favorável à implementação prática do algoritmo, a mesma se mostrou ineficiente no uso da memória disponível para a execução dos processos lógicos. Isso porque, a cada recursão regressiva de cada processo, toda a informação acerca das aproximações da FCF era sincronizada e replicada para os demais processos. Logo, o estouro da memória física ocorria após um número pequeno de recursões da PDDE nos processos lógicos executados.

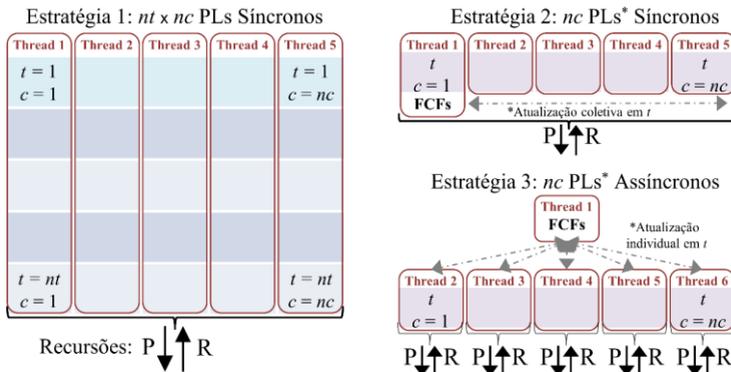
Na seqüência, uma segunda estratégia de paralelização da PDDE foi implementada de maneira que um único problema de PL fosse alocado para cada processo lógico do algoritmo. Assim, a cada transição de estágios das recursões, outras informações acerca do problema do estágio visitado também eram atualizadas no *solver* de PL, além dos estados e realizações de cada cenário. Ainda, um único processo lógico foi designado para o armazenamento das aproximações das FCFs, de maneira que as mesmas também são atualizadas a cada transição de estágio das recursões. Destaca-se que nessa estratégia, a atualização do PL em cada estágio é realizada de maneira síncrona nos processos lógicos.

Com essa estratégia, a execução da PDDE pôde ser procedida para o cálculo das políticas de operação do PMPO sem estouro de memória ou quaisquer outras complicações computacionais, viabilizando os resultados do Capítulo 4. O que se observou foi um aumento do tempo de processamento em relação à estratégia anterior, para as primeiras recursões viabilizadas. Isso ocorre devido a maior quantidade de informações a serem atualizadas nos PLs dessa estratégia. Destaca-se também que em todos os casos o número de processos lógicos utilizado na PDDE foi igual a 20.

Como se pode observar nos resultados apresentados acerca do tempo de processamento da PDDE na Seção 4.2, para o cálculo de 8.000 aproximações das FCFs com 200 realizações por estágio foram requeridas em média 42 horas de execução do modelo. Embora os demais resultados apresentados foram obtidos observando um período prático de execução do modelo, a inclusão de mais aprimoramentos de representação do SIN pode requerer que novos avanços na implementação computacional sejam requeridos.

Como continuação desse trabalho, uma evolução da segunda estratégia avaliada pode ser implementada, cuja sincronização dos *solvers* de PL e o compartilhamento das informações das aproximações das FCFs possam ser realizadas de maneira assíncrona. Com isso, almeja-se que os processos lógicos sejam executados independentemente uns dos outros, eliminando-se o gargalo implícito à sincronização paralela de informações. Na Figura 38, as três estratégias discutidas de implementação do modelo para a execução paralela da PDDE são ilustradas.

Figura 38 – Estratégias de implementação da PDDE.



Fonte: do Autor.

Por fim vale destacar que o modelo foi executado em um único servidor dedicado embora a execução em *clusters* seja viável. Caso se proceda com a execução em *clusters*, espera-se que ganhos de tempo computacional ainda possam ser obtidos mesmo com a utilização da estratégia de implementação 2.

REFERÊNCIAS

A., GJELSVIK; M.M., BELSNES; A., HAUGSTAD. **An algorithm for stochastic medium-term hydrothermal scheduling under spot price uncertainty**. 13th Power Systems Computation Conference Proceedings. **Anais...** In: POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE (PSCC). Trondheim: , 1999.

ABB. **ABB no Brasil**. 27 ago. 2014. Disponível em: <<http://www.abb.com.br/cawp/seitp202/882ccff54badb51f83257d410048b54b.aspx>>. Acesso em: 15 jan. 2015.

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables**. [s.l.] Courier Corporation, 1964.

