UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

HOMOMORFISMOS EM C^*-ÁLGEBRAS

PAULA SAVANA ESTÁCIO MOREIRA

Orientador: DANILO ROYER

Florianópolis, 08 de dezembro de 2016.

PAULA SAVANA ESTÁCIO MOREIRA

HOMOMORFISMOS EM C^*-ÁLGEBRAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Bacharel em Matemática

Orientador: Danilo Royer

Florianópolis
2016

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação em Bacharelado da Universidade Federal de Santa Catarina e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 26/2016/CCM.

Professora Dra. Silvia Martini de Holanda Janesch
Coordenadora do Curso de Graduação em Matemática

Paula Savana Estácio Moreira
Acadêmica

Banca Examinadora:

Professor Dr. Danilo Royer
Orientador

Professor Dr. Luciano Bedin
Membro

Professor Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
Membro

1 Resumo

O estudo de operadores lineares em espaços de Hilbert motivou a continuidade da pesquisa em C^*-álgebras. O trabalho foi subdividido nos seguintes capítulos: Álgebras de Banach, Espectro, Raio Espectral, Representação de Gelfand e C^*-álgebras.

Foram demonstrados importantes resultados como o Teorema do Mapeamento Espectral, o Teorema de Gelfand e o Teorema de Beurling. O objetivo final do trabalho foi demonstrar que *um* $*$*-homomorfismo* $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ *de uma* $*$*-álgebra de Banach* $\mathbb{A}$ *em uma* C^**-álgebra* $\mathbb{B}$ *é contrativo.*

Sumário

2 Introdução

O estudo dos operadores lineares limitados $B(H_1, H_2)$ entre espaços de Hilbert H_1, H_2, com base no livro [2], motivou o estudo abordado neste trabalho. Como pode ser visto no "Apêndice: Operadores em Espaços de Hilbert," $B(H)$ é um exemplo de C^*-álgebra. A partir disto, estabeleceu-se que a literatura utilizada para a pesquisa seria [1] e que o objetivo final seria a demonstração do seguinte teorema: *um $*$-homomorfismo $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ de uma $*$-álgebra de Banach $\mathbb{A}$ em uma C^*-álgebra $\mathbb{B}$ é contrativo, isto é, $\| \varphi(a) \| \leqslant \| a \|$, para todo $a \in \mathbb{A}$.*

No primeiro capítulo, foram apresentadas várias definições caracterizando álgebras normadas, unitais, completas, subálgebras, subálgebras geradas. Em seguida, foram dados vários exemplos relacionados às definições, além de propriedades de ideais em álgebras.

No segundo capítulo, foram apresentadas as noções de elemento invertível, espectro e resolvente de um elemento em uma álgebra. O Teorema do Mapeamento Espectral e o Teorema de Gelfand foram os principais resultados deste capítulo. No capítulo seguinte, além de definições e exemplos, foi demonstrado o Teorema de Beurling e a construção da unitização de uma álgebra sem unidade.

No quarto capítulo foram mostradas uma série de proposições com o intuito de provar o Teorema de Representação de Gelfand, que relaciona uma álgebra de Banach comutativa com uma álgebra de funções contínuas em um espaço localmente compacto Hausdorff. Finalmente, foram dadas várias definições, como a de involução, $*$-álgebra, $*$-álgebra de Banach, $*$-homomorfismo e C^*-álgebra. Mostrou-se ainda que dada uma C^*-álgebra $\mathbb{A}$, existe uma C^*-álgebra com unidade, cuja norma estende a norma de $\mathbb{A}$, e que contém $\mathbb{A}$. Este resultado é fundamental para demonstrar o teorema citado no inicio desta introdução, que é o objetivo final do trabalho.

3 Álgebras de Banach

Essa seção será iniciada com algumas definições necessárias ao estudo de Álgebras de Banach seguidas de alguns exemplos das mesmas.

Definição 3.1. *Uma **álgebra** $\mathbb{A}$, sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, é um espaço vetorial sobre o mesmo com uma operação (produto) bilinear:*

$$\mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$(a, b) \longmapsto ab,$$

tal que

$$a(bc) = (ab)c$$

para $a, b, c \in \mathbb{A}$.

Definição 3.2. *Uma **subálgebra de** $\mathbb{A}$ é um subespaço vetorial $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ fechado pelo produto, ou seja, se b e $b' \in \mathbb{B}$, então $bb' \in \mathbb{B}$. $\mathbb{B}$ dotad da restrição das operações de $\mathbb{A}$ é uma álgebra.*

Definição 3.3. *Uma norma $||\ .\ ||$ em $\mathbb{A}$ é dita **submultiplicativa** se*

$$|| ab || \leqslant || a || \,.\, || b ||,$$

*para $a, b \in \mathbb{A}$. Neste caso, o par $(A, ||\ .\ ||)$ é chamada uma **álgebra normada.** Por sua vez, se $\mathbb{A}$ admite uma unidade $1_{\mathbb{A}}$, ou seja,*

$$a1_{\mathbb{A}} = 1_{\mathbb{A}}a = a,$$

*para todo $a \in \mathbb{A}$, e $|| 1_{\mathbb{A}} || = 1$, dizemos que $\mathbb{A}$ é uma **álgebra normada unital.***

Proposição 3.1. *Se $\mathbb{A}$ é uma álgebra normada, então o produto $(a, b) \longmapsto ab$ é contínuo.*

Demonstração. Considere $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{A}$, satisfazendo $a_n \longrightarrow a$ e $b_n \longrightarrow b$, então

$$|| ab - a_n b_n || = || a(b - b_n) + (a - a_n)b_n ||$$

$$\leqslant || a(b - b_n) || + || (a - a_n)b_n ||$$

$$\leqslant || a || \,.\, || b - b_n || + || a - a_n || \,.\, || b_n || \,.$$

Como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada,

$$|| b - b_n || \longrightarrow 0 \text{ e } || a - a_n || \longrightarrow 0,$$

segue que $|| ab - a_n b_n || \longrightarrow 0$. □

Uma **álgebra normada completa** é chamada uma **álgebra de Banach.** Enquanto uma **álgebra unital normada completa** é chamada **álgebra de Banach unital.**

Observação 3.1. *Uma subálgebra de uma álgebra normada com a restrição da norma da mesma é uma álgebra normada.*

Proposição 3.2. *O fecho de uma subálgebra $\mathbb{B}$ em uma álgebra $\mathbb{A}$ é uma subálgebra.*

Demonstração. Denote o fecho de $\mathbb{B}$ em $\mathbb{A}$ por $\overline{\mathbb{B}}$. Considere $\overline{a}$, $\overline{b} \in \overline{\mathbb{B}}$. Portanto, existem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{B}$, tais que $a_n \longrightarrow \overline{a}$ e $b_n \longrightarrow \overline{b}$. Como o produto definido em $\mathbb{B}$ é contínuo, tem-se que a sequência $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\overline{a}\overline{b}$. Sendo assim, $\overline{a}\overline{b}$ é ponto de acumulação de $\mathbb{B}$. Além disso, como o fecho de um espaço vetorial é um espaço vetorial, segue o resultado. □

Como em um espaço completo um subespaço é fechado no mesmo se, e somente se, é completo, segue que uma **subálgebra fechada** de uma **álgebra de Banach** é uma **álgebra de Banach.** Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.1. *Seja S um conjunto, então $l^\infty(S)$, o conjunto de todas as funções limitadas com valores complexos em S, é uma álgebra de Banach unital, com as operações definidas pontualmente:*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x);$$

$$(\lambda f) = \lambda f(x);$$

e com a norma do supremo

$$\| f \|_\infty = \sup_{x\in S} | f(x) | .$$

Demonstração. De fato, $l^\infty(S)$ com as operações de soma e multiplicação por escalar define um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Vejamos, agora, que o produto está bem definido.

Sejam $f, g \in l^\infty(S)$, então existem $M, N \in \mathbb{R}$, satisfazendo $|f(x)| \leqslant M$ e $|g(x)| \leqslant N$, para todo $x \in S$. Segue que

$$|(f.g)|(x) = |f(x)|.|g(x)| \leqslant M.N.$$

Portanto, $(f.g) \in l^\infty(S)$. Note que esta operação é associativa, pois a imagem destas funções pertence a um corpo. Sendo assim, $l^\infty(S)$ é uma álgebra. Note que $\| \,.\, \|_\infty$ é uma norma.

Vejamos que $(l^\infty(S), \| \,.\, \|_\infty)$ é uma álgebra normada, isto é, que $\| \,.\, \|_\infty$ é uma norma submultiplicativa. Com este intuito, considere $f, g \in l^\infty(S)$. Segue que

$$|(f.g)(x)| = |f(x)|.|g(x)| \leqslant \sup_{x\in S}|f(x)|.\sup_{x\in S}|g(x)| = \| f \|_\infty . \| g \|_\infty .$$

Note que $\| f \|_\infty . \| g \|_\infty$ é cota superior de $|(f.g)|(x)$. Logo,

$$\sup_{x\in S}|(f.g)(x)| \leqslant \| f \|_\infty . \| g \|_\infty,$$

ou seja,

$$\| f.g \|_\infty \leqslant \| f \|_\infty . \| g \|_\infty .$$

Falta provarmos que $(l^\infty(S), \| \,.\, \|_\infty)$ é uma álgebra normada completa. Para tanto, considere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sequência de Cauchy em $l^\infty(S)$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que para quaisquer $m, n > N_0$,

$$\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon.$$

Logo, para $x_0 \in S$, $(f_n(x_0)_{n\in\mathbb{N}})$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$, pois

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant || f_n - f_m ||_\infty < \varepsilon.$$

Como $\mathbb{C}$ é completo, tal sequência é convergente. Defina

$$f : S \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) := \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$$

Afirmação 3.1. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant n_0$,* $\sup\limits_{x\in S}|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Fixe $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||f_n - f_m||_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n, m \geqslant n_0$.

Pela definição da f, dado $x \in S$, tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geqslant k_0$, então

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $n, m \geqslant n_0$ e $m \geqslant k_0$, segue que

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|$$

$$\leqslant ||f_n - f_m||_\infty + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ e, para todo $n \geqslant n_0$. Assim,

$$\sup_{x\in S}|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Mostremos agora que f é limitada. Perceba que $f_n \in l^\infty(S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $K_n > 0$ tal que $|f_n(x)| \leqslant K_n$, para todo $x \in S$. Além disso, pela afirmação acima, dado $\varepsilon > 0$ e escolhendo $n \geqslant n_0$,

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)|$$

$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$

$$\leqslant \sup_{x\in S}|f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|$$

$$\leqslant \varepsilon + K_n.$$

Portanto, $f \in l^\infty(S)$. □

Exemplo 3.2. *Seja Ω um espaço topológico. O conjunto $C_b(\Omega)$ de todas as funções contínuas* *limitadas em Ω com valores complexos é uma subálgebra fechada de $l^\infty(\Omega)$. Assim, $C_b(\Omega)$ é uma álgebra de Banach unital.*

Demonstração.

Afirmação 3.2. *$C_b(\Omega)$ é uma subálgebra de $l^\infty(\Omega)$.*

Segue do fato que a soma e o produto de duas funções contínuas é uma função contínua e o produto de uma função contínua por um escalar é uma função contínua.

Afirmação 3.3. *$C_b(\Omega)$ é uma subálgebra fechada de $l^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Para tanto, mostremos que o complementar de $C_b(\Omega)$, isto é, $l^\infty(\Omega)\diagdown C_b(\Omega)$ é aberto em $l^\infty(\Omega)$. Denote $l^\infty(\Omega)\diagdown C_b(\Omega)$ por H.

Suponhamos, por absurdo, que H não seja aberto. Então, existe $g \in H$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\| g - h \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

para algum $h \in C_b(\Omega)$.

Fixe $x_0 \in \Omega$. Como $h \in C_b(\Omega)$, existe um aberto $U \ni x_0$, satisfazendo para todo $x \in U$,

$$|h(x_0) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|g(x_0) - g(x)| &= |g(x_0) - h(x_0) + h(x_0) - h(x) + h(x) - g(x)| \\
&\leqslant |g(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\
&\leqslant \| g - h \|_\infty + |h(x_0) - h(x)| + \| h - g \|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Desta maneira, $g \in C_b(\Omega)$, o que é uma contradição. Conclui-se que H é aberto, sendo assim, $C_b(\Omega)$ é fechado.

Como $C_b(\Omega)$ é um subespaço fechado no espaço completo, $l_\infty(\Omega)$, segue que, $C_b(\Omega)$ é completo. Por possuir unidade, segue que $C_b(\Omega)$ é uma álgebra de Banach unital.

Observe que se Ω for compacto, $C(\Omega)$, o conjunto das funções contínuas de Ω em $\mathbb{C}$, coincide com $C_b(\Omega)$, visto que a imagem de uma função contínua aplicada em um compacto é um conjunto compacto, portanto limitado.

□

Em seguida, um exemplo de uma álgebra que tem unidade, mas não é normada.

Exemplo 3.3. *Considere $C([0,1])$ com $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Note que $[0,1]$ é compacto, portanto as funções deste espaço são limitadas, sendo assim, $C([0,1])$ igual a $C_b([0,1])$. Além disso, tem unidade.*

Para observar que $||\ .\ ||_1$ não é submultiplicativa, escolha $f, g \in C([0,1])$, com $f(x) = g(x) = x$, para todo $x \in [0,1]$. Segue que

$$|| \ f.g \ ||_1 = ||x^2||_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Por sua vez,

$$|| \ f \ ||_1 = || \ g \ ||_1 = ||x||_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$|| \ f.g \ ||_1 = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = || \ f \ ||_1 \ . \ || \ g \ ||_1 \ .$$

Portanto, $C([0,1])$ com $|| \ f \ ||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ não é uma álgebra normada.

Vejamos agora um exemplo de álgebra normada que não é completa:

Exemplo 3.4. *Seja*

$F = \{f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C} : f$ *é limitada e* $\exists \ k \in R_+$, *tal que* $f(x) = 0$, *para todo* $x > k\}$.

Considere F *munido com a seguinte norma*

$$|| \ f \ ||_\infty = \sup_{x \in [0,\infty)} | \ f(x) \ | \ .$$

Tal espaço é uma subálgebra normada de $l^\infty([0,\infty))$. Para perceber que esta não é completa, defina a seguinte sequência em F :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ x \in [0,1] \\ \frac{1}{x}, & se \ \ x \in [1,n] \\ 0, & se \ \ x > n. \end{cases}$$

Note que $f_n \longrightarrow f$, em que $f(x) = \frac{1}{x}$, para todo $x \in [0, +\infty)$, em $l^\infty([0,\infty))$, mas $f \notin F$. Assim, f_n é uma sequência de Cauchy em F que não converge no mesmo. Segue que F não é completo.

Exemplo 3.5. *Seja* Ω *um espaço Hausdorff localmente compacto. Define-se* $C_0(\Omega)$ *como o conjunto das funções* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *que se "anulam no infinito", isto é,* $f \in C_0(\Omega)$, *se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$, *o conjunto* $\{w \in \Omega : |f(w)| \geqslant \varepsilon\}$ *é compacto. Vejamos que* $C_0(\Omega)$ *é uma subálgebra fechada de* $C_b(\Omega)$.

Demonstração. Para facilitar, demonstraremos o seguinte:

Afirmação 3.4. *Seja* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *contínua. Tem-se que* $f \in C_0(\Omega)$ *se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existir um compacto* $K \subseteq \Omega$ *satisfazendo para todo* $x \in K^c$, $|f(x)| < \varepsilon$.

($\Longrightarrow$) Seja $f \in C_0(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$, então o conjunto

$$K = \{w \in \Omega : |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

é compacto. Portanto, para todo $x \in K^c$, $|f(x)| < \varepsilon$.

($\Longleftarrow$) Suponha que para todo $\varepsilon > 0$ exista um compacto $K \subseteq \Omega$ tal que para todo $x \in K^c$, $|f(x)| < \varepsilon$.

Segue que $W = \{w \in \Omega : |f(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq K$, sendo K compacto. Como $|f|$ é contínua, a imagem inversa de $[\varepsilon, +\infty)$, $|f|^{-1}([\varepsilon, +\infty)) = W$, é um fechado em Ω. Sendo W fechado e $W \subseteq K$ um compacto, tem-se que W é compacto. Logo, $f \in C_0(\Omega)$.

Continuando a demonstração do exemplo, fixe $\varepsilon > 0$ e admita $f, g \in C_0(\Omega)$. Portanto, existem compactos W_f e W_g, tais que se $x \in \Omega \diagdown W_f$, então

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, se $x \in \Omega \diagdown W_g$, então

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Disso segue que se

$$x \in (\Omega \diagdown W_f \cap \Omega \diagdown W_g) = \Omega \diagdown (W_f \cup W_g),$$

tem -se que

- $$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

  Como $f+g$ é contínua, $W_f \cup W_g$ é compacto e, para todo $x \in \Omega \backslash (W_f \cup W_g)$, $|(f+g)(x)| < \varepsilon$, conclui-se que $f + g \in C_0(\Omega)$.

- $$|(f.g)(x)| = |f(x)|.|g(x)| = |f(x)|.|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

  Como $f.g$ é contínua, $W_f \cup W_g$ é compacto e, para todo $x \in \Omega \setminus (W_f \cup W_g)$, $|(f.g)(x)| < \varepsilon$, tem-se que $f.g \in C_0(\Omega)$.

  Analogamente, para $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in C_0(\Omega)$, existe um compacto W_λ satisfazendo para $x \in \Omega \diagdown W_\lambda$,

  $$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

  Assim,

- $$|(\lambda f)x)| = |\lambda||f(x)| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{\lambda + 1} < \varepsilon.$$

  Sendo λf contínua e W_λ compacto e, para todo $x \in \Omega \setminus W_\lambda$, $|(\lambda f)(x)| < \varepsilon$, segue que $\lambda f \in C_0(\Omega)$.

Visto que a imagem dessas operações pertencem ao corpo dos complexos, segue que a operação produto é associativa. Demonstrou-se que $C_0(\Omega)$ é uma subálgebra de $C_b(\Omega)$. Basta verificarmos que $C_0(\Omega)$ é fechada na mesma.

Para tanto, considere $f \in C_b(\Omega)$, ponto de acumulação de $C_0(\Omega)$. Por definição, existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_0(\Omega)$ tal que $f_n \longrightarrow f$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, tem-se

$$\sup |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $f_n \in C_0(\Omega)$,

$$W_n = \{w \in \Omega : |f_n(w)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}$$

é compacto. Logo, se $x \in \Omega \diagdown W_n$, então $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim, fixe $n > n_0$ e $x \in W_n$,

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \\
&\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \\
&\leqslant \sup_{x \in (\Omega \diagdown W_n)} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \\
&\leqslant \sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Segue que, para todo $x \in \Omega \setminus W_n$,

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Como W_n é compacto, pela Afirmação 3.4, $f \in C_0(\Omega)$. Dessa forma, $C_0(\Omega)$ contém todos os seus pontos de acumulação, sendo assim, fechado em $C_b(\Omega)$. $\square$

Vejamos um exemplo de álgebra não abeliana.

Exemplo 3.6. *Seja X um espaço vetorial normado. Denotemos por $B(X)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados de X em X. O conjunto $B(X)$ é uma álgebra normada, com operações de soma e multiplicação por escalar definidas pontualmente, multiplicação dada por*

$$B(X) \longrightarrow B(X)$$

$$(u, v) \longmapsto u \circ v$$

e munida da norma

$$|| \, u \, || = \sup_{||x|| \leqslant 1} || \, u(x) \, || \, .$$

Se X é um espaço de Banach, $B(X)$ é completo, sendo assim, uma álgebra de Banach.

Demonstração. A demonstração desse exemplo será dividida em algumas afirmações. Primeiramente, note que dado $u \in B(X)$, e $x \neq 0$, então

$$|| \, u\left(\frac{x}{|| \, x \, ||}\right) || \leqslant || \, u \, || \, .$$

Assim,

$$|| \, u(x) \, || \leqslant || \, u \, || \, . \, || \, x \, || \, .$$

Afirmação 3.5. *$B(X)$ é uma álgebra.*

Demonstração.

- Considere $u, v \in B(X)$. Então,

$$\| u(x) \| \leqslant \| u \| . \| x \|;$$

$$\| v(x) \| \leqslant \| v \| . \| x \| .$$

Portanto,

$$\| (u+v)(x) \| = \| u(x) + v(x) \| \leqslant \| u(x) \| + \| v(x) \| \leqslant (\| u \| + \| v \|) \| x \| .$$

Logo, $u + v \in B(X)$ e, além disso,

$$\| u + v \| \leqslant \| u \| + \| v \| .$$

- Para $u \in B(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se que

$$\| \lambda u \| = \sup\{\| (\lambda u)(x) \| : \| x \| \leqslant 1\}$$

$$= \sup\{|\lambda| . \| u(x) \| : \| x \| \leqslant 1\} = |\lambda| \| u \| .$$

Portanto, $\lambda u \in \mathbb{B}(X)$.

Pelo feito acima, note que $B(X)$ é um espaço vetorial normado.

- Note que o produto está bem definido, pois

$$\| (u \circ v)(x) \| = \| u(v(x)) \| \leqslant \| u \| . \| v(x) \| \leqslant \| u \| . \| v \| . \| x \| .$$

Segue que $u \circ v \in B(X)$ e, além disso, a norma é submultiplicativa. E vale a associatividade

$$((u \circ v) \circ w)(x) = (u \circ v)(w(x)) = u(v(w(x))) = u((v \circ w)(x)) = (u \circ (v \circ w))(x),$$

para todo $u, v, w \in B(X)$.

Logo, $B(X)$ é uma álgebra normada.

Afirmação 3.6. *Se X é um espaço de Banach, $B(X)$ é completo.*

Demonstração. Considere $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B(X)$ sequência de Cauchy. Fixe $x \in X$, $x \neq 0$. Então, por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$,

$$\| u_n - u_m \| < \frac{\varepsilon}{\| x \|}.$$

Note que $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ é sequência de Cauchy, pois

$$\| u_n(x) - u_m(x) \| = \| (u_n - u_m)(x) \| \leqslant \| u_n - u_m \| . \| x \| < \frac{\varepsilon}{\| x \|} \| x \| < \varepsilon,$$

para todo $m, n > n_0$. Como X é completo, $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Defina

$$u : X \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x).$$

Vejamos que u é um operador linear limitado e que $u_n \longrightarrow u$.

- Mostremos que u é linear. De fato, para $x, \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, segue que

$$u(x + \alpha y) = \lim_{n \to \infty} u_n(x) + \alpha \lim_{n \to \infty} u_n(y) =$$

$$= u(x) + \alpha u(y).$$

- Para que fique claro que $u \in B(X)$, basta notarmos que u é limitado. Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, existe um $K \in \mathbb{N}$, tal que $|| u_n || \leqslant K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$|| u_n(x) || = || \lim_{n \to \infty} u_n(x) || = \lim_{n \to \infty} || u_n(x) || \leqslant \lim_{n \to \infty} || u_n || \, . \, || x || \leqslant K \, || x || \, .$$

  Segue que $u \in B(X)$.

- Agora, para observarmos que $u_n \longrightarrow u$ em $B(X)$, provemos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para u em $B(X)$. Para tanto, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$,

$$|| u_n - u_m || < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Seja $n \geqslant n_0$ e $x \in X$, com $|| x || \leqslant 1$. Pela definição de u, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > N$, tem-se $|| u(x) - u_m(x) || < \frac{\varepsilon}{2}$. Considere $m \in \mathbb{N}$, tal que $m \geqslant max\{n_0, N\}$. Segue que, para $n \geqslant n_0$,

$$|| u_n(x) - u(x) || = || u_n(x) - u_m(x) + u_m(x) - u(x) || \leqslant$$

$$|| u_n(x) - u_m(x) || + || u_m(x) - u(x) || \leqslant || u_n - u_m || \, . \, || x || + || u_m(x) - u(x) || < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

  Assim, para todo $x \in X$, com $|| x || \leqslant 1$, vale que $|| u_n(x) - u(x) || < \varepsilon$. Portanto,

$$|| u_n - u || = \sup_{||x|| \leqslant 1} || u_n(x) - u(x) || \leqslant \varepsilon,$$

  para todo $n \geqslant n_0$,

□

Exemplo 3.7. *A álgebra $M_n(\mathbb{C})$ das matrizes $n \times n$ com entradas complexas pode ser identificada com $B(\mathbb{C}^n)$, que é uma álgebra unital. Além disso, as matrizes triangulares superiores formam uma subálgebra de $M_n(\mathbb{C})$.*

Demonstração. De fato, as matrizes $n \times n$ com entradas complexas podem ser vistas como representações de transformações lineares limitadas de $\mathbb{C}^n$ em C^n.

Considere $T \in B(\mathbb{C}^n)$ que pode ser representada como a matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$. Então

$$T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Em que,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A unidade, neste caso, é a matriz identidade I_n :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Note que as matrizes triangulares $n \times n$ formam mesmo uma subálgebra, pois, se A e B são triangulares,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & ... & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kn} \\ 0 & a_{22}b_{22} & ... & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kn} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix},$$

segue que AB também é triangular. □

Note que se $(B_\lambda)_\lambda$ é uma família de subálgebras de uma álgebra $\mathbb{A}$, então $\bigcap_{\lambda \in \Omega} B_\lambda$ é uma subálgebra de $\mathbb{A}$. Disso, seguem as próximas definições.

