

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

GABRIELA ULLMANN ZIGOSKI

PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheira Civil.

Orientador: Ivo Padaratz, Phd.

Florianópolis

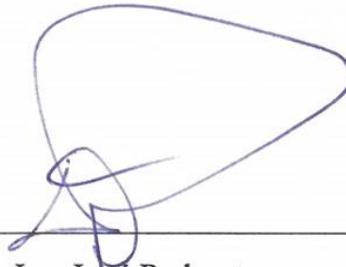
2016

GABRIELA ULLMANN ZIGOSKI

PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado adequado para a obtenção de Título de Engenheira Civil e aprovado em sua forma final pela comissão examinadora e pelo Curso de Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina

Banca examinadora:



Prof. Dr. Ivo José Padaratz

Orientador

Departamento de Engenharia Civil, UFSC

Prof. Dr. Jano D'Araujo Coelho

Departamento de Engenharia Civil, UFSC

Prof. Wellison J. Santana Gomes

Departamento de Engenharia Civil, UFSC

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	11
1.1	Justificativa.....	11
1.2	Objetivos.....	12
1.1.1	Objetivo Geral.....	12
1.1.2	Objetivos Específicos.....	12
1.3	Metodologia.....	12
2.	REVISÃO.....	13
2.1	Punção.....	13
2.2	Mecanismos de ruptura.....	13
2.3	Fatores que influenciam a resistência à punção.....	17
2.3.1	Espessura da laje.....	17
2.3.2	Dimensões e formato do pilar.....	18
2.3.3	Armadura de punção.....	18
2.3.4	Resistência do concreto	19
2.3.5	Taxa de armadura de flexão.....	19
2.3.6	Efeito escala.....	20
2.3.7	Armadura contra colapso progressivo.....	20
2.3.8	Aberturas em lajes e rebaixos para instalações	19
2.4	Soluções construtivas.....	22
2.4.1	Tipos de armaduras transversais.....	22
2.4.1.1	Estribos verticais.....	24
2.4.1.2	Armaduras especiais tipo conectores.....	26
2.5	Modelos de cálculo.....	29
2.5.1	Modelos mecânicos.....	29
2.5.2	Método da superfície de contorno.....	29
2.5.3	Método de bielas e tirantes.....	30
2.6	Critérios da Norma Brasileira NBR 6118:2014.....	31
2.6.1	Roteiro de verificação da punção de acordo com os critérios da NBR 6118:2014.....	32
2.6.1.1	Cálculo das tensões resistente	32

2.6.1.1.1	Tensão resistente na superfície crítica localizada no contorno crítico C.....	32
2.6.1.1.2	Tensão resistente na superfície crítica C' em lajes armadas transversalmente.....	33
2.6.1.2	Calculo das tensões resistente	33
2.6.1.2.1	Pilar de centro com momento nas duas direções.....	34
2.6.1.2.2	Pilar de borda com momento paralelo a borda livre.....	36
2.6.1.2.2	Pilar de canto.....	41
3.	ESTUDO DE CASO.....	46
3.1	Dados fornecidos.....	46
3.1.1	Planta de forma da laje.....	46
3.1.2	Reações dos pilares na laje.....	48
3.1.3	Detalhamento da armadura da laje.....	48
3.1.4	Momentos transferidos aos pilares.....	49
3.1.5	Detalhes de projeto.....	51
3.2	Verificação da punção.....	52
3.2.1	Pilar de centro P28.....	52
3.2.1.1	Tensão resistente e solicitante no contorno C (face do pilar).....	52
3.2.1.2	Tensão resistente e solicitante no contorno C'(a 2d da face do pilar) sem considerar armadura de punção.....	53
3.2.1.3	Tensão resistente e solicitante no contorno C'(a 2d da face do pilar) considerando armadura de punção.....	55
3.2.1.4	Tensão resistente e solicitante no contorno C''(a 2d da região armada).....	57
3.2.1.5	Verificação	59
3.2.2	Pilar de borda P43.....	60
3.2.2.1	Tensão resistente e solicitante no contorno C (face do pilar).....	60
3.2.2.2	Tensão resistente e solicitante no contorno C'(a 2d da face do pilar) sem considerar armadura de punção.....	61
3.2.1.3	Tensão resistente e solicitante no contorno C'(a 2d da face do pilar) considerando armadura de punção.....	65

3.2.1.4 Tensão resistente e solicitante no contorno C''(a 2d da região armada).....	66
3.2.1.5 Verificação	69
3.2.3 Pilar de canto P44.....	70
3.2.3.1 Considerando o lado perpendicular à borda livre adotada C1=20.....	70
3.2.3.1.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (face do pilar).....	71
3.2.3.1.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C'(a 2d da face do pilar) sem considerar armadura de punção.....	71
3.2.3.1.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C'(a 2d da face do pilar) considerando armadura de punção.....	75
3.2.3.1.4 Tensão resistente e solicitante no contorno C''(a 2d da região armada).....	77
3.2.3.2 Considerando o lado perpendicular à borda livre adotada C1=60.....	79
3.2.3.3 Verificação.....	79
4. ANÁLISES E CONCLUSÕES.....	81
5. REFERÊNCIAS.....	82

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Superfície de ruína para casos simétricos.....	14
Figura 2 - Superfície de ruína para pilares de borda.....	15
Figura 3 - Superfície de ruína para pilares de canto.....	15
Figura 4 - Superfície de ruína atravessando a região armada em lajes com armadura de punção.....	16
Figura 5 - Superfície de ruína além da região armada em lajes com armadura de punção.....	16
Figura 6 - Superfície de ruína entre o pilar e a armadura de punção atravessando a região armada em lajes com armadura de punção.....	17
Figura 7 - Fase pós puncionamento sem e com armadura contra colapso progressivo, respectivamente.....	21
Figura 8 - Perímetro crítico junto a abertura na laje.....	22
Figura 9 - Lajes sem viga (cogumelo) com capitel e ábaco na ligação com o pilar.....	22
Figura 10 - Armaduras de punção.....	24
Figura 11 - Armadura Transversal de punção como em vigas.....	25
Figura 12 - Armadura de cisalhamento constituída de barras verticais.....	25
Figura 13 - Ancoragem dos ganchos.....	25
Figura 14 - Segmento de perfil metálico "I".....	26
Figura 15 - Elementos com placas de ancoragem nas extremidades.....	26
Figura 16 - Disposição em cruz da armadura de punção.....	27
Figura 17 - Disposição radial da armadura de punção.	27
Figura 18 - Disposição uniforme da armadura de punção.	28
Figura 19 - Esquema de bielas e tirantes para uma laje.....	30
Figura 20 - Ruptura por punção.....	31
Figura 21 - Dimensões de C1 e C2.....	36
Figura 22 - Perímetro crítico reduzido para o contorno C' em pilares de borda.....	37
Figura 23 - Excentricidade do perímetro crítico reduzido para o contorno C' em pilares de borda.....	38
Figura 24 - Situações para verificação de pilares de canto.....	41
Figura 25 - Perímetro crítico reduzido para o contorno C' em pilares de canto.....	42
Figura 26 - Excentricidade do perímetro crítico reduzido para o contorno C' de pilares de canto.....	43

Figura 27 - Planta de forma da laje adotada para estudo.....	46
Figura 28 - Armadura negativa da região nervurada.....	48
Figura 29 - Armadura negativa da região maciça pilar 28.....	48
Figura 30 - Armadura negativa da região maciça pilar 43.....	49
Figura 31 - Armadura negativa da região maciça pilar 44.....	49
Figura 32 - Seção para cálculo de ρ	52
Figura 33 - Armadura de punção do pilar 28 para laje de 25cm.....	55
Figura 34 - Armadura de punção do pilar 28 para laje de 20cm.....	55
Figura 35 - Armadura de punção do pilar 28 para laje de 18cm.....	55
Figura 36 - Seção para o novo cálculo de ρ	57
Figura 37 - Perímetro crítico além da região armada.....	57
Figura 38 - Armadura de punção do pilar 43 para laje de 20cm.....	64
Figura 39 - Armadura de punção do pilar 43 para laje de 18cm.	65
Figura 40 - Armadura de punção do pilar 44 para laje de 20cm.....	74
Figura 41 - Armadura de punção do pilar 44 para laje de 18cm.....	75
Figura 42 - Delimitação da laje para estimativa de consumo de concreto.	81
Figura 43 - Gráfico com a estimativa de custo de material para cada solução.....	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de K.....	35
Tabela 2 - Reações concentradas de cálculo.....	47
Tabela 3 - Momentos de cálculo transferidos aos pilares.....	48
Tabela 4 - Esforços atuantes no pilar 28.....	51
Tabela 5 - Verificações de punção para pilar 28.....	59
Tabela 6 - Esforços atuantes no pilar 43.....	59
Tabela 7 - Verificações de punção para pilar 43.....	69
Tabela 8 - Esforços atuantes no pilar 44.....	70
Tabela 9 - Verificações de punção para pilar 44 com C1=20cm.....	79
Tabela 10 - Verificações de punção para pilar 44 com C1=60cm.....	79
Tabela 11 - Estimativa de custo para cada solução.....	82
Tabela 12 - Preço conectores para punção de 8mm de diâmetro.....	82
Tabela 13 – Estimativa de custo para cada solução.....	83

LISTA DE EQUAÇÕES

Equação 1 – Tensão resistente no contorno C.....	32
Equação 2 – Cálculo de α_v	32
Equação 3 – Tensão resistente no contorno C' para lajes sem armadura transversal e na superfície C'' para lajes armadas transversalmente.....	32
Equação 4 – Taxa geométrica de armadura longitudinal.....	32
Equação 5 - Tensão resistente no contorno C' para lajes com armadura transversal.....	33
Equação 6 – Tensão solicitante para pilares de centro.....	34
Equação 7 – Perímetro crítico C para pilar de centro.....	34
Equação 8 - Perímetro crítico C' para pilar de centro.....	34
Equação 9 - Perímetro crítico C'' para pilar de centro.....	34
Equação 10 – Módulo de resistência plástica no contorno C' para pilares de centro.....	35
Equação 11 - Módulo de resistência plástica no contorno C'' para pilares de centro	35
Equação 12 – Tensão solicitante para pilares de borda com momento paralelo a borda livre.....	36
Equação 13 - Perímetro crítico C para pilar de borda.....	37
Equação 14 - Perímetro crítico C' para pilar de borda.....	37
Equação 15 - Perímetro crítico C'' para pilar de borda.....	37
Equação 16 – Momento de cálculo resultante.....	37
Equação 17 - Momento resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido u^* em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre	38
Equação – 18 Excentricidade do contorno crítico C' para pilares de borda.....	38
Equação 19 - Excentricidade do contorno crítico C'' para pilares de borda.....	38
Equação 20 – Excentricidade do perímetro da superfície crítica C' em relação à borda livre para pilares de borda.....	39
Equação 21 - Módulo de resistência plástica no contorno C' para pilares de borda na direção perpendicular à borda livre quando $e_{C'} \leq C_1$	39
Equação 22 - Módulo de resistência plástica no contorno C' para pilares de borda na direção perpendicular à borda livre quando $C_1 < e_{C'} \leq C_1 + 4 \cdot d/\pi$	39
Equação 23 - Módulo de resistência plástica no contorno C' para pilares de borda na direção perpendicular à borda livre quando $e_{C'} > C_1 + 4 \cdot d/\pi$	39
Equação 24 - Excentricidade do perímetro da superfície crítica C'' em relação à borda livre.....	39

Equação 25 - Módulo de resistência plástica no contorno C'' para pilares de borda na direção perpendicular à borda livre quando $e_{C'} \leq C_1$	40
Equação 26 - Módulo de resistência plástica no contorno C'' para pilares de borda na direção perpendicular à borda livre quando $C_1 < e_{C'} \leq C_1 + 2. (p + 2. d)/\pi$	40
Equação 27 - Módulo de resistência plástica no contorno C'' para pilares de borda na direção perpendicular à borda livre quando $e_{C'} > C_1 + 4. d/\pi$	40
Equação 28 - Módulo de resistência plástica no contorno C' para pilares de borda na direção paralela à borda livre.....	40
Equação 29 - Módulo de resistência plástica no contorno C'' para pilares de borda na direção paralela à borda livre.....	40
Equação 30 - Perímetro crítico C para pilar de canto.....	42
Equação 31 - Perímetro crítico C' para pilar de canto.....	42
Equação 32 - Perímetro crítico C'' para pilar de canto.....	42
Equação 33 - Excentricidade do contorno crítico C' para pilares de canto.....	43
Equação 34 - Excentricidade do contorno crítico C'' para pilares de borda.....	43
Equação 35 - Excentricidade do perímetro da superfície crítica C' em relação à borda livre para pilares de canto.....	43
Equação 36 - Módulo de resistência plástica no contorno C' para pilares de canto quando $C_1 < e_{C'} \leq C_1 + 4. d/\pi$	44
Equação 37 - Módulo de resistência plástica no contorno C' para pilares de canto quando $e_{C'} > C_1 + 4. d/\pi$	44
Equação 38 - Excentricidade do perímetro da superfície crítica C'' em relação à borda livre para pilares de canto.....	44
Equação 39 - Módulo de resistência plástica no contorno C'' para pilares de canto quando $C_1 < e_{C'} \leq C_1 + 2. (p + 2. d)/\pi$	44
Equação 40 - Módulo de resistência plástica no contorno C'' para pilares de canto quando $e_{C'} > C_1 + 4. d/\pi$	44

1. INTRODUÇÃO

O estudo e as análises previstas nesse Trabalho de Conclusão de Curso visam adquirir conhecimento em um assunto pouco contemplado no currículo regular do curso de graduação de Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina e que, ao mesmo tempo, é um problema que o engenheiro civil tem passado a enfrentar com mais frequência.

Com a necessidade de se aumentar a mobilidade arquitetônica e a velocidade de construção de edifícios de concreto armado, surge a busca por sistemas construtivos não convencionais, como os métodos de construção em que não são utilizadas vigas para apoiar as lajes, fazendo com que elas sejam apoiadas diretamente nos pilares. Entretanto essa solução resulta em efeitos de punção no contato laje-pilar. Efeito esse que tende a perfurar a superfície da laje através de esforços de cisalhamento.

O trabalho apresenta um estudo do efeito de punção em lajes de concreto armado, assim como as diferentes formas de combater esse efeito. Após esse estudo geral, foi realizado um estudo de caso com uma laje plana. Nesse estudo foram aplicadas as verificações da NBR6118 e através da mudança de determinados parâmetros, foi possível avaliar as diferentes soluções possíveis de serem adotadas para determinada situação.

1.1 Justificativa

De acordo com a Norma Brasileira NBR 6118:2014 há duas classificações diferentes para lajes que não são apoiadas em vigas. São estas, as lajes apoiadas em pilares com capitéis que são chamadas de lajes cogumelos, e as lajes apoiadas diretamente nos pilares, que podem ser chamadas de lajes planas ou lisas. Embora sejam sistemas diferentes, ambas sofrem o efeito de punção e devem ser dimensionadas de tal forma que a resistência ao cisalhamento seja superior ao esforço cisalhante solicitante.

O estudo sobre o efeito da punção em lajes lisa e cogumelo se justifica pelo aumento de ocorrência desse modelo construtivo com o passar do tempo. A escolha desse

modelo está associada, de acordo com TRAUTWEIN (2006), a uma série de vantagens principalmente à diminuição do tempo de execução. Dentre as possíveis vantagens pode-se destacar a simplificação na execução das formas, a diminuição dos revestimentos e a maior facilidade no lançamento, adensamento e desforma do concreto.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do trabalho é consolidar os conhecimentos adquiridos na área de estruturas ao longo do curso de Engenharia Civil, assim como buscar conhecimentos específicos sobre o efeito de punção que foram pouco abordados na graduação.

1.2.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos busca-se analisar os efeitos de punção causada por pilares em lajes de concreto armado para então aplicar as verificações sugeridas pela Norma Brasileira NBR6118:2014 e assim avaliar quais parâmetros têm maior relevância na escolha da solução construtiva a ser adotada.

1.3 Metodologia

O trabalho foi dividido em duas etapas principais. A primeira, que está desenvolvida no capítulo 2, foi um estudo conceitual baseado em uma revisão a respeito do assunto. Buscou-se livros, dissertações e demais referências a fim de se ter domínio a respeito do tema. Após concluída a primeira etapa foi então possível realizar um estudo de caso, para o qual os cálculos e análises estão apresentados no capítulo 3 deste trabalho.

2. REVISÃO

2.1 Punção

ABECE/IBRACON (2015), associa a punção ao estado limite último determinado por cisalhamento no entorno de forças concentradas. De acordo com CARVALHO e PINHEIRO (2009), esse estado limite último pode ocorrer em lajes sem vigas, em que há uma elevada força concentrada transmitida pelos pilares para as lajes. Esse problema pode ainda ser agravado quando há transferência de momentos fletores da laje para o pilar, ou em pilares posicionados nas bordas e nos cantos das lajes.

Segundo ainda CARVALHO e PINHEIRO (2009), as tensões causadas pela punção merecem atenção por poderem ocasionar uma ruptura abrupta e frágil e, portanto, é importante que os elementos da estrutura apresentem boa ductilidade para que sofram deformações significativas antes de atingir sua resistência última

De acordo com ABECE/IBRACON (2015) o sistema estrutural conhecido como lajes lisas, no qual as lajes estão diretamente apoiadas nos pilares, pode oferecer diversas vantagens técnicas com relação ao sistema convencional de lajes, vigas e pilares, sendo mais econômico em muitos casos. Porém a possibilidade da punção da laje pelo pilar pode muitas vezes inviabilizar o projeto, pois sabe-se que a punção através dos esforços de cisalhamento pode provocar separação completa entre a laje e o pilar. Como este tipo de ruína é frágil, deve-se, como diretriz de projeto, tentar garantir que, caso a ruína ocorra, ela não seja por punção, mas sim por flexão.

