

Lauvir Ramos Neto

**MODELOS QUADRÁTICOS POR PARTES PARA OTIMIZAÇÃO DA
PRODUÇÃO DE CAMPOS DE PETRÓLEO E GÁS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D.

Florianópolis

2016

Lauvir Ramos Neto

**MODELOS QUADRÁTICOS POR PARTES PARA OTIMIZAÇÃO DA
PRODUÇÃO DE CAMPOS DE PETRÓLEO E GÁS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 22 de Agosto de 2016.

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho
Coordenador do Curso
Universidade Federal de Santa Catarina

Banca Examinadora:

Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Agostinho Plucênio, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Max Hering de Queiroz, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Rodrigo Castelan Carlson, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado aos meus queridos pais e esposa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Eduardo Camponogara, o qual me deu todo suporte necessário, conselhos, ensinamentos e dedicou horas de seu tempo para me ajudar a concluir esse trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina e ao Programa de Recursos Humanos da Petrobras PRH-34, por me fornecerem toda a infraestrutura e suporte necessários durante todo o período do mestrado.

Agradeço aos meus colegas do GOS por todos os conselhos e amizade. Faço questão de destacar um imenso agradecimento ao integrante do grupo e amigo Eduardo Otte Hülse, o qual foi um dos grandes responsáveis por me ajudar a concluir essa dissertação.

Por fim agradeço aos meus familiares, principalmente à minha esposa e pais, por todo o suporte e carinho.

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.

(Arthur Schopenhauer)

RESUMO

A otimização da produção de poços de petróleo operados por injeção contínua de gás (*gas-lift*) sob restrições de roteamento e pressão é um problema que tem sido bastante abordado na literatura técnica.

Na busca por uma representação da relação em regime permanente entre variáveis do processo, recorre-se, frequentemente, a funções algébricas. Funções essas derivadas a partir de um conjunto de dados obtidos de medições reais ou de simuladores fenomenológicos do processo. Dois métodos são comumente usados para aproximar essas relações: modelos não lineares e lineares por partes. Modelos não lineares são resolvidos por abordagens "caixa-preta" ou fazem uso de substituições obtidas por meio de ajustes nas funções que envolvem o problema, o que permite resolver problemas difíceis.

Já os modelos lineares por partes são bastante eficientes no sentido de permitirem que se alcance ótimos globais, entretanto, inserem no problema de otimização um número elevado de variáveis quando são utilizadas muitas curvas para a representação do modelo.

Nessa dissertação é proposta uma abordagem genérica para a solução do problema a partir de aproximações lineares ou quadráticas côncavas para curvas de produção de poços e funções lineares ou quadráticas convexas para curvas de queda de pressão. O resultado é uma formulação em Programação Convexa Inteira Mista a qual é mais compacta e permite que se alcance o ótimo global. No entanto, utilizando somente aproximações lineares para curvas de produção de poços e queda de pressão, o modelo se torna de Programação Linear Inteira Mista, o qual é mais eficiente quando aplicado a modelos com um menor fatiamento do domínio.

Duas formulações foram desenvolvidas e suas eficiências foram analisadas em termos de análise computacional para um campo de petróleo sintético representativo. Além disso, demonstra-se que essas formulações são equivalentes e podem ser utilizadas para a solução do problema de otimização da produção de petróleo

Palavras-chave: Otimização da produção de petróleo. *gas-lift*. Programação convexa inteira mista. Modelos quadráticos por partes.

ABSTRACT

The optimization of oil wells operated by gas-lift under facility, routing and pressure constraints is a problem that is being addressed in the technical literature.

Due to the presence of unknown functions that are not given in explicit form, two methods are commonly used to approximate such relations: nonlinear and piecewise-linear models. The nonlinear methods fall into derivative-free or black-box approaches, or make use of surrogates obtained by curve fitting procedures, which can entail solving challenging problems.

Piecewise linear models are efficient in order to reach globally optimal solutions, but their models tend to get very large because of the number of variables inserted in the problem.

In this work, it is proposed a generic approach relying on linear or concave quadratic approximations for well production curves and linear or convex quadratic functions for pressure drops combining all possibilities of approximations. The result is a Mixed-Integer Convex Programming (MICP) formulation which is more compact and allows the global optimum to be reached. However, using only linear curves for well production and pressure-drop curves the model becomes a Mixed-Integer Linear Programming (MILP) formulation which is more efficient when applied in smaller domain divisions.

Two formulations were developed and their performance were assessed by means of computational analysis for a representative synthetic oil field.

Keywords: Oil production optimization. gas-lift. Mixed-integer convex programming. Piecewise quadratic models.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Sistema de produção	29
2.2	Poço operado por <i>gas-lift</i>	32
2.3	Curva de desempenho do poço	34
3.1	Conjunto convexo representado por uma reta	44
3.2	Exemplos de conjuntos convexos e não convexos	44
3.3	Exemplo de função convexa	45
3.4	Subestimador global de uma função convexa	46
3.5	Gráfico da função descrita na Eq. (3.7)	48
3.6	Ilustração geométrica de um problema de otimização quadrática	49
3.7	Aproximação linear por partes	50
3.8	Aproximação quadrática por partes	50
3.9	Utilização de aproximações quadráticas na síntese de modelo MICP	52
3.10	Aproximação quadrática côncava de uma curva de produção	53
3.11	Domínio da função dividido em 4 polítopos	53
3.12	Aproximação quadrática por partes	54
3.13	Parâmetros do problema de programação semi-definida	55
4.1	Cenário sintético de campo de petróleo	74
4.2	Limites de injeção e pressão para 4 polítopos	78
4.3	Limites de injeção e pressão para 25 polítopos	79
4.4	Curva de queda de pressão em função das vazões de petróleo e gás	83
1	Exemplo de combinação afim	106
2	Triângulo formado por pontos \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 e \mathbf{P}_3	107
3	Exemplo de combinação afim e combinação convexa	108

LISTA DE TABELAS

4.1	Limites do compressor e separadores	74
4.2	Dados nominais da instância	75
4.3	Cenários utilizados para as aproximações das curvas de produção de petróleo	78
4.4	Aproximação Linear – Minimização erro absoluto – Norma 1 – 2 polítopos por eixo	79
4.5	Aproximação Côncava – Minimização erro absoluto – Norma 1 – 2 polítopos por eixo	80
4.6	Aproximação Linear – Minimização erro relativo – Norma 1 – 2 polítopos por eixo	80
4.7	Aproximação Côncava – Minimização erro relativo – Norma 1 – 2 polítopos por eixo	80
4.8	Análise da aproximação da curva de produção de petróleo para 25 polítopos	81
4.9	Cenários utilizados para as aproximações das curvas de queda de pressão	83
4.10	Limites máximos e mínimos utilizados nas vazões para 1 polítopo	84
4.11	Limites máximos e mínimos utilizados por polítopo para 8 polítopos	84
4.12	Análise de erro para curvas de queda de pressão para 1 polítopo	84
4.13	Aproximação Linear – Minimização erro absoluto – 2 polítopos por eixo	85
4.14	Aproximação Quadrática Convexa - Minimização erro absoluto - 2 polítopos por eixo	86
4.15	Aproximação Linear - Minimização erro relativo - 2 polítopos por eixo	86
4.16	Aproximação Convexa - Minimização erro relativo - 2 polítopos por eixo	87
4.17	Resumo das aproximações da curva de queda de pressão para 8 polítopos	87
4.18	Casos simulados para os modelos Agregado e Desagregado de otimização da produção de petróleo	89
4.19	Modelo Agregado	90
4.20	Modelo Desagregado	92
4.21	8 casos selecionados para a análise de simulação	93
4.22	Comparação entre resultados do modelo Agregado e Simulador	94
4.23	Tempo de solução dos problemas de otimização e erros em relação ao simulador	95

SUMÁRIO

1	Introdução	23
1.1	Descrição do Problema	24
1.2	Objetivos	25
1.2.1	Objetivo Geral do Trabalho	25
1.2.2	Objetivos Específicos	25
1.3	Estrutura do documento	25
2	Fundamentos e Definições	27
2.1	Cadeia Produtiva do Petróleo	27
2.2	Sistemas Típicos de Produção de Petróleo	28
2.3	Métodos de Elevação Artificial	30
2.3.1	Eleveção artificial por injeção contínua de gás – <i>gas-lift</i>	31
2.4	Definição do Problema	35
2.5	Revisão de Literatura	38
2.6	Sumário	42
3	Modelos Quadráticos para Otimização da Produção	43
3.1	Introdução a Modelos Quadráticos Convexos	43
3.1.1	Conjuntos Convexos	43
3.1.2	Funções Convexas	44
3.1.3	Modelos Quadráticos Convexos	47
3.2	Síntese de Curvas	51
3.3	Modelos Quadráticos Por Partes para Otimização da Produção	57
3.3.1	Modelo Agregado	58
3.3.2	Modelo Desagregado	63
3.3.3	Demonstração de Equivalência	65
3.4	Sumário	70
4	Análises dos Resultados	73
4.1	Cenário Experimental	73
4.2	Síntese de Aproximação de Curvas	76
4.2.1	Análise das aproximações de curvas de produção	76
4.2.2	Análise das aproximações de curvas de queda de pressão	82
4.3	Análise Computacional	88
4.4	Análise de Simulação	93
4.5	Sumário	96

5 Conclusão	97
Referências Bibliográficas	101
Apêndice A - Conceitos Matemáticos	105
Combinções	105
Combinação Linear	105
Combinação Afim	105
Combinação Cônica	107
Combinação Convexa	108
Apêndice B - Formulações Alternativas para o problema de programação semi definida	109

1 INTRODUÇÃO

A indústria petrolífera está continuamente buscando maneiras de ampliar suas fronteiras com o intuito de satisfazer uma demanda crescente por óleos fósseis, sendo que esta ainda tende a aumentar nos próximos anos [1]. Para suprir esta exigência do mercado, novos investimentos são realizados em tecnologias que ampliem a capacidade produtiva e otimizem os processos de extração e processamento, bem como os tornem mais eficientes, econômicos e sustentáveis.

No entanto, antes que estas tecnologias possam ser completamente aplicadas aos campos de petróleo, há ainda muitos desafios científicos a serem superados. A pesquisa descrita nesse documento tem o intuito de contribuir com a sobreposição desses desafios por meio de uma abordagem para otimização matemática da produção de petróleo em poços operados por elevação artificial utilizando modelos quadráticos côncavo-convexos por partes.

Em um cenário real de operação, muitas vezes as distâncias entre poços de grandes campos de petróleo e destes aos respectivos separadores podem ser consideráveis. Normalmente, adota-se uma configuração em que os fluidos produzidos por um grupo de poços são concentrados em um *manifold*, e deste uma única linha que escoar os fluidos ao separador onde o fluxo multifásico é separado em água, gás e petróleo [2, 3, 4].

A classe de problemas que se adota neste presente trabalho é a de poços de petróleo tendo pressão de reservatório insuficiente para produzir naturalmente os fluidos de formação. Nestes casos, algumas técnicas de elevação artificial podem ser utilizadas, como bombeio mecânico, bombeio centrífugo submerso, bomba de cavidade progressiva, *gas-lift*, entre outras [2].

Especificamente o *gas-lift* consiste em injetar gás pressurizado pelo espaço anular. Em determinadas profundidades este gás é redirecionado para dentro da coluna de produção e se dissolve ao fluido a ser produzido. Ao se dissolver, o fluido resultante diminui sua densidade e tem mais facilidade de ser produzido pela pressão de fundo. Este efeito aumenta à medida que o fluido da mistura se aproxima da cabeça do poço, uma vez que o gás se expande gradativamente, elevando com ele o petróleo.

Nestes poços a produção de petróleo (vazão de petróleo) é função da injeção de gás pressurizado e da pressão na cabeça do poço. Em contrapartida a pressão na cabeça do poço é função da pressão nominal do separador e das quedas de pressão nas linhas de produção. Ou seja, a pressão na cabeça do poço é uma pressão

de equilíbrio, resultante de duas fronteiras de pressão (pressão de reservatório e separador) da curva de influxo do poço e das quedas de pressão por atrito na coluna de produção do poço e linhas de produção na superfície.

Tanto a curva de produção de petróleo, quanto a curva de queda de pressão são não-lineares e não-convexas, o que se apresenta como uma das maiores dificuldades para se resolver o problema de otimização de um campo de petróleo com elevação por *gas-lift*, uma vez que o problema subjacente é da classe não-linear inteira-mista.

1.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Utilizando-se curvas não-lineares para se aproximar os valores das curvas de produção de petróleo e queda de pressão se pode formular o problema de otimização da produção em um problema de programação matemática da classe Não-Linear Inteira Mista (do inglês *Mixed-Integer NonLinear Programming - MINLP*), ao qual os principais *solvers* da atualidade não são aplicáveis[2, 4, 3].

Para resolver esse problema, uma das abordagens adotada pela literatura faz uso da aproximação da função de produção utilizando a combinação convexa linear por partes de amostras do domínio da curva original [4]. Como resultado, obtém-se um modelo linear por partes que pode ser mais ou menos refinado dependendo do número de pontos amostrados e do número de curvas que representam a função original em seu domínio factível. Este método permite alcançar ótimos globais nas aproximações correspondentes. Contudo, eles inserem no problema de otimização um número elevado de variáveis para poderem ser representados. Este acréscimo é tão maior quanto mais precisa se quiser ter a representação da curva não-linear e acarreta o aumento de complexidade do modelo final, aumentando também o custo computacional para se resolver o problema.

Uma abordagem alternativa é o uso de aproximações côncavas ou convexas quadráticas por partes [2]. Nela igualmente se divide o domínio da função e utilizando um método adequado é possível encontrar uma função côncava ou convexa que aproxime os valores da curva em uma determinada divisão do domínio. Apesar de também inserir variáveis extras no problema de otimização dos campos de petróleo, esta abordagem é mais compacta, impactando de forma menos dura no custo computacional. Usando esta técnica pro-

posta é possível reformular o problema de otimização da produção como um problema de Programação Convexa Inteira Mista (do inglês *Mixed-Integer Convex Programming - MICP*) e resolvê-lo com um *solver* comercial.

No entanto, dependendo do número de divisões do domínio e em modelos de maiores dimensões, nos quais a curva de produção considera mais variáveis além da injeção de gás, a complexidade dos modelos se acentua e se pode elevar demasiadamente a convergência para o ótimo ou mesmo nem se alcançar a solução do problema.

Na busca por técnicas que possam resolver esse problema, o presente trabalho pretende desenvolver aproximações das curvas de produção e queda de pressão com base em modelos quadráticos côncavo-convexos por partes na tentativa de identificar uma relação de custo benefício entre um modelo suficientemente mais compacto dentro de um custo computacional aceitável.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral do Trabalho

Buscando contribuir ao estado da arte da teoria e prática em métodos de otimização, esta dissertação de mestrado irá desenvolver aproximações côncava-convexas por partes para a otimização da produção integrada de campos de petróleo e gás.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Propor modelos côncavo-convexos por partes, identificando suas propriedades e limitações em contextos científicos e práticos.
- Avaliar a eficiência de modelos côncavo-convexos por partes tomando como base uma aplicação à otimização integrada da produção de campos de petróleo e gás, considerando funções não-lineares complexas tais como a queda de pressão em linhas de escoamento.

1.3 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

Essa dissertação está segmentada em cinco capítulos: o Capítulo 2 busca fornecer ao leitor informações gerais sobre a cadeia produtiva do petróleo, detalhando aspectos que são relevantes a essa

pesquisa como técnicas de elevação artificial de fluidos, mais especificamente a de *gas-lift*. Além disso, o problema de otimização da produção de petróleo é definido conceitualmente com formulações matemáticas de eventos físicos que fazem parte do sistema e, por fim, o capítulo se encerra com uma revisão de literatura contendo trabalhos relacionados ao tema.

O Capítulo 3 tem por objetivo apresentar o desenvolvimento dessa pesquisa propriamente dito, a partir de modelos para a otimização da produção de petróleo tomando como base a síntese de curvas quadráticas aproximativas de funções que envolvem os fenômenos físicos mencionados no capítulo anterior.

O Capítulo 4 apresenta os resultados simulados da pesquisa. Primeiramente, define-se o cenário experimental considerado na pesquisa e, em seguida, os resultados alcançados após análise computacional.

O Capítulo 5 apresenta o sumário da pesquisa realizada, sintetizando os resultados alcançados e as perspectivas de trabalhos futuros.

Por fim, o Anexo A traz conceitos matemáticos fundamentais para o universo de problemas em que este trabalho está inserido, os quais podem auxiliar no entendimento do leitor. Já o Anexo B tem por objetivo mostrar outras formulações de síntese de curvas.

2 SISTEMAS DE PRODUÇÃO DE PETRÓLEO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Esse capítulo traz informações a respeito do universo de exploração e produção de petróleo e gás, fornecendo primeiramente uma visão geral sobre a cadeia produtiva de combustíveis fósseis a fim de justificar o investimento em esforços para otimizar os processos subjacentes. Em seguida, será apresentado um típico sistema de produção de petróleo e gás, identificando os elementos principais que compõem esse tipo de sistema. O capítulo tem continuidade com a discussão sobre os principais métodos de elevação artificial de fluidos, enfatizando a técnica de *gas-lift*, utilizada na composição desse trabalho. Em seguida o problema abordado nessa dissertação é definido conceitualmente com destaque para a formulação matemática de fenômenos físicos ocorridos dentro do sistema de produção de petróleo. Por fim, o capítulo se encerra com uma revisão de literatura em torno da problemática apresentada, salientando pesquisas inseridas nesse contexto e a contribuição gerada por esse trabalho.

2.1 CADEIA PRODUTIVA DO PETRÓLEO

No decorrer do último século houve um forte aumento na demanda por hidrocarbonetos como fonte de combustíveis e, por consequência, esse fato fez com que a exploração de petróleo se espalhasse por diversas regiões do planeta. Ainda que a produção de petróleo e gás tenha ocupado uma parcela menor na oferta de energia mundial, reduzida de 62% em 1973 para 53,7% em 2010; em números absolutos, o consumo de petróleo se elevou, partindo de 55,638 milhões para 87,381 milhões de barris por dia no mesmo período. A perspectiva é que esse número se eleve à casa dos 100 milhões de barris por dia até o ano de 2030, no entanto, acompanhado de uma melhora na eficiência energética, regulamentações e políticas governamentais e ambientais mais severas [1].

Todos esses desafios que a indústria do petróleo deve enfrentar nos próximos anos fazem com que haja investimentos em novas tecnologias, melhores sistemas de gestão e redução de custos operacionais em toda a cadeia de produção.

Os sistemas e processos da indústria de petróleo e gás são amplamente definidos e podem ter diversas nomenclaturas, entretanto, pode-se dividir a cadeia produtiva da indústria petrolífera em dois grandes grupos:

- **Upstream:** Caracteriza-se pelas operações de exploração e produção (E&P). Consiste nas atividades relacionadas à extração de petróleo e gás e inclui atividades como estudo de reservas e reservatórios, planejamento, perfuração e o processo de produção [5, 6, 7].
- **Downstream:** As atividades que se enquadram nessa parte do processo envolvem o transporte e armazenamento, como também refino e distribuição [5, 6, 7].

Esta dissertação envolve o setor de *upstream* da cadeia de produção, mais especificamente, a produção de petróleo e gás.

2.2 SISTEMAS TÍPICOS DE PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

De forma genérica, a finalidade de um sistema de produção submarino é produzir hidrocarbonetos de maneira eficiente, porém seguindo normas de segurança e políticas ambientais. Tipicamente, um sistema de produção é formado por componentes como mostrado na Figura 2.1, sendo os principais elementos descritos a seguir [8, 9]:

- **Poços:** A função principal de um poço é transferir os hidrocarbonetos contidos em um reservatório para os *manifolds*. Um poço pode ter um ou vários ramos perfurados verticalmente ou direcionados para alcançar áreas do reservatório com maior probabilidade de se obter alta produção de hidrocarbonetos. Depois da perfuração de um poço, ele recebe tubulações com a função de isolar os fluidos contidos no reservatório até a sua transferência para os *manifolds*. Além disso, um poço pode conter várias válvulas em sua extensão, as quais permitem uma operação mais segura durante o processo de produção, assim como possibilitam operações de manutenção.
- **Manifold:** O objetivo de instalar *manifolds* em um sistema de produção é misturar os fluxos vindos de vários poços em uma quantidade menor de tubulações que transferem o fluxo de hidrocarbonetos para o sistema de tratamento e separação. Essa mistura de fluxos é realizada a partir de tubulações e válvulas *on/off* que definem alinhamentos entre poços e *manifolds*.
- **Tubulações e risers:** As tubulações conectam os poços aos *manifolds*, e esses às instalações de superfície. Especificamente,

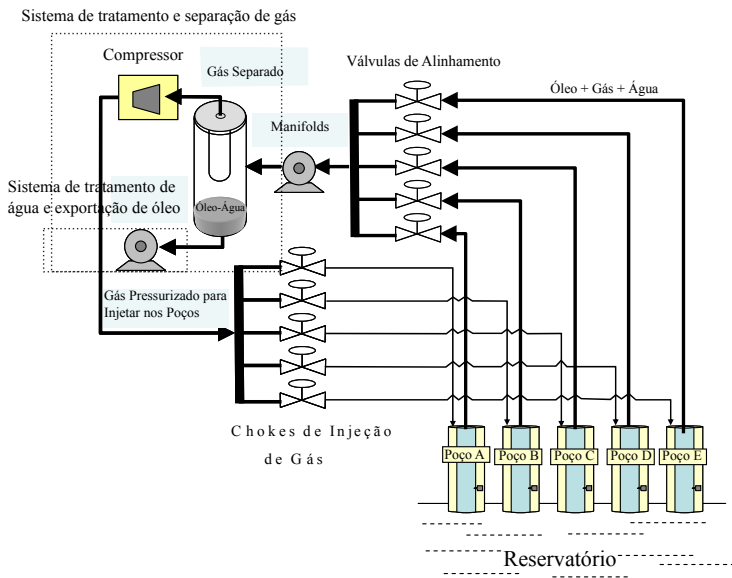


Figura 2.1: Sistema de produção de petróleo com alinhamento e injeção de gás [4].

tubulações verticais que elevam o fluido aos *manifolds* são denominadas *risers*.

