

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

*Invariância de escala e termodinâmica de
teorias com interação forte*



Gabriel Neves Ferrari

Gabriel Neves Ferrari

Invariância de escala e termodinâmica de teorias com interação forte

Orientador: Prof. Dr. Marcus Benghi Pinto

Documento apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física
da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte
dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Florianópolis,
30 de setembro de 2016.

Ao α e Ω , princípio e fim.

Agradecimentos

Àquele ao qual minha vida se resume e por meio de quem tudo foi criado, Jesus Cristo.

A Décio e Silvana, meus pais, cujo amor por mim ensina o que livros jamais poderão conter. Estes últimos quatro anos teriam sido mais penosos sem vocês.

À minha bela irmã Mariana. Desejo escrever artigos com o capricho do seu estilismo.

A vô Aloísio, vô Décio, vô Helga e vô Lourdes. A ternura de vocês é única e reconfortante.

A toda minha família pelo apoio em cada etapa até aqui.

Ao Marcus, que com rara didática me ensina física já há algum tempo. Trabalhar com você formou minha concepção de ciência.

À amada família Braglia. Thiago e pastores Adalberto, Lu, Israel e Fran, há seis anos e meio vocês tem me conduzido ao cume do monte de modo sobremodo excelente.

À família do castelo, I.F, I.Blu, I.C, I.P e I.J. Encontro a paz e o céu junto a vocês. Desejo servi-los em amor por todos os dias de minha vida.

Aos heinzers. Amizade, alegria e boa música são parte do que intensamente vivo com vocês.

Aos colegas André, Camilo, Kendi, Militzer, Tulio, Bruna, Thamiris e Lídia do grupo de Teoria de Campos, por cada discussão de física e, claro, cada rodada de café. Sim, por cada paçoca também.

À amiga Dane, cujo TCC revisei e, sem perceber, assim me inspirava a finalizar esta tese.

Ao amigo Julio, agora distante porém sempre incentivador.

A Jean-Loïc Kneur pela hospitalidade em Montpellier e por ter colaborado na parte principal deste trabalho.

À banca examinadora deste trabalho e do exame de qualificação (Nicolás, Rudnei, Fred, Paulo Liebgott, Celso, Pawel, Paulo Sena e Ricardo). Suas contribuições e ideias complementaram e aperfeiçoaram o que foi aqui desenvolvido.

A Antônio Machado do PPGFSC, cujas eficiência e excelência tanto auxiliam em nossas obrigações.

A Maria, Mariângela e Paulo Machado do Departamento de Física pelo apoio.

A todos os meus professores, desde o jardim na escola Cristo Bom Pastor até o doutorado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

*“I will make the shadow cast by the sun go back the ten steps it has gone on the stairway of Ahaz.
So the sunlight went back the ten steps it had gone down.”*
Is. 38.8, The Holy Bible, *New international version.*

Resumo

Recentemente, tem-se proposto técnicas de ressonância variacional que incorporem propriedades do grupo de renormalização como uma alternativa para a eliminação do problema da dependência de escala em quantidades termodinâmicas calculadas através de aproximações como a HTLpt *Hard-Thermal-loop Perturbation Theory*. Aqui, este novo método será utilizado para calcular a pressão de uma teoria interessante que naturalmente contém liberdade assintótica, o modelo escalar sigma não linear (NLSM), o qual também possui renormalizabilidade (em $1+1$ dimensões), anomalia do traço e geração de um *gap* de massa como ocorre em teorias de Yang-Mills. Na literatura encontra-se a termodinâmica deste modelo calculada em LO (*leading order*) e NLO *next to the leading order* na expansão $1/N$ e também em simulações numéricas. No entanto, nenhuma destas aplicações preocupou-se com invariância frente à escala de renormalização. Combinaremos a implementação do grupo de renormalização à OPT (*Optimized Perturbation Theory*) na chamada *Renormalization Group (Improved) OPT* (RGOPT) para calcular a pressão do NLSM em $1+1$ dimensões e, apesar de ser perturbativa a incorporação das expansões da OPT pelos resultados invariantes frente ao grupo de renormalização, confirmamos que resultados não perturbativos podem ser atingidos quando as soluções são otimizadas através de um apropriado método variacional. Mostramos, considerando a primeira correção não trivial, que esta combinação de métodos adotada gera uma fenomenologia invariante de escala e convergente para resultados de NLO em $1/N$ e também para o modelo calculado na rede. Portanto, este trabalho demonstra que a RGOPT é um método não perturbativo robusto para o possível tratamento da QCD em densidades bariônicas finitas, domínio ainda inacessível a simulações numéricas desta teoria.

Por outro lado, o modelo fermiônico de Nambu–Jona-Lasinio estendido pelo *loop* de Polyakov (PNJL), não renormalizável em $3+1$ dimensões e sem liberdade assintótica, pode auxiliar na obtenção do diagrama de fases da QCD. A determinação do ponto crítico neste diagrama depende experimentalmente de quantidades termodinâmicas como a densidade do número de quarks e a susceptibilidade do número de quarks, diretamente relacionadas aos cumulantes da pressão. Estes aparecem como coeficientes na expansão da pressão em séries de Taylor e, especificamente para o cumulante de segunda ordem (c_2), os resultados da QCD na rede (LQCD) mostram-no aumentando com a temperatura até atingir o limite de Stefan-Boltzmann de um gás ideal não interagente. Por outro lado, quando se calcula a dependência térmica deste coeficiente através de modelos efetivos para a QCD considerando-se um canal vetorial de repulsão parametrizado por G_V , este observável atinge um máximo em uma temperatura ligeiramente supercrítica, desviando-se de previsões da rede. Um dos resultados aqui discutidos é o fato de efeitos de N_c finito (com $G_V = 0$) contribuírem para este máximo da mesma maneira que as interações vectoriais, mas, neste caso, proporcionalmente ao acoplamento escalar (G_S), determinável fenomenologicamente, mostrando que esta repulsão pode ser gerada sem que se precise

atribuir um valor a G_V . Neste trabalho, aplicamos a OPT ao modelo PNJL $SU(2)$ a fim de confrontar nossos resultados com os dados da QCD na rede e a aproximação LN com $G_V = 0$ e $G_V \neq 0$. Vimos que c_2 comporta-se satisfatoriamente em baixas temperaturas e nas proximidades da temperatura crítica, entretanto, como também observado em LN com $G_V \neq 0$, gera um máximo para altas temperaturas. Identificamos a origem analítica deste extremo quando correções de ordem $1/N_c$ proporcionais a G_S são consideradas e concluímos ser possível que o comportamento correto do cumulante de segunda ordem além do limite LN seja devidamente atingido por modelos efetivos caso estes simulem o fenômeno da liberdade assintótica. De fato, uma vez que o PNJL simula o confinamento através do *loop* de Polyakov, espera-se que seja plausível a adição de informações provenientes do *running coupling constant* da QCD para que o modelo adquira artificialmente características de liberdade assintótica e, então, possa exibir melhor concordância com a QCD na rede para altas temperaturas, conforme mostraremos.

Palavras-chave: *Métodos não perturbativos em teoria quântica de campos, Liberdade assintótica, Grupo de renormalização.*

Abstract

Recently, a novel variational resummation technique incorporating renormalization group properties has been proposed as an alternative to solve the scale dependence problem which plagues the evaluation of thermodynamical quantities within the framework of approximations such as HTLpt (Hard-Thermal-Loop Perturbation Theory). Here, this new method is used to evaluate the pressure of an interesting theory that naturally displays asymptotic freedom, the nonlinear sigma model (NLSM), which is renormalizable in $1 + 1$ dimensions and also displays trace anomaly and the generation of a mass gap as Yang-Mills theories. Among the works based on this model, its thermodynamics has been evaluated at LO (leading order) and NLO (next to the leading order) within the $1/N$ expansion as well as within the model calculated on a lattice. However, none of these applications has treated the NLSM scale-invariance. Then our first step within the NLSM was to look for a way in which it could, simultaneously, be subject to the renormalization group properties and the OPT (Optimized Perturbation Theory), using the Renormalization Group Improved OPT (RGOPT) to evaluate the pressure of the NLSM. We show, considering only the first trivial contribution, the convergence of the RGOPT, as well as its scale invariance properties. Therefore, the work presented here supports the RGOPT as a robust nonperturbative method that can eventually be applied to QCD at finite baryonic densities where, so far, LQCD predictions are not possible.

On the other hand, the fermionic Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio model (PNJL), non renormalizable in $3 + 1$ dimensions and not displaying asymptotic freedom, is useful for the QCD phase diagram. The determination of the critical point on this diagram depends experimentally on some thermodynamic quantities like the quark number density and the quark number susceptibility, which are related to the cumulants of the pressure. These quantities appear as coefficients in the Taylor expansion of the pressure and, specifically for the second order cumulant (c_2), QCD results on the lattice (LQCD) show that it raises with the temperature towards the Stefan-Boltzmann limit. On the other hand, when one evaluates c_2 within quark effective models considering a repulsion on the vector channel parametrized by G_V , this observable reaches a maximum just after T_c , deviating itself from LQCD predictions. One of the significative results discussed in this work is the fact that finite N_c effects (with $G_V = 0$) contribute to this maximum in the same way that when a vector interaction is taken into account, but proportionally to the phenomenologically fixed scalar coupling (G_S), showing that this repulsion could be dynamically generated without the need of attributing a controversial value to G_V . Here we apply the OPT method to the two flavor PNJL (at $G_V = 0$) in order to confront our results with those furnished by LQCD simulations and by the LN approximation at $G_V = 0$ and also at $G_V \neq 0$. We show that c_2 behaves satisfactorily at low- T and close to T_c , but, as observed within the case LN, with $G_V \neq 0$, it develops a maximum at high- T . We identify the analytical origin of this extremum and conclude that the issue does not come from $G_V \neq 0$ itself, once radiative corrections

produce the same discrepancy with $G_V = 0$ even when first order $1/N_c$ corrections proportional to G_S are considered. So, it would be possible that the correct high temperature behavior of the second order cumulant beyond the LN limit could be properly achieved by effective quark models if they also mimic the so called asymptotic freedom phenomenon. Since the PNJL simulates the confinement via the Polyakov loop it seems plausible that, if we add relevant QCD running coupling constant pieces of information to the model, incorporating artificial asymptotic freedom aspects, its results could reflect a better agreement with LQCD at high temperatures.

Keywords: *Nonperturbative methods in quantum field theory, Asymptotic freedom, Renormalization group.*

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 21 |
| 2 | OPT aplicada ao modelo escalar $g\Phi^4$ | 29 |
| 2.0.1 | Primeira ordem | 30 |
| 2.1 | Renormalização | 32 |
| 2.1.1 | O grupo de renormalização | 34 |
| 3 | RGOPT aplicada ao modelo sigma não linear | 39 |
| 3.1 | O modelo | 41 |
| 3.2 | Função de Green de dois pontos e os coeficientes de renormalização | 43 |
| 3.2.1 | Pressão até dois <i>loops</i> | 46 |
| 3.2.2 | Invariância da pressão frente ao grupo de renormalização | 47 |
| 3.3 | RGOPT | 49 |
| 3.3.1 | Ordem δ^0 | 49 |
| 3.3.2 | Ordem δ | 50 |
| 3.4 | OPT/SPT padrão | 53 |
| 3.5 | Resultados numéricos | 54 |
| 4 | OPT aplicada ao segundo cumulante do modelo PNJL | 65 |
| 4.1 | Modelo para quarks sem confinamento tratado pela OPT | 69 |
| 4.1.1 | Lagrangiana e bosonização | 69 |
| 4.1.2 | Interpolação do modelo | 70 |
| 4.1.3 | Potencial efetivo otimizado | 71 |
| 4.2 | Modelo de NJL com <i>loop</i> de Polyakov (PNJL) | 74 |
| 4.2.1 | Estrutura | 75 |
| 4.3 | Implementação da OPT no PNJL | 76 |
| 4.3.1 | Cumulantes | 79 |
| 4.4 | Dependência térmica do acoplamento G_S | 83 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Conclusões e perspectivas | 87 |
| A | O potencial efetivo | 91 |
| B | OPT aplicada ao modelo $g\Phi^4$: cálculos em segunda ordem | 95 |
| B.1 | Termos diretos | 95 |
| B.2 | Inclusão do termo de troca | 96 |
| C | Relações úteis em $T \neq 0$ | 99 |
| D | Cálculo formal da pressão do NLSM no limite de LN | 101 |
| E | Pressão do NLSM em dois <i>loops</i> | 105 |
| F | Integrais térmicas do PNJL em dois <i>loops</i> | 107 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Diagrama de fases $T-\mu$ para a matéria de quarks, indicando o alcance dos aceleradores de partículas FAIR, RHIC e LHC e a suposição do ponto crítico. A LQCD prevê resultados apenas para densidades bariônicas nulas. Figura extraída da Ref. [2]. | 22 |
| 1.2 | Pressão como função da temperatura para a HTLpt. Note a forte dependência da escala arbitrária de renormalização, tomada no intervalo $\pi T \leq M \leq 4\pi T$. Figura extraída da Ref. [16]. | 23 |
| 2.1 | Autoenergia em um par de interação. | 30 |
| 2.2 | Pressão até a ordem δ^1 | 30 |
| 2.3 | Acoplamento da teoria $g\Phi^4$ em função da escala de energia. A função crescente indica ausência de liberdade assintótica no modelo. | 36 |
| 3.1 | Propagador e vértices não-derivativo e derivativo, respectivamente. | 44 |
| 3.2 | Contribuições para a auto-energia, sendo a primeira vinda do vértice não derivativo e as demais do vértice derivativo. | 45 |
| 3.3 | Diagramas até ordem g | 50 |
| 3.4 | Massas normalizadas pela escala central em $T = 0$ como função de $g(M_0)$ para $N = 4$ e $\alpha = 1$ | 55 |
| 3.5 | Dependência térmica da massa otimizada normalizada correspondente às soluções físicas em função da temperatura normalizada para os casos $\alpha = 0.5, 1, 2$, com $N = 4$ e $g(M_0) = 1$. Nas bandas de RGOPT em 2 loops e SPT, a linha contínua refere-se a $\alpha = 1$ (escala central) e os contornos inferior e superior a $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 2$ respectivamente. 56 | 56 |
| 3.6 | Curvatura da massa otimizada normalizada dependente da temperatura como função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 1$ | 57 |
| 3.7 | P/P_{SB} como função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$. 57 | 57 |
| 3.8 | Densidade de entropia como função da temperatura, ambas normalizadas. $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$ | 58 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.9 | Densidade de energia normalizada pelo limite de SB como função da temperatura normalizada. $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$ | 59 |
| 3.10 | Anomalia do traço normalizada por T^2 como função da temperatura normalizada. Os picos mostram onde o sistema é altamente interagente. $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$ | 60 |
| 3.11 | Taxa térmica de variação da massa como função da temperatura, com os picos sinalizando regiões de possíveis <i>crossovers</i> . $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$ | 60 |
| 3.12 | Parâmetro da equação de estado como função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$ | 61 |
| 3.13 | Quadrado da velocidade do som em função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$. A equação de estado da RGOPT2L mostra-se a mais dura a partir de $T/M_0 \approx 0.02$ e a SPT atinge rapidamente um determinado patamar. | 62 |
| 3.14 | Quadrado da velocidade do som em função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$ para RGOPT2L nas regiões de inflexão da massa. O comportamento em $T/M_0 \approx 0.02$ é semelhante ao encontrado pelo modelo de NJL nas proximidades da temperatura crítica para a transição quiral. | 63 |
| 3.15 | P/P_{SB} como função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 1$ | 63 |
| 4.1 | Contribuição na ordem δ . A linha contínua refere-se a termos dependentes de η que serão posteriormente expandidos. As linhas tracejada e pontilhada referem-se, respectivamente, aos campos σ e π . O primeiro diagrama contribui com $1/N_c^0$ (termo de Hartree) e os de ordem δ com $1/N_c$ (termos de Hartree-Fock) | 71 |
| 4.2 | Contribuições até a ordem δ^2 , como resultado da aplicação da OPT ao PNJL. Primeiro gráfico, ordem $\delta^0 N_c$ à la Hartree, LO em $1/N_c$; segundo, ordem δN_c^0 à la Hartree-Fock, LO em $1/N_c$; terceiro, $\delta^2 N_c^0$, NLO em $1/N_c$ e corrige o propagador mesônico; quarto, NNLO em $1/N_c$, corrige o vértice; quinto, NNLO em $1/N_c$, corrige o propagador quarkiónico. | 77 |
| 4.3 | Cumulantes de segunda ordem, em $\mu = 0$, como função de T/T_c , obtidos através da OPT, da aproximação LN com $G_V = 0$ e a aproximação LNGV com $G_V = G_S/N_c$ para o modelo PNJL. Figura extraída da Ref. [36]. Os dados da rede foram obtidos da Ref. [127]. | 80 |
| 4.4 | Contribuições ao c_2 em altas temperaturas como função da temperatura renormalizada pela temperatura de transição quiral. Figura extraída da Ref. [36]. | 81 |
| 4.5 | Adaptação do <i>running</i> da QCD ao acoplamento do modelo PNJL em função da temperatura normalizada pela temperatura de transição quiral para a OPT. A função decrescente indica caráter de liberdade assintótica. | 84 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 4.6 | Cumulantes de segunda ordem, em $\mu = 0$, como função da temperatura normalizada pela temperatura de transição quiral para LN e OPT, sendo o acoplamento nesta também tomado segundo o <i>running</i> da QCD a fim de melhorar o comportamento em altas temperaturas. | 84 |
| B.1 | Pressão na ordem δ^2 | 95 |
| B.2 | À esquerda, Σ_{troca} ; à direita, P_{troca} | 96 |
| E.1 | Contribuições não-derivativa e derivativa, respectivamente, para a pressão. | 105 |
| E.2 | Contribuições para a auto-energia. | 105 |

Capítulo 1

Introdução

O tratamento da cromodinâmica quântica (QCD) em sua forma original requer implementações numéricas altamente apuradas, em que a QCD na rede (LQCD) discretiza o espaço-tempo e utiliza a lagrangiana pura da teoria, sem aproximações, para obter observáveis termodinâmicos. No entanto, o método limita-se a regiões de baixa densidade bariônica (proporcional ao potencial químico, μ) devido ao conhecido problema numérico do sinal (as integrais térmicas para um sistema fermiônico de alta densidade bariônica são altamente oscilatórias devido ao princípio da exclusão de Pauli, pois o sinal da função de onda das partículas muda mediante a cada uma de suas intersubstituições [1]). Logo, quando se deseja explorar regiões de potencial químico finito, resultados são obtidos apenas através de artifícios analíticos. O diagrama de fases da QCD (Fig. 1.1, extraída da Ref. [2]) mostra que regiões de baixas temperatura (T) e densidade bariônica (proporcional a μ) compreendem a matéria ordinária (hadrônica), conforme concebemos a natureza cotidianamente. Neste regime, tem-se quarks e glúons confinados no interior de hádrons em que, devido à forte interação, quarks possuem elevados valores de massa efetiva. No entanto, colisões de íons pesados [3, 4, 5] investigam valores intermediários de temperatura e potencial químico submetendo o sistema a condições extremas, em que a matéria hadrônica dá lugar à configuração mista do QGP.

Além das dificuldades em μ finito, surgem problemas técnicos também em altas temperaturas quando se usa a lagrangiana pura da QCD. Embora o uso de métodos perturbativos no acoplamento seja, a princípio, válido neste regime haja vista a liberdade assintótica, a convergência da série devido à perda de intensidade do acoplamento forte (α_s) não é suficiente para que se obtenha um espectro térmico satisfatório ao se extrair informações quantitativas da QCD em temperaturas experimentalmente acessíveis. Este método perturbativo de acoplamento fraco converge apenas para muito além da temperatura crítica de desconfinamento no cálculo da energia livre do QGP, falhando consideravelmente nesta temperatura e abaixo dela, o que compromete a confiabilidade dos resultados [6, 7, 8]. Em geral, estes cálculos perturbativos da energia livre da QCD em temperatura finita partem do

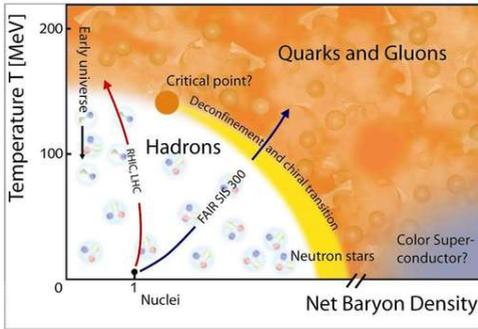


Figura 1.1: Diagrama de fases $T - \mu$ para a matéria de quarks, indicando o alcance dos aceleradores de partículas FAIR, RHIC e LHC e a suposição do ponto crítico. A LQCD prevê resultados apenas para densidades bariônicas nulas. Figura extraída da Ref. [2].

resultado para um gás ideal de glúons não massivos. Contudo, a teoria de perturbação pressupõe que a série representativa de um observável possa ser truncada com poucos termos, em baixas ordens no acoplamento. Por exemplo, na expansão da energia livre em potências do acoplamento [9], o termo que contém $\alpha_s^{3/2}$ é menor do que o termo linear α_s , apenas quando α_s é menor do que cerca de $1/20$, o que corresponde a uma temperatura da ordem de 10^5 GeV. Até a temperatura crítica de desconfinamento o sistema é bastante interagente e, dados os altos valores do acoplamento, não se pode fazer esta aproximação neste regime, sendo que é devido à liberdade assintótica que se obtém a convergência mencionada em altas temperaturas. Portanto, é necessário que se reorganize a série perturbativa para que se trate temperaturas experimentalmente atingíveis. Esta reorganização é especialmente dificultada pela divergência da série, mas há diversas maneiras com que pode ser desenvolvida. Uma destas possibilidades são os métodos que utilizam aproximadores de Padé [10, 11], implementação cuja validade, no entanto, depende de se conhecer uma boa quantidade de termos da série de perturbação.

Uma alternativa para a exploração de regiões de valores intermediários para a temperatura e também com $\mu \neq 0$ é um procedimento de reorganização da série perturbativa para a QCD em $T \neq 0$ conhecido como HTLpt (*Hard-thermal-loop Perturbation Theory*) [12, 13, 14, 15], que fornece resultados não perturbativos utilizando a lagrangiana completa da QCD. Contudo, note na Fig. 1.2, extraída da Ref. [16], que apesar de HTLpt e LQCD de certa forma concordarem na escala “central” de energia, $M = 2\pi T$ (os autores variaram a escala de $M = \pi T$ até $M = 4\pi T$ [9, 16, 17]), os melhores resultados da HTLpt apresentam forte dependência de escala e, conseqüentemente divergência com relação à rede, o que precisa ser corrigido ao se traduzir os resultados perturbativos de altas ordens da QCD em não perturbativos, a fim de que se respeite as propriedades do grupo de renormalização

(RG).

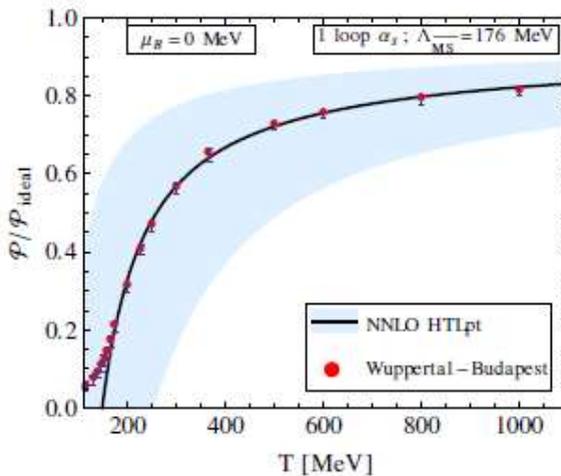


Figura 1.2: Pressão como função da temperatura para a HTLpt. Note a forte dependência da escala arbitrária de renormalização, tomada no intervalo $\pi T \leq M \leq 4\pi T$. Figura extraída da Ref. [16].

Teorias dependentes de escala fornecem interpretações físicas que variam de acordo com a escolha de uma quantidade arbitrária, o que compromete a confiabilidade de seus resultados. Uma maneira de se eliminar a dependência de escala em teorias com interação forte é submetê-las ao RG e, neste trabalho, testamos o método em um modelo efetivo para a QCD. O uso de modelos efetivos tem sido largamente explorado nas últimas décadas, sendo que cada um representa determinados aspectos da QCD de acordo com o objetivo proposto. Aplicaremos o RG no modelo sigma não linear (NLSM), cuja termodinâmica tem sido comparada [18, 19, 20] com a de teorias Yang-Mills [21], por exemplo, pois o modelo e estas teorias compartilham propriedades como liberdade assintótica, anomalia do traço (medida de interação) e geração não perturbativa de um *gap* de massa, mesmo sem quebra de simetria [22]. Nossos resultados praticamente eliminam as bandas vistas na Fig. 1.2 e, pelo fato de surgirem a partir da combinação do RG com o método não perturbativo de otimização OPT [23] (RGOPT), fornecem correções do tipo $1/N$. Contrariamente a implementações que realizam expansões em torno do limite de um gás ideal não massivo e são perturbativas no acoplamento, dando origem a diversos problemas de divergência, a OPT ou, ainda, a SPT (*Screened Perturbation Theory*, [24, 25]), sua versão melhor adaptável às altas temperaturas, parte de um gás ideal massivo e assim a série de perturbação de observáveis é reorganizada. Apesar de os cálculos terem inicialmente caráter perturbativo, os

resultados fornecidos são não perturbativos visto que é necessária a otimização destes para que sejam interpretados fisicamente. Na teoria escalar $g\Phi^4$, por exemplo, basicamente adiciona-se um termo gaussiano do tipo $(1 - \delta)m^2\Phi^2$ à densidade lagrangiana e reescalonar-se o acoplamento como $g \rightarrow \delta g$. Utiliza-se então uma aproximação variacional em que o resultado de um caso cuja solução é conhecida fica reescrito como um caso particular de uma teoria mais completa, pois tratamos δ como um pequeno parâmetro de interação para que se desenvolva uma expansão em torno da teoria exatamente solúvel representada pelo termo livre $m^2\Phi^2$. Ao final, δ retorna ao seu valor original ($\delta = 1$), enquanto fixa-se a massa via otimização segundo um método variacional apropriado¹.

Procede-se, portanto, com o cálculo de uma quantidade física arbitrária como a pressão P , por exemplo, até dada ordem k desejada, expandindo-a em termos de δ . Os resultados não perturbativos otimizados são obtidos requerendo-se que $P_{\text{OPT}}^{(k)}$ seja calculada com a menor sensibilidade ante variações do parâmetro de massa m , critério conhecido como Princípio da Mínima Sensibilidade (PMS) [26]:

$$\left. \frac{\partial P_{\text{OPT}}^{(k)}}{\partial m} \right|_{\bar{m}, \delta=1} = 0. \quad (1.1)$$

Em geral, a solução para esta equação implica em relações autoconsistentes, gerando uma dependência não perturbativa do acoplamento. Na maioria dos casos, correções não perturbativas da ordem de $1/N$ aparecem mesmo na primeira ordem não trivial, enquanto resultados de N grande podem ser recobrados a qualquer momento sob a condição $N \rightarrow \infty$. Fica clara a semelhança entre a OPT e as aproximações de Hartree e Hartree-Fock, em que também se encontra um termo de massa adicionado e subtraído do modelo. Todavia, a principal diferença está no fato de o termo de massa vestido na OPT adquirir características diferentes progressivamente ordem a ordem, incorporando diagramas diretos, de troca, correções ao vértice e etc, enquanto a topologia das correções nos dois métodos é fixada desde o início, sendo termos de tadpole para Hartree e diretos mais os de troca para Hartree-Fock [27]. O método é fortemente útil, visto que evidencia propriedades que não se manifestam em N grande e mostrou bons resultados em diferentes situações físicas envolvendo transições de fases. Quando aplicada ao modelo escalar $g\Phi^4$ em temperatura e densidade finitas [28] para obter-se diagrama de fases, principalmente no estudo dos condensados de Bose-Einstein (BEC, [29]), em que o resultado de N grande não apresentava diferença entre a temperatura crítica para gás ideal e interagente, a OPT determinou um valor satisfatório para esta diferença. Neste caso, estes resultados superam os obtidos através da expansão $1/N$ em LO (*leading order*) e NLO (*next to the leading order*). Em matéria condensada, a técnica descreveu com sucesso o caso da concentração dopante crítica no poliacetileno [30] e o diagrama de fases de sistemas fermiônicos planares magnetizados [31]. A OPT mostrou-se muito eficiente também nos modelos fermiônicos de Gross-Neveu (GN) [32, 33], em que determinou

¹Quando a teoria é massiva utiliza-se um parâmetro variacional sem significado físico em um primeiro momento, que pode ser interpretado como um multiplicador de Lagrange gerador de resultados não perturbativos.

precisamente o ponto tricrítico e região de coexistência de fases em $2+1$ dimensões, e de Nambu–Jona-Lasinio (NJL, [34, 35]), bem como no modelo de NJL estendido pelo loop de Polyakov (PNJL, [36, 37]), onde seus resultados para o cumulante de segunda ordem da pressão apresentam boa concordância com os dados da LQCD. Além disso, foi aplicada em sua extensão para teorias de gauge (HTLpt) à QCD [38] para calcular a pressão da matéria de quarks quente e densa, cujas estimativas para o condensado de quarks e a constante de decaimento do píon no limite quiral (onde a massa de corrente (m_c) dos quarks é igual a zero) a apontaram como uma das mais consistentes e promissoras alternativas à LQCD [16].

A SPT constrói-se inicialmente da mesma maneira que a OPT. Na referência [25] vemos o modelo escalar $O(1) g\Phi^4$ tratado pela SPT, em que basicamente um parâmetro de massa variacional é adicionado à e subtraído da lagrangiana. No entanto, enquanto a OPT fixa não perturbativamente a massa através da equação do PMS, a SPT toma m^2 da ordem de g^0 e δ da ordem de g , expandindo em potências de g e tomando $\delta = 1$ ao final. Feita a expansão perturbativa, obtém-se uma série de potências em g cujos coeficientes dependem de m . A massa é completamente arbitrária em SPT portanto, para que se efetive um cálculo deve-se expressar m^2 como função de g e T após a solução de uma equação do *gap*. No limite de acoplamento fraco temos $g \rightarrow 0$, e a solução para $m^2(T)$ aproxima-se de $gT^2/24$. Finalmente, entrando com este valor para m^2 na expressão da energia livre e reexpandindo-a em potências de g , obtém-se a expansão perturbativa em g .

Neste trabalho, combinaremos a OPT às propriedades do grupo de renormalização e verificaremos as correções que a RGOPT pode trazer ao NLSM em $1+1$ dimensões, de modo a contribuir para a compreensão deste modelo e poder avaliar sua convergência diante do que já se obteve para a rede. Comparações entre a LQCD e o limite LN existentes na literatura nos auxiliarão nesta análise. Veremos que a RGOPT fornece uma descrição mais completa da termodinâmica do NLSM, mostrando como correções além de LN alteram resultados conhecidos deste nível. Operacionalmente, a utilização do RG se dá pelo fato de que no decorrer dos cálculos é comum o desenvolvimento da regularização dimensional, por exemplo, na resolução de integrais divergentes. O método pressupõe a renormalização de algumas quantidades físicas para que a teoria permaneça livre de divergências. Há diversos esquemas de renormalização e variadas maneiras de se tratar os parâmetros de um modelo de modo a eliminar resultados infinitos e, aqui, utilizaremos o esquema de renormalização $\overline{\text{MS}}$. Cada esquema compreende muitas “famílias” de renormalização, ou seja, conjuntos de valores para os parâmetros que tornam a teoria finita, mas não invariante frente à escolha da escala de renormalização, escala arbitrária que não deve influenciar as interpretações qualitativas e quantitativas da solução. De fato, a física que encontraremos dependerá desta escala, e as propriedades do grupo de renormalização tem sido utilizadas em teorias renormalizáveis pelo fato de darem conta destas diferentes maneiras de se redefinir parâmetros de modelos efetivos em diferentes escalas de energia [39], sendo uma alternativa para se

eliminar esta dependência. Em um primeiro momento, o RG foi aplicado à matéria condensada como uma média recursiva de pontos em uma rede a fim de aprimorar resultados em transições de fases [40, 41]. Atualmente, uma forma mais sofisticada é utilizada nos cálculos de teorias quânticas de campos. Por isso, aplicaremos a equação do grupo de renormalização à pressão do NLSM de modo a tornar os resultados mais consistentes e invariantes frente à escolha da escala de renormalização.

Os autores de [42] aplicaram a RGOPT no modelo de Gross-Neveu em $T = 0 = \mu$ e calcularam o condensado de quarks com maior precisão. Em síntese, tomaram a versão interpolada do modelo com o procedimento de renormalização já definido e analisaram sua invariância frente às mudanças na parametrização. Este método, que já foi aplicado à lagrangiana da QCD com soluções satisfatórias para observáveis e, em especial para a fixação da escala da teoria $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ e do acoplamento (α_S) [38], permite que mais ordens sejam obtidas e refina os resultados. Recentemente, partindo do modelo escalar $g\Phi^4$, os autores de [43, 44] mostraram a compatibilidade do método com a inclusão de parâmetros de controle como a temperatura. Além disso, ficou claro neste trabalho a eficácia da RGOPT frente à SPT, por exemplo, para resolver o problema da dependência de escala. Como trata-se da incorporação de informações adicionais à OPT provenientes do RG, não há evidências quanto à absoluta convergência do método; todavia, quando se trabalha com modelos efetivos sempre se pode comparar os resultados com a aproximação de LN, por exemplo.

