

Un Rau Gabriel Panasowicz Hwang

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL E GEOTÉCNICA DE UM MURO DE
CONTENÇÃO COM O USO DO SEARCH GROUP ALGORITHM**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Departamento
de Engenharia Civil para a obtenção do Título de Engenheiro
Civil.

Orientadora

UFSC: Dra. Patrícia de Oliveira Faria

Coorientador

UFSC: Dr. Rafael Holdorf Lopez

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Hwang, Un Rau Gabriel Panasowicz

Otimização estrutural e geotécnica de um muro de contenção com o uso do Search Group Algorithm / Un Rau Gabriel Panasowicz Hwang ; orientadora, Patrícia de Oliveira Faria ; coorientador, Rafael Holdorf Lopez. - Florianópolis, SC, 2016.

84 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Graduação em Engenharia Civil.

Inclui referências

1. Engenharia Civil. 2. Otimização Meta-heurística. 3. Muro de contenção cantilever. 4. Search Group Algorithm. 5. Chaveta de resistência translacional. I. de Oliveira Faria, Patrícia. II. Holdorf Lopez, Rafael. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

Un Rau Gabriel Panasowicz Hwang

**OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL E GEOTÉCNICA DE UM MURO DE
CONTENÇÃO COM O USO DO SEARCH GROUP ALGORITHM**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado aprovado para a obtenção do Título de "Engenheiro Civil", e aprovado em sua forma final pelo Departamento de Engenharia Civil.

Florianópolis, 05 de dezembro 2016.

Banca Examinadora:



Dra. Patrícia de Oliveira Faria
Orientadora
UFSC

Dra. Gracieli Dienstmann
Universidade Federal de Santa Catarina

Dr. Otávio Augusto Alves da Silveira
Universidade Federal de Santa Catarina

Este trabalho é dedicado aos meus amigos e aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Amélia Panasowicz e Hwung Chun Ray, e às minhas irmãs, Fabiola e Jaqueline Panasowicz Hwung, pelo amor, paciência e assistência.

Aos meus amigos Guilherme Kawase Falk, Patrícia Kawase e Pedro Falk por estarem presentes em todos os momentos de minha estadia em Florianópolis, darem-me suporte nos momentos mais difíceis de minha vida e me acolherem como um membro de seus próprios.

À minha professora e orientadora Patrícia de Oliveira Faria por sua condescendência e por sempre me encorajar e motivar. Eu que sempre fui um aluno difícil, fui tratado tal qual se trata o próprio filho.

À Nicole Trentini por me ajudar na correção ortográfica deste trabalho e abrir-me os olhos para o que anos de engenharia podem fazer ao português de uma pessoa.

Ao meu cunhado Otávio Teixeira Pinto por compartilhar seus conhecimentos sobre variados temas, que muito me ajudaram na elaboração deste trabalho.

Aos integrantes da banca, Gracieli Dienstmann e Otávio Augusto Alves da Silveira pela participação e pelas críticas construtivas que muito me ajudaram a observar os erros e pontos a serem melhorados no trabalho.

Por último, a todos os meus amigos que fizeram e fazem parte de minha vida, por todas as boas experiências compartilhadas, por suas influências em minha personalidade e base moral construídas até então.

Por onde, quando, em que desvão
Os largareis, ó desvairado?
Esses pezinhos! E onde, então,
Flores pisais, sobre qual prado?
Nados em ócio oriental,
Na triste neve boreal
Pegadas vossas não deixastes:
Fofos tapetes vós amastes,
Pelo seu fino roçagar,
Há quanto tempo eu olvidei
Por vós fama, glórias, lei,
Confinamento, e o pátrio lar?
Se foi o tempo juvenil,
Qual pisar vosso, tão sutil.

(Alexandr Pushkin, 1833)

RESUMO

O muro de contenção é um sistema construtivo comumente utilizado em situações com instabilidade geotécnica. Aplicou-se, neste trabalho, o algoritmo de otimização meta-heurístico *Search Group Algorithm* (SGA) para obtenção das funções objetivo independentes de peso e de custo em dois exemplos de muros de contenção cantilever. Foram consideradas as estabilidades geotécnicas de tombamento, deslizamento e capacidade de suporte da fundação, e os requisitos estruturais de esforços flexurais e cortantes em quatro seções críticas do muro para a formulação matemática do problema. As variáveis de projeto geométricas foram tomadas como contínuas e as variáveis de projeto estruturais como discretas. Não foi feita análise de função multiobjetivo neste problema, portanto foram avaliadas as funções de peso e custo separadamente. O objetivo do presente trabalho é avaliar a eficiência do SGA através dos valores minimizados de peso e custo em duas situações diferentes, as duas servem para comparar os resultados obtidos pelo SGA aos obtidos por Camp e Akin com o *Big Bang-Big Crunch Algorithm* (BB-BC) e a segunda para ponderar o efeito da adição de uma chave de resistência translacional na base do muro. Nos dois exemplos é feita a análise de sensibilidade por variação paramétrica de sobrecarga, ângulo de inclinação do talude e ângulo de atrito interno do solo de aterro, e no primeiro exemplo é analisada a convergência do algoritmo proposto. Cada resultado foi obtido por 100 execuções do algoritmo e elencados em melhor função objetivo, média e desvio padrão.

