UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SÓCIO ECONÔMICO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Lorenzo de Carvalho Digiácomo

MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE AÇÕES: ESTRUTURANDO PORTFÓLIOS CAIXA ZERO

FLORIANÓPOLIS
2016

Lorenzo de Carvalho Digiácomo

MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE AÇÕES: ESTRUTURANDO PORTFÓLIOS CAIXA ZERO

Monografia submetida ao curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Milton Biage

FLORIANÓPOLIS

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SÓCIO ECONÔMICO
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

A Banca Examinadora resolveu atribuir a nota 9,5 ao aluno Lorenzo de Carvalho Digiácomo na disciplina CNM 7107 – Monografia, pela apresentação deste trabalho.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Milton Biage (orientador)

____

Prof. Dr. André Alves Portela Santos

____

Prof. Thiago Fleith Otuki

Dedico este trabalho a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão de minha formação acadêmica.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é desenvolver dois importantes modelos de precificação de opções de ações, simulando e analisando uma das principais estratégias operacionais deste mercado: a estruturação de portfólios caixa zero. Mais especificamente, utiliza-se o modelo de precificação de opções de Black-Scholes-Merton para estimação dos prêmios das opções e o modelo de Árvores Binomiais para, além de fins de comparação, estruturar portfólios caixa zero. Para isso, faz-se as análises de algumas situações do cotidiano dos profissionais do mercado de opções para descrever, compreender e explicar os fatos experimentados diariamente, os quais estão baseados em uma bibliografia especializada nos assuntos de mercado financeiro, em particular no mercado de opções de ações, fundamentando a elaboração e a realização dos testes, a obtenção dos resultados e sua análise. A coleta de dados históricos das opções mais negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) mostra a aplicabilidade dos modelos desenvolvidos neste trabalho e traz credibilidade para a sua replicação prática no mercado financeiro.

Palavras-chave: Precificação de Opções de Ações. Portfólio Caixa Zero. Black-Scholes-Merton. Árvores Binomiais.

ABSTRACT

The aim of this work is to develop two important stock option pricing models, simulating and analyzing one of the main operational strategies of the following market: the organization of zero cash portfolio. More specifically, the Black-Scholes-Merton option pricing model is used for estimating the awards of the options and the Binomial Trees model for organizing zero cash portfolios besides its comparative goals. In order to do this, a few different analyses are conducted regarding everyday situations of experts in option market to describe, comprehend and explain the facts experienced daily, which are based on a specialized bibliography in financial market, in particular in the stock option market, grounding the process of elaborating and carrying out tests, and the process of obtaining results and their analysis. The gathering of historical data of the most negotiated options in the Stock Exchange of São Paulo shows the applicability of the models developed in this study and brings credibility for its replicating process in the financial market.

Keywords: Stock Option Pricing. Zero Cash Portfolio. Black-Scholes-Merton. Binomial Trees.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS E TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BM&F	Bolsa de Mercadorias e Futuros
BOVESPA	Bolsa de Valores de São Paulo
CBOE	Chicago Board Options Exchange
CBOT	Chicago Board of Trade
DI	Depósitos Interfinanceiros
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e Custódia
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 TEMA E PROBLEMA DE PESQUISA

O surgimento do mercado de derivativos se deu com a criação da primeira bolsa de futuros, a Chicago Board of Trade (CBOT). Fundada em 1848, ela tinha o intuito de unir produtores e comerciantes ao eliminar o risco que corriam pela variação dos preços futuros das mercadorias (HULL, 2016).

Além de proteção, os agentes passaram a especular, assumindo o risco das variações de preços, e arbitrar as distorções entre os ativos e seus derivativos. Essas operações permitiam realizar negócios de maior porte com volume financeiro relativamente pequeno em nível de risco conhecido e estimulavam a liquidez do mercado (ASSAF NETO, 2015).

Com a grande quantidade de derivativos negociados nos mercados futuros, eles foram se sofisticando e divididos em diferentes áreas, como os mercados futuro, a termo[1], de *swaps*[2] e, por fim, o mercado de opções de ações – nosso objeto de estudo. E, em 1973, a CBOT criou uma nova bolsa, a Chicago Board Options Exchange (CBOE), para a negociação destas opções (HULL, 2016).

As negociações neste mercado se dão basicamente por dois tipos de contratos: opções de compra (*calls*)[3] e opções de venda (*puts*)[4]. Dentre as estratégias operacionais realizadas estão as operações com uma única opção e uma ação, as de *spreads* (com duas ou mais opções de compra ou de venda) e as combinações entre opções tanto de compra como de venda (HULL, 2016).

Pelo conceito da diversificação do risco, espera-se que ativos sejam combinados no contexto de um portfólio de forma que se estime um risco menor que aquele calculado para seus componentes individualmente. Os retornos dos ativos devem ser negativamente

[1] Uma operação a termo é um contrato entre as partes onde a compra ou a venda de uma determinada quantidade de ações, a um preço fixado, é liquidada em um prazo estabelecido, a contar da data da operação em pregão.

[2] Um *swap* é um contrato de balcão de troca de fluxo de caixa futuro entre duas empresas, tendo como base a comparação da rentabilidade entre dois indexadores, assumindo uma posição comprada em um e vendida em outro. Os indexadores podem ser índices de inflação ou de ações, taxas de juros ou taxas de câmbio.

[3] Uma *call* confere ao seu titular o direito de comprar um determinado ativo-objeto pelo preço estabelecido no contrato da opção, durante determinado período de tempo ou em uma data pré-determinada.

[4] Uma *put* confere ao seu titular o direito de vender um determinado ativo-objeto pelo preço estabelecido no contrato da opção, durante determinado período de tempo ou em uma data pré-determinada.

correlacionados entre si para que haja uma redução do risco do portfólio pela diversificação (ASSAF NETO, 2015).

E, partindo da importância da ideia anterior, o conceito da estruturação de um portfólio caixa zero parte de que o preço da ação e o preço do derivativo são afetados pela mesma fonte de incerteza: as oscilações do preço da ação. E, ao estruturar um portfólio caixa zero apropriado, o ganho ou perda da posição na ação compensa o ganho ou perda da posição no derivativo, de forma que o valor total do portfólio ao final desse curto período de tempo é conhecido (HULL, 2016).

A partir desta introdução sobre o mercado de derivativos e o de opções em especial, destaca-se como problema de pesquisa desse trabalho: Como estruturar portfólios caixa zero a partir de um modelo de precificação de opções?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo geral estruturar portfólios caixa zero capazes de simular uma das principais estratégias operacionais no mercado de opções de ações.

1.2.2 Objetivos específicos

a) Descrever os principais elementos do mercado de opções de ações, o seu funcionamento e algumas das principais estratégias existentes nesse mercado;
b) Apresentar e exemplificar os modelos de precificação de opções de Black-Scholes-Merton e de Árvores Binomiais;
c) Simular a estruturação de portfólios caixa zero, partindo da precificação de opções por meio das técnicas dos modelos e do software MATLAB.

1.3 JUSTIFICATIVA

O mercado de opções revolucionou o mundo das finanças e, hoje, é fundamental para operações especulativas, gestão de finanças corporativas e gestão de portfólios. As técnicas de apreçamento de opções e as estratégias de operação destes derivativos estão cada vez mais desenvolvidas. No entanto, há dificuldade de encontrar estudos baseados nestas técnicas de precificação e estratégias operacionais aplicados ao mercado financeiro brasileiro, cujos investidores de pequeno porte carecem de tais informações para diversificar seus investimentos ou proteger seus recursos da melhor maneira.

Neste trabalho, desenvolve-se duas técnicas de apreçamento de opções – Black-Scholes-Merton e Árvores Binomiais – e uma estratégia de estruturação de portfólios caixa zero. A primeira técnica tem a importância de estimar um preço justo para as opções, enquanto a segunda técnica tem a importância de representar os diferentes caminhos que poderiam ser seguidos pelo preço de uma ação durante a vida de uma opção.

Por fim, a simulação da estratégia de estruturação de portfólios caixa zero, partindo das técnicas de precificação anteriores, é fundamental para fornecer as informações e os procedimentos necessários aos pequenos investidores no que se refere à diversificação e proteção de seus investimentos.

1.4 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

De acordo com Marconi e Lakatos (2011), a utilização de métodos científicos não é exclusividade da ciência, porém não existe ciência sem métodos científicos:

> [...] a finalidade da atividade científica é a obtenção da verdade, por intermédio da comprovação de hipóteses, que, por sua vez, são pontes entre a observação da realidade e a teoria científica, que explica a realidade. O método é o conjunto das atividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança e economia, permite alcançar o objetivo – conhecimentos válidos e verdadeiros –, traçando o caminho a ser seguido, detectando erros e auxiliando as decisões do cientista. (MARCONI; LAKATOS, 2011, p. 46)

O tema central deste trabalho é a precificação de opções de ações, utilizando as técnicas de Black-Scholes-Merton e de Árvores Binomiais, e estruturar portfólios caixa zero, demonstrando como eles se comportam em aplicações no mercado financeiro. Deste modo, para que haja entendimento entre essa precificação e a estruturação de portfólio, deve-se ressaltar que esta é uma pesquisa de caráter metodológico estatístico, mais precisamente quantitativo.

> Os processos estatísticos permitem obter, de conjuntos complexos, representações simples e constatar se essas verificações simplificadas têm relações entre si. Assim, o método estatístico significa redução de fenômenos sociológicos, políticos, econômicos etc. a termos quantitativos e a manipulação estatística, que permite comprovar as relações dos fenômenos entre si, e obter generalizações sobre sua natureza, ocorrência ou significado. (MARCONI; LAKATOS, 2011, p. 93)

Conforme cita Marconi e Lakatos (2011), a metodologia quantitativa apresenta três características bem definidas: objetividade, sistematização e quantificação dos conceitos. A forma sistemática deve ser ordenada e a forma objetiva deve proceder de forma reaplicável; descrever, compreender e explicar os fatos.

Sendo assim, realizou-se uma pesquisa bibliográfica acerca do conteúdo teórico. Em seguida, fez-se a coleta dos dados e desenvolveu os testes através dos softwares DerivaGem e MATLAB, plataformas especializadas em funções matemáticas, estatísticas e financeiras para análises do comportamento de ativos no mercado financeiro.

É necessário destacar que houve fatores limitantes para um completo desenvolvimento da pesquisa que devem ser pontuados. Um deles está na coleta do histórico de cotação das opções, pois, como os contratos destes derivativos vencem num determinado período e ficam disponíveis apenas durante o contrato vigente. Portanto, estes só podem ser selecionados para curtos intervalos de tempo durante a pesquisa para a realização dos testes.

O trabalho está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo apresenta a introdução com o surgimento do mercado de derivativos até o desenvolvimento do mercado de opções de ações e suas características, junto com a importância dos modelos de precificação e da estratégia de operação abordados neste trabalho. Além disso, são apresentados os objetivos deste trabalho, a justificativa e o procedimento metodológico que nortearão a pesquisa durante o desenvolvimento. O segundo e o terceiro capítulo abordarão todo o referencial teórico da pesquisa, caracterizando cada um dos componentes que fazem parte das técnicas de precificação de opções e estratégia de estruturação dos portfólios caixa zero. O quarto capítulo tratará detalhadamente da simulação destas técnicas de apreçamento e da estratégia de estruturação de portfólios aplicadas ao mercado brasileiro. Por fim, o quinto capítulo apresentará as considerações finais da análise das aplicações.

2 MERCADO DE OPÇÕES DE AÇÕES

Neste capítulo, faz-se uma introdução sobre derivativos e mercados futuros e uma abordagem sobre as características do mercado de opções de ações e a sua mecânica operacional.

2.1 DERIVATIVOS E MERCADOS FUTUROS

De acordo com Assaf Neto (2015), derivativos são instrumentos financeiros que se originam de um ativo de referência. O valor de um contrato como estes deriva do valor de um bem básico como, por exemplo, *commodities*, ações, taxas de juros etc. Esses ativos de referência devem ter seus preços estabelecidos pelo mercado e as transações dos derivativos são executadas nos mercados futuros, a termo, opções, *swaps* etc.

A seguir, ele aborda a importância dos mercados futuros e de opções, sendo este último o objeto de estudo deste trabalho:

> Os mercados futuros e de opções propiciam aos investidores uma tomada de decisão mais técnica, melhorando o entendimento do mercado com relação ao desempenho das alternativas de investimentos em condições de risco. Esses derivativos oferecem também uma proteção contra prejuízos ocasionados por alterações desfavoráveis nas cotações dos ativos. (ASSAF NETO, 2015, p. 336)

Dentre as vantagens do uso de derivativos no mercado financeiro estão uma maior atração ao capital de risco, defesas contra variações desfavoráveis nos preços, estimular a liquidez do mercado, gerenciamento do risco e executar negócios de grande porte com volume relativamente baixo de capital a um nível de risco conhecido.

A Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) é o mercado formalmente estabelecido no Brasil para negociar, dentre outros, os seguintes tipos de contratos:

a. Futuros: as partes assumem o compromisso de comprar ou vender certo ativo em uma data futura a um preço predeterminado.
b. Opções: o detentor de uma opção tem o direito de comprar ou vender determinado ativo em uma data futura a um preço preestabelecido.

Existem, ainda, os agentes econômicos participantes destes mercados:

O *hedger* é aquele que busca proteção aos riscos de flutuações nos preços dos ativos, tomando posição contrária nos mercados futuros àquela realizada no mercado a vista. O especulador, no entanto, é o agente que assume o risco das variações de preços e contribui para a liquidez do mercado. E o arbitrador, por fim, é o agente que procura vantagens nas distorções dos preços entre um mercado e outro.

2.2 CARACTERÍSTICAS DO MERCADO DE OPÇÕES DE AÇÕES

Conforme Assaf Neto (2015), os contratos de opções são uma sofisticação das operações de futuros. O comprador assume o direito de negociar determinado ativo, pagando um prêmio por isso ao vendedor ou lançador da opção.

Este mercado trabalha com dois tipos de contratos:

a. Opções de compra – *Calls*: dá ao detentor do contrato o direito (e não a obrigação) de negociar um determinado ativo no futuro por um preço preestabelecido. Ao vendedor, há uma obrigação futura de entregar os ativos negociados àquele preço sempre que exigida pelo comprador.
b. Opções de venda – *Puts*: concede ao titular do contrato o direito de vender no futuro um ativo por um preço predeterminado. Da mesma forma, o vendedor desta opção tem a obrigação de entregar os ativos-objetos ao preço fixado anteriormente se exigida pelo comprador no futuro.

Quanto ao seu exercício, as opções podem ser dos tipos: europeia ou americana. A opção europeia define somente uma data futura para a realização do direito de compra ou venda, enquanto a opção americana pode realizar a operação em qualquer momento do prazo estabelecido.

A BM&F BOVESPA codifica as séries das opções por meio de códigos contendo símbolo, letra e número. Exemplo: PETRC14. O símbolo representa o ativo de referência e a letra indica se é uma *call* ou uma *put* e seu mês de vencimento[5]. As letras das opções de compra vão de “A” a “L”, representando de Janeiro a Dezembro respectivamente, enquanto as opções de venda vão de “M” a “X” da mesma forma. O número expressa o preço de exercício da opção[6]. Portanto, uma PETRC14 representa uma opção de compra que dá ao seu titular o

---

[5] Na BOVESPA, a data de vencimento das opções ocorre na terceira segunda-feira de cada mês.
[6] Atualmente, o preço de exercício real da opção pode não estar representado pelo número do seu código.

direito de comprar a ação da Petrobras PN (PETR4), com vencimento em março, ao valor de R$14,00. Estes aspectos das opções encontram-se detalhados no Quadro 1 abaixo.