A ideia central da RGOPT é aplicar a OPT a um modelo efetivo considerando desde o início propriedades de invariância do RG exibidas pelas quantidades físicas. Esta invariância deve ser expressa no nível perturbativo da expansão, ou seja, o parâmetro fictício de massa desempenha um papel fundamental no processo. A cada cálculo na expansão são aplicadas as propriedades do RG, o que torna todos os resultados diretamente invariantes. A consequência disso é que sempre se terá uma associação entre a massa e os acoplamentos e, como a OPT fixa o parâmetro perturbativo de massa, não há parâmetros livres a menos da escala de renormalização. Conforme veremos adiante, assim como ocorre com os outros métodos variacionais como OPT, SPT e HTLpt, o processo de otimização da RGOPT fornece múltiplas soluções para os observáveis [43, 44]. A principal diferença deste método para a SPT e a HTLpt, por exemplo, é não haver a necessidade de se substituir a massa variacional pela chamada solução *screened*, que nada mais é do que um resultado puramente perturbativo [25] com significativas perdas de generalidade e informações não perturbativas. A RGOPT, por sua vez, confronta assintoticamente as soluções otimizadas com o comportamento perturbativo fundamental para pequenos acoplamentos; além disso, este procedimento pode gerar resultados não triviais na ordem mais baixa de perturbação.

Aqui veremos, pela primeira vez, a aplicação da RGOPT no modelo sigma não linear em $1 + 1$ dimensões e temperatura finita. Deste modo, futuramente poderemos analisar estas aplicações em outras teorias igualmente assintoticamente livres, como a QCD. Até aqui, os trabalhos em RGOPT

ativeram-se a analisar a invariância dos observáveis frente ao grupo e os resultados eram, em sua maioria, tomados em função do acoplamento [9, 16, 17], conforme também realizado com as aplicações da SPT em teorias escalares. Entretanto, neste trabalho, além de analisarmos as soluções da massa em termos do acoplamento, daremos atenção principalmente à termodinâmica do modelo, partindo do plano $P - T$, a exemplo das aplicações em QCD e HTLpt que constam destas últimas referências. Deste modo será possível observarmos o comportamento da RGOPT com respeito a características típicas da termodinâmica como o limite de Stefan-Boltzmann (SB) e a anomalia do traço, entre outros, que não foram observados, por exemplo, nas referências [43, 44]. Como veremos adiante, na busca de uma alternativa para a LQCD o método da RGOPT apresenta-se satisfatoriamente consistente e robusto, dada a invariância de escala de seus resultados termodinâmicos.

Na segunda parte deste trabalho, utilizaremos o modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL, [45]), que permite a obtenção de um diagrama de fases $T - \mu$ à la QCD, pois manifesta tanto a simetria quiral quanto a estrutura de fases da QCD [46, 47], embora não contenha liberdade assintótica como o NLSM. Aliás, por ser um modelo efetivo algumas características marcantes da QCD se perdem em sua formulação, como a presença dos glúons e, por isso, não se pode estudar o confinamento na forma original do NJL. Uma maneira de se simular o confinamento de quarks em modelos efetivos é através da inclusão na lagrangiana do chamado loop de Polyakov. Os autores de [48, 49] calcularam quantidades relacionadas à determinação do ponto crítico no diagrama de fases desta maneira (combinação chamada de *Polyakov-loop extended NJL model*, PNJL) e obtiveram os chamados cumulantes de segunda e quarta ordens da pressão. Neste mesmo trabalho, compararam seus resultados com a QCD na rede (LQCD). Embora estes trabalhos contenham simulação do confinamento, restringem-se ao limite de LN o qual, neste caso, significa que o número de cores (N_c) é tomado ao infinito [46]. Os trabalhos que vão além desta aproximação em geral envolvem cálculos onde se atinge a ordem $1/N_c$ [50, 51], mas sua aplicação é tecnicamente complicada. Portanto, é necessário que se busquem métodos alternativos para se ir além de N_c grande que sejam de imediata comparação com os métodos mais simples, cujos resultados já sejam bem estabelecidos. Como vimos acima, um destes métodos alternativos é justamente a OPT, a qual, em modelos com simetria $O(N)$ ou $SU(N)$, fornece uma importante parte das correções de $1/N_c$ já em primeira ordem. Com esta motivação, implementamos [36] a OPT ao PNJL e obtivemos tanto estes cumulantes quanto quantidades a eles relacionadas como susceptibilidade do número de quarks e etc². Estas quantidades costumam ter comportamento crescente com a temperatura e, em altos valores desta, convergem para o limite de um gás livre, o mencionado limite de SB; entretanto, este não foi atingido pelo PNJL tratado com a OPT, que gerou um máximo em altas temperaturas. Uma discrepância semelhante foi observada pelos autores de [53], em que o modelo PNJL, mesmo

²Por não ser renormalizável em $3 + 1$ dimensões, neste regime o PNJL admitiria a aplicação somente das propriedades do grupo de renormalização de Wilson [52], e não da RGOPT conforme se fará no NLSM.

na aproximação de N_c grande porém acrescido de um termo de repulsão vetorial, também gerou um pico no cumulante de segunda ordem³; estes sugeriram, portanto, que a partir de uma certa temperatura a interação vetorial parametrizada por G_V devesse se anular. Buscando uma alternativa para o problema, os autores de [54] utilizaram o EPNJL (*Entangled Polyakov-loop extended NJL model*) para expressar os acoplamentos em função do campo de Polyakov e, deste modo, o pico foi atenuado. Contudo, mostramos que o comportamento inusitado de tais quantidades não está relacionado à repulsão em si, pois é observado também devido ao termo de interação extra gerado pela OPT. Pelo fato de o *loop* de Polyakov simular confinamento, é coerente que o acoplamento possa seguir uma dependência de escala análoga à que origina liberdade assintótica na QCD. Por isso, no presente trabalho tomamos o modelo PNJL e reescrevemos o acoplamento diretamente como função da temperatura respeitando a função β da QCD. Enquanto o EPNJL parte de um *ansatz* para relacionar o acoplamento aos campos de Polyakov e, assim, indiretamente à temperatura, nossa ideia é traduzir os resultados da *running coupling constant* da QCD tomando a escala energia como a temperatura, adicionando características de liberdade assintótica ao PNJL sob OPT para analisar qualitativamente o novo comportamento do cumulante de segunda ordem da pressão.

A estrutura deste trabalho consiste em, no próximo capítulo, exemplificarmos o mecanismo analítico da OPT utilizando o simples modelo escalar $g\Phi^4 O(N)$, bem como sua renormalização. No Capítulo 3, combinaremos a OPT ao grupo de renormalização para obtermos a termodinâmica do modelo NLSM através da RGOPT e compararmos com resultados da LQCD e cálculos de NLO em $1/N$. No Capítulo 4, apresentaremos uma proposta baseada no *running* do acoplamento da QCD para atenuar o mal comportamento do cumulante de segunda ordem calculado no modelo PNJL com a OPT. Finalmente, nossas conclusões e perspectivas serão apresentadas no Capítulo 5.

³No capítulo 4 detalharemos as relações entre a OPT e termos de interação vetorial.

Capítulo 2

OPT aplicada ao modelo escalar $g\Phi^4$

O objetivo deste capítulo é mostrar os rudimentos e algumas propriedades básicas da aplicação da OPT em $T = 0 = \mu$. A exemplo dos autores de [32], que desenvolveram a expansão δ através do modelo de Gross-Neveu, utilizaremos o simples modelo escalar $g\Phi^4$ a fim de tornar a compreensão do mecanismo mais imediata. Como nosso intuito, em breve, é aplicá-la a modelos efetivos para a QCD cujas lagrangianas são, de certa forma, mais sofisticadas, aqui poderemos ter uma ideia inicial dos mecanismos desta aproximação. Pelo fato de no próximo capítulo apresentarmos o modelo sigma não linear $O(N)$, a princípio não massivo, aqui exemplificaremos a OPT utilizando a versão $O(N)$ do modelo $g\Phi^4$ também não massivo, em que se tem um campo escalar Φ_a ($a = 1, \dots, N$) de N componentes. O modelo contém um termo cinético e uma interação quártica parametrizada por g , logo,

$$\mathcal{L}_{O(N)} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_a)^2 + \frac{g}{4!}(\Phi_a \Phi_a)^2, \quad (2.1)$$

escrita no espaço euclidiano. Embora haja divergências quadráticas infravermelhas devido à ausência de massa, veremos em seguida que a OPT naturalmente a elimina. De fato, o primeiro passo para se aplicar este método é a interpolação da lagrangiana [28, 32, 55, 56]. Ao longo do desenvolvimento da teoria, constatou-se que uma medida imediata para isto é a construção de uma lagrangiana modificada via $\mathcal{L}^\delta = (1 - \delta)\mathcal{L}_0(m) + \delta\mathcal{L}$, onde $\mathcal{L}_0(m) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_a)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi_a\Phi_a$. A massa m posteriormente será fixada e tratada não perturbativamente. O termo que a carrega na lagrangiana será eliminado conforme discutiremos, a fim de que a estrutura do modelo não seja alterada. Seguindo a interpolação, a lagrangiana agora contém um termo artificial de massa, que elimina as divergências mencionadas acima, e ficamos com

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_a)^2 + \frac{\delta g}{4!}(\Phi_a \Phi_a)^2 + \frac{1}{2}(1 - \delta)m^2\Phi_a\Phi_a, \quad (2.2)$$

de modo que fazendo $\delta = 1$ e $\delta = 0$, respectivamente, retornamos à lagrangiana original e obtemos a lagrangiana de uma teoria escalar livre dependente de m ($\mathcal{L}_0(m)$). Sob a notação compacta $m^{*2} =$

$(1 - \delta)m^2$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_a)^2 + \frac{1}{2}m^{*2}\Phi_a\Phi_a + \frac{\delta g}{4!}(\Phi_a\Phi_a)^2, \quad (2.3)$$

e a partir de agora normalizaremos o acoplamento segundo $g \rightarrow g/N$ para tornar mais direta a contagem das ordens em N [57]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_a)^2 + \frac{1}{2}m^{*2}\Phi_a\Phi_a + \frac{\delta g}{4!N}(\Phi_a\Phi_a)^2. \quad (2.4)$$

As regras de Feynman ficam, portanto, vestidas e para o propagador teremos

$$\frac{1}{p^2 + m^{*2}}. \quad (2.5)$$

De imediato, a regra para o vértice se transforma de acordo com $-\delta g/(4!)$ [58].

2.0.1 Primeira ordem

Em ordem $O(\delta^1)$, temos a autoenergia (Figura 2.1),

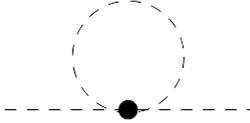


Figura 2.1: Autoenergia em um par de interação.

cuja derivação do fator de simetria é trivial e pode ser encontrada, por exemplo, na Ref. [59]:

$$-\Sigma_{dir} = -\delta \frac{(N+2)g}{6N} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} \Rightarrow \Sigma_{dir} = \delta \frac{(N+2)g}{6N} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (2.6)$$

onde o índice *dir* refere-se a contribuições diretas (Hartree). Como a termodinâmica parte do cálculo da pressão (Apêndice A), mostramos os diagramas que contribuem para esta quantidade na Fig. 2.2.

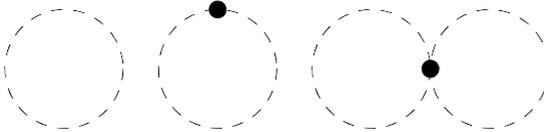


Figura 2.2: Pressão até a ordem δ^1 .

Respectivamente, estes diagramas são calculados pelas regras de Feynman como

$$P^{\delta^0} = -\frac{N}{2} \int_p \ln(p^2 + m^2), \quad (2.7)$$

$$P_a^{\delta^1} = N \frac{\delta m^2}{2} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} = \frac{3N^2 m^2}{(N+2)g} \Sigma_{dir}, \quad (2.8)$$

$$P_b^{\delta^1} = -N \delta \frac{g}{N} \left(\frac{N+2}{3} \right) \frac{1}{8} \int_p \left[\frac{1}{p^2 + m^2} \right]^2 = -\frac{3N^2}{2(N+2)g} (\Sigma_{dir})^2. \quad (2.9)$$

De modo que

$$P^{\delta^1} = -\frac{N}{2} \int_p \ln(p^2 + m^2) + \frac{3N^2 m^2}{(N+2)g} \Sigma_{dir} - \frac{3N^2}{2(N+2)g} (\Sigma_{dir})^2. \quad (2.10)$$

Um critério usual para a determinação do parâmetro m é o já mencionado Princípio da Mínima Sensibilidade (PMS). A fim de encontrarmos o parâmetro m que minimize a pressão de ordem δ^1 ,

$$\left. \frac{\partial P^{\delta^1}}{\partial m} \right|_{m=\bar{m}} = 0 = Nm \int_p \frac{1}{p^2 + \bar{m}^2} - \frac{3N^2 \bar{m}^2}{(N+2)g} \Sigma'_{dir} - \frac{6N^2 \bar{m}}{(N+2)g} \Sigma_{dir} + \frac{3N^2 \bar{m}^2}{2(N+2)g} 2\Sigma'_{dir} \Sigma_{dir}$$

e, como o primeiro termo se cancela com o terceiro,

$$-\frac{3N^2 \bar{m}^2}{(N+2)g} \Sigma'_{dir} + \frac{3N^2 \bar{m}^2}{2(N+2)g} 2\Sigma'_{dir} \Sigma_{dir} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{3N^2}{(N+2)g} (\bar{m}^2 - \Sigma_{dir}) \Sigma'_{dir} = 0, \quad (2.12)$$

ou seja, teremos

$$\bar{m}^2 = \Sigma_{dir} = \frac{(N+2)g}{6N} \int_p \frac{1}{p^2 + \bar{m}^2}. \quad (2.13)$$

O fato de termos $\bar{m}^2 = \Sigma_{dir}(\bar{m}, g)$ mostra o caráter altamente não perturbativo da OPT (temos $\bar{m} \sim e^{-1/g}$, como veremos em detalhes no próximo capítulo).

Escrevendo

$$\Sigma_{dir} = \Sigma_{dir}^{N^0} + \Sigma_{dir}^{1/N}, \quad (2.14)$$

onde

$$\Sigma_{dir}^{N^0} = \frac{g}{6} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} \quad \text{e} \quad \Sigma_{dir}^{1/N} = \frac{g}{3N} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (2.15)$$

concluimos que a OPT fornece correções além do limite de N grande já em sua primeira ordem de expansão e que uma de suas vantagens é a liberdade de se reobter estes resultados ao se tomar $N \rightarrow \infty$.

Aqui, a solução neste limite será naturalmente

$$\bar{m}^2 = \Sigma_{dir}^{N^0}. \quad (2.16)$$

A rigor, esta solução permanece para qualquer ordem em δ desde que se incluam apenas termos de direta integração à pressão, ou termos de Hartree. Isto ocorre pois qualquer diagrama de ordens mais altas nos *loops* será proporcional a $\delta^n (m^2 - \Sigma_{dir})^n$, onde $n \geq 2$ [27]. Como extensão e exemplo para a afirmação anterior apresentamos, no Apêndice B, os cálculos para a ordem δ^2 .

2.1 Renormalização

A resolução das integrais que apresentamos aqui muitas vezes levam a divergências ultravioletas. Fundamentalmente, estas divergências aparecem devido às altas flutuações dos campos em pequenas escalas de distância. Em parte deste trabalho utilizaremos regularização por *cutoff* no tratamento destas integrais, em que o limite superior de integração no momento é limitado a um valor, Λ , uma escala de energia consistente com a fenomenologia envolvida; em outra parte, utilizaremos reguladores provenientes da regularização dimensional, procedimento que consiste basicamente em se tomar a dimensionalidade do espaço-tempo como $d - \epsilon$, onde $\epsilon \ll 1$. Os resultados obtidos desta maneira apresentam pólos que podem ser imediatamente separados dos termos finitos e posteriormente eliminados por contratermos. Em geral, esta eliminação pode ser compreendida como a redefinição dos parâmetros da lagrangiana em função dos pólos, e nisto consiste o procedimento de renormalização.

A teoria de renormalização adquiriu maior consistência com o surgimento do grupo de renormalização (RG) [60], que de certo modo formalizou o procedimento. Para se renormalizar determinado parâmetro da lagrangiana, deve-se encontrar os contratermos cujas divergências cancelem aquelas provenientes dos cálculos de quantidades físicas. Em paralelo ao problema dos contratermos, existe certa arbitrariedade quando se renormaliza um resultado com relação à escala de renormalização, pois o valor das quantidades físicas passa a depender da escala desta escala, que é um parâmetro arbitrário. Como veremos detalhadamente no próximo capítulo, o RG sistematiza o procedimento pois torna a teoria independente tanto desta escala quanto da contribuição finita dos contratermos.

Calculando a autoenergia na versão $O(1)$ para exemplificarmos a regularização de integrais divergentes,

$$\Sigma = -\frac{g}{2} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} = -\frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (2.17)$$

vemos a presença de divergência ultravioleta pois, para altos valores do quadri-momento (p), o propagador não é suficiente diante da quarta potência no numerador. A técnica de regularização dimensional que utilizaremos neste trabalho em teorias renormalizáveis é uma extensão da continuação dimensional, que por muito tempo foi utilizada em matéria condensada [61]. A continuação dimensional está relacionada à expansão ϵ ([62, 63]) dos modelos de campo para a mecânica estatística, que tratava o espaço-tempo como tendo $4 - \epsilon$ dimensões e expandia os resultados em potências de ϵ . Contudo, logo surgiu a necessidade de se regularizar teorias de calibre não-abelianas, o que levou ao desenvolvimento da regularização dimensional ([64, 65]). Em geral, para evitar a integração nas dimensões espaço-temporais onde ocorrem divergências, substitui-se o número de dimensões por $2\omega = d - \epsilon$, onde d representa o número de dimensões. Deste modo, divergências ultra-violetas são eliminadas ao passo que se “reduz” suficientemente a dimensionalidade, sendo o regulador o próprio número de dimensões. Em uma teoria renormalizável em $3 + 1$ dimensões, tomar $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow d = 4$ é equivalente a se retirar

um regulador *cutoff* de uma teoria não renormalizável, e é justamente no limite $\epsilon \rightarrow 0$ que surgem as divergências a serem corrigidas por contratermos segundo a escolha de um esquema de renormalização específico. O primeiro passo para se atuar com regularização dimensional na eq. (2.17), por exemplo, é substituir $d \rightarrow 2\omega = d - \epsilon$:

$$\Sigma = -\frac{g}{2} \int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{p^2 + m^2} = -\frac{g}{2} I. \quad (2.18)$$

São diversas a maneiras com que se pode tratar integrais divergentes a partir deste ponto e, neste trabalho, a redefinição de parâmetros será dada pelo esquema de renormalização de mínima subtração especial ($\overline{\text{MS}}$). Seguindo as prescrições de [58], aplicadas em [28] de modo semelhante ao que faremos,

$$I = \left(\frac{e^{\gamma_E} M^2}{4\pi m^2} \right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma(1 - d/2 + \epsilon/2)}{(4\pi)^{d/2} (m^2)^{1-d/2}}. \quad (2.19)$$

Em $d = 4$,

$$I = \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{e^{\gamma_E} M^2}{4\pi m^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma(-1 + \epsilon/2). \quad (2.20)$$

Expandindo o resultado até a ordem ϵ^0 ,

$$I_{\epsilon^0} = \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left[1 + \frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) \right], \quad (2.21)$$

portanto,

$$\Sigma = \frac{g}{2} \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left[1 + \frac{2}{\epsilon} + \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) \right], \quad (2.22)$$

e definimos

$$\Sigma_r = \Sigma + \Sigma_{ct}, \quad (2.23)$$

em que Σ_{ct} é um contratermo que tornará finita a autoenergia. Analisando a eq. (2.22), vemos que a divergência pode ser tratada adicionando-se à lagrangiana original um termo de massa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{\delta g}{4!} \Phi^4 - \frac{1}{2} (1 - \delta) m^2 \Phi^2 + \frac{1}{2} A \Phi^2, \quad (2.24)$$

em que A é um contratermo que renormalizará a massa de modo a eliminar a divergência da autoenergia. Imediatamente vemos que

$$-\Sigma_{ct} = A, \quad (2.25)$$

logo

$$A = -g \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \quad (2.26)$$

e

$$\Sigma_r = \frac{g}{2} \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left[1 + \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) \right], \quad (2.27)$$

é a autoenergia renormalizada.

2.1.1 O grupo de renormalização

Vimos a renormalização na prática acima ao tornarmos finito o modelo $g\Phi^4$. A despeito de eventuais particularidades na lagrangiana de cada modelo (escalar ou vetorial), o procedimento segue sempre as mesmas prescrições, inclusive para o NLSM, que possui um vértice derivativo e será estudado no próximo capítulo. Todavia, note que a renormalização implica em grande arbitrariedade, pois os contratermos a serem adicionados à lagrangiana original, a fim de redefinir os parâmetros físicos do modelo, devem ocupar-se apenas de possibilitar que estes absorvam as respectivas divergências em termos dos campos, das massas ou dos vértices, sendo que o cancelamento destas divergências independe da parte finita dos contratermos. O método para se resolver esta infinita arbitrariedade é escolhido por conveniência ou por questões de convergência da teoria de perturbação [58]. Esta mesma referência exemplifica algumas maneiras de se renormalizar uma teoria tomando inicialmente as funções de dois e quatro pontos do modelo $g\Phi^4$, para um determinado valor do momento p ,

$$\Gamma^{(2)}(p, m) \equiv p^2 + m^2 \quad | \quad \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \equiv -M^{2\epsilon} g. \quad (2.28)$$

Tomando os casos críticos, respectivamente em $p^2 = 0$ e $p_i = 0$, vemos que as divergências ocorrem em $m^2 = 0$. Note que os contratermos (ou, equivalentemente, as funções de renormalização) que tornarem $\Gamma^{(2)}$ finita, estarão associados a correções de divergência da massa e dos campos (pois a função de dois pontos escreve-se em termos dos momentos), enquanto aqueles que tornarem $\Gamma^{(4)}$ finita estarão associados a correções de divergência do vértice. Portanto, são infinitas as maneiras de se tratar a parte finita dos contratermos:

$$F = \psi(1) - \ln(\hat{m}^2) \quad | \quad G = \psi(2) - \ln(\hat{m}^2) \quad | \quad H = 0 \quad \text{e etc.}, \quad (2.29)$$

onde $\hat{m}^2 = m^2/(4\pi M^2)$. De fato, a última alternativa foi a escolha adotada pelos autores de [66] e consiste simplesmente em igualar a zero a parte finita dos contratermos, ordem a ordem no acoplamento, segundo a chamada renormalização “independente da massa”. A condição sobrevive em qualquer ordem pois, pelo fato de os contratermos não possuírem parte finita, terão apenas a estrutura necessária para cancelar as divergências, chamada estrutura de “*bare bones*” [58]. De fato, no regime $p \rightarrow \infty$ note que as massas podem ser negligenciadas. Escrevamos, portanto, a mínima correção ao vértice [58]:

$$g_0 = M^{2\epsilon} \left[g + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(g)}{\epsilon^k} \right]. \quad (2.30)$$

Com a imediata derivação com relação à escala M ,

$$0 = 2\epsilon \left[g + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(g)}{\epsilon^k} \right] + M \frac{\partial g}{\partial \mu} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha'_k(g)}{\epsilon^k} \right]. \quad (2.31)$$

Escolhendo $k = 1$, temos

$$M \frac{\partial g}{\partial M} = -2\epsilon g - 2\alpha_1(g) + 2g\alpha'_1(g). \quad (2.32)$$

O limite $\epsilon \rightarrow 0$ desta equação define-se como função $\beta(g)$:

$$\beta(g) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M \frac{\partial g}{\partial M} = -2 \left(1 - g \frac{\partial}{\partial g} \right) \alpha_1(g), \quad (2.33)$$

pois $\alpha' \equiv \partial\alpha/\partial g$. Neste estágio vale notarmos que esta função, em todos os casos, depende do acoplamento e determina-se pelo resíduo do pólo em termos de ϵ . Combinando as equações (2.30) e (2.32), que expressam o fato de que todos os resíduos devido aos pólos em ϵ devem ir a zero, obtemos a recorrência

$$\left(1 - g \frac{d}{dg} \right) \alpha_{k+1}(g) = \alpha'_k(g) \left(1 - g \frac{d}{dg} \right) \alpha_1(g). \quad (2.34)$$

No entanto, a física principal encontra-se na eq. (2.32), que define o quão satisfatório será um processo de renormalização: a dinâmica de um sistema não pode depender dos parâmetros livres g e M ; ou seja, uma mudança neste implica em uma mudança naquele de modo a deixar a física invariante. Segundo a definição do coeficiente a_1 que aparece em [58], podemos escrever a função β deste modelo em primeira ordem de teoria de perturbação para o caso $N = 1$:

$$\beta(g) \approx b_0 g^2 + \mathcal{O}(g^3) \approx \frac{3}{16\pi^2} g^2 + \mathcal{O}(g^3). \quad (2.35)$$

Limitando-nos à ordem g^2 , escrevemos o *running* do acoplamento da teoria Φ^4 :

$$g(M) = \frac{g(M_0)}{1 - b_0 g(M_0) \ln \frac{M}{M_0}}, \quad (2.36)$$

onde M_0 é uma escala de referência. Veja que g cresce com M (Fig. 2.3, onde fizemos $g(M_0) = 1$), logo, há um intervalo limitado de validade da teoria de perturbação ($g \ll 1$); deste modo, mais termos devem ser adicionados à equação (2.35) quando se deseja explorar regiões onde o acoplamento é maior. Por outro lado, uma teoria que pretenda simular a interação forte da QCD deve ter um sinal negativo em sua função β , de modo que o acoplamento decresça com a escala de energia (dada geralmente pela temperatura).

Pelo fato de a renormalização muitas vezes ser um procedimento inicialmente arbitrário, ora devido à escolha da escala M , ora pela contribuição finita dos contratermos, a escolha de um contratermo adequado (ou prescrição de renormalização) permite que, para todas as ordens, uma alteração em uma determinada prescrição possa ser cancelada por uma respectiva mudança nos parâmetros renormalizados para cada divergência (eq. (2.34)). Portanto, uma mudança na prescrição não alterará a teoria como um todo e seus resultados físicos, mas apenas sua parametrização. A invariância de uma teoria frente a estas transformações é chamada de invariância frente ao grupo de renormalização (RG) [67, 68]. Não é coerente que as previsões teóricas para o valor de um observável físico dependam de parâmetros arbitrários, os quais a princípio deveriam ter sua utilidade restrita ao desenvolvimento analítico e, portanto, ser eliminados no final dos cálculos quando tomado determinado limite. Entretanto, associados aos esquemas de regularização, surgem parâmetros arbitrários definidos como escalas

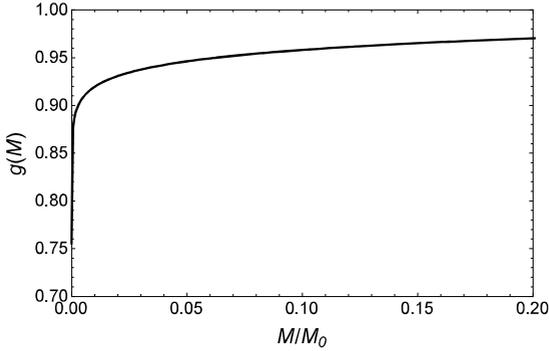


Figura 2.3: Acoplamento da teoria $g\Phi^4$ em função da escala de energia. A função crescente indica ausência de liberdade assintótica no modelo.

de renormalização. Em um primeiro momento, estas escalas são fixadas de acordo com o problema em questão e estão indiretamente relacionadas com os parâmetros físicos. Além disso, as interpretações quantitativa e qualitativa dos resultados dependem fortemente da escolha deste parâmetro, comprometendo a credibilidade dos esquemas de renormalização. No entanto, existe uma maneira de impor uma dependência mínima do modelo com relação à escolha da escala, o que gera automaticamente um vínculo direto entre esta e os demais parâmetros físicos.

A equação do RG

Portanto, quantidades físicas (observáveis) devem ser invariantes frente à mudança de escala. O RG requer justamente que um determinado observável como a pressão, por exemplo, satisfaça

$$M \frac{dP}{dM} = 0, \quad (2.37)$$

abrindo a derivada total teremos a equação do grupo de renormalização para uma função de Green de n pontos como

$$M \frac{d}{dM} \equiv \left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g^2} - \frac{n}{2} \zeta + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \right], \quad (2.38)$$

onde [58, 60]

$$\begin{aligned} \gamma_m(g) &= - \frac{M}{m} \frac{\partial m}{\partial M} \\ \zeta(g) &= M \frac{\partial \ln Z}{\partial M}, \end{aligned}$$

sendo Z o contratermo que renormaliza os campos. Pelo fato de o RG ser aplicado a uma quantidade já renormalizada, sua equação de expressa em termos do acoplamento vestido g ao invés de g_0 . O

sinal negativo do terceiro termo segue a convenção usual do grupo de renormalização que aparece no trabalho original de Weinberg [69]. Assim como a função β (eq. 2.35), as funções ζ e γ_m para o modelo $g\Phi^4$ também estão calculadas na Ref. [58] para $N = 1$:

$$\begin{aligned}\zeta(g) &= \frac{1}{12} \left(\frac{g}{16\pi^2} \right)^2 + \mathcal{O}(g^3), \\ \gamma_m(g) &= \frac{g}{16\pi^2} + \frac{7}{12} \left(\frac{g}{16\pi^2} \right)^2 + \mathcal{O}(g^3).\end{aligned}\tag{2.39}$$

Como um exemplo, podemos aplicar a equação do grupo de renormalização na ordem mais baixa da pressão (eq. (2.7)). Assim como renormalizamos a autoenergia após uma regularização dimensional (eq. (2.27), a pressão de ordem g^0 renormalizada pode ser obtida em $T = 0$ como o conhecido resultado para um gás de bósons livres¹:

$$P_r^{\delta^0} = -\frac{m^4}{32\pi^2} \left[\frac{3}{2} - \ln \left(\frac{m^2}{M^2} \right) \right].\tag{2.40}$$

De modo a respeitar a consistência no acoplamento, note que esta contribuição para a pressão é de ordem g^0 e as funções β e γ_m são de no mínimo ordem g^1 ; logo, apenas o primeiro termo no lado esquerdo da eq. (2.38) sobrevive (o terceiro termo naturalmente não seria considerado seja qual fosse a ordem do observável, pois a pressão é uma função de ponto zero, $n = 0$). Imediatamente vemos, a partir da eq. (2.40), a invariância explícita frente à escala de renormalização. De fato, aplicando consistentemente a equação do RG que, nesta ordem, reduz-se ao primeiro termo da eq. (2.38), temos

$$M \frac{dP_r^{\delta^0}}{dM} \equiv M \frac{\partial P_r^{\delta^0}}{\partial M} = -\frac{m^4}{32\pi^2},\tag{2.41}$$

esta invariância avança também em todas as ordens δ^k da teoria e deve ser perturbativamente eliminada.

Tendo compreendido na prática os mecanismos da OPT, de renormalização e do RG no próximo capítulo trabalharemos com o modelo também escalar e renormalizável NLSM e então aplicaremos OPT melhorada com o grupo de renormalização (método RGOPT), refindo a termodinâmica da teoria e tornando-a invariante frente à escala M .

¹No próximo capítulo discutiremos estes cálculos em maiores detalhes.

Capítulo 3

RGOPT aplicada ao modelo sigma não linear

Após a formulação da eletrodinâmica quântica $U(1)$ (QED), passou-se às tentativas de se generalizar a invariância frente a transformações locais das funções de onda e operadores para campos e álgebras de maior complexidade [58, 70, 71, 72]. Esta generalização compreenderia principalmente o fato de que agora haveria operadores não abelianos. Yang e Mills [21] foram os primeiros a propor soluções para o problema em 1954, sendo que a teoria se desenvolveu lentamente até o final dos anos 60; neste período foram resolvidas a quantização, a renormalização e a geração de massa da teoria que viria a favorecer fortemente a unificação das interações fundamentais, visto que começou-se a compreender a interação entre os constituintes dos hádrons e, portanto, a formulação da QCD.

Apesar da notoriedade das teorias de Yang-Mills, a tarefa analítica tornou-se complexa, principalmente quando se desejou avançar em mais ordens perturbativamente a temperatura finita. Dadas as dificuldades não triviais analíticas e numéricas em se trabalhar com estas teorias não abelianas para estudar propriedades termodinâmicas da QCD, bem como confinamento e quebra espontânea da simetria quiral, tornou-se conveniente a simplificação da teoria original [73, 74]. Por isso, neste regime passou-se recorrer a modelos de teoria de campos cujos desenvolvimentos analíticos fossem menos penosos, sob o preço de que exibissem apenas parte das características encontradas nas teorias originais. No presente trabalho, por exemplo, negligenciamos férmions e substituímos a teoria original de Yang-Mills por um modelo que simplesmente simule as características de uma dinâmica não abeliana. Estes tipos de *toy model* podem servir como laboratórios teóricos para que se testem métodos e aproximações. Tendo já trabalhado com o modelo $g\Phi^4$ no capítulo anterior, neste apresentaremos o modelo sigma não-linear $O(N)$ (NLSM) e nele aplicaremos a RGOPT para obtermos resultados além da aproximação de LN. Nossos resultados serão comparados tanto com a aproximação de LN quanto com a NLO em $1/N$ e as simulações numéricas de Monte Carlo.