Definição 3.4. *Seja S um subconjunto da álgebra $\mathbb{A}$. A **subálgebra de $\mathbb{A}$ gerada por S** é a menor subálgebra de A contendo S e é dada pela intersecção de todas as subálgebras em que S está contido.*

Definição 3.5. *Considere A uma álgebra normada e $S \subseteq A$. Define-se a **subálgebra fechada de $\mathbb{A}$ gerada por** S como a menor subálgebra fechada de $\mathbb{A}$ que contenha S.*

Afirmação 3.7. *Se denotarmos a **subálgebra gerada** por S de B e a **subálgebra fechada gerada** por S de C. Então, $C = \overline{B}$, isto é, C é o fecho da subálgebra gerada por S.*

Demonstração. ($\supseteq$) Por definição de subálgebra gerada, segue que $B \subseteq C$. Considere $\overline{b} \in \overline{B}$. Existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, convergindo para $\overline{b}$. Como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B \subseteq C$ e C é fechada, então $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em C. Segue que $\overline{b} \in C$. Logo, $\overline{B} \subseteq C$.

($\subseteq$) Pela Proposição 3.2, o fecho de uma subálgebra é uma subálgebra. Assim, $\overline{B}$ é uma subálgebra fechada que contém S. C está contida em em todas as subálgebras fechadas contendo S, por definição. Segue que $C \subseteq \overline{B}$.

$\square$

Definição 3.6. *Um ideal à esquerda (respectivamente, à direita) em uma álgebra $\mathbb{A}$ é um subespaço vetorial I de $\mathbb{A}$, satisfazendo*

$$a \in \mathbb{A} \text{ e } b \in I \Longrightarrow ab \in I;$$

(respectivamente, $ba \in I$).

Por sua vez, um subespaço vetorial que é um ideal à direita e à esquerda em $\mathbb{A}$, simultaneamente, é um ideal em $\mathbb{A}$. Note que 0 e $\mathbb{A}$ são ideais de $\mathbb{A}$, chamados ideais triviais.

Definição 3.7. *Um **ideal maximal de** $\mathbb{A}$ é um ideal próprio, isto é, não pertencente à $\mathbb{A}$, e que não está contido em nenhum outro ideal próprio de $\mathbb{A}$. A definição para ideal maximal à direita e à esquerda é análoga.*

Exemplo 3.8. *Considere a álgebra $\mathbb{A} = C_0([0,1])$ e o ideal*

$$I = \left\{ f \in C_0([0,1]) : f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$$

De fato, I é ideal de $\mathbb{A}$, pois é um subespaço vetorial de $\mathbb{A}$, e, se $f \in I$ e $g \in \mathbb{A}$, tem-se

$$(f.g)\left(\frac{1}{2}\right) = (g.f)\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right).f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right).0 = 0,$$

ou seja, $f.g$ e $g.f \in I$. Vejamos agora que I é ideal maximal. Para tanto, escolha um ideal J de $\mathbb{A}$, satisfazendo

$$I \subsetneq J \subseteq \mathbb{A}.$$

Portanto, existe $g \in J$, tal que $g \notin I$. Assim, $g(\frac{1}{2}) \neq 0$.

Seja

$$l = g.\overline{g} = |g|^2 \geqslant 0.$$

Como $l(\frac{1}{2}) > 0$, segue que

$$h = |x - \frac{1}{2}| + l > 0,$$

para todo $x \in [0,1]$. Então, h é invertível em $\mathbb{A}$. Sendo J um ideal e $h \in J$, tem-se

$$h.h^{-1} = 1 \in J.$$

Logo, $J = C_0([0,1])$ e I é ideal maximal de $C_0([0,1])$.

Definição 3.8. *Um ideal I é dito **modular** se existe um elemento $u \in \mathbb{A}$ tal que $a - au$ e $a - ua \in I$ para todo $a \in \mathbb{A}$.*

Para o exemplo de ideal modular, assumiremos o teorema seguinte, que é um corolário do Lema de Urysohn, disponível na referência [3].

Teorema 3.1. **{*Urysohn*} *(para espaços localmente compactos).*** *Seja Ω um espaço localmente compacto Hausdorff. Suponhamos $K \subseteq O \subseteq \Omega$, onde K é compacto e O é aberto. Então, existe $u \in Cc(\Omega, [0,1])$ tal que $u = 1$ em K e $supp(u) \subseteq O$.*

Exemplo 3.9. *Se w é um elemento de um espaço localmente compacto Ω, e*

$$M_w = \{f \in C_0(\Omega) : f(w) = 0\},$$

então M_w é um ideal modular na álgebra $C_0(\Omega)$.

Demonstração. Como $w \in \Omega$ e Ω é localmente compacto, existe um compacto L tal que $w \in int(L)$. O interior de L é aberto. Portanto, existe um aberto A, satisfazendo, $w \in A \subseteq int(L)$. Note que o fecho de A, logo um fechado, está contido em K, que é compacto. Disso, segue que $\overline{A}$ é compacto. Assim, $\overline{A} \subseteq int(L) \subseteq \Omega$, pelo Lema de Urysohn, existe $u \in Cc(\Omega, [0,1]) \subseteq C_0(\Omega)$, tal que $u = 1$, em $\overline{A}$. Por construção, $w \in \overline{A}$. Logo, $u(w) = 1$ e $f - uf = f - fu \in M_w$, para todo $f \in C_0(\Omega)$. □

Definição 3.9. *Se I é um ideal de uma álgebra $\mathbb{A}$, então $\mathbb{A}/I$ é uma álgebra com produto dado por*

$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Observação 3.2. *Dizemos que $a + I = b + I$ em $\mathbb{A}/I$ se $a - b \in I$ e, denotamos por*

$$a \equiv b(modI).$$

Proposição 3.3. *A álgebra $\mathbb{A}/I$ é unital se, e somente se, I é modular.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se $\mathbb{A}/I$ é unital, existe $u \in \mathbb{A}$, tal que

$$(a + I)(u + I) = au + I = a + I.$$

Portanto, $a \equiv au(modI)$, isto é, $a - au \in I$. Note que, neste caso, todo ideal de $\mathbb{A}$ é modular. ($\Longleftarrow$) Se I é modular, existe $u \in \mathbb{A}$, tal que $a - au$ e $a - ua \in I$, para todo $a \in \mathbb{A}$. Então, $u + I$ é a unidade de $\mathbb{A}/I$, pois

$$(a + I)(u + I) = au + I.$$

Perceba que $a - au \in I$. Logo, $a \equiv au(modI)$. □

Se $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de ideais de uma álgebra $\mathbb{A}$, então $\cap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ é um ideal de $\mathbb{A}$. Assim, define-se

Definição 3.10. *Dado um conjunto $S \subseteq \mathbb{A}$, existe um ideal mínimo I de $\mathbb{A}$ contendo S. Este é chamado de **ideal gerado** por S.*

Afirmação 3.8. *Se $\mathbb{A}$ é uma álgebra normada, então, o fecho de um ideal I é um ideal de $\mathbb{A}$.*

Demonstração. Mostremos que $\overline{I}$ é um ideal à esquerda de $\mathbb{A}$. Considere $a \in \mathbb{A}$ e $\overline{b} \in \overline{I}$. Como $\overline{I}$ é o fecho de I, existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$, com $b_n \longrightarrow \overline{b}$.

Sendo I um ideal, $(ab_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ e, pela continuidade do produto,

$$ab_n \longrightarrow a\overline{b}.$$

Portanto, $a\overline{b}$ é ponto de acumulação de I, ou seja, $a\overline{b} \in \overline{I}$. A demonstração de que o fecho de I é ideal à direita de $\mathbb{A}$ é análoga.

□

Definição 3.11. *Seja $S \subseteq \mathbb{A}$. O menor ideal fechado J de $\mathbb{A}$ contendo S é dito o **ideal fechado gerado por** S.*

Afirmação 3.9. *O ideal J da definição acima é o fecho do ideal gerado por S.*

Demonstração. ($\subseteq$) Considere I o ideal gerado por S, então $I \subseteq J$, por definição. Vejamos que $\overline{I} \subseteq J$.

Seja $\overline{b} \in \overline{I}$. Segue que existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$, satisfazendo

$$b_n \longrightarrow \overline{b}.$$

Agora, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I \subseteq J$. Como J é fechado, $\overline{b} \in J$. Assim, $\overline{I} \subseteq J$.

($\supseteq$) Pela definição de J e por $\overline{I}$ ser um ideal fechado, tem-se que $J \subseteq \overline{I}$. Logo, $J = \overline{I}$.

□

Teorema 3.2. *Se I é um ideal fechado de uma álgebra normada A, então $\mathbb{A}/I$ é uma álgebra normada, com a norma quociente*

$$|| \; a + I \; ||= \inf_{b\in I} || \; a + b \; || \; .$$

Demonstração. Primeiramente, provemos que a norma quociente satisfaz as propriedades necessárias.

1. $|| \; a + I \; ||\geqslant 0$, para $(a + I) \in \mathbb{A}/I$.

   Note que $0 \leqslant|| \; a + b \; ||$, para todo $b \in I$. Portanto, 0 é cota inferior do conjunto $\{|| \; a + b \; ||: b \in I\}$. Assim,
   $$0 \leqslant inf\{|| \; a + b \; ||: b \in I\} =|| \; a + I \; || \; .$$

2. $|| \; a + I \; ||= 0$ se, e somente se, $(a + I) = (0 + I)$.

   ($\Rightarrow$) Suponha que $(a + I) = (0 + I)$. Então,

   $$|| \; a + I \; ||= inf_{b\in I} \; || \; b \; || \; .$$

   Como I é ideal, $0 \in I$. Logo
   $$0 \leqslant \inf_{b\in I} || \; b \; ||\leqslant|| \; 0 \; ||= 0.$$

   Portanto,
   $$|| \; a + I \; ||= \inf_{b\in I} || \; b \; ||= 0.$$

$(\Leftarrow)$ Considerando $\| a+I \| = 0$, tem-se a existência de uma sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$,tal que

$$\| a+b_n \| \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\| a-(-b_n) \| \longrightarrow 0.$$

Assim, $(-b_n)$ converge para a. Sendo I um fechado de $\mathbb{A}$ e a um ponto de acumulação de I, conclui-se que $a \in I$, ou seja, $(a+I) = (0+I)$.

3. $\| \alpha a+I \| = |\alpha|. \| a+I \|$, para $\alpha \in \mathbb{C}$.

   De fato,

$$\begin{aligned} \| \alpha a+I \| &= \inf_{b\in I} \| \alpha a+b \| = \inf_{b\in I} \| \alpha(a+\frac{b}{\alpha}) \| = \\ &= \inf_{c\in I} \| \alpha(a+c) \| = \inf_{c\in I} |\alpha| \| (a+c) \| = \\ &= |\alpha| \inf_{c\in I} \| (a+c) \| = |\alpha| \| a+I \| . \end{aligned}$$

4. $\| (a+I)+(c+I) \| \leqslant \| a+I \| + \| c+I \|$.

   Seja $\varepsilon > 0$ e $a, c \in \mathbb{A}$. Então, existem a' e $c' \in I$, satisfazendo

$$\| a+a' \| < \| a+I \| + \varepsilon$$

   e,

$$\| c+c' \| < \| c+I \| + \varepsilon.$$

   Assim,

$$\| a+c+(a'+c') \| = \| a+a'+c+c' \| \leqslant \| a+a' \| + \| c+c' \| < a+I \| + \| c+I \| + 2\varepsilon.$$

   Note que $a'+c' \in I$ e denote esta soma por b. Segue que

$$\| (a+c)+b \| < a+I \| + \| c+I \| + 2\varepsilon.$$

   Logo,

$$\inf_{b\in I} \| a+c+b \| \leqslant a+I \| + \| c+I \| + 2\varepsilon,$$

   para todo $\varepsilon > 0$. Portanto,

$$\| (a+c)+I \| = \| (a+I)+(c+I) \| \leqslant \| a+I \| + \| c+I \| .$$

Vejamos que a norma quociente é submultiplicativa. Para tanto, considere $\varepsilon > 0$ e suponha que a e b pertençam à $\mathbb{A}$. Então, por definição de ínfimo, existem a' e $b' \in I$, satisfazendo

$$\| a+a' \| < \| a+I \| + \varepsilon$$

e,

$$\| b+b' \| < \| b+I \| + \varepsilon.$$

Assim,

$$(\varepsilon + \| a+I \|)(\varepsilon + \| b+I \|) >$$

$$\| a+a' \| \, . \, \| b+b' \| \geqslant \| (a+a')(b+b') \| =$$

$$\| ab+ab'+a'b+a'b' \| = \| ab+c \| \geqslant \| ab+I \| \, .$$

Sendo $c = ab'+a'b+a'b' \in I$.

Logo,

$$(\varepsilon + \| a+I \|)(\varepsilon + \| b+I \|) \geqslant \| ab+I \| \, .$$

Para todo $\varepsilon > 0$. Portanto,

$$\| ab+I \| \leqslant \| a+I \| \, . \, \| b+I \| \, .$$

$\square$

Exemplo 3.10. *Considere a álgebra normada* $\mathbb{A} = (C([0,1]), \| \, . \, \|_\infty)$. *Já foi provado que*

$$I = \{f \in C([0,1]) : f(\frac{1}{2}) = 0\}$$

é ideal de $\mathbb{A}$. *Vejamos que* I *é fechado em* $\mathbb{A}$. *De fato, se, para algum* $f \in \mathbb{A}$, *existe uma sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$, *com* $f_n \longrightarrow f$, *então, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que para todo* $n > n_0$:

$$|f_n(1/2) - f(1/2)| \leqslant \| f_n - f \|_\infty < \varepsilon.$$

Como $f_n(1/2) = 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se que* $f(1/2) = 0$. *Segue que* $f \in I$, *isto é,* I *é fechado em* $\mathbb{A}$.

Pelo Teorema 3.2, $C([0,1])/I$ *é uma álgebra com norma quociente* $\| g+I \| = \inf_{f\in I} \| g+f \|_\infty$. *Por exemplo, seja* $g = x^2 \in C([0,1])$, *então,*

$$\| x^2+I \| = \inf_{f\in I} \| x^2+f \|_\infty \, .$$

Note que

$$\| x^2+f \|_\infty \geqslant \left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 + f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{4},$$

isto é,

$$\| x^2+I \| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Além disso, $h = \frac{1}{4} - x^2 \in I$, *pois* $h(\frac{1}{2}) = 0$. *Assim,*

$$\| x^2+I \| = \leqslant \| x^2+h \|_\infty = \| x^2-x^2+\frac{1}{4} \|_\infty = \frac{1}{4}.$$

Segue que

$$\| x^2 + I \| = \frac{1}{4}.$$

Definição 3.12. *Um homomorfismo de uma álgebra $\mathbb{A}$ em uma álgebra $\mathbb{B}$ é uma transformação linear*

$$\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B},$$

tal que,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

para todo $a, b \in \mathbb{A}$.

Afirmação 3.10. *O núcleo de φ, $N(\varphi)$, é um ideal de A.*

Demonstração. Seja $d \in N(\varphi)$ e $a \in \mathbb{A}$. Como φ é homomorfismo,

$$\varphi(ad) = \varphi(a)\varphi(d) = \varphi(a).0 = 0.$$

Logo, $ad \in N(\varphi)$. Segue que $N(\varphi)$ é ideal à esquerda de $\mathbb{A}$. A demonstração de que $N(\varphi)$ é ideal à direita de $\mathbb{A}$ é análoga. □

Afirmação 3.11. *A imagem de φ é uma subálgebra de $\mathbb{B}$.*

Demonstração. Como φ é transformação linear, para z_1, z_2 pertencentes à imagem de φ, existem $a, b \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfazendo

$$\varphi(a) = z_1$$

e,

$$\varphi(b) = z_2.$$

Assim,

$$z_1 + z_2 = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a + b);$$

$$\lambda z_1 = \lambda\varphi(a) = \varphi(\lambda a).$$

Tem-se que a imagem de φ é um espaço vetorial. Além disso, sendo φ um homomorfismo,

$$z_1.z_2 = \varphi(a).\varphi(b) = \varphi(ab),$$

isto é, $z_1.z_2 \in Im(\varphi)$. Segue que a imagem que φ é uma subálgebra de $\mathbb{B}$. □

Definição 3.13. *Dizemos que φ é unital se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são unitais e $\varphi(1) = 1$.*

Afirmação 3.12. *Se I é um ideal de $\mathbb{A}$, a transformação quociente*

$$\pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}/I$$

é um homomorfismo.

Demonstração. De fato, para $a, b \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\pi(a + b) = (a + b) + I = (a + I) + (b + I) = \pi(a) + \pi(b);$$

$$\pi(\lambda a) = \lambda a + I = \lambda(a + I) = \lambda\pi(a);$$

$$\pi(ab) = (ab + I) = (a + I)(b + I) = \pi(a)\pi(b).$$

□

Proposição 3.4. *Sejam φ e ψ homomorfismos contínuos de uma álgebra normada $\mathbb{A}$ em uma álgebra normada $\mathbb{B}$, sendo $\mathbb{A}$ a subálgebra fechada gerada por um conjunto S. Assim, se $\varphi|_S = \psi|_S$, então, $\varphi = \psi$.*

Demonstração. Primeiramente, note que

$$K = \{a \in \mathbb{A} : \varphi(a) = \psi(a)\}$$

é uma subálgebra fechada de $\mathbb{A}$. De fato, como φ e ψ são homomorfismos, para $a, b \in K$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \psi(a) + \psi(b) = \psi(a + b);$$

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) = \lambda\psi(a) = \psi(\lambda a);$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a)\psi(b) = \psi(ab).$$

Assim, $a + b, \lambda a$, e $ab \in K$. Segue que K é subálgebra de $\mathbb{A}$.

Agora, mostremos que K é igual ao seu fecho, isto é, $K = \overline{K}$. Para tanto, considere $\overline{d} \in \overline{K}$. Por definição, existe uma sequência $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tal que $d_n \longrightarrow \overline{d}$. Por hipótese, φ e ψ são contínuas, então

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(d_n) = \varphi(\lim_{n\longrightarrow\infty} d_n) = \varphi(\overline{d})$$

e

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \psi(d_n) = \psi(\lim_{n\longrightarrow\infty} d_n) = \psi(\overline{d}).$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(d_n) = \psi(d_n).$$

Então, por unicidade do limite,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(d_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \psi(d_n) \Longrightarrow \varphi(\overline{d}) = \psi(\overline{d}).$$

Conclui-se que $\overline{d} \in K$. Logo, K é uma subálgebra fechada. Agora, note que $S \subseteq K$. Por definição de subálgebra fechada gerada por um conjunto, tem-se que $\mathbb{A} \subseteq K$. Disso, segue que $\varphi(a) = \psi(a)$, para todo $a \in \mathbb{A}$, ou seja, $\varphi = \psi$.

□

Segue mais um exemplo de homomorfismo. Este homomorfismo será usado na seção seguinte.

Exemplo 3.11. *Denote por $\mathbb{C}[z]$ a álgebra de todas as funções polinomiais com coeficientes complexos em um z indeterminado. Se a é um elemento de uma álgebra unital $\mathbb{A}$ e $p \in \mathbb{C}[z]$ é o polinômio*

$$p = \lambda_0 + \lambda_1 z + ... + \lambda_n z^n,$$

estabelecemos

$$p(a) = \lambda_0 1 + \lambda_1 a^1 + ... = \lambda_n a^n.$$

Afirmação 3.13. *A transformação*

$$\psi_a : \mathbb{C}[z] \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$p \longmapsto p(a)$$

é um homomorfismo unital.

Demonstração. Vejamos que ψ preserva soma, multiplicação por escalar e produto. Considere $p, q \in \mathbb{C}[z]$ e $a \in \mathbb{A}$. Denotando

$$p = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + ... + \lambda^n z^n,$$

$$q = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + ... + \alpha_m z^m$$

e considerando $m < n$, sem perda de generalidade, segue que

$$\psi_a(p) + \psi_a(q) = p(a) + q(a) =$$

$$(\lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda^n a^n) + (\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + ... + \alpha_m a^m) =$$

$$((\lambda_0 + \alpha_0) + (\lambda_1 \alpha_1)a + (\lambda_2 \alpha_2)a^2 + ... + (\lambda_m \alpha_m)a^m + ... + \lambda^n a^n =$$

(Com $\alpha_i = 0$ para $i > m$.)

$$= \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i + \alpha_i)a^i = (p+q)(a) = \psi_a(p+q).$$

Seja $\beta \in \mathbb{C}$ e $p \in \mathbb{C}[z]$ como acima, tem-se

$$\beta \psi_a(p) = \beta p(a) = \beta(\lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda^n a^n) =$$

$$(\beta\lambda_0) + (\beta\lambda_1)a + (\beta\lambda_2)a^2 + ... + (\beta\lambda^n)a^n = (\beta p)(a) = \psi_a(\beta p).$$

Agora, para o produto

$$\psi_a(p)\psi_a(q) = p(a).q(a) =$$

$$(\lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda^n a^n).(\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + ... + \alpha_m a^m) =$$

$$(\lambda_0 + \alpha_0) + (\lambda_0\alpha_1 + \lambda_1\alpha_0)a + (\lambda_0\alpha_2 + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_0\alpha_2)a^2 + ... + \left(\sum_{i=0}^{m+n} \lambda_i \alpha_{(m+n)-i}\right) a^{m+n} =$$

$$\sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \alpha_{k-i}\right) a^k = (p.q)(a) = \psi_a(p.q).$$

Vejamos que $1_{\mathbb{A}}$ pertence à imagem de ψ_a. Para tanto, considere

$$p = 1.$$

Assim,

$$\psi_a(p) = p(a) = 1.1_{\mathbb{A}} = 1_{\mathbb{A}}.$$

Portanto, ψ_a é um homomorfismo unital. $\square$

4 Espectro

Neste capítulo serão introduzidas as noções de espectro e resolvente de um elemento em uma álgebra. Serão demonstrados resultados importantes como o Teorema de Gelfand.

Definição 4.1. *Dizemos que $a \in \mathbb{A}$ é **invertível** se existe $b \in \mathbb{A}$ tal que*

$$ab = ba = 1_{\mathbb{A}}.$$

Neste caso, b é único e denotado por a^{-1}.

Afirmação 4.1. *O conjunto $inv(\mathbb{A}) = \{a \in \mathbb{A} : a \text{ é invertível}\}$ é um grupo com respeito a restrição da operação produto de $\mathbb{A}$.*

Demonstração. Primeiramente, vejamos que tal operação está bem definida. Considere $a, b \in inv(A)$. Então existem a^{-1} e $b^{-1} \in \mathbb{A}$, satisfazendo

$$a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1_{\mathbb{A}};$$

$$b.b^{-1} = b^{-1}.b = 1_{\mathbb{A}}.$$

Assim, como $\mathbb{A}$ é álgebra

$$(a.b)(b^{-1}.a^{-1}) = a(b.b^{-1})a^{-1} = a.a^{-1} = 1_{\mathbb{A}}.$$

Analogamente, $(b^{-1}.a^{-1})(a.b) = 1_{\mathbb{A}}$. Disso, segue que

$$(a.b)^{-1} = (b^{-1}.a^{-1}).$$

Logo, o inverso de $a.b$ existe em $\mathbb{A}$, sendo assim, único.

1. Sejam $a, b, c \in inv(\mathbb{A})$, então
$$a(b.c) = (a.b)c,$$
pois $\mathbb{A}$ é álgebra.

2. Como $\mathbb{A}$ é unital $1_{\mathbb{A}} \in inv(\mathbb{A})$, sendo $1_{\mathbb{A}}^{-1} = 1_{\mathbb{A}}$. Assim, para todo $a \in inv(\mathbb{A})$:
$$1_{\mathbb{A}}.a = a.1_{\mathbb{A}} = a.$$

3. Se $a \in inv(\mathbb{A})$, existe um único $b \in \mathbb{A}$, satisfazendo
$$ab = ba = 1_{\mathbb{A}}.$$
Por definição, $b \in inv(\mathbb{A})$.

□

Exemplo 4.1. *Considere a álgebra unital $\mathbb{A} = C([0,1])$. Note que*

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \notin inv(C([0,1])).$$

Suponha, por absurdo, que exista $g \in C([0,1])$, satisfazendo, para todo $x \in [0,1]$,

$$g(x).f(x) = f(x).g(x) = (x - \frac{1}{2})g(x) = 1.$$

Então,

$$g(x) = \frac{2}{2x-1}.$$

Contradição, pois g nem mesmo está definida em $x = \frac{1}{2}$.

Definição 4.2. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital. O **espectro** de um elemento $a \in \mathbb{A}$ é o conjunto*

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda.1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{A})\}.$$

Definição 4.3. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital. O complementar do espectro de um elemento é chamado de resolvente do mesmo, isto é, para $a \in \mathbb{A}$, $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.*

Exemplo 4.2. *Seja $\mathbb{A} = C(\Omega)$, onde Ω é um espaço compacto Hausdorff. Então $\sigma(f) = f(\Omega)$, para todo $f \in \mathbb{A}$.*

Demonstração. ($\subseteq$) Seja $\lambda \in \sigma(f)$, então $f - \lambda \notin inv(C(\Omega))$. Suponha que $\lambda \notin f(\Omega)$. Então, $f(x) - \lambda \neq 0$, para todo $x \in \Omega$. Note que

$$g = \frac{1}{f - \lambda}$$

está bem definida e é composição de funções contínuas. Assim, $g \in C(\Omega)$ e $f - \lambda \in inv(C(\Omega))$. Isto é uma contradição. Logo, $\lambda \in f(\Omega)$.