Quadro 1 – As séries das opções

Mês do Vencimento	**Opção de Compra**	**Opção de Venda**
Janeiro	A	M
Fevereiro	B	N
Março	C	O
Abril	D	P
Maio	E	Q
Junho	F	R
Julho	G	S
Agosto	H	T
Setembro	I	U
Outubro	J	V
Novembro	K	W
Dezembro	L	X

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com Piazza (2010), as opções podem ser classificadas em três tipos em relação ao dinheiro: (a) dentro do dinheiro (*in the money*); (b) no dinheiro (*at the money*); e (c) fora do dinheiro (*out of the money*). No primeiro caso, o preço de exercício da opção (*strike*) está abaixo do valor da ação no mercado, sendo vantajoso exercer o seu direito de compra de uma *call*, por exemplo; no segundo, o preço de exercício está igual ou próximo do valor da ação, sendo indiferente exercer esse direito ou comprar a ação diretamente no mercado; e no terceiro caso, o preço de *strike* está acima do valor da ação, sendo o exercício não realizado e o prêmio perdido.

Considerando, por exemplo, que o preço atual no mercado de uma ação da Petrobras PN é de aproximadamente R$14,00, uma opção de compra PETRC12 valerá a pena exercer e adquirir o ativo a R$12,00. Já uma *call* PETRC14 apresentará uma pequena diferença de valores entre exercer essa opção ou não. Por fim, uma PETRC18 não valerá a pena exercer e adquirir o ativo a R$18,00. Estes aspectos estão caracterizados no Quadro 2 abaixo.

Quadro 2 – Tipos de opções em relação ao dinheiro

Tipo da opção	**Dentro do dinheiro**			**No dinheiro**	**Fora do dinheiro**		
Strikes Série C	8	10	12	14	16	18	20

Fonte: Elaborado pelo autor

Existem, ainda, fatores que interferem no preço das opções, ou seja, no valor extrínseco dos prêmios: (i) o preço de exercício; (ii) o tempo até o vencimento; (iii) a volatilidade; (iv) os dividendos; e (v) a taxa de juros.

O primeiro fator, tomando como base uma opção de compra, está relacionado ao quanto mais fora (ou mais dentro) do dinheiro a opção estiver, sendo menor (ou maior) a chance de ser exercida e menor (ou maior) o valor do seu prêmio. O segundo, um dos mais influenciáveis, se relaciona de forma que quanto maior (ou menor) o tempo de vida da opção, maior (ou menor) a chance de a ação gerar lucro e a opção ser exercida, logo maior (ou menor) será o seu preço. O Quadro 3, abaixo, evidencia estes fatores.

Quadro 3 – Valor das opções de acordo com o tempo (valores aproximados)

Se as ações estiverem custando R$16,00, as opções valerão:						
Strikes	12	**14**	16	18	20	22
5 semanas para o vencimento	5,00	3,30	1,75	1,20	0,85	0,40
4 semanas para o vencimento	4,75	3,15	1,55	1,00	0,70	0,25
3 semanas para o vencimento	4,55	2,90	1,30	0,80	0,45	0,15
2 semanas para o vencimento	4,40	2,65	1,00	0,60	0,30	0,10
1 semana para o vencimento	4,21	2,40	0,65	0,35	0,10	0,05
Dia do vencimento	4,00	**2,00**	0,01	0,01	0,01	0,01

Fonte: Elaborado pelo autor

Pode-se perceber no Quadro 3 também que, no “Dia do vencimento”, considerando a mesma PETRC14, é indiferente comprar essa opção ou adquirir a ação da Petrobras PN diretamente no mercado.

O terceiro fator, aliado ao segundo, também está relacionado com a probabilidade de a opção ser exercida até o vencimento, sendo maior (ou menor) a volatilidade, maior (ou menor) será o prêmio. O quarto se refere ao preço de exercício das séries já abertas naquele período que será corrigido após a distribuição dos dividendos aos acionistas. E, por último, o quinto fator se refere à taxa básica de juros da economia (taxa SELIC) de forma que quando essa taxa aumenta (ou diminui), os preços das opções também aumentam (ou diminuem); a razão dessa variação não é tão clara e poucos livros citam algum detalhe sobre esse fator, no entanto, o seu efeito deve ser levado em consideração.

Por fim, vimos que o valor extrínseco é aquele que gera expectativa de alta ou de baixa no preço das opções. No entanto, existe ainda o valor intrínseco das opções, representado pelo preço restante no dia do vencimento, onde já não há mais expectativas. Visto de outra forma, o valor intrínseco está relacionado com a vantagem imediata que a opção proporciona ao investidor. Pode-se dar o exemplo de uma opção de compra com preço de exercício menor que o preço de mercado do ativo-objeto. Logo, o valor intrínseco é dado pela diferença entre o preço da ação no mercado e o preço de exercício da opção.

2.3 A MECÂNICA OPERACIONAL DO MERCADO DE OPÇÕES

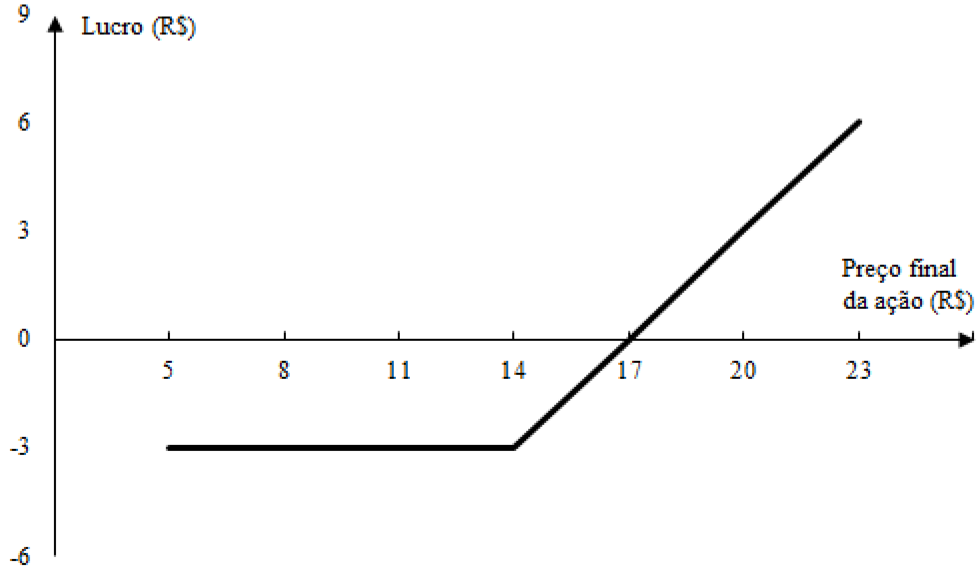
Como mencionando no tópico anterior, Hull (2016) também cita os dois tipos de opções: opção de compra (*call*) e opção de venda (*put*), sendo elas europeias ou americanas. Nos exemplos a seguir, descrever-se-á como funciona a mecânica de compra ou de venda de uma *call* ou de uma *put* europeias para fins de análise.

Num primeiro exemplo, considera-se que um investidor compre uma opção de compra (*call*) europeia, com preço de exercício (K) de R$14,00 para comprar um lote de 100 ações de uma determinada empresa. O preço atual de cada ação é de R$12,00, o tempo para expiração da opção é de 4 semanas e o preço dessa opção (c) é de R$3,00. O investimento inicial é de R$300,00.

Os aspectos da evolução dos ganhos do investidor em função do preço da ação, neste caso, são demonstrados pela Figura 1 abaixo.

Se o preço da ação na data de vencimento da opção for inferior a R$14,00, o investidor escolherá não exercê-la, uma vez que não faz sentido comprar por R$14,00 uma ação que tem valor de mercado inferior. Nesse caso, o investidor perde o investimento inicial de R$300,00.

Figura 1 – Lucro da compra de uma *call* europeia sobre uma ação. c = R\$3; K = R\$14



Fonte: Elaborado pelo autor

Se o preço da ação ficar acima de R$14,00 na data de expiração, a opção é exercida. O preço da ação é R$19,00, por exemplo. Ao exercer a opção, o investidor compra 100 ações a R$14,00 cada e, se as ações são vendidas imediatamente, ele obtém ganho de R$5,00 por ação, ou R$500,00. O lucro líquido para o investidor será de R$200,00.

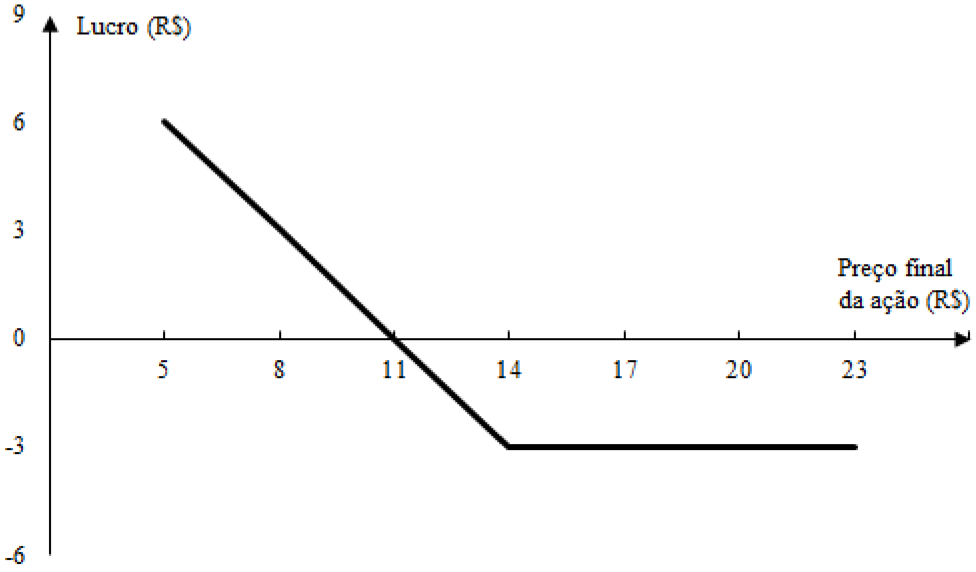
Num segundo exemplo, considera-se que um investidor compre uma opção de venda (*put*) europeia, com preço de exercício (K) de R$14,00, por ação, com direito de vender um lote de 100 ações de uma determinada empresa. O preço da atual de cada ação é de R$12,00, a tempo para expiração da opção é de 3 semanas e o preço dessa opção (p) é de R$3,00. O investimento inicial é de R$300,00.

Os aspectos da evolução dos ganhos do investidor em função do preço da ação, neste caso, são demonstrados pela Figura 2 abaixo.

Se o preço final da ação ficar acima de R$14,00 na data de vencimento da opção, a opção de venda expira com valor zero e o investidor perde R$300,00.

Se o preço da ação ficar abaixo de R$14,00, o investidor escolherá exercê-la. O preço da ação é de R$9,00 nessa data, por exemplo. Ao exercer a opção, o investidor compra 100 ações por R$9,00 cada e, sob os termos, vende as mesmas por R$14,00 e realiza um ganho de R$5,00 por ação, ou R$500,00. O lucro líquido do investidor será igual a R$200,00.

Figura 2 – Lucro da compra de uma *put* europeia sobre uma ação. p = R\$3; K = R\$14

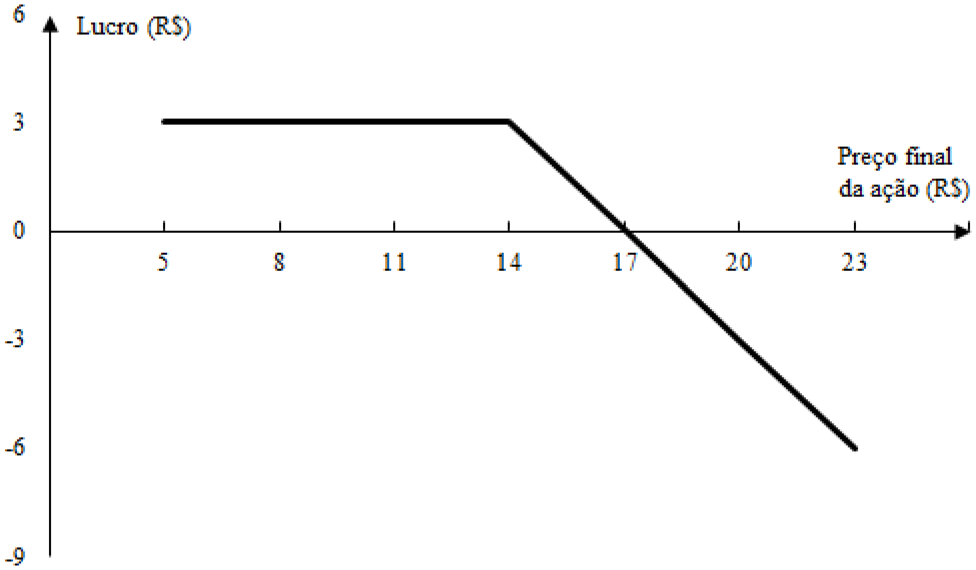


Fonte: Elaborado pelo autor

Os dois exemplos abaixo, de forma distinta aos exemplos anteriores, mostram, respectivamente, os lucros da venda ou lançamento de uma *call* e de uma *put* europeias.

Os aspectos da evolução dos ganhos do investidor em função do preço da ação, neste caso, são demonstrados pela Figura 3 abaixo.

Figura 3 – Lucro da venda de uma *call* europeia sobre uma ação. c = R\$3; K = R\$14



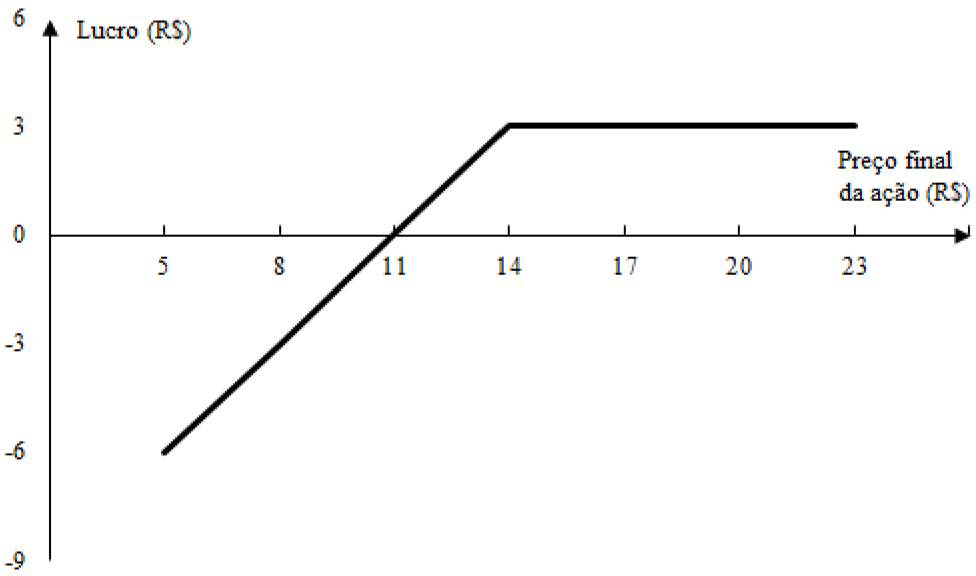
Fonte: Elaborado pelo autor

Se o preço da ação na data de vencimento da opção for superior a R$14,00, o comprador da opção escolherá exercê-la. Nesse caso, o lançador compra a ação a preço de mercado e a entrega ao comprador pelo preço de exercício. O lançador perde essa diferença de valores.

Se o preço da ação ficar abaixo de R$14,00 na data de expiração, o lucro do lançador da opção é máximo e é dado pelo prêmio de venda da própria opção.

Os aspectos da evolução dos ganhos do investidor em função do preço da ação, neste caso, são demonstrados pela Figura 4 abaixo.