- **Separador:** O fluido produzido a partir de um reservatório é enviado a um separador, podendo conter petróleo, gases, água e outros contaminantes. Dessa forma, o separador atua como um sistema de tratamento primário de produção, onde ocorre a separação dos componentes da mistura provinda da produção.
- **Compressor:** Dentro da cadeia de produção de petróleo e gás, há a utilização de diversos tipos de compressores. Especificamente o compressor da Figura 2.1 tem a função de disponibilizar gás para poços com elevação artificial por injeção de gás, os quais foram utilizados para a realização desse trabalho e que serão discutidos em maiores detalhes adiante.

O sistema representado na Figura 2.1 conta com cinco poços produtores em um reservatório. O fluido (petróleo, gás e água) é le-

vado até o *manifold* de acordo com a configuração das válvulas de alinhamento. A mistura provinda dos poços é redirecionada ao separador, o qual desmembra as fases do fluido: água é tratada e petróleo exportado. Já o gás produzido é em parte exportado, enquanto outra quantidade é recondicionada ao sistema para o processo de elevação artificial.

É importante salientar que cada sistema de produção tem peculiaridades e que a produção de petróleo é condicionada aos reservatórios, poços, limites e capacidades de processamento de fluidos nas instalações. Essas restrições devem ser consideradas durante o processo de operação de produção, de forma que se defina algumas configurações, tais como, válvulas reguladoras de vazão, escolha dos poços produtores e alinhamento entre poços, *manifolds* e separadores [4].

2.3 MÉTODOS DE ELEVAÇÃO ARTIFICIAL

A produção de um poço é definida pela diferença de pressão obtida na cabeça do poço e no reservatório. Basicamente, poços produtores podem ser de dois tipos de acordo com essa diferença de pressão: *free flowing* ou *lifted*. No primeiro caso, o poço possui pressão de fundo suficientemente alta para alcançar a cabeça do poço mantendo uma vazão aceitável. Já em poços em que a pressão no reservatório é baixa, ou em casos em que se deseja elevar a produção, há a necessidade de métodos artificiais de elevação do fluido pela tubulação de produção [9]. Existem algumas técnicas que permitem isso:

- **Bombeamento Mecânico:** É um método normalmente utilizado em poços terrestres. A unidade de bombeamento mecânico é instalada próxima à cabeça do poço. A partir da rotação de um motor, uma haste posicionada dentro da tubulação de produção passa a executar um movimento alternado ascendente e descendente. A haste é conectada a um êmbolo que desce até atingir o nível do fluido no poço e depois sobe fazendo emergir o petróleo [9].
- **Bomba Centrífuga Submersa:** É um sistema composto por bombas centrífugas instaladas nos fundos dos poços que tem como função gerar pressão de fundo desejada para a elevação de fluidos. Essas bombas são movidas por motores elétricos

que podem variar sua velocidade permitindo uma produção mais flexível [10].

- **Gas-lift:** Esse método consiste em injetar gás pressurizado na boca do poço pelo anular. Em determinadas profundidades este gás é redirecionado para dentro da coluna de produção e se dissolve ao fluido a ser produzido. Ao se dissolver, o fluido resultante diminui sua densidade e tem mais facilidade de ser produzido pela pressão de fundo. Este efeito aumenta à medida que o fluido da mistura se aproxima da cabeça do poço, uma vez que o gás se expande gradativamente elevando com ele o petróleo [10].

Especialmente essa última técnica mencionada é a considerada nesse trabalho e, por esse motivo, será melhor detalhada.

2.3.1 Eleveção artificial por injeção contínua de gás – *gas-lift*

Gas-lift é um método de elevação artificial no qual gás de alta pressão é injetado na tubulação de produção com o objetivo de aumentar a produção a partir da inserção de energia no sistema. No entanto, tendo em vista que por vezes o custo de compressão do gás é superior ao custo de instalação dos equipamentos, deve-se considerar primeiramente a disponibilidade e custo de compressão do gás antes da utilização de *gas-lift* para a elevação de fluidos em poços [10, 11]. Ainda assim, *gas-lift* é amplamente utilizado em razão de seu custo-benefício favorável quando comparado a outras técnicas de elevação artificial [12]. A Figura 2.2 ilustra o método de elevação artificial por *gas-lift*.

Por meio de uma válvula chamada *choke* de injeção de gás, o gás a alta pressão entra no sistema e é injetado no anular, o qual consiste em um espaço entre o revestimento do poço e a coluna de produção. O gás presente no anular é então injetado na tubulação de produção por meio de válvulas de *gas-lift* que podem se estender pela coluna de produção.

A produção de um poço é determinada pelos fluidos que saem da tubulação de produção e é por meio dela que se conduz o óleo, a água e o gás produzido e injetado até o *choke* de produção. A injeção de gás diminui a densidade média da mistura. Como o volume do tubo de produção é constante a ocupação de parte do volume por um fluido mais leve resulta em uma pressão hidrostática menor no fundo do poço.

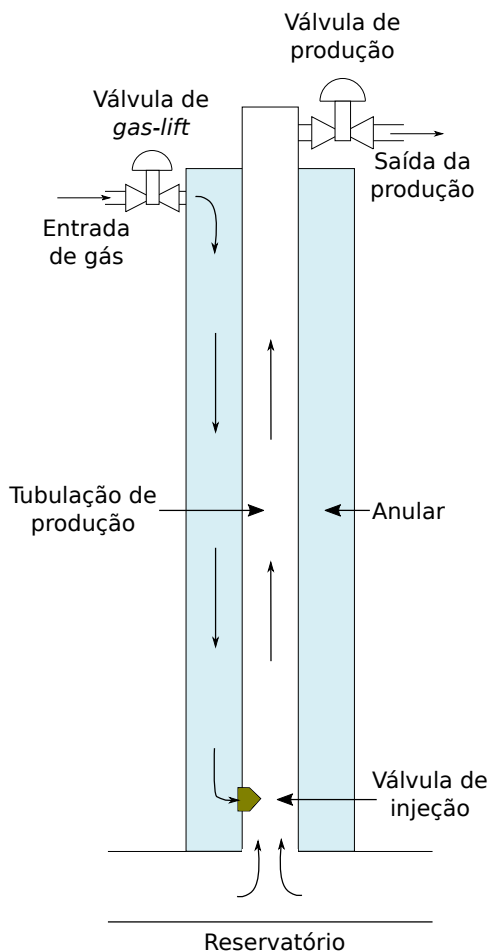


Figura 2.2: Poço operado por *gas-lift*. Adaptado de [13].

Quando se obtém uma mistura de menor densidade na tubulação de produção por meio da injeção de gás pressurizado, a diferença de pressão entre o reservatório e a pressão de fundo do poço induz a elevação dos hidrocarbonetos do reservatório para o poço.

A diferença de pressão de reservatório e pressão de reservatório e pressão de fundo é o que vai determinar a vazão de influxo do

poço em função da característica do reservatório representado pela relação IPR (*Inflow Performance Relationship*). A diminuição da densidade diminui a parcela da perda de pressão no tubo de produção devido a gravidade. Assim a pressão do reservatório consegue vencer a contra pressão total resultando em uma vazão de produção de interesse.

Contudo, a injeção de gás no poço com a intenção de redução da densidade do fluido tem um aspecto bastante relevante: após atingir um ponto de injeção considerado ótimo, a inserção de gás pressurizado começa a causar efeitos que não permitem o bom funcionamento do sistema, uma vez que o alto volume de gás intensifica o efeito do atrito da mistura com a tubulação de produção, elevando a pressão de saída, e por consequência, reduzindo a vazão.

Para determinar pontos de operação na injeção de gás em um poço, é comum que se utilize a curva de desempenho de um poço, ou WPC (*Well Performance Curve*). A Figura 2.3(a) ilustra duas curvas de desempenho de poços.

A curva **A** apresenta características de um poço surgente, ou seja, com pressão no reservatório suficientemente elevada para fazer os fluidos produzidos subirem naturalmente pela coluna de produção. Nesse poço, qualquer quantidade de gás injetado trará alterações à produção do poço. Todavia, no caso da curva **B**, o mesmo comportamento não ocorre, sendo necessária a injeção de uma quantidade mínima de gás para que o poço passe a produzir [10].

Já a Figura 2.3(b) tem por objetivo ilustrar a região ótima de injeção de gás em uma WPC típica. Como se pode perceber, na região **(I)** a produção do poço se eleva com a injeção de gás, enquanto na região **(II)** a produção é reduzida, mesmo com o aumento de injeção. O ponto de inflexão da curva é a taxa ótima de injeção de gás no poço no caso em que a capacidade de compressão de gás é ilimitada. No entanto, limitações como a capacidade dos compressores, fazem com que o ponto ótimo de operação se encontre normalmente na região de operação destacada na Figura 2.3(b).

Sendo assim, o problema de otimização da produção de petróleo em poços operados por *gas-lift* consiste em encontrar taxas de injeção de gás para os poços considerando os limites de capacidade dos compressores, além de limitações operacionais, de modo que se obtenha a maior produção possível.

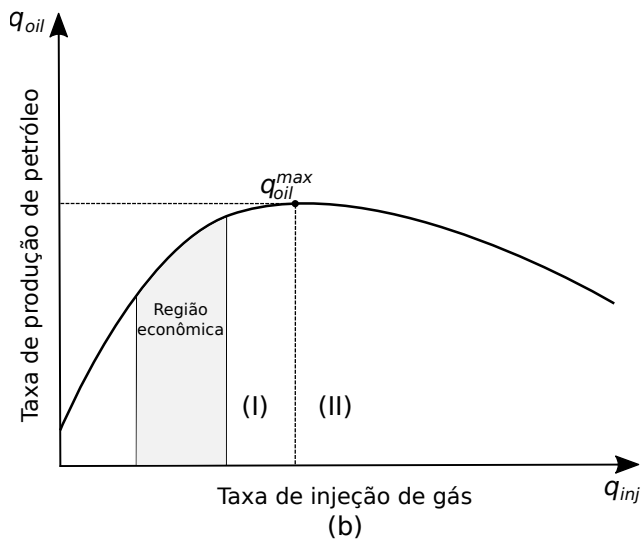
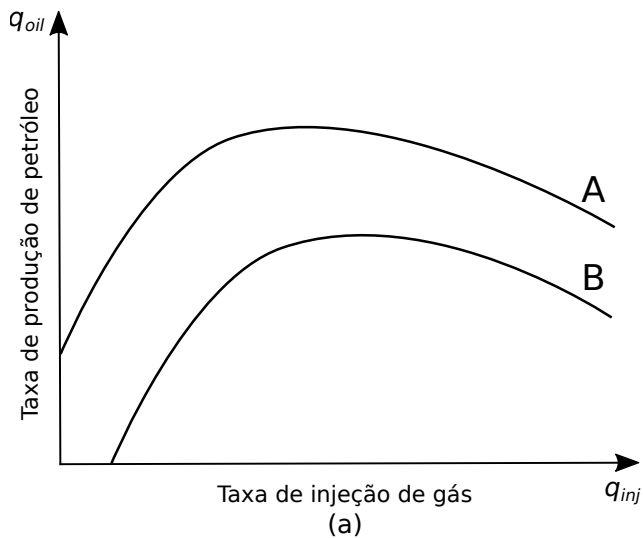


Figura 2.3: Curva de desempenho do poço. Baseado em [10].

2.4 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Como mencionado anteriormente, em poços nos quais a pressão no reservatório não é suficientemente alta para a elevação dos fluidos, faz-se necessário o uso de algum método de elevação artificial.

No caso desse trabalho, considerou-se a utilização de *gas-lift*. Nestes poços, a produção de petróleo (vazão de petróleo) é função da injeção de gás e da pressão na cabeça do poço. Já esta é função da pressão nominal do separador e das quedas de pressão nas linhas de produção.

De forma equivalente, o problema de otimização da produção apresentado a seguir considera a curva de desempenho do poço, ou WPC (*Well Performance Curve*), como função da injeção de gás e da pressão no *manifold*, o qual recebe a produção do poço.

O problema de otimização da produção consiste em definir taxas de injeção de gás para cada poço, roteamento entre poços e *manifolds* e pressões que maximizam a produção de petróleo para um campo operado por *gas-lift*.

Conceitualmente, o problema pode ser formulado como um problema não-linear inteiro misto, ou simplesmente MINLP (*Mixed-Integer Non-Linear Programming*):

$$P : \max f = \sum_{m \in \mathcal{M}} \mathbf{q}_o^m \quad (2.1a)$$

sujeito a:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} q_{inj}^n \leq q_{inj}^U, \quad (2.1b)$$

Para todo $n \in \mathcal{N}$:

$$q_{inj}^{n,L} y^n \leq q_{inj}^n \leq q_{inj}^{n,U} y^n, \quad (2.1c)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_n} z^{n,m} = y^n, \quad (2.1d)$$

$$\mathbf{q}^{n,m} = q^{n,m}(p^m, q_{inj}^n) z^{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n, \quad (2.1e)$$

$$z^{n,m} \mathbf{q}^{n,L} \leq \mathbf{q}^{n,m} \leq z^{n,m} \mathbf{q}^{n,U}, \forall m \in \mathcal{M}_n, \quad (2.1f)$$

Para todo $m \in \mathcal{M}$:

$$\mathbf{q}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \mathbf{q}^{n,m}, \quad (2.1g)$$

$$\mathbf{q}^{m,L} \leq \mathbf{q}^m \leq \mathbf{q}^{m,U}, \quad (2.1h)$$

$$p^{m,L} \leq p^m \leq p^{m,U}, \quad (2.1i)$$

$$p^m = p^{m,S} + \Delta p^m(\mathbf{q}^m), \quad (2.1j)$$

$$y^n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathcal{N}, \quad (2.1k)$$

$$z^{n,m} \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall m \in \mathcal{M}_n. \quad (2.1l)$$

com os seguinte parâmetros:

- $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ é o conjunto de poços, N sendo o número de poços e $\mathcal{N}_m \subseteq \mathcal{N}$ o subconjunto de poços que podem ser conectados ao *manifold* m ;
- $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$ é o conjunto de *manifolds*, M sendo o número de *manifolds* e $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}$ o subconjunto de *manifolds* que podem receber produção de um poço n , a qual é transferida para o respectivo separador.
- $\mathcal{H} = \{o, g, w\}$ representa o fluxo multifásico: petróleo (o), gás (g) e água (w);
- $q_{in,j}^U$ é o limite de gás de elevação fornecido pelos compressores;
- $q_{in,j}^{n,L}$ e $q_{in,j}^{n,U}$ são limites de injeção de gás no poço n ;
- $p^{m,L}$ and $p^{m,U}$ são limites de pressão no *manifold* m ;
- $p^{m,S}$ é a pressão nominal do separador que recebe a produção do *manifold* m ;
- $\mathbf{q}^{n,L}$ e $\mathbf{q}^{n,U}$ são vetores que limitam o fluxo multifásico do poço n ;
- $\mathbf{q}^{m,L}$ e $\mathbf{q}^{m,U}$ são vetores com as taxas mínima e máxima de fluxo multifásico no *manifold* m , as quais representam a capacidade dos separadores ligados ao *manifold* m ;

variáveis:

- q_{inj}^n é a taxa de fluxo de gás de elevação alocada para o poço n ;
- y^n assume o valor 1 quando o poço n está produzindo, e 0 caso contrário;
- $z^{n,m}$ é 1 se a produção do poço n é direcionada ao *manifold* m , e 0 caso contrário;
- $\mathbf{q}_h^{n,m}$ é o fluxo da fase $h \in \mathcal{H}$ enviada do poço n ao *manifold* m e $\mathbf{q}^{n,m} = (\mathbf{q}_h^{n,m} : h \in \mathcal{H})$ é um vetor com o fluxo de todas as fases. O fluxo de gás recebido no *manifold* é a soma do gás de elevação injetado no poço n (Inj) e o gás produzido no reservatório (R), assim $\mathbf{q}_g^{n,m} = q_{g,R}^{n,m} + q_{g,Inj}^{n,m}$;
- \mathbf{q}^m é o fluxo total recebido de todos os poços conectados ao *manifold* m para todas as fases;
- p^m é a pressão do *manifold* m ;

e funções:

- $q^{n,m}(p^m, q_{inj}^n)$ é a função de produção do poço n se conectado ao *manifold* m em função da pressão no *manifold* p^m e da taxa de injeção do gás de elevação q_{inj}^n ;
- $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ é a queda de pressão na linha que conecta o *manifold* m ao seu separador dedicado como função de \mathbf{q}^m .

O problema P visa maximizar a função objetivo f a qual representa todo o petróleo produzido e coletado pelos *manifolds*. Outras funções objetivo poderiam ter sido utilizadas, como maximizar o ganho econômico. Porém, funções que consideram a maximização do petróleo produzido (ou, equivalentemente, considerando gás) são mais utilizadas, uma vez que é mais fácil medir a produção.

O problema apresenta restrições operacionais e físicas em cada equação como descrito abaixo:

- Eq. (2.1b) garante que todo o gás recebido pelos poços é menor que o limite dos compressores.
- Eq. (2.1c) mantém a injeção de gás entre limites superior e inferior se o poço está ativo.

- Eq. (2.1d) assegura que cada poço está conectado somente a um *manifold* quando o poço estiver produzindo.
- Eq. (2.1e) define o fluxo multifásico recebido de um poço pelo *manifold* como uma função da pressão no *manifold* e da injeção do gás de elevação.
- Eq. (2.1f) limita o fluxo produzido por um poço quando este está ativo.
- Eq. (2.1g) afirma que a soma dos fluxos produzidos por todos os poços conectados a um *manifold* é igual ao fluxo de entrada no *manifold*.
- Eqs. (2.1h) e (2.1i) estabelecem, respectivamente, limites para o fluxo multifásico produzido e a pressão para os *manifolds*.
- Eq. (2.1j) afirma que a pressão no *manifold* é dada pela pressão nominal no separador e a queda de pressão nas linhas de produção.

O problema MINLP apresentado é complexo e consideravelmente difícil de ser resolvido, uma vez que apresenta funções não lineares (curvas de produção e queda de pressão) e variáveis discretas.

Efetivamente, o problema de otimização da produção P só é conhecido conceitualmente, uma vez que a WPC e as curvas de queda de pressão não são conhecidas explicitamente. Embora se consiga métodos aproximativos para contornar essa dificuldade, essas técnicas são por si só problemas bastante desafiadores.

2.5 REVISÃO DE LITERATURA

No modelo de poços operados por gas-lift, a curva de produção de óleo é função da injeção de gás e da pressão na cabeça do poço. Essa curva é não-linear, induzindo grande complexidade na resolução do problema de otimização de campos de petróleo que utilizam essa técnica de elevação artificial.

Alguns trabalhos na área propuseram alternativas para a solução desse problema. Na pesquisa de *Misener, R.; Gounaris, C. E. e Floudas, C. A.* [14] foi proposta a resolução global de um problema de otimização da produção de petróleo. No trabalho foram desenvolvidos quatro modelos que utilizam a técnica de linearização por partes, ou seja, a curva original é discretizada e aproximada por

segmentos de planos e hiperplanos. O foco do trabalho, no entanto, concentrou-se na comparação entre os quatro modelos.

No trabalho de *Geibler, B.* [15], outra maneira de resolver o problema foi proposta: os refinamentos nas aproximações lineares não são feitos de forma uniforme, isso significa, que fatias do domínio da função original podem ter diferentes níveis de refinamento, dependendo da necessidade. A técnica é composta de refinamentos iterativos que comparam os erros das aproximações em relação à curva original e usam essa informação para novas iterações.

Codas, A. e Camponogara, E. [16] propuseram duas formulações Lineares Inteiras-Mistas para um problema de alocação de gas-lift considerando restrições de roteamento entre os poços e respectivos separadores. As duas formulações adotadas foram obtidas por meio de linearização por partes das curvas não lineares originais. Na primeira formulação do problema, chamada de formulação compacta, utilizou-se variáveis binárias para explicitar o intervalo de linearização e outra para roteamento. Já na segunda formulação, denominada de formulação integrada e que apresentou melhores resultados, a diferença se concentrou na troca das variáveis de roteamento por outra que considera, além do roteamento, a região linearizada do problema.

No trabalho de *Silva, T. L.* [4] foram também utilizadas formulações lineares inteiras-mistas para o problema de alocação de gás a partir de técnicas de linearização por partes para funções multidimensionais. Nesse trabalho, porém, além de restrições de roteamento, foram consideradas restrições de pressão no sistema de produção. Sete formulações lineares inteiras-mistas foram propostas considerando aproximações por hipercubos e por *simplexes*. No caso dos hipercubos a formulação se tornou mais simples se comparada a por *simplexes*, pois possui menos variáveis. Mostrou-se também que, em modelos que consideram mais variáveis além da injeção de gás, a complexidade e resolução dos modelos fica gradativamente mais difícil, com bastante lentidão para o alcance do ótimo.

Os resultados obtidos no trabalho anterior foram utilizados para continuidade da pesquisa em [17]. Nesse caso, foi desenvolvido um modelo não-linear inteiro misto para alocação de gás. Nesse estudo, adotou-se restrições de alinhamento e pressão entre poços e *manifolds*. Considerando-se que o problema original é da classe não-linear inteira mista, foram propostas duas alternativas com modelos aproximativos lineares inteiros-mistos: o primeiro utilizando combinação convexa, e um segundo logarítmico. Como resul-

tado se observou que o modelo logarítmico foi mais eficiente em virtude de possuir um número menor de variáveis e restrições introduzidas no problema.