ANEEL. **Resolução ANEEL n.º 334**. 2000. Disponível em: <<http://www2.aneel.gov.br/cedoc/RES2000334.PDF>>. Acesso em: 15 dez. 2016.

ANEEL. **Resolução ANEEL n.º 228**. 2002. Disponível em: <<http://biblioteca.aneel.gov.br/index.html>>. Acesso em: 19 jan. 2015.

ANEEL. **BIG - Banco de Informações de Geração**. 2015. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/capacidadebrasil.cfm>>. Acesso em: 15 jan. 2015.

ARARIPE NETO, T. DE A. et al. Comparison of Stochastic and Deterministic Approaches in Hydrothermal Generation Scheduling. 1985.

ARFUX, G. A. B. **Definição de estratégia de comercialização de energia elétrica via métodos de otimização estocástica e análise integrada de risco**. Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2011.

ARVANITIDIS, N. V.; ROSING, J. Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power System. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-89, n. 2, p. 319–326, fev. 1970a.

ARVANITIDIS, N. V.; ROSING, J. Optimal Operation of Multireservoir Systems Using a Composite Representation. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-89, n. 2, p. 327–335, fev. 1970b.

AWE, I.; GUILLERMO, A. Progressive hedging aplicado a coordinación hidrotérmica. 2013.

BAYRAKSAN, G.; MORTON, D. P. Assessing solution quality in stochastic programs via sampling. In: **Tutorials in Operations Research**. [s.l.: s.n.]. v. 5p. 102–122.

BEALE, E. M. L. On Minimizing A Convex Function Subject to Linear Inequalities. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, v. 17, n. 2, p. 173–184, 1 jan. 1955.

BELLMAN, R.; DREYFUS, S. Functional Approximations and Dynamic Programming. **Mathematical Tables and Other Aids to Computation**, v. 13, n. 68, p. 247–251, 1 out. 1959.

BELLMAN, R. E. **Dynamic Programming**. [s.l.] Courier Corporation, 2003.

BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik**, v. 4, n. 1, p. 238–252, 1 dez. 1962.

BIRGE, J. R. Decomposition and Partitioning Methods for Multistage Stochastic Linear Programs. **Operations Research**, v. 33, n. 5, p. 989–1007, 1 out. 1985.

BIRGE, J. R. State-of-the-Art-Survey—Stochastic Programming: Computation and Applications. **INFORMS Journal on Computing**, v. 9, n. 2, p. 111–133, 1 maio 1997.

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to Stochastic Programming**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 2011.

BOX, G. E.; COX, D. R. An analysis of transformations. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, p. 211–252, 1964.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. **Time Series Analysis: Forecasting and Control**. 4 edition ed. Hoboken, N.J.: Wiley, 2008.

BRANDI, R. B. S. et al. Improving stochastic dynamic programming on hydrothermal systems through an iterative process. **Electric Power Systems Research**, v. 123, p. 147–153, jun. 2015.

CAICEDO ARISTIZÁBAL, J. D. **Técnicas de dualidade e programação não-linear inteira-mista aplicadas ao programa diário da operação eletroenergética**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2012.

CARPENTIER, P.-L.; GENDREAU, M.; BASTIN, F. **Midterm Hydro Generation Scheduling Under Uncertainty Using the Progressive Hedging Algorithm**. [s.l.] CIRRELT, 2012.

CARPENTIER, P.-L.; GENDREAU, M.; BASTIN, F. Long-term management of a hydroelectric multireservoir system under uncertainty using the progressive hedging algorithm. **Water Resources Research**, v. 49, n. 5, p. 2812–2827, 2013a.

CARPENTIER, P.-L.; GENDREAU, M.; BASTIN, F. **Optimal Scenario Set Partitioning for Multistage Stochastic Programming with the Progressive Hedging Algorithm**. [s.l.: s.n.].

CARVALHO, M. F.; SOARES, S. An Efficient Hydrothermal Scheduling Algorithm. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 2, n. 3, p. 537–542, ago. 1987.

CASTRO, J.; GONZÁLEZ, J. A. A nonlinear optimization package for long-term hydrothermal coordination. **European Journal of Operational Research**, v. 154, n. 3, p. 641–658, 1 maio 2004.

CCEE. **Deck de preços**. mar. 2015. Disponível em: <http://www.ccee.org.br/portal/faces/pages_publico/o-que-fazemos/como_ccee_atua/precos/deck_de_precos>. Acesso em: 3 out. 2015.