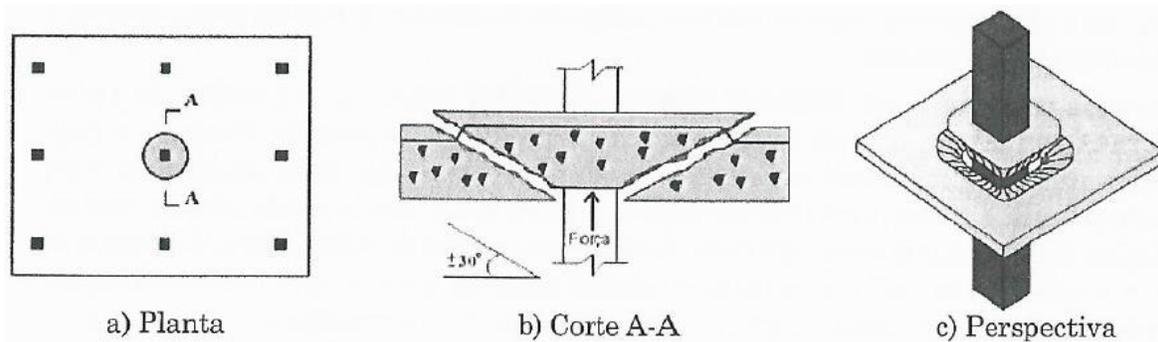
2.2 Mecanismos de ruptura

De acordo com PINTO (1993, p. 4), “O desaparecimento das vigas neste sistema estrutural, não só cria uma nova modalidade de ruptura (por punção), mas também gera

uma forte interação de flexão com cisalhamento ao longo do pilar (região crítica)”. CARVALHO e PINHEIRO (2009) alertam ainda que é mais conveniente que as lajes planas sejam dimensionadas de modo que o estado limite último, se atingido, seja por flexão, pois elementos submetidos a flexão são projetados para que a ruína ocorra com o escoamento do aço, caracterizando, assim, uma ruína do tipo dúctil em que há grandes deformações. Diferente da punção, que é caracterizada por uma ruptura frágil e repentina.

Segundo CARVALHO e PINHEIRO (2009), a ruína por punção é caracterizada por um deslocamento vertical ao longo de uma superfície de ruptura que parte da área carregada e se estende até a outra face. A superfície de ruptura muda de configuração de acordo com a posição em que o pilar se encontra na laje e com o tipo de carregamento ao qual a laje é submetida. LEONHARDT e MÖNNING (2007) afirmam que por meio de ensaios realizados pôde-se ver que as deformações tangenciais inicialmente são maiores que as deformações radiais. Surgem por isso, em primeiro lugar fissuras radiais e, somente para elevados estágios de carga, algumas poucas fissuras circulares. A partir da fissura mais externa se desenvolvem as superfícies de ruptura por cisalhamento do cone de punção, com uma inclinação de 30° a 35° (Figura 1).

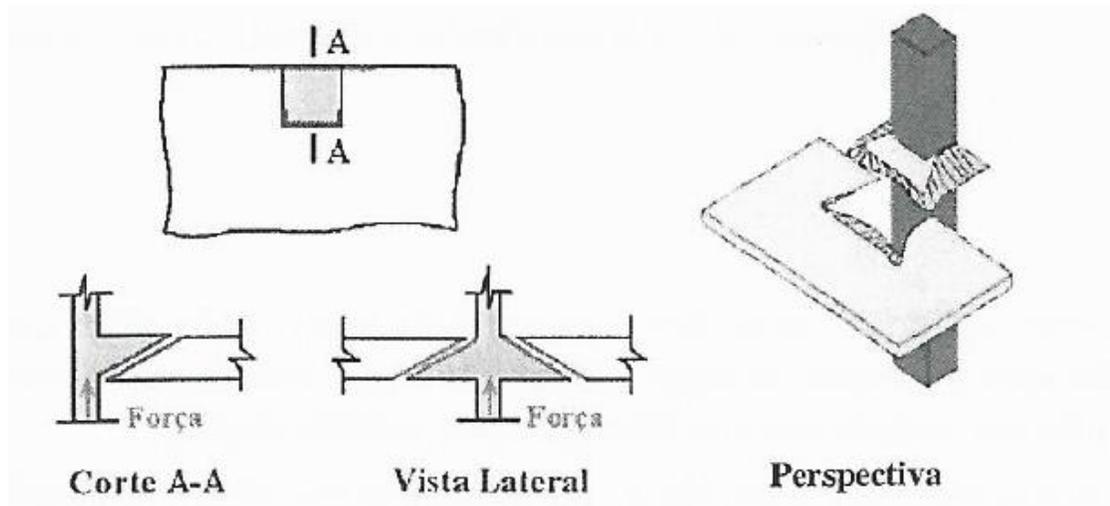
Figura 1- Superfície de ruína para casos simétricos



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

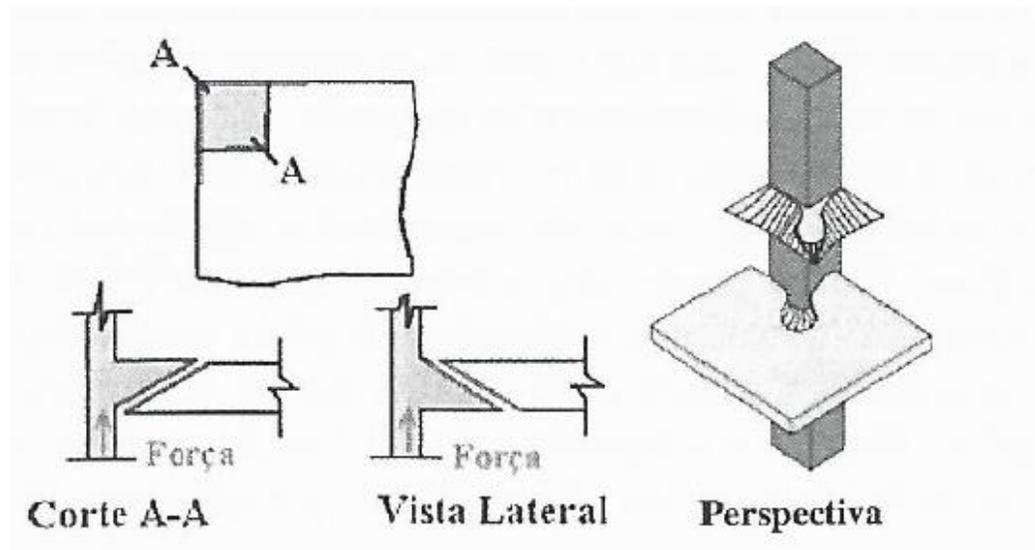
Em pilares de borda e de canto, segundo CARVALHO E PINHEIRO (2009), as superfícies são mais irregulares e a ruína é de difícil análise devido, principalmente, à influência dos efeitos de flexão e de torção. As superfícies de ruína para casos assimétricos, em pilares de borda e de canto podem ser vistas nas figuras 2 e 3 respectivamente.

Figura 2 - Superfície de ruína para pilares de borda



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

Figura 3 - Superfície de ruína para pilares de canto.



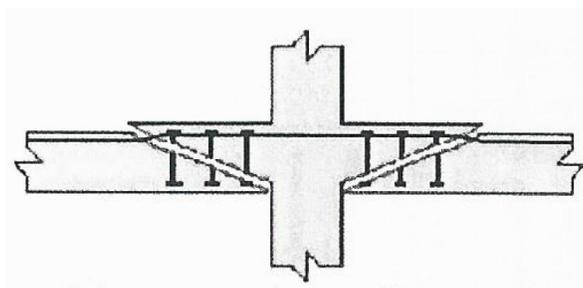
Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

Conforme estudos realizados por REGAN (1985, apud ABECE/IBRACON, 2015, p. 396) e GOMES (1991, apud ABECE/IBRACON, 2015, p.396), a superfície de ruína pode ser alterada se houver, na laje, a presença de armaduras de punção. Embora a ruptura por cisalhamento também seja possível, considerando a laje com sendo uma viga de grande

largura, ela é pouco provável no caso das lajes lisas. Deste modo existem, basicamente, três possibilidades de ruptura:

- Na primeira, a superfície de ruína atravessa a região armada (Figura 4).

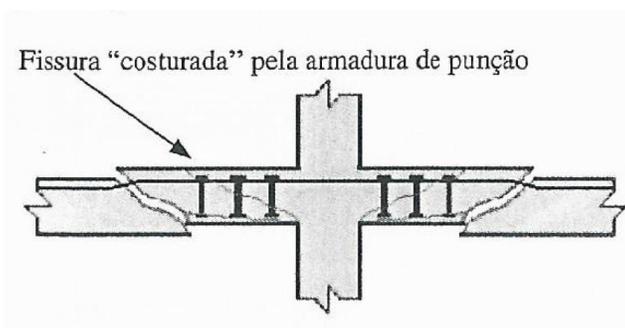
Figura 4 - Superfície de ruína atravessando a região armada em lajes com armadura de punção



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

- Na segunda, com o aumento da quantidade de armadura nessa região, a superfície de ruína transfere-se para outra região, localizada além da região armada (Figura 5).

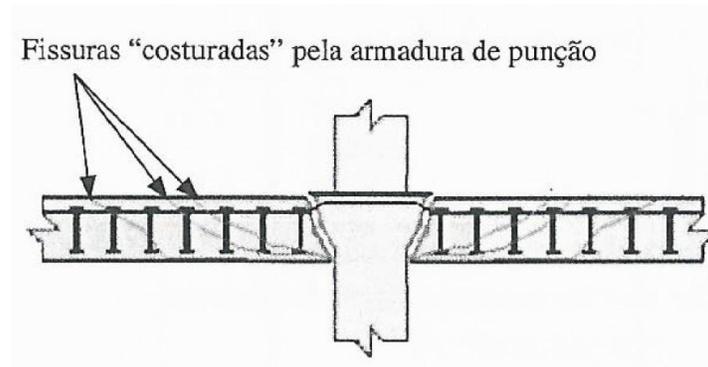
Figura 5 - Superfície de ruína além da região armada em lajes com armadura de punção



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

- Na terceira, quando se tem uma extensa região com armadura de punção suficiente para evitar a primeira possibilidade de ruína mencionada, a superfície de ruína transfere-se para a região localizada entre a face do pilar e a primeira linha de armadura de punção (Figura 6).

Figura 6 - Superfície de ruína entre o pilar e a armadura de punção atravessando a região armada em lajes com armadura de punção



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

2.3 Fatores que influenciam na resistência à punção

O efeito da punção em lajes de concreto armado pode ser influenciado por diversas escolhas adotadas no projeto. De acordo com RABELLO (2010) além do grande problema de a ligação laje-pilar estar situada em uma região de nós, a variação na forma, textura, tamanho do agregado, com os fenômenos de microfissuração, determinantes do comportamento não-linear do concreto, aliada à presença da armadura de aço estrutural conduzem o material concreto armado a uma heterogeneidade de materiais e comportamentos que agravam a indefinição do sistema.

Dessa forma, serão apresentados a seguir alguns dos fatores de influenciam na resistência à punção.

2.3.1 Espessura da laje

Segundo RABELLO (2010), quando se aumenta a espessura da laje com a finalidade de combater o efeito da punção, pode-se optar por duas soluções: aumentar a

espessura de toda a laje ou simplesmente na região da sua ligação com o pilar, o que é chamado de capitel ou engrossamento da laje. Ao se modificar a altura útil para toda a laje, as ações permanentes também aumentam, portanto aumenta-se a tensão resistente, mas também as tensões solicitantes, de tal forma que o processo não se torna vantajoso nem economicamente nem tecnicamente. Já o uso de capitéis, embora aumente a resistência à punção da ligação, pode também apresentar alguns inconvenientes, como perder as vantagens oferecidas pelo teto liso e prejudicar alguns aspectos arquitetônicos, além de gerar a necessidade de aumentar a distância entre pisos.

2.3.2 Dimensões e formato do pilar

BRAESTRUP e REGAN (1985 apud RABELLO, 2010) afirmam que quando comparados a pilares quadrados, os pilares retangulares com relação entre o lado maior e o lado menor maior que 2 têm uma ruína mais abrupta, com tamanho do cone de punção menor e com resistência da ligação também menor. Isso se deve ao fato de as tensões se concentrarem no lado de menor dimensão do pilar. Além disso, com relação ao formato, os pilares retangulares têm resistência em torno de 15% menor em relação a pilares circulares de mesma área, e isto se deve ao fato de existir uma concentração de tensões nos cantos dos pilares retangulares.

2.3.3 Armadura de punção

É evidente que as armaduras de punção proporcionam um aumento na resistência da ligação laje-pilar. O uso da armadura permite que se adotem espessuras menores de laje sem a necessidade de adotar o uso de capiteis ou o engrossamento da laje. Sendo assim é possível manter as principais vantagens do uso de lajes sem vigas.

De acordo com RABELLO (2010) os principais benefícios da armadura de punção são o aumento da resistência e da ductilidade da ligação laje-pilar. Com isso a ruptura deixa de ocorrer de maneira frágil e sem aviso, permitindo que a estrutura deforme significativamente antes de romper.

Segundo a Norma Brasileira NBR6118 (2014), no caso de a estabilidade global da estrutura depender da resistência da laje à punção, deve-se prever uma armadura de punção, mesmo que a ligação passe pela verificação de punção. Essa armadura deve equilibrar no mínimo 50% da força de reação proveniente da laje no pilar.

É importante lembrar que são imprescindíveis os cuidados com o uso das armaduras de punção. Falhas na ancoragem e má distribuição da armadura podem provocar escorregamentos e fazer com que elas percam a função estrutural.

2.3.4 Resistência do concreto

A resistência do concreto à tração está diretamente ligada com a resistência a punção da ligação laje-pilar. Entretanto, embora haja um aumento da resistência da ligação, em função do aumento da resistência do concreto, isso não confere à laje uma melhor ductilidade com relação à ruína.

2.3.5 Taxa de armadura de flexão

De acordo com RABELLO (2010) uma maior taxa de armadura de flexão causa menor incidência de fissuras. Já uma menor taxa, ao contrário, eleva a fissuração, o que diminui a resistência ao cisalhamento do concreto.

Conforme MELGUES (1995), resultados experimentais mostram que taxas acima de 2% deixam de aumentar a resistência da laje à punção.

2.3.6 Efeito escala

Esse efeito está relacionado com a altura útil da laje. Segundo RABELLO (2010), em iguais condições, as lajes de menor altura útil são mais resistentes à punção que as lajes mais espessas. De acordo com CORDOVIL (1997, apud RABELLO, 2010) esse fato é um princípio justificável pela possibilidade de maior heterogeneidade do concreto das lajes mais espessas. Além disso, mesmo com uma mesma taxa de armadura longitudinal, nas lajes de maior espessura, a armadura de tração perde sua capacidade de controlar a abertura das fissuras ao longo de toda a altura da seção fissurada. Deste modo, a espessura da peça condiciona o engrenamento dos agregados, fazendo com que a altura útil também seja um fator que controla a resistência das lajes à punção. O engrenamento dos agregados permite o cruzamento das bielas de compressão pela região de concentração de fissuras. A falta de consideração desse fato pode levar a critérios que superdimensionam as peças estruturais em função da significativa subestimação da resistência ao cisalhamento do concreto.

RABELLO (2010) ressalta que resultados experimentais mostram, no entanto, que a partir de uma determinada espessura a influência da variação da altura útil deixa de ser significativa. Essa limitação da influência da espessura a um determinado valor decorre de um efeito de escala entre a altura útil da peça e o diâmetro máximo dos agregados empregados na fabricação do concreto. Deste modo, em peças usuais de concreto estrutural, com diâmetros máximos do agregado da ordem de 30mm, o engrenamento dos agregados é mais eficiente em lajes delgadas do que em peças de grande espessura.

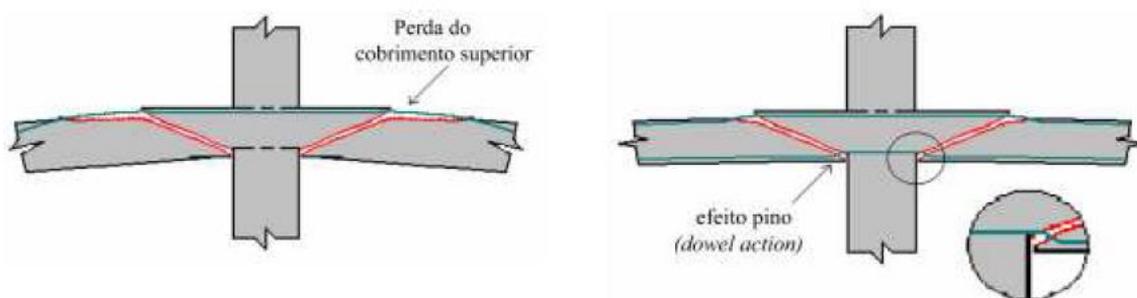
2.3.7 Armadura contra o colapso progressivo

Segundo LIMA (2001, apud RABELLO, 2010) em um edifício, a ruína de uma ligação aumenta a força e a excentricidade nos pilares próximos, podendo desencadear a ruína generalizada de um pavimento e até de toda a estrutura, se os painéis de laje caírem

uns por cima dos outros. A essa sucessão de ruínas dos painéis dá-se o nome de colapso progressivo.

Para combater o colapso progressivo, usa-se um tipo de armadura que deve ser localizada na parte inferior da laje, na região de ligação entre a laje e o pilar. Com o uso dessa armadura há um aumento na ductilidade da ligação na fase pós-puncionamento, o que faz com que haja uma redistribuição de esforços de modo a evitar a ocorrência do colapso progressivo (Figura 7).

Figura 7 - Fase pós puncionamento sem e com armadura contra colapso progressivo, respectivamente



Fonte: RABELLO (2010)

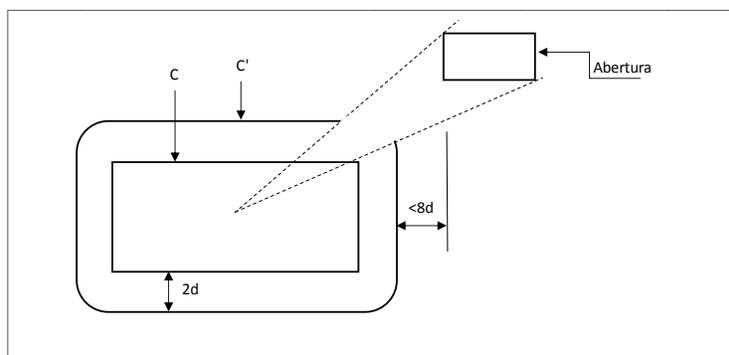
2.3.8 Aberturas em lajes e rebaixos para instalações

De acordo com LEONHARDT e MÖNNIG (2007), qualquer espaço vazio situado no interior do cone de punção (cuja inclinação é próxima de 30°) aumenta o perigo de punção, especialmente quando o rebaixo está diretamente ligado ao pilar, enfraquecendo a zona comprimida pela flexão.

Segundo a NBR6118:2014, se na laje existir abertura situada a uma distância menor que 8 vezes a altura útil da laje do contorno C (interface entre pilar a laje), não pode ser considerado o trecho do contorno crítico C' (situado a distância de 2 vezes a altura útil da

laje à face do pilar) entre as duas retas que passam pelo centro de gravidade da área de aplicação da força e que tangenciam o contorno da abertura (figura 8).