Figura 4 – Lucro da venda de uma *put* europeia sobre uma ação. p = R$3; K = R$14



Fonte: Elaborado pelo autor

Se o preço da ação na data de vencimento da opção for inferior a R$14,00, o comprador da opção escolherá exercê-la. Nesse caso, o lançador vende a ação a preço de mercado e a entrega ao comprador pelo preço de exercício. O lançador perde essa diferença de valores.

Se o preço da ação ficar acima de R$14,00 na data de expiração, o lucro do lançador da opção é máximo e é dado pelo prêmio de venda da própria opção.

Nestes dois casos, portanto, o lucro máximo é o preço de venda ou preço de lançamento da opção. Qualquer preço final da ação acima do preço de exercício resultará em perda de lucro ou prejuízo ao vendedor de uma *call* e qualquer preço final da ação abaixo do preço de exercício resultará em perda de lucro ou prejuízo ao vendedor de uma *put*.

Em resumo, o Quadro 4 apresenta a posição (de uma opção) em função da expectativa (do preço da ação) conforme destacado abaixo.

Quadro 4 – Posição (de uma opção) e Expectativa (do preço da ação)

Posição	Expectativa
Compra de uma *call*	Preço da ação subir
Compra de uma *put*	Preço da ação cair
Venda de uma *call*	Preço da ação cair
Venda de uma *put*	Preço da ação subir

Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, em uma análise direta, um investidor que pretende vender uma opção de venda, por exemplo, espera que o ativo-objeto se valorize no mercado.

2.4 ESTRATÉGIAS OPERACIONAIS COM OPÇÕES DE AÇÕES

Nesta seção, aborda-se algumas das principais estratégias de negociação envolvendo opções, as quais variam de acordo com a aversão ao risco do investidor. Destaca-se as operações que envolvem uma opção e o seu ativo-objeto.

Segundo Hull (2016), existem diferentes estratégias operacionais que envolvem uma única opção de ação e seu ativo de referência. A Figura 5, abaixo, mostra o lucro dessas estratégias.

No primeiro gráfico, no canto superior esquerdo, encontra-se o portfólio é composto pela compra de uma ação e pela venda de sua opção de compra europeia. No segundo gráfico, no canto superior direito, encontra-se o portfólio é composto pela venda de uma ação e pela compra de sua opção de compra. É o oposto do primeiro. No terceiro gráfico, no canto inferior esquerdo, observa-se uma estratégia que envolve a compra de uma opção de venda europeia e a compra de sua ação. Finalmente, no quarto e último gráfico, no canto inferior direito, o portfólio trata-se da combinação de uma posição vendida em uma opção de venda e uma posição vendida na sua ação. É o contrário do terceiro.

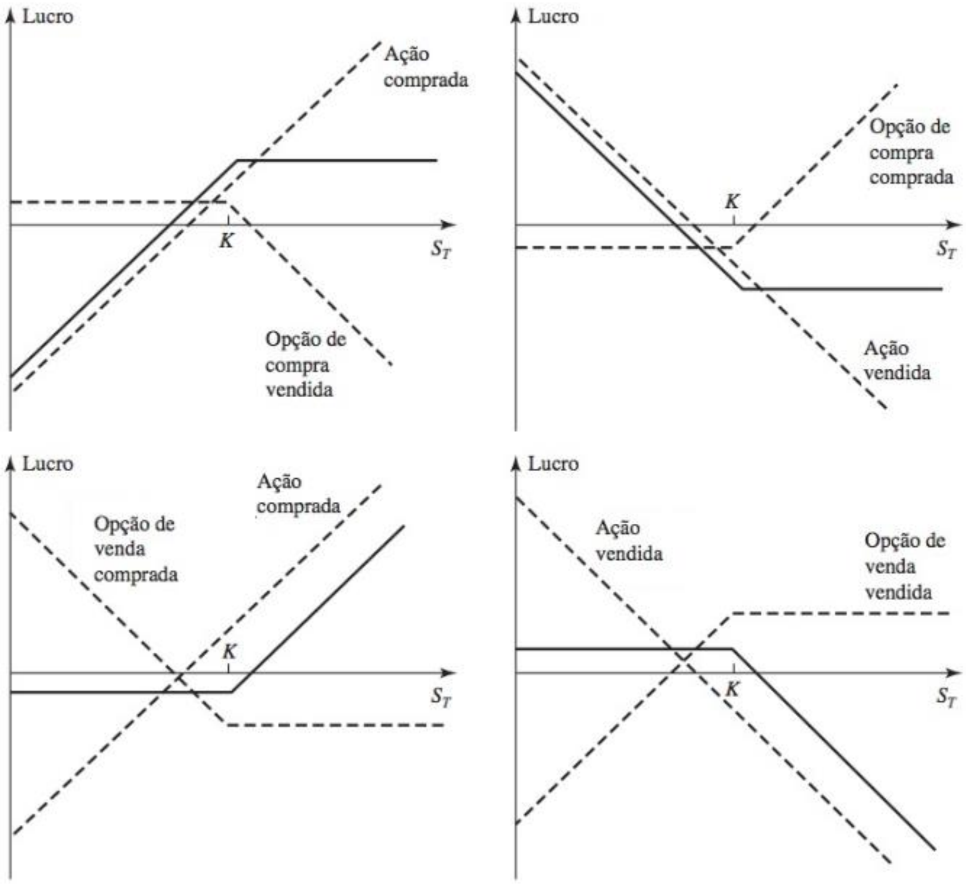
Os padrões de lucro citados anteriormente, no capítulo acima, têm o mesmo formato geral dos padrões para, respectivamente, opções de venda vendida, opções de venda comprada, opções de compra comprada e opções de compra vendida. Portanto, considerando os quatro padrões detalhados nas Figuras 1, 2, 3 e 4 acima, a Figura 5, abaixo, destaca os quatro portfólios relacionados a cada um dos padrões de acordo com a paridade *put-call* apresentada a seguir.

$$p + S_0 = c + Ke^{-rT} + D \quad (1)$$

onde p é o preço de uma *put* europeia, S_0 é o preço da ação, c é o preço de uma *call* europeia, K é o preço de exercício da opção, r é a taxa de juros livre de risco, T é o tempo até o vencimento da opção e D é o valor dos dividendos esperados durante a vida das opções.

A Equação (1), acima, mostra que a combinação entre as compras de uma opção de venda europeia e o seu ativo-objeto é equivalente a uma posição comprada em opção de compra europeia mais certa quantia em caixa, expressa pelo termo ($Ke^{-rT} + D$); ou seja, sendo o valor do preço de exercício da opção convertido em valor presente mais o valor dos dividendos esperados.

Figura 5 – Padrões de lucro de posições em uma ação combinada com uma opção



Fonte: (Hull, 2016, p. 274)

Reorganizando a Equação (1), obtém-se a seguinte relação:

$$S_0 - c = Ke^{-rT} + D - p \tag{2}$$

Portanto, observa-se através da Equação (2) que uma posição comprada em uma ação, combinada com uma venda na sua opção de compra europeia, é equivalente a uma posição vendida em opção de venda europeia mais uma determinada quantia em caixa, também expressa pelo termo (Ke^{-rT} + D).

Dessa forma, pode-se destacar que os quatro portfólios apresentados pela Figura 5, podem ser descritos claramente pelas Equações (1) e (2) estabelecidas.

3 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Neste capítulo, faz-se o desenvolvimento dos modelos de Black-Scholes-Merton e de Árvores Binomiais, juntamente com suas possibilidades de estruturação de portfólios caixa zero.

3.1 MODELO DE BLACK-SCHOLES-MERTON

Nesta seção, serão apresentadas, de forma detalhada, as premissas em que são baseadas as fórmulas do Modelo de Black-Scholes-Merton.

> No início da década de 1970, Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton produziram um avanço fenomenal no apreçamento de opções sobre ações europeias. O avanço se tornaria conhecido pelo nome de modelo de Black–Scholes–Merton (ou Black–Scholes). O modelo teve uma influência incrível no modo como os *traders* apreçam e *hedgeiam* derivativos. (HULL, 2016, p. 343)

3.1.1 Retorno esperado e volatilidade

De acordo com Hull (2016), o retorno esperado (μ) de uma ação para os investidores depende do risco desta ação e da taxa de juros da economia. Quanto maiores estas variáveis, maior o retorno esperado de uma ação. No entanto, pode-se ignorar as determinantes de μ, uma vez que o valor de uma opção, quando expresso em termos do valor da ação de referência, não depende em nada do retorno esperado.

A volatilidade (σ) de uma ação é a medida de incerteza quanto aos retornos proporcionados por ela e os valores variam geralmente entre 15 e 65% ao ano[7]. A volatilidade do preço de uma ação é o desvio padrão da distribuição logarítmica dos retornos por ela fornecidos em um determinado período.

[7] Em geral, a variância de ativos financeiros é descrita por modelos de variância condicional. Contudo, neste estudo, a variância utilizada nas simulações é estimada a partir das bases de dados históricos por meio da variância incondicional.

3.1.2 A ideia de Black-Scholes-Merton

Conforme Hull (2016), a análise de Black-Scholes-Merton parte de uma carteira sem risco, composta por uma opção e pelo ativo-objeto. Não havendo arbitragem, o retorno desta carteira deve ser zero.

Num curto período de tempo, o preço de uma opção de compra (venda) está positiva (negativa) e perfeitamente correlacionado com o preço da ação de referência. No final deste período de ambas as carteiras, o valor global é conhecido, uma vez que o ganho ou perda da posição na ação compensa o ganho ou perda da posição na opção.

Teoricamente, a carteira da análise de Black-Scholes-Merton permanece sem risco durante um período instantâneo de tempo. No entanto, para conservar esse retorno zero, o portfólio deve ser constantemente ajustado na relação entre uma pequena mudança no preço de uma opção de compra (Δc) e uma pequena mudança no preço de sua ação-objeto (ΔS), $\Delta c = \mathrm{a}\Delta S$.

Essa relação pode mudar, por exemplo, de a = 0,4 hoje para 0,5 amanhã. Portanto, para manter a posição caixa zero, seria necessário comprar 50 ações para cada 100 opções de compra vendidas, em vez de 40 para 100 anteriormente.

3.1.2.1 Pressupostos

De acordo com Hull (2016), para derivar-se a fórmula de precificação de opções de Black-Scholes-Merton, deve-se partir dos seguintes pressupostos:

1. O comportamento do preço da ação corresponde ao descrito pelo modelo com retorno esperado e volatilidade (σ) constantes;
2. É permitida a venda a descoberto de títulos;
3. Não há custos operacionais e impostos e os títulos são perfeitamente divisíveis;
4. Não há dividendos durante a vida da opção;
5. Não há oportunidades de arbitragem sem risco;
6. A negociação de títulos é contínua;
7. A taxa de juros livre de risco de curto prazo (r) é constante.

Existem variações das fórmulas de Black-Scholes-Merton que levam em conta mudanças de r e σ ao longo do tempo, ou a presença de dividendos.

3.1.3 Fórmulas de precificação de Black-Scholes-Merton

Hull (2016) expõe as fórmulas de Black-Scholes-Merton para os preços de opções europeias de ações sem dividendos:

$$call \rightarrow c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{3}$$

$$put \rightarrow p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \tag{4}$$

onde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{5}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{6}$$

A função de distribuição de probabilidade cumulativa, $N(x)$, é a probabilidade de uma variável com distribuição normal padrão ser menor que x e, matematicamente, assume um valor entre 0 e 1. S_0 é o preço inicial da ação, K é o preço de exercício, r é a taxa de juros livre de risco, T é o tempo para o vencimento (em anos) e σ é a volatilidade do preço da ação.

Um dos termos das Equações (3) e (4) é $S_0 N(x)$ que consiste no preço atual de uma ação (S_0) ponderado por alguma probabilidade $N(x)$. Enquanto o outro termo, $Ke^{-rT} N(x)$, consiste no preço de exercício da opção convertido em valor presente pela taxa de juros livre de risco (Ke^{-rT}), e também ponderado por outra probabilidade $N(x)$.

No caso de uma *call*, Equação (3), o primeiro termo representa o que se espera ganhar ao estimar as reais chances de adquirir a ação, e o segundo termo representa o preço que se paga para adquiri-la, convertido em valor presente. Portanto, quanto maior o preço da ação, relativo ao preço de exercício, maior a probabilidade de a opção ser exercida e, então, maior o seu prêmio.

Partindo para uma análise das Equações (5) e (6), quanto maior a razão entre S_0 e K, maiores serão os valores de d_1 e d_2, significando uma maior entrada em $N(x)$ e uma maior probabilidade de a opção ser exercida. Outro ponto a se destacar é a volatilidade (σ); quanto maior, mais elevado será o prêmio de uma *call* pela maior possibilidade de exercê-la. Em termos de d_1 e d_2, quanto maior σ, maior será d_1 e menor será d_2, devido σ ser um fator quadrático que está somando em d_1 e subtraindo em d_2.

Por fim, no limite, quando T tende a 0 (dia do vencimento), $N(x)$ tende a 1 e o preço de uma *call* é a diferença entre o preço da ação e o preço de exercício da opção que estiver dentro do dinheiro. Caso contrário, a opção que estiver fora perde seu valor e não é exercida.

Como exemplo de aplicação, considera-se o preço de uma ação da Petrobras PN (PETR4), a 3 meses do vencimento (16/09/2016) de uma opção, cujo preço da ação é R$9,20; o preço de exercício da opção é de R$8,00, a taxa de juros livre de risco é de 14,03% ao ano (rendimento das aplicações indexadas à taxa de Depósitos Interfinanceiros, DI, acumulado de agosto 2015 a julho de 2016). Logo, S_0 = 9,20, K = 8,00, r = 0,1403 e T = 3/12 = 0,25.

A volatilidade do preço de uma ação é o desvio padrão da distribuição logarítmica dos retornos por ela fornecido em um determinado período. Com isso, extrai-se o histórico de cotações da ação Petrobras PN no período de 28/06/2016 a 16/09/2016. Com estes dados, utiliza-se a volatilidade histórica a partir do logaritmo natural destes retornos reais, pois ela tende a apresentar uma distribuição normal. Calcula-se o desvio padrão incondicional da amostra (s) e, em seguida, multiplica-se à raiz quadrada do número de dias de negociação no ano (τ) para calcular a volatilidade.

$$\sigma = s\sqrt{\tau} = 0{,}0277\sqrt{252} = 0{,}44 \text{ ou } 44\% \text{ ao ano} \tag{7}$$

A seguir, estime-se os demais parâmetros envolvidos nas Equações de (3) a (6), as quais são:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \rightarrow$$

$$= \frac{\ln(9{,}20/8{,}00) + (0{,}1403 + 0{,}44^2/2)0{,}25}{0{,}44\sqrt{0{,}25}} = 0{,}9049 \tag{8}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \rightarrow$$

$$= 0{,}9049 - 0{,}44\sqrt{0{,}25} = 0{,}6850 \tag{9}$$

$$Ke^{-rT} = 8{,}00e^{-0{,}1403 \times 0{,}25} = 7{,}72 \tag{10}$$

Calcula-se a função de distribuição de probabilidade cumulativa e, portanto, os valores das opções de compra e de venda europeias são dados por:

$$c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \rightarrow$$

$$= 9{,}20N(0{,}9049) - 7{,}72N(0{,}6850) = 1{,}70 \tag{11}$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \rightarrow$$

$$= 7{,}72N(-0{,}6850) - 9{,}20N(-0{,}9049) = 0{,}22 \tag{12}$$

Por fim, tem-se a relação abaixo que resulta na variação do preço da ação (ΔS) para que o comprador de uma *call*, neste caso, atinja o ponto de equilíbrio.

$$S_0 + \Delta S = K + c \rightarrow$$

$$9{,}20 + \Delta S = 8{,}00 + 1{,}70 \rightarrow \Delta S = 0{,}50 \tag{13}$$

Portanto, o preço da ação deve subir R$0,50 (5,43%) para que o comprador dessa opção de compra alcance o ponto em que não há lucro nem prejuízo. Ou seja, ao comprar uma *call* pelo prêmio de R$1,70, a ação deve se valorizar de R$9,20 para R$9,70 para que o investidor atinja o ponto de equilíbrio ao exercer a opção e adquirir a ação a R$8,00.