Modelos escalares em $d + 1$ dimensões possuem grande aplicabilidade em muitas áreas da física como supercondutividade em altas temperaturas, polímeros, metais orgânicos, pontos quânticos e etc. [18, 75]. O NLSM, em especial, foi inicialmente proposto como uma descrição alternativa da quebra espontânea de simetria e tem sido utilizado no estudo da interação forte devido à sua consistência e às suas características em comum com teorias de Yang-Mills como liberdade assintótica, anomalia do traço e a geração não perturbativa de um *gap* de massa [22]. Estas similaridades foram inicialmente apontadas por Polyakov [76], indicando a forte analogia entre teorias de Yang-Mills quadridimensionais e modelos sigma bidimensionais, regime em que estes são renormalizáveis. Apesar de o NLSM ser não renormalizável em $3 + 1$ dimensões (resolvido apenas por um *cutoff*), suas aplicações em matéria condensada e em teoria de píons são interessantes, pois descrevem a versão contínua do modelo clássico de Heisenberg.

Podemos descrever o NLSM como uma teoria de N campos escalares, cuja dinâmica é definida por uma simples lagrangiana cinética mais um vínculo de interação. Segundo a descrição de [75], o modelo de CP^1 (equivalente ao de Heisenberg) e o de Ising correspondem, respectivamente a $N = 3$, onde aparecem soluções de instanton, e $N = 1$. Para $N = 2$, as componentes do campo compreendem um círculo, e o modelo é chamado de XY , que aparece no estudo de superfluidos e cristais líquidos hexáticos, sistemas bidimensionais que estão em uma fase entre a sólida e a de líquida isotrópica. O regime $N > 3$, cujas aplicações convergem para a interação forte, não se relaciona a sistemas realísticos de matéria condensada. Apesar de sua simplicidade, a dinâmica descrita pelo modelo não é tão trivial, pois as N componentes do campo não são mais independentes como se costuma ter em modelos efetivos para a QCD. Embora surjam divergências infravermelhas no NLSM em teoria de perturbação, visto que os campos são não massivos pela construção do modelo, um *gap* de massa é gerado dinamicamente por um vínculo de interação, analogamente ao que ocorre na QCD. No entanto, nesta teoria é a quebra espontânea da simetria quiral a responsável por massas finitas, enquanto aqui tal geração é puramente dinâmica, sem que se quebrem simetrias. Em $1 + 1$ dimensões, o acoplamento nu g_0 é adimensional e o modelo, portanto, renormalizável perturbativamente inclusive na expansão $1/N$ [77]. Neste regime, não há quebra espontânea da simetria global $O(N)$ para qualquer valor da constante de acoplamento¹.

Os primeiros a apresentarem o modelo NLSM foram Gell-Mann e Lévy em 1960 [80], enquanto estudavam a manifestação de simetrias em diferentes modelos. Em 1974, Root calculou seu potencial efetivo em $T = 0$ [81]. O trabalho pioneiro (1981) em se estudar o NLSM em temperatura finita, realizado por Dine e Fischler [73], tratou o modelo em $1+1$ dimensões e calculou seu potencial termodinâmico no limite de N grande. Em 1976 Brézin e Zinn-Justin [82], com viés de matéria condensada, estudaram pela primeira vez o NLSM com o grupo de renormalização e propuseram um estudo do

¹A não existência de quebra espontânea de uma simetria contínua em um sistema homogêneo em uma dimensão espacial, a qualquer temperatura, é o próprio teorema de Mermin e Wagner [78] e Coleman [79].

problema no infravermelho ainda que teorias de perturbação não pudessem ser diretamente aplicadas.

Ainda antes de analisarmos com detalhes o modelo, observemos sua forma mais simples, conforme fora originalmente proposto: tomando-se os campos contidos em um vetor Φ de N componentes sujeitas a um vínculo de interação, de modo que o modelo possua simetria $O(N)$ [19, 20, 77, 83, 84]:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_i)^2, \quad \Phi_i^2 = \frac{N}{g_0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Para $N = 2$, por exemplo, o modelo não massivo é aparentemente livre: Escolhendo

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{g_0} \cos(\varphi) \\ \Phi_2 = \frac{\sqrt{2}}{g_0} \sin(\varphi) \end{cases}, \quad (3.2)$$

o vínculo é satisfeito e ficamos com

$$\mathcal{L}_{O(2)} = \frac{1}{g_0}(\partial_\mu \varphi)^2. \quad (3.3)$$

Mesmo sem um termo explícito de interação, os píons estão limitados a mover-se acoplados em uma circunferência e sujeitos à transição de Kosterlitz–Thouless [85].

A seguir daremos início à implementação da RGOPT ao NLSM partindo de sua função de partição e, conseqüentemente, à obtenção da pressão e demais quantidades termodinâmicas, de modo que possamos comparar nossos resultados com a literatura e avaliarmos a eficiência do método. Sendo que o problema da dependência de escala compromete em partes a credibilidade do método HTLpt de tratamento direto da QCD [16] e dadas as mencionadas semelhanças termodinâmicas entre o NLSM e teorias de Yang–Mills, este capítulo torna-se a principal contribuição deste trabalho.

3.1 O modelo

A partir das considerações já feitas acerca do vínculo como uma interação, a função de partição para o NLSM em $1 + 1$ dimensões pode ser escrita como

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{i=1}^N \mathcal{D}\Phi_i(x) \exp \left[-\frac{1}{2g_0} \int d^2x (\partial\Phi_i)^2 \right] \delta \left(\sum_{i=1}^N \Phi_i^2 - 1 \right), \quad (3.4)$$

onde o campo escalar é parametrizado por $\Phi_i = (\sigma, \pi_1, \dots, \pi_{N-1})$ e o acoplamento g_0 entra com um caráter de temperatura. A simetria original $O(N)$ do modelo é quebrada para $O(N-1)$, pois o vínculo em $d = 1 + 1$ fixa esta componente:

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i^2 = 1 \Rightarrow \sigma = (1 - \pi^2)^{1/2}. \quad (3.5)$$

Como pretendemos extrair resultados perturbativos, reescrevemos a função de partição de modo a podermos expandir a subsequente lagrangiana em torno de um mínimo clássico e uma escala ou um regulador infravermelho poder ser introduzido. Dessa maneira o campo σ , escrito em função de π_i ,

será posteriormente acoplado a um parâmetro de massa com caráter de campo magnético (m_0^2) através de g_0 . Escrevendo a função de partição em termos da ação euclidiana $\mathcal{S}(\pi, m) = \int d^2x \mathcal{L}_0$, teremos

$$\mathcal{Z} = \int \left\{ [1 - \pi_i^2(x)]^{-1/2} d\pi_i(x) \right\} \exp[-\mathcal{S}(\pi, m)], \quad (3.6)$$

onde a lagrangiana nua não massiva é simplesmente

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2g_0} (\partial_\mu \Phi_i)^2. \quad (3.7)$$

Utilizando o vínculo,

$$(\partial_\mu \Phi_i)^2 = |\partial_\mu \pi_1|^2 + \dots + |\partial_\mu \pi_2|^2 + |\partial_\mu \sigma|^2 = |\partial_\mu \pi_i|^2 + \left[\frac{(\pi_i \partial_\mu \pi_i)^2}{1 - \pi_i^2} \right], \quad (3.8)$$

e a lagrangiana fica

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2g_0} |\partial_\mu \pi_i|^2 + \frac{1}{2g_0} \left[\frac{(\pi_i \cdot \partial_\mu \pi_i)^2}{1 - \pi_i^2} \right]. \quad (3.9)$$

Rescalonando $\pi_i \rightarrow g_0 \pi_i$, alteramos a normalização de modo a facilitar a contagem das ordens no acoplamento. Sendo assim,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} |\partial_\mu \pi_i|^2 + \frac{1}{2} g_0 \left[\frac{(\pi_i \partial_\mu \pi_i)^2}{1 - g_0 \pi_i^2} \right]. \quad (3.10)$$

Expandindo em π_i , ficamos com

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} |\partial_\mu \pi_i|^2 + \frac{1}{2} g_0 (\pi_i \partial_\mu \pi_i)^2 + \frac{1}{2} g_0^2 (\pi_i \partial_\mu \pi_i)^3 + \frac{1}{2} g_0^3 (\pi_i \partial_\mu \pi_i)^4 + \frac{1}{2} g_0^4 (\pi_i \partial_\mu \pi_i)^5 + \dots, \quad (3.11)$$

ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} |\partial_\mu \pi_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} g_0^{k-1} (\pi_i \partial_\mu \pi_i)^k. \quad (3.12)$$

Em uma primeira aproximação, tomaremos apenas o termo quadrático em $\pi_i \partial_\mu \pi_i$. Assim,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} |\partial_\mu \pi_i|^2 + \frac{1}{2} g_0 (\pi_i \partial_\mu \pi_i)^2. \quad (3.13)$$

Adicionando um termo de massa à lagrangiana, como feito na Ref. [82], vem

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} |\partial_\mu \pi_i|^2 + \frac{1}{2} g_0 (\pi_i \partial_\mu \pi_i)^2 - \frac{m_0^2}{g_0} \left[(1 - g_0^2 \pi_i^2)^{1/2} - 1 \right]. \quad (3.14)$$

Expandimos consistentemente este termo até a ordem g_0 para obter

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial \pi_i)^2 + m_0^2 \pi_i^2] + \frac{g_0 m_0^2}{8} (\pi_i^2)^2 + \frac{g_0}{2} (\pi_i \partial \pi_i)^2 + \varepsilon_0 + \mathcal{O}(g_0^2), \quad (3.15)$$

onde foi introduzida ε_0 , a energia de “ponto zero” [23, 86], que dará conta das divergências da teoria através da renormalização. Como desejamos que a física obtida seja invariante frente à escolha da escala de renormalização, convém que compreendamos a relevância desta propriedade antes de efetuarmos os cálculos termodinâmicos.

Os coeficientes do grupo de renormalização para o NLSM foram calculadas na Ref. [82] a partir dos contratermos em função de g , m , M e d , a dimensionalidade do problema; voltaremos a esse na próxima seção, mas já podemos analisar um caso particular do NLSM e suas interpretações físicas à luz da equação do RG [70, 75]: Para $N = 2$, por exemplo, em que temos o modelo XY para descrever o comportamento de superfluidos, a função se anula. O vínculo fica

$$\pi_1^2 + \sigma^2 = 1, \quad (3.16)$$

logo podemos identificar $\pi_1 = \text{sen}(\varphi)$ e $\sigma = \text{cos}(\varphi)$. Levando isto à lagrangiana da eq. (3.7), teremos

$$\mathcal{L}_{N=2} = \frac{1}{2g_0} \{ [\partial_\mu \text{sen}(\varphi)]^2 + \tan^2(\varphi) [\partial_\mu \text{cos}(\varphi)]^2 \} = \frac{1}{2g_0} \frac{[\partial_\mu \text{sen}(\varphi)]^2}{\text{cos}^2(\varphi)}, \quad (3.17)$$

e, tomando o limite $\varphi \rightarrow 0$, a lagrangiana se reduz a

$$\mathcal{L}_{N=2} = \frac{1}{2g_0} (\partial_\mu \varphi)^2. \quad (3.18)$$

O acoplamento aparece apenas devido à normalização feita anteriormente, portanto esta teoria descreve um campo escalar livre $\varphi(x)$; de fato, o termo de interação

$$\left[\frac{(\pi_i \partial_\mu \pi_i)^2}{1 - \vec{\pi}^2} \right] \quad (3.19)$$

combinou-se com o cinético, tendo seu caráter de acoplamento anulado. Portanto, sem interação não há sentido de se haver *running* devido à aplicação da equação do grupo de renormalização. O mesmo vale, evidentemente, para o caso $N < 2$, em que há apenas uma componente, sem haver novamente interação. Logo, apesar de haver uma física interessante em $N = 1$ (modelo de Ising) e em $N = 2$ (modelo XY), nosso foco a partir daqui estará no intervalo $N \geq 2$, em que a aplicação da RGOP'T pode ser melhor observada devido à presença dos termos explícitos de interação.

3.2 Função de Green de dois pontos e os coeficientes de renormalização

Para o caso geral $N > 2$ do NLSM, os coeficientes de renormalização podem ser obtidos a partir do cálculo da função de dois pontos, que no espaço euclidiano é definida como

$$\Gamma^{(2)}(p) = [p^2 + \mathcal{M}], \quad (3.20)$$

onde \mathcal{M} representa todas as contribuições do modelo para a auto-energia. Para se obter cada uma destas contribuições, estabelecemos as regras de Feynman do modelo no espaço euclidiano retomando sua lagrangiana até a ordem g_0 :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial \pi_i)^2 + m_0^2 \pi_i^2] + \frac{g_0 m_0^2}{8} (\pi_i^2)^2 + \frac{g_0}{2} (\pi_i \partial \pi_i)^2 + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (3.21)$$

Analisando a lagrangiana do modelo escalar $g\Phi^4$ do Capítulo 2 (eq. (2.1)), percebemos que as únicas diferenças relevantes entre este e o NLSM, nesta ordem, é a presença do vértice derivativo, último termo da eq. (3.21), e o fato de o vértice não derivativo do NLSM depender da massa. Portanto, para o propagador e para o vértice não derivativo basta simplesmente tomarmos o que já conhecemos do primeiro modelo, multiplicando apenas a interação consistentemente por $4!m_0^2$. Sendo assim, ficamos com $[p^2 + m_0^2]^{-1}$ para o propagador e $-3g_0m_0^2$ para o vértice não-derivativo. O vértice derivativo ocorre praticamente da mesma maneira na teoria fundamental da eletrodinâmica quântica escalar e, de acordo com [87], adaptando-se a regra para o NLSM tem-se $-g_0(p_1 + p_2)(p_3 + p_4)$, dadas as possíveis permutações. Estas regras estão ilustradas na Fig. 3.1.

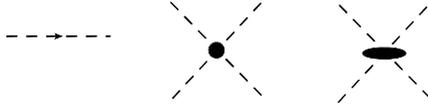


Figura 3.1: Propagador e vértices não-derivativo e derivativo, respectivamente.

A contribuição vinda do vértice não derivativo (partindo de $-\Sigma$) é idêntica à que aparece na eq. (2.6) para o modelo escalar $g\Phi^4$, substituindo-se $N \rightarrow (N-1)$ e $g \rightarrow 3g_0m_0^2(N-1)$, segundo as regras de Feynman do NLSM apresentadas. Podemos representá-la através do primeiro gráfico da Fig. 3.2. Portanto,

$$\Sigma_{ND}^m(p) = g_0m_0^2 \frac{(N+1)}{2} I_1(T), \quad (3.22)$$

onde

$$I_1(T) = T \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{[\omega_{\mathbf{n}}^2 + \omega_{\mathbf{q}}^2]}, \quad (3.23)$$

e $\omega_{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{q}^2 + m^2$ representa a relação de dispersão. Neste trabalho, as integrais divergentes serão tratadas com regularização dimensional (esquema $\overline{\text{MS}}$). Em temperatura finita e $d = 2 - \epsilon$ dimensões isto significa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \rightarrow T \int_{\mathbf{p}} \equiv T \left(\frac{e^{\gamma_E} M^2}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{1-\epsilon} \mathbf{p}}{(2\pi)} \quad (3.24)$$

onde γ_E representa a constante de Euler-Mascheroni e M representa a escala arbitrária de energia no $\overline{\text{MS}}$. No Apêndice C apresentamos as integrais térmicas utilizadas.

Por outro lado, o vértice derivativo gera duas contribuições. Como as integrais são dadas no espaço dos momentos e esta interação depende dos momentos, é natural que se tenha duas configurações para esta auto-energia, sendo que uma integra o momento ($\Sigma_D^p(p)$, segundo gráfico da Fig. 3.2) e a outra não ($\Sigma_D^m(p)$, terceiro gráfico da Fig. 3.2). A primeira é dada por

$$\Sigma_D^p(p) = g_0p^2 I_1(T), \quad (3.25)$$



Figura 3.2: Contribuições para a auto-energia, sendo a primeira vinda do vértice não derivativo e as demais do vértice derivativo.

enquanto a segunda,

$$\Sigma_D^m(p) = -g_0 m_0^2 I_1(T) . \quad (3.26)$$

Portanto, somando Σ_{ND}^m e Σ_D^m podemos agora escrever a função de dois pontos no espaço euclidiano como

$$\Gamma^{(2)}(p) = \left\{ p_E^2 (1 + g_0 I_1) + m_0^2 \left[1 + g_0 \frac{(N-1)}{2} I_1 \right] + \mathcal{O}(g_0^2) \right\} , \quad (3.27)$$

que concorda com a eq. 31.25 de [39] e, conforme mostrado pelos autores, é invariante frente ao RG. O pólo de massa perturbativo pode ser definido como $p^2 = m_{PT}^2$, logo, fazendo $p = ip_E$ e reexpandindo até a ordem g_0 vem

$$m_{PT}^2 = m_0^2 + \Sigma_{pole} + \mathcal{O}(g_0^2) , \quad (3.28)$$

onde a contribuição da auto-energia para o polo de massa é [88]

$$\Sigma_{pole} = g_0 m_0^2 \frac{(N-3)}{2} I_1(T) . \quad (3.29)$$

Efetuando os cálculos em temperatura finita através de regularização dimensional [58], obtemos

$$I_1(T) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m}{M} \right) \right] - \frac{1}{\pi} J_1(T) , \quad (3.30)$$

onde

$$J_1(T) = \int_0^\infty dz \frac{1}{\omega_z [1 - e^{\omega_z}]} . \quad (3.31)$$

Portanto, a divergência ultravioleta em Σ_{pole} aparece como $g_0(N-3)/(4\pi\epsilon)$ e pode ser eliminada caso escrevamos a massa nua (m_0) em termos da massa renormalizada (m) como $m_0^2 = Z_m m^2$, logo

$$Z_m = 1 - \frac{g}{4\pi} (N-3) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4) \quad (3.32)$$

em concordância com Ref. [89].

De acordo com a Ref. [82], os coeficientes da equação do RG podem ser obtidos ao aplicarmos o operador do RG à eq. (3.27), portanto com $n = 2$, obtém-se as expressões [90]

$$\beta = -b_0 g^2 - b_1 g^3 + \mathcal{O}(g^4) , \quad (3.33)$$

onde $b_0 = (N - 2)/2\pi$ e $b_1 = (N - 2)/4\pi^2$;

$$\zeta = z_0g + z_1g^3 + \mathcal{O}(g^4), \quad (3.34)$$

onde $z_0 = (N - 1)/2\pi$ e $z_1 = 3(N - 1)(N - 2)/32\pi^3$ e, utilizando [90] $\gamma_m = (\zeta/2 + \beta/g^2)/2$,

$$\gamma_m = -\gamma_0g - \gamma_1g^2 + \mathcal{O}(g^3), \quad (3.35)$$

onde $\gamma_0 = (N - 3)/8\pi$ e $\gamma_1 = (N - 3)/8\pi^2$.

Uma vez que se considere que $g(M)$ não atinja altos valores para uma dada escala M [60], neste caso particular a função β é dada, aproximadamente, por seu primeiro termo:

$$\beta(g) \approx -\frac{(N - 2)}{2\pi}g^2. \quad (3.36)$$

A definição da função β que aparece na eq. (2.39) indica que

$$-\frac{(N - 2)}{2\pi}g^2 = -\frac{(N - 2)}{2\pi}g^2 = M\frac{dg}{dM}, \quad (3.37)$$

portanto

$$\frac{dg}{dM} \sim -\frac{g^2}{M}. \quad (3.38)$$

Logo, com o aumento da escala (M) o acoplamento (g) terá valores cada vez menores, até que se estabilizará em zero no limite em que $M \rightarrow \infty$. Isto caracteriza imediatamente liberdade assintótica, tal qual ocorre com a QCD. Resolvendo a eq. (3.37) para o acoplamento, temos a expressão exata do *running* em 1 *loop*:

$$g(M) = \frac{g(M_0)}{1 + g(M_0)b_0 \ln\left(\frac{M}{M_0}\right)}, \quad (3.39)$$

em contraste com a eq. (2.36) para o modelo $g\Phi^4$, que não apresenta liberdade assintótica.

3.2.1 Pressão até dois *loops*

Em casos não interagentes, como um gás de bósons livres, a pressão para teorias escalares $O(N - 1)$ escreve-se como²

$$P_0 = -\frac{(N - 1)}{2}I_0(T) + \varepsilon_0(g^0), \quad (3.40)$$

onde

$$I_0(T) = T \prod_{\mathbf{p}} \ln[\omega_n^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2], \quad (3.41)$$

e $\varepsilon_0(g^0)$ serve de renormalização para que dê conta das divergências nesta ordem. Somando sobre frequências de Matsubara (formalismo de tempo imaginário [91, 92]) e integrando, obtemos

$$I_0(T) = \frac{m_0^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{c} + \left[\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{m}{M}\right) \right] \right\} + T^2 \frac{2}{\pi} J_0(T), \quad (3.42)$$

²No Apêndice D apresentamos uma derivação formal da pressão no limite LN a partir do formalismo CJT.

onde

$$J_0(T) = \int_0^\infty dz \ln [1 - e^{-\omega z}] , \quad (3.43)$$

e, por praticidade, definimos a quantidade adimensional $\omega_z^2 = z^2 + y^2$ com $z = \mathbf{p}/T$ e $y = m/T$. Portanto, até a ordem $\mathcal{O}(g)$, a pressão (ou função de Green de ponto zero) é apenas

$$P = P_0 + P_1 + P_{\text{CT}} + \varepsilon_0(g) + \mathcal{O}(g^2) , \quad (3.44)$$

onde

$$P_1 = -g_0(N-1)\frac{(N-3)}{8}m_0^2I_1(T)^2 , \quad (3.45)$$

cuja forma é justificada no Apêndice E e P_{CT} é obtido quando substituímos m_0^2 por $m_0^2 = Z_m m^2$ em P_0 e expandimos até a ordem $\mathcal{O}(g)$

$$P_{\text{CT}} = \frac{(N-1)(N-3)}{8\pi\epsilon}m^2I_1(T) . \quad (3.46)$$

A partir de uma simples análise dimensional fica claro que, em $d = 2$, $\varepsilon_0 \propto m_0^2$ e portanto, no esquema $\overline{\text{MS}}$, pode ser escrita como

$$\varepsilon_0 = m_0^2 \sum_{k \geq 0} \frac{c_k g_0^k}{\epsilon^{k+1}} , \quad (3.47)$$

sendo os casos particulares acima referem-se, respectivamente, a $k = 0$ e $k = 1$. Identificando os coeficientes da energia de “ponto zero” como $c_0 = (N-1)/(4\pi)$ e $c_1 = (N-1)(N-3)/[2(4\pi)^2]$, as divergências do modelo são sistematicamente canceladas.

Expandindo $I_1(T)$ nas equações (3.45) e (3.46) até $\mathcal{O}(\epsilon)$ e somando, obtemos o resultado finito

$$P = -\frac{(N-1)}{2}I_0^b(T) - (N-1)\frac{(N-3)}{8}m^2I_1^b(T)^2 - (N-1)\frac{m^2}{(4\pi)\epsilon} \left[1 + g\frac{(N-3)}{2(4\pi)\epsilon} \right] + m^2 \left[\frac{c_0}{\epsilon} + g\frac{c_1}{\epsilon^2} \right] , \quad (3.48)$$

onde as integrais finitas são definidas por $I_0^b(T) = I_0(T) - m^2/(2\pi\epsilon)$, $I_1^b(T) = I_1(T) - 1/(2\pi\epsilon)$. Deste modo,

$$P = -\frac{(N-1)}{2}I_0^b(T) - (N-1)\frac{(N-3)}{8}m^2I_1^b(T)^2 . \quad (3.49)$$

3.2.2 Invariância da pressão frente ao grupo de renormalização

Para analisarmos a invariância frente ao grupo, apliquemos o operador RG completo, tal como aparece na eq. (2.38) em P_0 de modo perturbativamente consistente à ordem mais baixa

$$P_0 = -\frac{(N-1)}{4\pi} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{m}{M} \right) \right] + 4T^2 J_0(T) \right\} . \quad (3.50)$$

Como β e γ_m são pelo menos de ordem g^2 , $J_0(T)$ é independente da escala e para a pressão $n = 0$, obtemos

$$M \frac{dP_0}{dM} = -(N-1) \frac{m^2}{4\pi} , \quad (3.51)$$

que mostra, explicitamente, que esta função de ponto zero não é invariante de escala como, por exemplo, a função de dois pontos, eq. (3.27). A origem deste problema em todos os modelos renormalizáveis está no fato de, em geral, considerarmos a energia de “ponto zero” como puramente divergente, sendo suficiente apenas para dar conta das divergências do modelo. Embora apareça na lagrangiana original, ε_0 não pode depender explicitamente da escala M visto que esta é uma escala de energia arbitrária a qual, diferentemente de g e m , não parametriza a dinâmica do modelo.

Contudo, tendo vista que agora desejamos, além de finita, uma teoria invariante frente à escala, adicionamos um termo finito à eq. (3.47) que dependa de parâmetros dinâmicos sendo, ao mesmo tempo, independente de M . Deste modo, após a aplicação dos termos $\beta\partial/\partial g$ e $\gamma_m m\partial/\partial m$, esta contribuição finita deve gerar um termo que compense a aplicação no observável e então construa a invariância frente ao RG. Todavia, antes de se escrever uma expressão geral, por questões de consistência é muito importante lembrar que a função γ_m é pelo menos de ordem g e, por isso, a contribuição de ordem mais baixa ao termo finito deve ser proporcional a um fator geral $1/g$ compensatório. De acordo com nossas convenções de sinal [43, 44], podemos escrever ε_0 de modo que a função de ponto zero seja finita e invariante frente ao grupo. Portanto, chamando esta quantidade de $\varepsilon_0^{\text{RG}} = \varepsilon_0 + \varepsilon_0^{\text{finita}}$, convencionam-se [43, 44]

$$\varepsilon_0^{\text{RG}} = m_0^2 \sum_{k>0} \left[\frac{c_k g_0^k}{\varepsilon^{k+1}} + s_k g_0^{(k-1)} \right], \quad (3.52)$$

onde s_k são coeficientes obtidos perturbativamente conforme passaremos a demonstrar. Quando utilizamos $\varepsilon_0^{\text{RG}}$ ao invés de ε_0 , facilmente obtemos a seguinte expressão para a pressão finita em ordem mais baixa

$$P_0 = -\frac{(N-1)}{2} I_0^* + \frac{m^2}{g} s_0, \quad (3.53)$$

e, impondo $M(dP_0/dM) = 0$, vem

$$-(N-1)\frac{m^2}{4\pi} + \left[\beta \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} \right] \left(\frac{m^2 s_0}{g} \right) = 0, \quad (3.54)$$

fixando finalmente $s_0 = 1$. O mesmo procedimento, quando aplicado em ordem $\mathcal{O}(g)$, fornece

$$-\frac{(N-1)}{4\pi} + s_0[(b_0 - 2\gamma_0) + (b_1 - 2\gamma_1)g] - s_1 2\gamma_0 g^2 = 0, \quad (3.55)$$

onde compactamos a notação e denotamos os dois primeiros coeficientes da função β como $b_0 = (N-2)/(2\pi)$, e $b_1 = (N-2)/(4\pi^2)$ assim como os dois primeiros da função γ_m como $\gamma_0 = (N-3)/(8\pi)$ e $\gamma_1 = (N-2)/(8\pi^2)$, de acordo com as equações (3.33) e (3.35) respectivamente. Portanto,

$$s_0 = \frac{(N-1)}{4\pi(b_0 - 2\gamma_0)} = 1, \quad (3.56)$$

como já visto, e

$$s_1 = (b_1 - 2\gamma_1) \frac{s_0}{2\gamma_0} = 0, \quad (3.57)$$

pois $b_1 = 2\gamma_1$.

3.3 RGOPT

Finalmente, agora temos condições de aplicar a invariância frente ao grupo de renormalização simultaneamente ao desenvolvimento perturbativo da pressão através da OPT. Analisaremos inicialmente o nível de 1 *loop* (ordem δ^0) e, em seguida, de 2 *loops* (ordem δ^1).

3.3.1 Ordem δ^0

Para implementar a RGOPT, iniciamos com a pressão já renormalizada (finita) e invariante frente ao grupo em sua ordem mais baixa, eq. (3.53), e então substituímos $m \rightarrow (1 - \delta)^a m$ e $g \rightarrow \delta g$ consistentemente expandindo até a ordem zero. Procedendo assim e fazendo $s_0 = 1$, obtemos

$$P_0^{\text{RGOPT}} = -\frac{(N-1)}{4\pi} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{m}{M} \right) \right] + 4T^2 J_0(T) \right\} + \frac{m^2}{g} (1 - 2a). \quad (3.58)$$

Os resultados efetivos invariantes frente ao RG costumam ser obtidos ao serem simultaneamente resolvidas a equação reduzida do RG e a equação do PMS, respectivamente à esquerda e à direita na eq. (3.59), determinando-se então simultaneamente a massa e o acoplamento efetivos (\bar{m} e \bar{g}) [43, 44]. Desmembrando a eq. (2.38) para um observável de ponto zero como a pressão, ficamos com

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial g} \right] P = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial m} = 0. \quad (3.59)$$

Conforme detalhadamente discutido nas mesmas referências, embora a perturbação da OPT em termos de δ , combinada com a equação completa do RG, funcione como um atalho satisfatório para os modelos em geral, o fato de as soluções estacionárias provenientes do PMS fornecerem aproximações sensíveis, ordem a ordem, para a teoria originalmente não massiva, espera-se que a aplicação separada da equação do RG gere uma seqüência de melhores aproximações dos resultados exatamente invariantes de escala. O expoente a é fixado sob a imposição de que a pressão obedeça à relação reduzida do RG, ou seja,

$$a = \frac{(N-3)}{4(N-2)} \equiv \frac{\gamma_0}{b_0}, \quad (3.60)$$

a mesma expressão encontrada na teoria $g\Phi^4$ [43, 44]. Este expoente é universal, visto que depende apenas dos coeficientes de primeira ordem do RG, invariantes frente à escolha do sistema de renormalização [38]. Em geral, tem-se $a = 1$ para campos fermiônicos e $a = 1/2$ para escalares quando se aplica a chamada OPT padrão. Por exemplo, ao se calcular funções de ponto zero tomando apenas a primeira ordem das funções β e γ_m (termos proporcionais a b_0 e γ_0), obtém-se o exato resultado de uma ressonância não-perturbativa tanto em ordem δ quanto em ordens superiores, o que definitivamente não ocorre na aplicação da OPT padrão. Tendo, portanto, determinado este expoente, a partir da eq. (3.58) escrevemos a pressão completa em ordem zero da RGOPT:

$$P_0^{\text{RGOPT}} = -\frac{(N-1)}{4\pi} \left\{ m^2 \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{m}{M} \right) \right] + 4T^2 J_0(T) \right\} + (N-1) \frac{m^2}{(4\pi)g b_0}. \quad (3.61)$$



Figura 3.3: Diagramas até ordem g .

Por questões de consistência, a aplicação da equação reduzida à pressão de ordem zero anula-se, enquanto o PMS permite-nos encontrar uma equação autoconsistente para a massa otimizada segundo a aproximação da RGOPT em 1 *loop*. Desenvolvendo a operação à direita na eq. (3.59), temos

$$f_{\text{PMS}}^{LL} = 1 - 2\pi g b_0 I_1^L(T) = 0, \quad (3.62)$$

em que

$$I_1^L(\bar{m}, T) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\bar{m}}{M}\right) - \frac{1}{\pi} J_1(\bar{m}, T). \quad (3.63)$$

Em particular, quando $T = 0$, temos

$$\bar{m}(0) = M \exp[-1/(g b_0)] \quad (3.64)$$

em $T = 0$. Portanto, resultados em ordem zero altamente não perturbativos são obtidos tomando-se apenas as equações (3.39 e 3.62). Chamamos a atenção para o fato de que neste caso, contrariamente à QCD, este *gap* de massa não-perturbativo não está relacionado a uma quebra de simetria da lagrangiana, embora seja também gerado dinamicamente a partir de suas interações (não lineares). Tomando o limite $N \rightarrow \infty$ na eq. (3.62) e substituindo $g \rightarrow g/N$, encontra-se o conhecido resultado de LN [20, 83]. Ou ainda, mesmo no nível da pressão, procedemos da mesma maneira para vermos a RGOPT reproduzir exatamente a pressão em LN [20, 83]

$$P^{\text{LN}} = -\frac{N}{2} I_0^L(m_{\text{LN}}, T) + \frac{N m_{\text{LN}}^2}{2g}, \quad (3.65)$$

onde m_{LN} satisfaz uma equação autoconsistente análoga à eq. (3.64), sendo feitas as devidas substituições. Por exemplo, em $T = 0$,

$$m_{\text{LN}} = M \exp[-(2\pi)/g], \quad (3.66)$$

o mesmo resultado apresentado na Ref. [19] através do formalismo CJT (Apêndice D).