Em [18], Rocha, V. G. propôs uma técnica de geração de curvas lineares adaptativa, na qual também se faz uso de um processo iterativo para a geração de aproximações com diferentes níveis de refinamento, dependendo da região considerada para a aproximação. Nessa estratégia se busca uma aproximação na região do ótimo o mais próxima possível da curva original. A geração de novas aproximações (mais refinadas) se dá a partir de três heurísticas propostas durante o trabalho: uma em que somente a região em torno do ótimo é adaptada, outra que fixa pontos em torno do ótimo para gerar uma nova adaptação e uma terceira, denominada logarítmica, com estratégia similar a uma busca binária. Após o refinamento, as curvas lineares adaptadas são utilizadas no problema de otimização da produção de óleo. A técnica foi aplicada também para funções unidimensionais e bidimensionais, mas não apresentou grandes ganhos computacionais se comparado a um modelo sem adaptações iterativas.

Em [2], o problema original de otimização da produção que é não linear inteiro-misto passou a ser tratado por uma abordagem que considera linearizações por partes bidimensionais para funções de produção dos poços, as quais dependem da injeção de gás e pressão na cabeça do poço. Já para as funções de queda de pressão que são tridimensionais, considerou-se funções quadráticas convexas contínuas. As aproximações convexas foram adotadas por serem mais compactas quando comparadas às aproximações lineares para modelos de maior dimensão, diminuindo assim a quantidade de variáveis e a velocidade na procura pelo ótimo. Com essa formulação o que se obtém no final é um problema de programação convexa intera-mista, que segundo resultados, apresentou melhor desempenho computacional, principalmente para aproximações mais refinadas.

Na pesquisa de Grimstad, B. [8] foi proposto um *framework* para modelagem e otimização de redes de fluxo multifásico por meio de um modelo aproximativo baseado em *splines*. O objetivo principal do *framework* é encontrar um equilíbrio entre velocidade e precisão na resolução de problemas de otimização diária da produção de petróleo e gás. Um ponto importante dessa pesquisa é que no modelo genérico proposto foram adotadas, além de restrições relacionadas aos eventos de vazão e perda de carga no sistema, equações que lidam com a entalpia do processo, tornando o modelo

ainda mais completo. Nesse trabalho foram obtidos bons resultados em relação ao objetivo inicial, uma vez que modelos desenvolvidos a partir do *framework* atingiram ótimos globais e, quando comparada a outros métodos não-lineares, a técnica adotada se apresentou mais eficaz.

Com base nas pesquisas mencionadas nessa seção, essa dissertação vem contribuir com uma abordagem alternativa para resolução do problema. Assim como em [2], serão utilizadas aproximações quadráticas para tratar o problema de otimização da produção, colocando-o na categoria de convexo inteiro-misto.

No entanto, diferentemente do trabalho mencionado anteriormente, o qual adota aproximações quadráticas para a curva de perda de carga na linha e lineares para a função de produção, a presente pesquisa visa adotar um modelo genérico com aproximações quadráticas, tanto para a curva de queda de pressão, quanto para a curva de produção. A partir desse modelo genérico será possível realizar diversas combinações e abordagens que se adaptem a um determinado cenário, uma vez que, zerando o termo quadrático das aproximações, essas passam a ser lineares, permitindo que o modelo vá de uma abordagem que faça somente uso de aproximações lineares até uma outra com somente aproximações quadráticas.

Além disso, de forma semelhante a [16], foram adotadas duas formulações para representar o modelo genérico de produção de fluidos fósseis, as quais serão apresentadas no próximo capítulo: a primeira, denominada de **agregada**, considera apenas uma variável binária que contém informações a respeito de roteamento entre poços e *manifolds* e intervalos ativos nos domínios das funções de produção e pressão. Já a segunda formulação, chamada **desagregada**, possui um conjunto de variáveis binárias para tratar independentemente o roteamento e os intervalos ativos das funções.

Tendo isso em mente, é viável, dentro de um mesmo cenário de produção de petróleo e gás, abrir múltiplas opções para resolver o problema de otimização da produção, visto que é possível combinar os dois modelos (agregado e desagregado) a diferentes tipos de aproximações (combinação de aproximações lineares e quadráticas para curvas de produção e perda de carga) e identificar a melhor solução em termos de desempenho computacional.

2.6 SUMÁRIO

Nesse capítulo foram apresentados conceitos importantes para a fundamentação da dissertação, incluindo informações que permitem entender a motivação para a realização da pesquisa, bem como conceitos dentro do contexto de produção de petróleo e gás, que serão adotados na sequência dos próximos capítulos.

Inicialmente foi apresentado o ambiente de produção de fluidos fósseis, apontando os elementos básicos que estão contidos em uma malha de produção, os quais são fundamentais para entendimento de fenômenos físicos e, conseqüentemente, para a formulação do problema. Logo em seguida, foram, apresentados métodos de elevação artificial de fluidos em poços, com destaque para *gas-lift*, o qual é adotado no trabalho em virtude de seu amplo emprego dentro da indústria.

Tendo em vista as definições apresentadas, foi possível expor o problema conceitual para a otimização da produção de petróleo e gás, a partir do qual se consegue informações importantes dentro da dinâmica do problema como roteamento, alocação de gás, curvas de desempenho dos poços e queda de pressão na linha. Além disso, como o problema é da classe MINLP e de difícil solução, é comum a adoção de métodos aproximativos para lidar com o problema. Essas abordagens, as quais foram apresentadas na revisão de literatura, são eficazes por atingirem otimalidade global ainda que não precisem lidar com não-linearidades no modelo. Por fim, foi apresentada a contribuição desse trabalho, apontando as diferenças e os objetivos que serão detalhados na sequência do texto.

3 MODELOS QUADRÁTICOS POR PARTES PARA OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

Esse capítulo tem por objetivo apresentar os modelos para a otimização da produção de petróleo a partir da síntese de curvas quadráticas aproximativas das funções de produção e queda de pressão em poços operados por *gas-lift*.

O texto inicia com uma breve introdução teórica que busca elucidar a escolha por uma abordagem quadrática e, em seguida, duas formulações baseadas em aproximações quadráticas por partes para o problema P proposto na Seção 2.4 são apresentadas. Em seguida, é desenvolvida uma demonstração matemática da equivalência entre as duas formulações e, por fim, a síntese de curvas, ou seja, a maneira encontrada para a obtenção de aproximações quadráticas das funções de produção e queda de pressão.

3.1 INTRODUÇÃO A MODELOS QUADRÁTICOS CONVEXOS

Antes de apresentar os modelos propostos nesse trabalho, faz-se necessária uma breve introdução a conceitos importantes utilizados nas proposições dos modelos. Por esse motivo, essa seção apresenta conceitos básicos sobre conjuntos e funções convexas, bem como modelos quadráticos convexas, os quais facilitarão o entendimento da proposta da pesquisa.

3.1.1 Conjuntos Convexos

Um subconjunto Q de um espaço vetorial é considerado convexo se todo segmento de reta conectando dois pontos de Q está contido dentro do subconjunto [19].

Supondo $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}^n$ pontos descritos como:

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \quad (3.1)$$

Tomando $0 \leq \alpha \leq 1$, então a combinação convexa de x_1, x_2 representa o segmento de reta entre esses pontos como mostrado na Figura 3.1.

Em uma definição menos formal, um conjunto pode ser considerado convexo se quaisquer dois pontos dentro do conjunto podem ser conectados por um caminho reto entre eles que também esteja contido no conjunto. A Figura 3.2 apresenta três conjuntos: no caso **(a)** e **(b)** os conjuntos atendem a definição anterior. Já no caso **(c)** não é possível que todos os pontos se conectem por uma linha reta contida no conjunto.

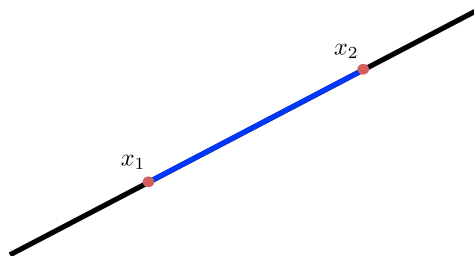


Figura 3.1: Conjunto convexo representado por uma reta.

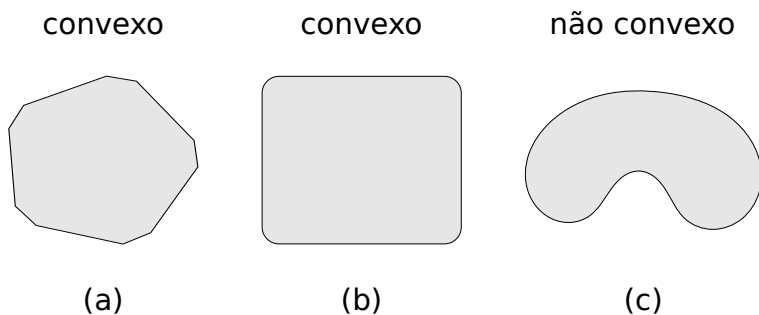


Figura 3.2: Exemplos de conjuntos convexos e não convexos.

3.1.2 Funções Convexas

Para que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja considerada convexa é preciso que, primeiramente, o domínio de f seja um conjunto convexo e para todo $x, y \in \text{dom} f$, e θ no intervalo $0 \leq \theta \leq 1$ [19]:

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \quad (3.2)$$

Em uma interpretação geométrica da Eq. (3.2), pode-se afirmar que o segmento de reta $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$ está acima do gráfico de f em todos os pontos para qualquer variação no intervalo θ . A Figura 3.3 ilustra um exemplo de uma função convexa. Caso $-f$ seja uma função convexa, então denominamos essa função como côncava.

Para uma função afim, a equação 3.2 sempre é satisfeita com a igualdade. Dessa forma, funções lineares também são funções con-

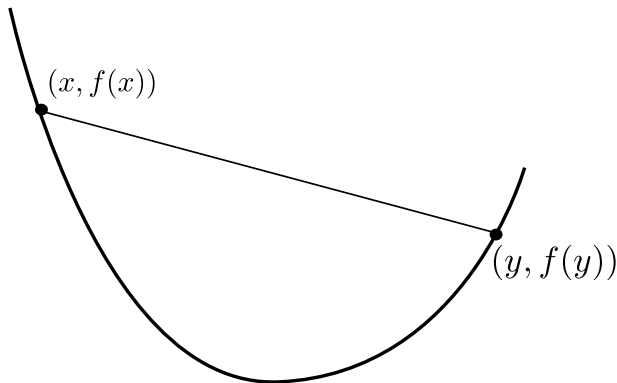


Figura 3.3: Exemplo de função convexa.

vexas e côncavas.

Em complemento a isso, uma função é convexa se e somente se é convexa quando restrita a um segmento de reta que intercepta seu domínio. Ou seja, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se e somente se a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x + tv), \quad \mathbf{dom} g = \{t : x + tv \in \mathbf{dom} f\} \quad (3.3)$$

é convexa em t para todo $x \in \mathbf{dom} f, v \in \mathbb{R}^n$.

Essa propriedade é bastante importante, uma vez que permite verificar a convexidade de uma função restringindo-a a uma reta.

Ainda dentro do contexto de funções convexas, é essencial que se apresente as condições que caracterizam a convexidade de uma função [19]:

- **Condição de primeira ordem:** Suponha que o gradiente de função f (∇f) existe em um domínio aberto, ou seja, f é diferenciável em $\mathbf{dom} f$. Então pode-se afirmar que f é convexa se e somente se $\mathbf{dom} f$ é um conjunto convexo e a seguinte condição é satisfeita:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x), \quad \forall x, y \in \mathbf{dom} f \quad (3.4)$$

Geometricamente o lado direito da desigualdade (3.4), o qual é a expansão de Taylor de primeira ordem de f , pode ser interpretado como um subestimador global da função como é mostrado na Figura 3.4. Sendo assim, assumindo-se que a expansão de Taylor de primeira ordem sempre é um subestimador global, então a função é convexa. A partir de (3.4) ainda

diz que a partir de uma informação local, ou seja, na derivada de um ponto, podemos obter informação global (subestimador global).

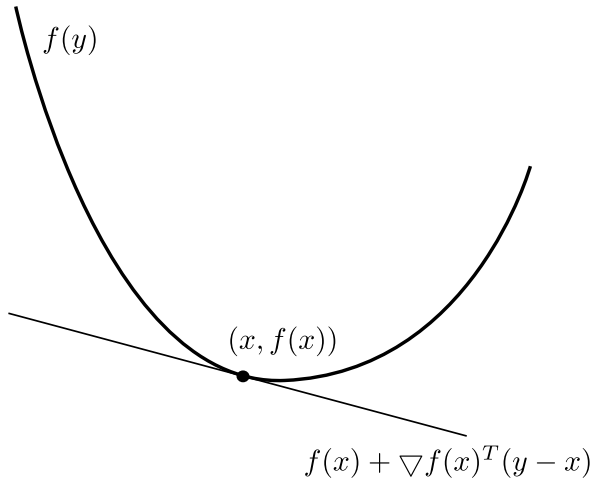


Figura 3.4: Subestimador global de uma função convexa.

- **Condição de segunda ordem:** Assumindo que a Hessiana de f existe, ou seja, a matriz $\nabla^2 f$ está definida em todos os pontos de $\mathbf{dom} f$ aberto, então f é convexa se e somente se $\mathbf{dom} f$ é um conjunto convexo e sua Hessiana é positiva semidefinida, ou seja:

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0, \quad \forall x \in \mathbf{dom} f \quad (3.5)$$

A condição da Eq. (3.5) pode ser interpretada geometricamente como uma função que possui curvaturas não-negativas. De forma análoga, uma função f é côncava se $\nabla^2 f \preceq 0$ para todo $x \in \mathbf{dom} f$.

Exemplos:

Com o objetivo de ilustrar as propriedades anteriormente citadas, são apresentados os seguintes exemplos:

- **Função quadrática:** Considerando uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $\text{dom} f = \mathbb{R}^n$ dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + q^T \mathbf{x} + r \quad (3.6)$$

com P sendo uma matriz simétrica $n \times n$, $q \in \mathbb{R}^n$ um vetor e $r \in \mathbb{R}$ um escalar. Sendo que $\nabla^2 f = P$ para todo x , então f é convexa se e somente se $P \succeq 0$.

Esse exemplo é bastante importante, uma vez que é utilizado para obtenção das curvas utilizadas como aproximações nos modelos de otimização da produção de petróleo. Essa propriedade será melhor discutida na Seção 3.2.

- **Função quadrática sobre linear:** Seja a função:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} \quad (3.7)$$

mostrada na Figura 3.5. Com Hessiana:

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{2}{y^3} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}^T \quad (3.8)$$

Pode-se afirmar que $\nabla^2 f$ é positiva semidefinida para $\text{dom} f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

3.1.3 Modelos Quadráticos Convexos

Um modelo quadrático convexo de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser representado como [19]:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \quad (3.9)$$

Na Eq. (3.9) a matriz Q é positiva definida, ou seja, com autovalores todos positivos, \mathbf{b} é um vetor e c uma constante. A função f é convexa pois obedece a todas as propriedades citadas na seção anterior. Esse modelo de aproximação será utilizado para a representação das curvas de produção e queda de pressão no problema de otimização da produção.

Um problema de programação quadrática é de otimização convexa se a função objetivo é quadrática convexa e as funções de restrição são afins. Um problema de otimização quadrática pode ser

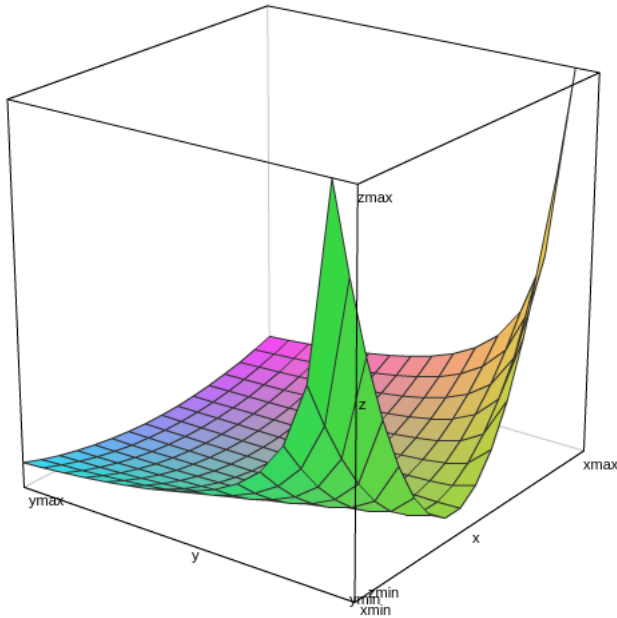


Figura 3.5: Gráfico da função descrita na Eq. (3.7).

expressado como [19]:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{x} + c \\
 &\text{sujeito a:} && G \mathbf{x} \preceq \mathbf{h} \\
 &&& A \mathbf{x} = \mathbf{b}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

em que Q é uma matriz simétrica $n \times n$ positiva semidefinida, $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e \mathbf{q} , \mathbf{b} e \mathbf{h} são vetores. Em um problema de programação quadrática minimiza-se a função quadrática convexa sobre um poliedro como mostrado na Figura 3.6.

Na Figura 3.6 a região factível σ (região mais escura) é o poliedro e as linhas sobre ele representam as curvas de nível da função objetivo quadrática convexa. Já o ponto x^* é o ótimo.

Trazendo esses conceitos para o contexto de otimização da produção de petróleo, verifica-se que as curvas de produção e queda de pressão são não lineares e não convexas, o que induz, em muitos

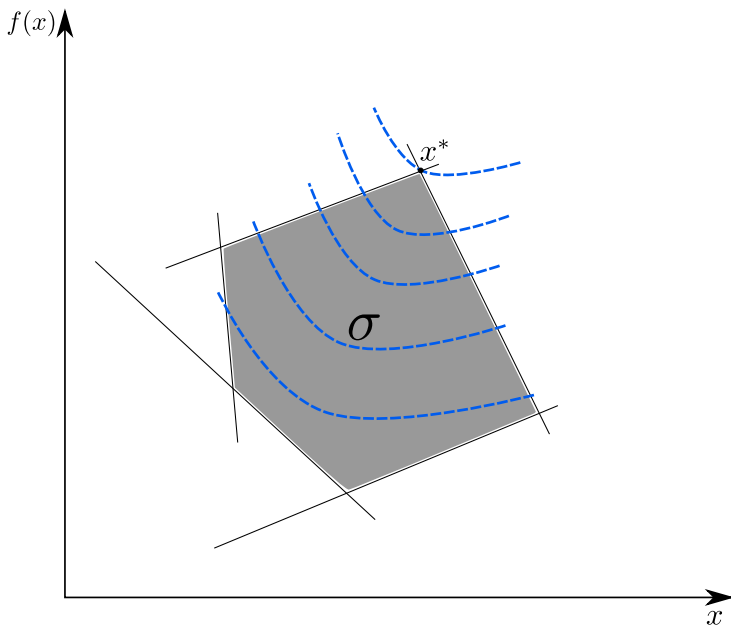


Figura 3.6: Ilustração geométrica de um problema de otimização quadrática (Adaptado de [19]).

casos, a adoção de alguma abordagem que faça uso de aproximações convexas sobre os modelos originalmente não convexas.

Boa parte dos trabalhos citados na Seção 2.5 fazem uso de aproximações lineares por partes. Na aproximação linear por partes, o domínio é dividido em pequenas regiões denominadas polítopos, os quais possuem uma aproximação linear da função original em cada segmento. O problema então está em buscar o ótimo em cada uma dessas regiões quando estiverem ativas durante a solução do problema. A Figura 3.7 ilustra uma função não linear aproximada a partir de linearização por partes.

Apesar de bastante eficiente no sentido de permitir que sejam alcançados ótimos globais nas aproximações correspondentes, essa abordagem pode inserir no problema de otimização um número elevado de variáveis em sua representação. Este acréscimo é tão maior quanto mais precisa se quiser ter a representação da curva não-linear e acarreta o aumento da complexidade do modelo

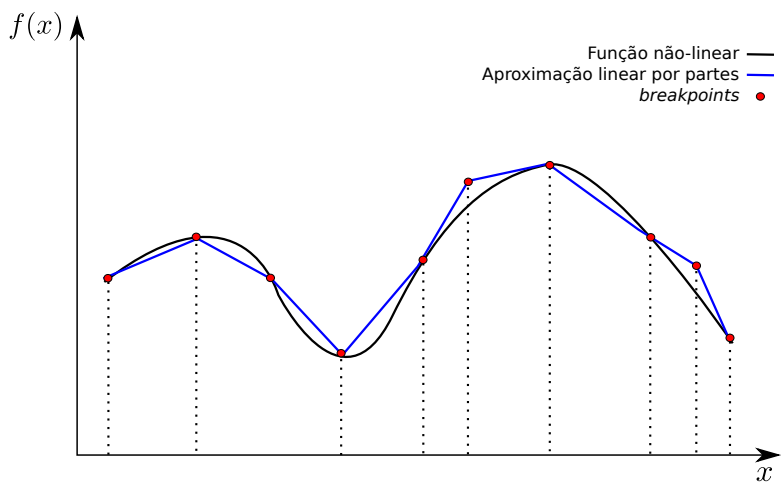


Figura 3.7: Aproximação linear por partes.

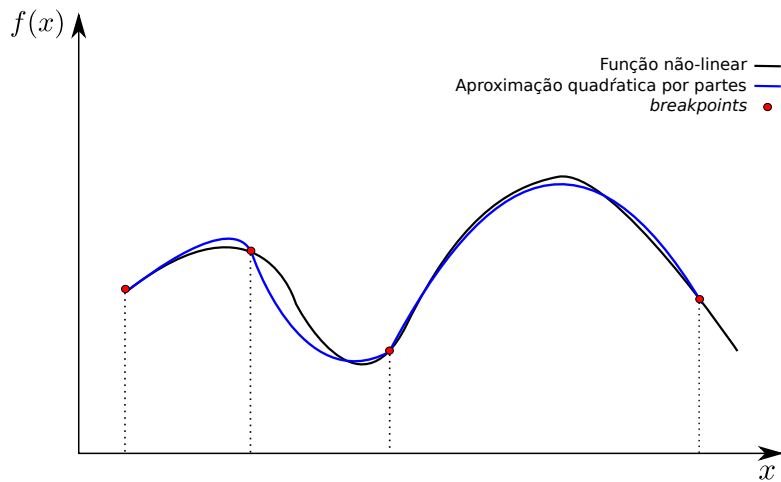


Figura 3.8: Aproximação quadrática por partes.

final, elevando também o custo computacional para se resolver o problema [14, 16, 18, 2].