Figura 8 - Perímetro crítico junto a abertura na laje

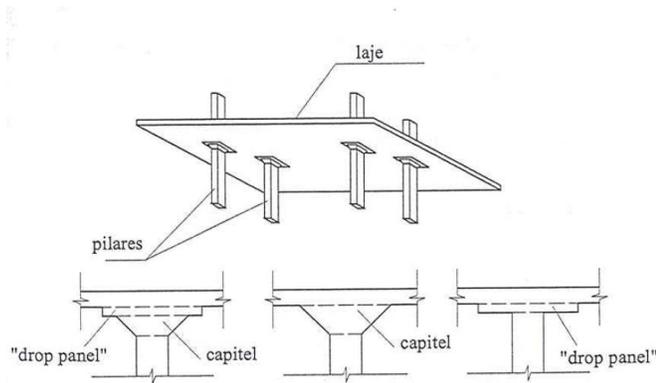


Fonte: NBR6118:2014 (figura adaptada)

2.4 Soluções construtivas

De acordo com CARVALHO e PINHEIRO (2009) a fim de diminuir as tensões e evitar a possibilidade de puncionamento, os pilares podem ter um engrossamento de sua seção na região da ligação com a laje, que é o que chamamos de capitel. Outra opção é aumentar a espessura da laje nessa região, resultando em um engrossamento chamado de ábaco, pastilha ou “*drop panel*”. Pode-se também usar os dois mecanismos simultaneamente, como apresentado na figura 9 abaixo. Para quaisquer destas soluções, as lajes sem vigas são chamadas de lajes cogumelo.

Figura 9 - Lajes sem viga (cogumelo) com capitel e ábaco na ligação com o pilar



Fonte: CARVALHO e PINHEIRO (2009)

CARVALHO e PINHEIRO (2009) afirmam que apesar da laje cogumelo responder bem mecanicamente, há uma certa dificuldade a ser enfrentada na execução dos capitéis e ábacos. Essas dificuldades estão principalmente na execução das fôrmas e na não continuidade dos tetos. Portanto uma solução mais conveniente seria a utilização de armaduras transversais na região da laje próxima ao pilar.

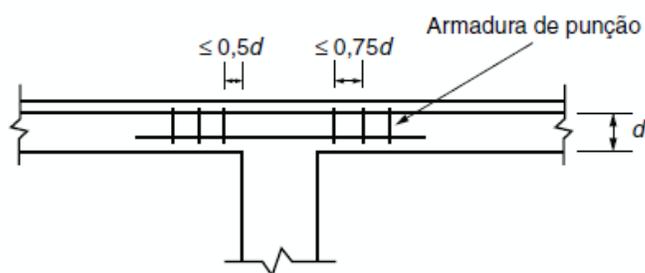
2.4.1 Tipos de armaduras transversais

De acordo com CARVALHO e PINHEIRO (2009) os esforços de punção podem ser combatidos por armadura transversal colocada na região da ligação da laje com o pilar. Esse método apresenta-se como o mais eficiente na elevação da resistência à punção, pois embora exista a opção de utilizar capitéis e ábacos, esses não conferem maior ductilidade à ligação nem aumentam a resistência de modo significativo.

Em geral, o que se busca na armadura transversal é que ela seja de fácil colocação, que seja ancorada de maneira efetiva nas extremidades, que não dificulte o posicionamento das armaduras de flexão da laje nem as do pilar e, se possível, que seja de baixo custo.

De acordo com a NBR 6118 (2014) quando necessárias, as armaduras para resistir à punção devem ser constituídas por estribos verticais ou conectores (*studs*), com preferência pela utilização destes últimos. O diâmetro da armadura de estribo não pode superar 1/20 da altura da laje e deve haver contato mecânico das barras longitudinais com os cantos dos estribos. Ainda segundo a NBR 6118 (2014), as regiões mínimas em que devem ser dispostas as armaduras de punção, bem como as distâncias regulamentares a serem obedecidas, estão mostradas na figura a seguir.

Figura 10 - Armaduras de punção

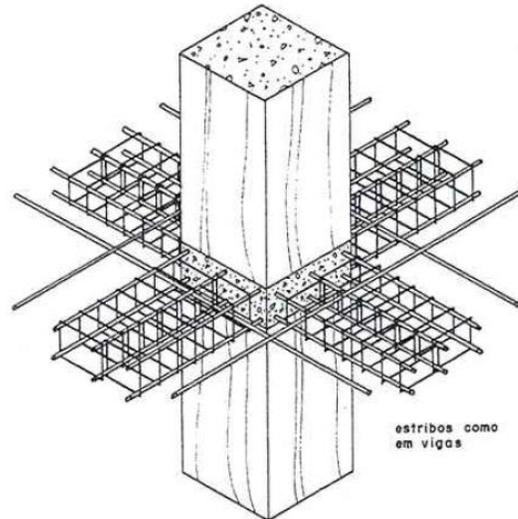


Fonte: NBR 6118 (2014)

2.4.1.1 Estribos verticais

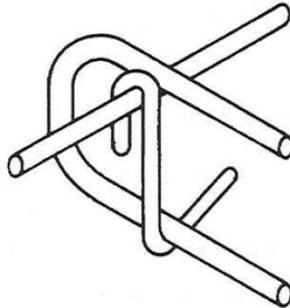
É o tipo de armadura de cisalhamento mais indicado segundo CARVALHO e PINHEIRO (2009). Conforme diversos ensaios realizados, os estribos verticais são bastante eficazes em aumentar a resistência a punção e a ductilidade da ligação. Eles podem ser fechados ou em forma de U, como em vigas (Figura 11), ou simples barras verticais com ganchos de ancoragem nas extremidades, enlaçando as barras superiores e inferiores da armadura de flexão (Figura 12). Podem ser perpendiculares ou inclinados em relação ao plano da laje.

Figura 11 - Armadura transversal de punção como em vigas.



Fonte: CARVALHO e PINHEIRO (2009)

Figura 12 - Armadura de cisalhamento constituída de barras verticais



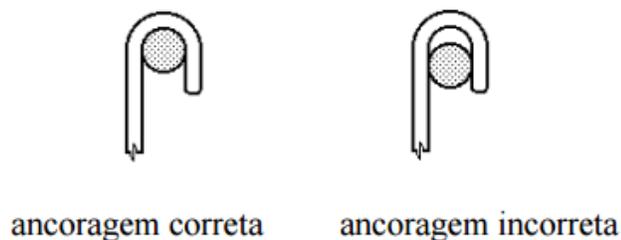
Fonte: CARVALHO e PINHEIRO (2009)

CARVALHO e PINHEIRO (2009) alertam que os estribos fechados ou em forma de U podem ser de difícil colocação, interferindo na armadura de flexão e na armadura dos pilares, e já os estribos compostos por barras verticais com ganchos nas extremidades não interferem nas demais armaduras.

De acordo com ensaios realizados por MARTINELLI (1974, apud RABELLO, 2010) e TAKEYA (1983, apud RABELLO, 2010), o desempenho dos ganchos foi satisfatório em ligações de canto e de borda. No entanto, esses ensaios confirmaram que, para esse tipo de armadura, deve-se garantir que não haja folga entre o gancho e as faces

superiores da armadura de flexão, pois a armadura de flexão serve de apoio para a ancoragem do gancho. Caso não haja esse contato, toda a contribuição dos ganchos na resistência da ligação estará comprometida.

Figura 13 - Ancoragem dos ganchos



Fonte: MELGES (1995)

2.4.1.2 Armaduras especiais tipo conectores

São armaduras de fácil colocação, mesmo em lajes relativamente finas, têm custo adequado e apresentaram bons resultados em ensaios realizados por diversos pesquisadores. Além disso, é o tipo de armadura de punção recomendado pela NBR 6118 (2014).

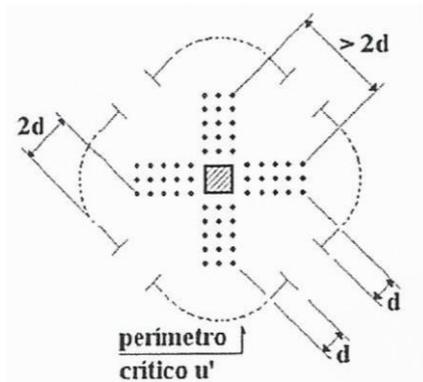
Há dois grupos principais:

- Segmentos de perfis metálicos com seção I e com pequenos furos na mesa inferior, para fixação nas formas (Figura 14);
- Elementos com placas de ancoragem redondas ou quadradas nas duas extremidades, ou faixa contínua de chapa de aço na extremidade inferior (Figura 15).

Figura 14 - Segmento de perfil metálico "I"

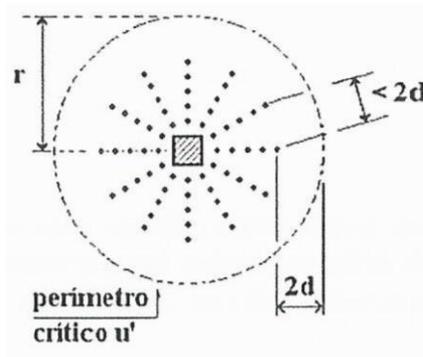


Figura 16 – Disposição em cruz da armadura de punção.



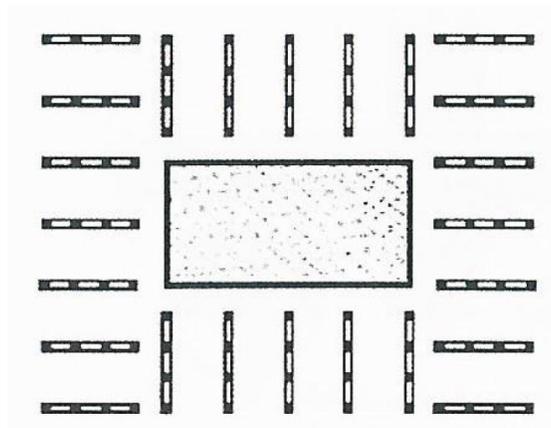
Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

Figura 17 - Disposição radial da armadura de punção.



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

Figura 18 – Disposição uniforme da armadura de punção.



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

2.5 Modelos de cálculo

2.5.1 Modelos mecânicos

Dentre os diferentes modelos de cálculo utilizados para a verificação dos esforços de punção tem-se os chamados modelos mecânicos, que podem também ser chamados de modelos “racionais”. De acordo com RABELLO (2010) esses modelos são fundamentados pelos modelos construtivos do concreto e do aço e se baseiam no comportamento da ligação, observado em ensaios. A resistência da ligação, nesse caso, é obtida pelo equilíbrio entre as ações aplicadas e os esforços internos.

2.5.2 Método da superfície de controle

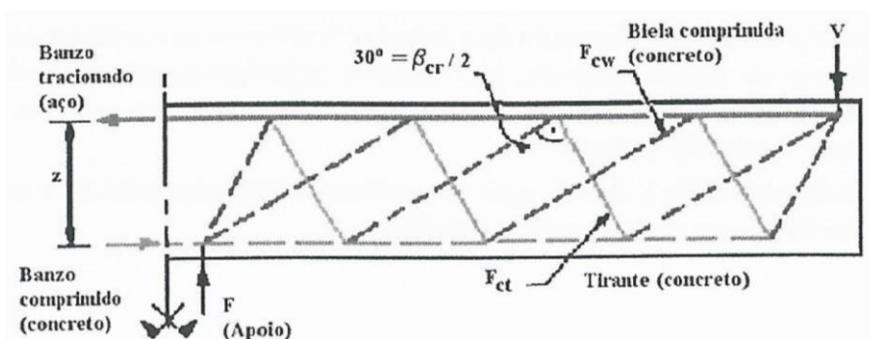
Esse método consiste em se calcular uma tensão uniforme solicitante de punção em uma determinada superfície de controle, perpendicular ao plano médio da laje, localizada a uma determinada distância da face do pilar ou da área carregada e comparar o valor do esforço solicitante com um determinado parâmetro de resistência do concreto para aquele perímetro. Se naquele perímetro o esforço resistente for maior que o solicitante não é necessário o uso de armadura de punção (RABELLO, 2010).

2.5.3 Modelo de cálculo das bielas e tirantes

Com o objetivo de se compreender melhor as disposições da NBR6118:2014 é possível fazer uma representação do comportamento estrutural da laje por meio do método das bielas e tirantes.

De acordo com ABECE/IBRACON (2015), o método de bielas e tirantes considera o comportamento da estrutura de concreto armado semelhante ao comportamento de uma estrutura composta por barras comprimidas e tracionadas, ligadas entre si por meio de nós. As bielas são as barras comprimidas e representam os campos de compressão a serem resistidos pelo concreto. Já os tirantes são as barras tracionadas e representam os campos de tração a serem resistidos pela armadura. Em casos específicos, os campos de tração também podem ser resistidos pelo concreto, como é o caso das lajes que pode ser visto na Figura 19.

Figura 19 -Esquema de bielas e tirantes para uma laje



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

Ainda segundo ABECE/IBRACON (2015), no caso da punção, para que a estrutura não entre em colapso, deve-se verificar a possibilidade do esmagamento da biela, cuja a resistência está relacionada à resistência do concreto à compressão, e também a possibilidade da ruína do tirante inclinado, cuja resistência está relacionada à resistência do concreto à tração. Afim de simplificar as verificações, ao invés de trabalhar com tensões em bielas e tirantes, compara-se determinadas tensões de cisalhamento com parâmetros de resistência.

2.6 Critérios de verificação da punção da NBR 6118:2014

O modelo de cálculo proposto na NBR 6118 (2014) corresponde à verificação do cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno das forças concentradas.

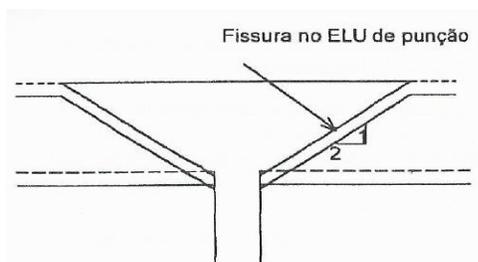
A primeira superfície crítica é a face do pilar, que é denominada de contorno C. Nela verifica-se a tensão de compressão diagonal do concreto, a partir da tensão de cisalhamento.

A segunda superfície crítica localiza-se a uma distância $2d$ da face do pilar e é denominada como contorno C'. Nela verifica-se a resistência da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal, também a partir de uma tensão de cisalhamento, no contorno C'.

Depois de verificadas as duas superfícies críticas, caso seja identificada necessidade, a ligação deve ser reforçada por armadura transversal. Quando a armadura transversal for necessária, a terceira superfície crítica, denominada de contorno C'', deve ser verificada.

De acordo com ABECE/IBRACON (2015) na verificação da compressão diagonal foi adotado o mesmo limite que é utilizado para vigas, o que fica a favor da segurança, uma vez que despreza o estado múltiplo de compressão no local. Já na verificação da tração diagonal, adota-se modelo empírico que corresponde a limitar a tensão convencional de cisalhamento num perímetro C'. Esse perímetro é definido a $2d$ da face do pilar porque a fissura que determina o ELU é inclinada de 1:2, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 20 - Ruptura por punção



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

De acordo com a Norma Brasileira NBR6118 (2014) a força cortante solicitante a ser adotada nos diferentes contornos é a obtida no modelo de cálculo utilizado na análise estrutural.

2.6.1 Roteiro de verificação da punção de acordo com os critérios da NBR 6118:2014

A seguir será apresentado um roteiro para a verificação da punção em pilares de centro, de borda e de canto. Todas as equações estão de acordo com o que é recomendado pela Norma Brasileira NBR 6118 (2014), sendo que quando há informações adicionais a norma, estas estão citadas no texto.

2.6.1.1 Cálculo das tensões resistentes

2.6.1.1.1 Tensão resistente na superfície crítica localizada no contorno crítico C:

$$\tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \quad (\text{Equação 1})$$

Sendo:

$$\alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (\text{Equação 2})$$

- f_{cd} = resistência de cálculo do concreto a compressão.

2.6.1.1.2 Tensão resistente na superfície crítica C' para lajes sem armadura transversal e na superfície C'' para lajes armadas transversalmente

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,10 \cdot \sigma_{cp} \quad (\text{Equação 3})$$

Sendo:

- d = altura útil da laje no contorno crítico estudado, em centímetros, dada por $d = \frac{d_x + d_y}{2}$. Sendo d_x e d_y as alturas úteis da laje nas direções x e y respectivamente. O valor de d é variável pois depende da espessura da laje adotada na análise.

- ρ = taxa geométrica de armadura longitudinal, dada por:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \quad (\text{Equação 4})$$

Em que ρ_x e ρ_y são as taxas geométricas de armadura longitudinal na direção x e y respectivamente.

- σ_{cp} = tensão normal (em Mpa e positiva, se compressão) no concreto na seção crítica, dada por $\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{cp,x} + \sigma_{cp,y}}{2}$. Sendo que $\sigma_{cp,x}$ e $\sigma_{cp,y}$ as tensões normais na seção crítica no concreto nas direções x e y respectivamente.

- A expressão $\left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right)$ representa o fator de escala do mecanismo resistente à punção. De acordo com ABECE/IBRACON (2015) esse valor deve ser limitado em 2. Isso pois para alturas úteis menores que 20cm, e conseqüentemente fatores de escala maiores que 2, os resultados experimentais demonstram uma redução no nível de segurança adequado.

2.6.1.1.3 Tensão resistente na superfície C' em lajes armadas transversalmente

Ao considerar armadura de punção deve-se determinar primeiramente o posicionamento dela em relação ao pilar. Adotando-se a armadura posicionada radialmente em torno do pilar, tem-se a seguinte tensão de projeto:

$$\tau_{Rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,10 \cdot \sigma_{cp} + 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha}{u \cdot d}$$

(Equação 5)

Sendo:

- A_{sw} = área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a C'
- f_{ywd} = resistência de cálculo da armadura de punção, em Mpa;
- α = inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;
- s_r = espaçamento radial entre linhas de conectores;
- u = perímetro crítico do contorno C', que varia de acordo com a posição do

pilar

2.6.1.2 Cálculo das tensões solicitantes

Para o cálculo das tensões solicitantes é necessário avaliar as solicitações em cada pilar, assim como a posição dos mesmos.