($\supseteq$) Considere $\mu \in f(\Omega)$. Por definição, existe um $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = \mu$. Segue que $f(x_0) - \mu = 0$. Portanto, $f - \mu \notin inv(C(\Omega))$, isto é, $\mu \in \sigma(f)$. $\square$

Exemplo 4.3. *Seja $\mathbb{A} = l^\infty(S)$, em que S é um conjunto não vazio. Então, $\sigma(f) = \overline{(f(S))}$, para todo $f \in \mathbb{A}$.*

Demonstração. ($\subseteq$) Vejamos que $\sigma(f) \subseteq \overline{(f(S))}$. Para tanto, considere $\lambda \notin \overline{(f(S))}$. Então,

$$m = d(\lambda, \overline{(f(S))}) > 0,$$

ou seja,

$$m = \inf\{|f(x) - \lambda| : x \in S\} > 0.$$

Por definição, de ínfimo, para todo $x \in S$,

$$|f(x) - \lambda| \geqslant m > 0.$$

Assim,

$$\frac{1}{|f(x) - \lambda|} \leqslant \frac{1}{m}$$

Segue que

$$(f - \lambda 1)^{-1} = \frac{1}{f - \lambda 1}$$

é limitada, isto é, $\lambda \in \rho(f)$. Logo, se $\lambda \in \sigma(f)$, tem-se que $\lambda \in \overline{(f(S))}$.

($\supseteq$) Suponhamos, por absurdo, que exista $\lambda \in \overline{(f(S))}$, tal que $\lambda \notin \sigma(f)$. Assim, existe $g \in l^{\infty}(S)$, satisfazendo $(f - \lambda 1)g = 1$.

Por definição de fecho, existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (f(S))$, tal que $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Considere o seguinte subconjunto da imagem inversa de f,

$$\{x_n \in S : f(x_n) = \lambda_n\}.$$

Note que $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então $(f(x_n) - \lambda 1) \longrightarrow 0$. Assim, $g(x_n) \longrightarrow \infty$, pois $(f - \lambda 1)g = 1$. Logo, $g \notin l^{\infty}(S)$, contradizendo a hipótese de que $\lambda \in \rho(f)$. Conclui-se que $\overline{(f(S))} \subseteq \sigma(f)$.

□

Exemplo 4.4. *Seja $\mathbb{A}$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$. Considere $a \in \mathbb{A}$, então a é da forma*

$$a = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & ... & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & ... & \lambda_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_{nn} \end{bmatrix}.$$

Segue que:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda I_n \notin inv(\mathbb{A})\}$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : det(a - \lambda I_n) = 0\}$$

$$= \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, ..., \lambda_{nn}\}.$$

Similarmente, para $\mathbb{A} = M_n(\mathbb{C})$ e $a \in \mathbb{A}$, tem-se que $\sigma(a)$ é o conjunto dos autovalores de $\mathbb{A}$.

Note que a definição de espectro generaliza simultaneamente a ideia de imagem de uma função e do conjunto de autovalores de uma matriz quadrada.

Proposição 4.1. *Se a e b são elementos de uma álgebra unital $\mathbb{A}$, então $1 - ab$ é invertível se, e somente se, $1 - ba$ é invertível. Se o elemento inverso de $1 - ab$ for denotado por c, então, o inverso de $1 - ba$ é dado por $1 + bca$.*

Demonstração. Note que

$$(1 - ba)(1 + bca) = 1 + bca - ba - b(abc)a$$

$$= 1 - ba + b((1 - ab)c)a$$

$$= 1 - ba + ba$$

$$= 1.$$

Da mesma forma, $(1 + bca)(1 - ba) = 1$. □

Observação 4.1. *Uma consequência desse fato é que $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$, para todo $a, b \in \mathbb{A}$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma(ab) \setminus \{0\}$. Então $(ab - \lambda 1) \notin inv(\mathbb{A})$ e, como $\lambda \neq 0$, tem-se que λ é invertível. Assim,

$$(-\lambda)^{-1}(ab - \lambda 1) = (1 - (\lambda^{-1}a)b) \notin inv(\mathbb{A}).$$

Pela proposição 4.1,

$$(1 - b(\lambda^{-1}a)) \notin inv(\mathbb{A}).$$

Segue que

$$(-\lambda)(1 - b(\lambda^{-1}a)) = (b(\lambda\lambda^{-1}a) - \lambda 1) = (ba - \lambda 1) \notin inv(\mathbb{A}).$$

Portanto, $\lambda \in \sigma(ba) \setminus \{0\}$. Analogamente, $\sigma(ba) \setminus \{0\} \subseteq \sigma(ab) \setminus \{0\}$. □

Vejamos que a Observação 4.1 acima não é válida para o caso $\lambda = 0$, isto é, se $0 \in \sigma(ab)$, não necessariamente, $0 \in \sigma(ba)$.

Exemplo 4.5. *Considere o espaço de Hilbert*

$$l^2(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

Sejam S, S^* pertencentes a álgebra de Banach $\mathbb{A} = B(l^2(\mathbb{N}))$ definidos das forma:

$$S : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$$

$$(a_1, a_2, a_3, ...) \longmapsto (a_2, a_3, ...)$$

$$S^* : l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow l^2(\mathbb{N})$$

$$(a_1, a_2, a_3, ...) \longmapsto (0, a_1, a_2, a_3, ...)$$

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$, então

- $$SS^*((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = S(0, a_1, a_2, a_3, ...) = (a_1, a_2, a_3, ...) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

  Portanto, $SS^* \in inv(\mathbb{A})$, isto é, $0 \notin \sigma(SS^*)$.

- $$S^*S((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = S^*(a_2, a_3, ...) = (0, a_2, a_3, ...).$$

  Segue que S^*S não é bijetora. Assim, $S^*S \notin inv(\mathbb{A})$, isto é, $0 \in \sigma(S^*S)$.

Com este exemplo, conclui-se que não se pode estender a observação acima para o caso $\lambda = 0$.

Para a demonstração do próximo teorema, será necessário o seguinte lema:

Lema 4.1. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra com unidade. Dada uma coleção $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de elementos de $\mathbb{A}$ que comutam dois a dois, tem-se que o produto $a_1.a_2.....a_n$ é invertível se, e somente se, a_i é invertível, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demonstração. (⇒) Suponha que o produto $a_1.a_2...a_n$ seja invertível, e exista um $i \in \{1, ..., n\}$, tal que $a_i \notin inv(\mathbb{A})$. Por definição, para um único $b \in \mathbb{A}$,

$$b(a_1.a_2...a_n) = (a_1.a_2...a_n)b = 1.$$

Como os elementos da álgebra $\mathbb{A}$ comutam dois a dois,

$$1 = b(a_1.a_2...a_i...a_n) = b(a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n.a_i) = (b.a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)a_i.$$

Assim como,

$$1 = (a_1.a_2...a_i...a_n)b = (a_i.a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)b = a_i(a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n.b).$$

Agora, como

$$(b.a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)a_i = 1,$$

então,

$$(b.a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)a_i(a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)b = (a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)b,$$

$$(b.a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)1 = 1(a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)b,$$

Logo, a_i é invertível e, $(a_i)^{-1} = (b.a_1.a_2...a_{i-1}.a_{i+1}...a_n)$, contradizendo a afirmação acima. Portanto, a_i é invertível, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

(⇐) A volta é imediata, pois $inv(\mathbb{A})$ é grupo. □

Constatemos que a hipótese, no Lema 4.1, de que a coleção $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de elementos de $\mathbb{A}$, comutem dois a dois, não pode ser enfraquecida, através do seguinte exemplo:

Exemplo 4.6. *Considere a álgebra de Banach $\mathbb{A} = B(l^2(\mathbb{N}))$. Sejam $S, S^* \in \mathbb{A}$, definidos como no exemplo anterior. Sabe-se que tais elementos não comutam, ou seja, $SS^* \neq S^*S$. Além disso, $S^*S \in inv(\mathbb{A})$, enquanto, S^* não é sobrejetora e, S não é injetora, ou seja, $S, S^* \notin inv(\mathbb{A})$.*

Teorema 4.1. **{*do Mapeamento Espectral* }** *Seja a um elemento de uma álgebra unital $\mathbb{A}$. Se $\sigma(a)$ é não vazio e $p \in C[z]$, então*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)).$$

Demonstração. Caso $p = \lambda_0$, polinômio constante. É imediato que $p(\sigma(a)) = \lambda_0$. Agora,

$$\sigma(p(a)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(a) - \lambda.1_A \notin inv(\mathbb{A})\},$$

$$\sigma(p(a)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda_0.1_A - \lambda.1_A \notin inv(\mathbb{A})\},$$

$$\sigma(p(a)) = \{\lambda_0\}.$$

Assim, $\sigma(p(a)) = \{\lambda_0\} = p(\sigma(a))$.

Suponha que p não seja constante. Vejamos, primeiramente, que $\sigma(p(a)) \subseteq p(\sigma(a))$.

($\subseteq$) Seja $\mu \in \mathbb{C}$, então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existem elementos $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$, com $\lambda_0 \neq 0$, satisfazendo

$$p - \mu = \lambda_0(z - \lambda_1)...(z - \lambda_n),$$

assim,

$$p(a) - \mu = \lambda_0(a - \lambda_1.1)...(a - \lambda_n.1).$$

Pelo Lema 4.1, $(p(a) - \mu.1)$ é invertível se, e somente se, $(a - \lambda_i.1) \in inv(\mathbb{A})$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo, $\mu \in \sigma(p(a))$, isto é, $(p(a) - \mu.1) \notin inv(\mathbb{A})$ se, e somente se, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $(a - \lambda_i.1) \notin inv(\mathbb{A})$, ou seja, $\lambda_i \in \sigma(a)$. Neste caso,

$$p(\lambda_i) - \mu = \lambda_0(\lambda_i - \lambda_1)...(\lambda_i - \lambda_i)...(\lambda_i - \lambda_n) = 0.$$

Portanto, $\mu = p(\lambda_i)$, isto é, $\mu \in p(\sigma(a))$.

($\supseteq$) Mostremos agora que $p(\sigma(a)) \subseteq \sigma(p(a))$. Considere $\mu \in p(\sigma(a))$, então existe $\lambda_k \in \sigma(a)$, tal que

$$\mu = p(\lambda_i).$$

Perceba que, por definição de espectro de a, tem-se que

$$(a - \lambda_k.1_A) \notin inv(\mathbb{A}).$$

Sabemos que λ_k é uma das raízes do polinômio $p - \mu$ e, pelo Teorema Fundamental da Álgebra,

$$p - \mu = \lambda_0(z - \lambda_1)...(z - \lambda_k)...(z - \lambda_n).$$

Portanto,

$$p(a) - \mu.1_A = \lambda_0(a - \lambda_1.1_A)...(a - \lambda_k.1_A)...(a - \lambda_n.1_A).$$

Pelo Lema 4.1, como $(a - \lambda_k.1_A) \notin inv(\mathbb{A})$, o produto $\lambda_0(z - \lambda_1)...(z - \lambda_k)...(z - \lambda_n)$, dado por $p(a) - \mu.1_A \notin inv(\mathbb{A})$. Logo, $\mu \in \sigma(p(a))$.

□

Exemplo 4.7. *Considere a álgebra de Banach $\mathbb{A} = C([0, 1])$ e o elemento $f \in \mathbb{A}$, dado por*

$$f(x) = 2sen(\pi x),$$

para $x \in [0, 1]$. Assim,

$$\sigma(f) = f([0, 1]) = [0, 2].$$

Agora, seja $p \in \mathbb{C}[z]$ da forma

$$p = z^2 + 1.$$

Segue que $p(a) = 4sen^2(\pi x) + 1$. Portanto,

$$\sigma(p(a)) = p(a)([0, 1]) = [1, 5].$$

Note ainda, que

$$p(\sigma(a)) = p([0,2]) = [1,5].$$

Então, de fato,

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = [1,5].$$

No exemplo seguinte, o Teorema do Mapeamento Espectral será aplicado.

Exemplo 4.8. *Seja $\mathbb{A} = M_2(\mathbb{C})$ e $b \in \mathbb{A}$, definido por*

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 + \pi \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que para $p \in \mathbb{C}[z]$ da forma

$$p = z^3 + \pi z^2 + 3$$

e, denotando,

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$b = a^3 + \pi a^2 + 31_A = p(a).$$

Como os autovalores de a são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, segue que $\sigma(a) = \{1,3\}$. Agora, pelo Teorema do Mapeamento Espectral,

$$\sigma(b) = \sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) = \{p(1), p(3)\} = \{\pi + 4, 9\pi + 30\}.$$

Teorema 4.2. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital e $a \in \mathbb{A}$, com $|| \ a \ ||< 1$. Então, $1 - a \in inv(\mathbb{A})$ e*

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Demonstração. Como a norma $|| \ . \ ||$ em $\mathbb{A}$ é submultiplicativa, tem-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} || \ a^n \ || \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} || \ a \ ||^n \ .$$

Note que a série $\sum_{n=0}^{\infty} || \ a \ ||^n$ é geométrica com razão menor que 1, por hipótese. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} || \ a \ ||^n = \frac{1}{1- || \ a \ ||} = (1- || \ a \ ||)^{-1} < \infty.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} || \ a^n \ ||< \infty$, conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é absolutamente convergente, consequentemente, convergente, pois $\mathbb{A}$ é espaço de Banach.

Digamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = b \in \mathbb{A}$. Assim,

$$(1-a)(1 + ... + a^n) = (1 + ... + a^n)(1-a) = 1 - a^{n+1}$$

converge para

$$(1-a)b = b(1-a).$$

Note que $a^{n+1} \longrightarrow 0$, pois $\| a \| < 1$. Logo, $1 - a^{n+1}$ converge para 1. Segue que b é o elemento inverso de $(1-a)$. $\square$

A série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é chamada a série de Neumann para $(1-a)^{-1}$.

Definição 4.4. *Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ álgebras de Banach, uma transformação $T : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ é dita diferenciável em $a \in \mathbb{A}$ se existe um operador linear $U : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$, satisfazendo*

$$\lim_{c \to 0} \frac{\| T(a+c) - T(a) - U(c) \|}{\| c \|} = 0.$$

Teorema 4.3. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital, então $inv(\mathbb{A})$ é aberto em $\mathbb{A}$ e, a função*

$$\eta : inv(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$a \longmapsto a^{-1}$$

é diferenciável.

Demonstração. Considere $a \in inv(\mathbb{A})$ e $b \in \mathbb{A}$, tais que

$$\| b - a \| < \| a^{-1} \|^{-1},$$

ou seja, b pertence à bola de centro a e raio $\frac{1}{\|a\|^{-1}}$. Assim,

$$\| ba^{-1} - 1 \| = \| (b-a)(a^{-1}) \| \leqslant \| b - a \| \,.\, \| a^{-1} \| < 1.$$

Segue que $\| ba^{-1} \| \neq 0$ e, pelo Teorema 4.2, $1 - (1 - ba^{-1}) = ba^{-1} \in inv(\mathbb{A})$. O Lema 4.1 garante que $b \in inv(\mathbb{A})$ e como b foi qualquer na bola, tem-se que $B_{\frac{1}{\|a\|^{-1}}}(a) \subseteq inv(\mathbb{A})$. Portanto, $inv(\mathbb{A})$ é aberto em $\mathbb{A}$.

Vejamos que η é diferenciável. Para tanto, considere $b \in \mathbb{A}$, com $\| b \| = \| -b \| < 1$. Pelo Teorema 4.2, $(1 - (-b)) = 1 + b \in inv(\mathbb{A})$. Assim, como a norma em $\mathbb{A}$ é submultiplicativa,

$$\| (1+b)^{-1} - 1 + b \| = \| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b^n - 1 + b \| =$$

$$= \| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n b^n \| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \| b \|^n .$$

Note que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \| b \|^n = \frac{1}{1 - \| b \|} - 1 - \| b \| =$$

$$= \frac{1 + (1 - \| b \|)(-1 - \| b \|)}{1 - \| b \|} = \frac{1 - 1 - \| b \| + \| b \| + \| b \|^2}{1 - \| b \|} =$$

$$= \frac{\| b \|^2}{1 - \| b \|}.$$

Logo,

$$\| (1+b)^{-1} - 1 + b \| \leqslant \frac{\| b \|^2}{1 - \| b \|}.$$

Seja $a \in inv(\mathbb{A})$ e suponha que $\| c \| < \frac{1}{2} \| a^{-1} \|^{-1}$. Então,

$$\| a^{-1}c \| < \frac{1}{2} < 1,$$

substituindo $b = a^{-1}c$ na fórmula anterior,

$$\| (1 + a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c \| \leqslant \frac{\| a^{-1}c \|^2}{1 - \| a^{-1}c \|}.$$

Como

$$1 - \| a^{-1}c \| > \frac{1}{2},$$

tem-se que

1. $$\frac{1}{1 - \| a^{-1}c \|} < 2.$$

Disso, segue que

$$\frac{\| a^{-1}c \|}{1 - \| a^{-1}c \|} \leqslant 2 \| a^{-1}c \|^2 .$$

Portanto,

$$\| (1 + a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c \| \leqslant 2 \| a^{-1}c \|^2 .$$

Defina o operador linear

$$L : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$b \longmapsto -a^{-1}ba^{-1}.$$

Por (1),

$$\| (a+c)^{-1} - a^{-1} - L(c) \| = \| (1 + a^{-1}c)^{-1}a^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1} \| \leqslant$$

$$\leqslant \| (1 + a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c \| . \| a^{-1} \| \leqslant$$

$$\leqslant 2(\| a^{-1} \|^3 . \| c \|^2) = 0.$$

Logo,

$$0 \leqslant \lim_{c \to 0} \frac{\| (a+c)^{-1} - a^{-1} - L(c) \|}{\| c \|} \leqslant \lim_{c \to 0} 2 \| a^{-1} \|^3 \| c \|^2 = 0.$$

Segue que η é diferenciável em $a \in inv(\mathbb{A})$, com $\eta\prime(a) = L$. $\square$

Lema 4.2. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital e $a \in \mathbb{A}$. O espectro de a, $\sigma(a)$, é um subconjunto fechado do disco, de centro na origem e raio $\| a \|$ no plano. Além disso, a transformação*

$$R_a : \rho(a) \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$\lambda \longmapsto (a - \lambda.1)^{-1}$$

é diferenciável.

Demonstração. Se $|\lambda| > \| a \|$, então $\| \lambda^{-1}a \| < 1$. Pelo Teorema 4.2, $(1 - \lambda^{-1}a)$ é invertível. Como λ também o é,

$$\lambda(1 - \lambda^{-1}a) = \lambda - a \in inv(\mathbb{A}).$$

Logo, $\lambda \in \rho(a)$.

Consequentemente, se $\lambda \in \sigma(a)$, então $|\lambda| \leqslant \| a \|$. Defina

$$\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$\lambda \longmapsto \lambda - a.$$

Note que ψ é contínua e, como $inv(\mathbb{A})$ é aberto de $\mathbb{A}$, tem-se que a imagem inversa de ψ em $inv(\mathbb{A})$ é um aberto de $\mathbb{C}$. Portanto, $\mathbb{C} \setminus \psi^{-1}(inv(\mathbb{A}))$ é fechado de $\mathbb{C}$.

Afirmação 4.2. $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \psi^{-1}(inv(\mathbb{A}))$.

Demonstração. ($\subseteq$) Seja $\lambda \in \sigma(a)$, então $\lambda - a \notin inv(\mathbb{A})$. Por definição, $\lambda \notin \psi^{-1}(inv(\mathbb{A}))$. Assim, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \psi^{-1}(inv(\mathbb{A}))$.

($\supseteq$) Agora, considere $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \psi^{-1}(inv(\mathbb{A}))$. Segue que $\psi(\lambda) \notin inv(\mathbb{A})$, ou seja, $\lambda - a \notin inv(\mathbb{A})$. Assim, $\lambda \in \sigma(a)$. □

Pela Afirmação 4.2, conclui-se que $\sigma(a)$ é fechado. O Teorema 4.3 implica a diferenciabilidade de

$$\phi : inv(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$a \longmapsto a^{-1}.$$

A restrição de ψ,

$$\psi : \psi^{-1}(inv(\mathbb{A})) \longrightarrow inv(\mathbb{A})$$

$$\lambda \longmapsto a - \lambda$$

também é diferenciável e, assim, tal propriedade vale para a composição

$$\phi \circ \psi \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$\lambda \longmapsto (a - \lambda)^{-1}.$$

□

Assumiremos o teorema e o corolário seguinte, que podem pode ser vistos no livro [2], em seguida, provaremos alguns lemas para que possa ser demonstrado o Teorema de Gelfand, que é considerado o Teorema Fundamental de Álgebras de Banach.

Teorema 4.4. **{*Funcional linear limitado*}** *Sejam X um espaço normado e $x_0 \neq 0$ um elemento qualquer de X. Então, existe um funcional linear limitado*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{C},$$

satisfazendo, $\| f \| = 1$ *e* $f(x_0) = \| x_0 \|$.

Corolário 4.1. *Para todo elemento* x *em um espaço normado* X*, tem-se*

$$\| x \| = \sup_{f \in X^*, \|f\|=1} |f(x)|.$$

Assim, se x_0 *é tal que* $f(x_0) = 0$ *para todo* $f \in X^*$*, então* $x_0 = 0$.

Relembrando o **Teorema de Liouville**:

Teorema 4.5. *Seja* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma função analítica. Se existe um número* $K \geqslant 0$ *tal que* $|f(z)| \leqslant K$*, para todo* $z \in \mathbb{C}$*, então* f *é uma função constante.*

Lema 4.3. *Considerando* R_a*, como no Lema* 4.2*,*

$$R_a : \rho(a) \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$\lambda \longmapsto (a - \lambda.1)^{-1},$$

tem-se que

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \| R_a(\lambda) \| = 0.$$

Demonstração. Suponha que $|\lambda| > 2 \| a \|$. Então,

$$|\lambda^{-1}|.|\lambda| > 2|\lambda^{-1}|. \| a \|$$

$$\frac{1}{2} > \| \lambda^{-1} a \|$$

$$- \| \lambda^{-1} a \| > \frac{-1}{2}$$

$$1 - \| \lambda^{-1} a \| > \frac{1}{2}$$

$$(1 - \| \lambda^{-1} a \|)^{-1} < 2.$$

Agora, como $\| \lambda^{-1} a \| < \frac{1}{2} < 1$,

$$\| (1 - \lambda^{-1} a)^{-1} - 1 \| = \| \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1} a)^n - 1 \| =$$

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^{-1} a)^n \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| \lambda^{-1} a \|^n =$$

$$\frac{1}{1 - \| \lambda^{-1} a \|} - 1 = \frac{1 - (1 - \| \lambda^{-1} a \|)}{1 - \| \lambda^{-1} a \|} =$$

$$\frac{\| \lambda^{-1} a \|}{1 - \| \lambda^{-1} a \|} < 2 \| \lambda^{-1} a \| < 2 \frac{1}{2} = 1.$$

Como

$$\| (1 - \lambda^{-1} a)^{-1} - 1 \| < 1,$$

tem-se, pela desigualdade triangular, que:

$$\| (1-\lambda^{-1}a)^{-1} \| = \| (1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1 + 1 \| \leqslant \| (1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1 \| + \| 1 \| < 1 + 1 = 2.$$

Assim,

$$\| R_a(\lambda) \| = \| (a-\lambda 1)^{-1} \| = \| (\lambda(a\lambda^{-1}-1))^{-1} \| =$$

$$= \| \lambda^{-1}(a\lambda^{-1}-1)^{-1} \| = \| \lambda^{-1}(1-a\lambda^{-1})^{-1} \| \leqslant |\lambda^{-1}| \, \| (1-a\lambda^{-1})^{-1} \| < 2|\lambda^{-1}|.$$

Segue que

$$0 \leqslant \lim_{|\lambda|\to\infty} \| R_a(\lambda) \| \leqslant \lim_{|\lambda|\to\infty} 2|\lambda^{-1}| = 0.$$

□

Lema 4.4. *Denotamos por $\mathbb{A}^*$ o conjunto de todos os funcionais lineares limitados de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{C}$. Se $\varphi \in \mathbb{A}^*$, então $\varphi \circ R_a : \rho(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica.*

Demonstração. Seja $\mu \in \rho(a)$. Já foi demonstrado que o resolvente de a é aberto de $\mathbb{C}$. Assim, existe um $\delta > 0$, tal que se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda - \mu| < \delta$, então $\lambda \in \rho(a)$. Para tal λ,

$$(\lambda-\mu)R_a(\lambda)R_a(\mu) = R_a(\lambda)(\lambda-\mu)R_a(\mu) =$$

$$R_a(\lambda)((a-\mu 1)-(a-\lambda 1))R_a(\mu) =$$

$$R_a(\lambda)(a-\mu 1)R_a(\mu) - R_a(\lambda)(a-\lambda 1)R_a(\mu) =$$

$$R_a(\lambda)(R_a(\mu))^{-1}R_a(\mu) - R_a(\lambda)(R_a(\lambda))^{-1}R_a(\mu) =$$

$$R_a(\lambda) - R_a(\mu).$$

Como φ e R_a são contínuas,

$$\lim_{\lambda\to\mu} \frac{\varphi \circ R_a(\lambda) - \varphi \circ R_a(\mu)}{\lambda-\mu} =$$

$$\lim_{\lambda\to\mu} \varphi(\frac{R_a(\lambda)-R_a(\mu)}{\lambda-\mu}) =$$

$$\lim_{\lambda\to\mu} \varphi(R_a(\lambda)R_a(\mu)) =$$

$$\varphi(R_a(\mu)^2).$$

Portanto, $\varphi \circ \mathbb{R}_a$ é diferenciável em μ. Como μ foi arbitrário no domínio de $\varphi \circ \mathbb{R}_a$, função com valores complexos, tem-se que $\varphi \circ R_a$ é analítica.