Uma abordagem alternativa é o uso de aproximações côncavas ou convexas quadráticas por partes como mostrado na Figura 3.8. Nela igualmente se divide o domínio da função em polítopos e para cada seção se utilizam funções quadráticas para a representação da curva original.

Apesar de também inserir variáveis extras no problema de otimização dos campos de petróleo, esta abordagem é mais compacta, e pode reduzir o custo computacional. Usando esta técnica, é possível reformular o problema de otimização da produção como um problema de Programação Convexa Inteira Mista e resolvê-lo com um solver comercial.

Portanto, a próxima seção se dedica à síntese de aproximações das funções de produção e perda de carga em um sistema de produção de petróleo e gás.

3.2 SÍNTESE DE CURVAS

Para lidar com um modelo não-linear e não convexo como no caso da otimização de campos de petróleo e gás, é comum adotar alguma abordagem aproximativa que ainda mantenha as características do sistema, mas que permita ao modelo ser mais facilmente tratado e resolvido. Dentro desse contexto, esse trabalho também optou por utilizar uma abordagem de aproximação quadrática das curvas de produção e queda de pressão em um sistema de produção de petróleo e gás.

A Figura 3.9 mostra que, a partir de uma aproximação quadrática, deixa-se de trabalhar com um modelo MINLP e passa-se a utilizar um modelo MIP mais compacto. As curvas de produção e queda de pressão geradas por um simulador (assunto discutido na Seção 4.1) são aproximadas a partir de um problema de **Programação Semi-Definida** (SDP) que as torna quadráticas e garante convexidade. A programação semi-definida se enquadra como uma subdivisão da programação convexa e foi objeto de pesquisa intensa na área da matemática por possuir aplicação em vários problemas. O problema consiste em maximizar ou minimizar uma função objetivo, que é uma função linear, colocando como restrição uma combinação afim de matrizes simétricas positiva ou negativa semi-definidas.

A curva de perda de carga em uma linha é função das vazões

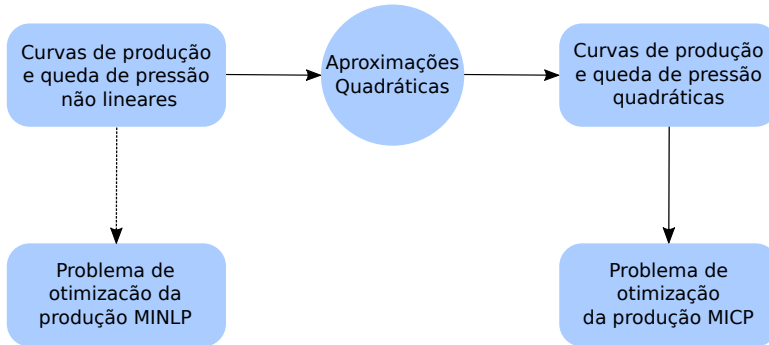


Figura 3.9: Utilização de aproximações quadráticas na síntese de modelo MICP.

de óleo, gás e água na tubulação e, em virtude de ser uma função tridimensional, justifica-se o uso de uma aproximação quadrática convexa em busca de um modelo mais compacto do que um modelo linear por partes, por exemplo.

Já no caso de uma WPC, estabelece-se uma relação entre injeção de gás e produção de petróleo para uma dada pressão no *manifold*. O formato real dessa curva (não-linear) tem, por vezes, um comportamento que assemelha-se a uma função quadrática. Sendo assim, é intuitivo buscar uma aproximação por uma função de segunda ordem para a curva de produção, a fim de conseguir também modelos mais compactos, mas que possuam informação suficiente sobre a curva original.

No caso de uma WPC, dependendo da região do domínio, a curva pode se apresentar de forma bastante irregular, comprometendo a aproximação com apenas uma quadrática para todo o domínio, como ilustrado na Figura 3.10. Nesse caso, para uma melhor qualidade na aproximação das curvas de produção e queda de pressão, adotou-se a aproximação quadrática convexa por partes das funções, dividindo-se o domínio em polítopos como mostrado na Figura 3.11, o qual induz a uma aproximação quadrática para cada um dos quatro polítopos adotados como mostrado no exemplo de uma WPC na Figura 3.12, reduzindo erros em relação à curva real.

Entretanto, quanto maior o número de divisões no domínio, ou seja, quanto mais polítopos são utilizados, maior o custo computacional para obtenção das aproximações. Dessa forma é necessário

que seja estabelecida uma relação de custo-benefício entre qualidade das aproximações e número de politopos.

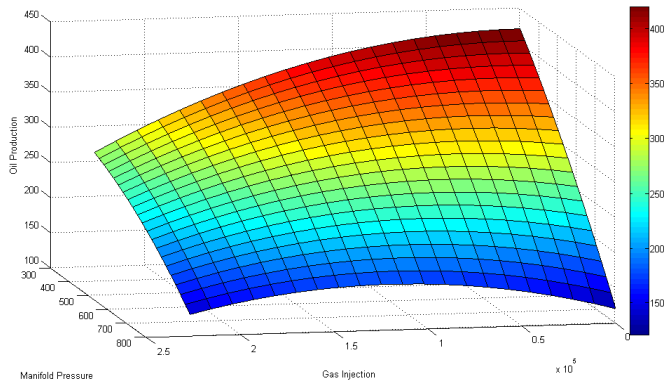


Figura 3.10: Aproximação quadrática côncava de uma curva de produção.

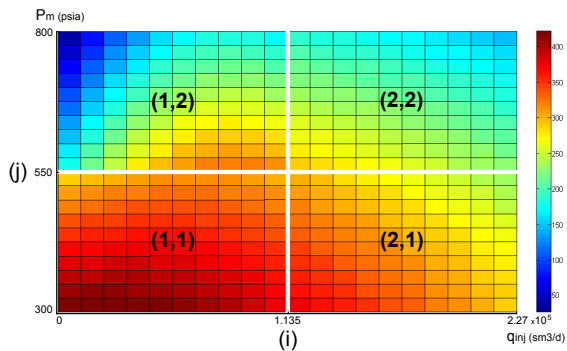


Figura 3.11: Domínio da função dividido em 4 politopos, com (i, j) sendo o par que define os índices de um politopo.

Uma aproximação quadrática para a curva de produção de petróleo $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser representada como:

$$\widehat{q}_{i,j}^{n,m}(q_{inj}^{n,m}, p^m) = [q_{inj}^{n,m} \ p^m] Q_{i,j}^{n,m} [q_{inj}^{n,m} \ p^m]' + [q_{inj}^{n,m} \ p^m] \mathbf{b}_{i,j}^{n,m} + c_{i,j}^{n,m} \quad (3.11)$$

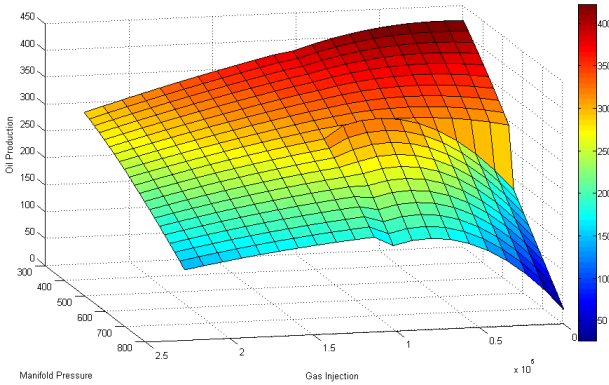


Figura 3.12: Aproximação quadrática por partes.

Na qual, para cada poço n conectado a um *manifold* m , os pares (i, j) são os índices de um politopo, $Q_{i,j}^{n,m}$ é uma matriz negativa semi-definida, $\mathbf{b}_{i,j}^{n,m}$ é um vetor e $c_{i,j}^{n,m}$ é uma constante, $q_{in,j}^{n,m}$ é a taxa de gás de elevação e p^m é a pressão no *manifold*. De forma análoga, uma aproximação quadrática para a curva de queda de pressão $\Delta P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser representada como:

$$\Delta P_{o,g,w}^m(q^m) = \mathbf{q}^{mT} Q_{o,g,w}^m \mathbf{q}^m + (\mathbf{b}_{o,g,w}^m)' \mathbf{q}^m + c_{o,g,w}^m \quad (3.12)$$

Em que, para cada *manifold* m , as triplas (o, g, w) são os índices de um politopo, $Q_{o,g,w}^m$ é uma matriz positiva semi-definida, $\mathbf{b}_{o,g,w}^m$ é um vetor e $c_{o,g,w}^m$ é uma constante e \mathbf{q}^m é um vetor de vazões das fases do fluido multifásico (petróleo, gás e água) no *manifold* m , no qual $\mathbf{q}^m = [q_o^m, q_w^m, q_g^m]$.

Para obter uma aproximação quadrática mais adequada, é necessário estabelecer um método para o ajuste das curvas e verificar se os resultados são aceitáveis. Para tanto, como mencionado anteriormente, uma aproximação côncava ou convexa para as curvas de produção e queda de pressão é obtida resolvendo um problema de programação semi-definida, o qual minimiza o erro em relação a um conjunto de pontos gerado por um simulador multifásico. Em outras palavras, a partir dos pontos que representam relações consideradas representativas entre as variáveis do processo para as curvas de produção e queda de pressão, se resolve um problema de otimização a fim de se obter uma função quadrática minimizando a

distância dos valores induzidos pela função em relação aos valores originais.

Antes de definir um problema de programação semi-definida para a aproximação das curvas de produção e queda de pressão, é importante definir os parâmetros que fazem parte do problema. A Figura 3.13 apresenta esses parâmetros e as condições que se podem estabelecer dentro do problema.

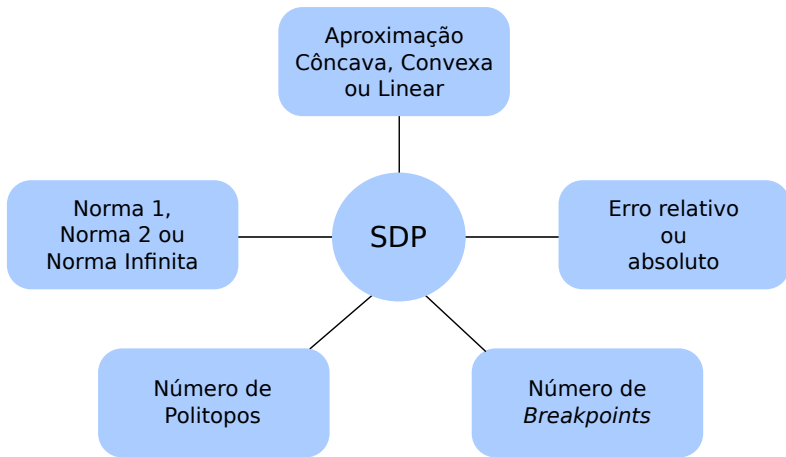


Figura 3.13: Parâmetros do problema de programação semi-definida.

- **Aproximação:** A aproximação quadrática é obtida usando como restrição uma função de segunda ordem $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$ e a restrição $Q \preceq 0$ para o caso de uma aproximação côncava e $Q \succeq 0$ para uma aproximação convexa. Já para o caso de uma aproximação linear, se considera a matriz Q como uma matriz de zeros e se elimina a restrição de desigualdade.
- **Erro:** Os erros representam a distância entre o valor real e o valor calculado pela aproximação quadrática em um dado ponto do domínio. O vetor de erros é a variável a ser minimizada pelo problema de otimização. Ele pode ser tanto representado em sua forma absoluta, quanto relativa. Considerando uma aproximação quadrática $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$,

os erros absoluto e relativo são representados pelas Equações abaixo, respectivamente.

$$-\epsilon^{ab} \leq q(\mathbf{x}) - q \leq \epsilon^{ab} \quad (3.13)$$

$$-\epsilon^{rel} \leq \frac{q(\mathbf{x}) - q}{q(\mathbf{x})} \leq \epsilon^{rel} \quad (3.14)$$

- **Norma:** Na prática existe um vetor de erros $\epsilon = (\epsilon_j : j = 1, \dots, n)$. Portanto, a função que se deseja minimizar é a norma de um dos vetores dos erros. Os três tipos de normas podem ser modeladas da seguinte forma para erro ϵ :

Norma 1 (ℓ_1):

$$\|\epsilon\|_1 = \sum_{j=1}^n |\epsilon_j| \quad (3.15)$$

Norma Infinita (ℓ_∞):

$$\|\epsilon\|_\infty = \max\{|\epsilon_j| : j = 1, \dots, n\} \quad (3.16)$$

Norma 2 (ℓ_2):

$$\|\epsilon\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \epsilon_j^2} \quad (3.17)$$

- **Breakpoints e Politopos:** Os *breakpoints* definem a região de cada politopo de um particionamento do domínio de uma função e, por consequência, o número de quadráticas que serão utilizadas para representar as funções de produção e perda de carga. No exemplo da Figura 3.11 há três *breakpoints* em cada eixo (um no início, outro no meio e outro no fim do domínio de cada eixo), fazendo com que o domínio seja dividido em duas partes em cada eixo, totalizando quatro politopos. Ainda em relação ao número de *breakpoints*, o que se deseja é obter uma estimação que seja representativa da sua curva utilizando o menor número de pontos possível, pois quanto mais pontos utilizados maior o custo computacional de se obter os parâmetros da curva de aproximação. Com relação ao número de politopos, deseja-se obter um resultado satisfatório (erros

relativos e/ou absolutos dentro de uma margem aceitável) de modo que o número de fatias do domínio que representam a curva não linear (ou seja, o número de politopos) seja o menor possível.

Tendo conhecimento sobre os parâmetros que envolvem o problema de programação semi-definida, é possível modelar um problema exemplo.

Utilizando m pontos amostrais $\{(\mathbf{x}_i, q_i) : i = 1, \dots, m\}$, norma ℓ_1 , e erro absoluto na função objetivo, um exemplo de problema de programação semi-definida para aproximação da curva de produção de poços de petróleo e gás pode ser definido como segue:

$$CF : \min_{Q, b, c, \epsilon_i^a} f = \sum_{i=1}^m \epsilon_i^a \quad (3.18a)$$

$$s.t. : q_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i' Q \mathbf{x}_i + b' \mathbf{x}_i + c, i = 1, \dots, m \quad (3.18b)$$

$$- \epsilon_i^a \leq q(\mathbf{x}_i) - q_i \leq \epsilon_i^a, i = 1, \dots, m \quad (3.18c)$$

$$Q \preceq 0 \quad (3.18d)$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz simétrica negativa semi-definida, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_i \in [\text{injeção de gás} \times \text{pressão no manifold}]$ é um ponto no domínio da função de produção, e $q(\mathbf{x}_i)$ é o valor da vazão produzida na WPC no ponto \mathbf{x}_i obtido no simulador.

Outros exemplos utilizando norma ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_∞ a partir da minimização dos erros absoluto e relativo são apresentadas no Apêndice B.

De posse das curvas quadráticas aproximadas tanto de produção, quanto queda de pressão, pode-se agora apresentar os modelos MICP para a otimização da produção de campos de petróleo e gás, os quais farão uso das aproximações quadráticas obtidas para a resolução do problema.

3.3 MODELOS QUADRÁTICOS POR PARTES AGREGADO E DESAGREGADO PARA OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

A escolha por uma abordagem de investigação em torno de modelos MICP que fazem uso de aproximações quadráticas para as funções não lineares de produção e queda de pressão se deu,

principalmente, pelos resultados alcançados no trabalho de [2], no qual, obteve-se um modelo misto, com aproximações lineares por partes para WPC dos poços e utilização de curvas quadráticas para representar a função de queda de pressão. Provou-se no estudo que um modelo mais compacto pode produzir resultados melhores do que modelos puramente lineares por partes, dependendo da região do domínio analisada.

Nesse sentido, procurou-se apurar o desempenho de um modelo puramente quadrático para ambas funções não lineares e não convexas envolvidas no problema de otimização da produção. É importante salientar que os modelos propostos nesse trabalho têm por características serem mais genéricos que os apresentados nos trabalhos da Seção 2.5, uma vez que podem ser representados tanto por modelos MICP com 1 ou n politopos, por um modelo misto como o de [2] ou mesmo por um modelo MILP a partir da eliminação dos termos quadráticos das aproximações obtidas, ou seja, pode-se zerar a matriz Q , utilizando-se somente funções lineares.

Nas duas formulações a seguir (Modelo Agregado e Modelo Desagregado) um modelo quadrático-côncavo é utilizado para aproximar as funções de produção dos poços $q^{n,m}$ no interior de cada região do espaço de decisão de (p^m, q_{inj}^n) , enquanto a queda de pressão ΔP^m é aproximada por um modelo quadrático-convexo. As aproximações levam a modelos quadráticos por partes multidimensionais dentro de cada região do domínio de q^m .

3.3.1 Modelo Agregado

Essa formulação utiliza uma família de variáveis binárias $\{z_{i,j}^{n,m}\}$ para decidir simultaneamente a respeito do roteamento do poço n ao *manifold* m , o intervalo ativo i de injeção de gás q_{inj}^n e o intervalo ativo para a pressão no *manifold* p^m .

Uma variável de decisão $q_{inj,i,j}^{n,m}$ é associada a cada região aproximada $\mathcal{P}_{i,j}^{n,m}$ considerando cada conexão possível de um poço n a um *manifold* m .

A formulação do problema é dada por:

$$\tilde{P}_{ag} : \max f = \sum_{m \in \mathcal{M}} \tilde{q}_o^m \quad (3.19a)$$

sujeito a:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} q_{inj}^n \leq q_{inj}^U, \quad (3.19b)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} z_{i,j}^{n,m} = y^n, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad (3.19c)$$

e para todo $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}_n$, $(i, j) \in \mathcal{K}^{n,m}$:

$$q_{inj,i}^{n,m,L} z_{i,j}^{n,m} \leq q_{inj,i,j}^{n,m} \leq q_{inj,i}^{n,m,U} z_{i,j}^{n,m}, \quad (3.19d)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \leq \Phi_{i,j}^{n,m}(q_{inj,i,j}^{n,m}, p^m) + \mathbf{q}^{n,\max}(1 - z_{i,j}^{n,m}), \quad (3.19e)$$

$$\mathbf{q}^{n,L} z_{i,j}^{n,m} \leq \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{n,U} z_{i,j}^{n,m}, \quad (3.19f)$$

$$z_{i,j}^{n,m} \in \{0, 1\}, \quad (3.19g)$$

e para todo $n \in \mathcal{N}$:

$$q_{inj}^n = \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} q_{inj,i,j}^{n,m}, \quad (3.19h)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{n,m} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m}, \quad \forall m \in \mathcal{M}_n, \quad (3.19i)$$

$$y^n \in \{0, 1\}, \quad (3.19j)$$

e para todo $m \in \mathcal{M}$:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}^{n,m}} z_{i,j}^{n,m} \leq \zeta_j^m, \forall n \in \mathcal{N}_m, \forall j \in \mathcal{J}^m, \quad (3.19k)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}^m} \zeta_j^m = 1, \quad (3.19l)$$

$$p_j^{m,L} \zeta_j^m + p_j^{m,L} (1 - \zeta_j^m) \leq p^m, \forall j \in \mathcal{J}^m, \quad (3.19m)$$

$$p^m \leq p_j^{m,U} \zeta_j^m + p_j^{m,U} (1 - \zeta_j^m), \forall j \in \mathcal{J}^m, \quad (3.19n)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m}, \quad (3.19o)$$

$$\mathbf{q}^{m,L} \leq \tilde{\mathbf{q}}^m \leq \mathbf{q}^{m,U}, \quad (3.19p)$$

$$\sum_{(o,w,g) \in \mathcal{D}^m} w_{o,w,g}^m = y^m, \quad (3.19q)$$

$$\mathbf{q}_{o,w,g}^{m,L} w_{o,w,g}^m \leq \mathbf{q}_{o,w,g}^m \leq \mathbf{q}_{o,w,g}^{m,U} w_{o,w,g}^m, \quad (3.19r)$$

$$0 \leq \Delta p_{o,w,g}^m \leq \Delta p^{m,\max} w_{o,w,g}^m, \quad (3.19s)$$

$$\Omega_{o,w,g}^m (\mathbf{q}_{o,w,g}^m) - \Delta p^{m,\max} (1 - w_{o,w,g}^m) \leq \Delta p_{o,w,g}^m, \quad (3.19t)$$

$$\tilde{\Delta p}^m = \sum_{(o,w,g) \in \mathcal{D}^m} \Delta p_{o,w,g}^m, \quad (3.19u)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{(o,w,g) \in \mathcal{D}^m} \mathbf{q}_{o,w,g}^m, \quad (3.19v)$$

$$p^m = p^{m,S} + \tilde{\Delta p}^m, \quad (3.19w)$$

$$w_{o,w,g}^m \in \{0, 1\}, \forall (o, w, g) \in \mathcal{D}^m, \quad (3.19x)$$

$$y^m \in \{0, 1\}, \quad (3.19y)$$

$$\zeta_j^m \in \{0, 1\}, \forall j \in \mathcal{J}^m, \quad (3.19z)$$

com os seguintes parâmetros adicionais:

- $\mathcal{J}^m = \{1, \dots, J^m\}$ é o conjunto de índices dos intervalos de pressão do *manifold* m ;
- $\mathcal{I}^{n,m} = \{1, \dots, I^{n,m}\}$ é o conjunto de índices dos intervalos de *lift-gas* para o poço n se conectado ao *manifold* m ;
- $[q_{inj,i}^{n,m,L}, q_{inj,i}^{n,m,U}]$ define o intervalo $i \in \mathcal{I}^{n,m}$ para a injeção de gás de elevação no poço n quando conectado ao *manifold* m . Assume-se que $q_{inj,i}^{n,m,U} = q_{inj,i+1}^{n,m,L}$ para todo $i < I^{n,m}$, $q_{inj,1}^{n,m,L} = q_{inj,1}^{n,L}$, e $q_{inj,I^{n,m}}^{n,m,U} = q_{inj}^{n,U}$;
- $[p_j^{m,L}, p_j^{m,U}]$ define a faixa de pressão para o intervalo $j \in \mathcal{J}^m$ para o *manifold* m . Assume-se que $p_j^{m,U} = p_{j+1}^{m,L}$ para todo $j < J^m$, $p_1^{m,L} = p^{m,L}$ e $p_{J^m}^{m,U} = p^{m,U}$;
- $\mathcal{K}^{n,m} = \mathcal{I}^{n,m} \times \mathcal{J}^m$ define as regiões (politopos) para a aproximação local das funções de produção dos poços;
- $\mathcal{P}_{i,j}^{n,m} = [q_{inj,i}^{n,m,L}, q_{inj,i}^{n,m,U}] \times [p_j^{m,L}, p_j^{m,U}]$, $(i, j) \in \mathcal{K}^{n,m}$, é um politopo no qual a função de produção é aproximada;
- $\mathbf{q}^{n,\max}$ é um vetor constante para implementar uma estratégia de Big-M; a constante deve ser suficientemente grande para garantir que o lado direito da equação (3.19e) seja não negativo se $z_{i,j}^{n,m} = 0$;
- $\Delta p^{m,\max}$ é um escalar que deve ser suficientemente grande para garantir a relaxação da equação (3.19t) quando $w_{o,w,g}^m = 0$;
- \mathcal{D}^m é o conjunto de índices (o, w, g) correspondente ao politopo $\mathcal{P}_{o,w,g}^m$ do domínio da função de queda de pressão Δp^m ;
- $\mathcal{P}^m = \{\mathcal{P}_{o,w,g}^m : (o, w, g) \in \mathcal{D}^m\}$ é o conjunto de politopos que define a partição do domínio da função de queda de pressão Δp^m ;

- $\mathbf{q}_{o,w,g}^{m,L}$ e $\mathbf{q}_{o,w,g}^{m,U}$ definem o menor e maior valor respectivamente para todas as fases $h \in \mathcal{H}$ dentro do politopo $\mathcal{P}_{o,w,g}^m \in \mathcal{P}^m$. Note que $\mathcal{P}_{o,w,g}^m = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{q}_{o,w,g}^{m,L} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_{o,w,g}^{m,U}\}$ é o politopo consistindo do fluxo das fases, as quais estão dentro do hipercubo com o menor valor em $\mathbf{q}_{o,w,g}^{m,L}$ e o maior valor $\mathbf{q}_{o,w,g}^{m,U}$;

- A função

$$\Phi_{i,j}^{n,m}(q_{inj}^{n,m}, p^m) = [q_{inj}^{n,m}, p^m] Q_{i,j}^{n,m} [q_{inj}^{n,m}, p^m]' + (\mathbf{b}_{i,j}^{n,m})' [q_{inj}^{n,m}, p^m] + c_{i,j}^{n,m}$$

é a aproximação quadrática côncava da curva de produção do poço n no politopo $\mathcal{P}_{i,j}^{n,m}$, $(i, j) \in \mathcal{K}^{n,m}$, quando conectado ao *manifold* m

- A função

$$\Omega_{o,w,g}^m(\mathbf{q}_{o,w,g}^m) = [\mathbf{q}_{o,w,g}^m]' Q_{o,w,g}^m [\mathbf{q}_{o,w,g}^m] + (\mathbf{b}_{o,w,g}^m)' [\mathbf{q}_{o,w,g}^m] + c_{o,w,g}^m$$

é a aproximação quadrática convexa da curva de queda de pressão no *manifold* m quando as vazões no *manifold* $\mathbf{q}_{o,w,g}^m$ estão dentro do politopo $\mathcal{P}_{o,w,g}^m$;

- $Q_{i,j}^{n,m}$, $\mathbf{b}_{i,j}^{n,m}$ e $c_{i,j}^{n,m}$ são a matriz, o vetor e a constante que definem a aproximação quadrática de uma WPC do poço n dentro do politopo $\mathcal{P}_{i,j}$, $(i, j) \in \mathcal{K}^{n,m}$, quando conectado ao *manifold* m ;
- $Q_{o,w,g}^m$, $\mathbf{b}_{o,w,g}^m$ e $c_{o,w,g}^m$ são a matriz, vetor e constante que definem a aproximação quadrática de uma curva de queda de pressão no *manifold* m dentro do politopo $\mathcal{P}_{(o,w,g)}^m$, $(o, w, g) \in \mathcal{D}^m$, conectado ao separador adjunto;

variáveis:

- $q_{inj,i,j}^{n,m}$ é a taxa de gás de elevação do poço n se conectado *manifold* m e situado dentro do intervalo $[q_{inj,i,j}^{n,m,L}, q_{inj,i,j}^{n,m,U}]$;
- $z_{i,j}^{n,m}$ assume o valor 1 se o poço n está conectado ao *manifold* m e sua WPC está aproximada dentro do politopo $\mathcal{P}_{i,j}^{n,m}$, e 0 caso contrário;
- $\tilde{\mathbf{q}}_{h,i,j}^{n,m}$ é o fluxo de fase $h \in \mathcal{H}$ enviado do poço n ao *manifold* m se o politopo $\mathcal{P}_{i,j}^{n,m}$ está ativo, com $\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} = (\tilde{\mathbf{q}}_{h,i,j}^{n,m} : h \in \mathcal{H})$ representando o vetor do fluxo de fases;

- $\mathbf{q}_{o,w,g}^m$ é o fluxo de cada fase $h \in \mathcal{H}$ enviada ao *manifold* m dentro do politopo $\mathcal{P}_{o,w,g}^m \in \mathcal{P}^m$
- $\tilde{\mathbf{q}}^m$ é o fluxo total recebido dos poços conectados ao *manifold* m para todas as fases;
- ζ_j^m assume o valor 1 se a pressão do *manifold* m está no intervalo $[p_j^{m,L}, p_j^{m,U}]$, e 0 caso contrário;
- $\Delta p_{o,w,g}^m$ é uma variável com o limite superior da queda de pressão na linha do *manifold* m quando seu fluxo $\tilde{\mathbf{q}}^m \in \mathcal{P}_{o,w,g}^m$
- $\tilde{\Delta p}^m$ é a queda de pressão entre o *manifold* m e o separador adjunto;
- $w_{o,w,g}^m$ assume o valor 1 se o politopo da curva de queda de pressão $\mathcal{P}_{o,w,g}^m$ está ativo, 0 caso contrário;
- y^m assume o valor 1 se o *manifold* m está ativo, ou 0 caso contrário;

3.3.2 Modelo Desagregado

Esta formulação difere da anterior no aspecto de considerar uma decomposição entre produção do poço, alinhamento entre poços e *manifolds* e pressão de operação em três variáveis binárias independentes. O modelo *desagregado* é dado por:

$$\tilde{P}_{dag} : \max f = \sum_{m \in \mathcal{M}} \tilde{\mathbf{q}}_o^m \quad (3.20a)$$

sujeito a:

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} q_{inj}^n \leq q_{inj}^U, \quad (3.20b)$$

e para todo $n \in \mathcal{N}$:

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_n} z^{n,m} = y^n, \quad (3.20c)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}^n} x_i^n = y^n, \quad (3.20d)$$

$$q_{inj,i}^{n,L} x_i^n \leq q_{inj}^n \leq q_{inj,i}^{n,U} x_i^n + q_{inj}^{n,U} (1 - x_i^n), \quad \forall i \in \mathcal{I}^n, \quad (3.20e)$$

$$q_{inj}^n \leq q_{inj}^{n,U} y^n, \quad (3.20f)$$

$$y^n \in \{0, 1\}, \quad (3.20g)$$

$$x_i^n \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \mathcal{I}^n, \quad (3.20h)$$

$$z^{n,m} \in \{0, 1\}, \quad \forall m \in \mathcal{M}_n, \quad (3.20i)$$

e para todo $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}_n$, $i \in \mathcal{I}^n$, $j \in \mathcal{J}^m$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} &\leq \Phi_{i,j}^{n,m}(q_{inj}^n, p^m) \\ &\quad + \mathbf{q}^{n,\max}(3 - x_i^n - z^{n,m} - \zeta_j^m), \end{aligned} \quad (3.20j)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \geq \mathbf{q}^{n,L}(x_i^n + z^{n,m} + \zeta_j^m - 2), \quad (3.20k)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{n,U} z^{n,m}, \\ \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{n,U} x_i^n, \\ \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{n,U} \zeta_j^m, \\ \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.20l)$$

e para todo $m \in \mathcal{M}$:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{n,m} = \sum_{i \in \mathcal{I}^n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m}, \forall n \in \mathcal{N}_m, \quad (3.20m)$$

$$Eqs. (3.19l) - (3.19z), \quad (3.20n)$$

com os seguintes parâmetros adicionais:

- $\mathcal{I}^n = \{1, \dots, I^n\}$ é o conjunto de índices de intervalos de injeção de gás para o poço n ;
- $[q_{inj,i}^{n,L}, q_{inj,i}^{n,U}]$ define o intervalo $i \in \mathcal{I}^n$ para a injeção do gás de elevação do poço n ;
- $\mathbf{q}^{n,\max}$ deve ser suficientemente grande para garantir que a equação (3.20j) permaneça inócua quando $z_{i,j}^{n,m} = 0$, independentemente dos valores de q_{inj}^n e p^m ;

variáveis:

- $z^{n,m}$ assume o valor 1 se o poço n está conectado ao *manifold* m ;
- x_i^n tem valor igual a 1 quando a injeção de gás no poço n está dentro intervalo i , denominado $[q_{inj,i}^{n,L}, q_{inj,i}^{n,U}]$;
- $\tilde{\mathbf{q}}^{n,m}$ é o fluxo multifásico que sai do poço n em direção ao *manifold* m .

3.3.3 Demonstração de Equivalência

Como foram apresentadas duas formulações para o mesmo problema, faz-se necessário identificar se ambas são equivalentes entre si.

A demonstração a seguir têm por objetivo mostrar matematicamente que os modelos agregado e desagregado são equivalentes e, portanto, podem ser utilizados para se obter o mesmo resultado quando sujeitos às mesmas condições iniciais.

Inicialmente, define-se os vetores:

$$\theta_{ag} = (q_{inj}^n, q_{inj,i,j}^{n,m}, \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m}, \tilde{\mathbf{q}}^{n,m}, \tilde{\mathbf{q}}^m, p^m, \tilde{\Delta p}^m, y^n, y^m, z_{i,j}^{n,m}, \zeta_j^m, w_{o,w,g}^m, \mathbf{q}_{o,w,g}^m, \Delta p_{o,w,g}^m)$$

$$\theta_{dag} = (q_{inj}^n, \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m}, \tilde{\mathbf{q}}^{n,m}, \tilde{\mathbf{q}}^m, p^m, \tilde{\Delta p}^m, y^n, y^m, x_i^n, z^{n,m}, \zeta_j^m, w_{o,w,g}^m, \mathbf{q}_{o,w,g}^m, \Delta p_{o,w,g}^m)$$

com as variáveis de decisão de \tilde{P}_{ag} e \tilde{P}_{dag} , respectivamente.

Assumindo que $\mathcal{I}^n = \mathcal{I}^{n,m}$ e $[q_{inj,i}^{n,m,L}, q_{inj,i}^{n,m,U}] = [q_{inj,i}^{n,L}, q_{inj,i}^{n,U}]$ para todo $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}_n$ e $i \in \mathcal{I}^n$, relações podem ser estabelecidas entre as formulações \tilde{P}_{ag} e \tilde{P}_{dag} .

Assumindo θ_{ag} como uma solução factível para \tilde{P}_{ag} . Pode-se definir $q_{inj}^n, \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m}, \tilde{\mathbf{q}}^{n,m}, \tilde{\mathbf{q}}^m, p^m, \tilde{\Delta p}^m, y^n, y^m, \zeta_j^m, w_{o,w,g}^m, \mathbf{q}_{o,w,g}^m, e \Delta p_{o,w,g}^m$ em θ_{dag} exatamente como em θ_{ag} . Por fim, define-se:

$$z^{n,m} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} z_{i,j}^{n,m}, \quad (3.21a)$$

$$x_i^n = \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} z_{i,j}^{n,m}. \quad (3.21b)$$

O que define todas as variáveis que compõem θ_{dag} . Resta saber se todas as restrições de \tilde{P}_{dag} são atendidas por θ_{dag} . As restrições (3.20b)-(3.20d) são obviamente satisfeitas. Para qualquer $n \in \mathcal{N}$ e $i \in \mathcal{I}^n$, a soma da desigualdade da esquerda da Eq. (3.19d) para todo $m \in \mathcal{M}_n$ e $j \in \mathcal{J}^m$, leva a

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,i}^{n,m,L} z_{i,j}^{n,m} &\leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,i,j}^{n,m} \\ \implies \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,i}^{n,L} z_{i,j}^{n,m} &= q_{inj,i}^{n,L} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} z_{i,j}^{n,m} \\ &= q_{inj,i}^{n,L} x_i^n \leq q_{inj}^n, \end{aligned}$$

assegurando a validade do lado esquerdo de (3.20e).

Similarmente, adicionando a desigualdade direita de (3.19d) para todo $m \in \mathcal{M}^n$ e $j \in \mathcal{J}^m$, chega-se a

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,i,j}^{n,m} &\leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,i}^{n,m,U} z_{i,j}^{n,m} \\
 \implies \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,i,j}^{n,m} &\leq q_{inj,i}^{n,U} x_i^n \implies \\
 \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,i,j}^{n,m} + \sum_{l \in \mathcal{I}^n: l \neq i} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,l,j}^{n,m} \\
 &\leq q_{inj,i}^{n,U} x_i^n + \sum_{l \in \mathcal{I}^n: l \neq i} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,l,j}^{n,m} \implies \\
 q_{inj}^n &\leq q_{inj,i}^{n,U} x_i^n + \sum_{l \in \mathcal{I}^n: l \neq i} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} q_{inj,l}^{n,m,U} z_{l,j}^{n,m} \implies \\
 q_{inj}^n &\leq q_{inj,i}^{n,U} x_i^n + q_{inj}^{n,U} \sum_{l \in \mathcal{I}^n: l \neq i} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} z_{l,j}^{n,m} \\
 \implies q_{inj}^n &\leq q_{inj,i}^{n,U} x_i^n + q_{inj}^{n,U} (1 - x_i^n),
 \end{aligned}$$

em que a última implicação advém do fato que $z_{l,j}^{n,m} = 0$ para todo $l \neq i$ quando $x_i^n = 1$. Caso contrário, se $x_i^n = 0$, então a soma $z_{l,j}^{n,m}$ irá assumir o valor máximo 1. Consequentemente, a Eq. (3.20e) é satisfeita.

Para qualquer $n \in \mathcal{N}$, adicionando a desigualdade direita de (3.19d) para todo $m \in \mathcal{M}_n$, $(i, j) \in \mathcal{K}^{n,m}$ resulta em

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} q_{inj,i,j}^{n,m} &\leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} q_{inj,i}^{n,m,U} z_{i,j}^{n,m} \\
 \implies \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} q_{inj}^n &\leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} q_{inj}^{n,U} z_{i,j}^{n,m} \\
 \implies q_{inj}^n &\leq q_{inj}^{n,U} y^n,
 \end{aligned}$$

que, por sua vez, implica a validade de Eq. (3.20f).

As restrições binárias (3.20g)–(3.20i) são obviamente válidas.

Para a Eq. (3.20j), toma-se qualquer $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}_n$, $i \in \mathcal{I}^n$ e $j \in \mathcal{J}^m$. Se $z_{i,j}^{n,m} = 0$, então (3.20j) é induzida por (3.19e) uma vez que $\mathbf{q}^{n,\max}$ é suficientemente alto para tornar (3.19e) e (3.20j) inócuas. Por outro lado, se $z_{i,j}^{n,m} = 1$ então $q_{inj,i,j}^{n,m} = q_{inj}^n$ e (3.19e) torna-se (3.20j) uma vez que $x_i^n = z^{n,m} = \zeta_j^m = 1$. Além disso, as Eqs. (3.20k)–(3.20l) são obviamente induzidas por (3.19f) e as definições em (3.21). Finalmente, as Eqs. (3.20m)–(3.20n) seguem diretamente de (3.19i) e das Eqs. (3.19l)–(3.19z).

Os desenvolvimentos acima mostram que para qualquer solução factível θ_{ag} para \tilde{P}_{ag} existe uma solução factível correspondente θ_{dag} para \tilde{P}_{dag} .

A outra direção também pode ser estabelecida da mesma maneira.

Assumindo θ_{dag} como uma solução factível para \tilde{P}_{dag} , pode-se obter uma solução equivalente θ_{ag} factível para \tilde{P}_{ag} . Inicialmente, define-se: q_{inj}^n , $\tilde{q}_{i,j}^{n,m}$, $\tilde{q}^{n,m}$, \mathbf{q}^m , p^m , $\tilde{\Delta p}^m$, y^n , y^m , ζ_j^m , $w_{o,w,g}^m$, $\mathbf{q}_{o,w,g}^m$, e $\Delta p_{o,w,g}^m$ para θ_{ag} como em θ_{dag} .

Por fim, define-se as variáveis restantes seguindo:

$$z_{i,j}^{n,m} = x_i^n z^{n,m} \zeta_j^m \quad (3.22a)$$

$$q_{inj,i,j}^{n,m} = q_{inj}^n z_{i,j}^{n,m} \quad (3.22b)$$

A questão é saber se todas as restrições de \tilde{P}_{ag} serão satisfeitas por θ_{ag} .

A restrição (3.19b) é diretamente satisfeita. Expandindo a Eq. (3.19c) para algum $n \in \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}^{n,m}} z_{i,j}^{n,m} &= \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{i \in \mathcal{I}^n} \sum_{j \in \mathcal{J}^m} z^{n,m} x_i^n \zeta_j^m \\ &= \sum_{m \in \mathcal{M}_n} z^{n,m} \sum_{i \in \mathcal{I}^n} x_i^n \sum_{j \in \mathcal{J}^m} \zeta_j^m = \sum_{m \in \mathcal{M}_n} z^{n,m} \sum_{i \in \mathcal{I}^n} x_i^n \\ &= \sum_{m \in \mathcal{M}_n} z^{n,m} y^n = (y^n)^2 = y^n, \end{aligned}$$

demonstrando a validade da Eq. (3.19c).

Para a Eq. (3.19d), toma-se qualquer $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}_n$ e $(i, j) \in \mathcal{K}^{n,m}$. Se $z_{i,j}^{n,m} = 0$ então Eq. (3.19d) é induzida pelas definições em (3.22). Por outro lado, se $z_{i,j}^{n,m} = 1$, então $x_i^n = 1$, e a Eq. (3.20e) para este i leva a

$$\begin{aligned} q_{inj,i}^{n,L} x_i^n &\leq q_{inj}^n \leq q_{inj,i}^{n,U} x_i^n + q_{inj}^{n,U} (1 - x_i^n) \\ &\implies q_{inj,i}^{n,m,L} \leq \frac{q_{inj,i,j}^{n,m}}{z_{i,j}^{n,m}} \leq q_{inj,i}^{n,m,U} \\ &\implies q_{inj,i}^{n,m,L} z_{i,j}^{n,m} \leq q_{inj,i,j}^{n,m} \leq q_{inj,i}^{n,m,U} z_{i,j}^{n,m}, \end{aligned}$$

estabelecendo a validade de (3.19d).

Para a Eq. (3.19e), considera-se qualquer $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}_n$ e $(i, j) \in \mathcal{K}^{n,m}$. Nota-se que a Eq. (3.19e) é satisfeita se $z_{i,j}^{n,m} = 0$ porque $q^{n,\max}$ é suficientemente grande para garantir que a restrição fique inócua. No entanto, se $z_{i,j}^{n,m} = 1$, então (3.20j) resulta em

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \leq \Phi_{i,j}^{n,m}(q_{inj}^n, p^m) &\iff \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \leq \Phi_{i,j}^{n,m}\left(\frac{q_{inj,i,j}^{n,m}}{z_{i,j}^{n,m}}, p^m\right) \\ &\iff \tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n,m} \leq \Phi_{i,j}^{n,m}(q_{inj,i,j}^{n,m}, p^m), \end{aligned}$$

o que implica a validade de (3.19e). A Eq. (3.19f) é induzida por (3.20k)–(3.20l) e as definições em (3.22). A Eq. (3.19g) evidentemente é assegurada por definição.

Considerando qualquer $n \in \mathcal{N}$. Se $y^n = 0$, então $q_{inj}^n = 0$ tendo em vista a Eq. (3.20f) e consequentemente $x_i^n = 0$, $z^{n,m} = 0$, $z_{i,j}^{n,m} = 0$ e $q_{inj,i,j}^{n,m} = 0$ para todo $m \in \mathcal{M}_n$ e $(i, j) \in \mathcal{K}^{n,m}$, o que significa que a Eq. (3.19h) é satisfeita. Por outro lado, se $y^n = 1$, então $z_{i,\hat{i}}^{n,\hat{m}} = 1$ para algum \hat{i} , \hat{j} e \hat{m} , o que implica $z_{i,\hat{j}}^{n,m} = 0$ e $q_{inj,i,j}^{n,m} = 0$ para todos os outros i , j , e m , e, além disso, $q_{inj,\hat{i},\hat{j}}^{n,\hat{m}} = q_{inj}^n$. Consequentemente, a Eq. (3.19h) também é satisfeita em relação às condições operacionais do poço n .

A Eq. (3.19i) é garantida pela Eq. (3.20m). A Eq. (3.19j) é obviamente satisfeita.

Para qualquer $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}_n$ e $j \in \mathcal{J}^m$, a Eq. (3.20d) leva

a

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}^n} x_i^n = y^n &\implies \sum_{i \in \mathcal{I}^n} x_i^n \zeta_j^m = y^n \zeta_j^m \\ &\implies \sum_{i \in \mathcal{I}^n} x_i^n \zeta_j^m z^{n,m} \leq \zeta_j^m \implies \sum_{i \in \mathcal{I}^n, m} z_{i,j}^{n,m} \leq \zeta_j^m, \end{aligned}$$

que é precisamente (3.19k). Uma vez que as Eqs. (3.19l)–(3.19z) são obviamente induzidas por (3.20n), pode-se concluir que a Eq. (3.20n) é assegurada.