2.6.1.2.1 Pilar de centro com momento nas duas direções

Neste caso, tem-se:

$$\tau_{Rd1} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d} \quad (\text{Equação 6})$$

Sendo que

- F_{Sd} é a força ou a reação normal de cálculo.
- u é o perímetro crítico do contorno. Para cada contorno crítico haverá um perímetro crítico diferente. Os perímetros de cada contorno podem ser calculados da seguinte maneira:

Contorno crítico C:

$$u = 2. (c_1 + c_2) \quad (\text{Equação 7})$$

Contorno crítico C':

$$u = 2. (c_1 + c_2) + 4. \pi. d \quad (\text{Equação 8})$$

Contorno crítico C'':

$$u = 2. (c_1 + c_2) + 4. \pi. d + 2. \pi. p \quad (\text{Equação 9})$$

Sendo ρ a distância da face do pilar até a última linha de conectores (armadura transversal);

- M_{Sd1} e M_{Sd2} são os momentos desbalanceados de cálculo. M_{Sd1} é o momento paralelo ao lado C_2 do pilar, e M_{Sd2} o momento paralelo ao lado C_1 do pilar.
- K_1 e K_2 são coeficientes dados pela tabela do item 19.5 da NBR 6118. Os valores dos coeficientes podem ser vistos na tabela 1.

Tabela 1 - Valores de K

C_1/C_2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

onde
 C_1 é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;
 C_2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.

Fonte: NBR 6118:2014

- W_{p1} e W_{p2} são os módulos de resistência plástica do perímetro crítico dado por $W_p = \int_0^u |e| \cdot dl$ onde dl é o comprimento infinitesimal de u e e é a distância de dl ao eixo que passa pelo centro do pilar e em torno do qual atua M_{Sd} . Como W_p depende

de u , cada perímetro crítico terá um valor de W_p de acordo com os cálculos apresentados a seguir.

Contorno crítico C':

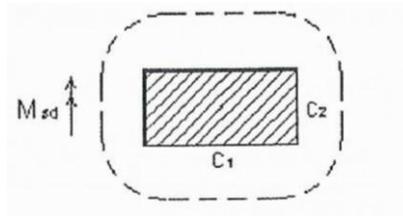
$$W_{p1} = W_{p2} = \frac{c_1^2}{2} + c_1 \cdot c_2 + 4 \cdot c_2 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot c_1 \quad (\text{Equação 10})$$

Contorno crítico C'':

$$W_{p1} = W_{p2} = \frac{c_1^2}{2} + c_1 \cdot c_2 + 4 \cdot c_2 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot c_1 + 2c_2 \cdot p + 16 \cdot d \cdot p + 4 \cdot p^2 + \pi \cdot c_1 \cdot p \quad (\text{Equação 11})$$

Vale lembrar que c_1 é sempre a dimensão do pilar na direção da excentricidade e c_2 a dimensão do pilar na direção perpendicular à excentricidade (Figura 21). Assim, embora sejam calculados da mesma maneira, os valores de W_{p1} e W_{p2} são diferentes quando o pilar não é quadrado, uma vez que dependem de esforços em direções diferentes.

Figura 21 - Dimensões de C1 e C2



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

No contorno crítico C a influência do momento fletor não é considerada, portanto não há valor para W_p .

É importante observar também que cada contorno crítico terá uma tensão solicitante diferente, pois possuem perímetros e módulos de resistência plástica diferentes.

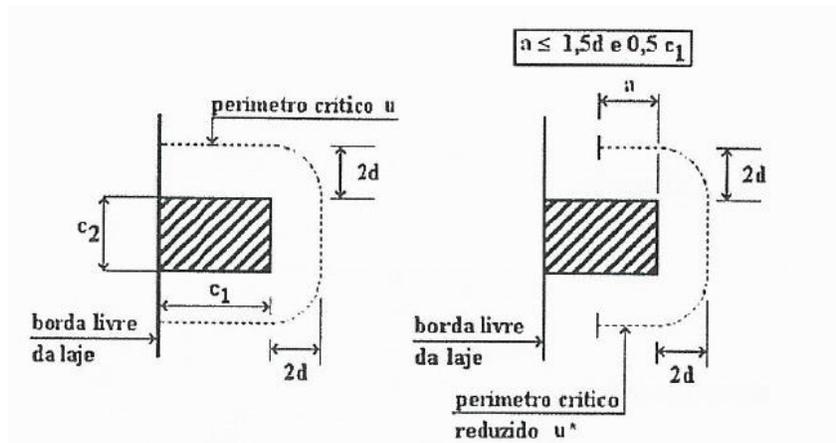
2.6.1.2.2 Pilar de borda com momento paralelo à borda livre

$$\tau_{Rd1} = \frac{F_{sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{sd}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{sd2}}{W_{p2} \cdot d} \quad (\text{Equação 12})$$

Sendo

- u^* o perímetro crítico reduzido do contorno estudado que pode ser visualizado Figura 22.

Figura 22 - Perímetro crítico reduzido para o contorno C' em pilares de borda.



Fonte: NBR 6118 (2014)

O perímetro crítico de cada contorno pode ser obtido de acordo com os cálculos a seguir:

Contorno crítico C:

$$u = 2 \cdot a + c_2 \quad (\text{Equação 13})$$

Contorno crítico C':

$$u = 2 \cdot a + c_2 + 2 \cdot \pi \cdot d \quad (\text{Equação 14})$$

Contorno crítico C'':

$$u = 2 \cdot a + c_2 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p \quad (\text{Equação 15})$$

Sendo p a distância da face do pilar até a última linha de conectores (armadura transversal) e ' a ' o menor valor entre $1,5d$ e $0,5c_1$.

- M_{Sd} o momento de cálculo resultante, dado pela expressão:

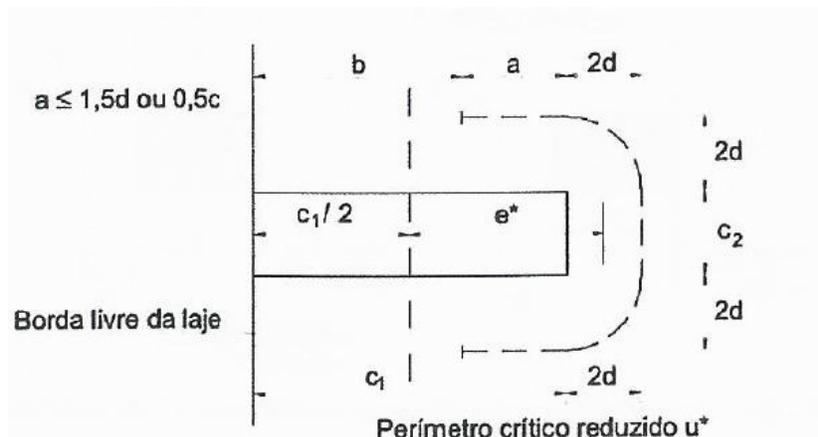
$$M_{Sd} = (M_{Sd1} - M_{Sd}^*) \geq 0 \quad (\text{Equação 16})$$

- M_{Sd1} o momento no plano perpendicular à borda livre;
- M_{Sd}^* o momento resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido u^* em relação ao centro do pilar, no plano perpendicular à borda livre, ou seja:

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot e^* \quad (\text{Equação 17})$$

- e^* é a excentricidade do perímetro crítico reduzido (Figura 23)

Figura 23 - Excentricidade do perímetro crítico reduzido para o contorno C' em pilares de borda.



Fonte: ABECE/IBRACON (2015)

A excentricidade de cada contorno crítico pode ser calculada de acordo com as expressões mostradas abaixo.

Contorno C':

$$e^* = \frac{c_1 \cdot a - a^2 + \frac{c_1 \cdot c_2}{2} + 2 \cdot c_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot c_1}{2 \cdot a + c_2 + 2 \cdot \pi \cdot d} \quad (\text{Equação 18})$$

Contorno C'':

$$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1 + C_2 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + \frac{\pi \cdot p \cdot C_1}{2} + 2 \cdot p^2}{2 \cdot a + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p} \quad (\text{Equação 19})$$

A excentricidade não é calculada para o contorno crítico C pois nesse contorno não se considera a influência do momento fletor.

- W_{p1} é o módulo de resistência plástica na direção perpendicular à borda livre, calculado em relação ao centro geométrico crítico, conforme recomendação de LOUREIRO (2005, apud ABECE/IBRACON, 2015, p.409) como é mostrado a seguir.

Contorno C':

$$e_{C'} = \frac{C_1 \cdot^2 - a^2 + C_1 \cdot C_2 + 2 \cdot d \cdot C_2 + 2 \pi \cdot d \cdot C_1 + 8 \cdot d^2}{2 \cdot C_1 + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d} \quad (\text{Equação 20})$$

Se $e_{C'} \leq C_1$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot e_{C'}^2 \quad (\text{Equação 21})$$

Se $C_1 < e_{C'} \leq C_1 + 4 \cdot d/\pi$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_c - \frac{c_1}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(c_1 + \frac{4 \cdot d}{\pi} - e_{C'} \right) + c_2 \cdot (c_1 + 2 \cdot d - e_{C'}) \quad (\text{Equação 22})$$

Se $e_{C'} > C_1 + 4 \cdot d/\pi$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_c - \frac{c_1}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(e_{C'} - c_1 - \frac{4 \cdot d}{\pi} \right) + c_2 \cdot (c_1 + 2 \cdot d - e_{C'}) \quad (\text{Equação 23})$$

Contorno C'':

$$e_{C''} = \frac{C_1 \cdot 2 + \pi \cdot (p+2 \cdot d) \cdot \left(c_1 + \frac{2 \cdot (p+2 \cdot d)}{\pi}\right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d)}{2 \cdot C_1 + C_2 + \pi \cdot (p+2 \cdot d)} \quad (\text{Equação 24})$$

Se $e_{C'} \leq C_1$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot e_{C''}^2 \quad (\text{Equação 25})$$

Se $C_1 < e_{C'} \leq C_1 + 2 \cdot (p + 2 \cdot d) / \pi$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_{C''} - \frac{c_1}{2}\right) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot d \cdot \left(c_1 + \frac{2 \cdot (p+2 \cdot d)}{\pi} - e_{C''}\right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d - e_{C''})$$

(Equação 26)

Se $e_{C'} > C_1 + 4 \cdot d / \pi$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_{C''} - \frac{c_1}{2}\right) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(e_{C''} - c_1 - \frac{4 \cdot 2 \cdot (p+2 \cdot d) \cdot d}{\pi}\right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d - e_{C''})$$

(Equação 27)

- W_{p2} é o módulo de resistência plástica na direção paralela à borda livre. O valor para cada contorno crítico pode ser obtido de acordo com os cálculos a seguir:

Contorno C':

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1 \cdot C_2 + 4 \cdot C_1 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_2 \quad (\text{Equação 28})$$

Contorno C'':

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1 \cdot C_2 + 4 \cdot C_1 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot c_2 + 2 \cdot C_1 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + \frac{\pi \cdot p \cdot C_2}{2} + 2 \cdot p^2$$

(Equação 29)

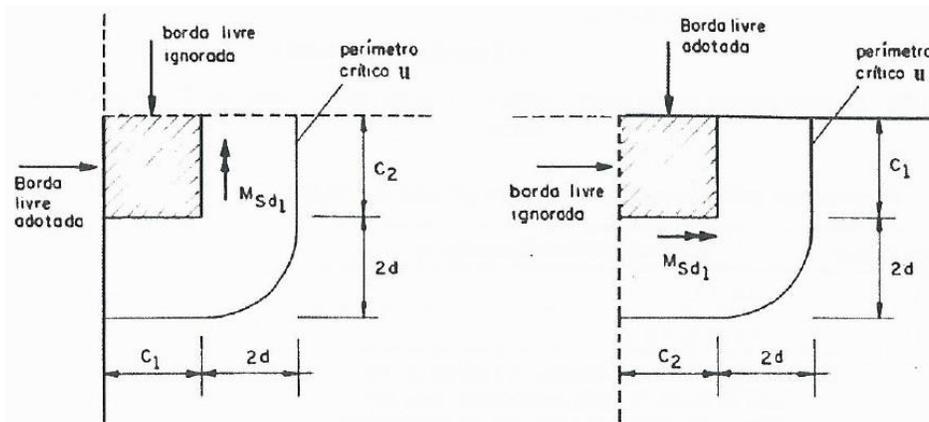
Nesse contorno W_{p2} depende da distribuição da armadura. Como mencionado anteriormente, será considerada distribuição radial.

- K_2 é o coeficiente dado pela Tabela 1, mas que depende da relação $\frac{C_2}{2 \cdot C_1}$.

2.6.1.2.3 Pilar de canto

Para os pilares de canto, são realizadas duas verificações separadamente, uma para cada direção, sendo que, para cada borda adotada, deverá ser considerado o momento no plano perpendicular a ela, conforme mostra a Figura 24. Dessa forma, valem as mesmas disposições dos pilares de borda, mas sem considerar momento no plano paralelo à borda livre.

Figura 24 - Situações para verificação de pilares de canto.

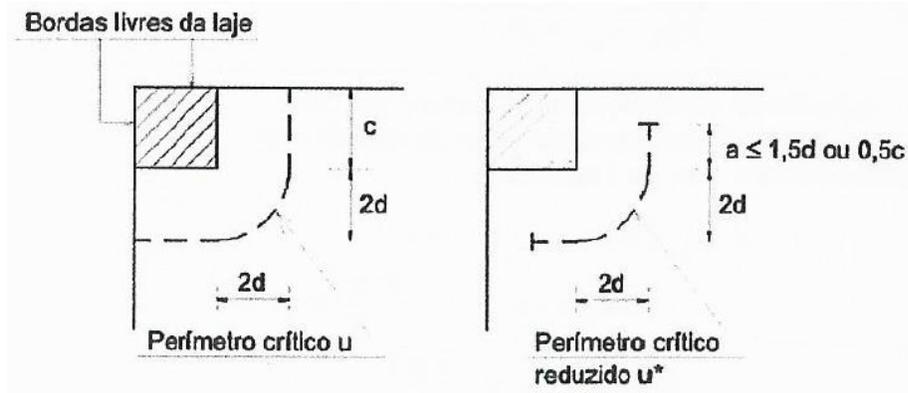


Fonte: Comitê Técnico Conjunto ABECE/IBRACON (2015)

Para determinar o coeficiente K_1 usa-se a tabela normalmente, considerando C_1 sempre o lado perpendicular à borda adotada.

- u^* é o perímetro crítico reduzido conforme mostra a Figura 25, e pode ser calculado para cada contorno conforme é mostrado na sequência.

Figura 25 - Perímetro crítico reduzido para o contorno C' em pilares de canto.



Fonte: Comitê Técnico Conjunto ABECE/IBRACON (2015)

Contorno crítico C:

$$u^* = a_1 + a_2 \quad (\text{Equação 30})$$

Contorno crítico C':

$$u^* = a_1 + a_2 + \pi \cdot d \quad (\text{Equação 31})$$

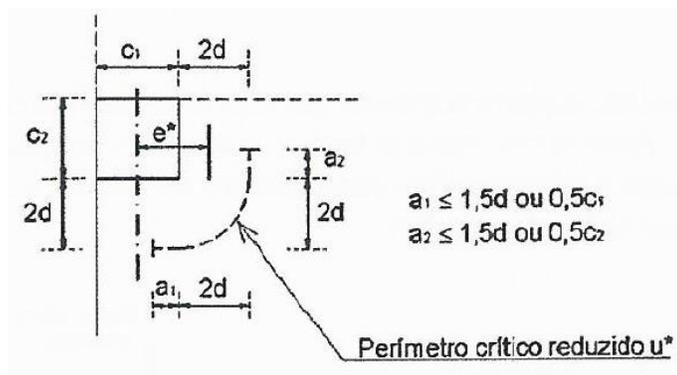
Contorno crítico C'':

$$u^* = a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot p}{2} \quad (\text{Equação 32})$$

Considerando a distribuição da armadura radial e sendo p a distância da face do pilar até a última linha de conectores (armadura transversal)

A excentricidade de cada perímetro crítico está representada na figura 26 e pode ser calculada conforme é mostrado a seguir.

Figura 26 - Excentricidade do perímetro crítico reduzido para o contorno C' de pilares de canto



Fonte: Comitê Técnico Conjunto ABECE/IBRACON (2015)

Contorno C'

$$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + a_2 \cdot C_1 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d)} \quad (\text{Equação 33})$$

Contorno C''

$$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + a_2 \cdot C_1 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1 + 2 \cdot a_2 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + \frac{\pi \cdot p \cdot C_1}{2} + 2 \cdot p^2}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot p}{2})} \quad (\text{Equação 34})$$

A excentricidade não é calculada para o contorno crítico C pois nesse contorno não se considera a influência do momento fletor.

Os módulos de resistência plástica \$W_{p1}\$ de cada contorno são calculados de acordo com o que é mostrado a seguir.

Contorno C':

$$e_{C'} = \frac{C_1^2 - a^2 + C_1 \cdot C_2 + 2 \cdot d \cdot C_2 + 2 \pi \cdot d \cdot C_1 + 8 \cdot d^2}{2 \cdot C_1 + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d} \quad (\text{Equação 35})$$

Se $e_{C'} \leq C_1$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot e_{C'}^2$$

Se $C_1 < e_{C'} \leq C_1 + 4 \cdot d/\pi$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_c - \frac{c_1}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(c_1 + \frac{4 \cdot d}{\pi} - e_{C'} \right) + c_2 \cdot (c_1 + 2 \cdot d - e_{C'}) \quad (\text{Equação 36})$$

Se $e_{C'} > C_1 + 4 \cdot d/\pi$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_c - \frac{c_1}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(e_{C'} - c_1 - \frac{4 \cdot d}{\pi} \right) + c_2 \cdot (c_1 + 2 \cdot d - e_{C'}) \quad (\text{Equação 37})$$

Contorno C''

$$e_{C''} = \frac{C_1^2 + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(c_1 + \frac{2 \cdot (p + 2 \cdot d)}{\pi} \right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d)}{2 \cdot C_1 + C_2 + \pi \cdot (p + 2 \cdot d)} \quad (\text{Equação 38})$$

Se $e_{C''} \leq C_1$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot e_{C''}^2$$

Se $C_1 < e_{C''} \leq C_1 + 2 \cdot (p + 2 \cdot d)/\pi$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_{C''} - \frac{c_1}{2} \right) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot d \cdot \left(c_1 + \frac{2 \cdot (p + 2 \cdot d)}{\pi} - e_{C''} \right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d - e_{C''}) \quad (\text{Equação 39})$$

Se $e_{C''} > C_1 + 4 \cdot d/\pi$, então:

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_{c''} - \frac{c_1}{2} \right) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(e_{c''} - c_1 - \frac{4 \cdot 2 \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot d}{\pi} \right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d - e_{c''})$$

(Equação 40)

3. ESTUDO DE CASO

Para fazer uma análise das verificações de punção proposta pelo modelo de cálculo da NBR6118:2014, considerou-se um projeto real em que há ligações diretas entre a laje e os pilares. O projeto foi fornecido por um escritório de projetos de engenharia da cidade de Florianópolis. Para efeito de comparação e análise dos resultados, o estudo foi feito variando a espessura da laje e conseqüentemente a necessidade ou não de armadura de punção, sendo assim possível avaliar qual solução torna-se mais vantajosa.