3.1.3.1 Dividendos

Por fim, Hull (2016) mostra que, operacionalmente, as fórmulas de Black-Scholes-Merton podem ser usadas para calcular o preço da opção de uma ação que distribui dividendos (D) desde que o preço da ação seja reduzido pelo valor presente dos dividendos esperados durante a vida da opção.

Como exemplo, analisa-se uma *call* europeia da PETR4, cuja data ex-dividendo ocorre em um mês. Supõe-se que o dividendo esperado será de R$0,44. O preço atual da ação é de R$9,20 e a taxa de juros livre de risco é de 14,03% ao ano (rendimento das aplicações indexadas à taxa de DI acumulado de agosto 2015 a julho de 2016). T = 1/12 = 0,0833, D = 0,44, S_0 = 9,20 e r = 0,1403. Considerando estes dados, estima-se que a depreciação dos dividendos no período é o seguinte:

$$D' = D \times e^{-rT} = 0{,}44 \times e^{-0{,}1403 \times 0{,}0833} = 0{,}43 \tag{14}$$

O preço da *call* pode ser recalculado pelas Relações (3), (5) e (6) de Black-Scholes-Merton com $S_0' = S_0 - D' = 9{,}20 - 0{,}43 = 8{,}77$. E, dessa forma, encontra-se $c = 1{,}34$; ou seja, a ação deve subir R$0,14 (1,52%) para que o comprador dessa opção de compra alcance o ponto em que não há lucro nem prejuízo.

3.2 MODELO DE ÁRVORES BINOMIAIS

Segundo Hull (2016), o modelo de Árvores Binomiais baseado em um artigo publicado por Cox, Ross e Rubinstein em 1979 é uma técnica útil para precificar opções. Envolve a construção de um diagrama que representa os caminhos possíveis do preço de uma ação durante a vida de sua opção. Parte-se da suposição de que o preço de uma ação segue um caminho aleatório, determinando, em cada passo no tempo, uma probabilidade de subir certo valor percentual e de descer outro valor. E, à medida que cada passo no tempo diminui, o preço de uma opção europeia calculado pelo modelo de Árvores Binomiais converge para o de Black-Scholes-Merton.

O modelo também é importante por avaliar opções americanas, cujas opções de compra são maioria e possuem maior liquidez no Brasil. No entanto, há ressalvas necessárias a serem feitas. A primeira é que não existe opção de venda americana no Brasil e a outra é que o exercício antecipado de uma opção de compra americana sobre uma ação que não paga dividendos nunca é a melhor estratégia, situação esta que passam as empresas que possuem as opções mais líquidas na atual conjuntura econômica do país, Vale e Petrobras.

Nesta seção, serão apresentados tópicos sobre o exercício de uma opção de compra americana sobre uma ação que não paga dividendos, modelos binomiais de um e de dois passos, opções americanas, a grega *delta*, a relação da volatilidade com u e d e o aumento do número de passos.

3.2.1 Exercício de uma *call* americana sobre uma ação que não paga dividendos

Antes de iniciar o desenvolvimento do modelo, cria-se este tópico para explanar um ponto importante deste trabalho. O ponto a ser destacado trata-se do fato de exercer antecipadamente uma opção de compra americana sobre uma ação que não paga dividendos; fato que se caracteriza como não sendo uma decisão ideal.

Hull (2016) cita dois motivos para isso. Um é referente ao seguro fornecido pela *call* que, quando mantida no lugar da ação, protege contra uma queda do preço da ação abaixo do preço de exercício. O outro se refere ao valor do dinheiro no tempo que, para o titular da opção, quanto mais tarde o preço de exercício for pago, melhor.

Por um argumento formal, tem-se que uma *call* europeia (c) pode ser descrita como:

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT} \tag{15}$$

Como o titular de uma *call* americana (C) tem todas as oportunidades de exercício abertas de uma *call* europeia equivalente, tem-se que $C \geq c$ e, assim:

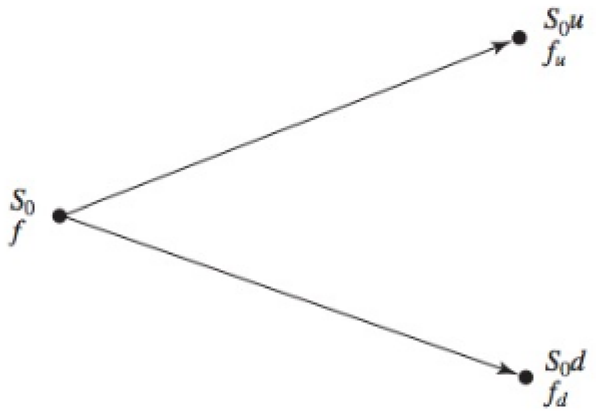
$$C \geq S_0 - Ke^{-rT} \tag{16}$$

Sendo $r > 0$, $C > S_0 - Ke^{-rT}$ quando $T > 0$. Isso mostra que C é sempre maior que o valor intrínseco da opção antes do vencimento. Portanto, para que o exercício antecipado seja ideal, C deverá ser igual a esse valor intrínseco naquele instante. Dessa forma, a literatura diz que se o investidor achar que a ação está supervalorizada e considera exercer a opção antecipadamente para vender a ação em seguida, neste caso, o investidor se sairá melhor vendendo a própria opção.

3.2.2 Modelo binomial de um passo

Conforme a literatura de Hull (2016), supõe-se uma ação cujo preço é S_0 e sua opção cujo preço é f. A opção dura um tempo T até o vencimento e pode subir de S_0 para um novo nível, S_0u, onde $u > 1$, ou descer para S_0d, onde $d < 1$. Nestes níveis, o resultado da opção é f_u e f_d respectivamente. O aumento percentual no preço da ação é $u - 1$ e a redução percentual é $1 - d$.

Figura 6 – Preços de ações e opções em uma árvore de um passo



Fonte: (Hull, 2016, p. 296)

Imagina-se um portfólio composto de uma posição comprada em Δ ações e uma posição vendida em uma opção. Calcula-se o valor de Δ que torna o portfólio sem risco. O valor do portfólio no vencimento da opção se há um movimento positivo no preço da ação é dado por:

$$S_0 u\Delta - f_u \tag{17}$$

onde u é o aumento percentual no preço da ação mais 1 e f_u é o preço da opção no nível superior S_0u.

O valor do portfólio no vencimento da opção se há um movimento negativo no preço da ação é dado por:

$$S_0 d\Delta - f_d \tag{18}$$

onde d é 1 menos a redução percentual no preço da ação e f_d é o preço da opção no nível inferior S_0d.

Igualando as Relações (17) e (18) e isolando Δ, tem-se:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \tag{19}$$

onde Δ é razão entre a mudança no preço da opção e a mudança no preço da ação à medida que se move em cada nó no tempo até o vencimento.

Nesse caso, o portfólio deve obter retorno zero para que não haja oportunidades de arbitragem.

O valor presente do portfólio e o custo para montá-lo são, respectivamente:

$$(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT} \tag{20}$$

e

$$S_0\Delta - f \tag{21}$$

Igualando as Relações (20) e (21), substituindo o valor de Δ e isolando *f*, tem-se:

$$f = \frac{f_u\left(1 - de^{-rT}\right) + f_d(ue^{-rT} - 1)}{u - d} \tag{22}$$

ou

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{23}$$

onde

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \tag{24}$$

A Equação (23) permite calcular o preço de uma opção quando os movimentos no preço da ação são dados por uma árvore binomial de um passo.

A seguir, apresenta-se um exemplo de estimativas de preço de uma opção de compra, utilizando o modelo de Árvore Binomial. Para tanto, considera-se uma ação da PETR4 com preço atual de R$9,00 e, sabe-se que ao final de 3 meses, este preço poderá evoluir para R$13,00 ou R$5,00. Trata-se da avaliação de uma *call* europeia com preço de exercício de R$8,00 em 3 meses. No vencimento, se o preço da ação for R$13,00, o valor da opção será R$1,00; se o preço da ação for R$5,00, o valor da opção será R$0,00.

Se o preço da ação sobe de R$9,00 para R$13,00, o valor da opção é R$1,00 e o valor total do portfólio é 13Δ – 1. Se o preço da ação cai de R$9,00 para R$5,00, o valor da opção é R$0,00 e o valor total do portfólio é 5Δ – 0. O portfólio é caixa zero se Δ for escolhido de forma que o valor final do portfólio seja igual para ambas alternativas.

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d \rightarrow 13\Delta - 1 = 5\Delta \rightarrow$$
$$\Delta = 1/8 = 0{,}125 \quad (25)$$

Um portfólio sem risco, então, é formado pela compra de 1 ação da PETR4 para cada 8 *calls* vendidas.

Portanto, pode-se estimar o valor do portfólio no vencimento da opção, o qual é dado por:

$$S_0u\Delta - f_u = 13 \times 0{,}125 - 1 = 0{,}625 \quad (26)$$

ou

$$S_0d\Delta - f_d = 5 \times 0{,}125 - 0 = 0{,}625 \quad (27)$$

Supõe-se que a taxa de juros livre de risco é de 14,03% ao ano (rendimento das aplicações indexadas à taxa DI acumulado de agosto 2015 a julho de 2016), o valor do portfólio hoje deve ser o valor presente de 0,625:

$$0{,}625e^{-rT} = 0{,}625e^{-0{,}1403\times3/12} = 0{,}60 \quad (28)$$

Se o preço da ação hoje é R$9,00, o valor do portfólio hoje é:

$$9 \times 0{,}125 - f = 1{,}125 - f \quad (29)$$

Portanto:

$$1{,}125 - f = 0{,}60 \rightarrow f = 0{,}52 \quad (30)$$

Se o valor da *call* for maior que R$0,52, o portfólio custaria menos de 0,60 para ser estruturado e se obteria um retorno maior que zero. Caso contrário, se o valor for menor que R$0,52, o portfólio poderia ser vendido a descoberto como forma de tomar dinheiro emprestado a uma taxa de juros menor que a de mercado.

Existe ainda outra maneira de calcular o preço de uma opção quando os movimentos no preço da ação são dados por uma árvore binomial de um passo. Chama-se avaliação *risk-neutral* e dá a mesma resposta da de argumentos sem arbitragem vista anteriormente.

Define-se *p* como a probabilidade do preço da ação ter um movimento positivo num mundo *risk-neutral* e 1 – *p* a probabilidade de ter um movimento negativo. O retorno esperado sobre uma ação deve ser zero. Portanto, *p* deve satisfazer:

$$S_0up + S_0d(1 - p) = S_0e^{rT} \quad (31)$$

Com os dados do exemplo anterior, tem-se que:

$$13p + 5(1 - p) = 9e^{0{,}1403\times3/12} \rightarrow p = 0{,}54 \quad (32)$$

A *call* tem probabilidade de 54% de valer R$1,00 e, portanto, probabilidade de 46% de valer R$0,00. Seu valor esperado (E) é:

$$E = 1{,}00 \times 0{,}54 + 0{,}00 \times 0{,}46 = 0{,}54 \tag{33}$$

O resultado deve ser descontado pela taxa de juros livre de risco. O valor da opção hoje é:

$$Ee^{-rT} = 0{,}54e^{-0{,}1403\times 3/12} = 0{,}52 \tag{34}$$

Logo, o valor da *call* é R$0,52. O mesmo obtido anteriormente.

3.2.3 Árvores binomiais de dois passos

Hull (2016) também expõe o caso de dois passos no tempo. Dado uma ação a um preço inicial S_0, a cada passo no tempo ele sobe u vezes seu valor inicial ou desce d vezes. A notação para o valor da opção é mostrada na Figura 7.

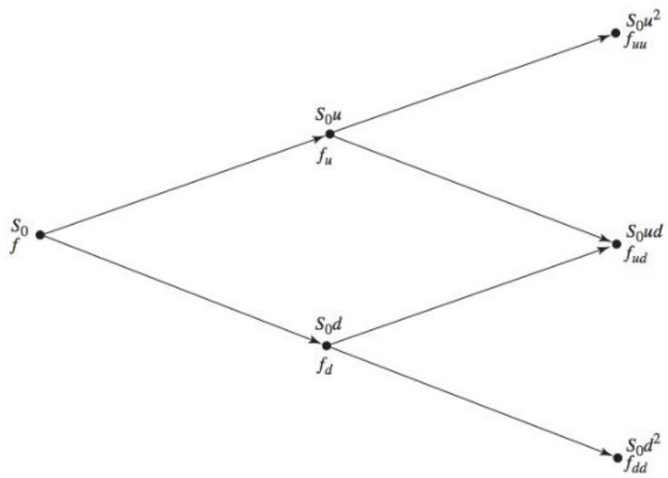
Supõe-se que a taxa de juros livre de risco é r e a duração de cada passo no tempo é Δt anos. Portanto, tem-se que o preço da opção (f) é dado por:

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \tag{35}$$

onde

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{36}$$

Figura 7 – Preços de ações e opções em uma árvore de dois passos



Fonte: (Hull, 2016, p. 302)

Reaplicando ao passo seguinte nos níveis superior e inferior, tem-se que:

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \tag{37}$$

e

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \tag{38}$$

Substituindo as Equações (37) e (38) na Equação (35), tem-se que:

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \tag{39}$$

Os parâmetros p^2, $2p(1 - p)$ e $(1 - p)^2$ são as probabilidades em cada nó e o preço da opção é o seu resultado esperado num mundo *risk-neutral* descontado pela taxa de juros livre de risco. O princípio dessa avaliação se mantém válido quando se adiciona mais passos à árvore binomial. Estes procedimentos descritos também podem ser aplicados para opções de venda.

Como exemplo de aplicação, considere uma *put* europeia de 2 meses sobre uma PETR4, com preço de exercício de R$10,00 e valor atual de R$9,00. Supõe-se que há dois passos no tempo de 1 mês e que em cada passo espera-se, baseado em volatilidades passadas, que o preço da ação se mova 10% para cima ou para baixo. A taxa de juros livre de risco é de 14,03% ao ano (rendimento das aplicações indexadas à taxa de DI acumulado de agosto 2015 a julho de 2016). Nesse caso, $u = 1{,}1$, $d = 0{,}9$, $\Delta t = 1/12 = 0{,}0833$, $r = 0{,}1403$ e $K = 10$.