Esses desenvolvimentos mostram que para qualquer solução factível θ_{dag} para \tilde{P}_{dag} existe uma solução factível correspondente θ_{ag} para \tilde{P}_{ag} .

A relação entre as soluções factíveis de \tilde{P}_{ag} and \tilde{P}_{dag} são formalizadas pela seguinte proposição:

Proposição 1. *Assumindo que $\mathcal{I}^n = \mathcal{I}^{n,m}$ e $[q_{inj,i}^{n,m,L}, q_{inj,i}^{n,m,U}] = [q_{inj,i}^{n,L}, q_{inj,i}^{n,U}]$ para todo $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}_n$ e $i \in \mathcal{I}^n$, as formulações \tilde{P}_{ag} e \tilde{P}_{dag} são equivalentes.*

3.4 SUMÁRIO

Nessa seção foram apresentados conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, bem como os modelos propostos para a otimização da produção de petróleo.

O capítulo se iniciou com uma breve explicação sobre conjuntos convexos e em seguida funções convexas. Esses tópicos são de extrema importância, uma vez que os modelos MICP propostos utilizam domínios e funções convexas na resolução do problema de otimização da produção de campos de petróleo.

Em seguida, foi mostrado o procedimento para a síntese de curvas que representam as aproximações quadráticas das funções de produção e queda de pressão de um poço. A partir dessa síntese de curvas, pode-se converter um modelo MINLP em um modelo MICP e resolvê-lo mais facilmente com um solver comercial.

Após isso, foram apresentados os modelos MICP agregado e desagregado. Nas duas formulações um modelo quadrático-côncavo é utilizado para aproximar as funções de produção dos poços $q^{n,m}$, enquanto um modelo quadrático convexo é utilizado para representar a queda de pressão ΔP^m , a qual é aproximada com modelos

quadráticos por partes multidimensionais dentro de cada região de seu domínio. No modelo agregado utiliza-se uma família de variáveis binárias $\{z_{i,j}^{n,m}\}$ para decidir simultaneamente a respeito do roteamento do poço n ao *manifold* m , o intervalo ativo i de injeção de gás q_{inj}^n e o intervalo ativo para a pressão no *manifold* p^m . No modelo desagregado considera-se uma decomposição entre produção do poço, alinhamento entre poços e *manifolds* e pressão de operação em três variáveis binárias independentes. Por fim, foi comprovado que as duas formulações devem produzir as mesmas soluções uma vez que são matematicamente equivalentes.

4 ANÁLISES DOS RESULTADOS

O capítulo a seguir é uma síntese de todos os resultados alcançados nessa dissertação. O texto se inicia com a apresentação do cenário experimental, no qual são fornecidos detalhes sobre o campo de produção de petróleo sintético utilizado para as análises.

Em seguida são apresentados os resultados das sínteses de curvas a partir dos modelos e parâmetros adotados para resolver o problema de programação semi-definida. Uma análise criteriosa sobre os dados obtidos é proposta a fim de definir as melhores aproximações para serem utilizadas no modelo de otimização da produção de petróleo.

De posse das curvas aproximadas, a sequência do capítulo se destina a apresentar os resultados dos modelos Agregado e Desagregado propostos durante o trabalho. Variou-se o fatiamento do domínio e o tipo de aproximação (linear ou quadrática) com o objetivo de identificar qual combinação possui o melhor resultado em termos de custo computacional.

O capítulo se encerra com a discussão acerca da análise de simulação, no qual as soluções encontradas nos modelos Agregado e Desagregado são testadas no simulador do campo de petróleo adotado.

4.1 CENÁRIO EXPERIMENTAL

O campo de petróleo utilizado nesse trabalho possui uma configuração similar à utilizada em [3], o qual consiste em um compressor de gás, dois separadores conectados aos seus respectivos *manifolds* adjuntos e oito poços, os quais possuem as opções de roteamento para ambos *manifolds*.

A Figura 4.1 apresenta uma configuração estrutural do modelo de campo adotado. O compressor e separadores possuem capacidades limitadas segundo a Tabela 4.1. Ainda em relação aos separadores a pressão nominal destes foi fixada em 150 psia (p^S). Entretanto, o separador 1 está conectado ao *manifold* adjunto por uma tubulação de 328 m, enquanto o separador dois está conectado ao outro por uma tubulação de 164 m. Como mencionado, todos os 8 poços podem ser roteados a qualquer *manifold*, embora os poços de número 1 a 4 estejam mais próximos do *manifold* 1, conectados por uma tubulação de 1000 pés e mais distantes do *manifold* 2, ligados por uma tubulação de 10000 pés. De forma análoga, os poços de número 5 a 8 estão mais próximos do *manifold* 2 e mais distantes

do manifold 1.

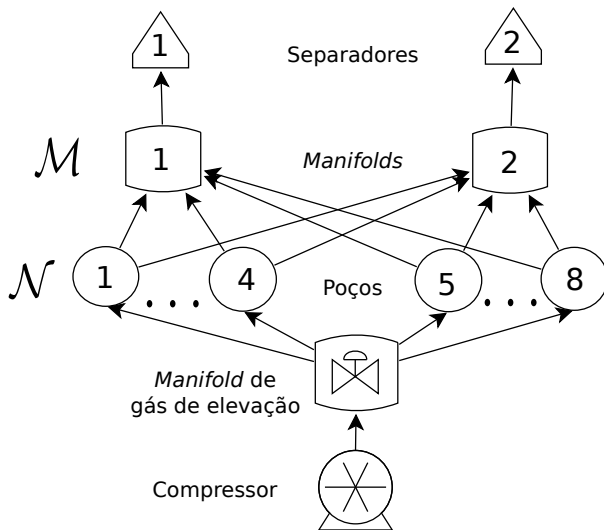


Figura 4.1: Cenário sintético de campo de petróleo.

Tabela 4.1: Limites do compressor e separadores.

Compressor	Separadores 1 e 2
4 mmscf/d	3500 STB/d

Tabela 4.2: Dados nominais da instância.

Poço #	1	2	3	4	5	6	7	8
GLR [scf/STB]	200	180	160	120	300	270	240	180
WC [%]	0	10	20	40	0	10	20	40
Pressão do reservatório [psia]	2100	1900	2300	2200	1850	1950	2300	2050
PI ^a [STB/d/psi]	15	5	2	9	11	12	6	15
Temperatura do reservatório [°F]	250	250	250	250	250	250	250	250
Profundidade das perfurações [ft]	12000	12000	12000	12000	12000	12000	12000	12000
DI ^b das tubulações [polegadas]	3	3	3	3	3	3	3	3
Temperatura na cabeça do poço [°F]	50	50	50	50	50	50	50	50
DI das linhas [polegadas]	4	4	4	4	4	4	4	4

^aÍndice de produtividade do poço^bDiâmetro Interno

O campo de petróleo representado foi instanciado por um simulador multifásico. A Tabela 4.2 apresenta parte dos valores utilizados nos 8 poços instanciados. Os demais valores foram deixados como padrão.

Uma vez que os valores dos parâmetros adotados para o campo de petróleo são passados ao simulador, o mesmo gera valores para os pontos de curvas artificiais de produção e queda de pressão. São esses os pontos utilizados para a geração de aproximações.

Tendo em vista que a ideia principal do trabalho é comparar a otimização de vários cenários a partir de diferentes aproximações das curvas de produção e queda de pressão, a próxima seção é dedicada a apresentar os resultados computacionais para a geração das aproximações.

4.2 SÍNTESE DE APROXIMAÇÃO DE CURVAS

Para definir as aproximações de curvas do problema *CF* na Seção 3.2, bem como suas variantes disponíveis no Apêndice B, de acordo com os parâmetros citados também na Seção 3.2 (erro, norma, divisões do domínio e tipo de aproximação), foi necessário definir as ferramentas utilizadas.

A modelagem dos problemas SDP foi realizada a partir do *toolbox* para **Matlab®** **YALMIP** [20] e resolvidos a partir do *solver* **SeDuMi** na versão 1.3 [21].

Os problemas foram executados em um computador com sistema operacional Ubuntu Linux na versão 14.04 64 bits, com um processador Intel Core i5-4210U de 1,70GHz com 8GB de RAM.

Vale salientar que não é trivial definir a melhor aproximação para as curvas de produção e queda de pressão. Dessa forma, faz-se necessário traçar uma estratégia para descobrir qual a melhor aproximação para as curvas de produção e queda de pressão.

4.2.1 Análise das aproximações de curvas de produção

Ao analisar as aproximações das curvas de produção, dois aspectos são bastante importantes: o modo como serão aproximadas as curvas e se essas aproximações possuem uma representatividade satisfatória em relação às curvas originais.

Para entender qual cenário possibilita alcançar uma melhor relação de custo benefício entre as aproximações das curvas de produção, foi proposto resolver problemas SDP variando-se alguns dos parâmetros citados na Seção 3.2.

Tendo em vista que a curva de produção possui um aspecto geral com formato côncavo, como apresentado na Figura 3.10, buscou-se formular os problemas de SDP a partir de funções lineares ou quadráticas côncavas para representá-la.

Em relação ao erro, procurou-se analisar a minimização do erro absoluto e relativo. Já a norma utilizada foi a norma ℓ_1 , em virtude de apresentar melhores resultados em relação à norma infinita ℓ_∞ e norma ℓ_2 (as formulações de problemas SDP com norma 2 e norma infinita, bem como algumas simulações realizadas são discutidas no Apêndice B).

Para o refinamento das curvas de produção, optou-se por utilizar duas variações de divisões do domínio: a primeira com 4 politopos (2 divisões no eixo de injeção de gás e 2 divisões no eixo de pressão), e a segunda com 25 politopos (5 divisões por eixo).

A Tabela 4.3 apresenta os parâmetros utilizados nos problemas SDP para as curvas de produção, expondo todos os casos simulados de acordo com a variação de parâmetros. Já as Figuras 4.2 e 4.3 representam as divisões dos limites de cada politopo na curva de produção para 4 e 25 politopos, respectivamente.

É importante observar que foram coletados 21 pontos por eixo (21 pontos para o eixo da pressão e 21 para o eixo da injeção) espaçados de forma não uniforme e que cada politopo possui a mesma quantidade de pontos amostrados. Isso se deve ao fato de que, para regiões mais instáveis da curva, representadas pelos politopos (1,1) e (1,2) na Figura 4.2, é necessária uma maior amostragem para se chegar a uma aproximação suficientemente adequada da curva, enquanto para regiões mais estáveis, a amostragem dos pontos pode ser feita de forma mais espaçada.

O mesmo comportamento pode ser observado na Figura 4.3, uma vez que, no eixo de injeção de gás, os politopos começam com regiões menores e ficam maiores conforme a curva vai apresentando um comportamento mais estável.

Aplicando os parâmetros definidos no problema **CF** da Seção 3.2 bem como em seus variantes, iniciou-se o processo de teste.

O primeiro passo foi solucionar o problema para o modelo com 4 politopos. Uma análise criteriosa politopo a politopo foi realizada para entender melhor o comportamento das aproximações em cada divisão do domínio da curva.

Para cada resultado, foram coletados os valores do objetivo, erro absoluto máximo, erro absoluto médio, erro relativo máximo e erro relativo médio.

Tabela 4.3: Cenários utilizados para as aproximações das curvas de produção de petróleo.

Refinamento (n° de polítopos)	Tipo de Aproximação	Tipo do erro
4 (2×2)	Linear	Abs
		Rel
	Côncava	Abs
		Rel
25 (5×5)	Linear	Abs
		Rel
	Côncava	Abs
		Rel

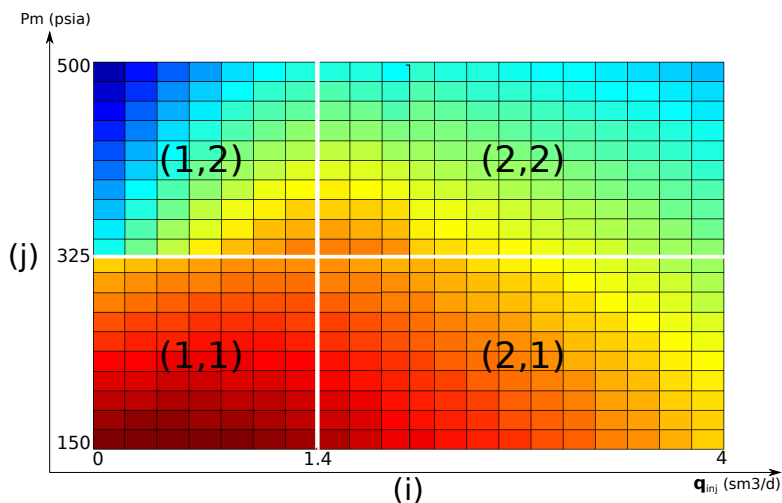


Figura 4.2: Limites de injeção e pressão para 4 polítopos.

As Tabelas 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7 apresentam respectivamente os resultados para a minimização do erro absoluto somente com aproximações lineares, minimização do erro absoluto para somente aproximações quadráticas côncavas, minimização do erro relativo apenas para aproximações lineares e minimização do erro relativo apenas para aproximações quadráticas côncavas.

Como era esperado, para regiões mais instáveis da curva original (polítopos (1,1) e (1,2)), tanto as aproximações lineares quanto

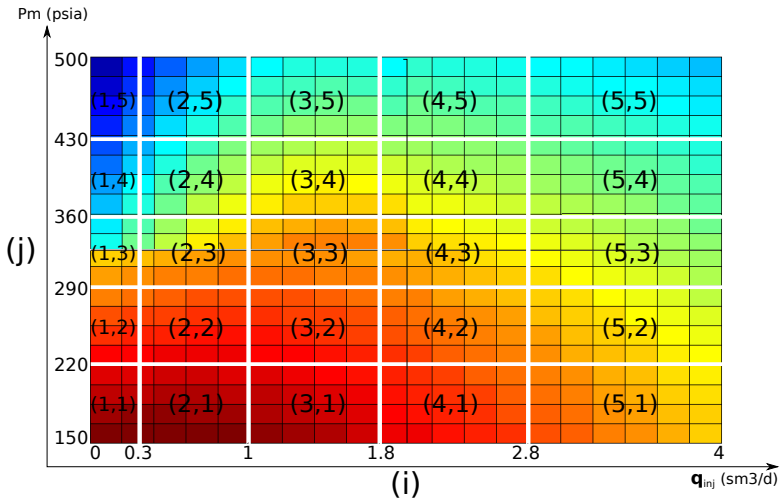


Figura 4.3: Limites de injeção e pressão para 25 politopos.

Tabela 4.4: Aproximação Linear – Minimização erro absoluto – Norma 1 – 2 politopos por eixo.

Param	Politopo	Objetivo $\cdot 10^4$	erro abs (STB/d)		erro rel (%)	
			Max	Med	Max	Med
Abs	(1,1)	1,7	263,0	147,0	260%	121%
	(1,2)	1,1	350,8	94,0	350%	79%
Norma 1	(2,1)	0,2	75,5	17,2	0,09%	0,02%
	(2,2)	0,2	56,3	17,1	0,09%	0,02%
Linear	Resultado	3,2	350,8	68,8	350%	50,3%

as quadráticas possuem valores de erros mais altos, uma vez que se torna difícil encontrar uma curva com boa representação para essas regiões. No entanto, as curvas quadráticas obtiveram um valor do objetivo, erro relativo e absoluto médios mais baixos tanto para minimização do erro absoluto quanto do relativo.

Ainda na tentativa de obter um cenário mais adequado, foi realizado um teste que propõe as aproximações que melhor se adaptarem para cada politopo, ou seja, cada politopo pode ser aproximado por uma curva côncava ou linear. Entretanto, como os resul-

Tabela 4.5: Aproximação Côncava – Minimização erro absoluto – Norma 1 – 2 politopos por eixo.

Param	Politopo	Objetivo *10 ⁴	erro abs (STB/d)		erro rel (%)	
			Max	Med	Max	Med
Abs	(1,1)	0,9	313,3	74,8	58,2%	4,4%
-	(1,2)	0,85	380,6	70,6	320%	50,6%
Norma 1	(2,1)	0,04	14,9	3,3	0,01%	0,003%
-	(2,2)	0,03	11,5	3,0	0,01%	0,004%
Côncavo	Resultado	1,82	380,6	37,9	320%	13,8%

Tabela 4.6: Aproximação Linear – Minimização erro relativo – Norma 1 – 2 politopos por eixo.

Param	Politopo	Objetivo *10 ⁴	erro abs (STB/d)		erro rel (%)	
			Max	Med	Max	Med
Rel	(1,1)	0,0069	660,5	315,6	4,5%	0,6%
-	(1,2)	0,0100	845,3	319,5	1,0%	0,8%
Norma 1	(2,1)	0,00021	74,1	17,2	0,08%	0,02%
-	(2,2)	0,00027	54,6	17,1	0,09%	0,02%
Linear	Resultado	0,0180	845,3	167,4	4,5%	0,4%

Tabela 4.7: Aproximação Côncava – Minimização erro relativo – Norma 1 – 2 politopos por eixo.

Param	Politopo	Objetivo *10 ⁴	erro abs (STB/d)		erro rel (%)	
			Max	Med	Max	Med
Rel	(1,1)	0,0068	630,4	326,6	4,2%	0,5%
-	(1,2)	0,0097	795,4	280,9	1,0%	0,7%
Norma 1	(2,1)	0,00004	13,2	3,3	0,01%	0,003%
-	(2,2)	0,00005	10,8	3,0	0,02%	0,004%
Côncavo	Resultado	0,0166	795,4	153,5	4,2%	0,3%

tados das Tabelas 4.5 e 4.7 mostraram números melhores em todos os politopos que os das Tabelas 4.4 e 4.6, respectivamente, já era esperado que os resultados apontassem o melhor cenário como

sendo todos os politopos aproximados por curvas côncavas, tanto na minimização do erro absoluto, quanto do erro relativo.

O segundo passo na análise de curvas de queda de pressão foi resolver os mesmos problemas simulados anteriormente para um fatiamento maior do domínio, agora com 5 divisões por eixo, totalizando 25 politopos. Os resultados são apresentados na Tabela 4.8.

Tabela 4.8: Análise da aproximação da curva de produção de petróleo para 25 politopos.

			erro abs (STB/d)		erro rel (%)	
Min Erro	Modelo	Objetivo	Max	Med	Max	Med
Abs	Linear	$1,3 \times 10^4$	456,9	21,4	254%	11%
	Côncavo	$0,86 \times 10^4$	453,8	13,8	329%	15%
Rel	Linear	92,4	609,7	39,7	1,69%	0,15%
	Côncavo	82,4	609,7	29,1	1,69%	0,13%

Novamente, os resultados apontaram números com o mesmo comportamento que as aproximações menos refinadas. A minimização do erro absoluto gera erros absolutos menores e a minimização do erro relativo gera erros relativos máximos e médios menores. Contudo, a utilização do erro relativo produz melhores resultados tanto para aproximações lineares quanto para côncavas.

Um fato interessante a ser observado é que, com o maior fatiamento do domínio, os erros mensurados pelo objetivo são reduzidos a menos da metade se comparados aos resultados com 4 politopos.

A partir das análises das curvas de produção de petróleo conseguiu-se provar que para as condições adotadas, as aproximações quadráticas possuem menores erros se comparadas às aproximações puramente lineares, sendo essa comprovação um dos objetivos desse trabalho.

Resta, no entanto, verificar a melhor relação de custo benefício entre resultado e custo computacional quando essas aproximações são aplicadas ao problema de otimização da produção, isso porque, aproximações mais refinadas tendem a ter melhores resultados a um custo computacional maior se comparadas a aproximações menos refinadas. Esses resultados serão discutidos em seguida, na Seção 4.3.

4.2.2 Análise das aproximações de curvas de queda de pressão

De forma análoga, a análise das curvas de queda de pressão passam pelos mesmos critérios: a forma como serão geradas as aproximações e a qualidade das mesmas.

O processo adotado como estratégia para solução dos problemas é similar ao das aproximações da curva de produção: foram resolvidos problemas SDP formulados a partir de variações do problema **CF** representados pela Eq. (3.18) minimizando-se o erro absoluto e relativo segundo a norma l_1 . O número de divisões do domínio, porém, foi realizado com nenhuma divisão do domínio (apenas 1 politopo) e com uma divisão do domínio por eixo (8 politopos). O menor fatiamento do domínio para as curvas de queda de pressão se deve ao fato de a função ter um domínio tridimensional (queda de pressão em função das vazões de gás, petróleo e água), o que acarreta o aumento considerável da solução do problema SDP para maiores refinamentos.

Em relação ao tipo de aproximação, optou-se por definir a escolha das aproximações entre lineares e quadráticas, uma vez que o comportamento da curva original possui um formato ligeiramente convexo.

Como não é possível visualizar a curva de queda de pressão em função das vazões de água, gás e petróleo, a Figura 4.4 representa a curva original para uma vazão fixa de água (830 STB/d) variando-se as vazões de petróleo e gás. A partir dessa figura, pode-se observar o formato convexo das curvas.

Para representar essas curvas, primeiramente foram obtidos os pontos gerados por meio do simulador multifásico para o *manifold* 1, segundo a instância exemplificada na Figura 4.1. De posse dos pontos, bastou-se fixar o valor de um dos eixos e obter o comportamento da função a partir do Matlab.

Sendo assim, a Tabela 4.9 apresenta todos os casos analisados para as aproximações das curvas de queda de pressão.

As Tabelas 4.10 e 4.11 representam as divisões dos limites de cada politopo na curva de queda de pressão para 1 e 8 politopos, respectivamente.

Assim como para as curvas de produção, iniciou-se a resolução dos problemas SDP a partir do menor fatiamento do domínio, realizando-se somente aproximações lineares e, posteriormente, apenas aproximações quadráticas.