No estudo foram analisados três pilares. Sendo um pilar de centro, um pilar de borda e um pilar de canto. A laje foi avaliada com 4 espessuras diferentes, 30, 25, 20 e 18cm. Todos os cálculos foram realizados em planilhas no Excel e o roteiro será mostrado na seção 4.2.

Para a realização dos cálculos, foram fornecidos os seguintes dados:

- Planta de formas da laje;
- Reações dos pilares na laje;
- Detalhamento de armadura da laje;
- Momentos transferidos da laje para os pilares;
- Detalhes de projeto.

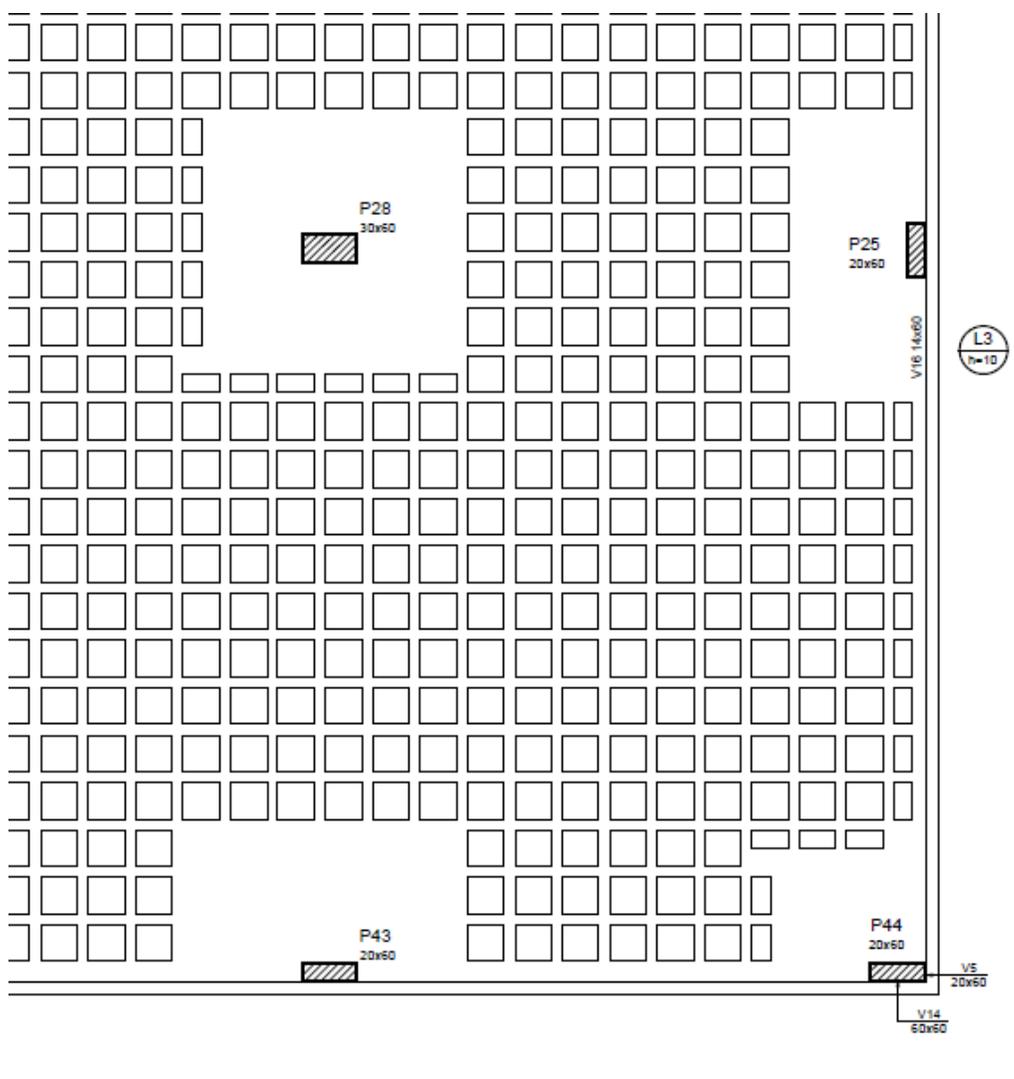
Os dados fornecidos, assim como cálculos e os resultados obtidos, são apresentados nos itens a seguir.

3.1 Dados fornecidos

3.1.1 Planta de forma da laje

A laje do projeto fornecido pelo escritório de engenharia para a realização do estudo é uma laje nervurada com regiões maciças próximas aos pilares. Ela foi projetada com 30 cm de espessura. Na figura abaixo está apresentada parte da laje em que se encontram os pilares escolhidos para realizar a análise. Os pilares são o P28, o P43 e o P44.

Figura 27 - Planta de forma da laje adotada para estudo



É possível observar que o pavimento foi projetado com vigas em todo o contorno da laje. Isso é feito para que a estrutura ganhe maior estabilidade lateral, usando as vigas como elementos de travamento da estrutura. Para fins de análise e verificação da laje à punção, as vigas foram desconsideradas.

3.1.2 Reações dos pilares na laje

Para que se pudesse obter os valores de Fsd em cada pilar foi possível ter acesso as reações na laje para cada espessura que será adotada. As reações foram obtidas pelo escritório que forneceu projeto através de um software de projeto estrutural. Os valores de cálculo obtidos podem ser vistos na tabela a seguir.

Tabela 2 - Reações concentradas de cálculo

Espessura da laje	PILAR P28			PILAR P43			PILAR P44		
	Reação (tf)	Reação (kN)	Fsd (kN)	Reação (tf)	Reação (kN)	Fsd (kN)	Reação (tf)	Reação (kN)	Fsd (kN)
30	71	695,8	974,12	34	333,2	466,48	9,02	88,396	123,7544
25	63	617,4	864,36	33	323,4	452,76	5,55	54,39	76,146
20	57	558,6	782,04	32	313,6	439,04	4,5	44,1	61,74
18	56	548,8	768,32	32	313,6	439,04	4,16	40,768	57,0752

3.1.3 Detalhamento de armadura da laje

A laje possui 2 detalhamentos diferentes de armadura de flexão. Sendo um detalhamento da região nervurada (figura 28) e outro para as regiões maciças próximas aos pilares (figuras 29 a 31). É importante salientar que a laje foi detalhada apenas para a espessura de 30cm, sendo que esse mesmo detalhamento foi usado para todas as análises.

Figura 28 – Armadura negativa da região nervurada

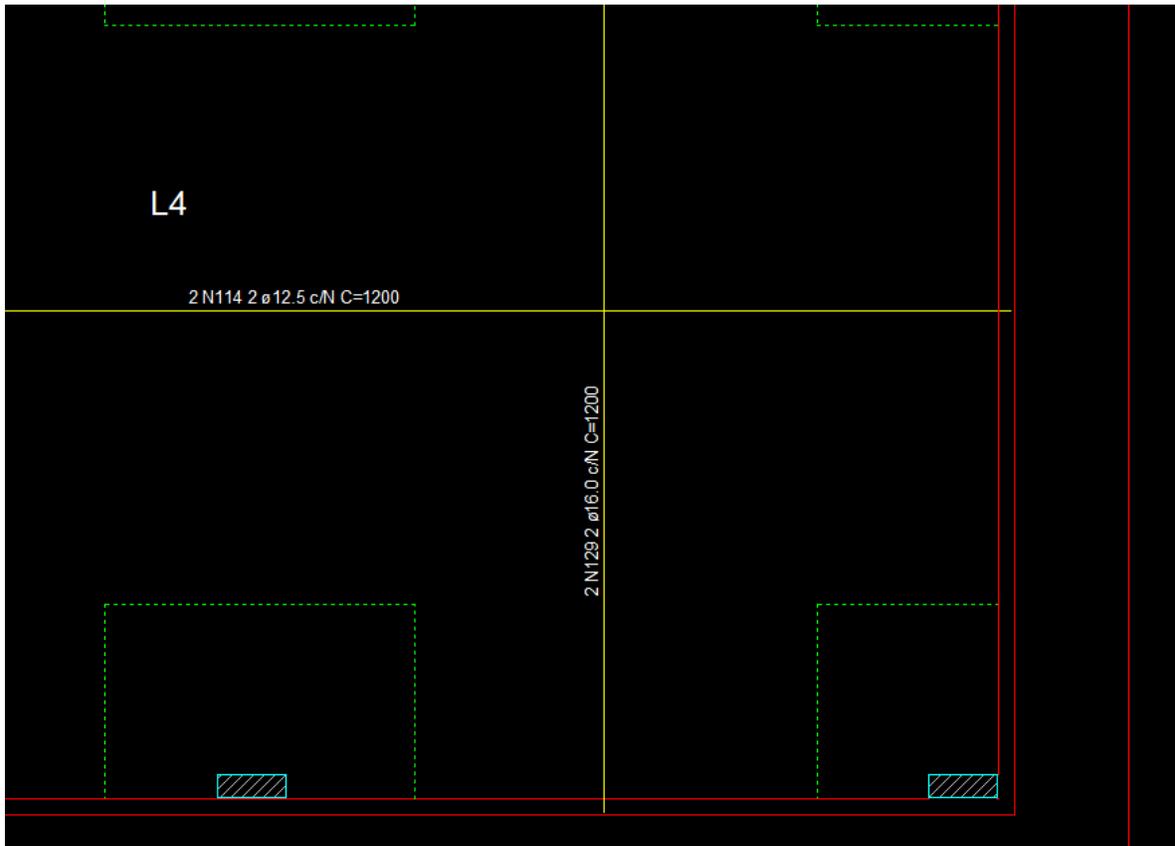


Figura 29 - Armadura negativa da região maciça pilar 28

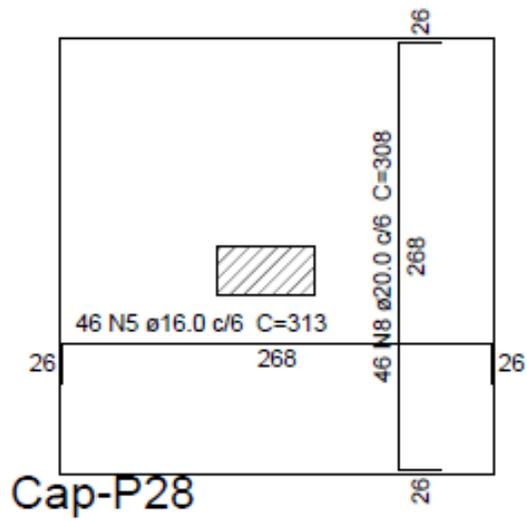
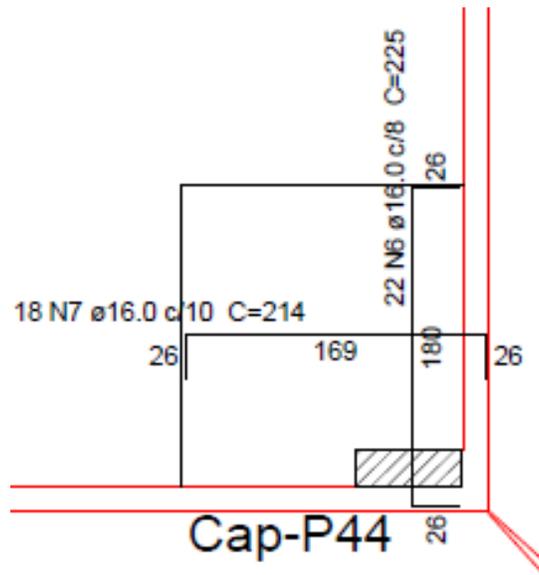


Figura 30 - Armadura negativa da região maciça pilar 43



Figura 31 - Armadura negativa da região maciça pilar 44



3.1.4 Momentos transferidos aos pilares

Para cada espessura de laje analisada, foram fornecidos os momentos de cálculo em x e em y do topo de cada pilar estudado. Os valores fornecidos pelo escritório foram obtidos através de um software de projeto estrutural. Os valores estão apresentados na tabela 3 a seguir.

Tabela 3 - Momentos de cálculo transferidos aos pilares

Espessura da laje	PILAR P28		PILAR P43		PILAR P44	
	Mx (kN.cm)	My (kN.cm)	Mx (kN.cm)	My (kN.cm)	Mx (kN.cm)	My (kN.cm)
30	1923	5716	2899	1568	612	4055
25	1614	6005	3356	2010	387	4271
20	2405	4284	3831	2613	553	4523
18	2707	6450	4031	2960	718	4643

3.1.5 Detalhes de projeto

Além de todos os dados fornecidos já citados anteriormente, existem mais alguns dados de projeto a serem considerados. São eles os seguintes:

- O fck do concreto adotado no projeto foi 30 MPa;
- O cobrimento adotado foi de 3cm;
- Os preenchimentos das lajes nervuradas possuem dimensões de 40x40x25cm;
- As dimensões das áreas de laje maciça em torno dos pilares 28, 43 e 44 são 2,8x2,8m; 2,8x1,8m; e 1,8x1,8 respectivamente.

3.2 Verificação da punção

3.2.1 Pilar de centro P28

Esforços atuantes na ligação:

Tabela 4 - Esforços atuantes no pilar 28

Esforços	Espessura da laje (cm)			
	30	25	20	18
Fsd (kN)	974,12	864,36	782,04	768,32
Msd1 (kN.cm)	1923	1614	2405	2707
Msd2 (kN.cm)	5716	6005	4284	6450

Sendo que M_{Sd1} e M_{Sd2} são os momentos desbalanceados de cálculo. M_{Sd1} é o momento paralelo ao lado C_2 do pilar, e M_{Sd2} o momento paralelo ao lado C_1 do pilar.

3.2.1.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (face do pilar)

- Tensão resistente: (Equação 1)

$$\tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} = 0,27 \cdot \left(1 - \frac{30}{250}\right) \cdot \frac{30}{1,4} = 5,09 \text{ MPa}$$

- Tensão solicitante: Para esse perímetro crítico não se considera a influência do momento fletor. Portanto a tensão solicitante é dada por: (Equação 6)

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d}$$

Sendo u o perímetro do pilar dado por (Equação 7):

$$u = 2 \cdot (30 + 60) = 180 \text{ cm}$$

Assim:

$$\tau_{sd} = \frac{466,8}{180 \cdot d} = \frac{2,59}{d} \text{ Mpa}$$

Lembrando que d depende da espessura da laje que será variável para fins de análise.

3.2.1.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (a $2d$ da face do pilar) sem considerar armadura de punção

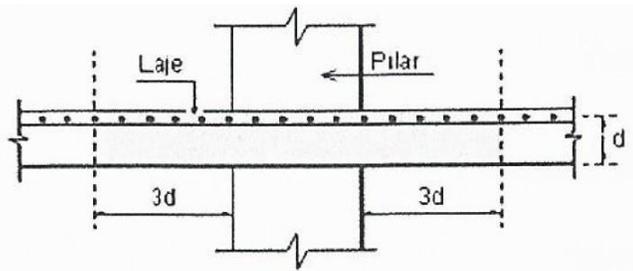
- Tensão resistente: (Equação 3)

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3} + 0,10 \cdot \sigma_{cp}$$

Lembrando que $\left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \leq 2$ de acordo com seção 2.6.1.1.2

Sendo ρ a taxa geométrica de armadura longitudinal calculada considerando a seção ilustrada na Figura 32:

Figura 32 - Seção para cálculo de ρ



Fonte: Comitê Técnico Conjunto ABECE/IBRACON (2015)

A taxa de armadura dependerá da altura útil da laje que irá determinar o número de barras que serão consideradas. Portanto ρ ficará em função de d e terá um valor diferente para cada valor de espessura da laje adotado.

Armadura em x: $\phi 16\text{mm}$ a cada 6cm

$$q = \frac{3d + C_2 + 3d}{s} = \frac{6d + 60}{6} \text{ barras}$$

$$asx = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,6^2}{4} = 2,011 \text{ cm}^2$$

$$\rho_x = \frac{q \cdot asx}{d \cdot (6d + C_2)} = \frac{q \cdot 2,011}{d \cdot (6d + 60)}$$

Armadura em y: $\phi 16\text{mm}$ a cada 6cm

$$q = \frac{3d + C_1 + 3d}{s} = \frac{6d + 30}{6} \text{ barras}$$

$$asy = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,6^2}{4} = 2,011 \text{ cm}^2$$

$$\rho_y = \frac{q \cdot asx}{d \cdot (6d + C_1)} = \frac{q \cdot 2,011}{d \cdot (6d + 30)}$$

Assim, a taxa de armadura de flexão será: (Equação 4)

$$\rho = \sqrt{\rho_x + \rho_y}$$

Considerando que a laje não é protendida $\sigma_{cp} = 0$. Assim:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot 30)^{1/3}$$

Portanto, a tensão resistente também fica em função da altura útil da laje.

- Tensão solicitante: (Equação 6)

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

Perímetro crítico reduzido: (Equação 7)

$$u = 2 \cdot (c_1 + c_2) + 4 \cdot \pi \cdot d = 2 \cdot (30 + 60) + 4 \cdot \pi \cdot d = 180 + 4 \cdot \pi \cdot d$$

Valores de K (Tabela 1):

$$K_1=0,7 \text{ e } K_2=0,45$$

Módulos de resistência plástica: (Equação 10)

$$W_{p1} = W_{p2} = \frac{c_1^2}{2} + c_1 \cdot c_2 + 4 \cdot c_2 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot c_1 = \frac{30^2}{2} + 30 \cdot 60 + 4 \cdot 60 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot 30 = 1815 + 240d + 16d^2 + 60 \cdot \pi \cdot d$$

$$\text{Então } \tau_{Sd} = \frac{99,4}{(180+4 \cdot \pi \cdot d) \cdot d} + \frac{865,35}{(1815+240d+16d^2+60 \cdot \pi \cdot d) \cdot d} + \frac{4001,2}{(1815+240d+16d^2+60 \cdot \pi \cdot d) \cdot d}$$

3.2.1.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C'(a 2d da face do pilar) considerando armadura de punção

- Tensão resistente:

Será considerada agora uma armadura de punção composta de conectores tipo pino com $\phi 8\text{mm}$, aço CA-50, distribuídas radialmente como mostra as figuras 33, 34 e 35. Para cada espessura da laje foi adotada uma armadura de punção diferente. Em todos os casos optou-se pelo menor número de camadas e de conectores possível para combater o esforço solicitante.