3.3.2 Ordem δ

Consequentemente, ao fazermos $m \rightarrow m(1-\delta)^a$ e $g \rightarrow \delta g$ na pressão dada pela eq. (3.53), expandirmo-la até a ordem δ e utilizando as equações (3.44) e (3.45), imediatamente construímos a pressão RGOPT renormalizada em dois loops ao substituirmos devidamente $s_0 = 1$, $s_1 = 0$ e $\delta = 1$, em que contribuem

os termos da Fig. 3.3:

$$P^{\text{RGOPT}} = -\frac{(N-1)}{2}I_0^r + (N-1)\left(\frac{\gamma_0}{b_0}\right)m^2I_1^r - g(N-1)\frac{(N-3)}{8}m^2(I_1^r)^2 + \frac{(N-1)}{4\pi}\frac{m^2}{b_0g}\left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0}\right). \quad (3.67)$$

Note portanto que, após a determinação de a e da aplicação da equação do RG a um dado observável, a etapa relevante da RGOPT é a imposição da invariância do resultado de ordem mais baixa sob o operador reduzido do grupo (termo à esquerda na eq. (3.59)), estabelecendo o vínculo entre este expoente e as propriedades do RG.

Por outro lado, na ordem δ (2 loops) a consistência entre operadores e termos da pressão permite-nos a aplicação da equação completa da RGOPT, sendo que o PMS agora fornece, aplicando a operação à direita na eq. (3.59),

$$f_{\text{PMS}}^{(2L)} = \frac{\beta^{(1)}}{4\gamma_0 b_0 g} S_1^2 + \left[\frac{1}{b_0} - \frac{1}{2\gamma_0} (1 + gS_2) \right] S_1 + \frac{1}{b_0} \left[\left(\frac{1}{g} (1 - \frac{\gamma_0}{b_0}) + S_2 \right) \right] \equiv 0 \quad (3.68)$$

e a equação reduzida do grupo de renormalização traz

$$f_{\text{RG}} = -\frac{\beta^{(2)}}{4\gamma_0} S_1^2 - gS + \left[\frac{\gamma_0}{b_0} + g\frac{b_1}{b_0} \left(1 - \frac{\gamma_0}{b_0} \right) \right] \equiv 0, \quad (3.69)$$

em que, por questões de praticidade, definimos as quantidades adimensionais $\beta^{(1)} = -b_0g^2$, $\beta^{(2)} = -b_0g^2 - b_1g^3$, $S_1 = 4\pi\gamma_0I_1^r$ e $S_2 = -\gamma_0[1 + 2y^2J_2(T)]$, onde

$$J_2(T) = \int_0^\infty dz \frac{[e^{\omega z}(1 + \omega z) - 1]}{\omega^3(1 - e^{\omega z})^2}. \quad (3.70)$$

É fácil notar a relação de S_2 com a integral $I_2(T) = \partial I_1(T)/(\partial m^2)$. As equações (3.68) e (3.69) são quadráticas e, conseqüentemente, não necessariamente terão soluções reais. De fato, a equação reduzida possui solução física apenas no limite de N grande, enquanto o PMS em 2 loops possui solução real seja qual for o número de componentes escalares. Veja as expressões analíticas em $T = 0$ para a solução do PMS ($\overline{m}_{f_{\text{PMS}}}$) e da equação reduzida ($\overline{m}_{f_{\text{RG}}}$):

$$\begin{aligned} \frac{\overline{m}_{f_{\text{PMS}}}}{M} &= \exp \left[\left(-\frac{1}{b_0} + \frac{1 - g\gamma_0}{2\gamma_0} \pm \sqrt{\Delta_{f_{\text{PMS}}}} \right) / g \right] \\ &\approx \exp \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) + \frac{2(g \mp 2g)\pi}{g^2 N} \exp \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(1/N^2), \\ \Delta_{f_{\text{PMS}}} &= \left(-\frac{1}{b_0} + \frac{1 - g\gamma_0}{2\gamma_0} \right)^2 + g \left(-\gamma_0 + \frac{1 - \gamma_0/b_0}{g} \right) / (b_0\gamma_0). \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{m}_{f_{\text{RG}}}}{M} &= \exp \left\{ -\frac{g \pm \sqrt{\Delta_{f_{\text{RG}}}}}{b_0g^2 + b_1g^3} \right\} \\ &\approx 1 \mp \frac{2(\pi\sqrt{-g^3(3g + 8\pi)} \pm 2g\pi^2)}{g^2(g + 2\pi)N} + \mathcal{O}(1/N^2), \end{aligned}$$

$$\Delta_{f_{\text{RG}}} = g^2 - (b_0g^2 + b_1g^3) \left[\frac{\gamma_0}{b_0} + \frac{gb_1(1 - \gamma_0/b_0)}{b_0} \right]. \quad (3.72)$$

Portanto, no caso $N = 4$ de nosso interesse, não poderemos obter massa e acoplamento ótimos através da intersecção de soluções para um dado par $\{T, M\}$ conforme mostrado pelos autores de [43]. Deste modo, alternativamente à aplicação da eq. (3.59), a solução pode ser tomada simultaneamente na RGOPT, utilizando a equação completa do grupo de renormalização (eq. (2.38)):

$$f_{\text{full}}^{(2L)} = f_{\text{RG}}^{(2L)} + 2\gamma_m f_{\text{PMS}}^{(2L)} \equiv 0, \quad (3.73)$$

em que γ_m deve ser considerada até a ordem g^2 . Note que em $T = 0$, resolvendo a equação acima para $\overline{m}_{f_{\text{full}}}$, temos soluções para $N = 4$ e acoplamentos pequenos e intermediários:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{m}_{f_{\text{full}}}}{M} &= \exp \left\{ -\frac{g - 2 \left(\frac{1}{b_0} - \frac{1-g\gamma_0}{2\gamma_0} \right) \gamma_m^{(2)} \pm \sqrt{\Delta_{f_{\text{full}}}}}{4\gamma_0 \left(-\frac{\beta^{(2)}}{4\gamma_0} + \frac{\beta^{(1)}\gamma_m^{(2)}}{2gb_0\gamma_0} \right)} \right\} \\ &\approx \exp \left\{ \frac{-g^3 - g^2\pi \mp [g^2(g + \pi)]}{2g^2(2g + 3\pi)} \right\} + \exp \left\{ \frac{-g^3 - g^2\pi \mp [g^2(g + \pi)]}{2g^2(2g + 3\pi)} \right\} + \mathcal{O}(1/N), \\ \Delta_{f_{\text{full}}} &= \left[g - 2 \left(\frac{1}{b_0} - \frac{1-g\gamma_0}{2\gamma_0} \right) \gamma_m^{(2)} \right]^2 \\ &\quad - \frac{4}{b_0} \left(-\frac{\beta^{(2)}}{4\gamma_0} + \frac{\beta^{(1)}\gamma_m^{(2)}}{2gb_0\gamma_0} \right) \left\{ \gamma_0 + gb_1(1 - \gamma_0/b_0) + 2\gamma_m^{(2)} [-\gamma_0 + (1 - \gamma_0/b_0)/g] \right\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Para obter os devidos resultados em 2 loops, portanto, teremos os *inputs* $\{T, M, g(M)\}$ para fixar \overline{m} , além do *running* do acoplamento, o qual, utilizando consistentemente a próxima ordem da função β , expressa-se em dois loops como [43, 93]:

$$g^{-1}(M) \simeq g^{-1}(M_0) + b_0 L + (b_1 L) g(M_0) - \left(\frac{1}{2} b_0 b_1 L^2 \right) g(M_0)^2 - \left(\frac{1}{2} b_1^2 L^2 - \frac{1}{3} b_0^2 b_1 L^3 \right) g(M_0)^3 + \mathcal{O}(g(M_0)^4), \quad (3.75)$$

onde $L = \ln(M/M_0)$.

Para acoplamentos muito fortes, as soluções passam a ser complexas, restando a aplicação apenas da $f_{\text{PMS}}^{(2L)}$ nesta região. Resumindo os procedimentos, a melhor maneira de se obter resultados através da RGOPT é resolver simultaneamente f_{PMS} e f_{RG} , cujas soluções seriam dadas via intersecção entre as curvas, sendo que qualquer alteração nos valores de T ou M seriam consistentemente levadas em conta. Caso uma das equações (f_{RG} , neste caso) não apresente soluções reais para N finito, parte-se para a resolução de f_{full} junto ao *running* de ordem correspondente. Dada a não-linearidade do NLSM, esta última alternativa vale até certo valor do acoplamento e, as regiões onde a solução é complexa, devem ser exploradas através do PMS em 2 loops. Sob as modificações $g \rightarrow g^2/N$ e tomando $N \rightarrow \infty$, é imediata a verificação analítica de que as três equações de segunda ordem descritas acima concordam com os resultados de N grande [19, 73, 77], assim como destacamos para a $f_{\text{PMS}}^{(1L)}$ anteriormente.

3.4 OPT/SPT padrão

É conveniente que analisemos também o comportamento da OPT padrão no NLSM a fim de que possamos comparar. Para tanto, partimos novamente da eq. (3.44) e substituímos $m \rightarrow (1 - \delta)^a m$ e $g \rightarrow \delta g$. Contudo, a diferença crucial está no termo gaussiano, pois na OPT padrão o expoente a é fixado de modo *ad hoc* como $a = 1/2$, enquanto a RGOPT exige uma derivação mais rigorosa por ser consistente com o RG. Portanto, basta tomarmos a eq. (3.49) com as substituições acima e, expandindo-a até a $\mathcal{O}(g)$, teremos uma expressão semelhante, porém menos completa do que a eq. (3.67):

$$P^{\text{SPT}} = -\frac{(N-1)}{2}I_0^r + \frac{(N-1)}{2}m^2I_1^r - g(N-1)\frac{(N-3)}{8}m^2(I_1^r)^2, \quad (3.76)$$

e, neste caso, obtemos uma expressão análoga às equações (3.68) e (3.69):

$$f_{\text{SPT}} = S_1^2 + 2S_2S_1 - \frac{2}{g}S_2. \quad (3.77)$$

Logo, em $T = 0$,

$$\bar{m}_{\text{SPT}} = \exp\left(-\frac{2\gamma_0 \pm \sqrt{\Delta_{\text{SPT}}}}{4\gamma_0}\right),$$

em que

$$\Delta_{\text{SPT}} = -\frac{8\gamma_0}{g} + 4\gamma_0^2 = \gamma_0 \left[-\frac{8}{g} + \frac{(N-3)}{2\pi} \right], \quad (3.78)$$

que claramente não apresenta soluções reais para $N = 4$ e $g = 1$, o que é consideravelmente incomum para a SPT/OPT, cujas soluções costumam ser extensões naturais dos resultados de N grande e, por isso, bem comportadas. Contudo, a conclusão mais grave com relação a esta aproximação é o fato de, contrariamente ao que vimos em 2 *loops* e mesmo em 1 *loop* acima, não obtemos os resultados de N grande quando tomados $g \rightarrow g/N$ e $N \rightarrow \infty$ [94]. Esta recorrência é naturalmente encontrada quando se considera os modelos $g\Phi^4$ [43, 44, 55, 56] e de Gross-Neveu [32]. Portanto, uma alternativa é utilizarmos a *screened mass* $m_T = gT(N-3)/4$ como sendo a massa otimizada da SPT, obtida a partir da autoenergia perturbativa em 1 *loop* [88]

$$\Sigma = gm^2\frac{(N-3)}{2}I_1^r(T), \quad (3.79)$$

a qual, quando $\Sigma \rightarrow m^2$, gera uma massa (vestida) autoconsistente. A *screened mass* é útil do ponto de vista numérico quando apenas regiões de altas temperaturas são exploradas. Neste trabalho estamos interessados no intervalo completo de temperaturas, por isso tomaremos \bar{m}_{SPT} como sendo a solução da equação (3.79) fazendo $\Sigma \rightarrow m^2$:

$$f_{\text{SPT}}^{(1L)} = 1 - 4\pi g\gamma_0 I_1^r(T) \equiv 0, \quad (3.80)$$

de forma semelhante à eq. (3.62). É imediata a verificação de que esta solução fornece a *screened mass* (m_T) no limite de altas temperaturas, em que $I_1^r(T) \rightarrow J_1(T)/\pi \approx -\pi T/m + \mathcal{O}(1/T)$.

3.5 Resultados numéricos

Em geral, desenvolvimentos numéricos da termodinâmica são mais convenientemente tratados quando usamos a pressão subtraída: $P_n = P(T) - P(0)$. Consistentemente, isto implica em se ter pressão zero em temperatura zero. Outros observáveis termodinâmicos de interesse são a densidade de energia, $\mathcal{E} = -P_n + TS$ onde a densidade de entropia é simplesmente $\mathcal{S} = \partial P_n / \partial T$ e a anomalia do traço (ou medida de interação) $\Delta = (\mathcal{E} - P_n)$. Além disso, pela intenção de compararmos nossos resultados com a literatura, é conveniente a normalização pela pressão de um gás livre, ou pressão no limite de Stefan-Boltzmann (SB). Tal limite é facilmente encontrado quando tomamos a pressão perturbativa mais simples, de 1 *loop* (equações (3.40) e (3.42)), e tomamos seu limite de altas temperaturas $J_0(T) = -\pi^2/6 + \pi y/2 + \mathcal{O}(y^2)$, sendo o termo dominante o que gera o limite de SB:

$$P_{SB} = (N - 1) \frac{\pi}{6} T^2. \quad (3.81)$$

Contudo, note que na derivação da pressão tratamos a interação escrevendo o campo σ em função dos $(N - 1)$ píons, havendo sempre um fator global $(N - 1)$ nas expressões a menos da aproximação de N grande, que carrega este fator global. Logo, de antemão sinalizamos que os resultados da pressão de LN sempre superestimarão P_{SB} em altas temperaturas, no caso de $N = 4$ aqui considerado.

Como desejamos analisar a invariância dos resultados frente ao grupo de renormalização, escreveremos a escala como $M = \alpha M_0$, e aqui consideramos os casos $\alpha = 0.5, 1$ e 2 , com as respectivas expressões do *running* em 1 e 2 *loops* (equações (3.39) e (3.75) respectivamente). Contudo, ainda antes destas variações, podemos comparar na Fig. 3.4 as implementações mais relevantes³ (RGOPT1L e RGOPT2L) com a aproximação de N grande mesmo em $T = 0$, observando como as massas dependem do acoplamento quando tomamos apenas a escala “central” ($\alpha = 1$).

Como mostra a figura, as soluções de LN e RGOPT1L serão sempre reais para todo valor do acoplamento, haja vista as equações (3.64) e (3.66). Por outro lado, a otimização da RGOPT2L utilizando-se a solução completa ($f_{\text{full}}^{(2L)}$) falha para altos valores do acoplamento (vide eq. (3.74)). Lembremo-nos de que as soluções da RGOPT2L são obtidas após resolvermos a equação quadrática (3.73) para S_1 e, por isso, rotulamos os dois possíveis ramos de solução com os sinais correspondentes ante a raiz quadrada do discriminante ($\pm \sqrt{\Delta_{\text{full}}}$), conforme aparecem nas equações (3.74). De fato, até cerca de $g(M_0) \approx 4$, a equação possui duas raízes reais ($\Delta_{\text{full}} > 0$), quando então as soluções coincidem ($\Delta_{\text{RG}} = 0$) e, para valores maiores do acoplamento, $\Delta_{\text{full}} < 0$ e não há mais soluções

³ $f_{\text{RG}}^{(2L)}$ não constará aqui e doravante visto sempre fornecer apenas soluções complexas para N finito (vide eq. (3.72)).

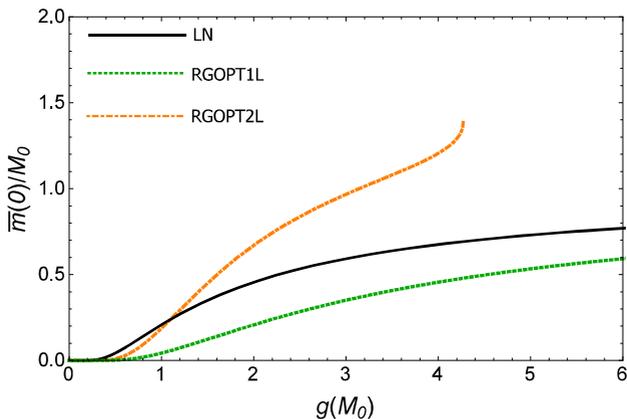


Figura 3.4: Massas normalizadas pela escala central em $T = 0$ como função de $g(M_0)$ para $N = 4$ e $\alpha = 1$.

físicas. Embora haja essas duas possibilidades em $N = 4$, optamos por utilizar nos cálculos subsequentes o ramo fisicamente coerente, ou seja, aquele que concorda com o resultado perturbativo para pequenos acoplamentos e, por isso, corresponde às soluções consistentes com o limite de SB em altas temperaturas; neste caso, trata-se da solução com o sinal positivo ante o discriminante da eq. (3.74). É fundamental observarmos que a solução com o sinal negativo (para esta solução, é este o ramo que atinge SB em altas temperaturas) em frente à raiz quadrada do discriminante da eq. (3.71), na escala central ($\alpha = 1$) sempre concorda exatamente com os resultados da RGOPT1L.

A partir de agora, como os resultados de interesse são os fisicamente consistentes e por objetividade na exposição, nas figuras sempre constarão apenas os resultados com o sinal positivo da eq. (3.74) quando tratarmos das soluções para a RGOPT2L (tomando a representação unívoca, ou seja, não associando $f_{\text{PMS}}^{(2L)}$ aos resultados de 2 *loops*) e aqueles provenientes da eq. 3.64 quando tratarmos das soluções para a RGOPT1L. Portanto, passamos agora a investigar, Fig. 3.5, o comportamento térmico da massa otimizada levando em conta a variação da escala ($\alpha = 0.5, 1, 2$) e fixando $g(M_0) = 1$. O comportamento visto nesta figura é qualitativamente semelhante ao encontrado pelos autores da Ref. [20], em que a massa parte de um valor finito em $T = 0$ e, em $T \neq 0$, logo apresenta pequena curvatura, precedida por um comportamento linear para altas temperaturas. É interessante notar que na fase desconfiada das teorias de Yang-Mills, as quais, como já mencionado, compartilham algumas propriedades com o NLSM, o mesmo padrão é observado para a massa do gluon ([95, 96, 97]), que usualmente é parametrizada por $T/\ln T$ em altas temperaturas. A massa, como solução das equações acima, não é por si só um observável, visto que funciona como um parâmetro indireto para o cálculo

de observáveis termodinâmicos. Portanto, mesmo uma teoria rigorosa e completamente invariante

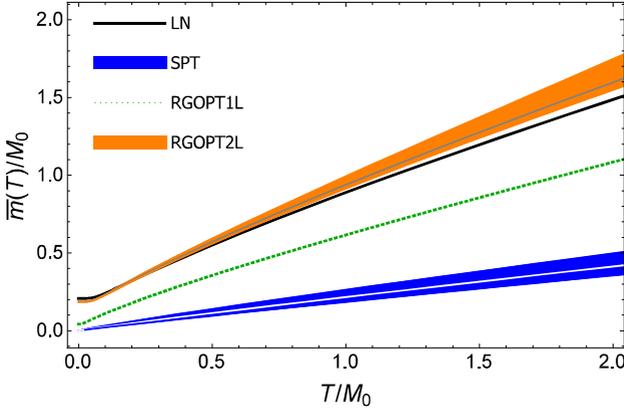


Figura 3.5: Dependência térmica da massa otimizada normalizada correspondente às soluções físicas em função da temperatura normalizada para os casos $\alpha = 0.5, 1, 2$, com $N = 4$ e $g(M_0) = 1$. Nas bandas de RGOPT em 2 *loops* e SPT, a linha contínua refere-se a $\alpha = 1$ (escala central) e os contornos inferior e superior a $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 2$ respectivamente.

sob mudanças de escala pode exibir esta dependência em uma massa proveniente de um *gap* [43, 44], característica que deveria obrigatoriamente caber, por exemplo, à pressão. Entretanto observe, a partir da Fig. 3.5, que as soluções tanto de LN quanto de RGOPT1L são perfeitamente invariantes. O mesmo, por construção, não é encontrado na RGOPT2L e na SPT, esta que não obedece a qualquer tipo de invariância. A curvatura logo acima de $T = 0$ pode ser melhor observada na Fig. 3.6, indicando que uma espécie de “transição” para uma fase mais massiva ocorre em baixas temperaturas.

A Fig. 3.7 mostra a pressão subtraída, P_n , e normalizada por P_{SB} para $g(M_0) = 1$ e escala $\alpha = 0.5, 1, 2$. Note que a curva de LN mostra tendência a ultrapassar o limite de Stefan-Boltzmann. Além disso, a curva de SPT rapidamente atinge seu patamar final ao compararmos com as aproximações mais completas da RGOPT. Veja que, de fato, RGOPT1L é completamente invariante frente à escala, sendo que se percebe uma pequena dependência residual na RGOPT2L [43, 44]. Note, contudo, quanto à convergência do método, que este apresenta considerável discrepância entre os resultados de um e dois *loops*. Frente à simulação numérica de Monte Carlo, nota-se a convergência da RGOPT especialmente a partir de $T/M_0 = 1$. Os resultados do modelo na rede foram traduzidos por nós para $N = 4$, visto que originalmente este assumiu a forma do modelo de Heisenberg $O(3)$. Segundo os autores da Ref. [19], a rede bidimensional teve um espaçamento α dado por $\alpha N_t = 1/T$, onde N_t é o número de sítios e desta maneira a temperatura foi introduzida. A convergência entre LN e a rede

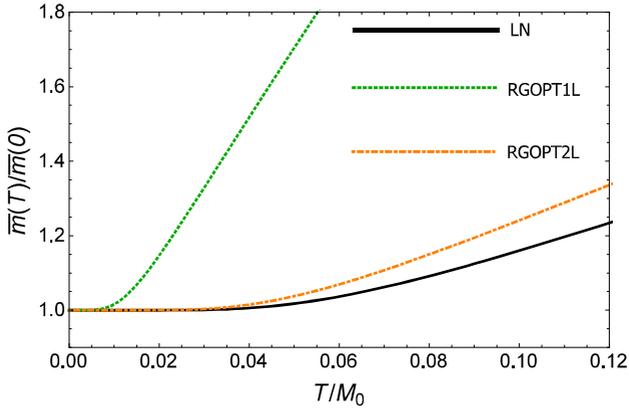


Figura 3.6: Curvatura da massa otimizada normalizada dependente da temperatura como função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 1$.

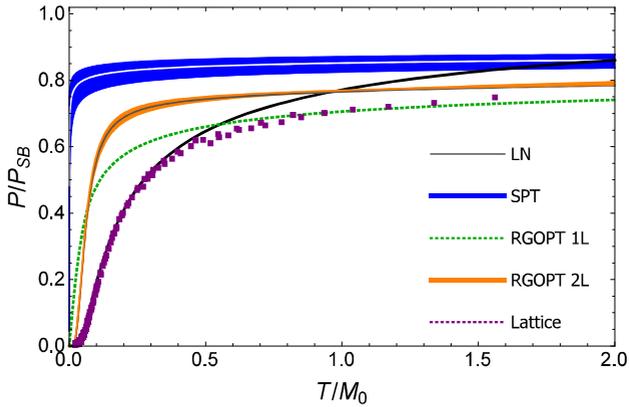


Figura 3.7: P/P_{SB} como função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$.

para baixas temperaturas foi observada também por estes autores e, a princípio, é proveniente de uma escolha específica destes e demais parâmetros da simulação. Pelo fato de não termos controle sobre esta e tratar-se apenas de uma reinterpretação de resultados para fins de comparação, ressaltamos que há dúvidas quanto a estes resultados alheios acerca da implementação do modelo na rede.

A partir da pressão podemos agora, nas mesmas condições $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e variando $\alpha = 0.5, 1, 2$, obter resultados para as demais quantidades termodinâmicas como a densidade de entropia (Fig. 3.8) e a densidade de energia (Fig. 3.9), cujo comportamento será discutido em breve.

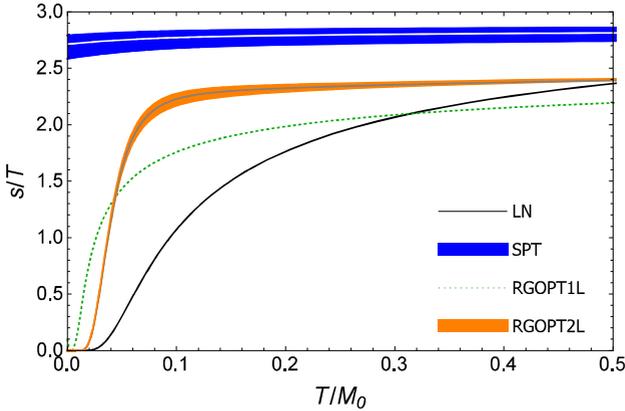


Figura 3.8: Densidade de entropia como função da temperatura, ambas normalizadas. $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$.

Além disso, como a equação de estado para o gás livre relaciona pressão (P) e densidade de energia (ϵ) tais que $P = \epsilon$; logo, a anomalia do traço, convenientemente chamada de medida de interação e definida por

$$\Delta = \epsilon - P, \quad (3.82)$$

indica o desvio do comportamento de gás livre exibido pelo sistema. Quanto a temperatura vai a infinito, as interações tendem a ser inibidas ($\Delta \rightarrow 0$) e o modelo aproxima-se do limite de Stefan-Boltzmann⁴. Portanto, a inflexão para baixas temperaturas da Fig. (3.10), em que apresentamos a anomalia do traço normalizada por T^2 , indica uma “temperatura crítica”, e o pico que a sucede indica um intervalo em que o sistema é altamente interagente. A inflexão mencionada ocorre, com boa aproximação, na mesma temperatura em que se observam as curvaturas na massa (Fig. 3.6). Esta concordância é importante, haja vista que é este ponto de inflexão que define a temperatura crítica na transição de fases da QCD. Mesmo em um *crossover*, a temperatura crítica (ou pseudo-temperatura crítica) define-se como aquela em que a massa possui maior sensibilidade às variações de temperatura; para tanto, observemos a Fig. 3.11, que esclarece a relação entre o comportamento térmico da massa e a inflexão na medida de interação. Além disso, verificamos que, a menos da SPT, em altas temperaturas Δ comporta-se linearmente com T/M_0 , o mesmo encontrado pelos autores das referências [98] e [99] para a teoria de Yang-Mills em quatro dimensões. Por outro lado, uma dependência quadrática foi observada em cálculos de LQCD, segundo a Ref. [100]. Note ainda que,

⁴Note que, pelo fato de em $1+1$ dimensões termos $\Delta = \epsilon - P$, o limite de um gás livre (não interagente, portanto $\Delta = 0$) fixa $P_{SB} = \epsilon_{SB}$, o que nos permite utilizar a mesma normalização nas figuras 3.7 e 3.9.

após a “transição” (inflexão), a RGOPT2L prevê um sistema muito mais interagente do que LN ou RGOPT1L em um determinado intervalo de temperatura. Logo, vale a comparação de nossa figura com a medida de interação fornecida pela HTLpt (na Fig. 12 da Ref. [9] estão os resultados para glúons apenas, tomados até 3 *loops*). Veja que nosso resultado de 2 *loops*, pelo menos qualitativamente, concorda em muito com o encontrado através do modelo na rede [19] e de simulações de LQCD [101], enquanto a SPT assemelha-se aos resultados de LO e NLO da HTLpt.

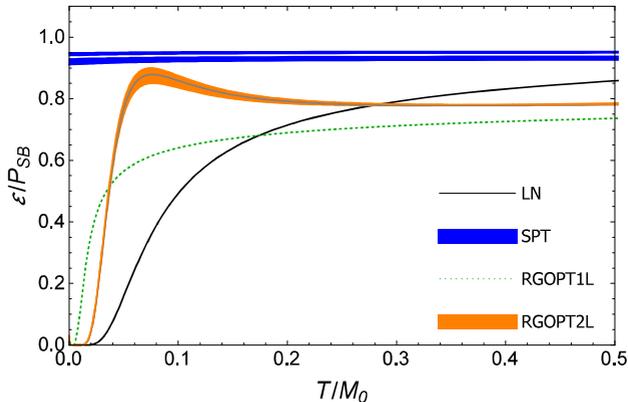


Figura 3.9: Densidade de energia normalizada pelo limite de SB como função da temperatura normalizada. $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$.

Note que, embora LN e RGOPT1L sinalizem uma propensão a uma *crossover* na região $0.05 \leq T/M_0 \leq 0.2$ das figuras 3.9, 3.10 e 3.11, apenas a RGOPT2L assinala o que se observa para a QCD no que diz respeito à densidade de energia: O pico nesta quantidade, quando normalizada, costuma indicar uma região de transição de fase em, por exemplo, teorias de Yang-Mills para 3 + 1 dimensões [102], em que os autores também utilizaram grupo de renormalização, e na LQCD ([103], [104] e [105], onde discute-se o ponto crítico no diagrama de fases da QCD e o plasma de quarks e glúons)). Devido a estas semelhanças e também ao fato acima mencionado de a medida de interação crescer linearmente com a temperatura, os resultados estão absolutamente consistentes com e reforçam a forte relação entre o NLSM calculado em RGOPT2L para 1 + 1 dimensões e teorias de Yang-Mills para 3 + 1 dimensões. Em 1 *loop* isto já havia sido mostrado pelos autores de [18, 19, 20] em termos apenas da anomalia do traço e do *gap* de massa mas, como vemos na Fig. 3.9, apenas em 2 *loops* a densidade de energia apresenta-se como um indicativo de *crossover*.

Vemos que LN, RGOPT1L e RGOPT2L mostram melhor, em contraste com a SPT, o comportamento de gás livre para o sistema através da Fig. 3.12, onde o parâmetro da equação de estado

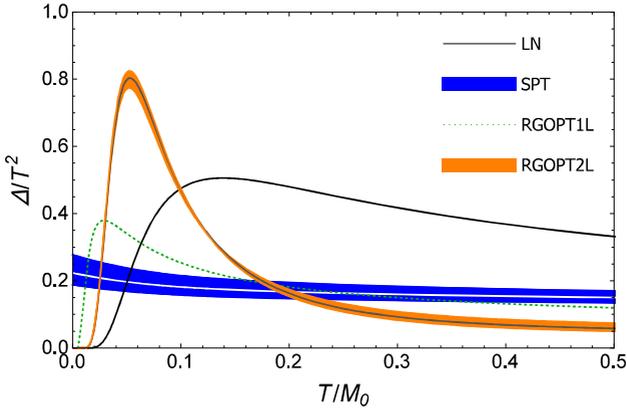


Figura 3.10: Anomalia do traço normalizada por T^2 como função da temperatura normalizada. Os picos mostram onde o sistema é altamente interagente. $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$.

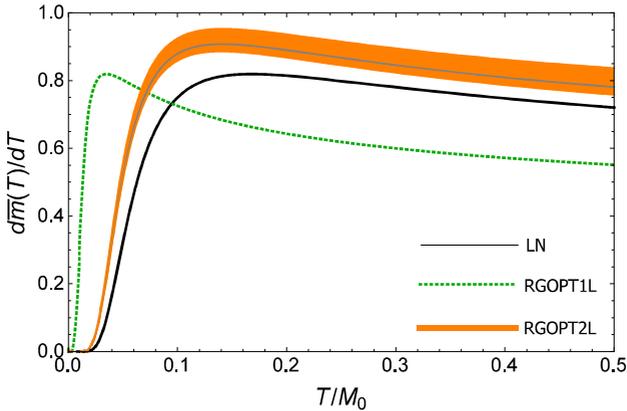


Figura 3.11: Taxa térmica de variação da massa como função da temperatura, com os picos sinalizando regiões de possíveis *crossovers*. $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$.

$w = P/\varepsilon$ indica a já mencionada tendência $P_{SB} = \varepsilon_{SB}$ em altas temperaturas. A Fig. 3.13 mostra a velocidade do som, $v_s^2 = dP/d\varepsilon$, como função da temperatura. Lembrando que a equação de estado do gás livre é $\varepsilon = P$, o limite da velocidade é fixado em $v_s = 1$. Note da figura, portanto, que os resultados da RGOPT em 2 loops geram a equação de estado mais dura dentre os cálculos não perturbativos deste trabalho a partir de $T/M_0 \approx 0.02$, sendo seguida consecutivamente por 1

loop e LN. A SPT, no entanto, como esperado tendo em vista o comportamento de sua pressão (Fig. 3.7), apresenta uma velocidade do som que atinge um certo patamar já em baixas temperaturas; em geral, os comportamentos abruptos da SPT mostram que, realmente, a pura teoria de perturbação é incompatível com a fenomenologia esperada. Os resultados obtidos para a velocidade do som estão em concordância com o que se obtém através da LQCD [101]. Todavia, vemos um resultado interessante para a RGOPT2L (Fig. 3.14), observado também no modelo de NJL [34]. No modelo de NJL, este mínimo sinaliza uma temperatura pseudocrítica e indica que a equação de estado do sistema adquire uma repentina maleabilidade na criticidade.