Portanto, considere:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0{,}1403 \times 0{,}0833} - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}56 \tag{40}$$

De acordo com as relações de preço para uma árvore binomial de dois passos, os preços possíveis da ação são, respectivamente:

$$S_0 u = 9{,}00 \times 1{,}1 = 9{,}90\ ;\ S_0 u^2 = 9{,}00 \times 1{,}1^2 = 10{,}89 \tag{41}$$

$$S_0 ud = 9{,}00 \times 1{,}1 \times 0{,}9 = 8{,}91 \tag{42}$$

$$S_0 d = 9{,}00 \times 0{,}9 = 8{,}10\ ;\ S_0 d^2 = 9{,}00 \times 0{,}9^2 = 7{,}29 \tag{43}$$

que conduzem aos preços finais possíveis da opção:

$$f_{uu} = MÁXIMO(K - S_0 u^2, 0) = MÁXIMO(10 - 10{,}89, 0) = 0 \tag{44}$$

Esse resultado mostra que, no dia do vencimento, a *put* perde seu valor e não é exercida; ela está fora do dinheiro. Não faz sentido vender uma ação a R$10,00 com preço de mercado superior.

$$f_{ud} = MÁXIMO(K - S_0ud, 0) = MÁXIMO(10 - 8{,}91, 0) = 1{,}09 \quad (45)$$

$$f_{dd} = MÁXIMO(K - S_0d^2, 0) = MÁXIMO(10 - 7{,}29, 0) = 2{,}71 \quad (46)$$

O cálculo de f pode ser feito diretamente pela Equação (39) ou analisando a árvore retroativamente, um passo de cada vez. Como é uma árvore pequena, faz-se passo a passo para desenhá-la no final. Logo,

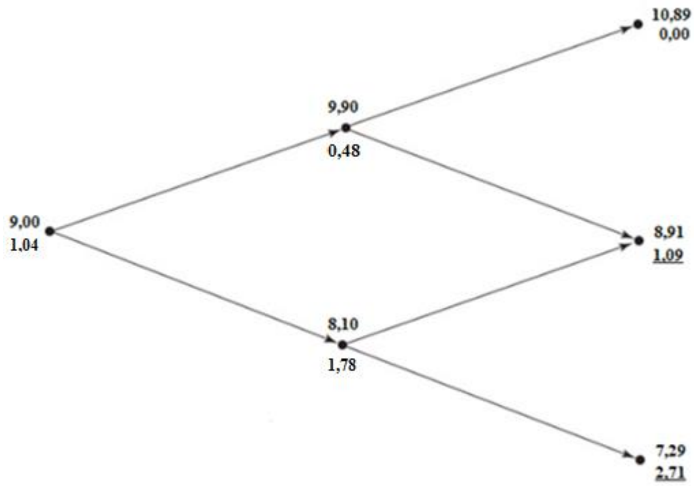
$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \rightarrow$$
$$= e^{-0{,}1403 \times 0{,}0833}[0{,}56 \times 0 + (1 - 0{,}56) \times 1{,}09] = 0{,}48 \quad (47)$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \rightarrow$$
$$= e^{-0{,}1403 \times 0{,}0833}[0{,}56 \times 1{,}09 + (1 - 0{,}56) \times 2{,}71] = 1{,}78 \quad (48)$$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \rightarrow$$
$$= e^{-0{,}1403 \times 0{,}0833}[0{,}56 \times 0{,}48 + (1 - 0{,}56) \times 1{,}78] = 1{,}04 \quad (49)$$

A Figura 8 mostra este resultado aplicado à árvore binomial. Os valores da opção sublinhados nesta figura são os valores favoráveis ao exercício da *put* europeia estimada.

Figura 8 – Preços de ações e opções em uma árvore de dois passos (*put* europeia)



Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.4 Opções americanas

Até então, analisou-se somente opções do tipo europeia, onde o exercício só pode ser realizado na data do vencimento. E para analisar uma opção americana usando o modelo binomial, procede-se conforme feito no exemplo anterior, analisando a árvore de trás para frente e verificando em cada nó se o exercício antecipado seria ideal ou não. De acordo com

Hull (2016), nos últimos nós, data do vencimento, o valor da opção é o mesmo de uma opção europeia. No entanto, nos nós que se antecedem, o valor é sempre o maior, entre os obtidos nos seguintes procedimentos: (*i*) o valor dado pela Equação (35) e (*ii*) o resultado do exercício antecipado.

Tomando como exemplo de exercício, os dados da *put* do exemplo anterior. Nestes exemplos, os valores para a opção nos nós finais não se alteram. f_{uu} = R\$0,00, f_{ud} = R\$1,09 e f_{dd} = R\$2,71. Já nos nós que se antecedem, os f_u e f_d, são estimados, conforme os procedimentos descritos anteriormente, obtendo-se:

$$(i)\ f_u = e^{-0,1403\times 0,0833}[0,56\times 0+(1-0,56)\times 1,09] = 0,48 \tag{50}$$

$$(ii)\ f_u = MÁXIMO(10-9,90\ ,0) = 0,10 \tag{51}$$

e

$$(i)\ f_d = e^{-0,1403\times 0,0833}[0,56\times 1,09+(1-0,56)\times 2,71] = 1,78 \tag{52}$$

$$(ii)\ f_d = MÁXIMO(10-8,10, 0) = 1,90 \tag{53}$$

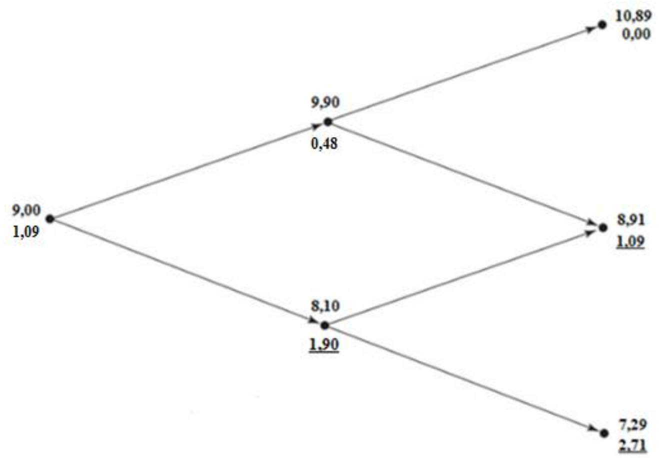
Portanto, numa opção de venda americana, o valor de f_u permanece o mesmo, enquanto o de f_d se altera para um valor maior. Dessa forma, o exercício antecipado em f_d é ideal e a diferença entre os valores, R\$0,12, é o lucro de arbitragem.

O cálculo segue agora com o novo valor de f_d:

$$f = e^{-0,1403\times 0,0833}[0,56\times 0,48+(1-0,56)\times 1,90] = 1,09 \tag{54}$$

A Figura 9 mostra o resultado aplicado à árvore binomial. Os valores da opção sublinhados nesta figura são os valores favoráveis ao exercício da *put* americana estimada. Observa-se que há uma possibilidade da opção ser exercida antecipadamente.

Figura 9 – Preços de ações e opções em uma árvore de dois passos (*put* americana)



Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.5 A grega *delta*

Como já visto, o *delta* (Δ) de uma opção é a razão entre a mudança no preço da opção e a mudança no preço da sua ação-objeto, ou seja, é a quantidade de ações que se deve possuir para cada *call* vendida a descoberto ou para cada *put* adquirida, estruturando um portfólio caixa zero. E conforme Hull (2016), o *delta* pode ser positivo para uma *call*, que acompanha o preço da ação, ou negativo para uma *put*, que oscila em sentido contrário ao da ação.

Como exemplo, considera os dados do exemplo anterior, calcula-se os *delta* da opção em cada passo no tempo.

O Δ correspondente ao primeiro passo é:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} = \frac{0{,}50 - 1{,}90}{9{,}90 - 8{,}10} = -0{,}78 \qquad (55)$$

Se há um movimento positivo durante o segundo passo, o *delta* é estimado como segue:

$$\Delta_u = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_0u^2 - S_0ud} = \frac{0{,}00 - 1{,}09}{10{,}89 - 8{,}91} = -0{,}55 \qquad (56)$$

Ou, se há um movimento negativo durante o segundo passo, o *delta* é estimado como segue:

$$\Delta_d = \frac{f_{ud} - f_{dd}}{S_0ud - S_0d^2} = \frac{1{,}09 - 2{,}71}{8{,}91 - 7{,}29} = -1{,}00 \qquad (57)$$

Dessa forma, para manter um portfólio sem risco, é preciso ajustar as posições na ação ao longo do tempo. Durante o primeiro passo, o portfólio é formado pela compra de 78 ações para cada 100 *puts* adquiridas. A partir do segundo passo, se há um movimento positivo, o portfólio é formado pela compra de 55 ações para cada 100 *puts* adquiridas. Ou, se há um movimento negativo, ele é formado pela compra de 100 ações para cada 100 *puts* adquiridas.

Em resumo, pode-se montar um quadro da ação-objeto e suas opções pelos tipos de *delta* e suas estratégias de portfólio para uma análise mais direta, como mostra o Quadro 5, abaixo.

Pode-se exemplificar um caso de *delta* positivo a partir de uma opção de compra que, no dia 29/08/2016, está custando R$0,50 e o seu ativo-objeto R$12,87. No dia seguinte, 30/08/2016, a ação se valoriza para R$13,09 e a *call* a acompanha para R$0,63. Por fim, no dia 31/08/2016, a ação se desvaloriza para R$12,85 e a opção para R$0,54. Portanto, quando o *delta* é positivo, a valorização (ou desvalorização) do ativo-objeto e a da opção caminham na mesma direção. De forma distinta, quando o *delta* é negativo, a valorização (ou desvalorização) do ativo-objeto e a da opção caminham em direções opostas.

Quadro 5 – Análises de *delta* e de caixa zero

Ação/Opção / **Delta/Caixa Zero**	**ação-objeto**	***call***	***put***
***delta* positivo**	o preço sobe	o preço sobe	
	o preço desce	o preço desce	
caixa zero Δ(+)	posição comprada	posição vendida	
	posição vendida	posição comprada	
***delta* negativo**	o preço sobe		o preço desce
	o preço desce		o preço sobe
caixa zero Δ(–)	posição comprada		posição comprada
	posição vendida		posição vendida

Fonte: Elaborado pelo autor

Como exemplo de caixa zero para um *delta* negativo, pode-se resgatar o exemplo da página anterior. Neste caso, o investidor estrutura um portfólio caixa zero ao se posicionar comprado em ações e comprado em opções de venda numa determinada proporção, fazendo com que as valorizações (ou desvalorizações) se compensem.

3.2.6 Relação da volatilidade com *u* e *d*

Até agora, utilizou-se os parâmetros u, d e p para estruturar árvores binomiais simples com passos no tempo Δt. Especificava-se u e d para que p seja escolhido de modo que o retorno esperado seja zero.

No entanto, a partir de agora, deve-se escolher u e d para que correspondam à volatilidade, σ, uma vez que os cálculos mais sofisticados e os softwares de apoio se utilizam dessa premissa, a qual foi usada por Cox, Ross e Rubinstein em sua publicação. Deste modo, Hull (2016) mostra que:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{58}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{59}$$

Finalmente, considere como exemplo o histórico de cotações da ação Petrobras PN no período de 28/06/2016 a 16/09/2016, que apresentou uma volatilidade de 44% ao ano, conforme estimada na página 27. Considere também uma *put* europeia de 2 meses, e suponha que há dois passos no tempo de 1 mês. A taxa de juros livre de risco é de 14,03% ao ano (rendimento das aplicações indexadas à taxa de DI acumulado de agosto 2015 a julho de 2016). Logo, tendo σ = 0,44, Δt = 1/12 = 0,0833 e r = 0,1403, pode-se obter.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0,44\sqrt{0,0833}} = 1,14 \tag{60}$$

e

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-0,44\sqrt{0,0833}} = 0,88 \tag{61}$$

Logo, há um aumento percentual no preço da ação em 14% (1,14 – 1) e uma redução percentual de 12% (1 – 0,88). Substituindo na Equação (36), tem-se que:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0,1403 \times 0,0833} - 0,88}{1,14 - 0,88} = 0,51 \tag{62}$$

Portanto, a probabilidade do preço da ação ter um movimento positivo é de 51%.

3.2.7 Aumentando o número de passos

Os modelos binomiais vistos anteriormente são uma aproximação grosseira do preço de uma opção ao supor que o preço da ação se move em um ou dois passos durante a vida da opção. Na prática, de acordo com Hull (2016), o tempo até o vencimento da opção é dividido em, no mínimo, 30 passos no tempo. Portanto, à medida que esse número de passos aumenta, e Δt diminui, o modelo de Árvores Binomiais passa a se utilizar dos mesmos pressupostos que o modelo de Black-Scholes-Merton em relação comportamento do preço da ação, ou seja, o comportamento do modelo de Árvores Binomiais se aproxima do de Black-Scholes-Merton.

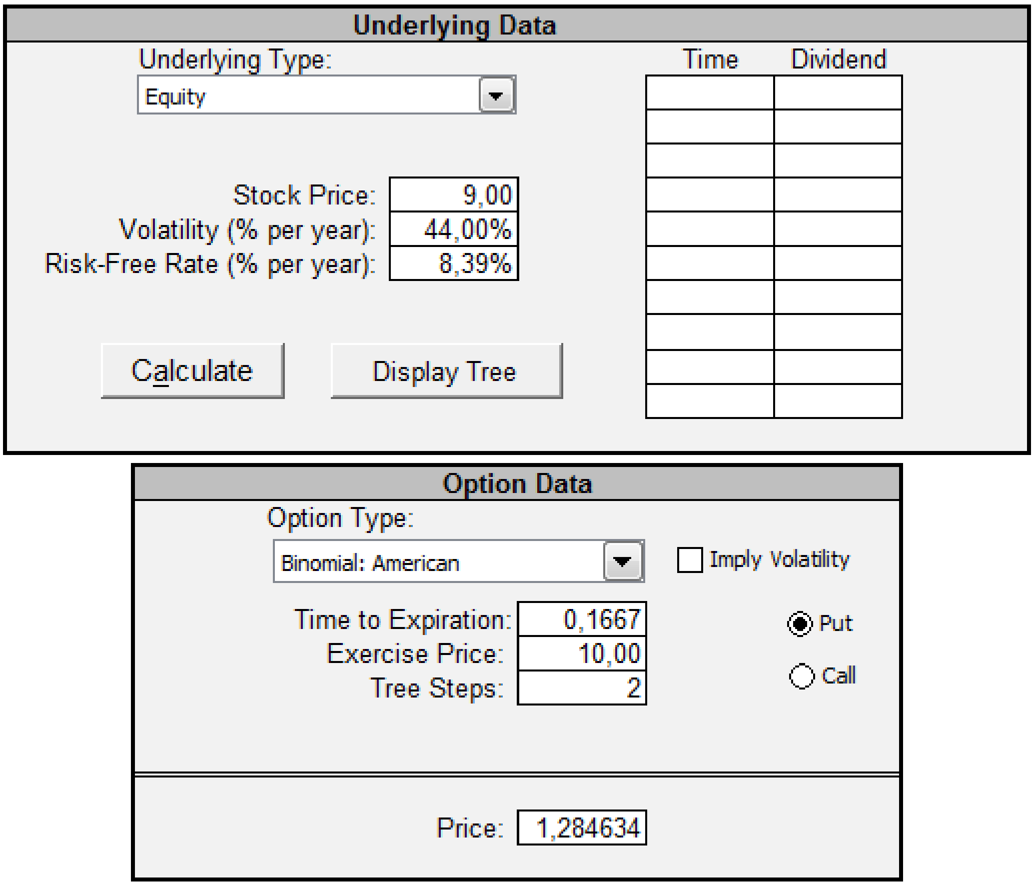
3.2.7.1 Simulação de previsão usando árvores binomiais

Nesta subseção, será utilizada a função macro denominada de DerivaGem, desenvolvida na plataforma Microsoft Excel, por A-J Finantial Systems (2010), utilizando a concepção de árvores binomiais, para estimar previsões de evolução de preços de opções. A função macro DerivaGem possibilita estabelecer previsões de preços de opções, através de um conjunto de especificações, por meio de *box choise*. Por exemplo, pode-se calcular o preço de uma opção de venda americana. Seleciona-se "*Equity*" no *box* "*Underlying Type*", e selecionando no *box* "*Option Type*", a opção "*Binomial: American*". Em seguida, insere-se os seguintes dados: o preço da ação, a volatilidade, a taxa de juros livre de risco, o tempo até o vencimento (em anos), o preço de exercício, o número de passos da árvore e, se houver, os dividendos em cada tempo, até o vencimento. Seleciona-se "*Put*" (tratando-se de uma operação com opção de venda) e clica-se em "*Calculate*". O preço da opção é mostrado na caixa "*Price*". Ao clicar no botão "*Display Tree*", vê-se a árvore desenhada indicando os preços da ação e da opção em cada nó e os valores dos parâmetros *u*, *d* e *p*. Os preços das opções em vermelho indicam os nós em que a opção é exercida.