□

Teorema 4.6. {*de Gelfand*} *Se a é um elemento de uma álgebra de Banach unital $\mathbb{A}$, então o espectro de a é não vazio.*

Demonstração. Considere $a \in \mathbb{A}$ e suponha, por absurdo, que $\sigma(a) = \emptyset$. Assim, por definição, $\rho(a) = \mathbb{C}$.

Seja $\varphi \in A^*$, pelo Lema 4.4,

$$\varphi \circ R_a : \mathbb{C}(= \rho(a)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

é uma função inteira, isto é, analítica sobre $\mathbb{C}$. Vejamos que $\varphi \circ R_a$ é limitada. Para tanto, note que, como φ é contínua,

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \varphi \circ R_a(\lambda) = \varphi(\lim_{|\lambda| \to \infty} R_a(\lambda)) = \varphi(0) = 0.$$

Pela definição de limite, existe um $M > 0$, tal que se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| > M$, então

$$|\varphi \circ R_a(\lambda)| \leqslant 1.$$

Disso, segue que $\varphi \circ R_a$ é limitada em $\mathbb{C} \setminus B_M(0)$. Agora, como $\overline{B}_M(0)$ é compacta e $\varphi \circ R_a$ é contínua, tem-se que $\varphi \circ R_a(\overline{B}_M(0))$ é compacta e, portanto, limitada. Logo, $\varphi \circ R_a$ é limitada em $\mathbb{C}$, sendo assim, limitada.

Aplicando o **Teorema de Liouville**, como $\varphi \circ R_a$ é analítica e limitada, esta é constante. Portanto, $\varphi \circ R_a \equiv 0$.

Como $\sigma(a) = \emptyset$, $a - 0.1_{\mathbb{A}} \in inv(\mathbb{A})$. Portanto, a é invertível e, claramente, $a^{-1} \neq 0$. Pelo **Teorema do funcional linear limitado**, existe $\varphi \in \mathbb{A}^*$, tal que

$$\varphi(a^{-1}) = || a^{-1} || \neq 0.$$

Assim, da maneira como a função R_a foi definida,

$$0 = \varphi \circ R_a(0) = \varphi(a^{-1}) \neq 0,$$

o que é uma contradição. Segue que $\sigma(a) \neq \emptyset$. $\square$

É importante observar que o teorema acima não é válido para álgebras sobre um corpo dos números reais. Para tanto, tem-se o seguinte exemplo:

Exemplo 4.9. *Considere a álgebra de Banach unital sobre* $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{A} = M_2(\mathbb{R})$$

e o elemento $a \in \mathbb{A}$ *da forma*

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{R} : a - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{A})\} =$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{R} : det(a - \lambda I_2) = 0\} =$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda^2 + 1 = 0\} =$$

$$= \emptyset.$$

Teorema 4.7. **{*Gelfand-Mazur* }** *Se* $\mathbb{A}$ *é uma álgebra de Banach unital na qual todo elemento não nulo é invertível, então*

$$\mathbb{A} = \mathbb{C}1_{\mathbb{A}}.$$

Demonstração. ($\subseteq$) Considere $a \in \mathbb{A}$. Como $\mathbb{A}$ é álgebra de Banach unital, pelo Teorema de Gelfand, $\sigma(a) \neq \emptyset$. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que

$$a - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{A}).$$

Por hipótese, todo elemento não nulo de $\mathbb{A}$ é invertível. Assim,

$$a - \lambda 1_{\mathbb{A}} = 0_{\mathbb{A}},$$

o que implica

$$a = \lambda 1_{\mathbb{A}}.$$

Segue que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}1_{\mathbb{A}}$.

($\supseteq$) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\lambda 1_{\mathbb{A}} \in \mathbb{A}$. Portanto, $\mathbb{C}1_{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{A}$ e segue a igualdade. $\square$

5 Raio espectral

Nesta seção, além da definição e de propriedades de raio espectral, será demonstrado o teorema de Beurling. Além disso, será apresentada a unitização de uma álgebra sem unidade.

Definição 5.1. *Sendo $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital e um elemento $a \in \mathbb{A}$. O* ***raio espectral de*** *a é definido por*

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Proposição 5.1. *Considerando $\mathbb{A}$ como na definição acima. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{A}$, tem-se que*

$$r(ab) = r(ba).$$

Demonstração. Já foi demonstrado que $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$. Como $\mathbb{A}$ é uma álgebra de Banach unital, $\sigma(ab) \neq \emptyset$ e $\sigma(ba) \neq \emptyset$.

- Caso $\sigma(ab) = \{0\}$. Sabendo que $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$. Há duas opções: $\sigma(ba) = \{0\}$ ou $\sigma(ba) = \emptyset$. Entretanto, a segunda alternativa contradiz o Teorema de Gelfand. Logo,

$$\sup_{\lambda \in \sigma(ab)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(ba)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \{0\}} |\lambda| = 0,$$

$$r(ab) = r(ba) = 0.$$

- Demais casos, como $\sigma(ab) \setminus \{0\} \subseteq \sigma(ab)$, segue que

$$\sup_{\lambda \in \sigma(ab)\setminus\{0\}} |\lambda| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(ab)} |\lambda| = r(ab).$$

Se $0 \in \sigma(ab)$, tem-se que

$$|0| \leqslant |\lambda|,$$

para todo $\lambda \in \sigma(ab)$. Logo,

$$r(ab) = \sup_{\lambda \in \sigma(ab)} |\lambda| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(ab)\setminus\{0\}} |\lambda|.$$

Portanto,

$$\sup_{\lambda \in \sigma(ab)\setminus\{0\}} |\lambda| = r(ab).$$

Analogamente,

$$\sup_{\lambda \in \sigma(ba)\setminus\{0\}} |\lambda| = r(ba).$$

Assim,

$$r(ab) = \sup_{\lambda \in \sigma(ab)\setminus\{0\}} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(ba)\setminus\{0\}} |\lambda| = r(ba).$$

□

Exemplo 5.1. *Considere $\mathbb{A} = C(\Omega)$, sendo Ω um espaço compacto Hausdorff, então*

$$r(f) = \| f \|_\infty,$$

para todo $f \in \mathbb{A}$.

Demonstração. Já foi provado que o espectro de um elemento $f \in \mathbb{A}$ é sua imagem, isto é, $\sigma(f) = f(\Omega)$. Agora, pela definição de raio espectral,

$$r(f) = \sup_{\lambda \in \sigma(f)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in f(\Omega)} |\lambda| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \| f \|_\infty .$$

$\square$

Exemplo 5.2. *Seja $\mathbb{A} = M_2(\mathbb{C})$ e $a \in \mathbb{A}$, dado por*

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que $r(a) = 0$, pois o único autovalor de a é $\lambda = 0$. Entretanto, para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\| a \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| a(x) \| = \sup_{\|(x_1,x_2)\| \leqslant 1} \| (x_2, 0) \| = 1.$$

Lema 5.1. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital e $a \in \mathbb{A}$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda| > \| a \|$, então o operador $a - \lambda 1_{\mathbb{A}}$ é invertível e*

$$(a - \lambda 1_{\mathbb{A}})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Demonstração. Como $|\lambda| > \| a \| \geqslant 0$, tem-se que $\lambda \neq 0$, sendo assim, invertível em $\mathbb{C}$. Portanto,

$$-\lambda^1 (a - \lambda 1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{A}} - \frac{a}{\lambda}.$$

Denote

$$b = 1_{\mathbb{A}} - \frac{a}{\lambda}.$$

Note que

$$\| 1_{\mathbb{A}} - b \| = \| 1_{\mathbb{A}} - (1_{\mathbb{A}} - \frac{a}{\lambda}) \| = \| \frac{a}{\lambda} \| < \| a \| \frac{1}{\| a \|} = 1.$$

Segue, pelo Teorema 4.2, que

$$1_{\mathbb{A}} - (1_{\mathbb{A}} - b) \in inv(\mathbb{A})$$

e

$$b^{-1} = (1_{\mathbb{A}} - (1_{\mathbb{A}} - b))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1_{\mathbb{A}} - b)^n.$$

Como $b = 1_{\mathbb{A}} - \frac{a}{\lambda}$.

$$b^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1_{\mathbb{A}} - (1_{\mathbb{A}} - \frac{a}{\lambda}))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n}.$$

Colocando $-\lambda^{-1}$ em evidência, segue que b pode ser reescrito da forma

$$b = -\lambda^{-1}(a - \lambda 1_{\mathbb{A}})$$
$$-\lambda b = (a - \lambda 1_{\mathbb{A}})$$
$$-\lambda^{-1}b^{-1} = (a - \lambda 1_{\mathbb{A}})^{-1}.$$

Logo,

$$(a - \lambda 1_{\mathbb{A}})^{-1} = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\lambda^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

□

O teorema seguinte será assumido. Sua demonstração pode ser vista na referência [2]. Ele será utilizado na prova do lema abaixo.

Teorema 5.1. ***{Princípio da limitação uniforme}*** *Sejam X e Y espaços de Banach e $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de operadores lineares limitados*

$$T_\lambda : X \longrightarrow Y.$$

Se para todo $x \in X$, existe um $M_x > 0$ tal que

$$\| T_\lambda x \| \leqslant M_x,$$

para todo $\lambda \in \Lambda$. Então existe um $M > 0$ tal que

$$\| T_\lambda \| \leqslant M,$$

para todo $\lambda \in \Lambda$.

Lema 5.2. *Seja X um espaço normado e $S \subseteq X$ um conjunto fracamente limitado, isto é, $\varphi(S)$ é um conjunto limitado de $\mathbb{C}$, para todo $\varphi \in X^*$. Então, S é subconjunto limitado de X.*

Demonstração. O bidual de X é da forma

$$X^{**} = \{\psi : X^* \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, \psi \text{ é funcional linear contínuo } \}.$$

Considere a família

$$\{\pi_x : x \in S\},$$

tal que

$$\pi_x : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(x).$$

Pelo Corolário 4.1, como $\varphi \in X^*$,

$$\| \pi_x \| = \sup_{\varphi\in X^* \|\varphi\|=1} |\pi_x(\varphi)| = \sup_{\varphi\in X^* \|\varphi\|=1} |\varphi(x)| = \| x \| .$$

Disso segue que os operadores π_x são operadores lineares limitados e, portanto, contínuos. Logo,

$$\{\pi_x : x \in S\} \subseteq X^{**}.$$

Por hipótese, para todo $\varphi \in X^*$,

$$\{\varphi(x) : x \in S\}$$

é limitado, isto é, existe um M_φ tal que

$$|\varphi(x)| < M_\varphi,$$

para todo $x \in S$. Como o dual X^* de um espaço normado X é completo, assim como $\mathbb{C}$. Pelo Princípio da limitação uniforme, existe um $M > 0$, tal que

$$\| \pi_x \| < M,$$

para todo $x \in S$.

Portanto,

$$\| x \| = \| \pi_x \| < c,$$

para todo $x \in S$. Segue que S é um subconjunto limitado de X. $\square$

Teorema 5.2. {*Beurling*} *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital e um elemento $a \in \mathbb{A}$. Então,*

$$r(a) = \inf\{\| a^n \|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}} .$$

Demonstração. Mostremos que

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}}(\| a_n \|^{\frac{1}{n}}) \leqslant r(a) \leqslant \liminf_{n\in\mathbb{N}}(\| a_n \|^{\frac{1}{n}}).$$

Seja $\lambda \in \sigma(a)$. Pelo Teorema 4.1,

$$\lambda^n \in \sigma(a^n).$$

Como

$$\sigma(a^n) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leqslant \| a^n \|\},$$

tem-se que $|\lambda^n| \leqslant \| a^n \|$. Assim,

$$|\lambda| \leqslant \| a^n \|^{\frac{1}{n}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $|\lambda|$ é cota inferior da sequência $(\| a^n \|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$, segue que, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda| \leqslant \inf\{\| a^n \|^{\frac{1}{n}} : n \geqslant N\}.$$

Assim,

$$|\lambda| \leqslant \sup_{N\to\infty}\{\inf\{\| a^n \|^{\frac{1}{n}} : n \geqslant N\}\} = \liminf_{n\in\mathbb{N}}(\| a_n \|^{\frac{1}{n}}).$$

Tomando o supremo em $\lambda \in \sigma(a)$, obtém-se que

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \leqslant \liminf_{n \in \mathbb{N}} (\| a_n \|^{\frac{1}{n}}).$$

Disso, seque a segunda desigualdade. Para a primeira, considere $\varphi \in A^*$. Já foi demonstrado que

$$\varphi \circ R_a : \rho(a) \longrightarrow \mathbb{C}$$

é analítica e que

$$\sigma(a) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| \leqslant \| a \|\}.$$

Portanto, $\varphi \circ R_a$ pode ser representada como série de Laurent em torno da origem em

$$D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \| a \|\} \subseteq \rho(a).$$

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, com $|\lambda| > \| a \|$. Pelo Lema 5.1, tem-se que

$$R_a(\lambda) = (a - \lambda 1_{\mathbb{A}})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}} = -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n}.$$

Pela linearidade e continuidade de φ,

$$\varphi \circ R_a(\lambda) = \varphi(-\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n}) = -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{\lambda^n}.$$

Sendo esta a série de Laurent de $\varphi \circ R_a$ em torno da origem no conjunto D.

Note que D está contido no aberto

$$U = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| > r(a)\} \subseteq \rho(a)$$

e $\varphi \circ R_a$, assim como a extensão da expansão de Laurent, ver referência [5], são funções analíticas em U. Como estas coincidem em D, pelo princípio da coincidência, a expansão de Laurent de $\varphi \circ R_a$ desta forma é válida não só em D, mas em U. Assim,

$$\varphi \circ R_a(\lambda) = -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{\lambda^n},$$

para todo $\lambda \in \rho(a)$ com $|\lambda| > r(a)$.

Para um tal λ, como a série é convergente, a sequência $(\varphi(a^n)\lambda^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, sendo assim, limitada. Portanto, o conjunto

$$S = \{a^n \lambda^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{A}$$

é tal que

$$\{\varphi(b) | b \in S\} \subseteq \mathbb{C}$$

é limitado, para todo $\varphi \in \mathbb{A}^*$. Conclui-se que S é fracamente limitado. Pelo Lema 5.2, S é limitado. Logo, existe $M_\lambda > 0$ tal que

$$|| a^n \lambda^{-n} || \leqslant M_\lambda,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$|| a^n || \leqslant M_\lambda |\lambda|^n,$$

$$|| a^n ||^{\frac{1}{n}} \leqslant M_\lambda^{\frac{1}{n}} |\lambda|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} || a^n ||^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} M_\lambda^{\frac{1}{n}} |\lambda|.$$

Agora,

$$\limsup_{n\to\infty} M^{\frac{1}{n}} = 1,$$

pois, pela continuidade e injetividade da função ln,

$$\lim_{n\to\infty} ln(M^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} ln(M) = 0 = ln(1) = ln(\lim_{n\to\infty} M^{\frac{1}{n}}).$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} || a^n ||^{\frac{1}{n}} \leqslant |\lambda|.1 = |\lambda|,$$

para todo $\lambda \in \rho(a)$ com $|\lambda| > r(a)$. Defina o conjunto

$$E = \{|\lambda| : \lambda \in \rho(a)\}.$$

Considere a sequência $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, com $\lambda_k = r(a) + \frac{1}{k}$. Note que $|\lambda_k| \geqslant r(a)$. Portanto, $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \rho(a)$ e assim, $(|\lambda_k|)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$, com com

$$|\lambda_k| \longrightarrow r(a).$$

Como vimos acima,

$$\limsup_{n\to\infty} || a^n ||^{\frac{1}{n}} \leqslant |\lambda_k|,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\limsup_{n\to]\infty} || a^n ||^{\frac{1}{n}} \leqslant r(a).$$

Como

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} (|| a^n ||^{\frac{1}{n}}) \leqslant r(a) \leqslant \liminf_{n\in\mathbb{N}} (|| a^n ||^{\frac{1}{n}})$$

e

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} (|| a^n ||^{\frac{1}{n}}) \leqslant \limsup_{n\in\mathbb{N}} (|| a^n ||^{\frac{1}{n}}),$$

tem-se que

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} (|| a^n ||^{\frac{1}{n}}) = \limsup_{n\in\mathbb{N}} (|| a^n ||^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} (|| a^n ||^{\frac{1}{n}}) = r(a).$$

□

Teorema 5.3. *Considere $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital e $\mathbb{B}$, uma subálgebra fechada de $\mathbb{A}$, contendo $1_{\mathbb{A}}$. Então,*

1. *O conjunto $inv(\mathbb{B})$ é aberto e fechado de $\mathbb{B} \cap inv(\mathbb{A})$.*

2. *Se $b \in \mathbb{B}$, tem-se que*
$$\sigma_{\mathbb{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{B}}(b) \qquad e \qquad \delta\sigma_{\mathbb{B}}(b) \subseteq \delta\sigma_{\mathbb{A}}(b),$$
sendo que δ denota a fronteira do conjunto em questão.

Demonstração. Para demonstrar a primeira parte, vejamos que $inv(\mathbb{B})$ é aberto. Note que, por definição, $inv(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B}$. Além disso, como $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$, tem-se que $inv(\mathbb{B}) \subseteq inv(\mathbb{A})$. Conclui-se que $inv(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B} \cap inv(\mathbb{A})$.

Considere $b \in inv(\mathbb{B})$. Já foi demonstrado que como $\mathbb{B}$ é álgebra de Banach unital, $inv(\mathbb{B})$ é aberto em $\mathbb{B}$. Assim, existe um $r > 0$ tal que $B_r(b) \subseteq inv(\mathbb{B}) \subseteq \mathbb{B} \cap inv(\mathbb{A})$. Logo, todo ponto de $inv(b)$ é ponto interior de $\mathbb{B} \cap inv(\mathbb{A})$.

Mostremos agora que $inv(B)$ é fechado. Seja $b \in \mathbb{B} \cap inv(\mathbb{A})$ um ponto de acumulação de $inv(\mathbb{B})$. Por definição, existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq inv(\mathbb{B})$, com $b_n \longrightarrow b$. Como a função

$$f : inv(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$b \longrightarrow b^{-1}$$

é contínua, segue que
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(b_n) = f(\lim_{n \longrightarrow \infty} b_n) = f(b),$$
isto é,
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (b_n)^{-1} = (\lim_{n \longrightarrow \infty} b_n)^{-1} = b^{-1} \in \mathbb{A}.$$
Agora, a sequência $(b_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{B}$ que é fechado. Portanto, $b^{-1} \in \mathbb{B}$. Segue que $b \in inv(\mathbb{B})$, consequentemente, $inv(\mathbb{B})$ contém todos os seus pontos de acumulação em $\mathbb{B} \cap inv(\mathbb{A})$. Logo, $inv(\mathbb{B})$ é fechado no mesmo.

No segundo item, para mostrar a primeira continência, considere $\lambda \in \rho_{\mathbb{B}}(b)$, então

$$b - \lambda 1_{\mathbb{A}} \in inv(\mathbb{B}) \subseteq inv(\mathbb{A}).$$

Logo, $\lambda \in \rho_{\mathbb{A}}(b)$ e, portanto, $\rho_{\mathbb{B}}(b) \subseteq \rho_{\mathbb{A}}(b)$.

Perceba que, se
$$\mu \in \sigma_{\mathbb{A}}(b) = \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathbb{A}}(b),$$
necessariamente,
$$\mu \in \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathbb{B}}(b) = \sigma_{\mathbb{B}}(b),$$
ou seja,
$$\sigma_{\mathbb{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{B}}(b).$$

Para a segunda parte, temos que como $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são álgebras de Banach unitais, $\sigma_{\mathbb{A}}$ e $\sigma_{\mathbb{B}}(b)$ são fechados de $\mathbb{C}$. Portanto,

$$\delta\sigma_{\mathbb{B}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{B}}(b)$$

e,

$$\delta\sigma_{\mathbb{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{A}}(b).$$

Seja $\lambda \in \delta\sigma_{\mathbb{B}}(b)$. Como $\sigma_{\mathbb{B}}(b)$ e $\rho_{\mathbb{B}}(b)$ são complementares, $\delta\sigma_{\mathbb{B}}(b) = \delta\rho_{\mathbb{B}}(b)$. Disso, segue que λ é ponto de acumulação de $\rho_{\mathbb{B}}(b)$.

Por definição, existe uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \rho_{\mathbb{B}}(b)$, com $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Além disso, $b - \lambda_n \in inv(\mathbb{B})$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\lambda \in \delta\sigma_{\mathbb{B}}(b) \subseteq \sigma_{\mathbb{B}}(b)$, tem-se que $b - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{B})$. Note que $b - \lambda 1_{\mathbb{A}}$ é ponto de acumulação de $inv(\mathbb{B})$, pois $(b - \lambda_n 1_{\mathbb{A}}) \longrightarrow b - \lambda 1_{\mathbb{A}}$. Por (1), $b - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin \mathbb{B} \cap inv(\mathbb{A})$, pois $inv(\mathbb{B})$ é fechado no mesmo e $b - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{B})$. Conclui-se que $b - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{A})$, isto é, $\lambda \in \sigma_{\mathbb{A}}(b)$.

Perceba que $b - \lambda_n \in inv(\mathbb{B}) \subseteq inv(A)$, então $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \rho_{\mathbb{A}}(b)$ e, como $\lambda_n \longrightarrow \lambda \in \sigma_{\mathbb{A}}(b)$, segue que $\lambda \in \delta\sigma_{\mathbb{A}}(b)$.

□

Proposição 5.2. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra normada, com ou sem unidade. Considere a soma direta de espaços vetoriais*

$$\mathbb{A}^+ = \mathbb{A} \oplus \mathbb{C},$$

com operação produto e norma definidas para (a, λ), $(b, \mu) \in \mathbb{A}^+$ da seguinte forma:

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu),$$

$$|| (a, \lambda) || = || a || + |\lambda|.$$

Disso, segue que:

1. *$\mathbb{A}^+$ é uma álgebra normada com unidade dada por $(0, 1)$. Além disso, se $\mathbb{A}$ for de Banach, o mesmo vale para $\mathbb{A}^+$.*

2. *$\mathbb{A}$ é isometricamente isomorfo $\{(a, 0) : a \in \mathbb{A}\}$, que, por sua vez, é uma subálgebra de A^+.*

Demonstração. Mostremos o primeiro item. Primeiramente, vejamos que $\mathbb{A}^+$ é uma álgebra. Claro que $\mathbb{A}^+$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Agora:

- Para (a, λ), (b, μ), $(c, \beta) \in \mathbb{A}^+$:

$$(a, \lambda)((b, \mu)(c, \beta)) = (a, \lambda)(bc + \mu c + \beta b, \mu\beta) =$$

$$= (a(bc + \mu c + \beta b) + \lambda(bc + \mu c + \beta b) + \mu\beta a, \lambda\mu\beta) =$$

$$= (abc + \mu ac + \beta ab + \lambda bc + \lambda\mu c + \lambda\beta b + \mu\beta a, \lambda\mu\beta) =$$

$$= (((ab + \lambda b + \mu a)c + \lambda\mu c + \beta(ab + \lambda b + \mu a), \lambda\mu\beta) =$$

$$= (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)(c, \beta) =$$

$$= ((a, \lambda)(b, \mu))(c, \beta).$$

Note que $(0,1)$ é unidade de $\mathbb{A}^+$, pois

- $(a,\lambda)(0,1) = (a.0 + \lambda.0 + 1.a, \lambda.1) = (a,\lambda)$;
- $(0,1)(a,\lambda) = (0.a + 1.a + \lambda.0, 1.\lambda) = (a,\lambda)$.