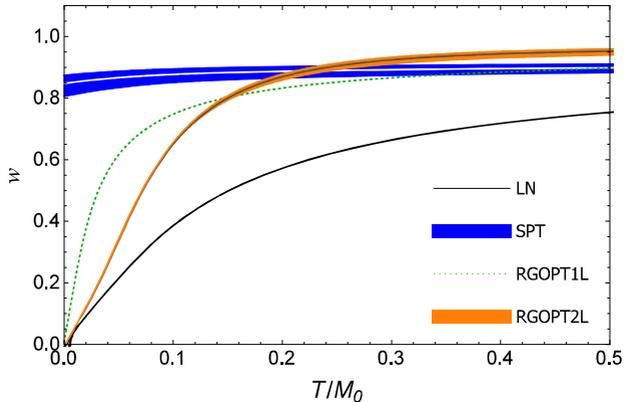


Figura 3.12: Parâmetro da equação de estado como função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$.

Também é válido analisar como nossos resultados comparam-se com a aproximação $1/N$ em NLO para $N = 4$ [77], uma vez que o método da RGOPT incorpora correções de N finito. A Fig. 3.15 mostra diferentes resultados para P/P_{SB} com $\alpha = 1$ em altas temperaturas, onde a pressão na aproximação $1/N$ expressa-se, de acordo com [77], como

$$P_{1/N}^{\text{NLO}} \approx P_{SB} - \frac{1}{4} m_{1/N}^{\text{NLO}} (N-2)T, \quad (3.83)$$

onde

$$m_{1/N}^{\text{NLO}} \approx \pi T \left[\frac{1}{N} \left(\frac{2\pi}{g} - \ln 4 \right) \left(1 + \frac{2}{N} \right) - \gamma_E - \ln \left(\frac{M}{4\pi T} \right) \right]^{-1}. \quad (3.84)$$

Novamente a curva de LN claramente mostra a tendência de superar o limite de SB. Note a concordância entre RGOPT1L e RGOPT2L com a ressonância $1/N$ em NLO, cujos desenvolvimentos analíticos são altamente não triviais.

O sucesso da RGOPT aplicada no NLSM é interessante principalmente pelo fato de o modelo compartilhar aspectos termodinâmicos com teorias de Yang-Mills, que podem naturalmente exibir

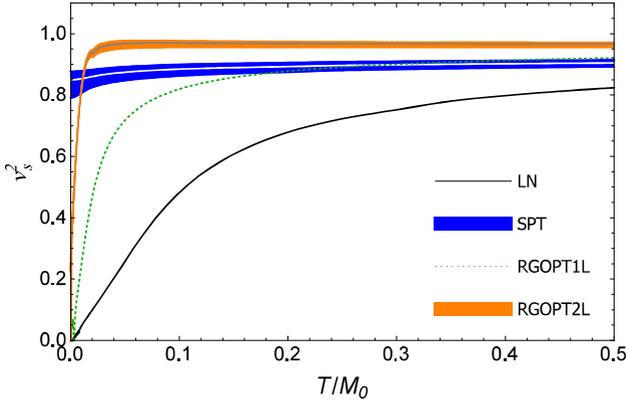


Figura 3.13: Quadrado da velocidade do som em função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$. A equação de estado da RGOPT2L mostra-se a mais dura a partir de $T/M_0 \approx 0.02$ e a SPT atinge rapidamente um determinado patamar.

confinamento. A concordância pelo menos qualitativa de quantidades como densidade de energia, anomalia do traço e velocidade do som reforçam a eficiência da RGOPT.

No próximo capítulo aplicaremos a OPT ao modelo fermiônico não renormalizável PNJL, que simula o confinamento de quarks e pode auxiliar na determinação do ponto crítico do diagrama de fases da QCD, pois permite cálculos em densidades bariônicas finitas. Visto que o PNJL não contém liberdade assintótica, utilizaremos uma versão adaptada do *running* da QCD, semelhante à eq. (3.39) apresentada neste capítulo, para corrigir um comportamento discrepante de sua termodinâmica.

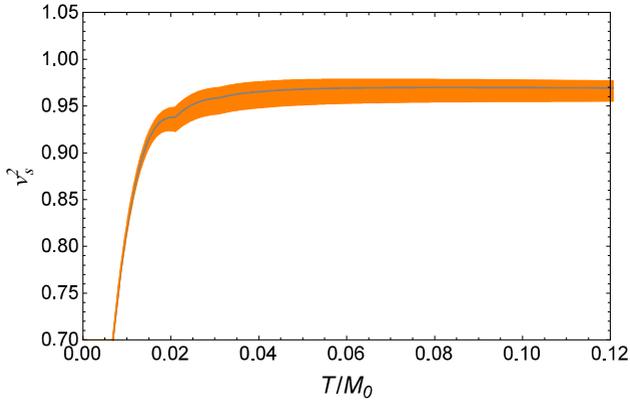


Figura 3.14: Quadrado da velocidade do som em função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 0.5, 1, 2$ para RGOPT2L nas regiões de inflexão da massa. O comportamento em $T/M_0 \approx 0.02$ é semelhante ao encontrado pelo modelo de NJL nas proximidades da temperatura crítica para a transição quiral.

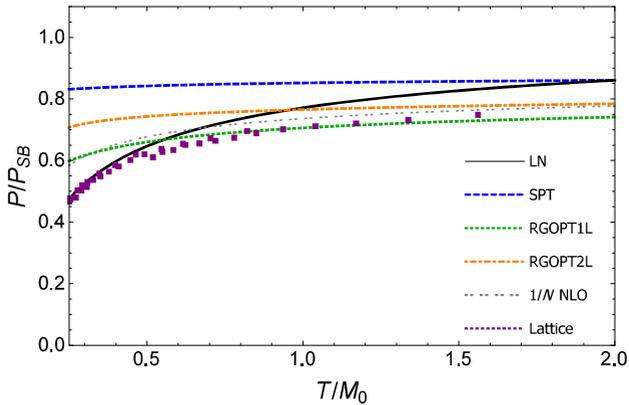


Figura 3.15: P/P_{SB} como função da temperatura normalizada para $N = 4$, $g(M_0) = 1$ e $\alpha = 1$.

Capítulo 4

OPT aplicada ao segundo cumulante do modelo PNJL

Há modelos escalares que apresentam liberdade assintótica (como o NLSM, discutido no capítulo anterior) e são simplificações da QCD; contudo, não apresentam simetria quiral e não podem fazer previsões para quarks, por exemplo. Um bom modelo efetivo que, mesmo sem exibir liberdade assintótica nem renormalizabilidade, contém simetria quiral, é o de Nambu–Jona–Lasinio (NJL). Embora trate de férmions, a estrutura padrão deste modelo não incorpora o confinamento de quarks. Contudo, para simularmos tais características podemos adicionar um campo de fundo à sua lagrangiana (através do *loop* de Polyakov, por exemplo). O confinamento de quarks tem sua relevância no fato de que há muito tempo o diagrama de fases da QCD tem atraído interesse teórico e experimental, em especial quando se trata de quarks e glúons submetidos a valores finitos de temperatura (T) e potencial químico (μ). Neste regime há dois tipos importantes de transição, sendo uma associada com a restauração da simetria quiral e outra com a passagem da fase hadrônica para a fase desconfinada. Ainda estão em aberto diversas relações entre a transição quiral e o desconfinamento, embora resultados da QCD na rede (LQCD) indiquem que estas ocorram em temperaturas próximas. Investigações específicas recentes concentram-se na determinação de um ponto crítico no diagrama de fases para a matéria de quarks.

No regime de potencial químico finito, os resultados fornecidos pela LQCD são deduzidos através de uma expansão em série de Taylor das grandezas termodinâmicas em potências de μ/T em torno de $\mu = 0$. Os coeficientes de expansão da pressão de um sistema de quarks em ordem n , ou seja, as derivadas de ordem n da pressão a uma dada temperatura com respeito a μ/T , são chamados de cumulantes, $c_n(T)$, da pressão. O segundo cumulante está intimamente relacionado com a susceptibilidade dos quarks, quantidade que auxilia na determinação do ponto crítico e são acessíveis à LQCD:

$$\frac{P(T, \mu)}{T^4} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(T) \left(\frac{\mu}{T}\right)^n, \quad (4.1)$$

logo

$$c_n(T) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial(P(T, \mu)/T^4)}{\partial(\mu/T)^n} \right|_{\mu=0}. \quad (4.2)$$

Em $\mu = 0$ o coeficiente c_2 , segundo a LQCD, aumenta com a temperatura até aproximar-se do limite de Stefan-Boltzmann. Por outro lado, modelos efetivos mostram este coeficiente atingindo um máximo pouco acima de T_c quando um termo de repulsão vetorial, controlado por G_V , é incluído e estão, portanto, em desacordo com relação à LQCD. Esta discrepância foi inclusive utilizada mesmo em modelos tomados em N_c grande para fixar o ainda desconhecido valor de G_V [54]. Aqui mostraremos que, quando são tomados termos considerando N_c finito, mesmo com $G_V = 0$ encontra-se este máximo na curva de c_2 , pois um termo de repulsão vetorial é gerado dinamicamente pelas correções radiativas. Tais efeitos de N_c finito serão aqui obtidos através da OPT, que mostrou resultados numéricos muito precisos para $T \leq 1.2T_c$ mas, como esperado, mostra um máximo em seguida. Mostraremos ainda os resultados análogos a esses atingidos pelos autores da Ref. [54], que compararam o modelo de NJL acrescido do *loop* de Polyakov (PNJL) com a rede. O *loop* de Polyakov auxilia na investigação do desconfinamento em conjunto com a restauração da simetria quiral, e pode ser devidamente adicionado a qualquer modelo efetivo da QCD que exiba esta simetria. O campo associado a este *loop* serve como um parâmetro de ordem para o desconfinamento quando $N_f = 0$. Novamente, mesmo com o *loop* de Polyakov foi observado este máximo, o que nos permitiu concluir que sua origem matemática se dá justamente mediante se tomar correções de $1/N_c$ quando $G_V = 0$, e não pela ausência de um termo que simule o confinamento dos quarks. Interpretamos, portanto, esta hipótese como uma indicação de que, além do limite de N_c grande, o comportamento pelo menos qualitativamente correto em altas temperaturas (perturbativamente) de c_2 deve ser encontrado por modelos efetivos apenas se estes simularem o fenômeno da liberdade assintótica e/ou demais propriedades da QCD.

Diversas aplicações antigas e recentes justificam a importância e praticamente a necessidade de canais vetoriais de repulsão serem incluídos na lagrangiana de teorias efetivas que descrevem a interação forte, conforme naturalmente se constrói o modelo nuclear de Walecka [106] e a versão do modelo de NJL para a matéria de quarks [107], por exemplo. Uma destas aplicações está na Ref. [108], em que a versão $SU(3)$ do NJL foi utilizada para reproduzir a EoS da matéria de quarks magnetizada em $T \approx 0$. Além disso, na escala de energia dos experimentos realizados no *Beam – Energy Scan program* do RHIC, observou-se discrepâncias na medida do fluxo elíptico entre nucleons e antinucleons e entre káons e antikáons [109], que ficam melhor explicadas através de interações vetoriais. Note que a Ref. [110] sugere que este problema possa ser resolvido com a inclusão de uma interação repulsiva.

Também vemos a necessidade crucial desta implementação no estudo do ponto crítico (CP) no diagrama de fases da QCD. Embora a maioria dos trabalhos preveja a sua existência, os autores da Ref. [111], utilizando métodos numéricos, previram a possível inexistência deste CP. Contudo, a discussão encontrada na Ref. [112] indica que um acoplamento repulsivo vetorial possa conciliar os resultados da Ref. [111] com as previsões feitas por modelos, resultando em um CP em seu diagrama de fases.

Para adicionarmos um canal de repulsão vetorial ao NJL, basta que entremos com o termo $-G_V(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$ na densidade lagrangiana original [47, 107]. Portanto, na aproximação de N_c grande apenas a componente 0 sobrevive, logo a consequência efetiva desta adição é a adição de um termo como $-G_V\rho_q^2$ à pressão (onde ρ_q é a densidade do número de quarks), enfraquecendo (fortalecendo) a transição de primeira ordem quando G_V é positivo (negativo) [113]. Sendo assim, no caso repulsivo ($G_V > 0$), a transição de primeira ordem cobre um intervalo menor de temperaturas comparado ao caso $G_V = 0$, enquanto o potencial químico onde ocorre a coexistência de fases para uma dada temperatura passa para um valor maior. Consequentemente, o CP ocorre em valores menores de temperatura e maiores de potencial químico do que no caso $G_V \rightarrow 0$.

Fixar G_V em um modelo não renormalizável como o NJL é uma tarefa sutil, e a raiz deste problema está diretamente associada à fenomenologia do modelo. Por exemplo, para fixarmos o acoplamento escalar-pseudoescalar G_S , impomos que a massa de corrente m_c dos quarks e a escala de energia (cutoff Λ) sejam ajustadas de modo a reproduzirem os conhecidos resultados para a massa do pión ($m_\pi \approx 135$ MeV), sua constante de decaimento ($f_\pi \approx 93$ MeV) e para o condensado de quarks ($\langle\bar{\psi}\psi\rangle^{1/3} \approx -250$ MeV), o que fornece $\Lambda \approx 500-670$ MeV, $G_S\Lambda^2 \approx 2-3.2$ e $m_c \approx 5-5.6$ MeV (na Ref. [47] encontramos uma discussão detalhada). A respeito do *cutoff* (Λ), note que conforme já discutido é utilizado para regular as integrais com divergências ultravioletas que naturalmente aparecem no modelo. Tais divergências não podem ser removidas por uma redefinição sistemática dos parâmetros originais conforme os capítulos anteriores visto que o modelo não é renormalizável. O parâmetro Λ , portanto, define a escala máxima de energia em que reside a validade das predições do modelo. Assim como no caso de G_S , a fixação de G_V deve respeitar os valores fenomenológicos dos observáveis físicos. Contudo, este acoplamento depende da utilização da massa do méson ρ , a qual é maior do que a escala máxima de energia definida por Λ . Portanto, o valor de G_V não pode ser determinado por experimentos e pela LQCD porém, eventualmente, a combinação de observações de estrelas de nêutrons e de transições de fases em FAIR/NICA podem sugerir seu valor numérico. Enquanto muitos trabalhos tratam G_V como um parâmetro livre, cujos valores cobrem um intervalo de $0.25 G_S$ a $0.5 G_S$ [114, 115], outros procuram fixá-lo de diferentes maneiras como nas Ref. [116, 117], prevendo $0.3 \leq G_V/G_S \leq 3.2$. De uma maneira ou de outra, o real valor de G_V permanece indeterminado. No entanto, uma alternativa a este problema de fixação pode surgir quando vamos além de LN (ou

campo médio), em que correções radiativas de troca induzem efeitos físicos similares aos causados em nível clássico (de árvore), como o termo $G_V(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$ [46]. É exatamente isso que se observa em uma aplicação da OPT ao modelo de NJL sem termo de repulsão vetorial ($G_V = 0$) [118]. Os resultados da OPT para o diagrama de fasas fornecido pelo modelo de NJL mostram que correções de N_c finito induzidas por esta aproximação reproduzem, ao menos qualitativamente, as mesmas características (enfraquecimento da transição quirar de primeira ordem) obtidas ao se considerar o modelo em N_c grande com canal vetorial repulsivo. Isto ocorre devido à presença, com a OPT em dois *loops*, de um termo proporcional a $-G_S\rho_q^2/(N_c N_f)$ na pressão, enquanto o canal vetorial repulsivo em LN gera $-G_V\rho_q^2$. Os autores da Ref. [119] obtiveram também, com a OPT e $G_V = 0$, resultados muito similares aos encontrados pelos autores da Ref. [112], na aproximação de LN com $G_V \neq 0$. Esta forte relação entre a OPT com $G_V = 0$ e a aproximação de N_c grande com $G_V \neq 0$ foi investigada em detalhes através do modelo abeliano de NJL em densidades finitas ($\mu \neq 0$) e temperatura zero [120]. É evidente que, inclusive neste caso de se determinar propriedades da matéria densa de quarks, o grande trunfo da OPT é fornecer resultados não perturbativos mais realísticos sem a necessidade de se incluir explicitamente o parâmetro indeterminado G_V . Resultados de mesma forma podem ser obtidos através da típica expansão $1/N_c$, entretanto, este procedimento nem sempre é viável devido às contribuições de infinitas séries a serem somadas [81]; por isso a preferência neste trabalho de se utilizar a OPT, que combina cálculos perturbativos com um procedimento variacional de otimização, oferecendo uma alternativa não perturbativa para se ir além do limite de N_c grande. A posse de tal maquinário pode ser útil na análise da matéria de quarks no regime de $\mu \neq 0$, região em que falha a QCD por não ser completamente acessível às simulações na rede devido ao problema do sinal. Como o termo vetorial é de relevante importância física mas a fixação de seu parâmetro é controversa, utilizamos aqui o fato de a OPT reproduzir automaticamente uma interação vetorial e aplicamo-la no PNJL de modo a obtermos resultados mais realísticos. Contudo, assim como no caso $G_V \neq 0$ observaremos um pico na curva do cumulante de segunda ordem em função da temperatura. Veremos que a origem analítica deste máximo deve-se à invariância do acoplamento com a temperatura, pois um dos termos de interação gerados pela OPT (e por LN quando $G_V \neq 0$) torna-se altamente negativo e compromete o comportamento térmico esperado da quantidade. Como o comportamento ruim de c_2 em altas temperaturas está relacionado ao termo de interação extra gerado pela OPT, procuramos uma forma de reescrever o acoplamento diretamente como função da temperatura. Enquanto o EPNJL parte de um *ansatz* para relacionar o acoplamento aos campos de Polyakov e, assim, indiretamente à temperatura, nossa ideia foi utilizar a função beta da QCD que, por sua vez, expressa formalmente o acoplamento em termos da escala de energia. Tomando esta escala como a temperatura conseguimos, portanto, também com uma espécie de *ansatz*, adicionar características de liberdade assintótica ao PNJL sob OPT para analisar o novo comportamento de c_2 em altas temperaturas.

4.1 Modelo para quarks sem confinamento tratado pela OPT

Embora tenha sido desenvolvido em 1961, quando quarks e tampouco a QCD eram conhecidos, o modelo de NJL permite a análise da simetria quiral e da estrutura de fases da QCD. Uma grande motivação em se estudar este modelo com a OPT é o fato de que esta combinação gera, através de correções quânticas, um termo que na aproximação de LN poderá ser tratado apenas quando já aparecer no nível clássico [121]. A aproximação de LN, quando adicionada de um termo de repulsão vetorial prevê, para $T \neq 0$, que a transição de fase de primeira ordem ocorre para um valor maior do que aquele previsto pela teoria original. O fato de esta previsão ocorrer também para a simples implementação da OPT ao modelo, portanto sem a inserção de tal termo, leva-nos a acreditar que correções de $1/N_c$ carreguem a física associada a estas interações.

4.1.1 Lagrangiana e bosonização

O modelo de NJL é descrito pela seguinte lagrangiana de campos fermiônicos [45]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - m_c) \psi + G_S [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2], \quad (4.3)$$

onde ψ (aqui está implícita uma soma sobre sabores e graus de liberdade de cor) representa um isodoubleto de sabor (tipos u, d de quarks) e um N_c -pleto de quarks, enquanto $\vec{\tau}$ são as matrizes de Pauli de isospin.

Devido à interação fermiônica quártica, a teoria é não-renormalizável em 3+1 dimensões (G_S tem dimensões de eV^{-2}), o que significa que divergências não poderão ser eliminadas pela redefinição dos parâmetros originais do modelo como massas e acoplamentos. Conforme já mencionado, costuma-se utilizar a regularização por um *cutoff* Λ , que deve ser fixado de acordo com o espectro de energia que estiver sob estudo. Em geral, os valores experimentais da massa do pión m_π e de sua constante de decaimento f_π são utilizados na fixação de G_S e Λ .

As contribuições de 1 *loop* ao potencial efetivo (ou energia livre) derivam do propagador fermiônico vestido, cuja equação para a massa efetiva \mathcal{M} é auto-consistente. Para obter esta contribuição, convém considerarmos a versão bosonizada do modelo de NJL, obtida após a introdução dos campos auxiliares ($\sigma, \vec{\pi}$) via transformação de Hubbard-Stratonovich. Na aproximação de LN, em geral se reescreve o acoplamento como $G_S \rightarrow \lambda/(2N_c)$ e toma-se o limite formal de que N_c tenha alto valor, assumindo $N_c = 3$ novamente ao final dos cálculos. Ficamos portanto com

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - m_c) \psi - \bar{\psi} (\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}) \psi - \frac{N_c}{2\lambda} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2). \quad (4.4)$$

4.1.2 Interpolação do modelo

Muitos trabalhos restringem seus resultados ao limite de N_c grande (para uma revisão, veja [46]), ainda que encontremos, na década de 90, algumas extrapolações ([50, 51]). Todavia, os autores de [118] mostram a aplicação da OPT ao modelo de NJL, o que trataremos nesta seção. Para implementarmos a OPT nesta teoria devemos seguir a prescrição das referências [32, 33] e, de modo semelhante ao capítulo anterior, interpolamos a lagrangiana fermiônica original em termo do parâmetro fictício δ , que servirá para a expansão perturbativa. Em geral, sempre teremos a teoria livre para $\delta \rightarrow 0$ e a original para $\delta \rightarrow 1$. Seguindo a expressão $\mathcal{L} \rightarrow (1 - \delta)\mathcal{L}_0(\eta) + \delta\mathcal{L}$, a lagrangiana interpolada a partir da eq. (4.4) fica

$$\mathcal{L} = (1 - \delta)\bar{\psi}[i\rlap{-}\not{\partial} - m_c - \eta - \sigma + i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}] \psi + (\delta)\bar{\psi}[i\rlap{-}\not{\partial} - m_c - \sigma + i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}] \psi - \delta\frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \quad (4.5)$$

de onde, rearrajando os termos, obtemos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\rlap{-}\not{\partial} - m_c - \delta(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) - \eta(1 - \delta)] \psi - \delta\frac{N_c}{2\lambda}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) . \quad (4.6)$$

Note que a lagrangiana original é recuperada para $\delta \rightarrow 1$, e que η aparece como um parâmetro arbitrário de massa que veste o propagador, comum no método da OPT. Um resultado bem conhecido da OPT com relação ao potencial efetivo, explorado em termos da pressão no capítulo anterior para o NLSM é que, tomado seu limite para $N_c \rightarrow \infty$, $\bar{\eta}$, o valor de η que extremiza o potencial efetivo, corresponde exatamente ao valor clássico dos campos de fundo, fazendo com que as aproximações coincidam. No modelo de NJL temos que lidar tanto com o setor escalar quanto com o pseudo-escalar, porém na Ref. [94] foi mostrado que o parâmetro η pode dar conta de parâmetros de massa na direção pseudo-escalar caso seja redefinido:

$$\eta \rightarrow \eta + i\gamma_5\vec{\tau} \cdot \vec{\beta}, \quad (4.7)$$

implicando em um caso mais geral, com quatro parâmetros de massa e as três componentes de $\vec{\beta}$ sendo fixadas por otimização. Em termos do potencial efetivo, apenas flutuações no setor escalar tornam-se relevantes, sendo que apenas o campo σ adquire um valor esperado finito ($\langle\sigma\rangle \equiv \sigma_c$). Ou seja, assumiremos que $\langle\pi_i\rangle = 0$, o que, de acordo também com [94], implica que $\beta_i = 0$. Deste modo, com relação aos parâmetros gerados pela OPT precisaremos apenas obter η . De fato, uma vez que o potencial efetivo $V_{\text{eff}}^{\text{NJL}}$ é calculado a uma dada ordem k na OPT, o método de otimização PMS fixa a massa arbitrária η [33]

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}^{\text{NJL}(k)}}{d\eta} \right|_{\bar{\eta}, \delta=1} = 0 . \quad (4.8)$$

4.1.3 Potencial efetivo otimizado

Vamos inicialmente revisar os principais resultados da Ref. [34], onde o potencial efetivo com OPT até ordem δ é dado pelos diagramas da Fig. 4.1, que mostram a eficácia da OPT em gerar naturalmente termos de Hartree e c de Fock; as contribuições são calculadas utilizando propagadores vestidos, onde o termo de massa, em uma notação mais compacta, é dado por

$$\hat{\eta} = \eta + m_c - \delta [\eta - (\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})]. \quad (4.9)$$

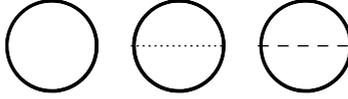


Figura 4.1: Contribuição na ordem δ . A linha contínua refere-se a termos dependentes de η que serão posteriormente expandidos. As linhas tracejada e pontilhada referem-se, respectivamente, aos campos σ e π . O primeiro diagrama contribui com $1/N_c^0$ (termo de Hartree) e os de ordem δ com $1/N_c$ (termos de Hartree-Fock)

O método da OPT gera uma relação não-trivial entre o parâmetro variacional η e o acoplamento λ , mas em primeira ordem isto implica em inserções de massa em, essencialmente, cálculos de 1 *loop*. Segundo os diagramas acima, o potencial efetivo na direção σ_c fica

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{eff}}^{\text{NJL}}(\sigma_c, \eta)}{N_c} &= \frac{\sigma_c^2}{2\lambda} + i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln (\not{p} - \eta - m_c) + i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\frac{\eta - \sigma_c}{\not{p} - \eta - m_c} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\delta \lambda}{N_c} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{\not{p} - \eta - m_c} \right) \left(\gamma_5 \tau_i \frac{1}{\not{q} - \eta - m_c} \gamma_5 \tau_i \right) \right] \\ &- \frac{1}{2} \frac{\delta \lambda}{N_c} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{\not{p} - \eta - m_c} \right) \left(\frac{1}{\not{q} - \eta - m_c} \right) \right]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Os traços na eq. (4.10) são sobre os sabores e o espaço de Dirac. Após algebrismo,

$$\begin{aligned}
\frac{V_{\text{eff}}^{\text{NJL}}(\sigma_c, \eta)}{N_c} &= \frac{\sigma_c^2}{2\lambda} + 2iN_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln [-p^2 + (\eta + m_c)^2] \\
&- 4i\delta N_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(\eta + m_c)(\eta - \sigma_c)}{-p^2 + (\eta + m_c)^2} \\
&- 2(n_\pi + 1) \frac{\delta\lambda N_f}{N_c} \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_0}{-p^2 + (\eta + m_c)^2} \right]^2 \\
&+ 2(n_\pi - 1) \frac{\delta\lambda N_f}{N_c} (\eta + m_c)^2 \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{-p^2 + (\eta + m_c)^2} \right]^2, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

onde n_π representa o número de pseudo-escalares. Na equação acima, o segundo termo representa um gás livre de férmions cujas massas estão vestidas por η . O terceiro termo representa contribuições do tipo *tadpole*, proporcionais ao condensado de quarks $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. O quarto termo, que é proporcional ao quadrado da densidade de quarks, $\langle \psi^\dagger\psi \rangle^2$, vem dos termos de dois *loops* como uma correção além da trivial em ordem $1/N_c$ e é este o responsável por gerar correções de caráter vetorial. Podemos fixar $\delta = 1$ e otimizar $V_{\text{eff}}^{\text{NJL}}$ utilizando a relação de PMS, dada pela eq. (4.8). Aplicando esta condição à eq. (4.11),

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dV_{\text{eff}}^{\text{NJL}}(\sigma_c, \eta)}{d\eta} \right|_{\bar{\eta}, \delta=1} &= -4iN_c N_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(\bar{\eta} - \sigma_c)}{-p^2 + (\bar{\eta} + m_c)^2} \\
&- 4iN_c N_f [(\bar{\eta} + m_c)(\bar{\eta} - \sigma_c)] \frac{d}{d\eta} \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{-p^2 + (\bar{\eta} + m_c)^2} \right] \Big|_{\bar{\eta}} \\
&- 16\lambda N_f \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_0}{-p^2 + (\bar{\eta} + m_c)^2} \right] \frac{d}{d\eta} \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_0}{-p^2 + (\bar{\eta} + m_c)^2} \right] \Big|_{\bar{\eta}} \\
&+ 8\lambda N_f (\bar{\eta} + m_c)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{-p^2 + (\bar{\eta} + m_c)^2} \frac{d}{d\eta} \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{-p^2 + (\bar{\eta} + m_c)^2} \right] \Big|_{\bar{\eta}} \\
&+ 8\lambda N_f (\bar{\eta} + m_c) \left[\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{-p^2 + (\bar{\eta} + m_c)^2} \right]^2 = 0. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Todas as integrais no momento podem ser interpretadas no formalismo de Matsubara,

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \equiv \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (4.13)$$

e o quadrimomento dado como $p = (i\omega_n + \mu, \mathbf{p})$, com $\omega_n = (2n + 1)\pi T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são as frequências de Matsubara para férmions. Portanto, considerando a eq. (4.11) a temperatura e potencial químico finitos, sua forma mais compacta fica

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{\text{NJL}}(\sigma_c, \eta, \mu, T) &= \frac{\sigma_c^2}{4G_S} - 2N_f N_c I_1(\mu, T) + 2\delta N_f N_c (\eta + m_c)(\eta - \sigma_c) I_2(\mu, T) \\
&+ 4\delta G_S N_f N_c I_3^2(\mu, T) - 2\delta G_S N_f N_c (\eta + m_c)^2 I_2^2(\mu, T), \quad (4.14)
\end{aligned}$$

onde substituímos $\lambda \rightarrow 2G_S N_c$. Na equação acima definimos, por conveniência, as seguintes integrais relevantes:

$$I_1(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ E_p + T \ln \left[1 + e^{-(E_p + \mu)/T} \right] + T \ln \left[1 + e^{-(E_p - \mu)/T} \right] \right\}, \quad (4.15)$$

$$I_2(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} \left[1 - \frac{1}{e^{(E_p + \mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(E_p - \mu)/T} + 1} \right], \quad (4.16)$$

e

$$I_3(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{e^{(E_p - \mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(E_p + \mu)/T} + 1} \right], \quad (4.17)$$

onde $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + (\eta + m_c)^2$. As integrais divergentes em $T = 0$ e $\mu = 0$ são

$$I_1(0, 0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_p = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ -(\eta + m_c)^4 \ln \left[\frac{\left(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + (\eta + m_c)^2} \right)^2}{(\eta + m_c)^2} \right] + 2\sqrt{\Lambda^2 + (\eta + m_c)^2} [2\Lambda^3 + \Lambda(\eta + m_c)^2] \right\} \quad (4.18)$$

e

$$I_2(0, 0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + (\eta + m_c)^2} - \frac{(\eta + m_c)^2}{2} \ln \left[\frac{\left[\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + (\eta + m_c)^2} \right]^2}{(\eta + m_c)^2} \right] \right\}. \quad (4.19)$$

A fim de prosseguirmos com nossos cálculos precisamos considerar a equação geral do PMS, que conforme discutido na Ref. [34] pode ser convenientemente expressa na forma

$$\left\{ [\eta - \sigma_c - 2(\eta + m_c)G_S I_2] \left[1 + (\eta + m_c) \frac{d}{d\eta} \right] I_2 + 4G_S I_3 \frac{d}{d\eta} I_3 \right\}_{\eta=\bar{\eta}} = 0. \quad (4.20)$$

Um de nossos interesses é a termodinâmica, cuja principal quantidade é a pressão. No capítulo anterior partimos diretamente desta, porém agora estamos descrevendo o modelo através de seu potencial efetivo. Contudo, a pressão pode ser escrita como o negativo do potencial termodinâmico $\Omega = V_{\text{eff}}^{\text{NJL}}(\bar{\sigma}_c)$, calculado no mínimo do potencial efetivo com relação ao campo σ_c . Utilizando a eq. (4.14), obtemos

$$\bar{\sigma}_c = 4G_S N_f N_c (\eta + m_c) I_2. \quad (4.21)$$

Ainda, no caso $\mu = 0$, o último termo da eq. (4.20) se anula, logo

$$\bar{\eta} = \bar{\sigma}_c + 2G_S(\bar{\eta} + m_c)I_2 \quad (4.22)$$

que, em uma forma mais compacta, fica

$$\bar{\eta} = \bar{\sigma}_c \mathcal{G}(N). \quad (4.23)$$

Isto significa que o termo depende de $1/N_c$,

$$\mathcal{G}(N) = \left(1 + \frac{1}{2N_f N_c}\right), \quad (4.24)$$

corrige a relação de LN $\bar{\eta} = \bar{\sigma}_c$ [94] de um modo semelhante ao que vimos anteriormente para o modelo ϕ^4 (equações (2.13 e 2.14)). A partir das equações (4.23) e (4.24) percebe-se, de fato, os limites de Hartree ($N_c \rightarrow \infty$) e de Fock (N_c finito) compreendidos pela OPT.