No entanto, apesar de a ferramenta ser capaz de calcular o preço de uma opção usando 500 passos, a apresentação da árvore é mostrada com, no máximo, 10 passos. Com a macro DerivaGem, ainda é possível calcular o preço de uma opção europeia pelo modelo binomial e pelo de Black-Scholes-Merton.

Para ilustrar o uso da função macro DerivaGem na plataforma Excel, ilustra-se por meio da Figura 10 abaixo, o cálculo do preço de uma *put* americana, através do modelo binomial de dois passos, utilizando os dados do exemplo apresentado anteriormente, cujos dados e resultados encontram-se apresentados na página 37.

Figura 10 – DerivaGem e o cálculo do preço de uma *put* americana



Fonte: (DerivaGem, 2010)

Percebe-se na Figura 10, acima, que há uma mudança no resultado do preço da *put* americana com dois passos, de R$1,14 obtido no exemplo da página 37 para R$1,28 na simulação apresentada nesta figura. E, se aplicarmos o modelo a uma árvore de 500 passos, o preço da *put* americana passa para aproximadamente R$1,22.

4 SIMULAÇÃO DO PROCESSO

O capítulo está dividido da seguinte forma: na primeira seção, apresenta-se os dados que serão utilizados nos modelos e na estruturação dos portfólios caixa zero; na segunda seção, faz-se uma aplicação do modelo de Black-Scholes-Merton, em que são calculados os prêmios das opções e compara-os aos praticados no mercado; na terceira seção, faz-se uma aplicação do modelo de Árvores Binomiais seguindo os mesmos procedimentos anteriores; na quarta seção, faz-se uma análise comparativa entre os preços das opções dos modelos e os prêmios de mercado; e na quinta e última seção, faz-se a estruturação dos portfólios caixa zero, baseada nos valores de *delta* dos modelos.

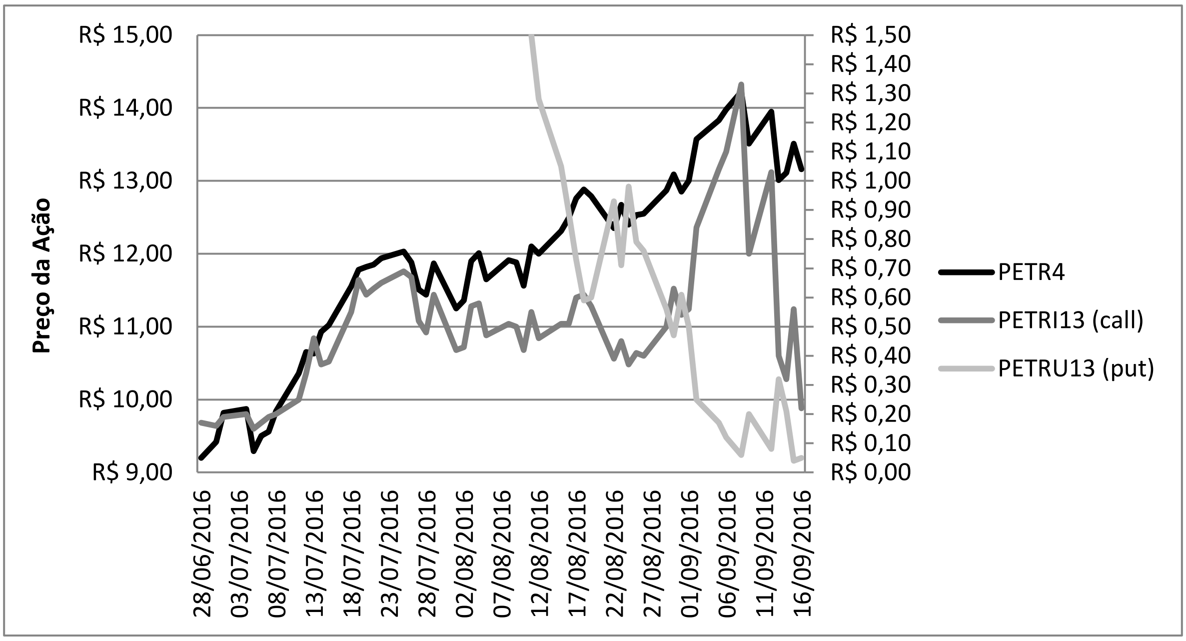
4.1 DADOS

Para uma aplicação dos modelos com base nas teorias desenvolvidas nos tópicos anteriores, serão precificadas as opções de compra (*calls*) e as opções de venda (*puts*) baseadas na ação preferencial da Petrobras (PETR4), cujo período de observação abrange de 28/06/2016 a 16/09/2016, sendo esta última data o dia do vencimento das opções da série de setembro. As opções desta série, para comparação com os modelos de precificação, são a *call* PETRI13 e a *put* PETRU13, cujos preços de exercício de ambas são R$13,00. A data de início das negociações da *call* é 28/06/2016, no entanto a *put* só passa a ser negociada a partir do dia 09/08/2016.

As seguintes informações são comuns a todos os modelos de precificação de opções e portfólios utilizados neste trabalho. Serão precificados dois tipos de opções baseados na ação preferencial da Petrobras (PETR4), utilizada como ativo-objeto. O período de precificação consiste em 57 dias úteis para as opções de compra e 28 para as de venda. A data de vencimento das opções é 16/09/2016, com início das negociações em 28/06/2016 para a *call* e 09/08/2016 para a *put*. Para fins de comparação, considera-se as opções das séries de setembro com preço de exercício de R$13,00.

A fim de evidenciar a evolução dos preços da ação PETR4 em conjunto com as opções de compra PETRI13 e de venda PETRU13 no período de análise, constrói-se o gráfico da Figura 11.

Figura 11 – Evolução dos preços: PETR4, PETRI13 e PETRU13 (28/06/2016 a 16/09/2016)



Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com o gráfico da Figura 11, percebe-se uma evolução positiva na ação PETR4. Como o preço de uma *call* é diretamente proporcional ao do seu ativo-objeto, observa-se um acompanhamento da PETRI13 em relação à ação preferencial da Petrobras. Por outro lado, o preço de uma *put* é inversamente proporcional e o prêmio da PETRU13 evolui negativamente.

Para executar as estimativas pelas técnicas de Black-Scholes-Merton e de Árvores Binomiais, é necessário obter a série de retornos da ação PETR4 no período de 28/06/2016 a 16/09/2016. Com estes dados, utiliza-se a volatilidade histórica a partir do logaritmo natural destes retornos reais, pois ela tende a apresentar uma distribuição normal. E, em seguida, aplica-se conforme a Equação (7) relativa à teoria de Black-Scholes-Merton. Para tanto, calcula-se o desvio padrão incondicional da amostra (s) no período e, em seguida, multiplica-se à raiz quadrada do número de dias de negociação no ano (τ) para calcular a volatilidade.

$$\sigma = s\sqrt{\tau} = 0{,}0277\sqrt{252} = 0{,}44 \tag{63}$$

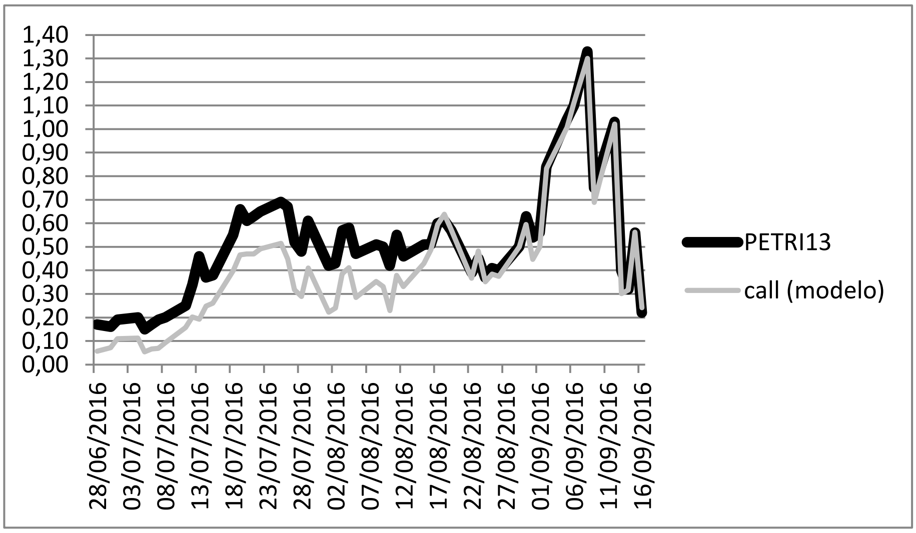
Portanto, a volatilidade apresentada pela ação preferencial da Petrobras no período é de 44% ao ano.

A taxa de juros livre de risco é fixada em 14,03% ao ano no período em análise (28/06/2016 a 16/09/2016), referente ao rendimento das aplicações indexadas à taxa de DI acumulado de agosto 2015 a julho de 2016. Ela será utilizada como taxa de desconto em todos os modelos de precificação de opções e portfólios aplicados neste trabalho.

4.2 MODELO DE BLACK-SCHOLES-MERTON

As entradas (*inputs*) do modelo de Black-Scholes-Merton se constituem dos dados descritos acima que, aplicados ao modelo através das Equações (5) e (6) de probabilidades e substituídos na Equação (3) para calcular o preço da *call* em cada dia de negociação, utilizando uma planilha de Excel. Os resultados obtidos encontram-se destacados no gráfico da Figura 12, abaixo.

Figura 12 – PETRI13 e a *call* do modelo de Black-Scholes-Merton

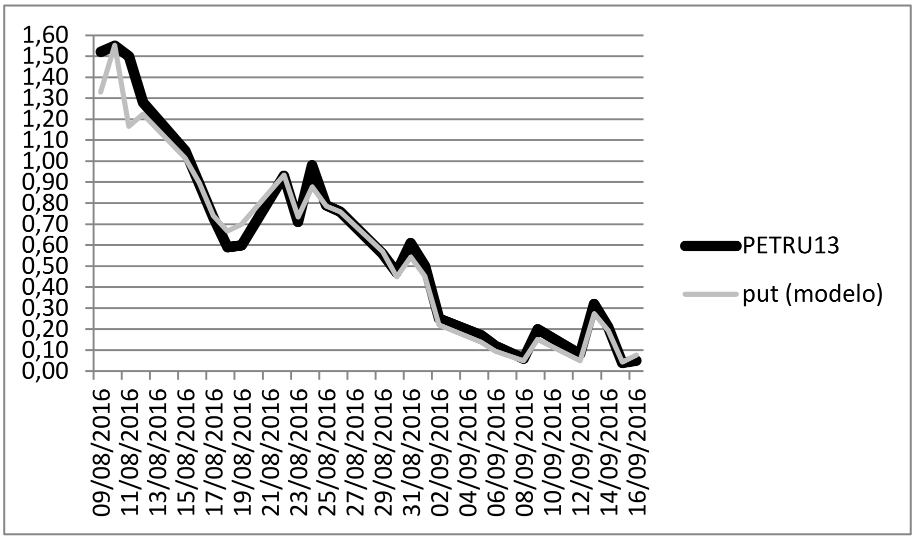


Fonte: Elaborado pelo autor

O resultado das estimativas mostra, na Figura 12, que o modelo de Black-Scholes-Merton descreve bem a trajetória do preço da *call* PETRI13 ao longo do período de negociação. Havendo uma pequena subestimação dos prêmios na primeira metade da vida da opção, onde a *call* se encontra fora do dinheiro; isto é, o preço de mercado da ação está abaixo do preço de exercício da opção.

Da mesma forma, as *inputs* do modelo de Black-Scholes-Merton aplicadas através das Equações (5) e (6) e substituídas na Equação (4), permitiram calcular o preço da *put* em cada dia de negociação, utilizando uma planilha de Excel, cujos resultados encontram-se apresentados no gráfico da Figura 13, abaixo.

Figura 13 – PETRU13 e a *put* do modelo de Black-Scholes-Merton



Fonte: Elaborado pelo autor

Conforme se observa na Figura 13, os resultados das estimativas do modelo de Black-Scholes-Merton também descrevem bem a trajetória do preço da *put* PETRIU3, ao longo do período de negociação.

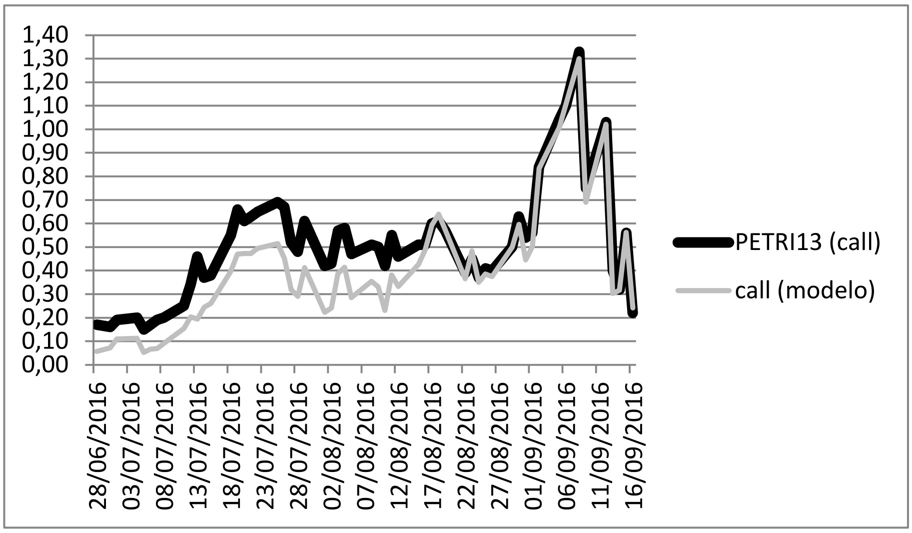
4.3 MODELO DE ÁRVORES BINOMIAIS

As entradas do modelo de Árvores Binomiais, aplicadas na função macro DerivaGem para cada dia de negociação, resultam nos gráficos de preço das Figuras 14 e 15.

A função macro estima o prêmio das opções conforme a técnica de Árvores Binomiais, partindo das Equações (58) e (59) que tratam dos níveis superior e inferior de cada nó. Estes resultados são substituídos na Equação (36) para calcular a probabilidade do preço da ação ter um movimento positivo. Em seguida, utiliza-se a Equação (35) para calcular o preço da opção em cada nó, estimando o prêmio em cada dia de negociação.

Nesta simulação, a *call* do modelo de Árvores Binomiais é simulada para o tipo de opção americana, uma vez que traz maior proximidade ao mercado brasileiro, pelo fato da opção PETRI13 ser uma opção americana. Já a *put*, assim como as opções estimadas pelo modelo de Black-Scholes-Merton, são calculadas pelo tipo europeia, porque não existe opção de venda americana sobre uma ação no mercado brasileiro.