Palavras-chave: Otimização. Meta-heurística. Muros de Contenção. Search Group Algorithm. SGA. Estabilidade geotécnica. Dimensionamento estrutural.

ABSTRACT

The retaining wall is a constructive system commonly used in situations where geotechnical instability occurs. A metaheuristic optimization algorithm, the Search Group Algorithm (SGA), was used to obtain the cost and weight objective functions from two examples of cantilever retaining walls. Geotechnical stability and structural requirements were considered in the mathematical formulation of the problem, which are comprised by the overturning moments criteria, sliding resistance, soil bearing capacity and flexural and shear requirements in four critical sections. The geometric design variables were taken as continuous and the structural design variables were taken as discrete. The objective functions of cost and weight are independent, therefore multiobjective functions were not used. The objective of this work is to evaluate the efficiency of the SGA through the minimized values of weight and cost in two different situations, both of them aims to compare the results obtained by the use of the SGA to those obtained by Camp and Akin with the Big Bang-Big Crunch Algorithm (BB-BC) and the second to evaluate the effect of a base shear key. In both examples a sensitivity analysis is made with varying surcharge loads, backfill slope and internal friction angle of the retained soil and in the first example a convergence analysis of the proposed algorithm is made. Each result is obtained by 100 executions of the algorithm and listed as best objective function, mean value and standard deviation.

Keywords: Optimization. Metaheuristics. Retaining walls. Search Group Algorithm. SGA. Geotechnical stability. Structural design.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Critério de Ruptura Mohr-Coulomb.....	29
Figura 2	Tensão horizontal no estado de repouso.....	31
Figura 3	Tensão horizontal no estado ativo.....	32
Figura 4	Tensão horizontal no estado passivo.....	33
Figura 5	Círculo de Mohr no Empuxo Ativo.....	33
Figura 6	Ângulo de inclinação do talude de aterro β	34
Figura 7	Círculo de Mohr no Empuxo Passivo.....	35
Figura 8	Empuxo ativo.....	37
Figura 9	Forças verticais e seus braços de alavanca.....	39
Figura 10	Sapata retangular.....	40
Figura 11	Sobrecarga x Recalque na ruptura.....	40
Figura 12	Sapata corrida superficial.....	41
Figura 13	Diagrama de tensões.....	43
Figura 14	Processo convencional de projeto.....	45
Figura 15	Processo de Projeto Ótimo.....	47
Figura 16	Geração da população inicial.....	52
Figura 17	População inicial com valor da função objetivo representada pelo tamanho dos círculos.....	52
Figura 18	Grupo de buscas inicial.....	53
Figura 19	Mutação de indivíduos, círculo verde.....	54
Figura 20	Geração de famílias nas primeiras iterações.....	55
Figura 21	Geração das famílias em iterações posteriores.....	55
Figura 22	Forças agindo no muro de contenção.....	59
Figura 23	Variáveis de projeto.....	63
Figura 24	Esforços na base do muro.....	64
Figura 25	Curvas de convergência (exemplo 1).....	72
Figura 26	Efeito da sobrecarga sobre custo e peso (exemplo 1).....	73
Figura 27	Efeito do ângulo de inclinação do talude sobre custo e peso (exemplo 1) ..	73
Figura 28	Efeito do ângulo de atrito do solo de aterro sobre custo e peso (exemplo 1)	74
Figura 29	Efeito da sobrecarga sobre o custo (exemplo 2).....	78
Figura 30	Efeito do ângulo de inclinação do talude sobre o custo (exemplo 2).....	79
Figura 31	Efeito do ângulo de atrito do aterro sobre o custo (exemplo 2).....	79

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Variáveis de Reforço Estrutural.....	63
Tabela 2	Restrições de desigualdade.....	67
Tabela 3	Parâmetros (exemplo 1).....	70
Tabela 4	Limites das variáveis de projeto (exemplo 1).....	70
Tabela 5	Melhores projetos (exemplo 1).....	71
Tabela 6	Parâmetros (exemplo 2).....	75
Tabela 7	Limites das variáveis de projeto (exemplo 2).....	75
Tabela 8	Melhores projetos para o exemplo 2.1 (sem chave).....	76
Tabela 9	Melhores projetos para o exemplo 2.2 (com chave).....	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI	<i>American Concrete Institute</i>
CORE	<i>Center for Optimization and Reliability in Engineering</i>
SGA	<i>Search Group Algorithm</i>
BB-BC	<i>Big Bang-Big Crunch</i>
FS	Fator de Segurança