Mostremos que $\| (a,\lambda) \| = \| a \| + |\lambda|$ é norma submultiplicativa em $\mathbb{A}^+$:

- $\| (a,\lambda) \| = \| a \| + |\lambda| \geqslant 0$.
- $\| (a,\lambda) \| = 0 \Leftrightarrow \| a \| + |\lambda| = 0 \Leftrightarrow \| a \| = 0$ e $|\lambda| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ e $\lambda = 0 \Leftrightarrow (a,\lambda) = (0,0)$.
- $\| \mu(a,\lambda) \| = \| (\mu a, \mu\lambda) \| = \| \mu a \| + |\mu\lambda| = |\mu| \, \| a \| + |\mu||\lambda| = |\mu|(\| a \| + |\lambda|) = |\mu| \, \| (a,\lambda) \|$.
- $\| (a,\lambda) + (b,\mu) \| = \| (a+b, \lambda+\mu) \| = \| a+b \| + |\lambda+\mu| \leqslant$

$$\leqslant \| a \| + \| b \| + |\lambda| + |\mu| = (\| a \| + |\lambda|) + (\| b \| + |\mu|) = \| (a,\lambda) \| + \| (b,\mu) \| .$$

- $\| (a,\lambda)(b,\mu) \| = \| (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \| =$

$$\| ab + \lambda b + \mu a \| + |\lambda\mu| \leqslant \| ab \| + \| \lambda b \| + \| \mu a \| + |\lambda\mu| \leqslant$$

$$\leqslant \| a \| . \| b \| + |\lambda| \, \| b \| + |\mu| \, \| a \| + |\lambda|.|\mu| =$$

$$= (\| a \| + |\lambda|)(\| b \| + |\mu|) = \| (a,\lambda) \| . \| (b,\mu) \| .$$

Como $\mathbb{A}$ é álgebra normada e $\| (0,1) \| = \| 0 \| + |1| = 1$, segue que $\mathbb{A}$ é algebra normada unital. Por último, vejamos que se $\mathbb{A}$ é Banach, $\mathbb{A}^+$ também o é. Para tanto, considere $(a_n, \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{A}^+$ sequência de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$. Por definição, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n > n_0$,

$$\| (a_m, \lambda_m) - (a_n, \lambda_n) \| < \varepsilon.$$

Como

$$\| am - an \| + |\lambda_m - \lambda_n| = \| (a_m - a_n, \lambda_m - \lambda_n) \| < \varepsilon,$$

tem-se que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$, respectivamente. Sendo $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ espaços de Banach, tais sequências são convergentes, digamos

$$a_n \longrightarrow a \in \mathbb{A},$$

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda \in \mathbb{C}.$$

Assim, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| a_n - a \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n > n_1$ e,

$$|\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n > n_2$.

Escolha $N = \max\{n_1, n_2\}$. Segue que, para todo $n > N$,

$$\| (a_n, \lambda_n) - (a, \lambda) \| = \| (a_n - a, \lambda_n - \lambda) \| = \| a_n - a \| + |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Claramente, $(a, \lambda) \in \mathbb{A}^+$. Portanto, A^+ é Banach.

Para o segundo item, note que o conjunto $D = \{(a, 0) : a \in \mathbb{A}\}$ é subálgebra de $\mathbb{A}^+$, pois para $a, b \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in D$;
- $\lambda(a, 0) = (\lambda a, 0) \in D$;
- $(a, 0)(b, 0) = (ab + 0.b + 0.a, 0.0) = (ab, 0) \in D$.

Considere

$$\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow D$$

$$a \longmapsto (a, 0).$$

Mostremos que φ é isometria. De fato, para $a, b \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$;
- $\varphi(\lambda a) = (\lambda a, 0) = \lambda(a, 0) = \lambda\varphi(a)$;
- $\varphi(a.b) = (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) = \varphi(a).\varphi(b)$.
- $\| \varphi(a) \| = \| (a, 0) \| = \| a \| + |0| = \| a \|$.

φ ser isometria implica injetividade. Note ainda que tal função é sobrejetora, pois, se $z \in D$, então $z = (b, 0)$ para algum $b \in \mathbb{A}$. Portanto, $\varphi(b) = (b, 0) = z$. $\square$

Exemplo 5.3. *Considere a álgebra sem unidade*

$$\mathbb{A} = C_0(0, 1) = \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Pela Proposição 5.2*,*

$$A^+ = C_0(0, 1) \oplus \mathbb{C}.$$

Além disso, o homomorfismo:

$$\varphi : \mathbb{A}^+ \longrightarrow C[0, 1]$$

$$(f, \lambda) \longmapsto f + \lambda$$

é tal que

$$\varphi(\mathbb{A}^+) = \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1)\} = C(0, 1).$$

e para $(f, \lambda) = (0, 1)$*, então,*

$$\varphi((0, 1)) = 1.$$

6 Representação de Gelfand

Esta seção tem como objetivo a representação de uma álgebra de Banach comutativa como uma álgebra de funções contínuas em um espaço localmente compacto Hausdorff. Para tanto, mostremos alguns resultados sobre ideais e funcionais lineares multiplicativos.

Teorema 6.1. *Seja I um ideal modular de uma álgebra de Banach $\mathbb{A}$. Se I é próprio, seu fecho $\overline{I}$ também o é. Além disso, se I for maximal então I é fechado.*

Demonstração. Como I é ideal modular, existe um elemento $u \in A$ tal que $a - au$ e $a - ua \in I$, para todo $a \in A$. Seja $b \in I$, com $\| u - b \| < 1$, então

$$v = 1 - (u - b) = 1 - u + b$$

é invertível em A^+.

Considere $a \in A$. Segue que

$$av = a - au + ab \in I.$$

Assim, $Av \subseteq I$. É claro que $Av \subseteq A$. Agora, se $a + 0 \in A^+$,

$$a + 0 = (a + 0)v^{-1}v.$$

Como A é ideal de A^+, $(a + 0)v^{-1} \in A$ e assim, $a + 0 = (a + 0)v^{-1}v \in Av$. Logo, $A \subseteq Av$.

Contradizendo a hipótese de I ser ideal próprio. Logo, $\| u - b \| \geqslant 1$, para todo $b \in I$. Conclui-se que $B_1(u) \cap I = \emptyset$, ou seja, $u \notin \overline{I}$. Portanto, $\overline{I}$ é ideal próprio.

Por sua vez, se I for maximal, sendo $\overline{I}$ um ideal próprio contendo I, segue que $\overline{I} = I$. Logo, I é fechado.

□

Observação 6.1. *Se L é um ideal à esquerda de uma álgebra de Banach $\mathbb{A}$, L é modular se existe um elemento $u \in \mathbb{A}$, tal que $a - au \in L$, para todo $a \in \mathbb{A}$. Neste caso, seu fecho é um ideal próprio à esquerda. Além disso, se L é um ideal modular maximal à esquerda, L é fechado. Tal demonstração é análoga a do teorema anterior.*

Lema 6.1. *Se I é um ideal modular maximal de uma álgebra comutativa, então $\mathbb{A}/I$ é um corpo.*

Demonstração. Na seção Álgebras de Banach foi demonstrado que se I é ideal modular, $\mathbb{A}/I$ é álgebra unital. Agora, como A é comutativa, $\mathbb{A}/I$ também o é, pois se $a + I, b + I \in A/I$, então,

$$(a + I)(b + I) = ab + I = ba + I = (b + I)(a + I).$$

Seja J um ideal de A/I e considere a transformação quociente

$$\pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}/I$$

$$a \longmapsto a + I.$$

Afirmação 6.1. *$\pi^{-1}(J)$ é um ideal de $\mathbb{A}$ contendo I.*

Demonstração.

- Considere $a, b \in \pi^{-1}(J)$. Como π é homomorfismo,

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b) = (a+I) + (b+I).$$

Como J é ideal de $\mathbb{A}/I$, $(a+I)+(b+I) \in J$ e, assim, $\pi(a+b) \in J$, ou seja, $a+b \in \pi^{-1}(J)$.

- Seja $b \in \pi^{-1}(J)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Como J é ideal de $\mathbb{A}/I$,

$$\pi(\lambda b) = \lambda\pi(b) = \lambda(b+I) \in J.$$

Logo, $\lambda b \in \pi^{-1}(J)$.

- Sejam $a \in \mathbb{A}$ e $b \in \pi^{-1}(J)$, então, como π é homomorfismo,

$$\pi(ba) = \pi(ab) = \pi(a).\pi(b) = (a+I).(b+I).$$

Como $b \in \pi^{-1}(J)$, $(b+I) \in J$. Sendo J um ideal de $\mathbb{A}/I$, segue que

$$\pi(ba) = \pi(ab) = (a+I)(b+I) \in J.$$

$\square$

Agora, considere $b \in I$, então

$$\pi(b) = b + I = 0 + I.$$

Como J é ideal de $\mathbb{A}/I$, $0 + I \in J$. Assim, $I \subseteq \pi^{-1}(J)$.

Como I é ideal maximal de A, segue que $\pi^{-1}(J) = A$ ou $\pi^{-1}(J) = I$. Caso $\pi^{-1}(J) = A$, $J = \pi(A) = A/I$. Se $\pi^{-1}(J) = I$, $J = \pi(I) = 0$. Logo, $\mathbb{A}/I$ só possui os ideais triviais, 0 e $\mathbb{A}/I$.

Suponha que $\pi(a)$ seja um elemento não nulo de $\mathbb{A}/I$. Então,

$$J = \pi(a)(\mathbb{A}/I)$$

é um ideal não nulo de $\mathbb{A}/I$. Portanto, $J = \mathbb{A}/I$. Como $\mathbb{A}/I$ é unital e $\pi(a)(\mathbb{A}/I) = \mathbb{A}/I$, existe um elemento $b + I \in A/I$, tal que

$$(a+I)(b+I) = u + I.$$

Como todo elemento não nulo de $\mathbb{A}/I$ é invertível, segue que $\mathbb{A}/I$ é um corpo. $\square$

Observação 6.2. *No Lema* 6.1 *anterior pode-se substituir a hipótese de I ser modular por $\mathbb{A}/I$ ser unital, pela Proposição* 3.3.

Afirmação 6.2. *Se $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ é homomorfismo entre álgebras $\mathbb{A}$ e tem unidade, então*

$$\varphi^+ : \mathbb{A}^+ \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$(a, \lambda) \longmapsto \varphi(a) + \lambda 1_{\mathbb{B}}$$

é o único homomorfismo unital estendendo φ.

Demonstração. Primeiramente, φ^+ é homomorfismo, pois

- Se $(a,\lambda),(b,\mu) \in A^+$, então

$$\varphi^+((a,\lambda)+(b,\mu)) = \varphi^+((a+b,\lambda+\mu))$$

$$= \varphi(a+b) + (\lambda+\mu)1_{\mathbb{B}}$$

$$= \varphi(a) + \lambda 1_{\mathbb{B}} + \varphi(b) + \mu 1_{\mathbb{B}}$$

$$= \varphi^+((a,\lambda)) + \varphi^+((b,\mu)).$$

- Se $(a,\lambda) \in A^+$ e $\beta \in \mathbb{C}$,

$$\varphi^+(\beta(a,\lambda)) = \varphi^+((\beta a, \beta\lambda)) = \varphi(\beta a) + \beta\lambda 1_{\mathbb{B}}$$

$$\beta(\varphi(a) + \lambda 1_{\mathbb{B}}) = \beta\varphi^+((a,\lambda)).$$

- Se $(a,\lambda),(b,\mu) \in A^+$, então

$$\varphi^+((a,\lambda).(b,\mu)) = \varphi^+((ab+\lambda b\mu a, \lambda\mu))$$

$$= \varphi(ab + \lambda b\mu a) + \lambda\mu 1_{\mathbb{B}}$$

$$= \varphi(ab) + \lambda\varphi(b) + \mu\varphi(a) + \lambda\mu 1_{\mathbb{B}}$$

$$= \varphi(a)\varphi(b) + \lambda\varphi(b) + \mu\varphi(a) + \lambda\mu 1_{\mathbb{B}}$$

$$= (\varphi(a) + \lambda 1_{\mathbb{B}})(\varphi(b) + \mu 1_{\mathbb{B}})$$

$$= \varphi^+((a,\lambda))\varphi^+((b,\mu)).$$

Note que

$$\varphi^+((0,1)) = \varphi(0) + 1.1_{\mathbb{B}} = 1_{\mathbb{B}}$$

e

$$\varphi^+|_{\mathbb{A}} = \varphi.$$

Além disso, φ^+ com tais propriedades é único, pois se existisse um $\psi^+ : \mathbb{A}^+ \longrightarrow \mathbb{B}$, com

$$\psi^+|_{\{(a,0):a\in\mathbb{A}\}} = \varphi$$

e

$$\psi^+((0,1)) = 1_{\mathbb{B}},$$

então

$$\psi^+((a,\lambda)) = \psi^+((a,0) + (0,\lambda))$$

$$= \psi^+((a,0)) + \lambda\psi^+((0,1))$$

$$= \varphi(a) + \lambda 1_{\mathbb{B}} = \varphi^{+}((a, \lambda)).$$

$\square$

Proposição 6.1. *Se $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ é homomorfismo unital entre álgebras unitais, então*

$$\varphi(inv(\mathbb{A})) \subseteq inv(\mathbb{B})$$

e, portanto,

$$\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a),$$

para todo $a \in \mathbb{A}$.

Demonstração. Seja $b \in \varphi(inv(\mathbb{A}))$, então $b = \varphi(a)$, para algum $a \in inv(\mathbb{A})$. Agora, como φ é unital,

$$1_{\mathbb{B}} = \varphi(1_{\mathbb{A}}) = \varphi(a.a^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = b.\varphi(a^{-1}).$$

Segue que $b \in inv(\mathbb{B})$ e $b^{-1} = \varphi(a^{-1})$, ou seja, $\varphi(inv(\mathbb{A})) \subseteq inv(\mathbb{B})$.

Note ainda que se

$$a - \lambda 1_{\mathbb{B}} \in inv(\mathbb{A}),$$

então

$$\varphi(a - \lambda 1_{\mathbb{A}}) = \varphi(a) - \lambda 1_{\mathbb{B}} \in inv(\mathbb{B}).$$

Assim,

$$\sigma(\varphi(a)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(a) - \lambda 1_{\mathbb{B}} \notin inv(\mathbb{B})\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{A})\} = \sigma(a).$$

$\square$

Para a demonstração da próxima proposição será necessário aplicar o Lema de Zorn, vejamos, portanto, o seu enunciado e algumas definições relacionadas ao mesmo.

Definição 6.1. *Seja M um conjunto parcialmente ordenado e seja $W \subseteq M$. Uma cota superior para W é um elemento $c \in M$ tal que $w \leqslant c$, para todo $w \in W$.*

Definição 6.2. *Considere M um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $m \in M$ é um elemento maximal de M se vale a seguinte propriedade: se $x \in M$ é tal que $x \geqslant m$, então $x = m$.*

Lema 6.2. { *de Zorn*} *Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo $V \subseteq M$ totalmente ordenado tiver cota superior, então M tem pelo menos um elemento maximal.*

Proposição 6.2. *Todo ideal modular próprio de uma álgebra $\mathbb{A}$ está contido em algum ideal maximal de $\mathbb{A}$.*

Demonstração. Defina a seguinte relação de ordem parcial entre os ideais de $\mathbb{A}$:

$$I_1 \leqslant I_2 \text{ se } I_1 \subseteq I_2.$$

Seja I um ideal próprio de $\mathbb{A}$. Considere o seguinte conjunto:

$$M = \{J \text{ ideal de } \mathbb{A} : I \subseteq J \subsetneq \mathbb{A}\}.$$

Considere W um conjunto totalmente ordenado em M.

Note que $L = \bigcup_{J \in W} J$ é um ideal de $\mathbb{A}$. Sendo assim, $L \in M$ e L é uma cota superior para W, pois $J \leqslant L$, para todo $J \in W$.

Pelo Lema de Zorn, M possui um elemento maximal K. Portanto, $K \supseteq I$.

Vejamos que K é ideal maximal de $\mathbb{A}$. Suponha, por absurdo, que exista um ideal J de $\mathbb{A}$ com

$$K \subsetneq J \subsetneq \mathbb{A}.$$

Então, $J \in M$, pois $I \subseteq K \subsetneq J \subsetneq \mathbb{A}$. Contradição, pois K é elemento maximal de M. Portanto, K é ideal maximal de $\mathbb{A}$ que contém I. Disso, segue a proposição.

□

Proposição 6.3. *Toda álgebra com unidade tem pelo menos um ideal maximal.*

Demonstração. Pela Proposição 6.2, todo ideal modular próprio de $\mathbb{A}$ está contido em algum ideal maximal de $\mathbb{A}$. Como todo ideal de uma álgebra com unidade é modular, segue que $\mathbb{A}$ possui, pelo menos, um ideal maximal. □

Definição 6.3. *Um* ***caracter*** *sobre uma álgebra $\mathbb{A}$ é um homomorfismo não nulo*

$$\tau : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Denota-se o conjunto dos caracteres de $\mathbb{A}$ por $\Omega(\mathbb{A})$.

Teorema 6.2. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital comutativa.*

1. *Se $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$, então $\| \tau \| = 1$.*

2. *O conjunto $\Omega(\mathbb{A})$ é não vazio e a transformação*

$$\tau \longmapsto ker(\tau)$$

é uma bijeção entre $\Omega(\mathbb{A})$ e o conjunto dos ideais maximais de $\mathbb{A}$.

Demonstração. Primeiro demonstraremos (1). Seja $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$ e $a \in \mathbb{A}$. Vejamos que $\tau(a) \in \sigma(a)$. Note que $\tau(1_{\mathbb{A}}) \neq 0$, caso contrário, para todo $a \in \mathbb{A}$,

$$\tau(a) = \tau(1_{\mathbb{A}}a) = \tau(1_{\mathbb{A}})\tau(a) = 0,$$

mas $\tau \neq 0$, pois τ é caracter. Agora,

$$\tau(1_{\mathbb{A}}) = \tau(1_{\mathbb{A}}.1_{\mathbb{A}}) = \tau(1_{\mathbb{A}}).\tau(1_{\mathbb{A}}) = \tau(1_{\mathbb{A}})^2.$$

Como $\tau(1_{\mathbb{A}}) \neq 0$, tem-se que $\tau(1_{\mathbb{A}}) = 1$. Suponha, por absurdo, que $\tau(a) \notin \sigma(a)$. Assim,

$$a - \tau(a).1_{\mathbb{A}} \in inv(\mathbb{A}),$$

ou seja, existe $b \in \mathbb{A}$, tal que
$$b(a - \tau(a).1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{A}}.$$
Como τ é homomorfismo,
$$\tau(b(a - \tau(a).1_{\mathbb{A}})) = \tau(1_{\mathbb{A}}),$$
$$\tau(b)\tau((a - \tau(a).1_{\mathbb{A}})) = 1,$$
$$\tau(b)(\tau(a) - \tau(a).\tau(1_{\mathbb{A}})) = 1,$$
$$\tau(b)(\tau(a) - \tau(a)) = 1,$$
$$\tau(b).0 = 1,$$
$$0 = 1.$$
Isto é uma contradição. Logo, $\tau(a) \in \sigma(a)$. Disso, segue que
$$|\tau(a)| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = r(a) \leqslant || a || .$$
Portanto, τ é um funcional linear limitado, sendo assim, $\tau \in A^*$. Em particular,
$$|| \tau ||= \sup_{||a|| \leqslant 1} |\tau(a)| \leqslant \sup_{||a|| \leqslant 1} || a ||= 1.$$
Como $\tau(1_{\mathbb{A}}) = 1$, segue que $|| \tau ||= 1$.

Agora, para a parte (2), mostremos que $\Omega(\mathbb{A}) \neq \emptyset$. Já vimos que pelo lema de Zorn, como $\mathbb{A}$ é álgebra com unidade, $\mathbb{A}$ admite, pelo menos, um ideal maximal I. Pelo Teorema 6.1, I é fechado e, pelo Lema 6.1, $\mathbb{A}/I$ é corpo. Portanto, o único elemento de $\mathbb{A}/I$ que não é invertível é o elemento nulo. Pelo Teorema 4.7,
$$\mathbb{A}/I = \mathbb{C}.1_{\mathbb{A}/I} = \mathbb{C}(1_{\mathbb{A}} + I).$$
Agora, considere os homomorfismos
$$\pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}/I$$
$$a \longmapsto a + I$$
e,
$$\iota : \mathbb{A}/I \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\lambda.1_{\mathbb{A}/I} \longmapsto \lambda.$$
Note que ι é injetora, pois
$$\iota(\lambda.1_{\mathbb{A}/I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$
e,
$$ker(\pi) = \{a \in \mathbb{A} : a \in I\} = I.$$
Assim,
$$\tau = \iota \circ \pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}$$

é homomorfismo de álgebras e

$$ker(\tau) = \{a \in \mathbb{A} : \iota \circ \pi(a) = 0\}$$

$$= \{a \in \mathbb{A} : \pi(a) = 0\}$$

$$= ker(\pi)$$

$$= I.$$

Portanto, $\tau \neq 0$, pois I é ideal próprio de $\mathbb{A}$. Segue que $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$ e $\Omega(\mathbb{A}) \neq \emptyset$.

Vejamos que a aplicação

$$\Omega(\mathbb{A}) \longrightarrow \{\text{ideais maximais de } \mathbb{A}\}$$

$$\tau \longmapsto ker(\tau)$$

está bem definida, ou seja, $ker(\tau)$ é ideal maximal de $\mathbb{A}$, para todo $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$. Como τ é contínua,

$$ker(\tau) = \tau^{-1}\{0\}$$

é ideal fechado de $\mathbb{A}$. Mostremos que

$$\mathbb{A}/ker(\tau) \cong \mathbb{C}.$$

Para tanto, considere

$$\varphi : \mathbb{A}/ker(\tau) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\overline{a} \longmapsto \tau(a).$$

Note que φ está bem definida, pois se $\overline{a} = \overline{b}$, então

$$\tau(a) = \tau(b).$$

Assim,

$$\tau(a - b) = 0,$$

isto é,

$$a - b \in ker(\tau),$$

$$\overline{a - b} = \overline{0}.$$

Logo,

$$\varphi(\overline{a - b}) = \varphi(\overline{0}) = \tau(0) = 0,$$

$$\tau(\overline{a}) - \tau(\overline{b}) = 0,$$

$$\tau\overline{a} = \tau\overline{b}.$$

Além disso, φ é homomorfismo bijetor, pois

- Se $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{A}/ker(\tau)$, então
$$\varphi(\overline{a}+\overline{b}) = \varphi(\overline{a+b})$$
$$= \tau(a+b) = \tau(a)+\tau(b) = \varphi(\overline{a})+\varphi(\overline{b});$$

- Se $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{A}/ker(\tau)$, então
$$\varphi(\overline{a}.\overline{b}) = \varphi(\overline{a.b})$$
$$= \tau(a.b) = \tau(a).\tau(b) = \varphi(\overline{a}).\varphi(\overline{b});$$

- Para $\overline{a} \in \mathbb{A}/ker(\tau)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\varphi(\lambda\overline{a}) = \varphi(\overline{\lambda a}) = \tau(\lambda a) = \lambda\tau(a) = \lambda\varphi(\overline{a}).$$

  Note que φ é injetiva, pois se $\varphi(\overline{a}) = 0$, então $\tau(a) = 0$, ou seja, $a \in ker(\tau)$ e assim, $\overline{a} = \overline{0}$. Para demonstrar a sobrejetividade, considere $\alpha \in \mathbb{C}$. Como $\tau \neq 0$, existe $\lambda \neq 0$, com
$$\tau(b) = \lambda,$$
  para algum $b \in A$. Disso, segue que
$$\varphi(\alpha\lambda^{-1}\overline{b}) = \varphi(\overline{\alpha\lambda^{-1}b}) = \tau(\alpha\lambda^{-1}b) = \alpha\lambda^{-1}\tau(b) = \alpha\lambda^{-1}\lambda = \alpha.$$

Como $\mathbb{A}/ker(\tau)$ é corpo, tem-se que $ker(\tau)$ é ideal maximal.

Basta vermos que a aplicação
$$\tau \longmapsto ker(\tau)$$
é uma bijeção entre $\Omega(\mathbb{A})$ e os ideais maximais de $\mathbb{A}$.

Para a sobrejetividade já foi demonstrado que se I for ideal maximal de $\mathbb{A}$, $I = ker(\tau)$, para $\tau = \iota \circ \pi \in \Omega(\mathbb{A})$. Quanto à injetividade, considere $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(\mathbb{A})$, com
$$\mathrm{ker}(\tau_1) = ker(\tau_2).$$
Seja $a \in \mathbb{A}$. Note que
$$a - \tau_2(a).1_{\mathbb{A}} \in ker(\tau_2) = ker(\tau_1).$$
Logo,
$$\tau_1(a) - \tau_2(a).\tau_1(1_{\mathbb{A}}) = 0,$$
$$\tau_1(a) = \tau_2(a),$$
$$\tau_1 = \tau_2.$$

□

Definição 6.4. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra comutativa sem unidade. Dado $a \in \mathbb{A}$, define-se o espectro de a (relativo a $\mathbb{A}$) como*
$$\sigma_{\mathbb{A}}(a) = \sigma_{\mathbb{A}^+}((a,0))$$

e, o raio espectral de a (relativo a $\mathbb{A}$) como

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathbb{A}}(a)\}.$$

Observe que $(a, 0) \notin inv(\mathbb{A}^+)$, pois se $(b, \mu) \in \mathbb{A}^+$, então

$$(a, 0)(b, \mu) = (ab + \mu a, 0) \neq (0, 1) = 1_{\mathbb{A}^+}.$$

Assim, $(a, 0) - 0.1_{\mathbb{A}^+} \notin inv(\mathbb{A}^+)$, isto é, $0 \in \sigma_{\mathbb{A}^+}(a) = \sigma_{\mathbb{A}}(a)$.