Foram coletados os valores do objetivo, erro absoluto máximo e médio e erro relativo máximo e médio para todos os casos. Os

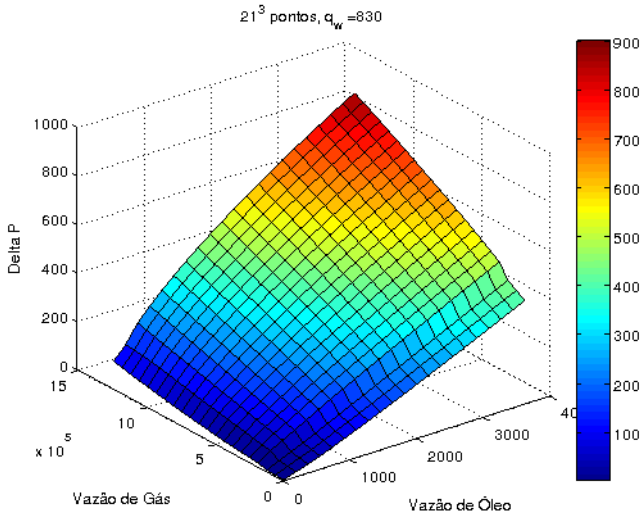


Figura 4.4: Curva de queda de pressão em função das vazões de petróleo e gás. A vazão de água fixada em 830 STB/d, vazão de gás dada em mmscf/d e vazão de petróleo em STB/d.

resultados são apresentados na Tabela 4.12.

Tabela 4.9: Cenários utilizados para as aproximações das curvas de queda de pressão.

Refinamento (n^o de politopos)	Tipo de Aproximação	Tipo do erro
1 ($1 \times 1 \times 1$)	Linear	Abs
		Rel
	Convexo	Abs
		Rel
8 ($2 \times 2 \times 2$)	Linear	Abs
		Rel
	Convexo	Abs
		Rel

Como se pode observar na Tabela 4.12, os resultados apontam para uma melhor representação da curva (erros menores) quando são utilizadas aproximações convexas. Novamente, pode-se afir-

Tabela 4.10: Limites máximos e mínimos utilizados nas vazões para 1 politopo.

			q_o (STB/d)	q_g (mmscf/d)	q_w (STB/d)
politopo (o,g,w)	(1,1,1)	min	0	0	0
		max	16000	28.8	6400

Tabela 4.11: Limites máximos e mínimos utilizados por politopo para 8 politopos.

			q_o (STB/d)	q_g (mmscf/d/d)	q_w (STB/d)
Politopo (o,g,w)	(1,1,1)	min	0	0	0
		max	6500	11,7	2600
	(2,1,1)	min	6500	0	0
		max	16000	11,7	2600
	(1,2,1)	min	0	11,7	0
		max	6500	28,8	2600
	(2,2,1)	min	6500	11,7	0
		max	16000	28,8	2600
	(1,1,2)	min	0	0	2600
		max	6500	11,7	6400
	(2,1,2)	min	6500	0	2600
		max	16000	11,7	6400
	(1,2,2)	min	0	11,7	2600
		max	6500	28,8	6400
	(2,2,2)	min	6500	11,7	2600
		max	16000	28,8	6400

Tabela 4.12: Análise de erro para curvas de queda de pressão para 1 politopo.

			erro abs (psia)		erro rel (%)	
Min erro	Modelo	Objetivo	Max	Med	Max	Med
Abs	Linear	$4,5 \cdot 10^4$	61,8	4,88	2,6%	0,2%
	Convexo	$3,6 \cdot 10^4$	58,1	3,86	3,4%	0,1%
Rel	Linear	$0,13 \cdot 10^4$	62,9	4,90	2,2%	0,1%
	Convexo	$0,10 \cdot 10^4$	59,5	3,90	3,0%	0,1%

mar que a minimização do erro relativo apresenta resultados mais equilibrados para o cenário simulado.

Na sequência, foram feitos os testes para o fatiamento do domínio com 8 politopos. Nessa simulação foi realizada a análise politopo a politopo para entender melhor o comportamento da curva no domínio adotado.

Mais uma vez, pode-se perceber, a partir das Tabelas 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16, que as aproximações realizadas variam em qualidade dependendo do politopo. Isso ocorre porque, independentemente do tipo de curva utilizada (linear ou convexa), há regiões em que o domínio possui um comportamento bastante irregular, principalmente para baixas vazões de água, petróleo e gás.

Tabela 4.13: Aproximação Linear – Minimização erro absoluto – 2 politopos por eixo.

Min erro	Modelo	Politopo	Obj. $\cdot 10^3$	erro abs (psia)		erro rel (%)	
				Max	Med	Max	Med
Abs	Linear	(1,1,1)	7,6	59,7	5,7	2,8%	0,2%
		(2,1,1)	1,5	4,4	1,1	0,9%	0,1%
		(1,2,1)	8,1	53,7	6,1	0,7%	0,1%
		(2,2,1)	1,2	5,2	0,9	0,2%	0,04%
		(1,1,2)	7,5	39,2	5,6	0,6%	0,1%
		(2,1,2)	0,85	2,2	0,6	0,1%	0,02%
		(1,2,2)	7,5	40,0	5,6	0,5%	0,1%
		(2,2,2)	0,85	2,2	0,6	0,07%	0,02%
		Total	35,1	59,7	3,3	2,8%	0,09%

Mesmo assim, é possível perceber que, de modo geral, as aproximações convexas apresentam menores erros (objetivo e erros médios) se comparadas às curvas lineares, tanto para minimização do erro absoluto, quanto do erro relativo.

Nota-se ainda que a utilização do erro relativo na função objetivo dos problemas SDP gera resultados muito mais satisfatórios que os problemas que minimizam erros absolutos.

Quando comparadas as Tabelas 4.12 e 4.17, verifica-se, também, que a adição de apenas uma divisão em cada eixo do domínio faz com que os erros sejam reduzidos da casa de 10^4 para 10^3 no caso da minimização do erro absoluto e de 10^3 para 10^2 para minimização do erro relativo.

Tabela 4.14: Aproximação Quadrática Convexa - Minimização erro absoluto - 2 politopos por eixo.

Min erro	Modelo	Politopo	Obj. *10 ³	erro abs (psia)		erro rel (%)	
				Max	Med	Max	Med
Abs	Convexa	(1,1,1)	6,9	57,1	5,2	3,1%	0,2
		(2,1,1)	1,3	4,2	1,0	1,4%	0,09%
		(1,2,1)	6,7	47,2	5,04	0,6%	0,1%
		(2,2,1)	0,76	4,4	0,57	0,2%	0,02%
		(1,1,2)	5,5	28,0	4,1	0,4%	0,1%
		(2,1,2)	0,34	1,27	0,25	0,05%	0,01%
		(1,2,2)	5,2	21,5	3,9	0,3%	0,09%
		(2,2,2)	0,37	1,3	0,3	0,04%	0,01%
Total			27,1	57,1	2,55	3,1%	0,08%

Tabela 4.15: Aproximação Linear - Minimização erro relativo - 2 politopos por eixo.

Min erro	Modelo	Politopo	Obj. *10 ³	erro abs (psia)		erro rel (%)	
				Max	Med	Max	Med
Rel	Linear	(1,1,1)	0,23	61,56	5,87	2,2%	0,2%
		(2,1,1)	0,12	4,46	1,22	0,6%	0,09%
		(1,2,1)	0,18	55,2	6,2	0,8%	0,1%
		(2,2,1)	0,057	5,62	0,9	0,2%	0,04%
		(1,1,2)	0,15	41,3	5,8	0,6%	0,1%
		(2,1,2)	0,037	2,49	0,6	0,1%	0,02%
		(1,2,2)	0,13	39,3	5,7	0,6%	0,1%
		(2,2,2)	0,029	2,1	0,7	0,075	0,02%
Total			0,93	61,56	3,39	2,2%	0,09%

Portanto, utilizando os cenários simulados, verificou-se que a minimização do erro relativo e a utilização de norma ℓ_1 produzem resultados mais satisfatórios. De posse de curvas mais ou menos refinadas, a próxima seção se dedica a apresentar os resultados para o problema de otimização da produção de petróleo a partir da combinação entre as curvas de produção de petróleo (lineares ou côncavas com 4 ou 25 politopos) e as curvas de queda de pressão

Tabela 4.16: Aproximação Convexa - Minimização erro relativo - 2 politopos por eixo.

Min erro	Modelo	Politopo	Obj. *10 ³	erro abs (psia)		erro rel (%)	
				Max	Med	Max	Med
Rel	Convexo	(1,1,1)	0,21	59,7	5,4	2,4%	0,16%
		(2,1,1)	0,11	4,4	1,1	0,7%	0,08%
		(1,2,1)	0,14	52,7	5,2	0,7%	0,1%
		(2,2,1)	0,036	4,5	0,6	0,2%	0,02%
		(1,1,2)	0,11	36,5	4,5	0,6%	0,08%
		(2,1,2)	0,014	1,2	0,2	0,05%	0,01%
		(1,2,2)	0,11	34,9	4,3	0,5%	0,07%
		(2,2,2)	0,012	1,2	0,2	0,04%	0,01%
		Total	0,74	59,7	2,71	2,4%	0,07%

Tabela 4.17: Resumo das aproximações da curva de queda de pressão para 8 politopos.

Tipo	Modelo	Objetivo	erro abs (psia)		erro rel (%)	
			Max	Med	Max	Med
Abs	Linear	35,1*10 ³	59,7	3,3	2,8%	0,09%
	Convexo	27,1*10 ³	57,1	2,5	3,1%	0,08%
Rel	Linear	9,3*10 ²	61,6	3,4	2,2%	0,09%
	Convexo	7,4*10 ²	59,7	2,7	2,4%	0,07%

(lineares ou convexas com 1 ou 8 politopos).

4.3 ANÁLISE COMPUTACIONAL

Uma vez obtidas as curvas aproximadas, tanto lineares, quanto quadráticas, das funções de produção (com 4 e 25 polítopos) e das curvas de queda de pressão (com 1 e 8 polítopos), o próximo passo é utilizá-las como dados de entrada nos modelos Agregado e Desagregado de otimização da produção de petróleo descritos nas Seções 3.3.1 e 3.3.2.

Os cenários considerados podem ser divididos em quatro grupos: **aproximações lineares para curvas de produção e queda de pressão, aproximações côncavas para a curva de produção e convexas para queda de pressão, aproximações lineares para curvas de produção e convexas para queda de pressão ou aproximações côncavas para curvas de produção e lineares para queda de pressão.**

Além disso, para cada experimento, há a variação do número de polítopos para cada curva, ou seja, a curva de produção pode ter refinamento de 4 ou 25 polítopos e a curva de queda de pressão 1 ou 8 polítopos.

A combinação entre essas variações é dividida em 16 cenários distintos descritos na Tabela 4.18. É importante salientar que esses 16 cenários se aplicam tanto ao modelo Agregado, quanto ao modelo Desagregado, o que eleva o número de casos analisados para 32.

Os modelos Agregado e Desagregado foram formulados utilizando a linguagem matemática **AMPL**[22] e resolvidos com **CPLEX 11** em um computador com processador Intel Core i5-4210U de 2.40GHz, 4GB de RAM com sistema operacional Ubuntu 14.10. Todos os experimentos têm tempo máximo de computação de 10000 segundos ($\approx 2,8$ horas).

As Tabelas 4.19 (Modelo Agregado) e 4.20 (Modelo Desagregado) apresentam os resultados computacionais para diferentes aproximações, resoluções e formulações consideradas nesta dissertação. Nas duas tabelas é possível observar o tempo de solução de cada cenário em segundos e o GAP^1 percentual entre a solução encontrada e o valor ótimo (valor 0.0 nos casos em que se atinge a

¹O algoritmo CPLEX calcula o GAP percentual da seguinte forma: $|bestbound - bestinteger|(10^{-1} + |bestinteger|)$. O valor padrão é 0,0001, o que significa que o CPLEX irá interromper a resolução do problema uma vez que encontre uma solução factível com valor de 0,01% do valor ótimo.

Tabela 4.18: Casos simulados para os modelos Agregado e Desagregado de otimização da produção de petróleo.

Cenário	Produção		Queda de pressão	
	Tipo de Aprox.	Refinamento (n^o polítopos)	Tipo de Aprox.	Refinamento (n^o polítopos)
1	Linear	4	Linear	1
2	Linear	25	Linear	1
3	Linear	4	Linear	8
4	Linear	25	Linear	8
5	Côncava	4	Convexa	1
6	Côncava	25	Convexa	1
7	Côncava	4	Convexa	8
8	Côncava	25	Convexa	8
9	Linear	4	Convexa	1
10	Linear	4	Convexa	8
11	Linear	25	Convexa	1
12	Linear	25	Convexa	8
13	Côncava	4	Linear	1
14	Côncava	4	Linear	8
15	Côncava	25	Linear	1
16	Côncava	25	Linear	8

otimalidade, ou outro valor se não se atingiu a otimidade em um tempo de 10000 segundos, aproximadamente 2,8 horas).

Tabela 4.19: Modelo Agregado.

		Queda de Pressão						
		1 politopo		8 politopos				
		Linear	Convexo	Linear	Convexo	Linear	Convexo	
Curvas de produção	4 politopos	Tempo (s)	0,32	0,44	0,54	2,9		
		GAP (%)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	Côncavo	Tempo (s)	2,8	0,95	61,4	1,76		
		GAP (%)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	25 politopos	Linear	Tempo (s)	0,58	1,0	0,98	20,7	
			GAP (%)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Côncavo		Tempo (s)	2263,1	12,1	>10000	129,5		
		GAP (%)	0,0	0,0	-	0,0	0,0	

No cenário 16 do modelo Agregado (curva de produção côncava com 25 polítopos e queda de pressão linear com 8 polítopos) e nos cenários 6, 7, 8 e 16 do modelo Desagregado não se conseguiu encontrar nenhuma solução factível para o problema.

O primeiro resultado importante a ser considerado é que em ambas formulações o valor alcançado no objetivo foi o mesmo para os casos em que se atingiu a otimalidade, apontado para o fato que as duas formulações, Agregada e Desagregada, são equivalentes.

Outro ponto que pode ser observado é que o modelo Agregado possui desempenho melhor que o Desagregado quando considerado o tempo de solução para todos os cenários. Ainda assim, nos dois modelos, quando se utiliza resoluções menores, a solução do problema é atingida mais rapidamente. Esse comportamento é esperado, uma vez que, com a introdução de mais variáveis nos modelos, esses tendem a ser resolvidos de forma mais lenta, porém com uma qualidade melhor em termos do objetivo.

Analisando somente o tempo de solução dos problemas é possível afirmar também que a utilização de aproximações lineares para a curva de produção permite que se atinja o valor ótimo com mais rapidez, tanto para o modelo Agregado quanto para o Desagregado. Já quando se utiliza aproximações lineares para as curvas de queda de pressão, os tempos computacionais se elevam consideravelmente para fatiamentos de 8 polítopos.

Por fim, a criação de um modelo genérico para combinar aproximações quadráticas e lineares nas curvas de produção e perda de carga proporcionou um avanço se comparados com os resultados atingidos em *Ramos Neto et al.* [3], em que foi proposta a utilização de um modelo quadrático somente para a curva de produção, enquanto se utilizou apenas aproximações lineares para as curvas de queda de pressão.

Tabela 4.20: Modelo Desagregado.

		Queda de Pressão					
		1 politopo			8 politopos		
		Linear	Convexo	Linear	Convexo	Linear	Convexo
Curvas de produção	4 politopos	Linear	Tempo (s)	0,37	0,62	0,97	5,9
			GAP (%)	0,0	0,0	0,0	0,0
		Côncavo	Tempo (s)	876,5	2,3	2623,2	> 10000
			GAP (%)	0,0	0,0	0,0	-
		Linear	Tempo (s)	2,6	1,5	8,3	74,1
			GAP (%)	0,0	0,0	0,0	0,0
	25 politopos	Linear	Tempo (s)	4512,7	> 10000	> 10000	> 10000
			GAP (%)	0,0	-	-	-
		Côncavo	Tempo (s)	0,0	-	-	-
			GAP (%)	0,0	-	-	-
			Tempo (s)	0,0	-	-	-
			GAP (%)	0,0	-	-	-

4.4 ANÁLISE DE SIMULAÇÃO

Tendo os resultados obtidos da otimização da produção a partir dos modelos Agregado e Desagregado, a última etapa de análises é a validação dos resultados obtidos dos modelos quadráticos no simulador. A partir dessa análise de simulação se pode concluir a eficácia dos modelos propostos nessa dissertação.

Os dados utilizados como entrada no simulador multifásico são obtidos a partir dos resultados de **alinhamento e injeção de gás nos poços** determinados pelos modelos Agregado e Desagregado. Por serem modelos equivalentes e produzirem o mesmo resultado, optou-se por utilizar as soluções daquele que apresentou resultados computacionalmente mais eficientes, ou seja, o modelo Agregado.

Além disso, como mostrado na Tabela 4.18, a partir das combinações de resolução (divisões do domínio) e modelos (quadráticos ou lineares), são 16 os cenários obtidos pela análise do modelo Agregado. Pretendendo apresentar resultados mais objetivos para a análise de simulação, foram escolhidos somente 8 dos 16 cenários como apresentado na Tabela 4.21

Tabela 4.21: 8 casos selecionados para a análise de simulação.

Cenário	Produção		Queda de pressão	
	Tipo de Aprox.	Refinamento (n^o politopos)	Tipo de Aprox.	Refinamento (n^o politopos)
1	Linear	4	Linear	1
4	Linear	25	Linear	8
5	Côncava	4	Convexa	1
8	Côncava	25	Convexa	8
9	Linear	4	Convexa	1
12	Linear	25	Convexa	8
13	Côncava	4	Linear	1
15	Côncava	25	Linear	1

A escolha dos 8 cenários se deu pelo fato de representarem todas as combinações entre modelos lineares e quadráticos para as curvas de produção de petróleo e queda de pressão. Além disso, esses casos escolhidos compreendem os de menor e maior resolução possível.

Um ponto a se observar é que o caso de número 16 da Tabela 4.18 não foi adotado como o de maior resolução para o modelo

côncavo-linear. Isso se deve ao fato de esse cenário não ter apresentado solução factível como informado na Tabela 4.19. Sendo assim, escolheu-se o cenário 15, o qual possui a maior resolução possível dentre os modelos analisados.

Uma vez definidos os cenários utilizados, o passo seguinte foi simular as soluções apresentadas pelos modelos de otimização no simulador. Para facilitar o entendimento dos resultados da simulação, a Tabela 4.22 apresenta os cenários simulados, os tipos de aproximações de cada cenário e o erro percentual entre a solução encontrada no problema de otimização Agregado e a solução dada pelo simulador. O erro é dado pela diferença entre a produção de petróleo resultante no simulador em relação à produção de petróleo dada como solução do problema de otimização Agregado².

Tabela 4.22: Comparação entre resultados do modelo Agregado e Simulador.

Cenários	Tipo de aproximação	Erro (%)
1	Linear/Linear	10,5%
4	Linear/Linear	9,2%
5	Côncavo/Convexo	6,9%
8	Côncavo/Convexo	6,4%
9	Linear/Convexo	11,3%
12	Linear/Convexo	9,5%
13	Côncavo/Linear	9,4%
15	Côncavo/Linear	7,8%

Por meio da Tabela 4.22 pode-se levantar alguns pontos que levam a uma conclusão sobre os modelos propostos nessa dissertação.

A observação mais importante é que os modelos puramente quadráticos apresentaram resultados com menor erro do que aqueles que mesclam curvas lineares com quadráticas ou puramente lineares. Esse resultado era aguardado, uma vez que modelos quadráticos possuem uma representatividade mais adequada que os lineares para as curvas de produção de petróleo e queda de pressão para as resoluções Côncavo/Convexo adotadas.

Outro ponto importante a ser ressaltado é o fato de que resoluções maiores produzem resultados mais próximos dos apresen-

² $Erro_{\%} = (100 * |res_{sim} - res_{Ag}|) / res_{Ag}$

tados pelo simulador. Esse efeito da resolução no resultado é interessante no sentido de estabelecer uma relação de custo-benefício entre desempenho computacional e qualidade da solução. A Tabela 4.23 apresenta o tempo de solução do modelo Agregado nos cenários analisados e o erro em relação às soluções apresentadas pelo simulador.

Pode-se perceber que, de modo geral, para a obtenção de cerca de 1,3% na melhora do resultado, o tempo computacional cresce consideravelmente (o melhor caso é entre os cenários 1 e 4 em que o tempo de solução cresce 68%) quando comparados modelos que utilizam os mesmos tipos de aproximações, porém com resoluções diferentes.

Tabela 4.23: Tempo de solução dos problemas de otimização e erros em relação ao simulador.

Cenários	Tipo de aproximação	Tempo de solução (s)	Erro (%)
1	Linear/Linear	0,32	10,5%
4	Linear/Linear	0,54	9,2%
5	Côncavo/Convexo	12,1	6,9%
8	Côncavo/Convexo	129,5	6,4%
9	Linear/Convexo	0,44	11,3%
12	Linear/Convexo	1,0	9,5%
13	Côncavo/Linear	2,8	9,4%
15	Côncavo/Linear	2263,1	7,8%

Ainda em relação aos resultados da Tabela 4.22, é possível perceber que a utilização de um modelo linear para representar as curvas de produção não teve efeito positivo, devido ao fato de os cenários 1, 4, 9 e 12 apresentarem os maiores erros em relação ao simulador.

A explicação para esse fato está no fato de as curvas de produção apresentarem comportamentos mais irregulares que as curvas de queda de pressão (com curvaturas mais suaves), o que acarreta maior dificuldade para representá-las por aproximações lineares.

Esse resultado é interessante também no sentido de ser um contraponto a outro resultado apresentado na Seção 4.3. Isso porque, na análise computacional, verificou-se que o uso de aproximações lineares para a curva de produção traz soluções com tempos computacionais menores. Porém, como é visto agora, esses resulta-

dos não possuem boa qualidade.