CENSOR, Y. **Parallel Optimization: Theory, Algorithms, and Applications**. [s.l.] Oxford University Press, 1997.

CEPEL. **Stochastic Dynamic Programming Models for the Operation of Hydrothermal Systems**. Rio de Janeiro, RJ: ELETROBRÁS, 1977.

CEPEL. **Manual de Referência - Modelo NEWAVE**, 2001.

CEPEL. **PROJETO NEWAVE - MANUAL DO USUÁRIO**. 2013. Disponível em: <<http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/audiencia/arquivo/2013/086/documento/manualusuario.pdf>>. Acesso em: 19 jan. 2015.

CERISOLA, S.; LATORRE, J. M.; RAMOS, A. Stochastic dual dynamic programming applied to nonconvex hydrothermal models. **European Journal of Operational Research**, v. 218, n. 3, p. 687–697, 1 maio 2012.

CHARBENEAU, R. J. Comparison of the two- and three-parameter log normal distributions used in streamflow synthesis. **Water Resources Research**, v. 14, n. 1, p. 149–150, 1978.

CHARNES, A.; COOPER, W. W. Chance-Constrained Programming. **Management Science**, v. 6, n. 1, p. 73–79, 1 out. 1959.

CHIRALAKSANAKUL, A.; MORTON, D. P. Assessing policy quality in multi-stage stochastic programming. 17 maio 2004.

DA SILVA, E. L. **Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica**. 2. ed. Florianópolis, SC: do Autor, 2012. v. 1

DANTZIG, G. B. Linear Programming under Uncertainty. **Management Science**, v. 1, n. 3–4, p. 197–206, 1 abr. 1955.

DE CASTRO, C. M. B. et al. The generation of synthetic inflows via bootstrap to increase the energy efficiency of long-term hydrothermal dispatches. **Electric Power Systems Research**, v. 124, p. 33–46, jul. 2015.

DE MATOS, V. L. **Análise comparativa entre as modelagens de reservatório equivalente de energia agregado por subsistema e por**

cascata no problema do planejamento anual da operação energética. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2008.

DE MATOS, V. L. **Um modelo para o planejamento anual da operação energética considerando técnicas avançadas de otimização estocástica.** Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2012.

DE MATOS, V. L.; FINARDI, E. C. A computational study of a stochastic optimization model for long term hydrothermal scheduling. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 43, n. 1, p. 1443–1452, dez. 2012.

DE MATOS, V. L.; LARROYD, P. V.; FINARDI, E. C. **Assessment of the Long-Term Hydrothermal Scheduling Operation Policies with Alternative Inflow Modeling.** 18th PSCC Proceedings. **Anais...** In: POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE (PSCC). Wroclaw, Poland: , 18 ago. 2014.

DE MATOS, V. L.; PHILPOTT, A. B.; FINARDI, E. C. Improving the performance of stochastic dual dynamic programming. **European Journal of Operational Research**, 2012.

DE QUEIROZ, A. R.; MORTON, D. P. Sharing cuts under aggregated forecasts when decomposing multi-stage stochastic programs. **Operations Research Letters**, v. 41, n. 3, p. 311–316, maio 2013.

DIAS, B. H. et al. Stochastic Dynamic Programming Applied to Hydrothermal Power Systems Operation Planning Based on the Convex Hull Algorithm. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2010, p. e390940, 17 maio 2010.

DIAS, B. H. et al. Parallel computing applied to the stochastic dynamic programming for long term operation planning of hydrothermal power systems. **European Journal of Operational Research**, v. 229, n. 1, p. 212–222, 16 ago. 2013.

DINIZ, A. L. et al. **Uma abordagem direta para consideração do cvar no problema de planejamento da operação hidrotérmica**. Proceedings of the XII SEPOPE. **Anais...** In: SEPOPE - SYMPOSIUM OF SPECIALISTS IN ELECTRIC OPERATIONAL AND EXPANSION PLANNING. Rio de Janeiro, RJ: , 2012.

DOS SANTOS, M. L. L. et al. Practical aspects in solving the medium-term operation planning problem of hydrothermal power systems by using the progressive hedging method. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Power Systems Computation Conference (PSCC) 2008 Power Systems Computation Conference (PSCC) 2008 16th Power Systems Computation Conference (PSCC), 2008. v. 31, n. 9, p. 546–552, out. 2009.