Teorema 6.3. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach comutativa.*

1. *Se A for unital, então, para todo $a \in \mathbb{A}$,*

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\}.$$

2. *Se $\mathbb{A}$ não possui unidade, então para todo $a \in \mathbb{A}$,*

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{0\}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar, primeiramente, o item (1). Já vimos que $\tau(a) \in \sigma(a)$, para todo $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$ e $a \in \mathbb{A}$. Para o outro lado, considere $\lambda \in \sigma(a)$. Por definição de espectro,

$$a - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{A}).$$

Note que $J = (a - \lambda 1_{\mathbb{A}})\mathbb{A}$ é ideal próprio de $\mathbb{A}$. Caso contrário, $1_{\mathbb{A}} \in J$ e existiria $b \in \mathbb{A}$, tal que

$$(a - \lambda 1_{\mathbb{A}})b = 1_{\mathbb{A}}.$$

Absurdo, pois $a - \lambda 1_{\mathbb{A}} \notin inv(\mathbb{A})$.

Como $\mathbb{A}$ é álgebra com unidade, todo ideal de $\mathbb{A}$ é modular. Sendo assim, J é ideal próprio modular de $\mathbb{A}$. Foi demonstrado, pela Proposição 6.2, que J está contido em um ideal maximal de $\mathbb{A}$.

Pelo Teorema 6.2, a aplicação

$$\tau \longmapsto ker(\tau)$$

é uma bijeção entre os elementos de $\Omega(\mathbb{A})$ e os ideais maximais de $\mathbb{A}$. Logo, $J \subseteq ker(\tau)$, para algum $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$. Segue que

$$\tau((a - \lambda 1_{\mathbb{A}}).1_{\mathbb{A}}) = 0$$

$$\tau(a) - \lambda\tau(1_{\mathbb{A}}) = 0$$

$$\tau(a) = \lambda.$$

Portanto, $\lambda \in \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\}$. Conclui-se que $\sigma(a) \subseteq \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\}$.

Agora, mostremos o item (2). Se $\mathbb{A}$ não possui unidade, então para todo $a \in \mathbb{A}$,

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{0\}.$$

Seja $\tau \in \mathbb{A}^+$. Dois casos precisam ser considerados:

- Se $\tau|_{\mathbb{A}} \neq 0$, então $\tau|_{\mathbb{A}} \in \Omega(\mathbb{A})$.
- Se $\tau|_{\mathbb{A}} = 0$, como $\tau \in \Omega(\mathbb{A}^+)$, $\tau \neq 0$ e, assim, existe um $(a, \lambda) \in \mathbb{A}^+$ com $\tau((a, \lambda)) \neq 0$. Como τ é homomorfismo,

$$\tau((a, \lambda)) = \tau((a, 0)) + \tau((0, \lambda)) = \tau((a, 0)) + \tau((0, \lambda)) = \tau((0, \lambda)) \neq 0.$$

Como $\mathbb{A}^+$ e $\mathbb{C}$ tem unidade, $\tau(0, 1) = 1$. Assim, como tal é homomorfismo,

$$\tau((0, \lambda)) = \lambda\tau((0, 1)) = \lambda.1 = \lambda.$$

Defina, desta forma,

$$\tau_\infty : \mathbb{A}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(a, \lambda) \longmapsto \lambda.$$

Vejamos que é um homomorfismo unital, com $ker(\tau_\infty) = \mathbb{A}$. De fato, se $a, b \in \mathbb{A}$ e $\lambda, \mu, \beta \in \mathbb{C}$:

- $\tau_\infty((a, \lambda) + (b, \mu)) = \tau_\infty((a + b, \lambda + \mu)) = \lambda + \mu = \tau_\infty(a, \lambda) + \tau_\infty(b, \mu)$;
- $\tau_\infty(\beta(a, \lambda)) = \tau_\infty((\beta a, \beta\lambda)) = \beta\lambda = \beta\tau_\infty((a, \lambda))$.
- $\tau_\infty((a, \lambda)(b, \mu)) = \tau_\infty((ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)) = \lambda\mu = \tau_\infty(a, \lambda)\tau_\infty(b, \mu)$;
- $\tau_\infty((0, 1)) = 1$.
- $ker(\tau_\infty) = \{(a, \lambda) \in \mathbb{A}^+ : \tau_\infty((a, \lambda)) = 0\} = \{(a, \lambda) \in \mathbb{A}^+ : \lambda = 0\} = \{(a, 0) : a \in \mathbb{A}\} \cong \mathbb{A}$.

Note que τ_∞ é o único homomorfismo em $\Omega(\mathbb{A}^+)$ estendendo o homomorfismo nulo em $\mathbb{A}$. Pela Afirmação 6.2, existe um único homomorfismo $\varphi^+ : \mathbb{A}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ que estende φ, para cada $\varphi \in \Omega(\mathbb{A})$. Portanto,

$$\Omega(\mathbb{A}^+) = \{\tau^+ : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{\tau^\infty\}.$$

Como $\mathbb{A}^+$ é álgebra de Banach unital, por (1),

$$\sigma(a) = \sigma_{\mathbb{A}^+}((a, 0)) = \{\tau^+((a, 0)) : \tau^+ \in \Omega(\mathbb{A}^+)\}$$
$$= \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{\tau_\infty((a, 0))\}$$
$$= \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{0\}.$$

□

Definição 6.5. *Seja X um espaço normado. A topologia fraca$-*$ em X^* é a topologia inicial das funções avaliações*

$$\{\delta_x : x \in X\},$$

em que

$$\delta_x : X^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f \longmapsto \delta_x(f) = f(x).$$

Sendo assim, a menor topologia em X^* para a qual as funções avaliações são contínuas.

Proposição 6.4. *X^* é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in X^*$, com $f_1 \neq f_2$. Então, existe $x_0 \in X$ tal que

$$f_1(x_0) \neq f_2(x_0).$$

Considere

$$r = \frac{|f_1(x_0) - f_2(x_0)|}{3} > 0.$$

Como $B(f_1(x_0), r)$ e $B(f_2(x_0), r)$ são abertos de $\mathbb{C}$ e δ_{x_0} é contínua, então

$$U = (\delta_{x_0})^{-1} B(f_1(x_0), r) = \{f \in X^* : |f(x_0) - f_1(x_0)| < r\}$$

e

$$V = (\delta_{x_0})^{-1} B(f_2(x_0), r) = \{f \in X^* : |f(x_0) - f_2(x_0)| < r\}$$

são abertos de X^*.

Note que $f_1 \in U$ e $f_2 \in V$. Vejamos que U e V são disjuntos. Seja $g \in V$, então

$$|f_2(x_0) - f_1(x_0)| - |f_1(x_0) - g(x_0)| \leqslant |f_2(x_0) - g(x_0)|.$$

Assim,

$$|g(x_0) - f_1(x_0)| \geqslant |f_2(x_0) - f_1(x_0)| - |f_2(x_0) - g(x_0)|;$$

$$|g(x_0) - f_1(x_0)| \geqslant |f_2(x_0) - f_1(x_0)| - r;$$

$$|g(x_0) - f_1(x_0)| \geqslant |f_2(x_0) - f_1(x_0)| - \frac{|f_2(x_0) - f_1(x_0)|}{3};$$

$$|g(x_0) - f_1(x_0)| \geqslant \frac{2|f_2(x_0) - f_1(x_0)|}{3};$$

$$|g(x_0) - f_1(x_0)| \geqslant 2r > r.$$

Logo, $g \notin U$. Segue que $U \cap V = \emptyset$. Portanto, X^* é Hausdorff. □

O teorema seguinte será assumido e está disponível em [4].

Teorema 6.4. {*Alaoglu*}: *Seja X um espaço de Banach. Então, a bola fechada unitária em X^* é um compacto na topologia fraca$-*$.*

Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach. Pelo Teorema 6.2, tem-se que $\Omega(\mathbb{A})$ está contido na bola fechada unitária S de $\mathbb{A}^*$. Considere $\Omega(\mathbb{A})$ com a topologia relativa de $\mathbb{A}^*$ com a topologia fraca$-*$. O espaço topológico $\Omega(\mathbb{A})$ é chamado **espectro de** $\mathbb{A}$.

Teorema 6.5. *Se $\mathbb{A}$ é uma álgebra de Banach comutativa, então $\Omega(\mathbb{A})$ é um espaço localmente compacto. Se $\mathbb{A}$ é unital, então $\Omega(\mathbb{A})$ é compacto.*

Demonstração. Observe que $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ está contido em S, a bola unitária fechada em $\mathbb{A}^*$. Pelo Teorema de Alaoglu, S é compacto. Vejamos que $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ é fechado em S e, portanto, compacto. Como A^* com a topologia escolhida é Hausdorff, S é compacto e Hausdorff, portanto, fechado. Como o fecho de um conjunto é o menor fechado que o contém, segue que $\overline{\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}} \subseteq S$. Seja $f \in \overline{\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}}$. Como f está no fecho de $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$, existe uma net $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$, com $f_i \xrightarrow{*} f$.

Caso $f \equiv 0_h$, é claro que $f \in \Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$. Se $f \neq 0_h$, como $f \in \mathbb{A}^*$, basta mostrar que f é homomorfismo com relação ao produto. Para tanto, considere $a, b \in \mathbb{A}$, tem-se que

$$f(a).f(b) = \delta_a(f).\delta_b(f) = \delta_a(\lim_{i\in I} f_i).\delta_b(\lim_{i\in I} f_i).$$

Como δ_a e δ_b são contínuas com a topologia fraca$-*$,

$$\delta_a(\lim_{i\in I} f_i).\delta_b(\lim_{i\in I} f_i) = \lim_{i\in I} \delta_a(f_i). \lim_{i\in I} \delta_b(f_i)$$

$$= \lim_{i\in I} \delta_a(f_i)\delta_b(f_i)$$

$$= \lim_{i\in I} f_i(a)f_i(b).$$

Como $f_i \in \Omega(\mathbb{A})$, f_i é homomorfismo de álgebras. Assim,

$$\lim_{i\in I} f_i(a)f_i(b) = \lim_{i\in I} f_i(ab)$$

$$= \lim_{i\in I} \delta_{ab}(f_i).$$

Agora, pela continuidade da função avaliação em ab,

$$\lim_{i\in I} \delta_{ab}(f_i) = \delta_{ab}(\lim_{i\in I} f_i) = \delta_{ab}(f) = f(ab).$$

Portanto, $f(a).f(b) = f(ab)$, implicando $f \in \Omega(\mathbb{A}) \subseteq \Omega(\mathbb{A}) \cup 0_h$. Logo, $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0\}$ é um fechado no compacto S, sendo assim, um compacto. Como $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ é subespaço topológico de $\mathbb{A}^*$, que é Hausdorff, segue que $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ é Hausdorff.

Afirmação 6.3. $\Omega(\mathbb{A})$ *é localmente compacto.*

Seja $g \in \Omega(\mathbb{A})$. Como $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ é Hausdorff, existem abertos disjuntos U, V de $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ com $g \in U$ e $0_h \in V$. Como $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ é fechado, $g \in \overline{U} \subseteq \Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$. Já vimos que $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ é compacto. Por ser um fechado em um compacto, segue que $\overline{U}$ é compacto.

Como V é aberto e $V \cap U = \emptyset$, tem-se que $V \cap \overline{U} = \emptyset$. Caso existisse $h \in V \cap \overline{U}$, existiria um aberto W em $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$, com $h \in W \subseteq V$, pois V é aberto. Em particular, $W \cap U \neq \emptyset$, pois $h \in \overline{U}$. Como $W \subseteq V$, $V \cap U \neq \emptyset$. Isto é uma contradição.

Agora, note que $0_h \in V$ e $V \cap \overline{U} = \emptyset$. Portanto, $\overline{U} \subseteq \Omega(\mathbb{A})$ e, assim,

$$g \in int(U) = U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega(\mathbb{A}).$$

Como existe o compacto $\overline{U}$, cujo interior contém g, conclui-se que $\Omega(\mathbb{A})$ é localmente compacto.

No caso em que $\mathbb{A}$ é unital, se $f \in \Omega(\mathbb{A})$, $f(1_{\mathbb{A}}) = 1$. Portanto, não existe uma net $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq \Omega(\mathbb{A})$, com $f_i \xrightarrow{*} 0_h$, sendo 0_h o homomorfismo nulo. Caso contrario, pela continuidade de $\delta_{1_{\mathbb{A}}}$,

$$0 = \delta_{1_{\mathbb{A}}}(0_h) = \delta_{1_{\mathbb{A}}}(\lim_{i \in I} f_i) = \lim_{i \in I} \delta_{1_{\mathbb{A}}}(f_i) = \lim_{i \in I} f_i(1_{\mathbb{A}}) = 1,$$

o que é um absurdo. Logo, $0_h \notin \overline{\Omega(\mathbb{A})}$. Se $f \in \overline{\Omega(\mathbb{A})}$, prova-se, analogamente ao caso anterior, que $f(a).f(b) = f(ab)$. Assim, $\overline{\Omega(\mathbb{A})} = \Omega(\mathbb{A}) \subseteq S$. Mais uma vez, pelo Teorema de Alaoglu, S é compacto e, por ser um fechado em um compacto, $\Omega(\mathbb{A})$ é compacto.

□

Note que se $\mathbb{A}$ não for unital, $\Omega(\mathbb{A})$ pode ser vazio. Por exemplo, caso $\mathbb{A} = 0$.

Considere $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach comutativa, cujo espectro $\Omega(\mathbb{A})$ não é vazio. Se $a \in \mathbb{A}$, defina a função

$$\widehat{a} : \Omega(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\tau \longmapsto \tau(a).$$

Note que $\widehat{a} = \delta_a|_{\Omega(\mathbb{A})}$. Perceba que $\widehat{a}$ é contínua, para todo $a \in \mathbb{A}$, pois, se U for aberto em $\mathbb{C}$, como δ_a é contínua, $(\delta_a)^{-1}\{U\}$ é aberto de A^*. Assim,

$$(\widehat{a})^{-1}\{U\} = (\delta_a|_{\Omega(\mathbb{A})})^{-1}\{U\} = \delta_a^{-1}\{U\} \cap \Omega(\mathbb{A}),$$

que é aberto de $\Omega(\mathbb{A})$.

Proposição 6.5. *O conjunto $K = \{\tau \in \Omega(\mathbb{A}) : |\widehat{a}(\tau)| \geqslant \varepsilon\}$ é compacto.*

Demonstração. Como $K \subseteq \Omega(\mathbb{A}) \subseteq \Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ e $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$ é compacto, basta notar que K é um fechado em $\Omega(\mathbb{A}) \cup \{0_h\}$. Para tanto, considere $\tau \in \overline{K}$. Portanto, existe uma net $\{\tau_i\}_{i \in I} \subseteq K$, com $\tau_i \xrightarrow{*} \tau$.

Note que

$$|\widehat{a}(\tau_i)| = |\tau_i(a)| \geqslant \varepsilon,$$

para todo $i \in I$. Portanto,

$$|\widehat{a}(\tau)| = |\tau(a)| = |\lim_{i \in I} \tau_i(a)| = \lim_{i \in I} |\tau_i(a)| \geqslant \varepsilon.$$

Logo, $\tau \neq 0_h$, pois $|\tau(a)| \geqslant \varepsilon$ e $\tau \in K$. Segue que K é fechado em um compacto, sendo assim, compacto.

□

Pela Proposição 6.5, tem-se que $\widehat{a} \in C_0(\Omega(\mathbb{A}))$. Chamamos $\widehat{a}$ de **Transformada de Gelfand de a**.

Teorema 6.6. {*Representação de Gelfand*} *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach comutativa, com $\Omega(\mathbb{A}) \neq \emptyset$. Então, a aplicação*

$$\Gamma : \mathbb{A} \longrightarrow C_0(\Omega(\mathbb{A}))$$

$$a \longmapsto \widehat{a}$$

é um homomorfismo contrativo de álgebras e, para todo $a \in \mathbb{A}$*,*

$$r(a) = \| \widehat{a} \|_\infty .$$

Se $\mathbb{A}$ *é unital,*

$$\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(\mathbb{A}))$$

e se $\mathbb{A}$ *é não-unital,*

$$\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(\mathbb{A})) \cup \{0\},$$

para cada $a \in \mathbb{A}$*.*

Demonstração. Pelo Teorema 6.3, se $\mathbb{A}$ é unital,

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\}$$

$$= \{\widehat{a}(\tau) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\}$$

$$= \widehat{a}(\Omega(\mathbb{A})).$$

Se $\mathbb{A}$ não é unital,

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\} \cup \{0\}$$

$$= \widehat{a}(\Omega(\mathbb{A})) \cup \{0\}.$$

Assim,

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

$$= \sup\{|\tau(a)| : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\}$$

$$= \sup\{|\widehat{a}(\tau)| : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\}$$

$$= \| \widehat{a} \|_\infty .$$

Portanto,

$$\| \widehat{a} \|_\infty = r(a) \leqslant \| a \| .$$

Segue que Γ é contrativo. Vejamos que Γ é um homomorfismo.

- Se $a, b \in \mathbb{A}$, então

  $$\Gamma(a+b) = \widehat{a+b}.$$

  Por sua vez, se $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$,

  $$\widehat{a+b}(\tau) = \tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$$

  $$= \widehat{a}(\tau) + \widehat{b}(\tau).$$

  Assim,

  $$\Gamma(a+b) = \widehat{a+b} = \widehat{a} + \widehat{b} = \Gamma(a) + \Gamma(b).$$

- Se $a, b \in \mathbb{A}$, então
$$\Gamma(a.b) = \widehat{a.b}.$$
Portanto, se $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$,
$$\begin{aligned} \widehat{a.b}(\tau) &= \tau(a.b) = \tau(a).\tau(b) \\ &= \widehat{a}(\tau).\widehat{b}(\tau). \end{aligned}$$
Logo,
$$\Gamma(a.b) = \widehat{a.b} = \widehat{a}.\widehat{b} = \Gamma(a).\Gamma(b).$$

- Se $a \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então
$$\Gamma(\lambda a) = \widehat{\lambda a}.$$
Segue que se $\tau \in \Omega(\mathbb{A})$,
$$\widehat{\lambda a}(\tau) = \tau(\lambda a) = \lambda\tau(a) = \lambda\widehat{a}(\tau).$$
Logo,
$$\Gamma(\lambda a) = \widehat{\lambda a} = \lambda\widehat{a} = \lambda\Gamma(a).$$

□

Lema 6.3. *Sejam K e H espaços topológicos, com K compacto e H Hausdorff. Se $f : K \longrightarrow H$ é uma bijeção contínua, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Vejamos que a inversa de f,
$$f^{-1} : H \longrightarrow K,$$
é contínua. Para tanto, considere $F \subseteq K$ um fechado. Como K é compacto, tem-se que F é compacto. Agora,
$$\begin{aligned} (f^{-1})^{-1}\{F\} &= \{x \in H : f^{-1}(x) = y \in F\} \\ &= \{f(y) \in H : y \in F\} = f(F). \end{aligned}$$
Como f é contínua e F é compacto, $f(F)$ é compacto em H. Como H é Hausdorff, $f(F)$ é fechado. Logo,
$$(f^{-1})^{-1}\{F\} = f(F)$$
é fechado em H. Portanto, f^{-1} é contínua, sendo assim, f é um homeomorfismo.

□

Teorema 6.7. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de Banach unital gerada por $1_{\mathbb{A}}$ e um elemento a. Então, $\mathbb{A}$ é comutativa e a aplicação*
$$\begin{aligned} \widehat{a} : \Omega(\mathbb{A}) &\longrightarrow \sigma(a) \\ \tau &\longmapsto \tau(a) \end{aligned}$$
é um homeomorfismo.

Demonstração. Seja:

$$D = \{\alpha_0 1_{\mathbb{A}} + \alpha_1 a + ... + \alpha_n a^n : \alpha_i \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \text{ e } i \in \{1, ..., n\}\}.$$

Pela definição de subálgebra gerada, $A = \overline{D}$, sendo D uma subálgebra densa de $\mathbb{A}$. Claramente, $\mathbb{A}$ é comutativa. Note que $\widehat{a}$ é bijeção.

- Se $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(\mathbb{A})$, com $\widehat{a}(\tau_1) = \widehat{a}(\tau_2)$. Então, por definição de $\widehat{a}$, $\tau_1(a) = \tau_2(a)$. Além disso, $\tau_1(1_{\mathbb{A}}) = \tau_2(1_{\mathbb{A}}) = 1$. Como τ_1 e τ_2 são homomorfismos, $\tau_1(b) = \tau_2(b)$, para todo $b \in B$. Pela Proposição 3.4, $\tau_1 = \tau_2$.

- Seja $\lambda \in \sigma(a)$. Como $\mathbb{A}$ é unital,

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(\mathbb{A})\}.$$

  Então, $\lambda = \tau_\lambda(a)$, para algum $\tau_\lambda \in \Omega(\mathbb{A})$. Assim, $\lambda = \widehat{a}(\tau_\lambda)$. Portanto, $\widehat{a}$ é sobrejetora.

Além disso, $\widehat{a} = \delta_a|_{\Omega(\mathbb{A})}$ é contínua, pois é a restrição de uma função contínua em $\mathbb{A}^*$. Agora, como $\mathbb{A}$ é álgebra comutativa e unital, $\Omega(\mathbb{A})$ é compacto e $\sigma(a) \neq \emptyset$. Como $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$, segue que $\sigma(a)$ é Hausdorff. Pelo Lema 6.3, $\widehat{a}$ é um homeomorfismo. □

7 C^*-álgebras

Este capítulo será iniciado com uma série de definições envolvendo álgebras. Sendo que o objetivo final desta seção é demonstrar que um $*$-homomorfismo $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ de uma $*$-álgebra de Banach $\mathbb{A}$ em uma C^*-álgebra $\mathbb{B}$ é contrativo.

Definição 7.1. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra . Uma* ***involução*** *em $\mathbb{A}$ é uma função*

$$* : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$

com as seguintes propriedades, para todo $a, b \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $(a+b)^* = a^* + b^*$;
- $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$;
- $(ab)^* = b^* a^*$;
- $(a^*)^* = a$;

O par $(\mathbb{A}, *)$ é chamado álgebra com involução ou $*$-álgebra.

Se S é um subconjunto de $\mathbb{A}$, definimos

$$S^* = \{a^* : a \in S\}$$

e dizemos que S é auto-adjunto se $S = S^*$. Uma subálgebra auto-adjunta $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ é uma $*$-subálgebra de $\mathbb{A}$ e é uma $*$-álgebra se munida com a restrição da operação involução de $\mathbb{A}$.

Proposição 7.1. *A interseção de uma família de $*$-subálgebras de $\mathbb{A}$ é uma $*$-subálgebra. Além disso, para todo subconjunto S de $\mathbb{A}$, existe uma menor $*$-álgebra $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$, contendo S, chamada $*$-álgebra gerada por S.*

Demonstração. Já vimos que a interseção C de uma família de subálgebras de uma álgebra é uma subálgebra. Como tais $*$-subálgebras são conjuntos auto-adjuntos, a interseção das mesmas também é um conjunto auto-adjunto. Sendo assim, uma $*$-subálgebra. Agora, considere $S \subseteq \mathbb{A}$. Note que a interseção D de todas as $*$-subálgebras que contêm D é uma $*$-subálgebra. Por definição, qualquer $*$-subálgebra que contenha S, contém D. Portanto, D a $*$-subálgebra gerada por S. □

Definimos uma involução em $\mathbb{A}^+$ que estende a involução em $\mathbb{A}$ da seguinte maneira:

$$* : \mathbb{A}^+ \longrightarrow \mathbb{A}^+$$

$$(a, \lambda) \longmapsto (a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda}).$$

Note que se $(a, \lambda), (b, \mu) \in \mathbb{A}^+$:

$$(a, \lambda)^{**} = (a^*, \overline{\lambda})^* = (a^{**}, \overline{\overline{\lambda}}) = (a, \lambda)$$

e

$$\begin{aligned}((a,\lambda)(b,\mu))^* &= (ab+a\mu+\lambda b,\lambda\mu)^*\\ &= ((ab+a\mu+\lambda b)^*,\overline{\lambda\mu})\\ &= ((ab)^*+\overline{\mu}a^*+\overline{\lambda}b^*,\overline{\lambda}\overline{\mu})\\ &= (b^*a^*+\overline{\mu}a^*+\overline{\lambda}b^*,\overline{\mu}\overline{\lambda})\\ &= (b^*,\overline{\mu})(a^*,\overline{\lambda})\\ &= (b,\mu)^*(a,\lambda)^*.\end{aligned}$$

Perceba que se $\mathbb{A}$ é unital, $1_{\mathbb{A}}^* = 1_{1_{\mathbb{A}}}$, pois

$$1_{\mathbb{A}}^* = 1_{\mathbb{A}}.1_{\mathbb{A}}^* = (1_{\mathbb{A}}.1_{\mathbb{A}}^*)^* = (1_{\mathbb{A}}^*)^* = 1_{\mathbb{A}}.$$

Além disso, se $a \in inv(\mathbb{A})$, então,

$$(a^*)^{-1} = (a^{-1}) * .$$

Visto que

$$1 = 1^* = (a.a^{-1})^* = (a^{-1})^*a^*.$$

Proposição 7.2. *Se $\mathbb{A}$ é uma $*$-álgebra unital, e $a \in \mathbb{A}$, então*

$$\sigma(a^*) = \sigma(a)^* = \{\overline{\lambda} \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Demonstração. ($\subseteq$) Para mostrarmos que $\sigma(a^*) \subseteq \sigma(a)^*$, vejamos que $(\sigma(a)^*)^c \subseteq \rho(a^*)$. Considere $\lambda \in (\sigma(a)^*)^c$. Então, $\lambda \notin \sigma(a)^*$, ou seja, $\overline{\lambda} \notin \sigma(a)$. Segue que

$$a - \overline{\lambda}1_{\mathbb{A}} \in inv(\mathbb{A}).$$

Logo, existe $b \in inv(\mathbb{A})$, tal que

$$(a - \overline{\lambda}1_{\mathbb{A}})b = b(a - \overline{\lambda}1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{A}}.$$

Portanto,

$$((a - \overline{\lambda}1_{\mathbb{A}})b)^* = (b(a - \overline{\lambda}1_{\mathbb{A}}))^* = 1_{\mathbb{A}}{}^*.$$

Assim,

$$b^*(a^* - \lambda 1_{\mathbb{A}}) = (a^* - \lambda 1_{\mathbb{A}})b^* = 1_{\mathbb{A}},$$

ou seja, $\lambda \in \rho(a^*)$.