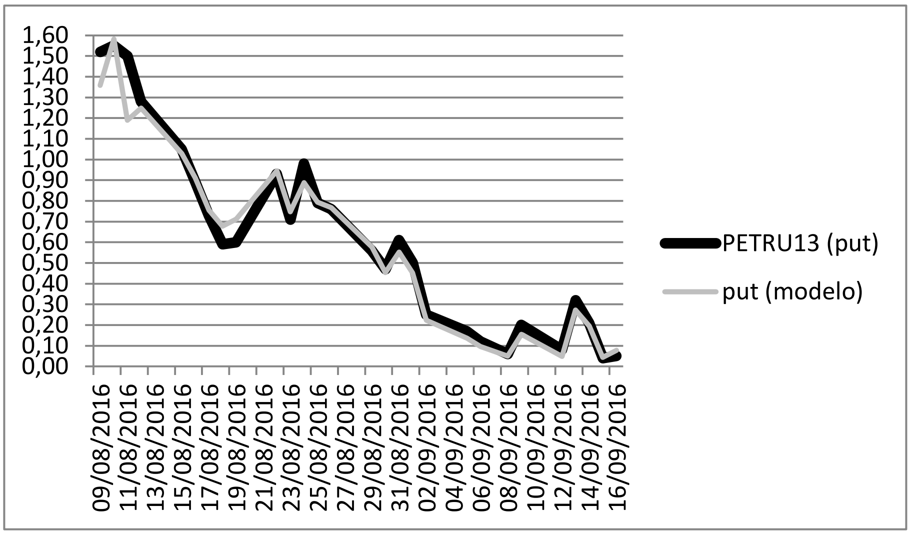
Figura 14 – PETRI13 e a *call* do modelo de Árvores Binomiais



Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados das estimativas, tanto para a *call* como para a *put*, conforme se observa nos gráficos de preço das Figuras 14 e 15, mostram que o modelo de Árvores Binomiais, de forma semelhante aos resultados obtidos pelo modelo de Black-Scholes-Merton, analisado anteriormente, descrevem bem a trajetória do preço da *call* PETRI13 e da *put* PETRU13 ao longo do período de negociação. Havendo uma pequena subestimação dos prêmios na primeira metade da vida da opção de compra, onde a *call* se encontra fora do dinheiro.

Figura 15 – PETRU13 e a *put* do modelo de Árvores Binomiais

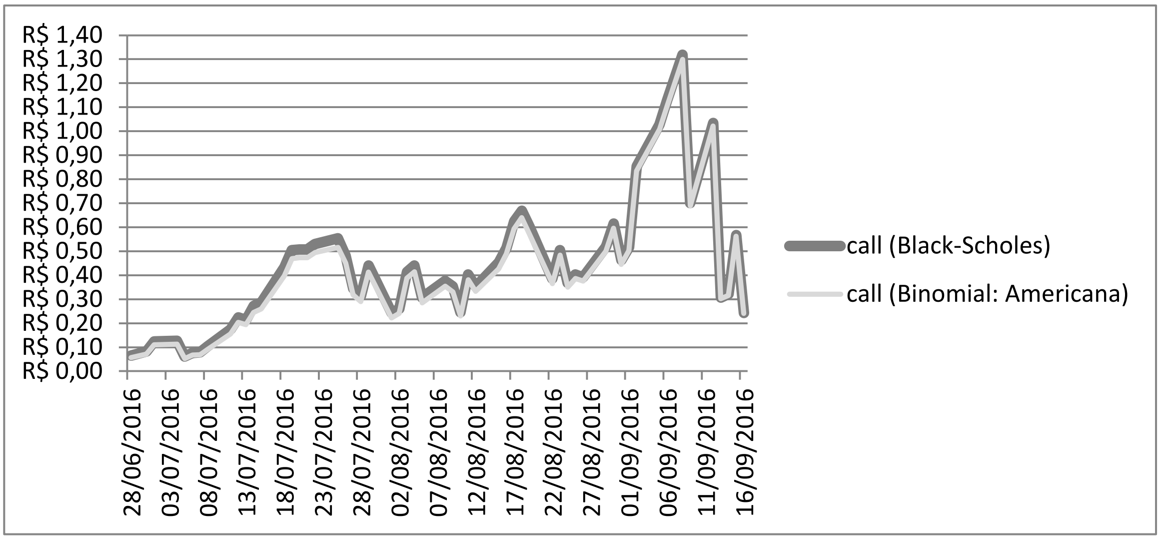


Fonte: Elaborado pelo autor

4.4 ANÁLISE COMPARATIVA

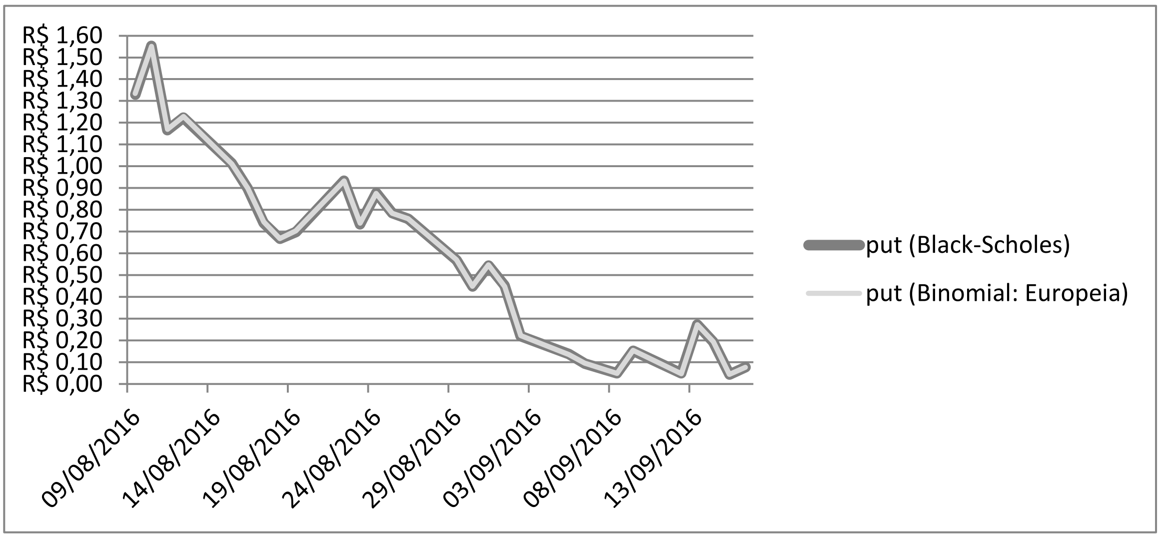
Com os resultados apresentados nas Figuras 11 e 12, respectivamente, referentes às opções de compra e de venda dos modelos de Black-Scholes-Merton, e com aqueles apresentados nas Figuras 13 e 14, respectivamente, referentes às opções do modelo de Árvores Binomiais, pode-se sobrepor estes gráficos para se ter uma análise comparativa visual. As Figuras 16 e 17 apresentam essa sobreposição. Com base nestas figuras, percebe-se que há uma relação muito próxima entre os prêmios estimados pelos dois modelos.

Figura 16 – Opções de compra dos modelos (28/06/2016 a 16/09/2016)



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 17 – Opções de venda dos modelos (09/08/2016 a 16/09/2016)



Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 1 – Preços das opções de mercado e dos modelos em R$

Data	PETRI13	*call* (Black-Scholes)	*call* (Binomial: Americana)	PETRU13	*put* (Black-Scholes)	*put* (Binomial: Europeia)
16/09/2016	0,22	0,2434	0,2413	0,05	0,0770	0,0770
15/09/2016	0,56	0,5670	0,5619	0,04	0,0433	0,0441
14/09/2016	0,32	0,3213	0,3162	0,21	0,1931	0,1953
13/09/2016	0,40	0,3073	0,3024	0,32	0,2738	0,2720
12/09/2016	1,03	1,0350	1,0218	0,08	0,0502	0,0482
09/09/2016	0,75	0,7013	0,6894	0,20	0,1524	0,1548
08/09/2016	1,33	1,3188	1,2995	0,06	0,0498	0,0495
06/09/2016	1,10	1,1290	1,1076	0,12	0,0945	0,0962
05/09/2016	1,04	1,0282	1,0080	0,17	0,1383	0,1357
02/09/2016	0,84	0,8539	0,8344	0,25	0,2199	0,2219
01/09/2016	0,56	0,5164	0,5018	0,50	0,4522	0,4479
31/08/2016	0,54	0,4626	0,4448	0,61	0,5444	0,5476
30/08/2016	0,63	0,6157	0,5960	0,47	0,4488	0,4496
29/08/2016	0,50	0,5190	0,4993	0,56	0,5690	0,5714
26/08/2016	0,40	0,3910	0,3753	0,76	0,7594	0,7588
25/08/2016	0,41	0,4026	0,3858	0,79	0,7856	0,7847
24/08/2016	0,37	0,3688	0,3498	0,98	0,8779	0,8759
23/08/2016	0,45	0,5045	0,4839	0,71	0,7343	0,7393
22/08/2016	0,39	0,3853	0,3651	0,93	0,9340	0,9328
19/08/2016	0,57	0,6021	0,5723	0,60	0,6987	0,7032
18/08/2016	0,61	0,6680	0,6393	0,59	0,6676	0,6689
17/08/2016	0,60	0,6243	0,5928	0,73	0,7399	0,7450
16/08/2016	0,51	0,5135	0,4893	0,89	0,8977	0,8993
15/08/2016	0,51	0,4533	0,4257	1,05	1,0149	1,0113
12/08/2016	0,46	0,3525	0,3328	1,28	1,2234	1,2280
11/08/2016	0,55	0,4026	0,3808	1,50	1,1665	1,1702
10/08/2016	0,42	0,2460	0,2306	1,55	1,5526	1,5513
09/08/2016	0,50	0,3535	0,3308	1,52	1,3300	1,3341
08/08/2016	0,51	0,3770	0,3539	-	-	-
05/08/2016	0,47	0,3065	0,2855	-	-	-
04/08/2016	0,58	0,4398	0,4139	-	-	-
03/08/2016	0,57	0,4131	0,3876	-	-	-
02/08/2016	0,43	0,2597	0,2409	-	-	-
01/08/2016	0,42	0,2422	0,2221	-	-	-
29/07/2016	0,61	0,4407	0,4126	-	-	-
28/07/2016	0,48	0,3130	0,2908	-	-	-
27/07/2016	0,52	0,3445	0,3186	-	-	-
26/07/2016	0,67	0,4819	0,4505	-	-	-
25/07/2016	0,69	0,5532	0,5152	-	-	-
22/07/2016	0,65	0,5298	0,4942	-	-	-
21/07/2016	0,63	0,5071	0,4729	-	-	-
20/07/2016	0,61	0,5077	0,4729	-	-	-
19/07/2016	0,66	0,5044	0,4692	-	-	-
18/07/2016	0,55	0,4335	0,3969	-	-	-
15/07/2016	0,38	0,2864	0,2601	-	-	-
14/07/2016	0,37	0,2724	0,2443	-	-	-
13/07/2016	0,46	0,2129	0,1936	-	-	-
12/07/2016	0,34	0,2243	0,2038	-	-	-
11/07/2016	0,25	0,1750	0,1550	-	-	-
08/07/2016	0,20	0,1041	0,0911	-	-	-
07/07/2016	0,19	0,0781	0,0686	-	-	-
06/07/2016	0,17	0,0760	0,0668	-	-	-
05/07/2016	0,15	0,0613	0,0529	-	-	-
04/07/2016	0,20	0,1263	0,1122	-	-	-
01/07/2016	0,19	0,1242	0,1101	-	-	-
30/06/2016	0,16	0,0824	0,0719	-	-	-
28/06/2016	0,17	0,0659	0,0569	-	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor

Estruturou-se a Tabela 1 com a finalidade de analisar detalhadamente, de forma comparativa, os valores encontrados a cada dia de negociação com o modelos de Black-Scholes-Merton, com aqueles do modelo de Árvores Binomiais, com os valores reais ocorridos no mercado. Assim, esta tabela apresenta as evoluções dos preços de todas as opções; *calls* e *puts* tanto de mercado como as estimadas pelas equações de Black-Scholes-Merton e de Árvores Binomiais.

Pela Tabela 1, observa-se a subestimação das *calls* dos modelos até o dia 12/08/2016, aproximadamente metade da vida da opção PETRI13. Neste período em que a opção está mais fora do dinheiro, a variação entre os prêmios de mercado e os estimados pelo modelo de Black-Scholes-Merton é de 34% em média, enquanto pelo modelo de Árvores Binomiais é de 40% em média. E, a partir do dia 15/08/2016 até o dia do vencimento das opções, 16/09/2016, a variação do primeiro modelo é de 5% em média, enquanto a do segundo modelo é de 6% em média. Já quanto à variação de um modelo para outro, os prêmios estimados variam 6% em média.

Por outro lado, a Tabela 1 também apresenta os dados das *puts* num período mais reduzido em relação aos das *calls*, uma vez que as *puts* passaram a ser negociadas somente no dia 09/08/2016. Neste período, a variação entre os prêmios de mercado e os estimados é de 12% em média para ambos os modelos. E a variação dos prêmios estimados de um modelo para outro é de menos de 1% em média.

4.5 *DELTA* E A ESTRUTURAÇÃO DE PORTFÓLIO CAIXA ZERO

As *inputs* do cálculo, para a estruturação do portfólio caixa zero, fornecem os preços das ações e os prêmios das opções obtidos pelo software MATLAB[8]. Ele estima os preços de opções americanas a partir do modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein (1979), introduzindo as seguintes entradas: preço da ação, preço de exercício da opção, taxa de juros livre de risco, tempo até o vencimento da opção (em anos), incremento de tempo para estipular o número de passos, volatilidade da ação, especificar se é *call* ou *put* e dividendos se houverem.

Com os dados obtidos pelo modelo com a função "*binprice*", seleciona-se os nós mais próximos dos valores observados no mercado em cada passo e, por meio da Equação (19),

[8] MATLAB é um software interativo de alta performance direcionado para cálculo numérico. Ele integra funções de análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos. Para simular o modelo de Árvores Binomiais, utilizou-se neste trabalho a função "*binprice*", cujo papel é estimar o preço de opções americanas utilizando o modelo binomial.

calculam-se os *deltas* para cada dia de negociação. Os resultados do *delta* da *call* do modelo e do portfólio estão apresentados na Tabela 2, abaixo.

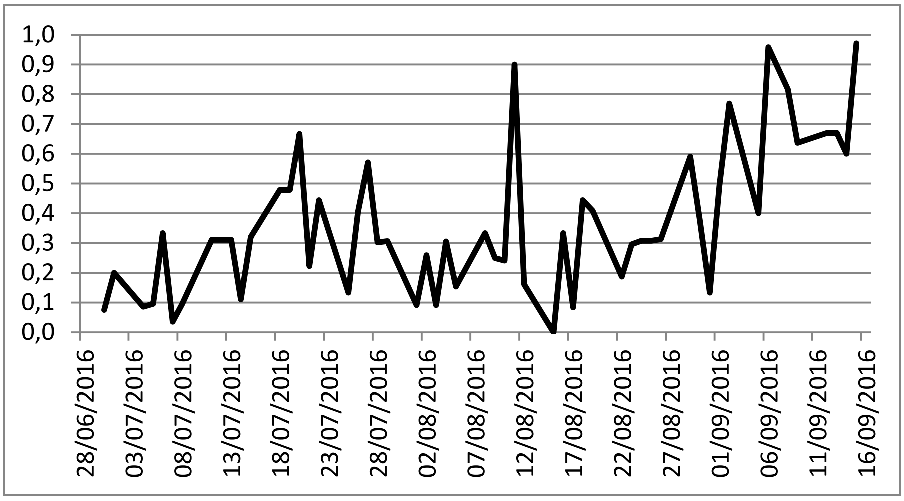
Tabela 2 – Evolução do *delta* da *call* do modelo e resultado do portfólio

Data	*Delta* (*call*)	Portfólio (R$)	Data	*Delta* (*call*)	Portfólio (R$)
15/09/2016	0,97	1829,53	05/08/2016	0,15	95,93
14/09/2016	0,60	-575,06	04/08/2016	0,31	31,82
13/09/2016	0,67	1329,66	03/08/2016	0,09	270,48
12/09/2016	0,67	-497,99	02/08/2016	0,26	-220,38
09/09/2016	0,64	1329,64	01/08/2016	0,09	461,38
08/09/2016	0,82	-553,51	29/07/2016	0,31	-402,13
06/09/2016	0,96	1572,33	28/07/2016	0,30	697,23
05/09/2016	0,40	-354,23	27/07/2016	0,57	-402,03
02/09/2016	0,77	789,60	26/07/2016	0,41	1006,10
01/09/2016	0,49	157,72	25/07/2016	0,13	-597,90
31/08/2016	0,13	423,28	22/07/2016	0,44	685,29
30/08/2016	0,38	-310,23	21/07/2016	0,22	-224,93
29/08/2016	0,59	731,56	20/07/2016	0,67	422,63
26/08/2016	0,31	-22,23	19/07/2016	0,48	296,49
25/08/2016	0,31	371,28	18/07/2016	0,48	191,17
24/08/2016	0,31	-36,38	15/07/2016	0,32	296,68
23/08/2016	0,30	371,38	14/07/2016	0,11	17,96
22/08/2016	0,19	-48,95	13/07/2016	0,31	65,27
19/08/2016	0,41	232,25	12/07/2016	0,31	218,26
18/08/2016	0,44	222,35	11/07/2016	0,31	77,89
17/08/2016	0,08	283,37	08/07/2016	0,10	218,27
16/08/2016	0,33	-241,29	07/07/2016	0,04	-149,71
15/08/2016	0,00	602,46	06/07/2016	0,33	159,39
12/08/2016	0,16	-653,46	05/07/2016	0,10	137,11
11/08/2016	0,90	799,46	04/07/2016	0,09	-68,50
10/08/2016	0,24	234,54	01/07/2016	0,20	127,46
09/08/2016	0,25	0,90	30/06/2016	0,07	49,94
08/08/2016	0,33	246,10	28/06/2016	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, para estruturar um portfólio caixa zero ao longo do tempo de análise, no primeiro dia de negociação (30/06/2016), o portfólio é formado por uma proporção aproximada da compra de 7 ações para cada 100 *calls* vendidas. No dia seguinte de negociação (01/07/2016), por conta da variação de preços, a proporção passa a aproximadamente 20 ações compradas para cada 100 *calls* vendidas. A Figura 18, abaixo, mostra a evolução do *delta* da *call* do modelo estimada no período de 28/06/2016 a 15/09/2016.