4.2 Modelo de NJL com *loop* de Polyakov (PNJL)

Aparentemente, não há quarks livres na natureza. Jamais se detectou partículas livres com cargas fracionárias como, por exemplo, $e/3$ ou $2e/3$. Da mesma maneira que quarks livres não são encontrados também os glúons, responsáveis pela interação forte, aparecem apenas na composição dos hádrons (o mesmo não acontece para os fótons, intermediadores da interação eletromagnética). De uma forma mais geral, não se trata apenas da ausência de partículas livres com cargas fracionárias. O problema do confinamento consiste em não terem sido detectadas partículas de carga de cor finita isoladas na natureza e, por isso, estas se associam em hádrons neutros. De fato, há muito tempo o diagrama de fases da QCD tem atraído interesses teóricos e experimentais, em especial quando se trata de quarks e glúons submetidos a valores finitos de temperatura (T) e potencial químico (μ). Neste regime há dois tipos importantes de transição, sendo uma associada à restauração da simetria quiral e outra com a passagem da fase hadrônica para a fase desconfinaada. Ainda estão em aberto diversas relações entre a transição quiral, que ocorre no limite de quarks não massivos ($m_q \rightarrow 0$) e o desconfinamento, embora resultados da LQCD indiquem que estas ocorram em temperaturas próximas.

A teoria do confinamento está associada à simetria de centro [37]. O centro de um grupo é o conjunto dos elementos deste que comutam com todos os demais elementos do grupo. A ação de teorias de gauge não-abelianas é invariante frente a transformações do centro do grupo $SU(3)$, cuja notação é $Z(3)_c$, c denotando o centro do grupo. Todavia, embora a ação seja invariante, uma quantidade fictícia para este modelo, chamada *loop* de Polyakov, anula-se quando a simetria do centro é quebrada e por isso este *loop* é um bom parâmetro de ordem para a quebra espontânea da simetria de centro. Na fase confinada, a simetria de centro não está quebrada e o valor esperado do *loop* se anula.

No desconfinamento a simetria é quebrada espontaneamente. Como quarks permanecem confinados devido à dinâmica gluônica não trivial existente nos nucleons e o modelo de NJL não contém glúons, também fisicamente o *loop* de Polyakov é uma razoável simulação do confinamento.

A motivação deste capítulo é propor uma dependência térmica direta do acoplamento escalar com a temperatura, de modo que seja corrigida a termodinâmica dos cumulantes da pressão sob efeitos da aplicação da OPT ao PNJL. Segundo [122], cumulantes de quantidades conservadas calculados próximos ao ponto crítico correspondem a derivadas da equação de estado (EoS) perto do ponto de inflexão; e, como a ocorrência de um ponto de inflexão em uma equação de estado está associada com uma transição de fase de segunda ordem, estes cumulantes auxiliam na determinação do ponto crítico no diagrama de fases da QCD.

4.2.1 Estrutura

A lagrangiana do PNJL, em 3 + 1 dimensões, é dada por ([48, 49, 123])

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma_\mu D^\mu - \hat{m}_c) \psi + G_S \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau\psi)^2 \right] - \mathcal{U}(l, l^*, T), \quad (4.25)$$

onde $\psi = (\psi_u, \psi_d)^T$ é um isodoubleto quarkônico de sabor (está implícita uma soma sobre as cores e os sabores u e d), $m_q = m_u = m_d$ é a massa de corrente e $\vec{\tau} = (\tau^a, \tau^b, \tau^c)$ são as matrizes de Pauli no espaço de sabores. A derivada covariante é dada por

$$D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu \quad \text{onde} \quad A^\mu = \delta_\mu^0 A^0, \quad (4.26)$$

onde o acoplamento de gauge $SU(N)$ foi absorvido no potencial $A^\mu = gA_a^\mu(x)\lambda_a/2$, enquanto $A_a^\mu(x)$ representa o campo de gauge $SU(3)$ e λ_a são as matrizes de Gell-Mann. O valor esperado do *loop* de Polyakov espessa-se em função da linha de Wilson, periódica na coordenada temporal:

$$L(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{P} \exp \left[i \int_0^\beta d\tau A_4(\tau, \mathbf{x}) \right], \quad (4.27)$$

onde $\beta = 1/T$ e $A_4 = iA_0$ é a componente temporal do campo euclidiano de gauge (A_4, \mathbf{A}) .

Finalmente, define-se um potencial para o *loop* de Polyakov que *i*) reproduza, a campo médio, os resultados obtidos na rede, *ii*) satisfaça a simetria de centro $Z(3)$ e *iii*) seu campo Φ , que grosso modo mede o saldo de cores do sistema, tenha um mínimo $\Phi = 0$ para baixas temperaturas e assuma valores finitos, sendo que para $T \rightarrow \infty$, $\Phi \rightarrow 1$. Um possível *ansatz*, fixado por comparação com a LQCD no setor de *pure gauge*, onde apenas glúons participam da interação [124], seria [48]

$$\frac{\mathcal{U}(l, l^*, T)}{T^4} = \frac{1}{2} b_2(T) l l^* \Phi + b_4(T) \ln[1 - 6l l^* + 4(l^{*3} + l^3) - 3(l l^*)^2], \quad (4.28)$$

onde

$$b_2(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 \quad (4.29)$$

e

$$b_4(T) = b_4 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3, \quad (4.30)$$

sendo $T_0 = 270$ MeV a temperatura crítica do desconfinamento [48] segundo a LQCD no setor de *pure gauge*, onde apenas glúons participam da interação. Os demais parâmetros são fixados como $a_0 = 3.51$, $a_1 = -2.47$, $a_2 = 15.22$ e $b_4 = -1.75$.

O valor esperado do *loop* de Polyakov fica, portanto, dado por

$$\Phi \equiv \langle l(\mathbf{x}) \rangle, \quad \text{and} \quad \bar{\Phi} \equiv \langle l^*(\mathbf{x}) \rangle, \quad (4.31)$$

onde

$$l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{N_c} \text{Tr}_c L(\mathbf{x}), \quad (4.32)$$

e Tr_c é o traço tomado sobre todo o espaço de cores.

4.3 Implementação da OPT no PNJL

De modo análogo ao que se fez anteriormente no modelo sem o *loop* de Polyakov, o método não perturbativo da OPT pode aqui ser aplicado para obtermos resultados além do limite de N_c grande. O procedimento é o mesmo, com a adição de um termo de massa quadrático $(1 - \delta)\eta\bar{\psi}\psi$ à densidade lagrangiana original (eq. (4.25) através da substituição $m_c \rightarrow m_c + (1 - \delta)\eta$ e a multiplicação dos acoplamentos por δ ($G_S \rightarrow \delta G_S$). Após estas mudanças, a densidade lagrangiana já bosonizada em termos dos campos auxiliares σ e π fica

$$\mathcal{L}_{\text{OPT}} = \bar{\psi} [i\gamma_\mu D^\mu - m_c - \eta(1 - \delta) - \delta(\sigma + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi})] \psi - \delta \frac{1}{4G_S} (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \mathcal{U}(l, l^*, T). \quad (4.33)$$

O cálculo do potencial efetivo ($V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}}$) até ordem δ , portanto, leva em conta os dois primeiros diagramas da Fig. 4.2. O primeiro gráfico, de ordem $\delta^0 N_c$, corresponde ao termo trivial de 1 *loop* que aparece, por exemplo, nas aproximações de Hartree e LO em $1/N_c$. Mesmo em uma teoria para férmions livres tais diagramas contribuiriam, visto que não há vértices de interação. O segundo gráfico mostra a contribuição de dois *loops* (ordem δN_c^0) e, assim como ocorre nas aproximações de Hartree-Fock [46] ou NLO em $1/N_c$ [81], representa contribuições de troca. O terceiro gráfico não traz novidades quanto à ordem em N_c por ser proporcional a $\delta^2 N_c^0$ e pertencer à NLO em $1/N_c$, mas contribui com uma correção ao propagador do méson. Por outro lado, as duas últimas contribuições são de ordem NNLO em $1/N_c$ e corrigem, respectivamente, o vértice escalar e o propagador do quark com termos de troca.

Note que, embora não perturbativa, a OPT manifesta caráter perturbativo ao combinar contribuições de diferentes ordens pertencentes a outras aproximações. Em praticamente todas as aplicações da OPT, conforme vimos inclusive no capítulo anterior, o limite LN é recobrado em resultados da OPT quando se faz $N \rightarrow \infty$ [94]; mostraremos em breve que o mesmo ocorre com o PNJL. Além disso, já em primeira ordem aparecem correções $1/N_c$ e, neste modelo, estas correspondem a termos de troca. Nossos cálculos serão limitados a esta ordem (dois primeiros gráficos da Fig. 4.2), contudo pode-se explicitar a ordem δ^2 futuramente.

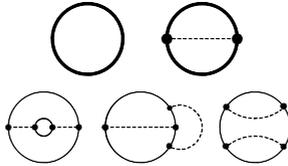


Figura 4.2: Contribuições até a ordem δ^2 , como resultado da aplicação da OPT ao PNJL. Primeiro gráfico, ordem $\delta^0 N_c$ à la Hartree, LO em $1/N_c$; segundo, ordem δN_c^0 à la Hartree-Fock, LO em $1/N_c$; terceiro, $\delta^2 N_c^0$, NLO em $1/N_c$ e corrige o propagador mesônico; quarto, NNLO em $1/N_c$, corrige o vértice; quinto, NNLO em $1/N_c$, corrige o propagador quarkônico.

Portanto, aplicando as regras de Feynman às primeiras duas contribuições da Fig. 4.2, podemos escrever o potencial efetivo do PNJL sob OPT como [34]

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}} = & \mathcal{U}(l, l^*, T) + \delta \frac{\sigma^2}{4G_S} + N_f 2i \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \text{Tr}_c \ln \left[-P^2 + (\eta^* + m_c)^2 \right] \\
 & - \delta G_S N_f 16 \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \text{Tr}_c \frac{P_0}{\left[-P^2 + (\eta + m_c)^2 \right]} \frac{Q_0}{\left[-Q^2 + (\eta + m_c)^2 \right]} \\
 & + \delta G_S N_f (\eta + m_c)^2 8 \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \text{Tr}_c \frac{1}{\left[-P^2 + (\eta + m_c)^2 \right]} \frac{1}{\left[-Q^2 + (\eta + m_c)^2 \right]} + O(\delta^2),
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

onde $\eta^* = \eta + \delta(\sigma - \eta)$, $P = (p_0 - iA_4, \mathbf{p})$. O formalismo de Matsubara permite-nos introduzir os parâmetros de controle $T = 1/\beta$ e μ :

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{i}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \tag{4.35}$$

onde o quadrimento e as frequências de Matsubara para férmions são dados, respectivamente, por $p = (i\omega_n + \mu - iA_4, \mathbf{p})$ e $\omega_n = (2n + 1)/\beta$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Definindo $\mu' = \mu - iA_4$ e expandindo η^*

até a ordem δ , ficamos com

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}} = & \mathcal{U}(l, l^*, T) + \delta \frac{\sigma^2}{4G_S} - \frac{N_f}{\beta} 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \sum_n \ln \left[(\omega_n - i\mu')^2 + E_p^2 \right] \\
& - \delta \frac{N_f}{\beta} (\eta + m_c) (\eta - \sigma) 4 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \sum_n \frac{1}{\left[(\omega_n - i\mu')^2 + E_p^2 \right]} \\
& - \delta \frac{G_S N_f}{\beta^2} 16 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \sum_n \sum_m \frac{\omega_n - i\mu'}{\left[(\omega_n - i\mu')^2 + E_p^2 \right]} \frac{\omega_m - i\mu'}{\left[(\omega_m - i\mu')^2 + E_q^2 \right]} \\
& + \delta \frac{G_S N_f}{\beta^2} (\eta + m_c)^2 8 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \text{Tr}_c \sum_n \sum_m \frac{1}{\left[(\omega_n + i\mu')^2 + E_p^2 \right]} \frac{1}{\left[(\omega_m + i\mu')^2 + E_q^2 \right]} + O(\delta^2),
\end{aligned} \tag{4.36}$$

onde $E_p^2 = [\mathbf{p}^2 + (m_c + \eta)^2]$. Conforme o cálculo dos traços apresentado na Ref. [36],

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}}(\eta, \sigma, l, l^*, \mu, T) = & \mathcal{U}(l, l^*, T) + \frac{\sigma^2}{4G_S} - 2N_f I_1(\mu, T) + \delta 2N_f N_c (\eta + m_c) (\eta - \sigma) I_2(\mu, T) \\
& + \delta 4G_S N_f N_c [I_3^2(\mu, T) + \Delta I_3(\mu, T)] \\
& - \delta 2G_S N_f N_c (\eta + m_c)^2 [I_2^2(\mu, T) + \Delta I_2(\mu, T)] + O(\delta^2),
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde $I_i(\mu, T)$ ($i = 1, 2, 3$) representa as integrais

$$I_1(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \{ N_c E_p + \ln [g_l^+(E_p)] + \ln [g_l^-(E_p)] \}, \tag{4.38}$$

$$I_2(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} [1 - f_l^+ - f_l^-], \tag{4.39}$$

$$I_3(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} [f_l^+ - f_l^-]. \tag{4.40}$$

Na presença da *loop* de Polyakov, as funções de distribuição ficam

$$f_l^+(E_p) = \frac{l e^{-\beta(E_p - \mu)} + 2l^* e^{-2\beta(E_p - \mu)} + e^{-3\beta(E_p - \mu)}}{g_l^+(E_p)}, \tag{4.41}$$

$$f_l^-(E_p) = \frac{l^* e^{-\beta(E_p + \mu)} + 2l e^{-2\beta(E_p + \mu)} + e^{-3\beta(E_p + \mu)}}{g_l^-(E_p)}, \tag{4.42}$$

$$g_l^+(E_p) = 1 + 3l e^{-\beta(E_p - \mu)} + 3l^* e^{-2\beta(E_p - \mu)} + e^{-3\beta(E_p - \mu)}, \tag{4.43}$$

$$g_l^-(E_p) = 1 + 3l^* e^{-\beta(E_p + \mu)} + 3l e^{-2\beta(E_p + \mu)} + e^{-3\beta(E_p + \mu)}. \tag{4.44}$$

As integrais térmicas ΔI_2 e ΔI_3 , que aparecem nas contribuições de dois *loops*, foram calculadas por Restrepo *et. al.* [36, 37]:

$$\Delta I_3(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Delta_3, \tag{4.45}$$

e

$$\Delta I_2(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Delta_2, \quad (4.46)$$

onde Δ_1 e Δ_2 estão dadas no Apêndice F.

No Capítulo 2, para o modelo ϕ^4 tínhamos apenas o parâmetro de massa η com relação ao qual o potencial efetivo deveria ser minimamente invariante. No modelo de NJL sem *loop* de Polyakov vimos que eram necessários η e σ . Agora, no PNJL, além destes parâmetros de massa há os valores esperados do *loop* de Polyakov a serem levados em conta e, por isso, ficaremos com quatro equações acopladas de PMS para obtermos quantidades termodinâmicas:

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}}}{\partial \eta} \right|_{\bar{\eta}} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}}}{\partial \sigma} \right|_{\bar{\sigma}} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}}}{\partial l} \right|_{\Phi} = 0, \quad \left. \frac{\partial V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}}}{\partial l^*} \right|_{\bar{\Phi}} = 0, \quad (4.47)$$

que podem ser resolvidas numericamente. Analogamente à eq. (4.20) para o NJL note, através da expressão analítica da primeira equação do GAP (4.47), que a OPT gera novamente resultados não perturbativos a partir de desenvolvimentos perturbativos [36, 37]:

$$\left\{ [\eta - \sigma - 2(\eta + m_c) G_S I_2] \left[1 + (\eta + m_c) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] I_2 + 4G_S I_3 \frac{\partial I_3}{\partial \eta} + 2G_S \frac{\partial \Delta I_3}{\partial \eta} - G_S (\eta + m_c)^2 \frac{\partial \Delta I_2}{\partial \eta} \right\}_{\eta=\bar{\eta}} = 0. \quad (4.48)$$

A obtenção da pressão da OPT é direta:

$$P_{\text{PNJL}} = -V_{\text{eff}}^{\text{PNJL}}(\bar{\eta}, \bar{\sigma}, \Phi, \bar{\Phi}, \mu, T). \quad (4.49)$$

4.3.1 Cumulantes

Atualmente, um problema extremamente revelante para a teoria quântica de campos é a determinação do ponto crítico da QCD, ou mesmo a averiguação de sua existência. Para isso, é fundamental uma linguagem direta e clara entre teoria e experimento. Por serem altamente sensíveis à criticidade, observáveis que estabelecem esta comunicação são os cumulantes. Os autores de [125] obtiveram boa concordância entre a LQCD e experimentos do RHIC. Cálculos através de modelos efetivos apresentam certa discrepância em relação aos resultados da rede, conforme vemos em especial com o PNJL no limite de LN [48, 49]. Uma alternativa, portanto, seria analisar estes cumulantes partindo do modelo PNJL tratado com a OPT. Conforme já mencionado, a obtenção do cumulante de segunda ordem, c_2 , parte das equações (4.1) e (4.2).

Originalmente, o cálculo dos cumulantes além do limite de LN através do PNJL foi implementada nas Ref. [36, 37], cujas implementações seguiram as prescrições da Ref. [126], onde a expansão se deu em torno de $\mu = 0$. Há basicamente dois métodos para o cálculo dos cumulantes: O primeiro inicia com

a obtenção da pressão como função de μ para cada valor de temperatura, e então encontra-se um bom polinômio que interpole estes valores para μ ; sendo assim, os cumulantes serão os coeficientes deste polinômio; o segundo, por sua vez, envolve tomarmos expressões para as derivadas da pressão com relação a μ para os coeficientes e então usar os valores dos parâmetros de ordem (σ , Φ e Φ^*) no limite $\mu = 0$. Obviamente, implementados corretamente as rotinas numéricas, ambos os métodos fornecem os mesmos resultados. A LQCD utiliza o segundo método devido ao conhecido problema do surgimento de determinante complexo quando se faz $\mu \neq 0$. Segundo a Ref. [126] este método, contudo, não funciona bem em campo médio para o nosso modelo pelo fato de os campos médios passarem a não depender de μ , o que geraria resultados incorretos. A Fig. 4.3 mostra também resultados para c_2 obtidos na Ref. [36], juntamente com LNG_V (LN com $G_V \neq 0$), LN ($G_V = 0$) e LQCD.

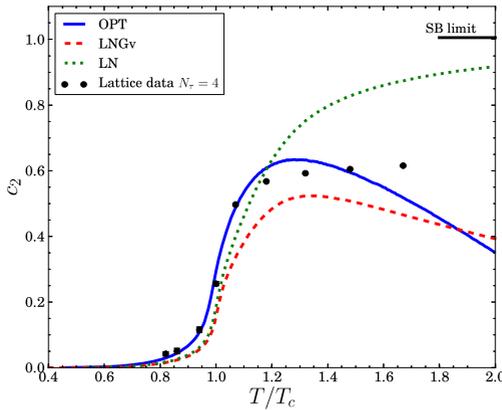


Figura 4.3: Cumulantes de segunda ordem, em $\mu = 0$, como função de T/T_c , obtidos através da OPT, da aproximação LN com $G_V = 0$ e a aproximação LNG_V com $G_V = G_S/N_c$ para o modelo PNJL. Figura extraída da Ref. [36]. Os dados da rede foram obtidos da Ref. [127].

Note que a OPT possui excelente concordância com os resultados da LQCD até $T \approx 1.2T_c$. Contudo, em $T \approx 1.3T_c$, OPT e LNG_V geram um máximo não observado por LQCD ou LN com $G_V = 0$. Esta forma inusitada faz com que OPT e LNG_V continuem, em altas temperaturas, divergindo tanto do limite de Stefan-Boltzmann quanto dos resultados da LQCD. Tal comportamento fora originalmente observado por Schramm e Steinheimer em um trabalho com o PNJL, também $SU(2)$ e com $G_V \neq 0$, para calcular as susceptibilidades de segunda e quarta ordens em potencial químico bariônico nulo [128]. Os autores identificaram a discrepância como um indicio de que, acima da temperatura crítica T_c , interações vetoriais repulsivas possam ser excluídas do modelo; ou seja, na Ref. [128] foi fixado $G_V = 0$ para $T > T_c$. Conclusões semelhantes foram atingidas pelos mesmos autores na versão

em três sabores do modelo [53]. Entretanto, o presente trabalho mostra que, mesmo com $G_V = 0$, o cumulante de segunda ordem tem comportamento peculiar além do limite de N_c grande e, como estamos trabalhando com $G_V = 0$, não poderemos nos aproximar dos resultados da LQCD ou mesmo obter melhor convergência simplesmente tomando $G_V \rightarrow 0$ para $T > T_c$.

Seguindo as Ref. [36, 37], podemos compreender a origem matemática do máximo apresentado por c_2 analisando como este coeficiente se comporta, sob OPT, em altas temperaturas. Quando o sistema está em baixas temperaturas, todas as interações estão bem estabelecidas e os quarks se comportam como no interior de um nucleon na fase hadrônica, ou seja, de cor neutra ($\Phi = 0$). A medida que a temperatura aumenta, estas interações são enfraquecidas e, além da transição quiral, há o desconfinamento com os quarks se tornando cada vez mais livres. Neste regime a neutralidade dá lugar à individualidade da cor de cada quark e agora $\Phi \neq 0$, até quem altas temperaturas (tendendo ao infinito) atinge-se a total parcialidade de cor $\Phi = 1$, o que pode ser uma interpretação gráfica da liberdade assintótica, pois $T \rightarrow \infty \implies \Phi \rightarrow 1$. Utilizando $\partial^2/\partial\mu^2$ em $\mu = 0$ e altas temperaturas, imediatamente se obtém [36, 37] (observe a Fig. 4.4)

$$c_2 \sim c_2^{LN} - 8\delta G_S N_f N_c \left(\frac{\partial I_3}{\partial \mu} \right)^2 (2T^2)^{-1} + O(\delta^2) , \quad (4.50)$$

em que

$$c_2^{LN} = 2N_f N_c \left(\frac{\partial I_3}{\partial \mu} \right)^2 (2T^2)^{-1} . \quad (4.51)$$

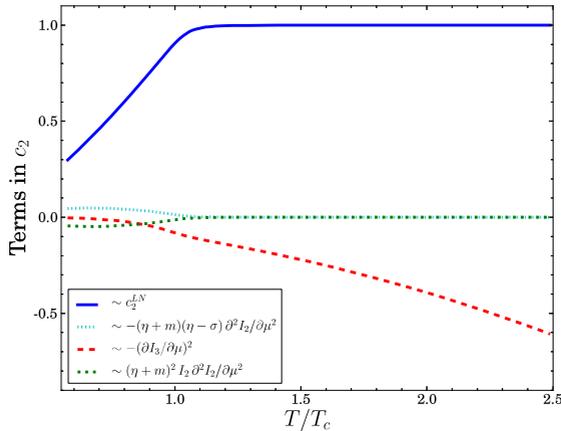


Figura 4.4: Contribuições ao c_2 em altas temperaturas como função da temperatura renormalizada pela temperatura de transição quiral. Figura extraída da Ref. [36].

As expressões acima e a Fig. 4.4 mostram que o termo de repulsão vetorial gerado dinamicamente fornece uma contribuição negativa ao cumulante de segunda ordem, produzindo o máximo observado.

A mesma observação aplica-se à aproximação LNG_V em que, neste caso, teríamos $G_S \rightarrow G_V N_c N_f$. Por outro lado, quando os cálculos são feitos no limite de N_c grande sem o termo de repulsão vetorial, o acoplamento escalar é de ordem $1/N_c$ e, por isso, a contribuição negativa é mascarada, não havendo o máximo na curva de c_2 neste caso.

Resumindo, lembre-se de que este termo de repulsão fora adicionado à lagrangiana para corrigir os resultados desta aproximação em altas densidades e baixas temperaturas, visto que seu comportamento para altas temperaturas e baixas densidades mostrara-se satisfatório, com rápida convergência para o limite de SB [36]. Uma outra maneira de se solucionar o problema em baixas densidades, vista a controversa fixação de G_V , é levar em conta correções radiativas da ordem de $1/N_c$ através da OPT. Deste modo, para $T \lesssim 1.2T_c$, o modelo apresenta melhor concordância com a LQCD em baixas temperaturas, no entanto, um máximo na curva do cumulante de segunda ordem aparece e o limite de SB é perdido. Como pode ser observado a partir da eq. (4.50), é possível que contribuições de ordens superiores possam gerar termos positivos, os quais eventualmente levariam c_2 a convergir para o limite de SB. Por outro lado, não se pode desconsiderar a possibilidade de que a rápida convergência deste cumulante ao limite de SB na aproximação de N_c grande seja acidental, pois correções de flutuação ao LN a princípio geram termos de repulsão vetorial [129]. Além disso, caso tivessem sido tomadas todas as ordens em teoria de perturbação, esperaria-se que c_2 atingisse o limite de SB e aproximar-se-ia da LQCD, afinal o resultado exato seria tomado; e, uma vez que a OPT corrige a aproximação de LN (no caso da Fig. 4.3, foi tomada até 2 *loops*), pode-se concluir que o bom comportamento de LN foi um acidente. Em ordem δ^2 , por exemplo, a OPT é dada por três topologias diferentes, incluindo correções ao vértice, comumente encontradas em NLO e NNLO em uma expansão $1/N$. Neste trabalho, em nenhum dos modelos analisamos correções de ordem δ^2 provenientes da OPT, contudo podemos ao menos esperar que tais termos “vistam” o acoplamento escalar G_S o qual, assim como o acoplamento da QCD, diminuiria com a temperatura, possibilitando portanto que os resultados do PNJL converjam para os da LQCD.

Na tentativa de se atenuar ou mesmo eliminar a queda deste cumulante com a temperatura, os autores da Ref. [54], utilizando a aproximação LNG_V , sugeriram uma possível dependência térmica indireta de G_V . No entanto, embora isto possa amenizar os problemas nesse nível de perturbação, nossa investigação mostra que c_2 comporta-se inadequadamente mesmo sem o termo de repulsão vetorial quando correções de N_c finito são levadas em conta. Todavia, também nesta ordem pode-se considerar que efeitos térmicos direta ou indiretamente sejam importantes para reproduzir o comportamento de um gás de férmions livres em altas temperaturas. Nossa ideia é investigar a região de altas temperaturas (próximo de T_c e adiante, justamente onde falha a OPT) e utilizar a própria função beta da QCD que, por sua vez, expressa formalmente o acoplamento em termos da escala de energia. Tomando esta escala como a temperatura conseguimos, portanto, também com um *ansatz*, adicionar

características de liberdade assintótica ao PNJL sob OPT para analisar o novo comportamento de e_2 , conforme veremos a seguir.

4.4 Dependência térmica do acoplamento G_S

Uma contribuição original do presente trabalho diz respeito à possível dependência térmica de G_S como ocorre com α_s na QCD. Para tanto, as parametrizações utilizadas no LN e OPT seguiram a Ref. [118], de modo que sejam satisfeitas a massa do pión como $m_\pi = 500$ MeV, de acordo com a prévia comparação (Fig. 4.3) com os dados da rede obtidos pelos autores da Ref. [127], e sua constante de decaimento como $f_\pi = 92.4$ MeV. A Tab. 4.1, que inclui os valores de temperatura crítica para a transição quiral (T_σ) e para o desconfinamento (T_Φ), auxiliará na averiguação de cada parâmetro [36].

Tabela 4.1: Conjunto de parâmetros para as aproximações LN e OPT do PNJL.

| | m_π [MeV] | Λ [MeV] | m_c [MeV] | $G_S \Lambda^2$ | T_σ [MeV] | T_Φ [MeV] |
|-----|---------------|-----------------|-------------|-----------------|------------------|----------------|
| OPT | 500 | 590 | 72.3 | 1.91 | 221 | 220 |
| LN | 500 | 631.5 | 72 | 2.19 | 225 | 224 |

Em altas temperaturas, vale com boa aproximação a eq. (4.50). Além disso, neste regime os campos de Polyakov vão a 1 ($\phi, \phi^* \rightarrow 1$), uma vez que os quarks apresentam-se praticamente desconfinados e a massa é equivalente à massa de corrente. O fato de o PNJL não ter liberdade assintótica gera alguns resultados não realísticos, como vimos para o cumulante de segunda ordem na Fig. 4.3. No entanto, como o *loop* de Polyakov simula justamente o confinamento de quarks e, portanto, segundo a QCD este regime está associado à liberdade assintótica, aplicaremos no PNJL exatamente a forma da *running coupling constant* para esta teoria [70], atribuindo à escala de energia um caráter térmico (Fig. 4.5). Portanto, se identificarmos $\alpha_s = G_S \Lambda^2$ e tomarmos o *running* de $\alpha_s(M)$ em um *loop*, mantendo o acoplamento em seu valor original para $T = 0$, podemos escrever o seguinte *ansatz* em termos da escala de renormalização da QCD ($\Lambda_{\text{QCD}} = 330$ MeV, extraído da Ref. [130]):

$$G_S(T) = \frac{G_S(0)}{1 + b_0(G_S(0)\Lambda^2) \ln[(\Lambda_{\text{QCD}} + T)/\Lambda_{\text{QCD}}]}, \quad (4.52)$$

onde $b_0 = (2/3)(11 - N_f)$ e fizemos $g^2 \rightarrow G_S$ na equação correspondente da Ref. [70] por questões de consistência na notação (note as semelhanças com a eq. (3.39) para o NLSM). Escrevemos o *running* em função da temperatura crítica da transição quiral fixada pela OPT, $T_\sigma^{\text{OPT}} = 225$ MeV.

Note, na Fig. 4.6, o melhor comportamento do cumulante quando se considera o acoplamento decrescendo com a temperatura. Torna-se, inclusive, inconsistente em altas temperaturas utilizar um acoplamento fixo e o *loop* de Polyakov, pois a interação neste regime de fato fica enfraquecida.

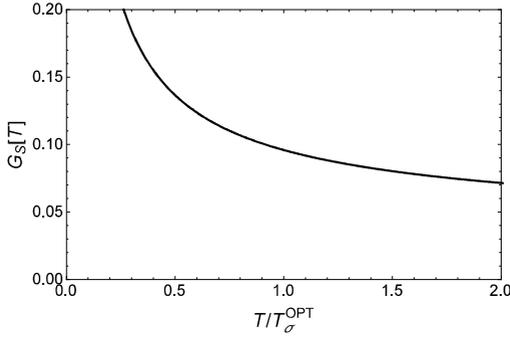


Figura 4.5: Adaptação do *running* da QCD ao acoplamento do modelo PNJL em função da temperatura normalizada pela temperatura de transição quiral para a OPT. A função decrescente indica caráter de liberdade assintótica.

Normalizamos a temperatura pela T_σ de cada aproximação. Como a região de interesse é a de altas temperaturas e nosso objetivo foi uma simples e imediata solução para a discrepância de c_2 , sua obtenção na Fig. 4.6 partiu das equações mostradas para o PNJL no limite de altas temperaturas, em que $\bar{\eta} = 0 = \bar{\sigma}$ e $\phi = 1 = \phi^*$, sem que fosse necessária, portanto, a resolução das respectivas equações do PMS. Por conta disso, a Fig. 4.6 trata-se de uma descrição apenas qualitativa de como a dependência térmica do acoplamento G_S melhora o comportamento observado na Fig. 4.3.

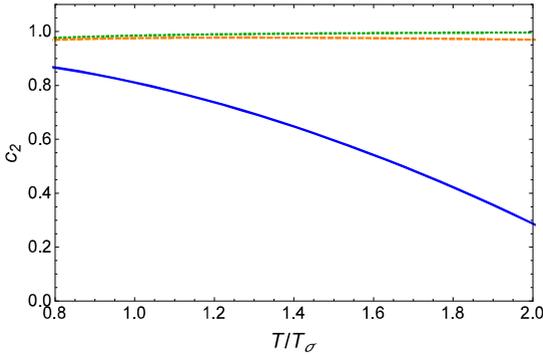


Figura 4.6: Cumulantes de segunda ordem, em $\mu = 0$, como função da temperatura normalizada pela temperatura de transição quiral para LN e OPT, sendo o acoplamento nesta também tomado segundo o *running* da QCD a fim de melhorar o comportamento em altas temperaturas.