Para finalizar, verificou-se que todos os resultados obtidos por meio do problema de otimização apresentaram erros relativamente altos em relação aos do simulador. Isso pode ser em decorrência da utilização de poucos pontos de amostragem das curvas de produção e queda de pressão ou mesmo o fato de as resoluções (quantidade de politopos) utilizadas não serem suficientes para alcançar resultados melhores.

4.5 SUMÁRIO

Nesse capítulo foram apresentadas as análises e resultados de todo o trabalho desenvolvido.

Primeiramente foram apresentados os resultados para as sínteses de curvas. Notou-se que, para a geração das aproximações das curvas de produção e queda de pressão, a utilização de norma ℓ_1 e erro relativo no problema de programação semi-definida apresenta resultados mais satisfatórios se comparados aos outros parâmetros analisados.

Definidas as aproximações lineares e quadráticas para as curvas de produção e perda de carga, essas foram utilizadas como entrada para os modelos Agregado e Desagregado de otimização da produção de petróleo propostos nesse trabalho.

Os resultados apontaram a equivalência entre os modelos demonstrada matematicamente na Seção 3.3.3, e também indicam uma maior eficácia do modelo Agregado em relação ao tempo computacional.

O capítulo se encerrou com a análise de simulação, a qual busca verificar a qualidade dos resultados atingidos pelos problemas de otimização da produção definidos. Verificou-se que a utilização de modelos quadráticos apresentou menor erro se comparada ao uso dos modelos mistos ou lineares.

5 CONCLUSÃO

A competitividade, a crescente demanda de combustíveis fósseis e os altos custos com o processo de extração de petróleo estão entre os principais fatores pelos quais a indústria petrolífera une esforços para ampliar suas fronteiras a partir de tecnologias que reduzem os custos e aumentem a produtividade de suas instalações.

Nesse sentido, a economia de recursos a partir de taxas ótimas de injeção de gás em poços com elevação artificial e a obtenção de uma configuração correta de alinhamento entre poços e *manifolds* são fundamentais para a indústria do petróleo.

A contribuição do trabalho apresentado se concentrou em propor dois modelos genéricos para a otimização da produção de petróleo, os quais podem ser utilizados para diferentes configurações.

Diferentemente de outros trabalhos, foram propostos dois modelos que fazem uso de aproximações lineares ou quadráticas côncavas para as curvas de produção de poços e lineares ou quadráticas convexas para as curvas de queda de pressão. Dessa forma, esses problemas podem ser combinados com a variação de parâmetros como fatiamento de domínio e tipo de aproximações, podendo estar na classe de problemas convexos inteiros mistos ou mesmo lineares inteiros mistos.

Em relação aos modelos de otimização da produção desenvolvidos, o primeiro, denominado modelo *Agregado*, faz uso de variáveis binárias contendo informações a respeito de roteamento e intervalos ativos de injeção de gás e pressão no *manifold*. Já o modelo *Desagregado* possui um conjunto de três variáveis binárias que decidem a respeito de roteamento, intervalos de injeção e intervalos de pressão. A partir da formulação dos modelos, foi proposta uma análise de equivalência, a qual prova que os dois modelos são, necessariamente, equivalentes e podem ser utilizados para a obtenção dos mesmos resultados.

Por se tratar de modelos que fazem utilização de aproximações para curvas de produção e queda de pressão, primeiramente, fez-se necessário identificar o modo de obtenção das curvas aproximadas (quadráticas ou lineares) e, a partir da variação dos parâmetros do modelo, tais como, norma, fatiamento do domínio e tipo de erro, obter as melhores aproximações. Sendo assim, problemas de programação semi-definida foram formulados a partir da variação de parâmetros do problema. Verificou-se que o modelo utilizando norma ℓ_1 e a minimização do erro relativo permitiram alcançar melhores resultados tanto para as aproximações da curva de produção, quanto para as curvas de queda de pressão, considerando qualquer

fatiamento.

Uma vez identificadas as melhores aproximações, essas foram utilizadas como entradas para a solução do problema de otimização da produção de petróleo a partir dos modelos Agregado e Desagregado. Notou-se que em todos os ensaios computacionais, variando-se as aproximações entre lineares e quadráticas e para diferentes fatiamentos, o custo computacional do modelo Agregado se mostrou menor se comparado ao do modelo Desagregado. Além disso, conseguiu-se, por meio das soluções alcançadas, verificar que os dois modelos são equivalentes como provado matematicamente.

Outros dados importantes obtidos para o campo de petróleo utilizado no trabalho foram, analisando-se o custo computacional, os melhores resultados com a utilização de aproximações lineares para as curvas de produção. No entanto, quando são utilizadas aproximações quadráticas em fatiamentos maiores do domínio para as curvas de queda de pressão, o resultado apresenta custo computacional elevado.

Por fim, foi necessário verificar a qualidade dos resultados encontrados nos problemas de otimização propostos. Para tanto, considerando que o modelo Agregado apresentou melhor desempenho que o Desagregado, utilizou-se as soluções encontradas dentre oito cenários analisados do modelo Agregado como entrada para um simulador multifásico.

Os resultados do simulador foram comparados aos do modelo Agregado e verificou-se que a utilização de modelos quadráticos alcançam resultados com menor erro quando comparadas as soluções do modelo Agregado e do simulador.

Além disso, percebeu-se que a utilização de aproximações lineares para curvas de produção geram resultados com maiores erros quando comparados aos modelos que fazem uso de aproximações quadráticas. Somado a isso, todos os oito cenários simulados apresentaram erros entre 6,4% e 11,3%, o que indica que a quantidade de politopos utilizada pode ter sido insuficiente. No entanto, o uso de fatiamentos maiores pode ocasionar altos custo computacionais para a solução do problema de otimização da produção.

Considerando esses resultados, como perspectivas de trabalhos futuros, pode-se propor uma análise do modelo Agregado com outros fatiamentos do domínio na tentativa de buscar a melhor relação de custo-benefício entre custo computacional e qualidade de resultados.

Outro ponto importante é fazer o uso dos modelos Agregado e Desagregado para outros campos de petróleo além do utilizado

como exemplo nessa dissertação. Isso permitirá que se verifique a eficiência dos modelos propostos de uma forma mais genérica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 FAVARETO, A.; MORALES, R. *Energia, desenvolvimento e sustentabilidade*. Porto Alegre, RS: Editora Zouk, 2014.
- 2 AGUIAR, M. A. S.; CAMPONOGARA, E.; SILVA, T. L. A mixed-integer convex formulation for production optimization of gas-lifted oil fields with routing and pressure constraints. *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, v. 31, p. 439–455, 2014.
- 3 NETO, L. R. et al. A piecewise linear-quadratic approximation for production optimization of gas-lifted oil fields. *Proceedings of the IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, p. 793–798, 2015.
- 4 SILVA, T. L. *Formulações inteiras mistas para modelos lineares por partes multidimensionais: aplicações na otimização da produção de petróleo sob restrições de pressão*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.
- 5 LUSTOSA, M. C. J. *Meio ambiente, inovação e competitividade na indústria brasileira: a cadeia produtiva do petróleo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.
- 6 WRIGHT, C. J.; GALLUN, R. A. *Fundamentals of oil & gas accounting*. Oklahoma, USA: PennWell Corporation, 2008.
- 7 ANDRADE, L. F. C. de. *Análise de investimentos na cadeia de suprimentos downstream da indústria petrolífera: proposta de um modelo de programação linear inteira mista*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2012.
- 8 GRIMSTAD, B. *Daily production optimization of subsea production systems*. Tese (Doutorado) — Norwegian University of Science and Technology, 2015.
- 9 DEVOLD, H. *Oil and gas production handbook: an introduction to oil and gas production, transport, refining and petrochemical industry*. Oslo, Norway: ABB, 2013.
- 10 HULSE, E. O. *Robust production optimization of gas-lifted oil fields*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.
- 11 BRADLEY, H. B.; GIBSON, F. W. *Petroleum engineering handbook*. TX, USA: Richardson : Society of Petroleum Engineers, 1987.

- 12 ALARCÓN, G. A.; TORRES, C. F.; GÓMEZ, L. E. Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming. *Journal of Energy Resources Technology*, v. 124, n. 4, p. 262–268, 2002.
- 13 EIKREM, G. O. *Stabilization of gas-lift wells by feedback control*. Tese (Doutorado) — Department of Engineering Cybernetics Norwegian University of Science and Technology, 2006.
- 14 MISENER, R.; GOUNARIS, C. E.; FLOUDAS, C. A. Global optimization of gas lifting operations: a comparative study of piecewise linear formulations. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 48, n. 13, p. 6098–6104, 2009.
- 15 GEIBLER, B. *Towards globally optimal solutions for MINLPs by discretization techniques with applications in gas network optimization*. Tese (Doutorado) — Naturwissenschaftlichen fakultat der Friedrich-Alexander-Universitat Erlangen-Nurnnberg, 2011.
- 16 CODAS, A.; CAMPONOGARA, E. Mixed-integer linear optimization for optimal lift-gas allocation with well-separator routing. *European Journal of Operational Research*, v. 217, p. 222–231, 2012.
- 17 SILVA, T. L.; CODAS, A.; CAMPONOGARA, E. A computational analysis of convex combination models for multidimensional piecewise-linear approximation in oil production optimization. *Proceedings of the IFAC Workshop on Automatic Control in Offshore Oil and Gas Production*, Trondheim, Norway, 2012.
- 18 ROCHA, V. G. da. *Estratégias de linearização por partes adaptativas com aplicações à atimização da produção de petróleo e gás*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, UFSC, 2013.
- 19 BOYD, L. V. S. *Convex optimization*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- 20 LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in matlab. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, p. 284–289, 2004.
- 21 STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, p. 625 – 653, 1999.

22 FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. *AMPL A modeling language for mathematical programming*. New York, NY: Thomson Brooks/Cole, 2003.

APÊNDICE A - CONCEITOS MATEMÁTICOS

COMBINAÇÕES

Combinação Linear

Uma importante característica de um espaço vetorial é a obtenção de vetores a partir de um subconjunto de vetores desse espaço. Por exemplo, definindo um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ como $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, podemos obter, a partir de \mathbf{u} , qualquer vetor \mathbf{v} com a forma $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, um vetor $\mathbf{w} = (4, -2, 6)$ pode ser obtido de \mathbf{u} quando $\alpha = 2$.

Partindo para uma definição formal: seja um espaço vetorial \mathbb{V} , diz-se que um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ é uma combinação linear de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$, se existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n \quad (1)$$

Exemplo

O vetor $v = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de $v_1 = (2, 4, 6)$ e $v_2 = (3, 6, 10)$, uma vez que v pode ser definido como $v = 5v_1 - 3v_2$.

Um espaço vetorial \mathbb{V} é gerado por um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ (denota-se $\mathbb{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$), se qualquer vetor em \mathbb{V} pode ser definido como uma combinação linear desses vetores. Em outras palavras, para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tais que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n$.

Combinação Afim

Fazendo \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 serem pontos em um espaço afim ¹, considere a seguinte expressão:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + t(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (2)$$

¹Seja U um conjunto não vazio cujos elementos são pontos. Seja V um espaço vetorial. O conjunto U é chamado de espaço afim associado ao espaço V se forem verdadeiros os axiomas:

- Dados um ponto A em U e um vetor v em V , existe apenas um ponto B tal que $v = \overline{AB}$, o qual é o vetor determinado pelo par (A, B) .
- Se $v = \overline{AB}$ e $w = \overline{BC}$, então $v + w = \overline{AC}$.

Analisando a equação, pode-se perceber que $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ é um vetor e, por consequência, $t(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)$ também é. Portanto, \mathbf{P} é uma soma de um ponto com um vetor, o qual é, novamente, um ponto. Este ponto \mathbf{P} representa, em um espaço afim de pontos e vetores bidimensionais, um ponto na linha que passa através de \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , assim como mostrado na Figura 1.

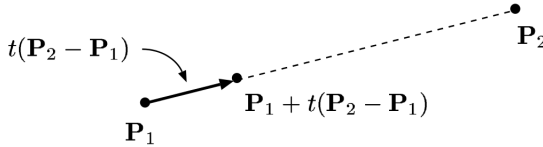


Figura 1: Combinação afim dos pontos \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 , $\forall t \in [0, 1]$.

Nota-se que se $0 \leq t \leq 1$ então \mathbf{P} está em algum lugar no segmento de linha que une \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 . Esta expressão permite definir a operação básica sobre pontos. Pode-se utilizar a notação $\mathbf{P} = (1 - t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2$, a qual representa que \mathbf{P} é um ponto definido pela Eq. (2).

Sendo assim, é possível definir a combinação afim de dois pontos \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 como:

$$\mathbf{P} = \alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2 \quad (3)$$

em que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. A Eq. 2 na forma $\mathbf{P} = (1 - t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2$ pode ser obtida fazendo $\alpha_2 = t$ na Eq. (9).

Partindo dessa definição inicial, pode-se agora generalizar uma combinação afim para um número arbitrário de pontos. Se $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ são pontos e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são escalares tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, então $\alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{P}_n$ é definido como o ponto:

$$\mathbf{P}_1 + \alpha_2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + \dots + \alpha_n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_1) \quad (4)$$

Exemplo

Considerando que três pontos \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 e \mathbf{P}_3 fornecem um triângulo $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$. Tomando um ponto \mathbf{P} definido por:

$$\mathbf{P} = \alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2 + \alpha_3\mathbf{P}_3 \quad (5)$$

em que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Pela definicão de combinacão afim fornecida, um ponto \mathbf{P} é caracterizado como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \alpha_2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + \alpha_3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \quad (6)$$

A Figura 2 apresenta o ponto \mathbf{P} gerado quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4}$ e $\alpha_3 = \frac{1}{2}$.

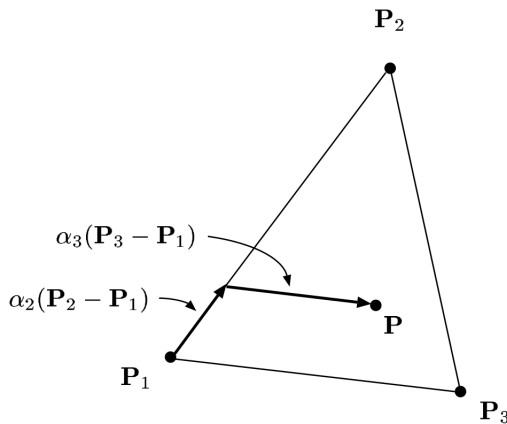


Figura 2: Triângulo formado por pontos \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 e \mathbf{P}_3 .

Nesse exemplo, caso $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$, então o ponto \mathbf{P} estará dentro ou na borda do triângulo. Se α_1 é menor que zero ou maior que 1, então o ponto \mathbf{P} estará fora do triângulo.

Combinacão Cônica

Para um dado número de vetores x_1, x_2, \dots, x_n em um espaço real de vetores, a combinacão cônica desses vetores é um vetor com a forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (7)$$

em que os coeficientes reais α_i satisfazem $\alpha_i \geq 0$.

O conjunto de todas as combinacões para um dado conjunto S , denominado casco cônico e denotado por $\text{cone}(S)$ é definido

como:

$$\text{cone}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \mid x_i \in S, \alpha_i \in \mathfrak{R}, \alpha_i \geq 0, i, k = 1, 2, \dots \right\} \quad (8)$$

Por definição, a origem pertence a todos os cascos cônicos e o casco cônico de um conjunto S é um conjunto convexo. Na verdade, o casco cônico é a intersecção de todos os cones convexos contendo S mais a origem.

Combinação Convexa

Dado um conjunto de pontos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, a combinação afim desses pontos selecionando $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ com $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ tem a seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \alpha_0 \mathbf{P}_0 + \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{P}_n \quad (9)$$

No entanto, se cada α_i tem valor $0 \leq \alpha_i \leq 1$, então o ponto \mathbf{P} é chamado de combinação convexa dos pontos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$.

Para um exemplo de fácil entendimento, considera-se dois pontos \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 . Qualquer ponto \mathbf{P} sobre a linha que passa entre esses dois pontos pode ser escrito como $\mathbf{P} = \alpha_0 \mathbf{P}_0 + \alpha_1 \mathbf{P}_1$, o qual será uma combinação afim desses dois pontos. A Figura 3 mostra dois pontos \mathbf{Q} e \mathbf{R} , os quais são combinações afim dos pontos \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 .

No entanto, o ponto \mathbf{Q} é uma combinação convexa de \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 , uma vez que $0 \leq \alpha_0, \alpha_1 \leq 1$ e $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, assim como qualquer ponto que esteja sobre a linha que liga esses dois pontos e entre eles.

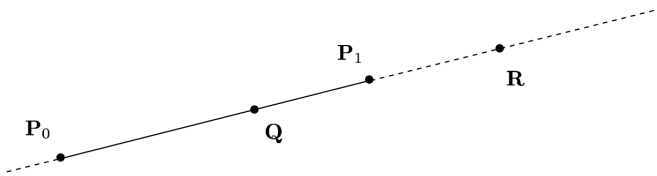


Figura 3: Ambos pontos \mathbf{Q} e \mathbf{R} são combinações afim dos pontos \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 , mas somente o ponto \mathbf{Q} é combinação convexa deles.

APÊNDICE B - FORMULAÇÕES ALTERNATIVAS PARA O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO SEMI DEFINIDA

Na Seção 3.2 foi apresentada a seguinte formulação do problema de programação semi-definida:

$$CF : \min_{Q, b, c, \epsilon_i^a} f = \sum_{i=1}^m \epsilon_i^a \quad (10a)$$

$$\text{sujeito a : } q_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i' Q \mathbf{x}_i + b' \mathbf{x}_i + c, \quad i = 1, \dots, m \quad (10b)$$

$$- \epsilon_i^a \leq q(\mathbf{x}_i) - q_i \leq \epsilon_i^a, \quad i = 1, \dots, m \quad (10c)$$

$$Q \preceq 0 \quad (10d)$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz simétrica negativa semi-definida, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_i \in [\text{injeção de gás} \times \text{pressão no } manifold]$ é um ponto no domínio da função de produção, e $q(\mathbf{x}_i)$ é o valor da vazão produzida na WPC no ponto \mathbf{x}_i obtido no simulador.

A formulação do problema CF, o qual utiliza norma ℓ_1 , erro absoluto, pode ser refeita utilizando-se o erro relativo. Para tanto, basta remodelar a Eq. (10c) da seguinte forma:

$$-\epsilon_i^{rel} \leq \frac{q(\mathbf{x}_i) - q_i}{q_i} \leq \epsilon_i^{rel} \quad (11)$$

Tratando-se da formulação do problema com a variação da norma, para uma implementação com norma ℓ_∞ , basta fazer a relação de equivalência mostrada na Eq. (12). Como se pode observar, é necessária a introdução de uma variável adicional α , a qual representa o maior erro.

$$\min \|\epsilon\|_2 \equiv \min \alpha \quad \text{sujeito a: } \epsilon_i \leq \alpha, \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (12)$$

Para a implementação do problema com norma ℓ_2 são feitas as equivalências apresentadas na Eq. (13):

$$\min \|\epsilon\|_2 \equiv \min \|\epsilon\|_2^2 \equiv \min \sum_{i=1}^m (\epsilon_i)^2 \quad (13)$$

Como se pode observar, nesse caso, existe a inconveniência de se utilizar uma função quadrática no objetivo. Entretanto, como forma alternativa, pode-se adicionar um vetor de variáveis $\sigma \in \mathbb{R}^m$

ao problema, o qual representa o erro quadrático a partir da adição de uma restrição $(\epsilon_i)^2 \leq \sigma_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Ainda assim, por ser uma restrição quadrática, a qual não é comportada pelo SDP, pode-se reeditar essa restrição como um conjunto de desigualdades matriciais lineares por meio do Complemento de Schur, obtendo-se o sistema representado pelas Eq. (14).

$$\min \sum_{i=1}^m \sigma_i \quad (14a)$$

$$\text{sujeito a : } \begin{bmatrix} I & \epsilon_i \\ (\epsilon_i)^T & \sigma_i \end{bmatrix} \preceq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (14b)$$

Exemplos

A partir das definições utilizadas para o erro relativo e utilização das normas ℓ_∞ e ℓ_2 são apresentadas algumas formulações as quais exemplificam a utilização desses parâmetros nos problemas de programação semi definida para estimações côncavas das curvas de produção de petróleo.

- Estimação com erro relativo e norma ℓ_1

$$CF_2 : \min_{Q, b, c, \epsilon_i^{rel}} f = \sum_{i=1}^m \epsilon_i^{rel} \quad (15a)$$

$$\text{sujeito a : } q_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i' Q \mathbf{x}_i + b' \mathbf{x}_i + c, \quad i = 1, \dots, m \quad (15b)$$

$$-\epsilon_i^{rel} \leq \frac{q(\mathbf{x}_i) - q_i}{q_i} \leq \epsilon_i^{rel} \quad (15c)$$

$$Q \preceq 0 \quad (15d)$$

- Estimação com erro relativo e norma ℓ_∞

$$CF_3 : \min \alpha \quad (16a)$$

$$\text{sujeito a : } q_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}'_i Q \mathbf{x}_i + b' \mathbf{x}_i + c, i = 1, \dots, m \quad (16b)$$

$$- \epsilon_i^{rel} \leq \frac{q(\mathbf{x}_i) - q_i}{q_i} \leq \epsilon_i^{rel} \quad (16c)$$

$$\epsilon_i^{rel} \leq \alpha, \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (16d)$$

$$Q \preceq 0 \quad (16e)$$

- Estimação com erro absoluto e norma ℓ_2

$$CF_4 : \min \sum_{i=1}^m \sigma_i \quad (17a)$$

$$\text{sujeito a : } q_i = \frac{1}{2} \mathbf{x}'_i Q \mathbf{x}_i + b' \mathbf{x}_i + c, i = 1, \dots, m \quad (17b)$$

$$- \epsilon_i^a \leq q(\mathbf{x}_i) - q_i \leq \epsilon_i^a, i = 1, \dots, m \quad (17c)$$

$$\begin{bmatrix} I & \epsilon_i \\ (\epsilon_i)^T & \sigma_i \end{bmatrix} \preceq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (17d)$$

$$Q \preceq 0 \quad (17e)$$