DOS SANTOS, M. L. L. DOS. **Aplicação da modelagem orientada a objetos ao problema do planejamento de sistemas hidrotérmicos**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2004.

DREW, S. S.; HOMEM-DE-MELLO, T. **Quasi-Monte Carlo Strategies for Stochastic Optimization**. Proceedings of the 38th Conference on Winter Simulation. **Anais...**: WSC '06. Monterey, California: Winter Simulation Conference, 2006. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1218112.1218256>>. Acesso em: 11 fev. 2015.

DUPACOVÁ, J.; HURT, J.; STEPAN, J. **Stochastic Modeling in Economics and Finance**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 2002.

ELETOBRAS. **Potencial Hidrelétrico Brasileiro (SIPOT)**. 2014. Disponível em: <<http://www.eletobras.com/elb/data/Pages/LUMIS293E16C4PTBRIE.htm>>. Acesso em: 15 jan. 2015.

ERMOLIEV, Y.; WETS, R. J.-B. **Numerical Techniques for Stochastic Optimization**. Berlin: [s.n.].

FERREIRA, P. G. C.; SOUZA, R. C.; MARCATO, A. L. M. The PAR(p) Interconfigurations model used by the Brazilian Electric Sector.

International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 73, p. 45–55, dez. 2015.

FINARDI, E. C. **Planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos utilizando processamento de alto desempenho**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 1999.

FINARDI, E. C. **Alocação de unidades geradoras hidrelétricas em sistemas hidrotérmicos utilizando relaxação lagrangeana e programação quadrática sequencial**. Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2003.

FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L. Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 21, n. 2, p. 835–844, maio 2006.

FINARDI, E. C.; DECKER, B. U.; MATOS, V. L. DE. An Introductory Tutorial on Stochastic Programming Using a Long-term Hydrothermal Scheduling Problem. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 24, n. 3, p. 361–376, 1 jun. 2013.

FINARDI, E. C.; SCUZZIATO, M. R., M. Hydro unit commitment and loading problem for day-ahead operation planning problem. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 44, n. 1, p. 7–16, jan. 2013.

FLOUDAS, C. A. **Nonlinear and mixed-integer optimization: fundamentals and applications**. [s.l.] Oxford University Press, 1995.

FLYNN, D. **Thermal Power Plant Simulation and Control**. [s.l.] IET, 2003.

FOSSO, O. B. et al. Generation scheduling in a deregulated system. The Norwegian case. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 14, n. 1, p. 75–81, fev. 1999.

GEOFFRION, A. M. Generalized Benders decomposition. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 10, n. 4, p. 237–260, 1 out. 1972.

GJELSVIK, A.; MO, B.; HAUGSTAD, A. Long- and Medium-term Operations Planning and Stochastic Modelling in Hydro-dominated Power Systems Based on Stochastic Dual Dynamic Programming. In: PARDALOS, P. M. et al. (Eds.). . **Handbook of Power Systems I. Energy Systems**. [s.l.] Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 33–55.

GONÇALVES, R. E. C. **Desenvolvimento de modelos de programação estocástica aplicados à programação mensal da operação energética**. Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2011.

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. DA. Applying different decomposition schemes using the progressive hedging algorithm to the operation planning problem of a hydrothermal system. **Electric Power Systems Research**, v. 83, n. 1, p. 19–27, 2012.

GONÇALVES, R. E. C.; GENDREAU, M.; FINARDI, E. C. Medium-Term Operational Planning for Hydrothermal Systems. In: KOVACEVIC, R. M.; PFLUG, G. C.; VESPUCCI, M. T. (Eds.). . **Handbook of Risk Management in Energy Production and Trading**. International Series in Operations Research & Management Science. [s.l.] Springer US, 2013. p. 129–155.

GOOR, Q.; KELMAN, R.; TILMANT, A. Optimal Multipurpose-Multireservoir Operation Model with Variable Productivity of Hydropower Plants. **Journal of Water Resources Planning and Management**, v. 137, n. 3, p. 258–267, 2011.

HAMILTON, J. D. **Time series analysis**. [s.l.] Princeton university press Princeton, 1994. v. 2

HEITSCH, H.; RÖMISCH, W. Scenario tree modeling for multistage stochastic programs. **Mathematical Programming**, v. 118, n. 2, p. 371–406, 2009.

HIGLE, J. L.; SEN, S. **Stochastic Decomposition: A Statistical Method for Large Scale Stochastic Linear Programming**. [s.l.] Springer Science & Business Media, 1996.