No capítulo anterior trabalhamos com o NLSM, que naturalmente exhibe liberdade assintótica,

e, dada sua renormalizabilidade, sua termodinâmica foi calculada através da RGOPT. No presente capítulo vimos que, mesmo em um modelo que não seja assintoticamente livre nem renormalizável, caso associemos seu acoplamento ao *running* da QCD em termos da temperatura seus resultados termodinâmicos tornam-se mais realísticos. Portanto, é válido considerarmos futuramente a aplicação da RGOPT em um modelo vetorial renormalizável o qual, mesmo sem conter liberdade assintótica, possa ter em seu acoplamento uma dependência térmica semelhante à que propomos para o PNJL.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

A principal contribuição deste trabalho diz respeito à aplicação do método não perturbativo da OPT com a imposição de invariância frente ao grupo de renormalização através da recentemente elaborada RGOPT no modelo NLSM. Com o auxílio do formalismo de Matsubara, exploramos a termodinâmica do modelo para que fossem investigadas determinadas propriedades deste modelo que, ao contrário do PNJL, naturalmente exibe liberdade assintótica em $1 + 1$ dimensões e $N = 4$. Assim como a *pure gauge* QCD, o modelo é livre de férmions (quarks, neste caso) e a liberdade assintótica indica que seus resultados em temperatura finita possam naturalmente auxiliar no mapeamento do diagrama de fases da QCD de maneira mais confiável do que modelos não renormalizáveis e, portanto, sem liberdade assintótica. Como o modelo PNJL é útil para se estudar quebras de simetria quiral, vemos uma complementariedade entre este e o NLSM. A lagrangiana do NLSM, embora apresente um termo de interação derivativo em que o vértice depende dos momentos tal qual ocorre com a QED escalar, é de certa forma simples e permite interpolações. Deste modo, nossos desenvolvimentos mostraram que resultados não perturbativos satisfatórios podem ser obtidos através de uma lagrangiana expandida perturbativamente ao serem consistentemente aplicadas as propriedades do grupo de renormalização, cujas soluções para a massa adicionada arbitrariamente foram fixadas pelo critério variacional do PMS. Já em primeira ordem de contribuição à pressão (LO), resultados não triviais foram obtidos pela RGOPT, que mostrou reproduzir a série completa do limite de LN quando tomado $N_c \rightarrow \infty$, fato que reforça a validade dos cálculos. Estes resultados de RGOPT1L convergem para o limite de Stefan-Boltzmann em altas temperaturas enquanto, conforme argumentado, a aproximação não realística de LN o superestima. Ao analisarmos a próxima ordem, em 2 loops nossos resultados concordam com as aplicações pioneiras em modelos escalares e também vetoriais para temperatura finita [43, 44, 42], em que existe uma pequena dependência de escala. Contudo, as bandas geradas pela variação de escala nos observáveis são sempre menores do que aquelas que aparecem para as SPT/OPT padrões. Além de a comparação entre RGOPT2L e SPT/OPT mostrar a maior eficiência do grupo de renormalização

com relação à dependência da escala de energia, seus resultados para os observáveis termodinâmicos são satisfatórios do ponto de vista quantitativo, pois a pressão, por exemplo, aproxima-se do modelo calculado na rede e da aproximação NLO em $1/N_c$ em altas temperaturas, cujos procedimentos analíticos são altamente sofisticados. O maior trunfo da RGOPT, no entanto, consiste nos cálculos da densidade de energia ε , da medida de interação Δ e da velocidade do som v_s^2 , que comportam-se de maneira muito semelhante à LCQD e às teorias de Yang-Mills em $3+1$ dimensões; diferentemente da SPT, que exibe dependência quadrática, o comportamento de Δ é linear para altas temperaturas segundo a RGOPT, o mesmo observado para teorias de Yang-Mills. Quanto à densidade de energia, a RGOPT2L mostra um pico característico na região de transição, característica marcante nas teorias de Yang-Mills em $3+1$ dimensões. Os cálculos da velocidade do som estão em concordância com a LQCD [101] e indicaram que os resultados da RGOPT em 2 *loops* geram, em praticamente todo o espectro térmico, a equação de estado mais dura dentre os cálculos não perturbativos, sendo seguida por 1 *loop* e LN. Os comportamentos abruptos da SPT mostram a incompatibilidade da pura teoria de perturbação com a fenomenologia esperada.

Revisamos o modelo de NJL para que pudéssemos aplicar o método não perturbativo da OPT no modelo PNJL e analisar o comportamento anômalo do cumulante de segunda ordem da pressão, c_2 buscando, em seguida, uma alternativa para corrigir o desacordo com relação ao limite de Stefan-Boltzmann (SB) em altas temperaturas. Tal comportamento já havia sido observado neste modelo mesmo no limite de LN com a inclusão de um termo de interação vetorial ($G_V \neq 0$) e, de fato, pôde-se mostrar que correções radiativas da OPT (fixando $G_V = 0$) em primeira ordem geram um termo de repulsão muito semelhante ao canal vetorial; contudo, uma grande vantagem em se utilizar a OPT é o fato de se atingir mais ordens em teoria de perturbação e, com isso, ir além do limite de LN, refinando os resultados. Pelo fato de a QCD apresentar o problema numérico do sinal, são importantes os cálculos além de LN uma vez que esta aproximação falha consideravelmente em temperaturas e/ou densidades finitas [32]. Nas Ref. [36, 37] a OPT foi aplicada ao PNJL, que exibe o confinamento de quarks e os resultados foram comparados à LQCD. A importância fenomenológica de se ter uma contribuição vetorial na interação reside no fato de a lagrangiana original do PNJL no limite de LN ter apenas canal escalar, cujo condensado de quarks é incapaz de prever relevantes efeitos de densidade finita. É devido a isto que a esta aproximação incorpora-se um canal vetorial proporcional ao acoplamento G_V , cuja fixação é controversa e não se tem um consenso acerca de qual deveria ser seu real valor. Entretanto, o fato de as correções radiativas além de LN através da OPT gerarem naturalmente um termo de repulsão proporcional a $G_S/(N_f N_c)$, torna desnecessária a adição *ad hoc* deste canal e elimina o problema da fixação de G_V . Sendo assim, com esta aproximação revisamos o cálculo originalmente feito nas Ref. [36, 37] para c_2 . Neste trabalho consideramos uma maneira de simular a liberdade assintótica, observada na QCD em altas escalas de energia, afim de que se obtenha melhor convergência para o limite de

SB, uma vez que sob tais condições o acoplamento G_S (na OPT com $G_V = 0$) e G_V (no limite LN), que parametrizam o termo responsável pela discrepância, diminuiriam sob a variação de determinados parâmetros. De fato, os autores de [53, 128] buscaram uma melhor convergência de c_2 no modelo PNJL em LN e com $G_V \neq 0$ sugerindo fortes repulsões vetoriais na fase hadrônica e praticamente nenhuma repulsão na fase desconfiada, atribuindo a este acoplamento um comportamento de função degrau, sem notória plausibilidade física; enquanto isso, o trabalho de [54] propôs, através de um *ansatz* não necessariamente rigoroso fisicamente, que G_V dependesse dos campos de Polyakov tendo, assim, relação indireta com a temperatura. Entretanto, como a discrepância ocorre proporcionalmente a G_S da mesma maneira além do limite LN com $G_V = 0$, procuramos uma maneira de alterar termicamente o valor deste acoplamento a fim de corrigir seu comportamento em altas temperaturas. A HTLPT, método semelhante à OPT, obteve boa concordância com a LQCD ao calcular a susceptibilidade de quarks em três *loops* [9], e o fato de esta aplicação levar em consideração o *running* da constante de acoplamento da QCD, levou-nos a uma solução híbrida para o problema do cumulante. Como o PNJL não é renormalizável, não existe uma maneira de a constante de acoplamento variar consistentemente com uma determinada escala de energia. No entanto aqui, ao invés de utilizarmos um *ansatz* que simplesmente fitasse convenientemente resultados da rede, identificamos $\alpha_S = G_S \Lambda^2$ para fazer G_S variar com a temperatura, eliminando assim o máximo em c_2 .

Trabalhou-se, portanto, com o modelo escalar NLSM, renormalizável em $1 + 1$ dimensões e que apresenta liberdade assintótica, para aplicarmos a RGOPT e compararmos sua termodinâmica com a LQCD e teorias de Yang-Mills. Como nossos cálculos perturbativos foram no máximo até a primeira ordem, uma possibilidade futuramente seria implementar a RGOPT na próxima ordem de perturbação, buscando ainda maior convergência; ademais considera-se, mesmo na ordem tomada neste trabalho, extensões do modelo como a inclusão de outros termos de interação, por exemplo. Os resultados obtidos com a RGOPT no NLSM comprovam que este é um método não perturbativo bastante robusto e que poderá ser utilizado como alternativa para métodos mais tradicionais como LQCD e HTLpt em uma aplicação à QCD em potencial químico finito. Além disso, seria viável a aplicação da RGOPT diretamente em teorias de Yang-Mills em $3 + 1$ dimensões, cujos resultados, ao serem comparados com o presente trabalho, auxiliariam na avaliação quantitativa da validade do NLSM, visto que aqui verificamos apenas qualitativamente a concordância do modelo com teorias de Yang-Mills. Em seguida, apresentamos o PNJL, modelo fermiônico não renormalizável que, embora não possa servir para discutir-se liberdade assintótica, apresenta quebra dinâmica de simetria quiral. O *loop* de Polyakov simula o confinamento de quarks, e por isso propusemos uma dependência de seu acoplamento com a temperatura utilizando a função β da QCD. A grande vantagem em se utilizar modelos vetoriais é a possibilidade de diretamente se obter diagramas de fases como $T - \mu$, por exemplo, de modo a analisar a localização ou mesmo a existência de um ponto crítico, problema em aberto

para a interação forte. Logo, um problema que este trabalho abre é a aplicação da RGOPT no modelo sigma linear (LSM), fermiônico e renormalizável em $3 + 1$ dimensões. Por outro lado, o modelo de Gross-Neveu, embora menos robusto do que o LSM, contém liberdade assintótica e poderia também ser explorado neste regime. Aplicações como estas permitiram-nos, além da obtenção do diagrama de fases $T - \mu$, o cálculo de observáveis do LHC sob a RGOPT, visto que o método mostra-se como uma ferramenta altamente eficaz no cálculo de teorias renormalizáveis sob condições extremas.

Apêndice A

O potencial efetivo

Formalmente, quantidades físicas são calculadas a partir da ação efetiva de um modelo, e esta descrição do sistema em geral é derivada de sua dinâmica e da análise de suas simetrias. Suponhamos que sejamos capazes de calcular uma função do parâmetro de ordem e dos campos externos que descrevem o estado do sistema. Tal função convém que seja o potencial efetivo (V_{eff}), cujo conhecimento é extremamente útil no estudo da quebra dinâmica de simetria, pois leva em conta correções quânticas que podem produzir quebra de simetria em teorias onde a aproximação clássica não indica tal quebra. Grosso modo, esta grandeza mede o grau efetivo de interações entre as partículas de um sistema.

Consideremos uma simples teoria de campos genérica com um único campo escalar, cuja dinâmica é descrita pela densidade lagrangiana $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$. Podemos adicionar a esta densidade lagrangiana um acoplamento linear do campo Φ a uma fonte externa $j(x)$, onde $j(x)$ é um número complexo que depende do espaço-tempo:

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu) \rightarrow \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + j(x)\Phi(x). \quad (\text{A.1})$$

O gerador funcional $\mathcal{Z}[j]$ para as funções de Green [58, 71, 131, 132, 134, 135] é dado em termos da amplitude de transição do estado de vácuo no passado remoto ao estado de vácuo no futuro distante na presença da fonte $j(x)$ por

$$\mathcal{Z}[j] = \left\langle 0 \left| T \exp \left[i \int d^n x \Phi(x) j(x) \right] \right| 0 \right\rangle = \langle 0^+ | 0^- \rangle_j. \quad (\text{A.2})$$

O gerador funcional das funções de Green conexas é definido ([131]) como o logaritmo do gerador funcional de todas as funções de Green:

$$W[j] = -i \ln \mathcal{Z}[j]. \quad (\text{A.3})$$

$W[j]$ pode ser também expandido funcionalmente em série de Taylor na forma

$$W[j] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^n x_1 \dots d^n x_n G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) j(x_1) \dots j(x_n), \quad (\text{A.4})$$

onde $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ representa as funções de Green de todos os diagramas conexos de Feynman com n pernas externas. Definamos o campo clássico como sendo o valor esperado do operador $\Phi(x)$ na presença da fonte $j(x)$:

$$\langle \Phi(x) \rangle = \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = \left[\frac{\langle 0^+ | \Phi(x) | 0^- \rangle}{\langle 0^+ | 0^- \rangle} \right]_j. \quad (\text{A.5})$$

O gerador funcional das funções de Green irredutíveis é a transformada de Legendre $\Gamma[\langle \Phi(x) \rangle]$ do gerador funcional das funções de Green conexas:

$$\Gamma[\langle \Phi(x) \rangle] = W[j] - \int d^n x j(x) \langle \Phi(x) \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Diferenciando com relação a $\langle \Phi \rangle$,

$$\frac{\delta \Gamma[\langle \Phi(x) \rangle]}{\delta \langle \Phi(x) \rangle} = -j(x). \quad (\text{A.7})$$

Esta equação é fundamental no estudo da quebra dinâmica de simetria.

A ação efetiva pode ser expandida em uma maneira similar à da eq.(A.4):

$$\Gamma[\langle \Phi(x) \rangle] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^n x_1 \dots d^n x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \langle \Phi(x_1) \rangle \dots \langle \Phi(x_n) \rangle, \quad (\text{A.8})$$

onde $\Gamma^{(n)}$ é a soma de todos os diagramas de Feynman irredutíveis com n pernas externas que não podem ser desconexos pela remoção de uma linha (1PI). Convencionou-se que tais diagramas sejam calculados sem propagadores nas pernas externas.

Há uma maneira alternativa de expandirmos a ação efetiva: ao invés de serem tomadas potências de $\langle \Phi \rangle$, podemos expandir em potências do momento (ao redor do ponto onde todos os momentos se anulam). No espaço de configurações a expansão fica

$$\Gamma[\langle \Phi(x) \rangle] = \int d^n x \left[-V_{\text{eff}}(\langle \Phi \rangle) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \langle \Phi \rangle)^2 Z(\langle \Phi \rangle) + \dots \right], \quad (\text{A.9})$$

onde $V_{\text{eff}}(\langle \Phi \rangle)$, uma função ordinária (não um funcional) é chamado de potencial efetivo.

Supondo que nossa densidade lagrangiana (A.1) tenha simetria interna, a quebra dinâmica de simetria ocorre se valor esperado do campo quântico $\Phi(x)$ é não-nulo, ainda que a fonte $j(x)$ se anule. Por simplicidade, denotemos $\langle 0^+ | \Phi(x) | 0^- \rangle = \langle \Phi \rangle_0$. De A.5 e A.7 vemos que, para $j(x) = 0$, $\langle \Phi \rangle_0$ é solução para

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\langle \Phi(x) \rangle]}{\delta \langle \Phi(x) \rangle} \right|_{\langle \Phi \rangle_0} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Como estamos interessados somente nos casos em que este valor esperado é invariante por translação (campos homogêneos) ($\langle \Phi(x) \rangle = \langle \Phi \rangle$), podemos escrever A.9 como

$$\Gamma[\langle \Phi(x) \rangle] = -\mathcal{V}V_{\text{eff}}(\langle \Phi \rangle), \quad (\text{A.11})$$

onde \mathcal{V} é o elemento de volume. Logo, A.10 torna-se

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}(\langle\Phi\rangle)}{d\langle\Phi\rangle} \right|_{\langle\Phi\rangle_0} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Em termos de aplicações, note a semelhança da expressão (A.9) com a densidade de energia funcional de Landau de um ferromagneto com magnetização \vec{M} [131]:

$$F = \int d^3x \left[\mathcal{F}(\vec{M}) + \frac{1}{2}K_L(\vec{M})(\nabla \cdot \vec{M})^2 + \frac{1}{2}K_T(\vec{M})(\nabla \times \vec{M})^2 + \dots \right], \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\mathcal{F}(\vec{M}) = N \left(\frac{T - T_c}{T_c} \vec{M}^2 + \xi(\vec{M}^2)^2 + \dots \right), \quad (\text{A.14})$$

com N sendo um fator de normalização e $\xi > 0$, é a densidade de energia livre para este modelo. De fato, potencial efetivo e densidade de energia livre são nomenclaturas diferentes para um mesmo observável.

A importância do potencial efetivo é clara: através dele podemos determinar o verdadeiro estado fundamental de uma teoria quando flutuações quânticas são levadas em conta. No cálculo de V_{eff} podemos usar técnicas de Matsubara para introduzir T , μ e, em primeira ordem, seu cálculo é feito a aproximação não-perturbativa de campo médio, também chamada de *1-loop* ou *large-N*. Os pontos de mínimo $V_{\text{eff}}(\langle\Phi\rangle_0)$ correspondem à pressão do sistema em uma dada temperatura, o que diretamente nos dá acesso às demais quantidades termodinâmicas como entropia, densidade de energia e anomalia do traço, por exemplo.

Apêndice B

OPT aplicada ao modelo $g\Phi^4$: cálculos em segunda ordem

B.1 Termos diretos

Em ordem $O(\delta^2)$, temos as seguintes contribuições de termos diretos para a pressão (Fig. B.1):

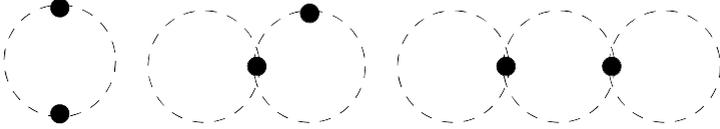


Figura B.1: Pressão na ordem δ^2 .

Respectivamente, estes diagramas são calculados pelas regras de Feynman como

$$P_a^{\delta^2} = \frac{\delta^2 m^4 N}{4} \int_p \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} = -\frac{3N^2 m^3}{4(N+2)g} \Sigma_{dir}', \quad (\text{B.1})$$

$$P_b^{\delta^2} = -\delta^2 m^2 \frac{N(N+2)}{4} \frac{g}{3} \frac{1}{N} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} \int_q \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} = \frac{3N^2 m}{2(N+2)g} \Sigma_{dir} \Sigma_{dir}', \quad (\text{B.2})$$

$$P_c^{\delta^2} = \delta^2 \frac{N}{16} \left(\frac{N+2}{3} \right)^2 \frac{g^2}{N^2} \left(\int_p \frac{1}{p^2 + m^2} \right)^2 \int_q \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} = -\frac{3N^2}{4(N+2)gm} \Sigma_{dir}^2 \Sigma_{dir}', \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\Sigma_{dir}' = -\frac{(N+2)mg}{3N} \int_p \frac{1}{(p^2 + m^2)^2}. \quad (\text{B.4})$$

De modo que

$$P_{dir}^{\delta^2} = -\frac{3N^2 m^3}{4(N+2)g} \Sigma_{dir}' + \frac{3N^2 m}{2(N+2)g} \Sigma_{dir} \Sigma_{dir}' - \frac{3N^2}{4(N+2)gm} \Sigma_{dir}^2 \Sigma_{dir}'$$

Ou seja,

$$P_{d\dot{r}}\delta^2 = -\frac{3N^2}{(N+2)mg}(m^2 - \Sigma_{d\dot{r}})^2 \Sigma_{d\dot{r}}', \quad (\text{B.5})$$

Na equação do PMS, teremos

$$\left. \frac{\partial P_{d\dot{r}}\delta^2}{\partial m} \right|_{m=\bar{m}} = 0 = \frac{3N^2}{(N+2)g} \left\{ \frac{2}{\bar{m}}(\bar{m}^2 - \Sigma_{d\dot{r}})[2\bar{m} - \Sigma_{d\dot{r}}']\Sigma_{d\dot{r}}' + \frac{1}{\bar{m}}(\bar{m}^2 - \Sigma_{d\dot{r}})^2 \Sigma_{d\dot{r}}'' - \frac{1}{\bar{m}^2}(\bar{m}^2 - \Sigma_{d\dot{r}})^2 \Sigma_{d\dot{r}}' \right\} \quad (\text{B.6})$$

$$\{2\bar{m}(\bar{m}^2 - \Sigma_{d\dot{r}})[2\bar{m} - \Sigma_{d\dot{r}}'] - (\bar{m}^2 - \Sigma_{d\dot{r}})^2\} \Sigma_{d\dot{r}}' + \bar{m}(\bar{m}^2 - \Sigma_{d\dot{r}})^2 \Sigma_{d\dot{r}}'' = 0. \quad (\text{B.7})$$

Como dito no final da seção anterior, quando apenas diagramas diretos forem incluídos à pressão, a otimização sempre fornecerá o fator $(m^2 - \Sigma_{d\dot{r}})^n$ ($n \geq 2$) em cada um de seus termos, sobrevivendo então a solução

$$\bar{m}^2 = \Sigma_{d\dot{r}} = \frac{(N+2)g}{6N} \int_p \frac{1}{p^2 + \bar{m}^2} \quad (\text{B.8})$$

e, no limite de N grande a solução será

$$\bar{m}^2 = \Sigma_{d\dot{r}}^{N^0}. \quad (\text{B.9})$$

Entretanto, em $\mathcal{O}(\delta^2)$ aparece um termo de troca, ou de Fock, e neste regime a estrutura da equação do PMS se modifica como veremos a seguir.

B.2 Inclusão do termo de troca

Quando termos de troca são levados em conta (Fig. B.2), temos

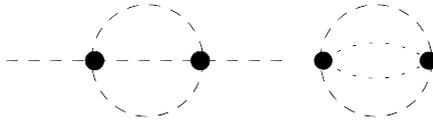


Figura B.2: À esquerda, Σ_{troca} ; à direita, P_{troca} .

$$\Sigma_{troca} = \frac{g^2}{N^2} \frac{1}{6} \left(\frac{N+2}{3} \right) \int_p \int_q \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(q-p+r)^2 + m^2}. \quad (\text{B.10})$$

e para a pressão:

$$P_{troca} = \frac{g^2}{N^2} \frac{N}{48} \left(\frac{N+2}{3} \right) \int_p \int_q \int_r \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{r^2 + m^2} \frac{1}{(q-p+r)^2 + m^2}. \quad (\text{B.11})$$

Sendo assim,

$$P_{troca} = -\frac{3}{4g} \frac{N^2}{(N+2)} \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir}, \quad (\text{B.12})$$

c, para analisarmos a equação do PMS completa na ordem δ^2 , devemos obter devidamente a expressão de

$$\left. \frac{\partial P_{troca}}{\partial m} \right|_{m=\bar{m}} = \frac{3}{4g} \frac{N^2}{(N+2)} (\Sigma'_{troca} \Sigma_d \dot{ir} + \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir}'), \quad (\text{B.13})$$

onde

$$\frac{\Sigma'_{troca}}{\frac{g^2}{N^2} \frac{1}{6} \left(\frac{N+2}{3} \right)} = \int_p \int_q \frac{2m}{(p^2 + m^2)^2} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(q-p+r)^2 + m^2} + \int_p \int_q \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{2m}{(q^2 + m^2)^2} \frac{1}{(q-p+r)^2 + m^2} + \int_p \int_q \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{2m}{[(q-p+r)^2 + m^2]^2}.$$

Portanto, por simetria,

$$\Sigma'_{troca} = \frac{g^2}{N^2} \frac{1}{6} \left(\frac{N+2}{3} \right) \int_p \int_q \frac{6m}{(p^2 + m^2)^2} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(q-p+r)^2 + m^2}, \quad (\text{B.14})$$

e concluímos que

$$\Sigma'_{troca} \Sigma_d \dot{ir} = 3 \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir}'. \quad (\text{B.15})$$

Voltando à eq. (B.13),

$$P'_{troca} = -\frac{3}{4g} \frac{N^2}{(N+2)} [3 \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir}' + \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir}'], \quad (\text{B.16})$$

$$P'_{troca} = \frac{3}{g} \frac{N^2}{(N+2)} \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir}'. \quad (\text{B.17})$$

A pressão completa em $\mathcal{O}(\delta^2)$ é

$$P^{\delta^2} = -\frac{3N^2}{(N+2)mg} (m^2 - \Sigma_d \dot{ir})^2 \Sigma_d \dot{ir}' - \frac{3}{4g} \frac{N^2}{(N+2)} \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir} \quad (\text{B.18})$$

no entanto, para facilitar as contagens da ordem N , podemos normalizá-la da seguinte maneira:

$$\frac{P^{\delta^2}}{N} = \frac{3N}{(N+2)mg} (m^2 - \Sigma_d \dot{ir})^2 \Sigma_d \dot{ir}' - \frac{3}{4g} \frac{N}{(N+2)} \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir}, \quad (\text{B.19})$$

e as respectivas equações do PMS serão também normalizadas automaticamente. Portanto, combinando as eqs. (B.6 e B.13), ficaremos com a equação do PMS completa para a segunda ordem:

$$\frac{3N}{(N+2)g} \left\{ \frac{2}{\bar{m}} (\bar{m}^2 - \Sigma_d \dot{ir}) [2\bar{m} - \Sigma_d \dot{ir}'] \Sigma_d \dot{ir}' + \frac{1}{\bar{m}} (\bar{m}^2 - \Sigma_d \dot{ir})^2 \Sigma_d \dot{ir}'' - \frac{1}{\bar{m}^2} (\bar{m}^2 - \Sigma_d \dot{ir})^2 \Sigma_d \dot{ir}' \right\} - \frac{3N}{(N+2)g} \Sigma_{troca} \Sigma_d \dot{ir}' = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\{2(\bar{m}^2 - \Sigma_d \dot{ir}) [2\bar{m} - \Sigma_d \dot{ir}'] - (\bar{m}^2 - \Sigma_d \dot{ir})^2 + \bar{m} \Sigma_{troca}\} \Sigma_d \dot{ir}' + (\bar{m}^2 - \Sigma_d \dot{ir})^2 \Sigma_d \dot{ir}'' = 0, \quad (\text{B.21})$$

onde descartamos a solução trivial $\bar{m} = 0$. Ou seja, quando termos de troca são levados em conta, a otimização do modelo não mais fornece $\bar{m}^2 = \Sigma_{dir}$, e sim uma solução dependente de Σ_{troca} . Contudo, lembrando que

$$\Sigma_{dir} = \frac{(N+2)g}{6N} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} = \Sigma_{dir}^{N^0} + \Sigma_{dir}^{1/N}, \quad (\text{B.22})$$

onde

$$\Sigma_{dir}^{N^0} = \frac{g}{6} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} \quad \text{e} \quad \Sigma_{dir}^{1/N} = \frac{g}{3N} \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (\text{B.23})$$

e

$$\Sigma_{troca} = \frac{g^2}{N^2} \frac{1}{6} \left(\frac{N+2}{3} \right) \int_p \int_q \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(q-p+r)^2 + m^2}, \quad (\text{B.24})$$

ao tomarmos o limite de N grande nestes termos dentro da eq. (B.21) teremos, inicialmente,

$$\{2(\bar{m}^2 - \Sigma_{dir})[2\bar{m} - \Sigma_{dir}'] - (\bar{m}^2 - \Sigma_{dir})^2\} \Sigma_{dir}' + (\bar{m}^2 - \Sigma_{dir})^2 \Sigma_{dir}'' = 0, \quad (\text{B.25})$$

pois Σ_{troca} é de ordem $1/N$. Sendo assim, voltamos ao caso dos termos diretos dado pela eq. (B.7) e, no limite de N grande, temos a solução

$$\bar{m}^2 = \Sigma_{dir}^{N^0}. \quad (\text{B.26})$$

Para analisarmos a própria pressão, podemos tomar a eq. (B.19) e concluir que, como o segundo termo do lado direito é de ordem $1/N$ (vide eqs. (2.6) e (B.10)), desaparecerá na aproximação de N grande. Por outro lado, pela eq. (B.4) vemos que do primeiro termo de fato restará apenas a contribuição $\Sigma_{dir}^{N^0}$, e a pressão no limite de N grande e $\mathcal{O}(\delta^2)$ fica

$$\frac{P\delta^2}{N} \Big|_{N \rightarrow \infty} = -\frac{3N}{(N+2)mg} (m^2 - \Sigma_{dir}^{N^0})^2 \Sigma_{dir}'. \quad (\text{B.27})$$

Apêndice C

Relações úteis em $T \neq 0$

Em temperatura finita, introduzimos $p_0 \rightarrow \omega_n$ onde $\omega_n = 2\pi T n$ ($n = 0, 1, \dots$) são as frequências de Matsubara para bósons. As integrais térmicas partem da soma estas frequências, utilizando a relação de dispersão $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$. Segundo as prescrições de [91, 92]:

$$T \sum_{n=0}^{\infty} \ln(\omega_n^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2) = \omega_{\mathbf{k}} + 2T \ln[1 - e^{-\omega_{\mathbf{k}}/T}] \quad (\text{C.1})$$

e

$$T \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_n^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2)^{-1} = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}(1 - e^{\omega_{\mathbf{k}}/T})} \quad (\text{C.2})$$

Tomando estas mesmas referências, imediatamente podemos ver que

$$J_0(T) = \int_0^{\infty} dz \ln[1 - e^{-\omega_z}] = \int_0^{\infty} dz z^2 \frac{1}{\omega_z [1 - e^{-\omega_z}]}, \quad (\text{C.3})$$

onde $\omega_z = (z^2 + y^2)^{1/2}$, com $y = m/T$, pode ser expandida para cálculos em altas temperaturas:

$$J_0(T) = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi y}{2} + \mathcal{O}(y^2), \quad (\text{C.4})$$

assim como

$$J_1(T) = \int_0^{\infty} dz \frac{1}{\omega_z [1 - e^{\omega_z}]}, \quad (\text{C.5})$$

fica expandida da seguinte maneira:

$$J_1(T) = -\frac{\pi}{2y} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y}{4\pi}\right) - \frac{\gamma_E}{2} + \mathcal{O}(y^2). \quad (\text{C.6})$$

Por fim,

$$J_2(T) = \int_0^{\infty} dz \frac{[e^{\omega_z}(1 + \omega_z) - 1]}{\omega_z^3 (1 - e^{\omega_z})^2}, \quad (\text{C.7})$$

vem da relação [58]

$$\int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^q} = \frac{\Gamma(q - D/2)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(q)} \frac{1}{(m^2)^{q - D/2}} \quad (\text{C.8})$$

c é utilizada em nossos resultados de 2 loops.

Apêndice D

Cálculo formal da pressão do NLSM no limite de LN

Apresentamos aqui os fundamentos do cálculo formal do potencial efetivo em ordem mais baixa segundo o formalismo desenvolvido em 1974 por Cornwall-Jackiw-Tomboulis (CJT, [133]) para o tratamento de teorias com campos compostos. Por definição, a função de partição a temperatura finita para este modelo no espaço euclidiano é dada por [77]

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{i=1}^N \mathcal{D}\Phi_i \mathcal{I}(\Phi_i) \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int dx \mathcal{L}_0\right), \quad (\text{D.1})$$

onde $\beta = 1/T$ e $\mathcal{I}(\Phi_i)$ é o termo responsável pela interação através do vínculo. Uma maneira possível de introduzir a informação carregada pelo vínculo é através da distribuição delta de Dirac:

$$\mathcal{I}(\Phi_i) = \prod_x \delta(N/g_0 - \Phi_i \Phi_i). \quad (\text{D.2})$$

Para que possamos prosseguir com o cálculo da ação (S), devemos escrever esta distribuição na forma de uma integral funcional [19]:

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{i=1}^N \mathcal{D}\Phi_i \int \mathcal{D}\alpha \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int_x \frac{i}{2} \alpha (N/g_0 - \Phi_i \Phi_i) - J_i \Phi_i\right] \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \int dx \mathcal{L}_0\right), \quad (\text{D.3})$$

onde o multiplicador de Lagrange α aparece como um campo auxiliar e a fonte J_i é útil para se determinar o propagador dos campos Φ_i . Portanto,

$$\mathcal{Z} = \int \prod_{i=1}^N \mathcal{D}\Phi_i \int \mathcal{D}\alpha \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int_x \mathcal{L}_0 - \frac{i}{2} \alpha (N/g_0 - \Phi_i \Phi_i) + J_i \Phi_i\right]. \quad (\text{D.4})$$

A partir disto podemos concluir que¹

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_i)^2 - \frac{i}{2} \alpha (N/g_0 - \Phi_i \Phi_i) + J_i \Phi_i. \quad (\text{D.5})$$

¹Note que, pela imposição da distribuição delta, há arbitrariedade no sinal do segundo termo.

Com este método do campo auxiliar, a lagrangiana torna-se quadrática nos campos escalares e podemos integrar sobre eles. Redefinindo a função de partição,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\alpha \exp(-S). \quad (\text{D.6})$$

Portanto, para obtermos uma expressão para a ação, integraremos sobre os campos Φ_i :

$$\prod_{i=1}^N \mathcal{D}\Phi_i \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int_x \mathcal{L}_0 - \frac{i}{2} \alpha (N/g_0 - \Phi_i \Phi_i) + J_i \Phi_i \right] \quad (\text{D.7})$$

$$\prod_{i=1}^N \mathcal{D}\Phi_i \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int dx \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_i)^2 + \frac{i}{2} \alpha \Phi_i \Phi_i \right] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int dx \frac{i}{2} \alpha \frac{N}{g_0} \right] \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int dx J_i \Phi_i \right].$$

Como o segundo termo é independente de Φ_i , temos

$$\exp \left[\int_0^\beta d\tau \int dx \frac{i}{2} \alpha \frac{N}{g_0} \right] \prod_{i=1}^N \mathcal{D}\Phi_i \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int dx \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi_i)^2 + \frac{i}{2} \alpha \Phi_i \Phi_i \right] \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int dx J_i \Phi_i \right].$$

Por definição, segue-se que

$$\exp \left[\int_0^\beta d\tau \int dx \frac{i}{2} \alpha \frac{N}{g_0} \right] \exp \left\{ - \frac{N}{2} \text{TrLog}[(\partial_\mu)^2 + i\alpha] \right\} \exp \left[\frac{1}{2} \int_x \int_y J_i(x) \langle x | \frac{1}{(\partial_\mu)^2 + i\alpha} | y \rangle J_i(y) \right],$$

onde N no segundo termo vem do produto e o traço já contém a contribuição térmica.