Figura 33 - Armadura de punção do pilar 28 para laje de 25cm

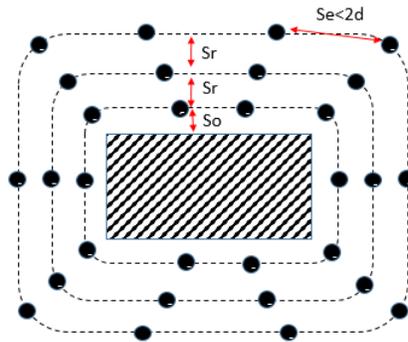


Figura 34 - Armadura de punção do pilar 28 para laje de 20cm

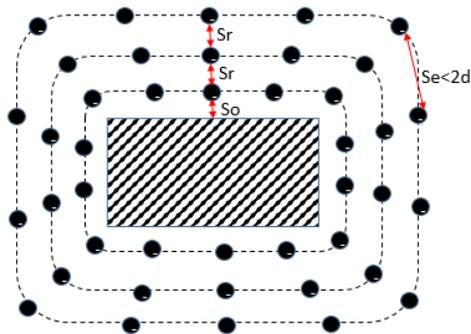
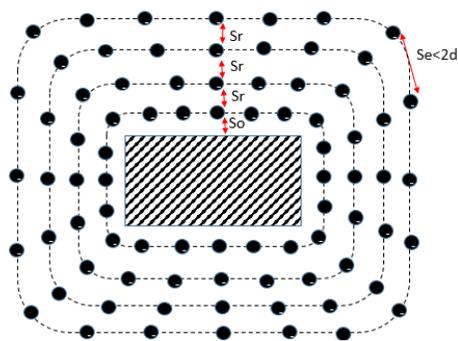


Figura 35 - Armadura de punção do pilar 28 para laje de 18cm



Sendo $S_0 \leq 0,5d$; $S_r \leq 0,75d$ e $S_e \leq 2d$

De acordo com o Comitê Técnico Conjunto ABECE/IBRACON (2015), o valor de f_{ywd} não pode ser superior a 300Mpa em lajes com espessura de até 15cm e também não superior a 435Mpa em lajes com alturas superiores a 35cm, sendo que para valores intermediários da altura da laje, permite-se fazer interpolação linear. Assim, para conectores de aço CA-50 e sendo que a espessura da laje varia de 30 a 18 cm,

$$\frac{435 - 300}{35 - 15} = \frac{435 - f_{ywd}}{35 - h}$$

$$6,75 \cdot (35 - h) = 435 - f_{ywd}$$

$$f_{ywd} = 198,75 + 6,75 \cdot h$$

A área de aço total em cada linha é dada por:

$$A_{sw} = (\text{n}^\circ \text{ de conectores}) \times 0,3117$$

Assim, a tensão resistente será: (Equação 5)

$$\tau_{Rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}+1,5 \cdot \frac{d}{s_r}} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen}\alpha}{u \cdot d} =$$

$$= 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (3000 \cdot \rho)^{\frac{1}{3}+1,33} \cdot \frac{A_{sw} \cdot (198,75+6,75 \cdot h) \cdot 1}{(180+4 \cdot \pi \cdot d) \cdot d}$$

- Tensão solicitante: Já calculada no item 4.2.1.2.

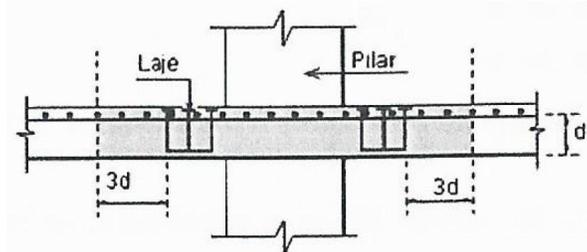
3.2.1.4 Tensão resistente e solicitante no contorno C” (a 2d da região armada)

- Tensão resistente: (Equação)

A taxa de armadura longitudinal deverá ser calculada novamente, considerando agora, uma largura correspondente à da região armada acrescida de 3d para cada lado

(figura 36). Para o caso estudado a taxa de armadura não se altera pois ainda é considerado a armadura referente a parte maciça da laje. Portanto, ρ permanece o mesmo.

Figura 36 – Seção para o novo cálculo de ρ



Fonte: Comitê Técnico Conjunto ABECE/IBRACON (2015)

$$\text{Assim } \tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (3000 \cdot \rho)^{1/3}$$

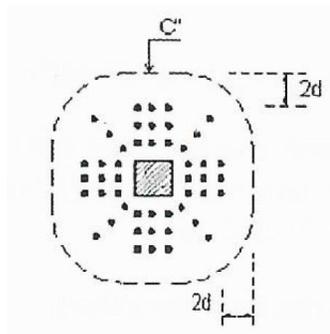
- Tensão solicitante: (Equação 6)

Para o perímetro crítico: (Equação 9)

$$u = 2 \cdot (c_1 + c_2) + 4 \cdot \pi \cdot d + 2 \cdot \pi \cdot p$$

De acordo com a figura 37, tem-se:

Figura 22 - Perímetro crítico além da região armada



Fonte: Comitê Técnico Conjunto ABECE/IBRACON (2015)

$$p = S_0 + 2 \cdot S_r = 0,5 \cdot d + (2,0,75 \cdot d) = 2d$$

Assim:

$$u = 2 \cdot (30 + 60) + 4 \cdot \pi \cdot d + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot d = 180 + 8 \cdot \pi \cdot d$$

Para os módulos de resistência plástica: (Equação 11)

$$W_{p1} = W_{p2} = \frac{c_1^2}{2} + c_1 \cdot c_2 + 4 \cdot c_2 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot c_1 + 2c_2 \cdot p + 16 \cdot d \cdot p + 4 \cdot p^2 + \pi \cdot c_1 \cdot p$$

$$W_{p1} = \frac{60^2}{2} + 60 \cdot 30 + 4 \cdot 30 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot 60 + 2 \cdot 30 \cdot 2 \cdot d + 16 \cdot d \cdot 2 \cdot d + 4 \cdot (2 \cdot d)^2 + \pi \cdot 60 \cdot 2 \cdot d = 3600 + [(240 + 240\pi) \cdot d] + 56d^2$$

$$W_{p2} = \frac{30^2}{2} + 30 \cdot 60 + 4 \cdot 60 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot 30 + 2 \cdot 60 \cdot 2 \cdot d + 16 \cdot d \cdot 2 \cdot d + 4 \cdot (2 \cdot d)^2 + \pi \cdot 30 \cdot 2 \cdot d = 2250 + [(480 + 120\pi) \cdot d] + 56d^2$$

Portanto:

$$\tau_{sd} = \frac{466,8}{(180 + 8 \cdot \pi \cdot d) \cdot d} + \frac{865,35}{(2250 + [(480 + 120\pi) \cdot d] + 56d^2) \cdot d} + \frac{4001,2}{(3600 + [(240 + 240\pi) \cdot d] + 56d^2) \cdot d}$$

3.2.1.5 Verificação

Após calculadas as tensões resistentes e solicitantes para todos os contornos, considerando ou não a armadura de punção, é possível obter o resultado das verificações

para o valor de espessura da laje desejada. Os resultados das verificações para a laje variando de 30 a 18cm de espessura podem ser vistos na Tabela 5 a seguir.

Tabela 5 - Verificações de punção para pilar 28

Espessura da laje (cm)	CONTORNO C		SEM ARMADURA DE PUNÇÃO		COM ARMADURA DE PUNÇÃO			
	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	CONTORNO C'		CONTORNO C'		CONTORNO C''	
			Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)
30	5,0914	2,1233	0,8946	0,8449	-	-	-	-
25	5,0914	2,3438	1,0135	1,1001	1,1453	1,1001	1,0135	0,6472
20	5,0914	2,8052	1,1181	1,5549	1,5838	1,5549	1,1181	0,9625
18	5,0917	3,1647	1,1702	2,0185	2,1213	2,0185	1,1702	1,0876

De acordo com as verificações, para o pilar 28 apenas a laje de 30cm não precisará de armadura de punção. Para a laje de 25cm foi adotada armadura tipo conector com 3 camadas de 10 conectores conforme mostrado na Figura 33. Já para a laje de 20cm foram necessárias 3 camadas com 14 conectores cada uma (Figura 34). E por último, para a laje de 18cm foram usadas 4 camadas com 20 conectores cada (Figura 35).

3.2.2 Pilar de borda P43

Esforços atuantes na ligação:

Tabela 6 - Esforços atuantes no pilar 43

Esforços	Espessura da laje (cm)			
	30	25	20	18
Fsd (kN)	466,48	452,76	439,04	439,04
Msd1 (kN.cm)	2899	3353	3831	4031
Msd2 (kN.cm)	1568	2010	2613	2960

- $C_1 = 20cm$ (perpendicular à borda livre)
- $C_2 = 40cm$ (paralelo à borda livre)

3.2.2.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (face do pilar)

- Tensão resistente: Já calculada no item 4.2.1.1. $\tau_{Rd2} = 5,09 MPa$

- Tensão solicitante (Equação 12):

$$\tau_{Rd1} = \frac{F_{Sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{Sd}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

Sendo

$$u^* = 2 \cdot a + C_1 \text{ (Equação 13)}$$

$$a \leq \begin{cases} 1,5 \cdot d \\ 0,5 \cdot C_1 = 20cm \end{cases}$$

Como a depende do valor de d , o perímetro crítico ficará em função de a . Então:

$$u = 2 \cdot a + 20$$

$$\text{Assim: } \tau_{Rd1} = \frac{47,6}{(2 \cdot a + 20) \cdot d}$$

Lembrando que no contorno C não há influência dos momentos.

3.2.2.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (a 2d da face do pilar) sem considerar armadura de punção

- Tensão resistente (Equação 3):

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3}$$

$$\text{Com } \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \leq 2 \text{ (seção 2.6.1.1.2)}$$

A taxa geométrica de armadura longitudinal ρ foi calculada de maneira análoga ao pilar 28, sendo diferente apenas o espaço considerado na direção y , uma vez que o pilar está posicionado na borda da laje.

Armadura em x : $\phi 16$ mm a cada 6cm

$$q = \frac{3d + C_2 + 3d}{s} = \frac{6d + 60}{6} \text{ barras}$$

$$asx = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,6^2}{4} = 2,011 \text{ cm}^2$$

$$\rho x = \frac{q \cdot asx}{d \cdot (6d + C_2)} = \frac{q \cdot 2,011}{d \cdot (6d + 60)}$$

Armatura em y: $\phi 16\text{mm}$ a cada 11cm

$$q = \frac{3d + C_1}{s} = \frac{3d + 20}{11} \text{ barras}$$

$$asy = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,6^2}{4} = 2,011 \text{ cm}^2$$

$$\rho y = \frac{q \cdot asx}{d \cdot (3d + C_1)} = \frac{q \cdot 2,011}{d \cdot (3d + 20)}$$

Assim, a taxa de armadura de flexão será: (Equação 4)

$$\rho = \sqrt{\rho x + \rho y}$$

Da mesma forma que no caso anterior, $\sigma_{cp} = 0$.

Assim:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (3000 \cdot \rho)^{1/3}$$

- Tensão solicitante (Equação 12):

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{Sd}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

Perímetro crítico reduzido (Equação 14):

$$u^* = 2 \cdot a + c_2 + 2 \cdot \pi \cdot d = 2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d$$

Excentricidade do perímetro crítico (Equação 18):

$$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1}{2 \cdot a + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d}$$

$$e^* = \frac{20 \cdot a - a^2 + \frac{20 \cdot 40}{2} + 2 \cdot 40 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20}{2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d}$$

Momento resultante da excentricidade (Equação 17):

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot e^*$$

$$M_{Sd}^* = 47,6 \cdot \frac{20 \cdot a - a^2 + 400 + 2 \cdot 40 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20}{2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d}$$

Momento resultante de cálculo (Equação 16):

$$M_{Sd} = (M_{Sd1} - M_{Sd}^*)$$

$$M_{Sd} = M_{Sd1} - \frac{20 \cdot a - a^2 + 400 + 2 \cdot 40 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20}{2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d}$$

Módulo de resistência plástica na direção perpendicular à borda livre:

$$e_{C'} = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + C_1 \cdot C_2 + 2 \cdot d \cdot C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot C_1 + 8 \cdot d^2}{2 \cdot C_1 + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d} \quad (\text{Equação 20})$$

$$e_{C'} = \frac{20^2 - a^2 + 20 \cdot 40 + 2 \cdot d \cdot 40 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot 20 + 8 \cdot d^2}{2 \cdot 20 + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d} = \frac{1200 - a^2 + 80d + 40\pi \cdot d + 8 \cdot d^2}{80 + 2 \cdot \pi \cdot d}$$

Se $e_{C'} \leq C_1 = 20$, então: (Equação 21)

$$W_{p1} = 2 \cdot e_{C'}^2$$

Se $C_1 = 20 < e_{c'} \leq C_1 + 4 \cdot d/\pi = 20 + 4 \cdot d/\pi$, então: (Equação 22)

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_c - \frac{c_1}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(c_1 + \frac{4 \cdot d}{\pi} - e_{c'} \right) + c_2 \cdot (c_1 + 2 \cdot d - e_{c'})$$

$$W_{p1} = 40 \cdot (e_c - 10) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(20 + \frac{4 \cdot d}{\pi} - e_{c'} \right) + 40 \cdot (20 + 2 \cdot d - e_{c'})$$

Se $e_{c'} > C_1 + 4 \cdot d/\pi$, então (Equação 23):

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_c - \frac{c_1}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(e_{c'} - c_1 - \frac{4 \cdot d}{\pi} \right) + c_2 \cdot (c_1 + 2 \cdot d - e_{c'})$$

$$W_{p1} = 40 \cdot (e_c - 10) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(e_{c'} - 20 - \frac{4 \cdot d}{\pi} \right) + 40 \cdot (20 + 2 \cdot d - e_{c'})$$

Módulo de resistência plástica na direção paralela à borda livre (Equação 28):

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1 \cdot C_2 + 4 \cdot C_1 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_2$$

$$W_{p2} = 1200 + 80 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 40$$

Valores de K_1 e K_2 :

São tabelados de acordo com tabela 1. Lembrando que K_1 depende da relação $\frac{C_1}{C_2} =$

$\frac{20}{40} = 0,5$ e K_2 da relação $\frac{C_2}{2C_1} = \frac{40}{2 \cdot 20} = 1$. Assim:

$$K_1 = 0,45 \text{ e } K_2 = 0,6$$

Então, a tensão solicitante é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{Fsd}{(2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d) \cdot d}$$

$$+ \frac{0,45 \cdot M_{sd}}{[40 \cdot (e_c - 10) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot (e_{c'} - 20 - \frac{4 \cdot d}{\pi}) + 40 \cdot (20 + 2 \cdot d - e_{c'})] \cdot d}$$

$$+ \frac{0,6 \cdot M_{sd2}}{(1200 + 80 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 40) \cdot d}$$

3.2.2.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (a 2d da face do pilar) considerando armadura de punção

- Tensão resistente:

De maneira análoga ao pilar 28, será considerada agora uma armadura de punção composta de conectores tipo pino com $\phi 8\text{mm}$, aço CA-50, distribuídas radialmente em torno do pilar como mostram as Figuras 38 e 39.

Figura 23- Armadura de punção do pilar 43 para laje de 20cm.

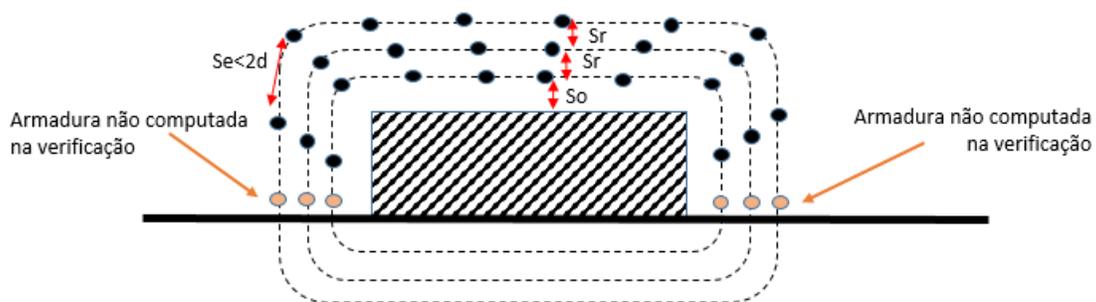
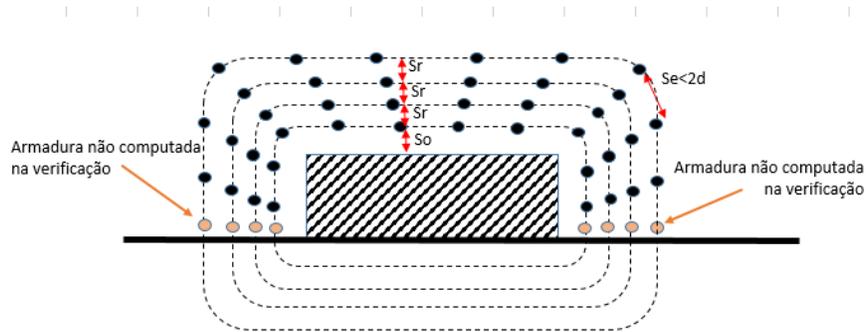


Figura 39 - Armadura de punção do pilar 43 para laje de 18cm.



Sendo $S_0 \leq 0,5d$; $S_r \leq 0,75d$; $S_e \leq 2d$

O valor de f_{ywd} já foi calculado na seção 4.2.1.3, resultando em:

$$f_{ywd} = 198,75 + 6,75 \cdot h$$

A área de aço total em cada linha é dada por:

$$A_{sw} = (\text{n}^\circ \text{ de conectores}) \cdot 0,3117$$

Assim, a tensão resistente será: (Equação 5)

$$\tau_{Rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}+1,5} \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha}{u \cdot d}$$

$$\tau_{Rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (3000 \cdot \rho)^{\frac{1}{3}+1,33} \cdot \frac{A_{sw} (198,75 + 6,75 \cdot h)}{u \cdot d}$$

3.2.2.4 Tensão resistente e solicitante no contorno C'' (a 2d da região armada)

Da mesma forma que foi feito no item 4.2.2.4, a taxa de armadura longitudinal deve ser calculada novamente, considerando agora, uma largura correspondente à da região

armada acrescida de 3d para cada lado. Entretanto para esse caso a região considerada também permanecerá dentro da região maciça da laje, e, portanto, a taxa de armadura se mantém a mesma calculada no item 4.2.2.2.

Sendo assim, a tensão resistente será (Equação 3):

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot 30)^{1/3}$$

- Tensão solicitante (Equação 12):

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{Sd}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

Perímetro crítico (Equação 15):

$$u = 2 \cdot a + c_2 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p = 2 \cdot a + 60 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p$$

Sendo p a distância da face do pilar até a última linha de conectores (armadura transversal).