HIPEL, K. W.; MCLEOD, A. I. **Time series modelling of water resources and environmental systems**. [s.l.] Elsevier, 1994.

HIPEL, K. W.; MCLEOD, A. I.; LENNOX, W. C. Advances in Box-Jenkins modeling: 1. Model construction. **Water Resources Research**, v. 13, n. 3, p. 567–575, 1977.

HOMEM-DE-MELLO, T. On Rates of Convergence for Stochastic Optimization Problems Under Non-Independent and Identically Distributed Sampling. **SIAM Journal on Optimization**, v. 19, n. 2, p. 524–551, 1 jan. 2008.

HOMEM-DE-MELLO, T.; BAYRAKSAN, G. Monte Carlo sampling-based methods for stochastic optimization. **Surveys in Operations Research and Management Science**, v. 19, n. 1, p. 56–85, jan. 2014.

HOMEM-DE-MELLO, T.; MATOS, V. L. DE; FINARDI, E. C. Sampling strategies and stopping criteria for stochastic dual dynamic programming: a case study in long-term hydrothermal scheduling. **Energy Systems**, v. 2, n. 1, p. 1–31, 1 mar. 2011.

HOWELL, E. **How Many Stars Are In The Universe?** 31 maio 2014. Disponível em: <<http://www.space.com/26078-how-many-stars-are-there.html>>. Acesso em: 13 mar. 2015.

IEA. **Key World Energy Statistics 2014**. 2014. Disponível em: <<http://www.iea.org/publications/freepublications/publication/key-world-energy-statistics-2014.html>>. Acesso em: 15 jan. 2015.

INFANGER, G.; MORTON, D. P. Cut sharing for multistage stochastic linear programs with interstage dependency. **Mathematical Programming**, v. 75, n. 2, p. 241–256, 1 nov. 1996.

JACOBS, J. et al. SOCRATES: A system for scheduling hydroelectric generation under uncertainty. **Annals of Operations Research**, v. 59, n. 1–4, p. 99–133, ago. 1995.

JARDIM, D. L. D. D.; MACEIRA, M. E. P.; FALCAO, D. M. **Stochastic streamflow model for hydroelectric systems using clustering techniques**. Power Tech Proceedings, 2001 IEEE Porto. **Anais...** In: POWER TECH PROCEEDINGS, 2001 IEEE PORTO. , 2001.

KALI, P.; WALLACE, S. W. **Stochastic programming**. [s.l.] Springer, 1994.

KALLIO, M.; PORTEUS, E. L. Decomposition of arborescent linear programs. **Mathematical Programming**, v. 13, n. 1, p. 348–356, 1 dez. 1977.

KLEYWEGT, A.; SHAPIRO, A.; HOMEM-DE-MELLO, T. The Sample Average Approximation Method for Stochastic Discrete Optimization. **SIAM Journal on Optimization**, v. 12, n. 2, p. 479–502, 1 jan. 2002.

KLIGERMAN, A. S. **Operação ótima de subsistemas hidrotermicos interligados utilizando programação dinamica estocastica dual**. Dissertação de Mestrado—Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas . Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 13 fev. 1992.

LARROYD, P. V. **Comparação de políticas com aversão a risco para o planejamento da operação hidrotérmica de médio prazo**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2012.

LARSON, R. E. **Research and development of a unified approach to operations scheduling for electric power under uncertainty. Technical progress report, June 1979-June 1980**. [s.l.: s.n.]. Disponível em: <<http://www.osti.gov/scitech/servlets/purl/6664400>>.

LI, X.; TOMASGARD, A.; BARTON, P. I. Nonconvex Generalized Benders Decomposition for Stochastic Separable Mixed-Integer Nonlinear Programs. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 151, n. 3, p. 425–454, 1 dez. 2011.

LIMA, L. M. M. **Modeling and forecast of Brazilian reservoir inflows via dynamic linear models under climate change scenarios**. [s.l.: s.n.].

LIMA, L. M. M.; POPOVA, E.; DAMIEN, P. Modeling and forecasting of Brazilian reservoir inflows via dynamic linear models. **International Journal of Forecasting**, v. 30, n. 3, p. 464–476, jul. 2014.

LINDQVIST, J. Operation of a Hydrothermal Electric System: A Multistage Decision Process. **Power Apparatus and Systems, Part III. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 81, n. 3, p. 1–6, abr. 1962.