Utilizando a eq. (D.6),

$$S = \frac{N}{2} \text{TrLog}[(\partial_\mu)^2 + i\alpha] - \int_0^\beta d\tau \int dx \frac{i}{2} \alpha \frac{N}{g_0} - \frac{1}{2} \int_x \int_y J_i(x) \langle x | \frac{1}{(\partial_\mu)^2 + i\alpha} | y \rangle J_i(y) \quad (\text{D.8})$$

$$S = \frac{N}{2} \text{TrLog}[(\partial_\mu)^2 + i\alpha] - \frac{i}{2} \frac{N}{g_0} \int_0^\beta d\tau \int dx \alpha, \quad (\text{D.9})$$

onde foi tomado $J = 0$.

A partir desta expressão pode-se calcular diversas contribuições para o potencial efetivo, de acordo com o tratamento da integral no campo auxiliar. No caso de interesse desta seção, de acordo com [75, 84] considerar $N \rightarrow \infty$ significa substituir α pelo seu valor esperado $-im^2$ [19], enquanto se mantém N/g_0 fixo. Aqui, m aparece com o significado da própria massa de uma partícula.

Portanto,

$$S = \frac{N}{2} \text{TrLog}[(\partial_\mu)^2 + m^2] - \frac{1}{2} \frac{N}{g_0} \int_0^\beta d\tau \int dx m^2. \quad (\text{D.10})$$

Tomando o traço e reescrevendo no espaço de fases, temos

$$S = \beta V \frac{N}{2} \int_p \text{Log}(p^2 + m^2) - \beta V \frac{1}{2} \frac{N}{g_0} m^2. \quad (\text{D.11})$$

Como o potencial efetivo em primeira ordem é definido por

$$V_{\text{eff}} = \frac{S}{\beta V}, \quad (\text{D.12})$$

obtemos

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{N}{g_0} m^2 + \frac{N}{2} \int_p \text{Log}(p^2 + m^2). \quad (\text{D.13})$$

O formalismo de Matsubara indica que $(\omega_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2)$,

$$V_{\text{eff}} = -N \frac{m^2}{2g_0} - N \int_p \{\omega_p + T \ln [1 + \exp(-\omega_p/T)]\}. \quad (\text{D.14})$$

Conforme o apêndice A, a pressão é definida como o negativo do potencial termodinâmico, ou seja, do mínimo do potencial efetivo. Logo, por simplicidade e pelo fato de tratarmos diretamente a pressão no capítulo 3, faremos

$$P = N \frac{m^2}{2g_0} + N \int_p \{\omega_p + T \ln [1 + \exp(-\omega_p/T)]\}. \quad (\text{D.15})$$

A integral para $T = 0$ é analítica e será efetuada separadamente:

$$P \Big|_{T=0} = N \frac{m^2}{2g_0^2} + N \int_p \omega_p. \quad (\text{D.16})$$

Devido às divergências ultravioletas, devemos utilizar o método da regularização dimensional visto no capítulo anterior. Escolhendo o esquema $\overline{\text{MS}}$, vem

$$\int_p \rightarrow \left(\frac{e^{\gamma_E} M^2}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}, \quad (\text{D.17})$$

onde M é a escala de energia, $\gamma_E \simeq 0.5772$ é a constante de Euler-Mascheroni e $d = 1 - \epsilon$. Portanto,

$$\int_p \omega_p = \left(\frac{e^{\gamma_E} m^2}{4\pi} \right)^{\epsilon/2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (\text{D.18})$$

Na ref. [58], por exemplo, encontramos a solução desta integral:

$$\int_p \omega_p = -m^2 \left(\frac{e^{\gamma_E} M^2}{m^2} \right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma(\epsilon/2 - 1)}{8\pi}. \quad (\text{D.19})$$

Expandindo o resultado até a ordem ϵ^1 :

$$\int_p \omega_p = \frac{m^2}{8\pi} \left[\frac{2}{\epsilon} + 1 + \ln \frac{M^2}{m^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \quad (\text{D.20})$$

Tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, o termo $\mathcal{O}(\epsilon)$ se anula. Todavia, ainda há divergência no primeiro termo da eq. (D.20). Para eliminar este problema utilizaremos os já vistos contratérmos, ou seja, à lagrangiana da eq. (D.22) adicionaremos uma lagrangiana com a mesma forma polinomial cujos termos eliminarão tais divergências:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}_{ct}, \quad (\text{D.21})$$

onde \mathcal{L}_{ct} tem a forma

$$\mathcal{L}_{ct} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^t A \partial^\mu \Phi - B \frac{i}{2} m^2 \Phi^2, \quad (\text{D.22})$$

em que B é o contratermo de renormalização que cancela a divergência acima.

Portanto, a pressão em $T = 0$ torna-se

$$P \Big|_{T=0} = N \frac{m^2}{2g} - N \frac{m^2}{4\pi} \left[\frac{1}{2} - \ln \frac{m}{M} \right]. \quad (\text{D.23})$$

Lembrando que ainda temos a contribuição do meio, cuja integral possui resolução puramente numérica, finalmente a pressão do NLSM na aproximação de N grande é dada por

$$P = N \frac{m^2}{2g} - N \frac{m^2}{4\pi} \left[\frac{1}{2} - \ln \frac{m}{M} \right] + NT \int \frac{dp}{2\pi} \{ \ln [1 + \exp(-\omega_p/T)] \}, \quad (\text{D.24})$$

Através da equação do *gap*,

$$\frac{\partial P}{\partial m} \Big|_{m=\bar{m}} = 0 \quad (\text{D.25})$$

podemos encontrar os pontos de mínimo da pressão e encontrar quantidades termodinâmicas como densidade de energia e anomalia do traço, por exemplo. Calculamos m_0 analiticamente a partir da eq. (D.25):

$$\frac{\partial P(T=0)}{\partial m} \Big|_{m=m_0} = 0 \Rightarrow m(T=0) = M \exp(-2\pi/g). \quad (\text{D.26})$$

Através das regras de Feynman obtivemos o mesmo resultado no limite de LN, que foi recobrado a partir de nossas expressões para 1 e 2 *loops* no limite $N \rightarrow \infty$. Um desenvolvimento detalhado do formalismo CJT na próxima ordem da expansão $1/N$ encontra-se em [18].

Apêndice E

Pressão do NLSM em dois *loops*

Visto que o modelo possui campos com N componentes, sendo $N - 1$ píons e o campo sigma, o fato de termos escrito o campo sigma em termos dos píons através do vínculo de interação fixa automaticamente como $(N - 1)$ o fator de simetria do diagrama trivial de *1 loop*, afinal este diagrama é idêntico ao que aparece naturalmente em teorias escalares para um gás livre de bósons. A tarefa não trivial, contudo, consiste em determinarmos o fator de simetria do diagrama de dois *loops*, visto que o vértice derivativo na lagrangiana gera uma regra de Feynman adicional. Em dois *loops*, ordem δ^1 , haverá a contribuição do vértice não-derivativo (P_1^{ND}) e do vértice derivativo (P_1^D) para a pressão, ou seja, deveremos calcular os diagramas que aparecem na Fig. E.1.



Figura E.1: Contribuições não-derivativa e derivativa, respectivamente, para a pressão.

A primeira contribuição também ocorre nas demais teorias escalares e trata-se de “fechar” os propagadores em torno do vértice no segundo gráfico da Fig. E.2. O resultado é conhecido e basta

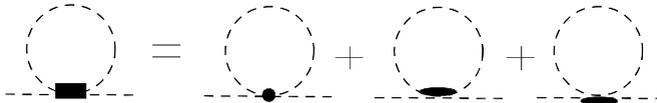


Figura E.2: Contribuições para a auto-energia.

fazermos $N \rightarrow (N - 1)$, atentando para os fatores que aparecem em nossa lagrangiana de modo que possamos traduzir os resultados que aparecem em [59], por exemplo. De qualquer maneira, a partir

das regras de Feynman é imediato que

$$P_1^{ND}, P_1^D \sim I_1^2. \quad (\text{E.1})$$

Como mencionado, o fator de simetria do primeiro gráfico já está calculado e, com as devidas substituições,

$$P_1^{ND} = -\frac{1}{8}gm^2(N+1)(N-1)I_1^2. \quad (\text{E.2})$$

No entanto, para construirmos a pressão com relação ao vértice derivativo e tenhamos a pressão completa $P_1 = P_1^{ND} + P_1^D$ em dois *loops*, deveremos considerar dois últimos gráficos da Fig. E.2 e as regras de Feynman associadas. Uma maneira imediata de obtermos a pressão total em dois *loops*, no entanto, é fechando o gráfico da auto-energia total, dada pelo primeiro gráfico da Fig. E.2, representado pela eq. (3.27) a qual, sendo reescrita de acordo com os propósitos deste apêndice, fica

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 + \mathcal{M}^2 = p^2 + \left\{ m^2 + g \left[p^2 + m^2 \frac{(N-1)}{2} I_1 \right] \right\}, \quad (\text{E.3})$$

onde \mathcal{M} representa uma autoenergia perturbativa. Sendo assim, a pressão até ordem g pode implicitamente conter estes termos na forma

$$P = P_0 + P_1 = -\frac{(N-1)}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln[p^2 + \mathcal{M}^2] \quad (\text{E.4})$$

e, desta maneira, fechando a função de dois pontos tomada até a ordem g , teremos diretamente a pressão até dois *loops*. No entanto, dois pontos importantes devem ser levados em consideração: 1) P_1 deve ser consistentemente expandida até a ordem g , de acordo com a imposição feita pela função de 2 pontos; 2) Devido à topologia da auto-energia, haverá sempre duas maneiras de se combinar os propagadores nas pernas externas que fecham seu *loop* e, por isso, na ordem g o resultado deverá ser dividido por 2. Portanto, primeiramente expandindo o logaritmo da eq. (E.4) até a ordem g e, em seguida, levando em consideração a contagem dupla do diagrama de 2 *loops* a partir da função de 2 pontos,

$$P = -\frac{(N-1)}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln(p^2 + m^2) - \frac{1}{2}g \frac{(N-1)}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \left[p^2 + \frac{1}{2}(N-1)m^2 \right] I_1. \quad (\text{E.5})$$

É fácil mostrar que, quando se trata as divergências no momento,

$$\int \frac{d^2p}{p^2 + m^2} = 2m^2 \int \frac{d^2p}{p^2 + m^2}; \quad (\text{E.6})$$

assim, o termo entre colchetes que multiplica I_1 fica $(1/2)(N-3)$ e teremos, em ordem g^0 , o conhecido resultado para um gás livre de bósons (primeiro termo da eq. (E.5), que concorda com a eq. (3.40)).

Em ordem g^1 , temos a pressão em dois *loops* (segundo termo da eq. (E.5)):

$$P_1 = -\frac{1}{8}gm^2(N-1)(N-3)I_1^2, \quad (\text{E.7})$$

uma vez que

$$I_1 = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (\text{E.8})$$

Apêndice F

Integrais térmicas do PNJL em dois loops

As contribuições de 2 loops da OPT ao PNJL implicam em integrais térmicas não triviais calculadas por Restrepo [36, 37]. Apresentamos aqui as complementações das equações (F.1) e (F.2):

$$\Delta I_3(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Delta_3, \quad (\text{F.1})$$

e

$$\Delta I_2(\mu, T) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Delta_2, \quad (\text{F.2})$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & \frac{e^{-\beta(E_p-\mu)} e^{-\beta(E_q-\mu)}}{g_l^+(E_p) g_l^+(E_q)} \left\{ 2(l^2 - l^*) + (ll^* - 1) \left[e^{-\beta(E_p-\mu)} + e^{-\beta(E_q-\mu)} \right] \right. \\ & + 2(l^{*2} - l) e^{-\beta(E_p-\mu)} e^{-\beta(E_q-\mu)} \left. \right\} \\ & + \frac{e^{-\beta(E_p-\mu)} e^{-\beta(E_q+\mu)}}{g_l^+(E_p) g_l^-(E_q)} \left\{ 2(l - l^{*2}) e^{-\beta(E_p-\mu)} + 2(l^* - l^2) e^{-\beta(E_q+\mu)} \right. \\ & + (1 - ll^*) \left[1 + e^{-\beta(E_p-\mu)} e^{-\beta(E_q+\mu)} \right] \left. \right\} \\ & + \frac{e^{-\beta(E_q-\mu)} e^{-\beta(E_p+\mu)}}{g_l^+(E_q) g_l^-(E_p)} \left\{ 2(l - l^{*2}) e^{-\beta(E_q-\mu)} + 2(l^* - l^2) e^{-\beta(E_p+\mu)} \right. \\ & + (1 - ll^*) \left[1 + e^{-\beta(E_q-\mu)} e^{-\beta(E_p+\mu)} \right] \left. \right\} \\ & + \frac{e^{-\beta(E_p+\mu)} e^{-\beta(E_q+\mu)}}{g_l^-(E_p) g_l^-(E_q)} \left\{ 2(l^{*2} - l) + (ll^* - 1) \left[e^{-\beta(E_p+\mu)} + e^{-\beta(E_q+\mu)} \right] \right. \\ & \left. + 2(l^2 - l^*) e^{-\beta(E_p+\mu)} e^{-\beta(E_q+\mu)} \right\}, \quad (\text{F.3}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta_3 = & \frac{e^{-\beta(E_p-\mu)}e^{-\beta(E_q-\mu)}}{g_l^+(E_p)g_l^+(E_q)} \left\{ 2(l^2 - l^*) + (ll^* - 1) \left[e^{-\beta(E_p-\mu)} + e^{-\beta(E_q-\mu)} \right] \right. \\
& + 2 \left(l^{*2} - l \right) e^{-\beta(E_p-\mu)} e^{-\beta(E_q-\mu)} \left. \right\} \\
& - \frac{e^{-\beta(E_p-\mu)}e^{-\beta(E_q+\mu)}}{g_l^+(E_p)g_l^-(E_q)} \left\{ 2 \left(l - l^{*2} \right) e^{-\beta(E_p-\mu)} + 2 \left(l^* - l^2 \right) e^{-\beta(E_q+\mu)} \right. \\
& + (1 - ll^*) \left[1 + e^{-\beta(E_p-\mu)} e^{-\beta(E_q+\mu)} \right] \left. \right\} \\
& - \frac{e^{-\beta(E_q-\mu)}e^{-\beta(E_p+\mu)}}{g_l^+(E_q)g_l^-(E_p)} \left\{ 2 \left(l - l^{*2} \right) e^{-\beta(E_q-\mu)} + 2 \left(l^* - l^2 \right) e^{-\beta(E_p+\mu)} \right. \\
& + (1 - ll^*) \left[1 + e^{-\beta(E_q-\mu)} e^{-\beta(E_p+\mu)} \right] \left. \right\} \\
& + \frac{e^{-\beta(E_p+\mu)}e^{-\beta(E_q+\mu)}}{g_l^-(E_p)g_l^-(E_q)} \left\{ 2 \left(l^{*2} - l \right) + (ll^* - 1) \left[e^{-\beta(E_p+\mu)} + e^{-\beta(E_q+\mu)} \right] \right. \\
& + 2 \left(l^2 - l^* \right) e^{-\beta(E_p+\mu)} e^{-\beta(E_q+\mu)} \left. \right\}. \tag{F.4}
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] M. Cheng *et. al.*, Phys. Rev. D **77**, 014511 (2008)
- [2] <http://physik.uni-graz.at/schladming2013/LectureNotes/Pawlowski.pdf> (2013)
- [3] Y. Akiba *et.al.*, arXiv:1502.02730, *U.S.LongRangePlanforNuclearPhysics* (2015)
- [4] N. G. Antoniou, N. Davis and F K. Diakonos, arXiv:1607.01326v1 (2016)
- [5] P. Senger, JPS Conf. Proc. **8**, 022001 (2015)
- [6] P. Arnold and C. Zhai, Phys. Rev. D **50**, 7603 (1994); Phys. Rev. D **51**, 1906 (1995)
- [7] B. Kastening and C. Zhai, Phys. Rev. D **52**, 7232 (1995)
- [8] E. Braaten and A. Nieto, Phys. Rev. Lett. **76**, 1417 (1996); Phys. Rev. D **53**, 3421 (1996)
- [9] J. O. Andersen, M. Strickland and N. Su, Phys. Rev. Lett. **104**, 122003 (2010); JHEP **1008**, 113 (2010); J. O. Andersen, L. E. Leganger, M. Strickland and N. Su, JHEP **1108**, 053 (2011)
- [10] B. Kastening, Phys. Rev. D **56**, 8107 (1997); T. Hatsuda, Phys. Rev. D **56**, 8111 (1997)
- [11] J. Zinn-Justin, App. Num. Math. Volume 60, Issue 12, Pages 1183-1464 (2010)
- [12] J. O. Andersen, E. Braaten and M. Strickland, Phys. Rev. D **61**, 014017 (1999)
- [13] J. O. Andersen, E. Braaten and M. Strickland, Phys. Rev. Lett. **83**, 2139 (1999)
- [14] J. O. Andersen, E. Braaten, and M. Strickland, Phys. Rev. D **61**, 074016 (2000)
- [15] J. O. Andersen, M. Strickland, and N. Su, Phys. Rev. Lett. **104**, 122003 (2010)
- [16] S. Mogliacci, J. O. Andersen, M. Strickland, N. Su and A. Vuorinen, JHEP **1312**, 055 (2013); N. Haque, J. O. Andersen, M. G. Mustafa, M. Strickland and N. Su, Phys. Rev. D **89**, 061701 (2014); N. Haque, A. Bandyopadhyay, J. O. Andersen, M. G. Mustafa, M. Strickland and N. Su, JHEP **1405**, 027 (2014)

- [17] J. O. Andersen, E. Braaten and M. Strickland, Phys. Rev. Lett. **83**, 2139 (1999); J. O. Andersen, E. Braaten and M. Strickland, Phys. Rev. D **61**, 074016 (2000)
- [18] E. Seel, S. Struber, F. Giacosa, D. H. Rischke, Phys. Rev. D **86**, 125010 (2012)
- [19] E. Seel, D. Smith, S. Lottini, F. Giacosa, arXiv:1209.4243 (2012)
- [20] E. Seel, D. Smith, S. Lottini, F. Giacosa, JHEP **10**, 1307 (2013)
- [21] C. N. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954)
- [22] F. Giacosa, S. Lottini, E. Seel, D. Smith, DOI:10.1063/1.4756187 (2012)
- [23] S. Chiku and T. Hatsuda, Phys. Rev. D **58**, 076001 (1998)
- [24] F. Karsch, A. Patkós, and P. Petreczky, Phys. Lett. B **401**, 69 (1997)
- [25] Jens O. Andersen and Lars Kyllingstad, Phys. Rev. D **78**, 076008 (2008)
- [26] P.M. Stevenson, Phys. Lett. B100, 61 (1981); Phys. Rev. D **23**, 2961 (1981); Nucl. Phys. B **203**, 472 (1982)
- [27] R. Seznec and J. Zinn-Justin, J. Math. Phys. **20**, 1398 (1979); P. M. Stevenson, Phys. Rev. D, **23**, 2916 (1981); J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, Ann. Phys. **147**, 57 (1983); V. I. Yukalov, Moscow Univ. Phys. Bull. **31**, 10 (1976); W. E. Caswell, Ann. Phys. (N.Y) **123**, 153 (1979); I. G. Halliday and P. Suranyi, Phys. Lett. **B85**, 421 (1979); J. Killin757.k, J. Phys. **A14**, 1005 (1981); R. P. Feynman and H. Kleinert, Phys. Rev. A **34**, 5080 (1986); H. F. Jones and M. Moshe, Phys. Lett. **B234**, 492 (1990); A. Neveu, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B18**, 242 (1990); V. Yukalov, J. Math. Phys. **32**, 1235 (1991); S. K. Gandhi and M. B. Pinto, Phys. Rev. D, **46**, 2570 (1992); C. M. Bender et al., Phys. Rev. **D45**, 1248 (1992); H. Yamada, Z. Phys. **C59**, 67 (1993); A. N. Sissakian, I. L. Solovtsov and O. P. Solovtsova, Phys. Lett. **B321**, 381 (1994); C. Arvanitis, F. Geniet, M. Iacomì, J.-L. Kneur and A. Neveu, Int.J.Mod.Phys. **A12**, 3307 (1997); H. Kleinert, Phys. Rev. D **57**, 2264 (1998); Phys. Lett. **B434**, 74 (1998); for a review, see H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, Chap. 19 (World Scientific, Singapore 2001); K. G. Klimenko, Z. Phys. **C50**, 477 (1991); *ibid.* **C60**, 677 (1993); Mod. Phys. Lett. **A9**, 1767 (1994); D. P. Menezes, M. B. Pinto and G. Krein, Int. J. Mod. Phys. E, **9** 2, 0054 (2000); M. B. Pinto, R. O. Ramos and P. J. Sena, Physica **A342**, 570 (2004)
- [28] M. B. Pinto, R. O. Ramos, Phys. Rev. D **60** (1999)
- [29] F. F. Souza Cruz, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. B **64**, 014515 (2001); J.-L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. Lett. **89**, 210403 (2002); Phys. Rev. A **68**, 043615

- (2003); E. Braaten and E. Radescu, Phys. Rev. Lett. **89**, 271602 (2002), Phys. Rev. A **66**, 063601 (2002); J.-L. Kneur, A. Neveu and M. B. Pinto, Phys. Rev. A **69**, 053624 (2004); B. Kastening, Phys. Rev. A **70**, 043621 (2004); J.-L. Kneur and M. B. Pinto, Phys. Rev. A **71**, 033613 (2005).
- [30] H. Caldas, J.-L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. B **77**, 205109 (2008)
- [31] J.-L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. D **88**, 045005 (2013)
- [32] J.-L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. D **74**, 125020 (2006)
- [33] J.-L. Kneur, M. B. Pinto, R. O. Ramos and E. Staudt, Phys. Rev. D **76**, 045020 (2007); Phys. Lett. B **567**, 136 (2007)
- [34] J. Kneur, M. B. Pinto, R. Ramos, Phys. Rev. C **81**, 065205 (2010)
- [35] L. Ferroni, V. Koch, M. B. Pinto, Phys. Rev. C **82**, 055205 (2010)
- [36] T. E. Restrepo, J. C. Macias, M. B. Pinto, and G. N. Ferrari Phys. Rev. D **91**, 065017 (2015)
- [37] T. E. Restrepo, *Radiatively Induced Vector Repulsion for Light Quarks*, Dissertação de Mestrado, PPGFSC-UFSC (2014)
- [38] C. Arvanitis, F. Geniet, J.-L. Kneur and A. Neveu, Phys. Lett. B **390**, 385 (1997); J.-L. Kneur, Phys. Rev. D **57**, 2785 (1998)
- [39] J. Zinn-Justin, “Renormalization group: An introduction”, ACQFT Corsica, France (2009)
- [40] M. E. Fisher, Rev. Mod. Phys. **46**, 597 (1974)
- [41] N. Goldenfeld, “Lectures on phase transitions and the renormalization group”, Addison-Wesley (1993)
- [42] J.-L. Kneur, A. Neveu, Phys. Rev. D **81** 125012 (2010)
- [43] J.-L. Kneur and M. B. Pinto, Phys. Rev. D **92**, 116008 (2015)
- [44] J.-L. Kneur and M. B. Pinto, Phys. Rev. Lett. **116**, 031601 (2016)
- [45] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961)
- [46] S.P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992)
- [47] M. Buballa, Phys. Rept. **407**, 205 (2005)
- [48] C. Ratti, S. Roessner, M. A. Thaler, W. Weise, Eur. Phys. J. C, **49**, 213-217 (2007)
- [49] S. Roessner, C. Ratti, W. Weise, Phys. Rev. D, **75**, 034007 (2007)

- [50] V. D. Mitrasinovic, H.G. Schulze, R. Tegen and R. H. Lemmer, *Ann. Phys. (NY)* **238**, 332 (1995)
- [51] M. Oertel, M. Buballa and J. Wambach, *Phys. Lett. B* **477**, 77 (2000); M. Oertel, M. Buballa and J. Wambach, *Yad. Fiz.* **64**, 757 (2001)
- [52] K. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 583 (1983)
- [53] J. Steinheimer and S. Schramm, *Phys. Lett. B* **736**, 241 (2014)
- [54] J. Sugano, J. Takahashi, M. Ishii, H. Kouno and M. Yahiro, *Phys. Rev. D* **90**, 037901 (2014)
Nature **443**, 675 (2006); Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, *Phys. Lett. B* **643**, 46 (2006); M. Cheng *et al.*, *Phys. Rev. D* **74**, 054507 (2006)
- [55] R. L. S. Farias, G. Krein, and Rudnei O. Ramos *Phys. Rev. D* **78**, 065046 (2008)
- [56] D. C. Duarte, R. L. S. Farias, and Rudnei O. Ramos *Phys. Rev. D* **84**, 083525 (2011)
- [57] S. Coleman, *Aspects of symmetry*, Cambridge University Press, New York (1988)
- [58] P. Ramond, *Field Theory*, Addison-Wesley, New York (1989)
- [59] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of ϕ^4 -Theories*, Chap. 19 (World Scientific, Singapore) (2001)
- [60] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge monographs on mathematical physics (1987)
- [61] Fisher, M. E., Gaunt, D. S., *Phys. Rev.* **133**, A224 (1964)
- [62] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **7**, 2911 (1973)
- [63] G. Mack, *Kaiserslautern Lectures*, Springer Lecture Notes in Physics, 17 (1972)
- [64] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **44**, 189 (1972)
- [65] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, *Phys. Lett. B* **40**, 566 (1972)
- [66] 't Hooft, S. Weinberg, *Nucl. Phys. B* **61**, 455 (1973)
- [67] D. Gross, R. Balian and J. Zinn-Justin, *Methods in Field Theory*, North-Holland, Amsterdam (1976).
- [68] T. P. Cheng, E. Eichten and L. F. Li, *Phys. Rev. D* **9**, 2259 (1974)
- [69] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **8**, 3497 (1973)
- [70] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Westview Press (1995)

- [71] C. Itzykson and Jean-Bernard Zuber, *Quantum field theory*, McGraw-Hill (1980)
- [72] I. J. R Aitchison, A. J. G. Hey, *Gauge theories in particle physics*, IOP Publishing (1989)
- [73] M. Dine and W. Fischler, *Phys. Lett. B* **105** 207 (1981)
- [74] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, *Phys. Rept.* **116** (1984) 103
[*Sov. J. Part. Nucl.* **17**, 204 (1986)]
- [75] “Field Theory Techniques on Spin Systems”, Hitoshi Murayama, *Physics* **230A** (2007)
- [76] A.M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **59**, 79 (1975)
- [77] “Thermodynamics of QCD-inspired theories”, Harmen J. Warringa, [arXiv:hep-ph/0604105] (2006)
- [78] N. D. Mermin, H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133–1136 (1966)
- [79] S. Coleman, *Commun. Math. Phys.* **31**, 259 (1973)
- [80] M. Gell-Mann, M. Lévy, *Il Nuovo Cimento* **16**, 4 (1960)
- [81] R. Root, *Phys. Rev. D* **11**, 831 (1975); *Adv. Comp. Math.* **5**, 329 (1996)
- [82] E. Brézin, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **6**, 13 (1976)
- [83] Jens O. Andersen, Daniel Boer, Harmen J. Warringa, *Phys. Rev. D* **69** (2004)
- [84] Harmen J. Warringa, Seminar talk given at the 43st Cracow School of Theoretical Physics, 30 May - 8 June 2003, Zakopane, Poland. [<http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0309277v1.pdf>]
- [85] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *J. of Phys. C* **6**, 1181 (1973)
- [86] L. Brown, *Quantum Field Theories*, Cambridge University Press, Cambridge (1992)
- [87] M. D. Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model”, Cambridge University Press, Cambridge (2014)
- [88] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Clarendon Press, Oxford, Fourth Edition (2002)
- [89] H. Makino and H. Suzuki, *PTEP* **2015**, 3, 033B08 (2015)
- [90] S. Hikami and E. Brézin, *J. Phys. A* **11**, 1148 (1978)
- [91] J. I. Kapusta, “Finite-Temperature Field Theory”, Cambridge University Press, Cambridge, (1985)

- [92] M. Le Bellac, “Thermal Field Theory”, Cambridge University Press, Cambridge, (1996)
- [93] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey and D. E. Knuth, *Adv. Comput. Math.* **5**, 329 (1996)
- [94] S. Gandhi, H.F. Jones and M. Pinto, *Nucl. Phys. B* **359**, 429 (1991)
- [95] F. Brau and F. Buisseret, *Phys. Rev. D* **79**, 114007 (2009)
- [96] A. Peshier, B. Kampfer, O. P. Pavlenko and G. Soff, *Phys. Rev. D* **54**, 2399 (1996)
- [97] P. Castorina and M. Mannarelli, *Phys. Rev. C* **75**, 054901 (2007)
- [98] D. E. Miller, *Phys. Rept.* **443**, 55 (2007)
- [99] F. Giacosa and R. Hofmann, *Phys. Rev. D* **76**, 085022 (2007)
- [100] R. D. Pisarski, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **168**, 276 (2007); F. Giacosa, *Phys. Rev. D* **83**, 114002 (2011)
- [101] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier and B. Petersson, , *Nucl. Phys. B* **469**, 419 (1996)
- [102] A. Chowdhury, A. Harindranath, J. Maiti, arXiv:1509.07959v2 (2015)
- [103] T. Nayak, B. Sinha “Physics at the Large Hadron Collider”, capítulo “Search and study of Quark Gluon Plasma at the CERN-LHC”, arXiv:0904.3426 (2009)
- [104] A. Tawfik, *SOP Trans. Theor. Phys.* **1** (2014)
- [105] S. Ejiri, *PoS LATTICE2008*, arXiv:0812.1534 (2009)
- [106] B.D.Serot and J.D. Walecka, *Advances in Nuclear Physics*, Vol. 16, eds. J.W. Negele and E. Vogt (Plenum, New York, 1986).
- [107] V. Koch, T.S. Biro, J. Kunz and U. Mosel, *Phys. Lett. B* **185**, 1 (1987)
- [108] D. P. Menezes, M. B. Pinto, L. B. Castro, P. Costa and C. Providência, *Phys. Rev. C* **89**, 055207 (2014).
- [109] J. Xu, T. Song, C.M. Ko and F. Li, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 012301 (2014)
- [110] V. Koch, *Nucl. Phys. A* **830**, 479C (2009)
- [111] P. de Forcrand and O. Philipsen, *JHEP* **0811**, 012 (2008); *ibid.* **0701**, 077 (2007)
- [112] K. Fukushima, *Phys. Rev. D* **78**, 114019 (2008)

- [113] K. Fukushima, Phys. Rev. D **77**, 114028 (2008)
- [114] S. Carignano, D. Nickel and M. Buballa, Phys. Rev. **82**, 054009 (2010)
- [115] R. Rapp, T. Schafer, E.V. Shuryak and M. Velkovsky, Phys. Rev. Lett. **81**, 53 (1998)
- [116] S. Klimt, M. Lutz and W. Weise, Phys. Lett. B **249**, 386 (1990)
- [117] N. M. Bratovic, T. Hatsuda and W. Weise, Phys. Lett. B **719**, 131 (2013)
- [118] J. -L. Kneur, M. B. Pinto and R. O. Ramos, Phys. Rev. C **81**, 065205 (2010)
- [119] L. Ferroni, V. Koch and M.B. Pinto, Phys. Rev. C **82**, 055205 (2010)
- [120] J.-L. Kneur, M.B. Pinto, R.O. Ramos and E. Staudt, Int. J. of Mod. Phys. E **21**, 1250017 (2012)
- [121] E. Staudt, *Teorias Fermiônicas Efetivas Sob Condições Extremas*, Tese de Doutorado, PPGFSC-UFSC (2007)
- [122] M. Xu, Y. Wu, Nuc. Phys. A **927**, 69 (2014)
- [123] P. N. Meisinger and M. C. Ogilvie, Nucl. Phys B - Proc. Supp. **47**, 519 (1996)
- [124] C. Ratti, M. A. Thaler and W. Weise, Phys. Rev. D **73**, 014019 (2006)
- [125] S. Gupta, X. Luo, B. Mohanty and H.-G. Ritter, Science **332**, 1525 (2011)
- [126] S. K. Ghosh, T. K. Mukherjee, M. G. Mustafa, R. Ray, Phys. Rev. D **73**, 114007 (2006)
- [127] S. Ejiri, Y. Maezawa, N. Ukita, S. Aoki, T. Hatsuda, N. Ishii, K. Kanaya and T. Umeda, Phys. Rev. D **82**, 014508 (2010)
- [128] J. Steinheimer and S. Schramm, Phys. Lett. B **696**, 257 (2011)
- [129] S. Roessner, T. Hell, C. Ratti and W. Weise, Nucl. Phys. A **814**, 118 (2008)
- [130] B. Blossier et al, Phys. Rev. D **82**, 034510 (2010)
- [131] D. Bailin, A. Love, *Introduction to gauge field theory*, Revised Edition (Institute of Physics Pub., 1993)
- [132] R. J. Rivers, *Path integral methods in quantum field theory*, Cambridge University Press, New York (1987)
- [133] J. M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis, Phys. Rev. D **10**, 2428 (1974)
- [134] U.-J. Wiese, *Quantum Field Theory*, Institute for Theoretical Physics, University of Bern (2007)
- [135] M. Kaku, *Quantum field theory - A modern approach*, Oxford University Press, New York (1993)