Figura 18 – Evolução do *delta* da *call* do modelo (28/06/2016 a 16/09/2016)

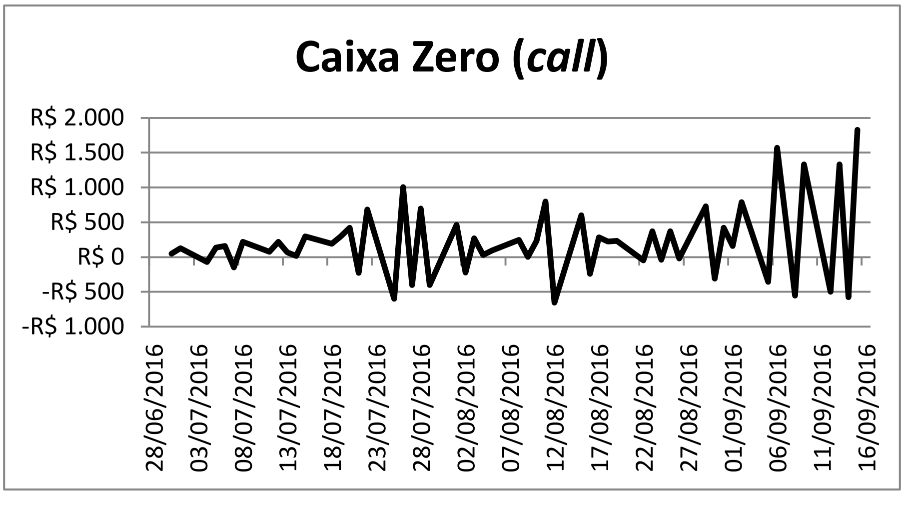


Fonte: Elaborado pelo autor

O raciocínio segue até o dia anterior ao vencimento da opção (15/09/2016), onde o portfólio é formado por uma proporção da compra de 97 ações para cada 100 *calls* vendidas.

A estruturação do portfólio é dada pela proporção de ações compradas para cada 100 *calls* vendidas em cada dia de negociação, subtraindo o valor do portfólio obtido no dia anterior. O resultado está apresentado na figura 19, abaixo:

Figura 19 – Resultado do portfólio da *call* do modelo (28/06/2016 a 16/09/2016)



Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, percebe-se que o resultado da estruturação diária do portfólio oscila em torno de um eixo de R$200,00, estimado pela média dos resultados diários.

Já os resultados do *delta* da *put* do modelo e do portfólio estão apresentados na Tabela 3, abaixo.

Tabela 3 – Evolução do *delta* da *put* do modelo e o resultado do portfólio

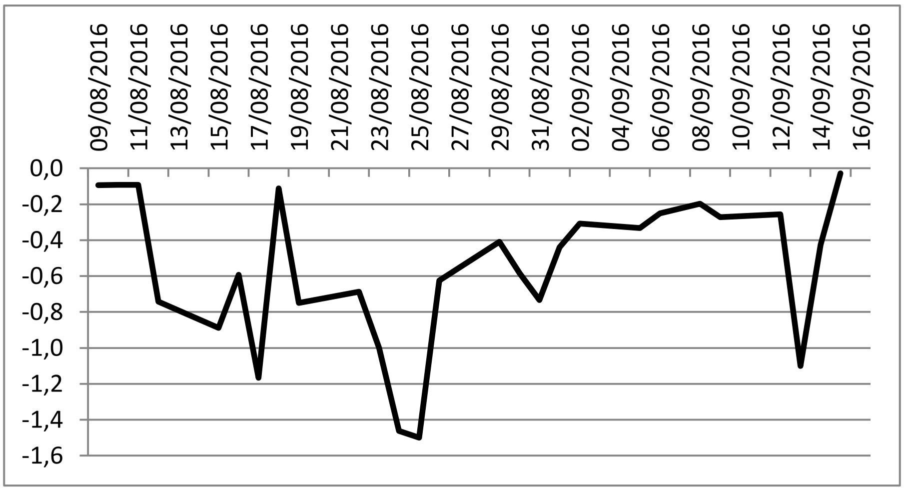
Data	***Delta* (*put*)**	**Portfólio (R$)**
15/09/2016	-0,03	2714,73
14/09/2016	-0,43	-2683,71
13/09/2016	-1,10	3255,33
12/09/2016	-0,26	-1792,23
09/09/2016	-0,27	2148,98
08/09/2016	-0,20	-1764,21
06/09/2016	-0,25	2040,39
05/09/2016	-0,33	-1678,89
02/09/2016	-0,31	2152,28
01/09/2016	-0,44	-1720,18
31/08/2016	-0,73	2329,18
30/08/2016	-0,58	-1330,13
29/08/2016	-0,41	2136,35
26/08/2016	-0,63	-1565,55
25/08/2016	-1,50	2419,65
24/08/2016	-1,46	-473,68
23/08/2016	-1,00	2382,08
22/08/2016	-0,69	-1044,08
19/08/2016	-0,75	1976,88
18/08/2016	-0,11	-957,63
17/08/2016	-1,17	1158,31
16/08/2016	-0,59	394,85
15/08/2016	-0,89	431,06
12/08/2016	-0,74	757,22
11/08/2016	-0,09	258,78
10/08/2016	-0,09	0,12
09/08/2016	-0,09	258,92

Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, para estruturar um portfólio caixa zero ao longo do tempo de análise, no primeiro dia de negociação da *put* (11/08/2016), o portfólio é composto por uma proporção aproximada da compra de 9 ações para cada 100 *puts* compradas. No dia seguinte de negociação (10/08/2016), por conta da variação de preços, a proporção passa a aproximadamente 74 ações compradas para cada 100 *puts* também compradas. A Figura 20, abaixo, mostra a evolução do *delta* da *put* do modelo estimada no período de 09/08/2016 a 15/09/2016.

O raciocínio segue até o dia anterior ao vencimento da opção (15/09/2016), onde o portfólio é formado por uma proporção da compra de 3 ações para cada 100 *puts* compradas.

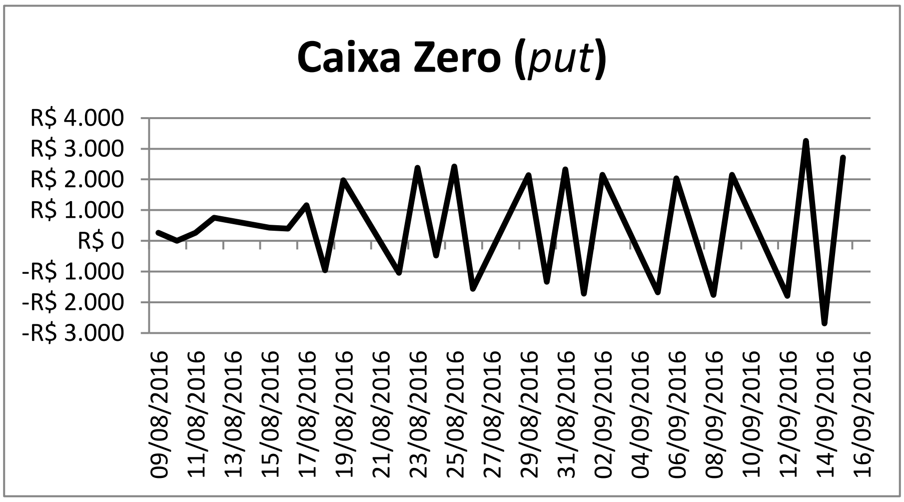
Figura 20 – Evolução do *delta* da *put* do modelo (09/08/2016 a 15/09/2016)



Fonte: Elaborado pelo autor

A estruturação do portfólio é dada pela proporção de ações compradas para cada 100 *puts* compradas em cada dia de negociação, subtraindo o valor do portfólio obtido no dia anterior. O resultado está apresentado na figura 21, abaixo:

Figura 21 – Resultado do portfólio da *put* do modelo (09/08/2016 a 15/09/2016)



Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, percebe-se que o resultado da estruturação diária do portfólio oscila em torno de um eixo de R$400,00, estimado pela média dos resultados diários.

5 CONCLUSÃO

Em virtude de compreender e simplificar uma das estratégias mais importantes do mercado financeiro, este trabalho buscou contribuir, baseado em situações vivenciadas diariamente por profissionais da área, como o investidor pode proteger seus investimentos ao estruturar um portfólio caixa zero composto, numa determinada proporção, por ações – como ativo-objeto – e opções de ações – como derivativo compensatório. Os modelos de precificação de opções de Black-Scholes-Merton e de Árvores Binomiais vêm em busca de contribuir para, além de fins comparativos entre si e os prêmios observados no mercado, estimar um preço justo para as opções e representar os possíveis caminhos seguidos pelo preço de uma ação durante a vida de uma opção, respectivamente.

As entradas do cálculo, para a estruturação do portfólio caixa zero, fornecem os possíveis preços das ações e prêmios das opções obtidos pela função "*binprice*" do software MATLAB. Ela estimou os preços de opções americanas, a partir do modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein (1979), ao introduzir o preço da ação, o preço de exercício da opção, o rendimento das aplicações indexadas à taxa de DI acumulado de 12 meses como taxa de juros livre de risco, o tempo até o vencimento da opção (em anos), o incremento de tempo para estipular o número de passos, a volatilidade da ação e a especificação se é *call* ou *put*. Com os dados obtidos pelo modelo, selecionou-se os nós mais próximos aos valores de mercado em cada passo para estimar os *deltas* em cada dia de negociação.

Os resultados dos portfólios caixa zero, tanto da *call* como da *put*, mostraram-se coerentes à teoria da composição de portfólios caixa zero. No caso da *call*, como o *delta* é positivo e o prêmio da opção acompanha o preço da ação no mesmo sentido, a posição no ativo-objeto deve ser contrária à posição na opção, de maneira a compensar as possíveis perdas do investidor. Dessa forma, conforme estimado pelo modelo, no dia 16/08/2016, por exemplo, o portfólio é composto por uma proporção de 33 ações compradas para cada 100 *calls* vendidas. Já no dia seguinte, 17/08/2016, a proporção passa para 8 ações compradas para cada 100 *calls* vendidas. Assim, segue a evolução do portfólio de acordo com a expectativa futura dia após dia.

Quanto ao caso da *put*, como o *delta* é negativo e o prêmio da opção caminha em sentido contrário ao da ação, a posição no ativo-objeto deve ser a mesma na opção, de maneira também a compensar as possíveis perdas do investidor. Dessa forma, conforme estimado pelo modelo, no dia 16/08/2016, por exemplo, o portfólio é composto por uma proporção de 59 ações compradas para cada 100 *puts* também compradas. Já no dia seguinte, 17/08/2016, a proporção passa para 116 ações compradas para cada 100 *puts* também compradas. Assim, segue a evolução do portfólio de acordo com a expectativa futura dia após dia.

Com isso, os objetivos deste trabalho foram concretizados. Os principais elementos do mercado de opções de ações foram descritos detalhadamente; desde o seu surgimento, passando pelas características do setor, até a sua operacionalização no mercado de hoje; e seguindo com algumas das principais estratégias deste mercado, as operações que combinam uma opção com seu ativo-objeto. No que se refere aos modelos de precificação de opções, tanto o modelo de Black-Scholes-Merton como o de Árvores Binomiais, foram apresentados de forma detalhada e exemplificados por meio de suposições e situações reais de mercado para maior clareza do leitor. E, finalmente, a simulação da estruturação dos portfólios caixa zero, partindo das técnicas dos modelos e do apoio do software MATLAB, foi realizada com êxito; sendo fundamental ao fornecer as informações e os procedimentos necessários aos investidores no que se refere à diversificação e proteção de seus investimentos.

Este trabalho, portanto, teve a importância de aproximar o contato com o mercado de opções, essencial para gestão de finanças corporativas e gestão de portfólios no mercado financeiro de hoje, além de experimentar a aplicação de modelos de autores renomados a situações vivenciadas diariamente por profissionais do ramo. Dessa forma, seria interessante o aprofundamento no tema em busca de modelos que descrevem com maior precisão e agilidade o comportamento das opções e estratégias operacionais alternativas que auxiliem o pequeno investidor a proteger seus investimentos no mercado.

REFERÊNCIAS

ADVFN. **Educacional de Opções**: tudo sobre este derivativo. Disponível em: <http://br.advfn.com/educacional/opcoes/>. Acesso em: maio de 2016.

ARAUZ, Walter Fernando da Silva. **Proposta de Método para Desenvolvimento de Simulação de Estratégia de Negociação de Opções que Combina Operações Estruturadas e o Modelo de Black & Scholes**. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Econômicas) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

ASSAF NETO, Alexandre. **Mercado Financeiro**. 13. Ed. 396 p. São Paulo: Atlas, 2015.

BM&F BOVESPA. **Opções sobre Ações**. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/produtos/listados-a-vista-e-derivativos/renda-variavel/opcoes-sobre-acoes.htm>. Acesso em: abril de 2016.

COX, J.; ROSS, S; RUBINSTEIN, M. **Option Pricing**: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics. Vol. 7. Setembro de 1979. pp. 229–263.

HULL, John. **Opções, Futuros e Outros Derivativos**. 9. Ed. 968 p. Porto Alegre: Bookman, 2016.

MARCONI, Marina A.; LAKATOS Eva M. **Metodologia Científica**. 6. Ed. 314 p. São Paulo: Atlas, 2011.

PIAZZA, Marcelo C. **Ganhe Mais Investindo em Opções**. 1. Ed. 176 p. São Paulo: Saraiva, 2010.

SARTOR, Bruno Resmini. **Estratégias no Mercado de Derivativos**: Foco no Mercado de Opções de Ações. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciências Econômicas) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

UOL ECONOMIA. **Cotações**: Bolsa de Valores. Disponível em: <http://economia.uol.com.br/cotacoes/bolsas/>. Acesso em: setembro de 2016.