MACEIRA, M. E. P. et al. Ten years of application of stochastic dual dynamic programming in official and agent studies in Brazil description of the NEWAVE program. **16th PSCC, Glasgow, Scotland**, p. 14–18, 2008.

MACEIRA, M. E. P.; DAMAZIO, J. M. **The use of PAR(p) model in the stochastic dual dynamic programming optimization scheme used in the operation planning of the Brazilian hydropower system**. 2004 International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems. **Anais...** In: 2004 INTERNATIONAL CONFERENCE ON PROBABILISTIC METHODS APPLIED TO POWER SYSTEMS. , set. 2004.

MACEIRA, M. P.; COSTA, A.; MARCATO, A. L. M. Programação dinâmica dual estocástica aplicada ao planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos com representação do processo estocástico de afluições por modelos auto-regressivos periódicos. **Relatório Técnico CEPEL**, v. 237, p. 93, 1993.

MARCATO, A. L. M. **Representação Híbrida de Sistemas Equivalentes e Individualizados para o Planejamento da Operação de Médio Prazo de Sistemas de Potência de Grande Porte**. Tese de Doutorado—Rio de Janeiro, RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

MATALAS, N. C. Mathematical assessment of synthetic hydrology. **Water Resources Research**, v. 3, n. 4, p. 937–945, 1967.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. **Technometrics**, v. 21, n. 2, p. 239–245, 1 maio 1979.

MCLEOD, A. I.; HIPEL, K. W.; LENNOX, W. C. Advances in Box-Jenkins modeling: 2. Applications. **Water Resources Research**, v. 13, n. 3, p. 577–586, 1977.

MOORE, N. Y.; YEH, W. W.-G. Economic Model for Reservoir Planning. **Journal of the Water Resources Planning and Management Division**, v. 106, n. 2, p. 383–400, jul. 1980.

MULVEY, J. M.; VLADIMIROU, H. Applying the progressive hedging algorithm to stochastic generalized networks. **Annals of Operations Research**, v. 31, n. 1, p. 399–424, 1 dez. 1991.

NERY, E. **Mercados e regulação de energia elétrica**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 2012. v. 1

NIEDERREITER, H. Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numbers. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 84, n. 6, p. 957–1041, 1978.

NIEDERREITER, H. Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods. In: **Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods**. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. [s.l.] Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. p. i–vi.

NILSSON, O.; SJELVGREN, D. Mixed-integer programming applied to short-term planning of a hydro-thermal system. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 11, n. 1, p. 281–286, fev. 1996.

NOAKES, D. J.; MCLEOD, A. I.; HIPEL, K. W. Forecasting monthly riverflow time series. **International Journal of Forecasting**, v. 1, n. 2, p. 179–190, 1985.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. **Numerical Optimization**. 2nd edition ed. New York: Springer, 2006.

NORBIATO, T.; DINIZ, A.; BORGES, C. **A decomposition scheme for Short Term Hydrothermal Scheduling problems suitable for parallel processing**. Power Systems Computation Conference (PSCC), 2014. **Anais...** In: POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE (PSCC), 2014. , ago. 2014.

OLIVEIRA, G. G.; SOARES, S. A second order network flow algorithm for hydrothermal scheduling. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 10, n. 3, p. 1635–1641, ago. 1995.

ONS. **PAR - Plano de Ampliação e Reforços**. 2014a. Disponível em: <http://www.ons.org.br/plano_ampliacao/plano_ampliacao.aspx>. Acesso em: 15 jan. 2015.

ONS. **Procedimentos de Rede**. 2014b. Disponível em: <<http://www.ons.org.br/procedimentos/index.aspx>>. Acesso em: 15 jan. 2015.

ONS. **PMO - Programa Mensal da Operação**. jan. 2015a. Disponível em: <http://www.ons.org.br/operacao/programa_mensal_operacao.aspx>. Acesso em: 20 jan. 2015.

ONS. **Mapas do SIN**. mar. 2015b. Disponível em: <http://www.ons.org.br/conheca_sistema/mapas_sin.aspx>. Acesso em: 3 set. 2015.

PALFI, G.; ZAMBON, R. **Hydro and Wind Power Complementarity and Scenarization in Brazil**. World Environmental and Water Resources Congress 2013. **Anais...**American Society of Civil Engineers, 2013. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/9780784412947.237>>. Acesso em: 13 jan. 2015.