($\supseteq$) Para notarmos que $\sigma(a)^* \subseteq \sigma(a^*)$, mostremos que $(\sigma(a^*))^c \subseteq (\sigma(a)^*)^c$, ou seja, $\rho(a^*) \subseteq (\sigma(a)^*)^c$. Para tanto, seja $\lambda \in \rho(a^*)$. Então, existe $b \in \mathbb{A}$ tal que

$$(a^* - \lambda 1_{\mathbb{A}})b = b(a^* - \lambda 1_{\mathbb{A}}) = 1_{\mathbb{A}}.$$

Segue que

$$((a^* - \lambda 1_{\mathbb{A}})b)^* = (b(a^* - \lambda 1_{\mathbb{A}}))^* = 1_{\mathbb{A}}{}^*,$$

isto é,

$$b^*(a - \overline{\lambda}1_{\mathbb{A}}) = (a - \overline{\lambda}1_{\mathbb{A}})b^* = 1_{\mathbb{A}}.$$

Assim, $\overline{\lambda} \in \sigma(a)$ e, consequentemente, $\lambda \in \sigma(a)^*$.

$\square$

Definição 7.2. *Se $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ é um homomorfismo de $*$-álgebras $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ e φ preserva adjuntos, isto é,*

$$\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*,$$

para todo $a \in \mathbb{A}$, então, dizemos que φ é um $*$-homomorfismo. Além disso, se φ for uma bijeção, dizemos que é um $*$-isomorfismo.

Definição 7.3. *Uma $*$-álgebra de Banach $\mathbb{A}$ é uma $*$-álgebra munida com uma norma submultiplicativa, com a qual é completa e $\| a^* \| = \| a \|$ para todo $a \in \mathbb{A}$. Se $\mathbb{A}$ possuir unidade, com $\| 1_{\mathbb{A}} \| = 1$, dizemos que a é uma $*$-álgebra de Banach unital.*

Definição 7.4. *Uma C^*-álgebra é uma $*$-álgebra de Banach para a qual vale*

$$\| a^*a \| = \| a \|^2,$$

para todo $a \in \mathbb{A}$.

Como uma $*$-subálgebra fechada $\mathbb{B}$ de uma C^*-álgebra $\mathbb{A}$ é completa, $\mathbb{B}$ é uma C^*-álgebra. Define-se uma $*$-subálgebra fechada de uma C^*-álgebra como uma C^*-subálgebra.

Se uma C^*-álgebra tem unidade $1_{\mathbb{A}}$, então, automaticamente, $\| 1_{\mathbb{A}} \| = e$, pois

$$\| 1_{\mathbb{A}} \| = \| 1_{\mathbb{A}}{}^* \| = \| 1_{\mathbb{A}}{}^*.1_{\mathbb{A}} \| = \| 1_{\mathbb{A}} \|^2 .$$

Vejamos um exemplo de uma $*$-álgebra de Banach que não é uma C^*-álgebra:

Exemplo 7.1. *Considere $M_n(\mathbb{C})$ com a seguinte norma:*

$$\| A \| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$$

e a operação produto da forma

$$A.B = 0,$$

para todo $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Note que tal norma é submultiplicativa, pois,

$$0 = \| AB \| \leqslant \| A \| \, . \, \| B \|,$$

para todo $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. A involução em $A \in M_n(\mathbb{C})$ é dada pela transposta conjugada de A,

$$A^* = A^H.$$

$M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra de Banach. Além disso,

$$\| A^* \| = \| A^H \| = \sum_{j,i} |\overline{a_{ji}}| = \sum_{i,j} |a_{ij}| = \| A \| .$$

Portanto, $M_n(\mathbb{C})$ é uma $*$-álgebra de Banach. Entretanto, $M_n(\mathbb{C})$ não é uma C^*-álgebra, pois

$$0 =|| A^*A || \neq || A ||^2,$$

para todo $A \neq 0$.

Exemplo 7.2. *Se H é um espaço de Hilbert, $B(H)$ é uma C^*-álgebra, como será demonstrado no Apêndice: Operadores em Espaços de Hilbert.*

Exemplo 7.3. *Se Ω é um espaço localmente compacto Hausdorff, então $C_0(\Omega)$ é uma C^*-álgebra, com involução dada pela conjugação $f \longmapsto \overline{f}$.*

Teorema 7.1. *Se a é um elemento auto-adjunto em uma C^*-álgebra $\mathbb{A}$, então*

$$r(a) =|| a || .$$

Demonstração. Vejamos que $|| a^{2^n} ||=|| a ||^{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Para o caso $n = 1$, como a é auto-adjunto e $\mathbb{A}$ é uma C^*-álgebra,

$$|| a^2 ||=|| a.a ||=|| a^*a ||=|| a ||^2 .$$

Suponha que a igualdade é válida para $n = k$ e note que para o caso $n = k + 1$, temos

$$|| a^{2^{k+1}} ||=|| a^{2^k.2} ||=|| a^{2^k(1+1)} ||$$

$$=|| a^{2^k+2^k} ||=|| a^{2^k}.a^{2^k} ||=|| (a^{2^k})^*a^{2^k} || .$$

Como $\mathbb{A}$ é C^*-álgebra,

$$|| (a^{2^k})^*a^{2^k} ||=|| a^{2^k} ||^2 .$$

Pela hipótese de indução,

$$|| a^{2^k} ||^2=|| a ||^{2^k.2}=|| a ||^{2^{k+1}} .$$

Portanto, pelo Teorema de Beurling,

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} || a^n ||^{\frac{1}{n}}= \lim_{n\to\infty} || a^{2^n} ||^{\frac{1}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} || a ||^{2^n\cdot\frac{1}{2^n}}= \lim_{n\to\infty} || a ||=|| a || .$$

□

Corolário 7.1. *Existe no máximo uma norma em uma $*$-álgebra $\mathbb{A}$ que a torna uma C^*-álgebra.*

Demonstração. Considere $|| \cdot ||$ uma norma em $\mathbb{A}$, que a torna uma C^*-álgebra. Assim, se $a \in \mathbb{A}$,

$$|| a ||^2=|| a^*a || .$$

Como

$$(a^*a)^* = a^*a^{**} = a^*a,$$

ou seja, a^*a é auto-adjunto. Pelo Teorema 7.1,

$$\| a \|^2 = \| a^*a \| = r(a^*a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^*a)\}.$$

Sendo assim, $\| a \|$ é definido de maneira única

$$\| a \| = \sqrt{r(a^*a)}.$$

$\square$

Lema 7.1. *Seja $\mathbb{A}$ uma $*$-álgebra de Banach tal que, para todo $a \in \mathbb{A}$,*

$$\| a \|^2 \leqslant \| a^*a \| .$$

Então, $\mathbb{A}$ é uma C^*-álgebra.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{A}$. Como $\mathbb{A}$ é submultiplicativa,

$$\| a^*a \| \leqslant \| a^* \| . \| a \| .$$

Como $\mathbb{A}$ é $*$-álgebra de Banach,

$$\| a \| = \| a^* \| .$$

Assim,

$$\| a^*a \| \leqslant \| a^* \| . \| a \| = \| a \| . \| a \| = \| a \|^2 .$$

Logo, $\| a^*a \| = \| a \|^2$. Sendo assim, $\mathbb{A}$ é C^*-álgebra. $\square$

Teorema 7.2. *Seja $\mathbb{A}$ uma C^*-álgebra. Então, $\mathbb{A}^+$ admite uma única C^*-norma que estende a norma de $\mathbb{A}$.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $\mathbb{A}$ é unital. Considere $B = \mathbb{A} \oplus \mathbb{C}$.

Afirmação 7.1. *A soma direta $B = \mathbb{A} \oplus \mathbb{C}$, com operação produto da forma:*

$$(a, \lambda).(b, \mu) = (ab, \lambda\mu)$$

e, norma dada por

$$\| (a, \lambda) \| = \max\{\| a \|, |\lambda| : a \in \mathbb{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

é uma álgebra de Banach. Além disso, como $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ são C^*-álgebra, B é uma C^*-álgebra com involução definida entrada a entrada.

Claro que B é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Além disso, para $(a, \alpha), (b, \beta)$ e $(c, \gamma) \in B$,

$$((a, \alpha).(b, \beta))(c, \gamma) = (ab, \alpha\beta)(c, \gamma)$$

$$= ((ab)c, (\alpha\beta)\gamma)$$

$$= (a(bc), \alpha(\beta\gamma))$$

$$= (a, \alpha)((b, \beta).(c, \gamma)).$$

Note que a norma de B é submultiplicativa, pois, se $(a, \alpha), (b, \beta) \in B$,

$$|| (a, \alpha).(b, \beta) ||=|| (ab, \alpha\beta) ||$$

$$= \max\{|| ab ||, |\alpha\beta| : a, b \in \mathbb{A}, \alpha\ \beta \in \mathbb{C}\}$$

$$\leqslant \max\{|| a || \ . \ || b ||, |\alpha|.|\beta| : a, b \in \mathbb{A}, \alpha\ \beta \in \mathbb{C}\}$$

$$\leqslant \max\{|| a ||, |\alpha| : a \in \mathbb{A}, \alpha\ \ \in \mathbb{C}\}. \max\{|| b ||, |\beta| : b \in \mathbb{A}, \beta \in \mathbb{C}\}$$

$$=|| (a, \alpha) || \ . \ || (b, \beta) || \ .$$

Vejamos agora que B é uma álgebra de Banach. Para tanto, considere $(a_n, \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ uma sequência de Cauchy. Então, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geqslant n_0$,

$$|| (a_n, \lambda_n) - (a_m, \lambda_m) ||=|| (a_n - a_m, \lambda_n - \lambda_m) ||= \max\{|| a_n - a_m ||, |\lambda_n - \lambda_m|\} < \varepsilon.$$

Assim, para todo $m, n \geqslant n_0$,

$$|| a_n - a_m ||< \varepsilon \text{ e } |\lambda_n - \lambda_m| < \varepsilon.$$

Segue que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$, respectivamente. Como $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ são álgebras de Banach, existem $a \in \mathbb{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que

$$a_n \longrightarrow a \in \mathbb{A} \text{ e } \lambda_n \longrightarrow \lambda \in \mathbb{C}.$$

Logo,

$$(a_n, \lambda_n) \longrightarrow (a, \lambda) \in B.$$

Sendo assim, B é álgebra de Banach.

Definindo a involução em B da forma:

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \overline{\lambda})$$

e, como

$$|| (a, \lambda)^* ||=|| (a^*, \overline{\lambda}) ||$$

$$= \max\{|| a^* ||, |\overline{\lambda}| : a \in \mathbb{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

$$= \max\{|| a ||, |\lambda| : a \in \mathbb{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

$$=|| (a, \lambda) || \ .$$

Portanto, B é uma $*$-álgebra de Banach. Agora,

$$|| (a, \lambda) ||^2= (\max\{|| a ||, |\lambda|\})^2$$

$$= \max\{\| a \|^2, |\lambda|^2\}$$

$$= \max\{\| a^*a \|, |\overline{\lambda}\lambda|\}$$

$$=\| (a^*a, \overline{\lambda}\lambda) \|$$

$$=\| (a^*, \overline{\lambda})(a, \lambda) \|$$

$$=\| (a, \lambda)^*(a, \lambda) \| .$$

Portanto, B é uma C^*-álgebra.

Defina

$$\varphi : \mathbb{A}^+ \longrightarrow B$$

$$(a, \lambda) \longmapsto (a + \lambda 1_{\mathbb{A}}, \lambda).$$

Note que φ é um isomorfismo. De fato, verificando a operação produto

$$\varphi((a, \lambda)(b, \mu)) = \varphi((ab + \mu a + b\lambda, \lambda\mu))$$

$$= (ab + \mu a + b\lambda + \lambda\mu 1_{\mathbb{A}}, \lambda\mu)$$

$$= ((a + \lambda 1_{\mathbb{A}})(b + \mu 1_{\mathbb{A}}), \lambda\mu)$$

$$= (a + \lambda 1_{\mathbb{A}}, \lambda)(b + \mu 1_{\mathbb{A}}, \mu)$$

$$= \varphi(a, \lambda)\varphi(b, \mu).$$

Note que φ é injetora, pois, se $\varphi(a, \lambda) = (0, 0)$, então $\lambda = 0$ e $a+\lambda 1_{\mathbb{A}} = 0$, ou seja, $a+01_{\mathbb{A}} = 0$. Portanto, $a = 0$. Para a sobrejetividade, se $(b\mu) \in B$, note que

$$\varphi(b - \mu 1_{\mathbb{A}}, \mu) = (b - \mu 1_{\mathbb{A}} + \mu 1_{\mathbb{A}}, \mu) = (b, \mu).$$

Pela afirmação acima, define-se a seguinte C^*-norma em $\mathbb{A}^+$

$$\| (a, \lambda) \|_{\mathbb{A}^+} =\| \varphi(a, \lambda) \|_B .$$

Vejamos agora o caso em que $\mathbb{A}$ não possui unidade. Mostremos que $\mathbb{A}^+$ admite uma norma que estende a norma de $\mathbb{A}$ e a torna uma C^*-álgebra.

Afirmação 7.2. *Considere $B(\mathbb{A})$ a álgebra de Banach dos operadores lineares limitados sobre $\mathbb{A}$. Dado, $a \in \mathbb{A}$, seja $L_a \in B(\mathbb{A})$ definido da forma:*

$$L_a : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$b \longmapsto ab.$$

Então,

$$\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow B(\mathbb{A})$$

$$a \longmapsto L_a$$

é um homomorfismo isométrico de álgebras normadas.

Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e a, a_1, a_2 e $b \in \mathbb{A}$. Então,

- $$\varphi(a_1 + a_2) = L_{a_1+a_2}$$
$$L_{a_1+a_2}(b) = (a_1 + a_2)b = a_1 b + a_2 b$$
$$= L_{a_1}(b) + L_{a_2}(b) = (L_{a_1} + L_{a_2})(b) = (\varphi(a_1) + \varphi(a_2))(b).$$

- $$\varphi(a_1.a_2) = L_{a_1.a_2}$$
$$L_{a_1.a_2}(b) = (a_1.a_2)b = a_1(a_2.b)$$
$$= a_1 L_{a_2}(b) = L_{a_1}(L_{a_2}(b))$$
$$= (L_{a_1} \circ L_{a_2})(b) = (\varphi(a_1) \circ \varphi(a_2))(b).$$

- $$\varphi(\lambda a) = L_{\lambda a}$$
$$L_{\lambda a}(b) = (\lambda a)b$$
$$= \lambda(ab) = \lambda L_a(b) = \lambda(\varphi(a))(b).$$

- φ é isométrico, pois
$$|| L_a ||= \sup\{|| L_a(b) ||: b \in \mathbb{A}, || b ||\leqslant 1\}$$
$$= \sup\{|| ab ||: b \in \mathbb{A}, || b ||\leqslant 1\}$$
$$\leqslant \sup\{|| a || \,.\, || b ||: b \in \mathbb{A}, || b ||\leqslant 1\}$$
$$\leqslant || a || \,.1 =|| a || \,.$$

  Agora,
$$|| L_a(\frac{a}{|| a ||}) ||=|| a\frac{a}{|| a ||} ||= \frac{|| a ||^2}{|| a ||} =|| a || \,.$$

Afirmação 7.3. $B = \{L_a + \lambda I : a \in \mathbb{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ *é subálgebra fechada de* $B(\mathbb{A})$.

Pela demonstração da afirmação acima, vimos que $C = \{L_a : a \in \mathbb{A}\}$ é um subespaço de $B(\mathbb{A})$. Vejamos que C é fechado. Para tanto, considere $L \in \overline{C}$. Então existe uma sequência $(L_{a_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$, tal que $L_{a_n} \longrightarrow L$.

Como $(L_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente, tem-se que está é uma sequência de Cauchy. Assim, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geqslant n_0$,
$$|| L_{a_n} - L_{a_m} ||< \varepsilon.$$

Como φ é isometria, tem-se que

$$|| a_n - a_m ||=|| \varphi(a_n) - \varphi(a_m) ||=|| L_{a_n} - L_{a_m} ||< \varepsilon.$$

Sendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em $\mathbb{A}$, que é completo, existe um elemento $a \in \mathbb{A}$ tal que $a_n \longrightarrow a$. Assim,

$$L_a = \varphi(a) = \varphi(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) = \lim_{n\to\infty} L_{a_n} = L.$$

Logo, $L = L_a \in C$. Segue que C é uma subespaço fechado de $B(\mathbb{A})$. Agora, como B é a soma do subespaço fechado C de $B(\mathbb{A})$ com o subespaço de dimensão finita de $B(\mathbb{A})$ $\{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$, tem-se que B é um subespaço fechado de $B(\mathbb{A})$. Como $B(\mathbb{A})$ é uma álgebra normada, segue que B também é. Note que em B,

$$|| L_a + \lambda I ||= \sup\{|| ab + \lambda b ||: b \in \mathbb{A}, || b ||\leqslant 1\}.$$

Afirmação 7.4. *B é uma C^*-álgebra com involução dada por*

$$(L_a + \lambda I)^* = L_{a^*} + \overline{\lambda} I.$$

De fato, se $a, b \in \mathbb{A}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

-
$$((L_a + \lambda I) + (L_b + \mu I))^* = (L_{a+b} + (\lambda + \mu)I)^* =$$
$$= L_{(a+b)^*} + \overline{(\lambda + \mu)} I = (L_a + \lambda I)^* + (L_b + \mu I)^*.$$

-
$$((L_a + \lambda I).(L_b + \mu I))^* = (L_{a.b} + L_{\mu a} + L_{\lambda b} + (\lambda.\mu)I)^* =$$
$$= L_{(a.b)^*} + L_{\overline{\mu} a^*} + L_{\overline{\lambda} b^*} + \overline{(\lambda.\mu)} I = L_{b^* a^*} + L_{\overline{\mu} a^*} + L_{\overline{\lambda} b^*} + \overline{(\mu.\lambda)} I$$
$$= (L_b + \mu I)^* .(L_a + \lambda I)^*.$$

Vejamos que B é C^*-álgebra. Para tanto, basta mostrar que

$$|| L_a + \lambda I ||=|| (L_a + \lambda I)^* ||$$

e que

$$|| L_a + \lambda I ||^2=|| (L_a + \lambda I)^* (L_a + \lambda I) || .$$

De fato,

$$|| L_a + \lambda I ||^2= (\sup_{||b||\leqslant 1} || (L_a + \lambda I)(b))^2$$
$$= \sup_{||b||\leqslant 1} || ab + \lambda b ||^2$$
$$= \sup_{||b||\leqslant 1} || (ab + \lambda b)^* (ab + \lambda b) ||$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{||b||\leqslant 1} || \, b^*a^*ab + b^*a^*\lambda b + \overline{\lambda} b^*ab + |\lambda|^2 b^*b \, || \\
&\leqslant \sup_{||b||\leqslant 1} || \, b^* \, |||| \, a^*ab + a^*\lambda b + \overline{\lambda} ab + |\lambda|^2 b \, || \\
&\leqslant \sup_{||b||\leqslant 1} || \, a^*ab + a^*\lambda b + \overline{\lambda} ab + |\lambda|^2 b \, || \\
&\leqslant \sup_{||b||\leqslant 1} || \, (L_a^* + \overline{\lambda} I)(L_a + \lambda I)(b) \, || \\
&\leqslant \sup_{||b||\leqslant 1} || \, (L_a^* + \overline{\lambda} I) \, || \, . \, || \, (L_a + \lambda I)(b) \, || \\
&= || \, (L_a^* + \overline{\lambda} I) \, || \sup_{||b||\leqslant 1} || \, (L_a + \lambda I)(b) \, || \\
&= || \, (L_a^* + \overline{\lambda} I) \, || \, . \, || \, L_a + \lambda I \, || \, .
\end{aligned}
$$

Como

$$|| \, L_a + \lambda I \, ||^2 \leqslant || \, (L_a^* + \overline{\lambda} I) \, || \, . \, || \, L_a + \lambda I \, ||,$$

então,

$$|| \, L_a + \lambda I \, || \leqslant || \, (L_a^* + \overline{\lambda} I) \, || \, .$$

Além disso,

$$|| \, (L_a^* + \overline{\lambda} I) \, || \leqslant || \, (L_a^* + \overline{\lambda} I)^* \, || = || \, L_a + \lambda I \, || \, .$$

Logo,

$$|| \, L_a + \lambda I \, || = || \, (L_a + \lambda I)^* \, || \, .$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
|| \, L_a + \lambda I \, ||^2 &\leqslant \sup_{||b||\leqslant 1} || \, (L_a + \lambda I)^*(L_a + \lambda I)(b) \, || \\
&\leqslant \sup_{||b||\leqslant 1} || \, (L_a + \lambda I)^*(L_a + \lambda I) \, || \, . \, || \, b \, || \\
&= || \, (L_a + \lambda I)^*(L_a + \lambda I) \, || \, .
\end{aligned}
$$

Assim,

$$|| \, L_a + \lambda I \, ||^2 \leqslant || \, (L_a + \lambda I)^*(L_a + \lambda I) \, || \leqslant || \, (L_a + \lambda I)^* \, || \, . \, || \, (L_a + \lambda I) \, || = || \, L_a + \lambda I \, ||^2 \, .$$

Portanto,

$$|| \, L_a + \lambda I \, ||^2 = || \, (L_a + \lambda I)^*(L_a + \lambda I) \, || \, .$$

Considere $\mathbb{A}^+$ a unitização de $\mathbb{A}$, sem uma norma estabelecida, e defina

$$\psi : \mathbb{A}^+ \longrightarrow B$$

$$(a, \lambda) \longmapsto L_a + \lambda I.$$

Vejamos que ψ é um isomorfismo.

- Se $(a,\lambda),(b,\mu) \in A^+$,

$$\psi((a,\lambda)+(b,\mu)) = \psi(a+b,\lambda+\mu)$$

$$= L_{a+b} + (\lambda+\mu)I = (L_a + \lambda I) + (L_b + \mu I)$$

$$= \psi(a,\lambda) + \psi(b,\mu).$$

- Se $(a,\lambda),(b,\mu) \in A^+$,

$$\psi(a,\lambda).\psi(b,\mu) = (L_a + \lambda I).(L_b + \mu I)$$

$$= L_a L_b + \mu L_a + \lambda L_b + \lambda\beta I.$$

  Assim como

$$\psi((a,\lambda)(b,\mu)) = \psi(ab + a\mu + \lambda b, \lambda\mu)$$

$$= L_{(ab+a\mu+\lambda b)} + \lambda\mu I$$

$$= L_{ab} + L_{a\mu} + L_{\lambda b} + \lambda\mu I.$$

- Se $(a,\lambda) \in \mathbb{A}^+$,

$$(\psi(a,\lambda))^* = (L_a + \lambda I)^*$$

$$= L_{a^*} + \overline{\lambda} I$$

$$= \psi((a^*,\overline{\lambda})) = \psi((a,\lambda)^*).$$

É imediato que ψ é sobrejetor. Mostremos que ψ é injetora. De fato, suponha que $\psi(a,\lambda) = 0$. Então, $(L_a + \lambda I)(b) = 0$, para todo $b \in \mathbb{A}$.

Caso $\lambda = 0$, $L_a(b) = ab = 0$, para todo $b \in \mathbb{A}$, ou seja, $a = 0$. Caso $\lambda \neq 0$, para todo $b \in \mathbb{A}$,

$$0 = (L_a + \lambda I)(b) = ab + \lambda b,$$

$$ab = -\lambda b$$

$$b = \frac{-a}{\lambda} b.$$

Denote $u = \frac{-a}{\lambda}$. Note que, para todo $b \in \mathbb{A}$,

$$b = ub$$

$$b^* = b^* u^*.$$

Assim, para todo $c \in \mathbb{A}$,

$$c = cu^*.$$

Em particular,

$$u = uu^*$$

$$u^* = (uu^*)^* = uu^* = u.$$

Logo, u é a unidade de $\mathbb{A}$, o que contradiz o fato que $\mathbb{A}$ não possui unidade. Conclui-se que

$(a, \lambda) = (0, 0)$ e, assim, ψ é injetora.

Como A^+ é isomorfa a C^*-álgebra B, A^+ é uma C^*-álgebra com a norma, que estende a norma de $\mathbb{A}$, definida da forma:

$$\| (a, \lambda) \|_{\mathbb{A}^+} = \| L_a + \lambda I \|_B = \sup\{\| ab + \lambda b \| : b \in \mathbb{A}, \| b \| \leqslant 1\}.$$

□

Teorema 7.3. *Um $*$-homomorfismo $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ de uma $*$-álgebra de Banach $\mathbb{A}$ em uma C^*-álgebra $\mathbb{B}$ é contrativo, isto é,*

$$\| \varphi(a) \| \leqslant \| a \|,$$

para todo $a \in \mathbb{A}$.