Excentricidade do perímetro crítico (Equação 19):

$$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + \frac{C_1 \cdot C_2}{2} + 2 \cdot C_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1 + C_2 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + \frac{\pi \cdot p \cdot C_1}{2} + 2 \cdot p^2}{2 \cdot a + C_2 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p}$$

$$e^* = \frac{20 \cdot a - a^2 + \frac{20 \cdot 40}{2} + 2 \cdot 40 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20 + 40 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + \frac{\pi \cdot p \cdot 20}{2} + 2 \cdot p^2}{2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p}$$

Momento resultante da excentricidade (Equação 17):

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot e^*$$

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot \frac{20 \cdot a - a^2 + 400 + 80 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20 + 40 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + 10 \cdot \pi \cdot p + 2 \cdot p^2}{2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p}$$

Momento resultante de cálculo: (Equação 16)

$$M_{Sd} = (M_{Sd1} - M_{Sd}^*)$$

$$M_{Sd} = \left(M_{Sd1} - F_{Sd} \cdot \frac{20 \cdot a - a^2 + 400 + 80 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20 + 40 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + 10 \cdot \pi \cdot p + 2 \cdot p^2}{2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p} \right)$$

Módulo de resistência plástica na direção perpendicular à borda livre: (Equação 24)

$$e_{C''} = \frac{C_1 \cdot 2 + \pi \cdot (p+2 \cdot d) \cdot \left(c_1 + \frac{2 \cdot (p+2 \cdot d)}{\pi} \right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d)}{2 \cdot C_1 + C_2 + \pi(p+2 \cdot d)}$$

$$e_{C''} = \frac{400 + \pi \cdot (p+2 \cdot d) \cdot \left(20 + \frac{2 \cdot (p+2 \cdot d)}{\pi} \right) + 40 \cdot (20 + p + 2 \cdot d)}{80 + \pi(p+2 \cdot d)}$$

Se $e_{C'} \leq C_1 = 20$, então (Equação 25):

$$W_{p1} = 2 \cdot e_{C''}^2$$

Se $C_1 = 20 < e_{C'} \leq C_1 + 2 \cdot \frac{p+2 \cdot d}{\pi}$, então (Equação 26):

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_{C''} - \frac{c_1}{2} \right) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(c_1 + \frac{2 \cdot (p+2 \cdot d)}{\pi} - e_{C''} \right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d - e_{C''})$$

$$W_{p1} = 40 \cdot (e_{C''} - 10) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(20 + \frac{2 \cdot (p + 2 \cdot d)}{\pi} - e_{C''} \right) + 40 \cdot (20 + p + 2 \cdot d - e_{C''})$$

Se $e_{C'} > C_1 + 4 \cdot \frac{d}{\pi} = 20 + 4 \cdot d/\pi$, então (Equação 27):

$$W_{p1} = 40 \cdot (e_{C''} - 10) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(e_{C''} - 20 - \frac{2 \cdot (p + 2 \cdot d)}{\pi} \right) + 40 \cdot (20 + p + 2 \cdot d - e_{C''})$$

Módulo de resistência plástica na direção paralelo à borda livre: (Equação 29)

$$W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_1 \cdot C_2 + 4 \cdot C_1 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot c_2 + 2 \cdot C_1 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + \frac{\pi \cdot p \cdot C_2}{2} + 2 \cdot p^2 =$$

$$2100 + 80 \cdot d + 8 \cdot d^2 + 60 \cdot \pi \cdot d + 40 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + 30 \cdot \pi \cdot p + 2 \cdot p^2$$

Valores de K_1 e K_2 (Tabela 1):

São tabelados de acordo com tabela 1. Lembrando que K_1 depende da relação $\frac{C_1}{C_2} = \frac{20}{60} = 0,333$ e K_2 depende da relação $\frac{C_2}{2 \cdot C_1} = \frac{60}{40} = 1,5$. Como não há valores de k correspondentes a essas relações, foi feita uma interpolação linear para encontrar os valores de K .

Assim: $K_1 = 0,39$ e $K_2 = 0,66$

Então, a tensão solicitante é dada por:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{sd}}{(2 \cdot a + 60 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p) \cdot d} +$$

$$+ \frac{0,39 \cdot \left(M_{Sd1} - F_{sd} \cdot \frac{20 \cdot a - a^2 + 400 + 80 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20 + 40 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + 10 \cdot \pi \cdot p + 2 \cdot p^2}{2 \cdot a + 40 + 2 \cdot \pi \cdot d + \pi \cdot p} \right)}{\left[40 \cdot (e_{c''} - 10) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(e_{c''} - 20 - \frac{2 \cdot (p + 2 \cdot d)}{\pi} \right) + 40 \cdot (20 + p + 2 \cdot d - e_{c''}) \right] \cdot d} +$$

$$+ \frac{0,66 \cdot M_{Sd2}}{2100 + 80 \cdot d + 8 \cdot d^2 + 60 \cdot \pi \cdot d + 40 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + 30 \cdot \pi \cdot p + 2 \cdot p^2}$$

3.2.2.5 Verificação

Da mesma forma que foi feito para o item 4.2.1, as tensões resistentes e solicitantes do pilar P43, foram calculadas variando a espessura da laje. Assim foi possível novamente

calcular as tensões para todos os contornos, considerando ou não a armadura de punção. Os resultados das verificações para a laje variando de 34 a 18cm podem ser vistos na Tabela 7.

Tabela 7 - Verificações de punção para pilar 43.

Espessura da laje (cm)	CONTORNO C		SEM ARMADURA DE PUNÇÃO		COM ARMADURA DE PUNÇÃO			
			CONTORNO C'		CONTORNO C'		CONTORNO C''	
	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)						
30	5,0914	2,2956	1,1804	0,7954	-	-	-	-
25	5,0914	2,7742	1,2447	1,1257	-	-	-	-
20	5,0914	3,5636	1,2508	1,7505	1,8437	1,7505	1,2508	1,1046
18	5,0914	4,2005	1,2508	2,1997	2,2703	2,1997	1,2508	1,248

Após realizadas as verificações foi possível dispensar armadura de punção no pilar 43 para laje de 30 e 25cm de espessura. Já para a laje de 20cm, foram adotadas, 3 camadas de 8 conectores cada (Figura 38), enquanto que para a laje de 18cm foram usadas 4 camadas com 10 conectores cada uma (Figura 39).

3.2.3 Pilar de canto P44

3.2.3.1 Considerando o lado perpendicular à borda livre adotada $C_1 = 20$

Esforços atuantes na ligação:

Tabela 8 - Esforços atuantes no pilar 44

Esforços	Espessura da laje (cm)			
	30	25	20	18
Fsd (kN)	123,886	76,272	61,74	57,064
Msd1 (kN.cm)	612	387	553	718
Msd2 (kN.cm)	4055	4271	4523	4643

- $C_1 = 20\text{cm}$
- $C_2 = 60\text{cm}$

3.2.3.1.1 Tensão resistente e solicitante no contorno C (face do pilar)

- Tensão resistente: Já calculada no item 4.2.1.1. $\tau_{Rd2} = 5,09 \text{ MPa}$
- Tensão solicitante (Equação 12):

$$\tau_{Rd1} = \frac{F_{sd}}{u * d}$$

Lembrando que no contorno C não há influência dos momentos

Perímetro crítico reduzido (Equação 30):

$$u * = a_1 + a_2, \text{ sendo } a_1 \leq \begin{cases} 1,5 \cdot d \\ 0,5 \cdot C_1 = 10 \text{ cm} \end{cases} \text{ e } a_2 \leq \begin{cases} 1,5 \cdot d \\ 0,5 \cdot C_2 = 30 \text{ cm} \end{cases}$$

Como a_1 e a_2 dependem do valor de d , o perímetro crítico ficará em função de a_1 e a_2 .

Assim:

$$\tau_{Rd1} = \frac{F_{sd}}{(a_1 + a_2) \cdot d}$$

3.2.3.1.2 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (a 2d da face do pilar) sem considerar armadura de punção

- Tensão resistente (Equação 3):

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}}\right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{1/3}$$

A taxa geométrica de armadura longitudinal ρ foi calculada da mesma forma que para os pilares 28 e 43. Neste caso o espaço considerado na direção x e y foi igual, uma vez

que o pilar está posicionado no canto da laje. Para ambos o espaço considerado foi definido pela dimensão do pilar mais 3d.

Armadura em x: $\phi 16\text{mm}$ a cada 8cm

$$q = \frac{3d+C_2}{s} = \frac{3d+60}{8} \text{ barras}$$

$$asx = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,6^2}{4} = 2,011\text{cm}^2$$

$$\rho_x = \frac{q \cdot asx}{d \cdot (3d + C_2)} = \frac{q \cdot 2,011}{d \cdot (3d + 60)}$$

Armadura em y: $\phi 16\text{mm}$ a cada 10cm

$$q = \frac{3d+C_1}{s} = \frac{3d+20}{10} \text{ barras}$$

$$asy = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,6^2}{4} = 2,011\text{cm}^2$$

$$\rho_y = \frac{q \cdot asx}{d \cdot (3d + C_1)} = \frac{q \cdot 2,011}{d \cdot (3d + 20)}$$

Assim, a taxa de armadura de flexão será: (Equação 4)

$$\rho = \sqrt{\rho_x + \rho_y}$$

Da mesma forma que nos casos anterior, $\sigma_{cp} = 0$.

Assim:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (3000 \cdot \rho)^{1/3}$$

Assim:

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (3000 \cdot \rho.)^{1/3}$$

- Tensão solicitante: (Equação 12)

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{Sd}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K_2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d}$$

Perímetro crítico reduzido: (Equação 31)

$$u^* = a_1 + a_2 + \pi \cdot d$$

Excentricidade do perímetro crítico: (Equação 33)

$$e^* = \frac{C_1 \cdot a - a^2 + a_2 \cdot C_1 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d)}$$

$$e^* = \frac{20 \cdot a_1 - a^2 + 20 \cdot a_2 + 2 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d)}$$

Momento resultante da excentricidade: (Equação 17)

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot e^*$$

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot \frac{20 \cdot a_1 - a^2 + 20 \cdot a_2 + 2 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d)}$$

Momento resultante de cálculo: (Equação 16)

$$M_{Sd} = (M_{Sd1} - M_{Sd}^*)$$

$$M_{Sd} = M_{Sd1} - \left[F_{Sd} \cdot \frac{20 \cdot a_1 - a^2 + 20 \cdot a_2 + 2 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d)} \right]$$

Módulo de resistência plástica: (Equação 20)

$$e_{c'} = \frac{0,5C_1^2 + C_1 \cdot C_2 + 2 \cdot d \cdot C_2 + \pi \cdot d \cdot C_1 + 4 \cdot d^2}{C_1 + C_2 + \pi \cdot d}$$

$$e_{c'} = \frac{10^2 + 20 \cdot 60 + 120 \cdot d + \pi \cdot d \cdot 20 + 4 \cdot d^2}{80 + \pi \cdot d} = \frac{1300 + 120 \cdot d + \pi \cdot d \cdot 20 + 4 \cdot d^2}{80 + \pi \cdot d}$$

Se $e_{c'} \leq C_1 = 20$, então: (Equação 21)

$$W_{p1} = 2 \cdot e_{c'}^2$$

Se $C_1 = 20 < e_{c'} \leq C_1 + 4 \cdot \frac{d}{\pi} = 20 + 4 \cdot \frac{d}{\pi}$, então: (Equação 22)

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_c - \frac{c_1}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(c_1 + \frac{4 \cdot d}{\pi} - e_{c'} \right) + c_2 \cdot (c_1 + 2 \cdot d - e_{c'})$$

$$W_{p1} = 40 \cdot (e_c - 10) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(20 + \frac{4 \cdot d}{\pi} - e_{c'} \right) + 60 \cdot (20 + 2 \cdot d - e_{c'})$$

Se $e_{c'} > C_1 + 4 \cdot d/\pi$, então: (Equação 23)

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_c - \frac{c_1}{2} \right) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(e_{c'} - c_1 - \frac{4 \cdot d}{\pi} \right) + c_2 \cdot (c_1 + 2 \cdot d - e_{c'})$$

$$W_{p1} = 40 \cdot (e_c - 10) + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \left(e_{c'} - 20 - \frac{4 \cdot d}{\pi} \right) + 60 \cdot (20 + 2 \cdot d - e_{c'})$$

Valor de K:

São tabelados de acordo com tabela 1. Lembrando que K depende da relação $\frac{C_1}{C_2} = \frac{20}{60} = 0,333$. Como não há valores de k correspondentes a relações de $\frac{C_1}{C_2}$ menores que 0,5, foi feita uma interpolação linear para encontrar o valor de K. Assim: $K_1 = 0,39$.

Então, a tensão solicitante é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{(a_1 + a_2 + \pi \cdot d) \cdot d} + \frac{0,39 \cdot M_{sd}}{W_{p1} \cdot d}$$

3.2.3.1.3 Tensão resistente e solicitante no contorno C' (a 2d da face do pilar) considerando armadura de punção

- Tensão resistente (Equação 5):

Será considerada agora a armadura de punção composta de conectores tipo pino com $\phi 8\text{mm}$, aço CA-50, distribuídas radialmente em torno do pilar como mostram as Figuras 40 e 41.

Figura 40 - Armadura de punção do pilar 44 para laje de 20cm

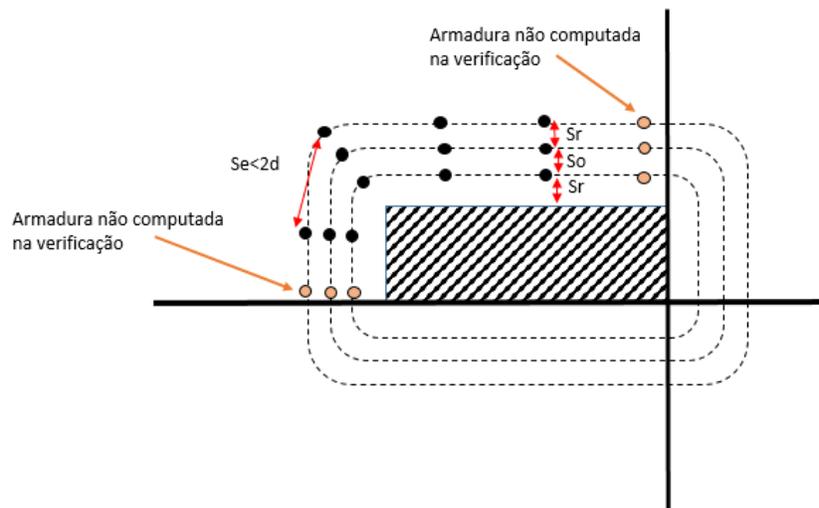
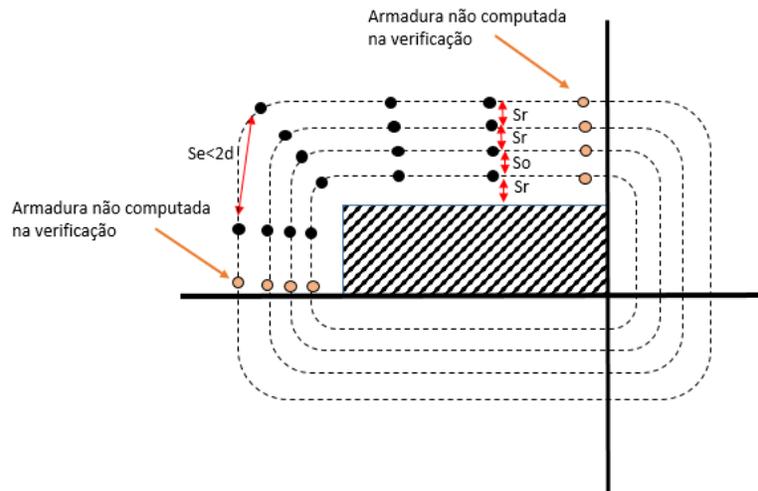


Figura 41 - Armadura de punção do pilar 44 para laje de 18cm



Sendo $S_0 \leq 0,5d$; $S_r \leq 0,75d$; $S_e \leq 2d$

O valor de f_{ywd} já foi calculado para os pilares anteriores, resultando em:

$$f_{ywd} = 198,75 + 6,75 \cdot h$$

A área de aço total em cada linha é dada por:

$$A_{sw} = (\text{n}^\circ \text{ de conectores}) \cdot 0,3117$$

Assim, a tensão resistente será (Equação 5):

$$\tau_{Rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_{ck})^{\frac{1}{3}+1,5} \cdot \frac{d}{s_r} \cdot \frac{A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha}{u \cdot d}$$

$$\tau_{Rd3} = 0,10 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (3000 \cdot \rho)^{\frac{1}{3}+1,33} \cdot \frac{A_{sw} (198,75+6,75 \cdot h)}{u \cdot d}$$

3.2.3.1.4 Tensão resistente e solicitante no contorno C” (a 2d da região armada)

Novamente a taxa de armadura longitudinal deve ser recalculada, considerando uma largura correspondente à da região armada acrescida de 3d para cada lado. Mas da mesma forma que para os casos anteriores a região considerada permanece dentro da região maciça da laje, fazendo com que a taxa de armadura se mantenha a mesma calculada no item 4.2.3.1.2.

Assim, a tensão resistente será: (Equação 3)

$$\tau_{Rd1} = 0,13 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) \cdot (100 \cdot \rho \cdot 30)^{1/3}$$

- Tensão solicitante (Equação 12):

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u \cdot d} + \frac{K_1 \cdot M_{Sd}}{W_{p1} \cdot d}$$

Perímetro crítico (Equação 32):

$$u = a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot p}{2}$$

Sendo p a distância da face do pilar até a última linha de conectores (armadura transversal).