PENNA, D. D.; MACEIRA, M. E. P.; DAMÁZIO, J. M. **Selective sampling applied to long-term hydrothermal generation planning**. 17th PSCC Proceedings. **Anais...** In: POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE PSCC. Stockholm, Sweden: , 2011. Disponível em: <http://pscc.ee.ethz.ch/uploads/tx_ethpublications/fp518.pdf>. Acesso em: 6 fev. 2015.

PEREIRA, M. V. F. et al. Stochastic Streamflow Models for Hydroelectric Systems. **Water Resources Research**, v. 20, n. 3, p. 379–390, 1984.

PEREIRA, M. V. F. **Optimal scheduling of hydrothermal systems - an overview**. IFAC Symposium on Planning and Operation of Electric Energy System - Preprints. **Anais...**Rio de Janeiro, RJ: , 1985.

PEREIRA, M. V. F. Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 11, n. 3, p. 161–169, jul. 1989.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. A Decomposition Approach to the Economic Dispatch of Hydrothermal Systems. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-101, n. 10, p. 3851–3860, out. 1982.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Application of Decomposition Techniques to the Mid - and Short - Term Scheduling of Hydrothermal Systems. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-102, n. 11, p. 3611–3618, nov. 1983.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. OPERATION PLANNING OF LARGE-SCALE HYDROELECTRICAL SYSTEMS. In: **Proceedings of the Eighth Power Systems Computation Conference**. [s.l.] Butterworth-Heinemann, 1984a. p. 239–243.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. **Aplicação de Técnicas de Decomposição ao Pré-Despacho de Sistemas Hidrotérmicos**. VII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (SNPTEE). **Anais...** In: SNPTEE. Brasília, DF: , 1984b.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach. **Water Resources Research**, v. 21, n. 6, p. 779–792, 1985.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. **Mathematical Programming**, v. 52, n. 1–3, p. 359–375, 1 maio 1991.

PESCHON, J.; BREE, D. W.; HAJDU, L. P. Optimal power-flow solutions for power system planning. **Proceedings of the IEEE**, v. 60, n. 1, p. 64–70, jan. 1972.

PHILPOTT, A. B.; DE MATOS, V. L. Dynamic sampling algorithms for multi-stage stochastic programs with risk aversion. **European Journal of Operational Research**, v. 218, n. 2, p. 470–483, 16 abr. 2012.

PHILPOTT, A. B.; GUAN, Z. On the convergence of stochastic dual dynamic programming and related methods. **Operations Research Letters**, v. 36, n. 4, p. 450–455, jul. 2008.

PRÉKOPA, A.; WETS, R. J.-B. **Stochastic programming**. [s.l.] North-Holland, 1986. v. 27

PSR. **SDDP Despacho Hidrotérmico Estocástico com Restrições de Rede**. 2015. Disponível em: <http://www.psr-inc.com.br/portal/psr_pt_BR/servicos/modelos_de_apoio_a_decisao/studio_operas/sddp/>. Acesso em: 27 jan. 2015.

QUINTERO, R. D. **Modelagem da função de produção de uma usina hidrelétrica com base nas características individuais das unidades geradoras**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: UFSC, mar. 2013.

ROCKAFELLAR, R. T.; WETS, R. J.-B. Scenarios and Policy Aggregation in Optimization Under Uncertainty. **Mathematics of Operations Research**, v. 16, n. 1, p. 119–147, 1 fev. 1991.

ROSENTHAL, R. E. A Nonlinear Network Flow Algorithm for Maximization of Benefits in a Hydroelectric Power System. **Operations Research**, v. 29, n. 4, p. 763–786, 1 jul. 1981.

RYAN, S. M. et al. **Toward scalable, parallel progressive hedging for stochastic unit commitment**. 2013 IEEE Power and Energy Society General Meeting (PES). **Anais...** In: 2013 IEEE POWER AND ENERGY SOCIETY GENERAL MEETING (PES). , jul. 2013.

SALAS, J. D.; DELLEUR, J. W.; YEVJEVICH, V. **Applied Modeling of Hydrologic Time Series**. [s.l.] Water Resources Publications, 1980.

SCUZZIATO, M. R. **Proposta de um modelo para alocação ótima de unidades hidrelétricas para usinas em cascata**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina,

Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2011.

SHAPIRO, A. Analysis of stochastic dual dynamic programming method. **European Journal of Operational Research**, v. 209, n. 1, p. 63–72, 2011.

SHAPIRO, A. et al. Risk neutral and risk averse Stochastic Dual Dynamic Programming method. **European Journal of Operational Research**, v. 224, n. 2, p. 375–391, 16 jan. 2013.

SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYŃSKI, A. **Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory, Second Edition**. [s.l.] SIAM, 2014.

SHAPIRO, A.; PHILPOTT, A. A Tutorial on Stochastic Programming. 2007.

SIFUENTES, W.; VARGAS, A. Short-term hydrothermal coordination considering an AC network modeling. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 29, n. 6, p. 488–496, jul. 2007.

SIQUEIRA, T. G. et al. **Stochastic Dynamic Programming for Long Term Hydrothermal Scheduling Considering Different Streamflow Models**. International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2006. PMAPS 2006. **Anais...** In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON PROBABILISTIC METHODS APPLIED TO POWER SYSTEMS, 2006. PMAPS 2006. , jun. 2006.

SOARES, S.; CARNEIRO, A. A. F. M. Optimal operation of reservoirs for electric generation. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 6, n. 3, p. 1101–1107, jul. 1991.

SOUZA THOMÉ, F. **Representação de não-Convexidades no Planejamento da Operação Hidrotérmica utilizando PDDE**. Tese de Doutorado—Rio de Janeiro: UFRJ, jun. 2013.

STAGE, S.; LARSSON, Y. Incremental Cost of Water Power. **Power Apparatus and Systems, Part III. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 80, n. 3, p. 361–364, abr. 1961.

SUTLOVIC, E.; CUJIC-COKO, S.; MEDIC, I. Characteristics of basin inflows a statistical analysis for long-term/mid-term hydrothermal scheduling. **Thermal Science**, v. 18, n. 3, p. 799–809, 2014.

SVOBODA, A. J. et al. Short-term resource scheduling with ramp constraints [power generation scheduling]. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 12, n. 1, p. 77–83, fev. 1997.

TAKIGAWA, F. Y. K. **Desenvolvimento de um modelo computacional para o problema da programação diária da operação de sistemas hidrotérmicos**. Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2010.

TAKRITI, S.; BIRGE, J. R.; LONG, E. A stochastic model for the unit commitment problem. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v. 11, n. 3, p. 1497–1508, 1996.

TERRY, L. A. et al. Coordinating the Energy Generation of the Brazilian National Hydrothermal Electrical Generating System. **Interfaces**, v. 16, n. 1, p. 16–38, 1 jan. 1986.

THOMAS, H. A.; FIERING, M. B. Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation. In: **Design of water-resource systems**. [s.l.] Harvard University Press Cambridge, MA, 1962. p. 459–486.

TOMÉ, F. S. **Representação de Não-Convexidades no Planejamento da Operação Hidrotérmica utilizando PDDE**. Tese de Doutorado—Rio de Janeiro, RJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2013.

VAN SLYKE, R.; WETS, R. L-Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Programming. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 17, n. 4, p. 638–663, 1 jul. 1969.

WALLACE, S. W.; FLETEN, S.-E. Stochastic Programming Models in Energy. In: A. RUSZCZYNSKI, AND A. S. (Ed.). **Handbooks in Operations Research and Management Science**. Stochastic Programming. [s.l.] Elsevier, 2003. v. 10p. 637–677.

WATSON, J.-P.; WOODRUFF, D. Progressive hedging innovations for a class of stochastic mixed-integer resource allocation problems. **Computational Management Science**, v. 8, n. 4, p. 355–370, 1 nov. 2011.

WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. **Power Generation Operation and Control**. [s.l.] John Wiley & Sons, 1984.

YAKOWITZ, S. Dynamic programming applications in water resources. **Water Resources Research**, v. 18, n. 4, p. 673–696, 1 ago. 1982.

ZAMBELLI, M. DE S. **Planejamento da operação energética do sistema interligado nacional baseado em modelo de controle preditivo**. Tese de Doutorado—[s.l: s.n.].

ZAMBON, R. et al. **Two-Stage Stochastic Optimization of Large-Scale Hydrothermal System**. World Environmental and Water Resources Congress 2012. **Anais...**American Society of Civil Engineers, 2012. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/9780784412312.247>>. Acesso em: 13 jan. 2015.

ZAMBON, R. et al. **A Stochastic Hydrothermal Decision Support System for Planning Operation: New Developments for the HIDROTERM Model**. World Environmental and Water Resources Congress 2013. **Anais...**American Society of Civil Engineers, 2013. Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/9780784412947.153>>. Acesso em: 13 jan. 2015.