Demonstração. Primeiramente, vejamos o caso em que $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e φ são unitais. Seja $a \in \mathbb{A}$. Pela Proposição 6.1,

$$\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a).$$

Assim, como $\mathbb{B}$ é C^*-álgebra e φ é $*$-homomorfismo,

$$\| \varphi(a) \|^2 = \| (\varphi(a))^* \varphi(a) \| = \| \varphi(a^*) \varphi(a) \| = \| \varphi(a^* a) \| .$$

Agora, note que $\varphi(a^* a)$ é auto-adjunto, pois

$$(\varphi(a^* a))^* = \varphi((a^* a)^*) = \varphi(a^* a).$$

Pelo Teorema 7.1,

$$\| \varphi(a^* a) \| = r(\varphi(a^* a)) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\varphi(a^* a))\}$$

$$\leqslant \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^* a)\} = r(a^* a) \leqslant \| a^* a \| \leqslant \| a^* \| . \| a \| = \| a \|^2 .$$

Assim,

$$\| \varphi(a) \|^2 = \| \varphi(a^* a) \| \leqslant \| a \|^2 .$$

Segue que,

$$\| \varphi(a) \| \leqslant \| a \|,$$

ou seja, φ é contrativo.

Para os outros casos, em que $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ ou φ podem não ser unitais, considere as unitizações de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, $\mathbb{A}^+$ e $\mathbb{B}^+$, e a extensão

$$\varphi^+ : \mathbb{A}^+ \longrightarrow \mathbb{B}^+$$

de

$$\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}.$$

Seja $a \in \mathbb{A}$. Então,

$$\| \varphi(a) \|_{\mathbb{B}} = \| (\varphi(a), 0) \|_{\mathbb{B}^+} = \| \varphi^+(a, 0) \|_{B^+} .$$

Como $\mathbb{A}^+, \mathbb{B}^+$ e φ^+ são unitais, φ^+ é contrativo, ou seja,

$$\| \varphi^{+}(a,0) \|_{B^{+}} \leqslant \| (a,0) \|_{\mathbb{A}^{+}} = \| a \|_{\mathbb{A}} .$$

Disso, seque que

$$\| \varphi(a) \|_{\mathbb{B}} \leqslant \| a \|_{\mathbb{A}} .$$

$\square$

Exemplo 7.4. *Considere a C^*-álgebra $X = (M_n(\mathbb{C}), \| \,.\, \|_{\infty})$. Seja $Y = (M_n(\mathbb{C}), \| \,.\, \|)$, com*

$$\| A \| = 3 \| A \|_{\infty},$$

para todo $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Note que tal norma é submultiplicativa, pois, para todo $A, B \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\| AB \| = 3 \| AB \|_{\infty} \leqslant 3 \| A \|_{\infty} . \| B \|_{\infty} \leqslant 9 \| A \|_{\infty} . \| B \|_{\infty} = \| A \| . \| B \| .$$

Considerando $A^* = A^H$, para todo $A \in M_n(\mathbb{C})$, tem-se

$$\| A^* \| = \| A^H \| = 3 \| A^H \|_{\infty} = 3 \| A \|_{\infty} = \| A \| .$$

Logo, Y é uma $*$-álgebra de Banach. Agora,

$$\| A^*A \| = 3 \| A^*A \|_{\infty} = 3 \| A \|_{\infty}^2 .$$

Enquanto que:

$$\| A \|^2 = (3 \| A \|_{\infty})^2 = 9 \| A \|_{\infty}^2 .$$

Logo, Y não é uma C^*-álgebra. Defina

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

$$A \longmapsto A.$$

Note que Y é apenas uma $*$-álgebra de Banach. Assim, para $A \in X$,

$$\| \varphi(A) \| = \| A \| = 3 \| A \|_{\infty} \geqslant \| A \|_{\infty} .$$

Sendo assim, φ não é contrativo.

8 Conclusão

Uma C^*-álgebra é uma estrutura muito interessante de ser estudada, por possuir exemplos relevantes como o $B(H)$, $M_n(\mathbb{C})$ e o espaço das funções contínuas. Assim, os resultados demonstrados para o caso geral são diretamente aplicáveis nestes contextos.

O trabalho apresentou a demonstração de teoremas importantes como o Teorema do Mapeamento Espectral que facilita a determinação do espectro de um elemento de uma álgebra unital quando este puder ser expresso como a imagem de um polinômio aplicado em um elemento desta mesma álgebra. Além disso, foi demonstrado que o espectro de um elemento é fechado, limitado e, pelo Teorema de Gelfand, é não vazio, considerando que tal elemento está em uma álgebra de Banach unital sobre o corpo dos complexos.

Foi possível observar aplicações dos teoremas demonstrados, no decorrer do trabalho, como o Teorema de Beurling do capítulo (5), que foi utilizado na última seção para mostrar que o raio de um elemento auto-adjunto de uma C^*-álgebra é igual à sua norma. A unitização de álgebras e C^*-álgebras foi abordada no trabalho. Isto permitiu que os resultados fossem válidos para casos mais gerais, em que as estruturas, não necessariamente, possuíam unidade. O teorema final: *Um $*$-homomorfismo $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ de uma $*$-álgebra de Banach $\mathbb{A}$ em uma C^*-álgebra $\mathbb{B}$ é contrativo, isto é, $\| \varphi(a) \| \leqslant \| a \|$, para todo $a \in \mathbb{A}$* ; foi um dentre os que demandaram o uso de unitizações.

De modo geral, os objetivos propostos para este trabalho foram cumpridos. O trabalho apresentou de maneira detalhada um conteúdo que introduz o estudo de Álgebra de Operadores, assumindo, para isso, resultados bem conhecidos de Análise Funcional.

9 Apêndice: Operadores em Espaços de Hilbert

Iniciemos está seção com a definição de espaço de Hilbert e com um lema que será utilizado no próximo tópico.

Definição 9.1. *Um* ***Espaço com produto Interno*** *é um espaço vetorial X com um produto interno definido no mesmo. Um espaço de Hilbert é um espaço completo com produto interno. Um* **produto interno em** *X é uma função de $X \times X$ para o corpo de escalares $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de X, ou seja, para todo par de vetores x e y há um escalar associado, $< x, y >$, chamado produto interno de x e y.*
Sendo que, para x, y e $z \in X$ e $\alpha \in K$, tem-se

1. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$;

2. $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$;

3. $< x, y >= \overline{< y, x >}$;

4. $< x, x >\geqslant 0$;
   $< x, x >= 0$ *se, e somente se,* $x = 0$.

Um produto interno induz uma **norma em X** dada por

$$|| x ||= \sqrt{< x, x >}.$$

Portanto, espaços com produto interno são normados e espaços de Hilbert são espaços de Banach.

Lema 9.1. **{*Núcleo fechado*}** *Sejam X e Y espaços normados e considere*

$$T : X \longrightarrow Y,$$

um operador linear limitado. Então o núcleo de T, $N(T)$, é fechado.

Demonstração. Mostremos que o núcleo de T é igual ao seu fecho, $\overline{N(T)}$. Para tanto, escolha $x \in \overline{N(T)}$, por definição, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N(T)$, tal que $x_n \longrightarrow x$. Como T é um operador limitado, ele é contínuo. Disso, segue que $Tx_n \longrightarrow Tx$. Como $Tx_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $Tx = 0$. Logo, $N(T) = \overline{N(T)}$. □

9.1 Representação de funcionais em espaços de Hilbert

Teorema 9.1. ***Teorema de Riesz*** *Todo funcional linear limitado f em um espaço de Hilbert H pode ser representado em termos de um produto interno:*

$$f(x) =< x, \boldsymbol{z} >,$$

onde $\boldsymbol{z}$ *depende de f, é determinado unicamente por f e tem norma*

$$|| z ||=|| f || .$$

Demonstração. Esta demonstração será dividida em três partes:

Afirmação 9.1. *f possui uma representação $f(x) =< x, \boldsymbol{z} >$.*

Demonstração. Se $f = 0$, escolha $\mathbf{z} = 0$. Então $f(x) =< x, \mathbf{z} >$ e $|| \mathbf{z} ||=|| f ||$.

Para o caso $f \neq 0$, vejamos quais propriedades $\mathbf{z}$ deve satisfazer para que tal representação exista. Primeiramente, $z \neq 0$, caso contrário, $f = 0$.

Como f é um funcional linear, $N(f)$ é um espaço vetorial e, por f ser também limitado, pelo **Lema do Núcleo fechado**, $N(f)$ é fechado. Sendo $f \neq 0$, $N(f) \neq H$. Portanto, pelo Teorema da soma direta, $N(f)^{\perp} \neq 0$. Assim, $N(f)^{\perp}$ contém um $z_0 \neq 0$. Escolha

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x,$$

onde $x \in H$ é arbitrário.

Aplicando f,

$$f(v) = f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0.$$

Portanto, $v \in N(f)$.

Como $z_0 \in N(f)^{\perp}$,

$$0 =< v, z_0 >=< f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 >=$$

$$f(x) < z_0, z_0 > -f(z_0) < x, z_0 > .$$

Note que $< z_0, z_0 >=|| z_0 ||^2 \neq 0$. Então,

$$f(x) = \frac{f(z_0) < x, z_0 >}{< z_0, z_0 >}.$$

Denote

$$\mathbf{z} = \frac{\overline{f(z_0)} z_0}{< z_0, z_0 >},$$

como o produto interno é linear conjugado na segunda entrada, segue que

$$< x, \mathbf{z} >=< x, \frac{\overline{f(z_0)}}{< z_0, z_0 >} z_0 >= \frac{f(z_0) < x, z_0 >}{< z_0, z_0 >} = f(x).$$

Sendo $x \in H$ arbitrário, a primeira afirmação está demonstrada.

Afirmação 9.2. *$\boldsymbol{z} \in H$, satisfazendo $f(x) =< x, \boldsymbol{z} >$, é único.*

Demonstração. Suponha que para qualquer $x \in H$, existam z_1 e z_2, tais que

$$f(x) =< x, z_1 >=< x, z_2 > .$$

Assim, para todo $x \in H$,

$$0 =< x, z_1 - z_2 > .$$

Considere $x = z_1 - z_2$, tem-se

$$0 =< z_1 - z_2, z_1 - z_2 >=|| z_{-} z_2 ||^2 .$$

Por definição de norma, $z_1 = z_2$. Segue a unicidade.

Afirmação 9.3. $\| \boldsymbol{z} \| = \| f \|$. *Demonstração. Se $f = 0$, então $\boldsymbol{z} = 0$ e $\| \boldsymbol{z} \| = \| f \|$. Caso $f \neq 0$, tem-se $\boldsymbol{z} \neq 0$. Pela primeira afirmação,*

$$f(x) = < x, \boldsymbol{z} > .$$

Portanto,

$$\| \boldsymbol{z} \|^2 = < \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} > = |f(\boldsymbol{z})| \leqslant \| f \| . \| \boldsymbol{z} \| .$$

Como $z \neq 0$,

$$\| \boldsymbol{z} \| \leqslant \| f \| .$$

Para demonstrar a igualdade, bata provar que $\| f \| \leqslant \| \boldsymbol{z} \|$. Usando a desigualdade de Schwarz, segue que

$$|f(x)| = | < x, \boldsymbol{z} > | \leqslant \| x \| . \| z \| .$$

Assim,

$$\| f \| = \sup_{\|x\|=1} | < x, \boldsymbol{z} > | \leqslant \| z \| .$$

Logo,

$$\|f\| = \| \boldsymbol{z} \| .$$

□

Lema 9.2. **{*Igualdade*}** *Se em um espaço com produto interno X,*

$$< v_1, w > = < v_2, w >,$$

para todo $w \in X$, então $v_1 = v_2$. Em particular, se $< v_1, w > = 0$, para todo $w \in X$, segue que $v_1 = 0$.

Demonstração. Por hipótese, para todo $w \in X$,

$$< v_1 - v_2, w > = < v_1, w > - < v_2, w > = 0.$$

Para $w = v_1 - v_2$, tem-se $\| v_1 - v_2 \|^2 = 0$. Por definição de norma, $v_1 = v_2$. Por sua vez, se $< v_1, w > = 0$ para todo $w \in X$, escolha $w = v_1$. Assim, $\| v_1 \|^2 = 0$, implicando $v_1 = 0$.

Definição 9.2. **{*Forma sesquilinear*}** *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Então, uma* ***forma*** *ou* ***um funcional sesquilinear*** *h em $X \times Y$ é uma função*

$$h : X \times Y \longrightarrow K$$

satisfazendo, para todo $x, x_1, x_2 \in X$ e $y, y_1, y_2 \in Y$ e para todo $\alpha, \beta \in K$:

1. *$h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$;*

2. *$h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$;*

3. $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$;

4. $h(x, \beta y) = \overline{\beta} h(x, y)$.

Assim, h é linear na primeira entrada e linear conjugado na segunda, ou ainda bilinear caso $K = \mathbb{R}$.

*Se X e Y são **espaços normados** e existe $c \in \mathbb{R}$, tal que, para todo $(x, y) \in X \times Y$,*

$$|h(x, y)| \leqslant c \mid\mid x \mid\mid . \mid\mid y \mid\mid,$$

*então h é dita **limitada**, e o número*

$$\mid\mid h \mid\mid = \sup_{(x,y) \in X \times Y \setminus \{(0,0)\}} \frac{|h(x, y)|}{\mid\mid x \mid\mid . \mid\mid y \mid\mid} = \sup_{\mid\mid x \mid\mid = \mid\mid y \mid\mid = 1} |h(x, y)||$$

*é chamado **norma de h**.*

Note que

$$|h(x, y)| \leqslant \mid\mid h \mid\mid . \mid\mid x \mid\mid . \mid\mid y \mid\mid .$$

O produto interno, por exemplo, é sesquilinear e limitado.

Pelo Teorema de Riesz, pode-se encontrar um representação geral para formas sesquilineares em espaços de Hilbert.

Teorema 9.2. **{*Representação de Riesz*}** *Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert e*

$$h : H_1 \times H_2 \longrightarrow K$$

*uma **forma sesquilinear**. Então h tem uma representação*

$$h(x, y) = < Sx, y >,$$

*onde $S : H_1 \longrightarrow H_2$ é um **operador linear limitado**. Sendo que S é unicamente determinado por h e tem norma*

$$\mid\mid S \mid\mid = \mid\mid h \mid\mid .$$

Demonstração. Consideremos $\overline{h(x, y)}$, que é linear em y. De fato, se $y = \alpha w$, então,

$$\overline{h(x, y)} = \overline{h(x, \alpha w)} = \overline{\overline{\alpha} h(x, y)} = \alpha \overline{h(x, y)}.$$

Para que o terorema de Riesz possa ser usado, fixemos x. Logo, existe uma representação para $\overline{h(x, .)}$ na qual y é variável, digamos,

$$\overline{h(x, y)} = < y, \mathbf{z}_x > .$$

Portanto,

$$h(x, y) = < \mathbf{z}_x, y >,$$

onde $\mathbf{z}_x \in H_2$ é único para cada $x \in H_1$. Assim, $h(x,y) =< \mathbf{z}_x, y >$, com x variando, define um operador

$$S : H_1 \longrightarrow H_2$$

$$x \longmapsto Sx = \mathbf{z}_x.$$

Substituindo $\mathbf{z}_x = Sx$, tem-se

$$h(x,y) =< Sx, y >,$$

como afirmado.

Vejamos agora que S é linear. O domínio de S é o espaço vetorial H_1 e como h é sesquilinear com $h(x,y) =< Sx, y >$, obtém-se:

$$< S(\alpha x_1 + \beta x_2), y >= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) =$$

$$\alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) =$$

$$\alpha < Sx_1, y > +\beta < Sx_2, y >=$$

$$< \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y >,$$

para todo $y \in H_2$. Assim, pelo Lema da Igualdade,

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2.$$

Mostremos que S é também limitado. Ignorando o caso trivial em que $S = 0$, tem-se

$$|| h ||= \sup_{x,y\neq 0} \frac{|h(x,y)|}{|| x || \, . \, || y ||} =$$

$$\sup_{x,y\neq 0} \frac{| < Sx, y > |}{|| x || \, . \, || y ||} \geqslant \sup_{x,Sx\neq 0} \frac{| < Sx, Sx > |}{|| x || \, . \, || Sx ||} =$$

$$\sup_{x,Sx\neq 0} \frac{|| Sx ||^2}{|| x || \, . \, || Sx ||} = \sup_{x\neq 0} \frac{|| Sx ||}{|| x ||} =|| S || .$$

Logo, $|| S ||=|| h ||$.

Provemos a unicidade de S. Suponha que exista um operador linear

$$T : H_1 \longrightarrow H_2,$$

tal que para todo $x \in H_1$ e $y \in H_2$, tenha-se:

$$h(x,y) =< Sx, y >=< Tx, y > .$$

Pelo Lema da Igualdade, $Sx = Tx$, para todo $x \in H_1$, isto é, $S = T$. □

9.2 Operador Hilbert-adjunto

Definição 9.3. $\{$***Operador Hilbert-adjunto*** $T^*\}$ *Seja* $T : H_1 \longrightarrow H_2$ *um operador linear limitado, onde* H_1 *e* H_2 *são espaços de Hilbert. O operador Hilbert-adjunto* T^* *de* T *é da forma:*

$$T^* : H_2 \longrightarrow H_1,$$

satisfazendo, para todo $x \in H_1$ *e, para todo* $y \in H_2$ *:*

$$< Tx, y >=< x, T^*y > .$$

Vejamos que esta definição é consistente, ou seja, que para um dado T existe tal T^*.

Teorema 9.3. $\{$***Existência***$\}$ *O operador Hilbert-adjunto* T^* *de* T*, como na definição acima, existe, é único e é um operador linear limitado com norma*

$$|| T^* ||=|| T || .$$

Demonstração. A fórmula $h(y, x) =< y, Tx >$ define uma forma sesquilinear em $H_2 \times H_1$, pois o produto interno é sesquilinear e T é linear limitado. É possível demonstrar a linearidade conjugada de h na segunda entrada:

$$h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) =< y, T(\alpha x_1 + \beta x_2) >$$

$$< y, \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 >=$$

$$\overline{\alpha} h(y, x_1) + \overline{\beta} h(y, x_2).$$

Pela desigualdade de Schwarz,

$$|h(y, x)| = | < y, Tx > | \leqslant || y || Tx || \leqslant || T || \,.\, || x || \,.\, || y || .$$

Disso, segue que h é limitada e, $|| h || \leqslant || T ||$. Mais ainda, tem-se:

$$|| h ||= \sup_{x,y\neq 0} \frac{| < y, Tx > |}{|| y || \,.\, || x ||} \geqslant \sup_{x,Tx\neq 0} \frac{| < Tx, Tx > |}{|| Tx |||| x ||} =|| T || .$$

Logo, $|| h ||=|| T ||$. Pelo Teorema da representação de Riesz, denotando S por T^*, temos

$$h(y, x) =< T^*y, x >,$$

e segue do mesmo teorema que $T^* : H_2 \longrightarrow H_1$ é operador linear limitado determinado unicamente por h, com norma

$$|| T^* ||=|| h ||=|| T || .$$

Perceba que

$$h(y, x) =< y, Tx >=< T^*y, x > .$$

Assim,

$$\overline{< Tx, y >} = \overline{< x, T^*y >},$$

isto é,

$$< Tx, y >=< x, T^* y > .$$

Então, T^* é o operador procurado. □

Lema 9.3. **{*Operador nulo*}** *Sejam X e Y espaços com produto interno e $Q : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Então,*

1. $Q = 0$ se, e somente se $< Qx, y >= 0$, para todo $x \in X$ e, para todo $y \in Y$.

2. Se $Q : X \longrightarrow X$, onde X é espaço vetorial sobre o corpo dos complexos, e $< Qx, x >= 0$, para todo $x \in X$, então $Q = 0$.

Demonstração. 1. Se $Q = 0$, então, $Qx = 0$ para todo $x \in X$. Assim, para qualquer $y \in Y$,

$$< Qx, y >=< 0, y >= 0 < w, y >= 0.$$

Por outro lado, se $< Qx, y >= 0$, para todo $x \in X$ e para todo $y \in Y$, então, pelo lema da Igualdade, $Qx = 0$, para todo $x \in X$. Portanto, $Q = 0$, por definição.

2. Tem-se, para todo $v = \alpha x + y$, $v \in X$,

$$< Qv, v >= 0,$$

isto é,

$$0 =< Q(\alpha x + y), \alpha x + y >=$$

$$|\alpha|^2 < Qx, x > + < Qy, y > +\overline{\alpha} < Qy, x > +\alpha < Qx, y > .$$

Por hipótese, os dois primeiros termos são nulos. Escolhendo $\alpha = 1$,

$$< Qx, y > + < Qy, x >= 0.$$

Para $\alpha = i$,

$$< Qx, y > - < Qy, x >= 0.$$

Somando as equações, segue que $< Qx, y >= 0$ e, pelo item **(1)**, $Q = 0$.

□

Note que na parte **(2)** do lema acima é necessário que X seja complexo. Assim, a afirmação pode ser falsa se X for real.

Teorema 9.4. **{*Propriedades de operadores Hilbert-adjuntos*}** *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert, $S : H_1 \longrightarrow H_2$ e $T : H_1 \longrightarrow H_2$ operadores lineares limitados e α escalar. Assim:*

1. $< T^* y, x >=< y, Tx >$, *para* $x \in H_1$ *e* $y \in H_2$;

2. $(S + T)^* = S^* + T^*$;

3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$;

4. $(T^*)^* = T$;

5. $\| T^*T \| = \| TT^* \| = \| T \|^2$;

6. $T^*T = 0$ *se, e somente se* $T = 0$;

7. $(ST)^* = T^*S^*$, *para* $H_1 = H_2$.

Demonstração. 1. Por definição de T^* e pela definição de produto interno:

$$< T^*y, x >= \overline{< x, T^*y >} = \overline{< Tx, y >} =< y, Tx > .$$

2. Para todo $x \in H_1$ e $y \in H_2$,

$$< x, (S+T)^*y >=< (S+T)x, y >=$$

$$< Sx, y > + < Tx, y >=$$

$$< x, S^*y > + < x, T^*y >$$

$$< x, (S^* + T^*)y > .$$

Portanto, pelo lema da Igualdade,

$$(S+T)^*y = (S^* + T^*)y,$$

isto é,

$$(S+T)^* = S^* + T^*.$$

3. Note que:

$$< (\alpha T)^*y, x >=< y, (\alpha T)x >=$$

$$< y, \alpha(Tx) >=$$

$$\overline{\alpha} < y, Tx >=$$

$$\overline{\alpha} < T^*y, x >=$$

$$< \overline{\alpha} T^*y, x > .$$

Considere $Q = (\alpha T)^* - \overline{\alpha} T^*$, então

$$< Qy, x >=< (\alpha T)^*y, x > - < \overline{\alpha} T^*y, x >= 0.$$

Pela parte **(1)** do lema anterior, $Q = 0$. Assim, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

4. Pelo item **(1)**, para todo $x \in H_1$ e para todo $y \in H_2$,

$$< (T^*)^*x, y >=< x, T * y > .$$

Agora, pela definição de operador Hilbert-adjunto,

$$< x, T * y >=< Tx, y > .$$

Segue que, $< (T^*)^*x, y >=< Tx, y >$. Então,

$$< ((T^*)^* - T)x, y >= 0.$$

Pela parte **(1)** do lema anterior, tomando

$$Q = (T^*)^* - T,$$

tem -se $Q = 0$, isto é,

$$(T^*)^* = T.$$

Observação 9.1. *Pode-se denotar* $(T^*)^*$ *por* T^{**}.

5. Note que

$$T^*T : H_1 \longrightarrow H_1,$$

mas

$$TT^* : H_2 \longrightarrow H_2.$$

Pela desigualdade de Schwarz,

$$\| Tx \|^2 =< Tx, Tx >=< T^*Tx, x >\leqslant$$

$$\| T^*Tx \| . \| x \| \leqslant \| T^*T \| . \| x \|^2 .$$

Tomando o supremo sobre todo x unitário, tem-se

$$\| T \|^2 \leqslant \| T^*T \| .$$

Assim,

$$\| T \|^2 \leqslant \| T^*T \| \leqslant \| T^* \| . \| T \| = \| T \|^2 .$$

Segue que

$$\| T^*T \| = \| T \|^2 .$$

Trocando T por T^*, temos

$$\| TT^* \| = \| T^{**}T^* \| \leqslant \| T^{**} \| . \| T^* \| = \| T^* \|^2 = \| T \|^2 .$$

6. Imediata pelo item anterior e por definição de norma.

7. Como $(ST)^*$ é operador Hilbert-adjunto de ST,

$$< x, (ST)^*y >=< STx, y >=< Tx, S^*y >=< x, T^*S^*y > .$$

Assim, pelo lema da Igualdade,

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

$\square$

Referências

[1] MURPHY, Gerald J. C^*-algebras and operator theory. Academic Press, INC. 1990.

[2] KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. University of Windsor. 1989.

[3] STEEN, Lynn arthur. Counterexamples in topology. New York: Springer-Verlag. 1978.

[4] CONWAY, John B. A course in functional analysis. Graduate texts in mathematics. 1990.

[5] SOARES, Marcio G. Cálculo em uma variável complexa. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.