Excentricidade do perímetro crítico (Equação 34):

$$e^* = \frac{C_1 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot C_1 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot C_1 + 2 \cdot a_2 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + \frac{\pi \cdot p \cdot C_1}{2} + 2 \cdot p^2}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot p}{2})}$$

$$e^* = \frac{20 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot 20 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20 + 2 \cdot a_2 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + 10 \cdot \pi \cdot p + 2 \cdot p^2}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot p}{2})}$$

Momento resultante da excentricidade (Equação 17):

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot e^*$$

$$M_{Sd}^* = F_{Sd} \cdot \frac{20 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot 20 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20 + 2 \cdot a_2 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + 10 \cdot \pi \cdot p + 2 \cdot p^2}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot p}{2})}$$

Momento resultante de cálculo (Equação 16):

$$M_{Sd} = (M_{Sd1} - M_{Sd}^*)$$

$$M_{Sd} = \left(M_{Sd1} - F_{Sd} \cdot \frac{20 \cdot a_1 - a_1^2 + a_2 \cdot 20 + 4 \cdot a_2 \cdot d + 8 \cdot d^2 + \pi \cdot d \cdot 20 + 2 \cdot a_2 \cdot p + 8 \cdot d \cdot p + 10 \cdot \pi \cdot p + 2 \cdot p^2}{2 \cdot (a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot p}{2})} \right)$$

Módulo de resistência plástica (Equação 38):

$$e_{C'} = \frac{C_1 \cdot ^2 + \pi \cdot (p+2 \cdot d) \cdot (c_1 + \frac{2 \cdot (p+2 \cdot d)}{\pi}) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d)}{2 \cdot C_1 + C_2 + \pi(p+2 \cdot d)}$$

$$e_{C'} = \frac{400 + \pi \cdot (p+2 \cdot d) \cdot (20 + \frac{2 \cdot (p+2 \cdot d)}{\pi}) + 60 \cdot (20 + p + 2 \cdot d)}{100 + \pi(p+2 \cdot d)}$$

Se $e_{C'} \leq C_1 = 20$, então (Equação 25):

$$W_{p1} = 2 \cdot e_{C'}^2$$

Se $C_1 < e_{C'} \leq C_1 + 2 \cdot \frac{p+2 \cdot d}{\pi} = 20 + 2 \cdot (p + 2 \cdot d) / \pi$, então (Equação 39):

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_{C'} - \frac{c_1}{2} \right) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot d \cdot \left(c_1 + \frac{2 \cdot (p + 2 \cdot d)}{\pi} - e_{C'} \right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d - e_{C'})$$

$$W_{p1} = 40 \cdot (e_{C'} - 10) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(20 + \frac{2 \cdot (p + 2 \cdot d)}{\pi} - e_{C'} \right) + 60 \cdot (20 + p + 2 \cdot d - e_{C'})$$

Se $e_{c'} > C_1 + 4 \cdot \frac{d}{\pi} = 20 + 4 \cdot d/\pi$, então (Equação 40):

$$W_{p1} = 2 \cdot c_1 \cdot \left(e_{c''} - \frac{c_1}{2} \right) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(e_{c''} - c_1 - \frac{4 \cdot 2 \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot d}{\pi} \right) + c_2 \cdot (c_1 + p + 2 \cdot d - e_{c''})$$

$$W_{p1} = 40 \cdot (e_{c''} - 10) + \pi \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot \left(e_{c''} - 20 - \frac{2 \cdot (p + 2 \cdot d) \cdot d}{\pi} \right) + 60 \cdot (20 + p + 2 \cdot d - e_{c''})$$

Valor de K :

Já determinados no item 4.2.3.1.2 $K = 0,39$

Então, a tensão solicitante é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{Fsd}{(a_1 + a_2 + \pi \cdot d + \frac{\pi \cdot p}{2}) \cdot d} + \frac{0,39 \cdot M_{sd}}{W_{p1} \cdot d}$$

3.2.3.2 Considerando o lado perpendicular à borda livre adotada $C_1 = 60$

Ao considerar a borda livre perpendicular a lado do pilar de 60cm, serão realizados os mesmos cálculos do item 4.2.3.1. Apenas serão invertidos os valores de C_1 e C_2 e o momento a ser considerado agora será o momento em y .

3.2.3.3 Verificação

Analogamente aos pilares anteriores, as verificações foram realizadas variando a espessura da laje. Os resultados podem ser visualizados na tabela 9 e 10 a seguir. Sendo que a tabela 9 apresenta as verificações considerando o lado de 20cm do pilar como sendo

perpendicular à borda livre adotada, e a tabela 10 apresenta as verificações quando considerado o lado de 60cm do pilar como sendo perpendicular à borda livre adotada.

Tabela 9 - Verificações de punção para pilar 44 com $C1=20\text{cm}$.

Espessura da laje (cm)	CONTORNO C		SEM ARMADURA DE PUNÇÃO		COM ARMADURA DE PUNÇÃO			
			CONTORNO C'		CONTORNO C'		CONTORNO C''	
	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)
30	5,0914	1,2192	0,8809	0,4071	-	-	-	-
25	5,0914	0,9346	0,9288	0,3592	-	-	-	-
20	5,0914	1,2112	0,9334	0,492	1,6742	0,492	0,9334	0,2931
18	5,0914	1,4147	0,9334	0,5898	1,9081	0,5898	0,9334	0,3042

Tabela 10 - Verificações de punção para pilar 44 com $C1=60\text{cm}$.

Espessura da laje (cm)	CONTORNO C		SEM ARMADURA DE PUNÇÃO		COM ARMADURA DE PUNÇÃO			
			CONTORNO C'		CONTORNO C'		CONTORNO C''	
	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)	Tensão resistente (MPa)	Tensão solicitante (MPa)
30	5,0914	1,2192	0,8809	0,4071	-	-	-	-
25	5,0914	0,9346	0,9288	0,4062	-	-	-	-
20	5,0914	1,2112	0,9334	0,8155	1,6742	0,8155	0,9334	0,5875
18	5,0914	1,4147	0,9334	1,0851	1,9081	1,0851	0,9334	0,8491

4. ANÁLISES E CONCLUSÕES

Após todos os estudos e análises é possível avaliar a real importância de cada etapa do trabalho. O estudo e conhecimento sobre o assunto é fundamental para realização dos cálculos e verificações. Assim como os cálculos são com certeza indispensáveis para real entendimento de cada procedimento e conceito.

Realizar os cálculos variando a espessura da laje também foi de fundamental importância. Fez com que a influência de cada parâmetro ficasse mais evidente. É possível ver claramente a influência do “efeito escala” mencionado no item 2.3.6. Nota-se que a tensão resistente à punção tende a aumentar ao diminuir a espessura da laje. Entretanto, para laje com espessura menor que 20cm isso não ocorre mais. Por isso as tensões resistentes no contorno C’ das lajes de 20 e 18cm, quando não considerada armadura de punção, são tão próximas ou até mesmo iguais, sendo que o único parâmetro que permanece diferente para a determinação da tensão resistente é a taxa de armadura de flexão.

Outra coisa que se tornou mais evidente com a possibilidade de manipular algumas variáveis foi a maneira que a armadura transversal influencia na resistência à punção. Para aumentar a resistência no contorno C’ é necessário aumentar o número de conectores da camada ou aumentar o diâmetro do conector, pois a resistência está diretamente ligada a área de aço por camada. Já para aumentar a resistência no contorno C’’ é preciso aumentar o

número de camadas de conectores, afim de transferir o esforço solicitante para mais longe do pilar fazendo, com que o espaço diminua. Essas observações estão de acordo com os mecanismos de ruptura mencionados na seção 2.2.

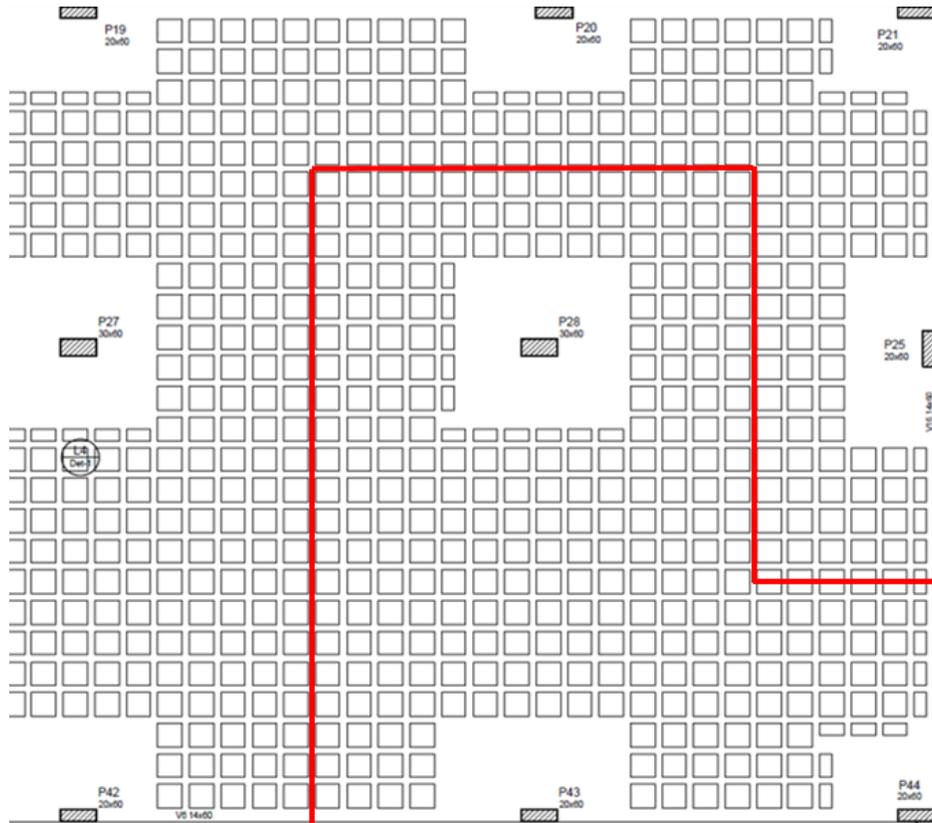
Após realizar todos os cálculos, análises e por fim chegar nas soluções encontradas buscou-se uma maneira de comparar umas com as outras. Com o objetivo de se ter um parâmetro em comum, em que se pudesse analisar a melhor solução a ser adota, calculou-se uma estimativa do custo do material usado para cada solução.

De acordo com as verificações realizadas, as soluções possíveis são as seguintes:

- Laje de 30cm sem armadura de punção;
- Laje de 25cm com 3 camadas de 10 conectores em cada camada no pilar 28;
- Laje de 20cm com 3 camadas de 14 conectores em cada camada no pilar 28; 3 camadas de 8 conectores em cada camada no pilar 43; e 3 camadas de 4 conectores em cada camada no pilar 44;
- Laje com 18cm com 4 camadas de 20 conectores em cada camada no pilar 28; 4 camadas de 10 conectores em cada camada no pilar 43; e 4 camadas de 4 conectores em cada camada no pilar 44;

Para avaliar o consumo de concreto em cada solução, foi delimitada uma região da laje em torno dos pilares selecionados para estudo, de forma que as soluções que supostamente fossem adotadas para os demais pilares, não influenciassem na análise. A região delimitada pode ser vista na figura 42 a seguir.

Figura 42 - Delimitação da laje para estimativa de consumo de concreto.



A área total delimitada possui 115,04m², sendo 16,12m² de laje maciça e 98,92m² de laje nervurada. Para o cálculo do volume de concreto da laje nervurada foi descontado o volume ocupado pelo preenchimento, sendo que para cada espessura de laje foi considerada uma cubeta com altura diferente. Para laje de 30cm a altura considerada foi de 25cm, para as de 25, 20 e 18cm a altura considerada foi de 20, 15 e 15cm respectivamente. Sendo assim, o volume estimado de concreto para as diferentes espessuras de laje adotadas pode ser visto na Tabela 11.

Tabela 11 - Estimativa do volume de concreto para cada espessura de laje adotada.

Volume de concreto (m ³)	Espessura da laje (cm)			
	30	25	20	18
Laje nervurada	12,23	10,59	9,707	8,088
Laje maciça	4,83	4,03	3,22	2,901
Total	17,06	14,62	12,927	10,989

Os valores referentes ao custo tanto do concreto quanto da armadura de punção foram fornecidos por empresas especializadas em cada material. O preço fornecido do m³ de concreto de 30Mpa foi de R\$ 296,00. Já o preço da armadura de punção é variável de acordo com a quantidade de camadas. Para os conectores de diâmetro 8mm, que foram os utilizados na análise, os preços estão apresentados na tabela a seguir.

Tabela 12 - Preço conectores para punção de 8mm de diâmetro

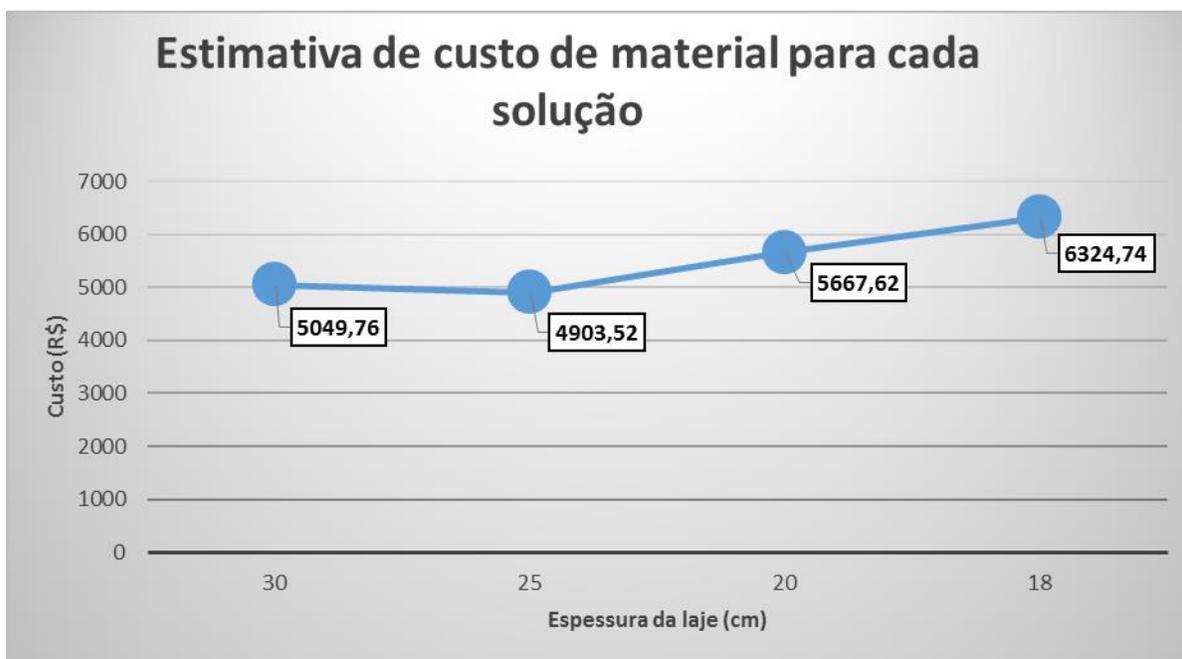
Preço conectores						
Nº camadas	3	4	5	6	7	8
Preço (R\$)	57,6	76,8	96	115,2	134,4	153,6

Com o preço de cada material e a quantidade necessária para cada solução foi possível então realizar uma estimativa de custo. O resultado pode ser visto na tabela 13 e no gráfico da figura 43 a seguir.

Tabela 13 - Estimativa de custo para cada solução

Espessura da laje (cm)	Volume de concreto (m ³)	Preço do concreto (R\$)	Quantidade de conectores	Preço armadura de punção (R\$)	Preço total (R\$)
30	17,06	5049,76	0	0	5049,76
25	14,62	4327,52	10	576	4903,52
20	12,92	3824032	32	184302	5667,62
18	10,98	3252,74	40	3072	6324,74

Figura 24 - Gráfico com a estimativa de custo de material para cada solução



Como é possível ver nos resultados obtidos, apesar de o projeto original ter adotado a solução com 30cm de espessura, nessa análise, a solução com 25cm aparece como a mais viável economicamente quando considerado apenas o estado limite último de punção. Depois disso, ao diminuir ainda mais a espessura da laje, nota-se que o custo só tende a aumentar, pois a quantidade de armadura necessária torna-se cada vez maior e não compensa a economia com o concreto.

Ao analisar o custo, deve-se lembrar que não foram considerados os custos de mão de obra, o que poderia aumentar o preço das soluções em que se adota a armadura de punção. Além disso, adotando-se a laje de 30cm, nenhum pilar precisaria de armadura de punção, diferente do que acontece para outras espessuras, em que alguns pilares precisariam e outros não. Isso tende a dificultar a execução. Por outro lado, sabe-se que apenas a armadura de punção é capaz de aumentar a ductilidade da ligação, o que não aconteceria na laje de 30cm. Dessa forma, caso a estabilidade global da estrutura dependesse da resistência da laje à punção, a armadura de punção é recomendada pela NBR6118:2014, de acordo com o que foi citado na seção 2.3.3.

Outro ponto importante de ser observado é que todo o estudo realizado se concentrou apenas no estado limite último referente à punção. Em nenhum momento foram

realizadas análises para avaliar o estado limite de serviço da laje. Muito provavelmente as lajes de menor espessura, embora resistam ao estado limite último de punção quando utilizada armadura transversal, teriam uma deformação muito grande e não atenderiam ao estado limite de serviço.

Dessa forma, ficam evidentes as limitações referentes à análise quando só se realiza as verificações da laje a punção, sendo que a solução mais adequada para estrutura depende de diversos fatores não abordados neste trabalho. O mais adequado seria fazer uma análise global da estrutura, analisando também os estados limites últimos de flexão da laje, assim como os estados limites de serviço.

Apesar de todas essas limitações é possível afirmar que os objetivos gerais e específicos impostos para esse trabalho foram alcançados. Foi possível consolidar conceitos vistos nas disciplinas de estruturas da graduação, como cisalhamento, esforços de cálculo, detalhamento de laje, entre outros conceitos e análises; e ao mesmo tempo ampliar os conhecimentos para algo novo que é o estado limite último de uma laje à punção.

5. REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS NBR6118: Projeto de Estruturas de Concreto Armado. Rio de Janeiro, 2014.

CARVALHO, R.C., PINHEIRO, L.M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. São Paulo: Pini, 2009. v.2.

COMITÊ TÉCNICO CONJUNTO ABECE/IBRACON. **ABNT NBR 6118:2014 – Comentários e Exemplos de Aplicação**. São Paulo, 2015

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E.. **Construções de concreto: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Interciência, v.2. Rio de Janeiro, 1978.

MARTINELLI, D.A. et al.(1983). **Resultados experimentais sobre ruína das ligações laje-pilar em cantos e bordas de lajes-cogumelo**. São Carlos, EESC.

MELGES, J.L.P **Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experiencial**. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1995.

PINTO, R.C.A. **Punção assimétrica em lajes**. Dissertação de Mestrado em Ciências em Engenharia Civil – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1993.

RABELLO, F.T. **Análise comparativa de normas para a punção em lajes de concreto armado**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2010.

REGAN, P.E. (1985) **Shear combs, reinforcement against punching**. *The Structural Engineer*, v.636B, n.4.

TAKEYA, T. (1981) **Estudo experimental da ruína de ligações laje-pilar em bordas de lajes-cogumelo**. São Carlos. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

TRAUTWEIN, L.M. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado: análise experimental e numérica**. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2006.