LISTA DE SÍMBOLOS

Σ	Somatório
\cup	Conjunto União

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	OBJETIVOS	26
1.1.1	Objetivo Geral	26
1.1.2	Objetivos Específicos	26
2	CRITÉRIO DE RUPTURA MOHR-COULOMB	29
3	TEORIA DO EMPUXO DE RANKINE	31
3.1	EMPUXO ATIVO	33
3.2	EMPUXO PASSIVO	34
4	ESTABILIDADE GEOTÉCNICA DE MUROS DE CONTENÇÃO RÍGIDOS	37
4.1	TRANSLAÇÃO	37
4.2	TOMBAMENTO	38
4.3	CAPACIDADE DE CARGA ÚLTIMA DA FUNDAÇÃO	39
4.3.1	Teoria da Capacidade de Carga Última de Terzaghi.....	41
4.4	SEGURANÇA QUANTO A CAPACIDADE DE SUPORTE DO SOLO DE FUNDAÇÃO	41
5	DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL DE ACORDO COM ACI 318-05	43
6	PROJETO ÓTIMO	45
6.1	FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ATRAVÉS DO MÉTODO DO PROJETO ÓTIMO	47
6.1.1	Declaração do problema	47
6.1.2	Coleta de dados e informações	48
6.1.3	Definição das variáveis de projeto	48
6.1.4	Definir a Função Objetivo	48
6.1.5	Definir as restrições	48
6.2	MODELO DE OTIMIZAÇÃO PADRÃO	49
7	SEARCH GROUP ALGORITHM	51
7.1	POPULAÇÃO INICIAL	51
7.2	SELEÇÃO DO GRUPO DE BUSCAS INICIAL	52
7.3	MUTAÇÃO DO GRUPO DE BUSCAS.....	53
7.4	GERAÇÃO DAS FAMÍLIAS DE CADA MEMBRO DO GRUPO DE BUSCAS	54
7.5	SELEÇÃO DO NOVO GRUPO DE BUSCAS	56
7.6	MÉTODO DE PENALIDADE EM OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA	56
8	FORMULAÇÃO	59
8.1	DIMENSIONAMENTO DO MURO DE CONTENÇÃO	59
8.1.1	Estabilidade geotécnica	59
8.1.2	Resistências e demandas estruturais	61
8.2	VARIÁVEIS DE PROJETO	62
8.3	ESFORÇOS SOLICITANTES	64

8.4	FUNÇÃO OBJETIVO	65
8.5	RESTRIÇÕES	66
8.5.1	Restrições de contorno	66
8.5.2	Restrições de desigualdade	66
9	OTIMIZAÇÃO E RESULTADOS	69
9.1	EXEMPLO 1	69
9.1.1	Melhores projetos	69
9.1.2	Análise da convergência	71
9.1.3	Análise da sensibilidade	72
9.2	EXEMPLO 2: CASO 1 (SEM CHAVE) E CASO 2 (COM CHAVE)	74
9.2.1	Melhores projetos	74
9.2.2	Análise da sensibilidade	77
10	CONCLUSÃO	81
10.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	81
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

O muro de contenção é uma alternativa para situações em que há instabilidade geotécnica de taludes, tanto em seu estado natural quanto em cortes artificiais. A instabilidade se deve à incapacidade de resistência da massa de solo frente ao ângulo de inclinação do mesmo. A aplicação dessa solução é comum nas grandes obras de infraestrutura, a saber: construção de rodovias, pontes, ferrovias, entre outras. Considerando essas obras, que geralmente são de grande extensão e onerosas, é trivial assumir que, além da estabilidade geotécnica e estrutural, a minimização de custo tem peso elevado na escolha de projeto. O processo de dimensionamento se dá por tentativa e erro, em que um projeto inicial é testado, sua resposta em relação ao sistema é calculada e a decisão de parar depende do julgamento do projetista. Considerando ainda a variedade de restrições impostas nessa categoria de sistema — estabilidade ao tombamento, deslizamento e capacidade de suporte do solo de fundação; necessita também, prover resistências estruturais às solicitações de esforços cortantes e flexurais em todas as seções críticas, respeitando os códigos de construção. Em vista disso, não há garantia de que o valor retornado seja econômico, logo o processo pode se tornar custoso em dias dispendidos, recursos materiais e humanos.

Em contrapartida, os algoritmos de otimização tentam encontrar o valor mais econômico respeitando todas as restrições estruturais e geotécnicas simultaneamente. Os algoritmos meta-heurísticos têm aplicabilidade em problemas com variáveis discretas e onde ocorram funções objetivos não contínuas, não convexas e possuidoras de vários mínimos locais. Eles operam melhorando iterativamente uma solução encontrada e não há necessidade de projeto inicial.

Segundo Gandomi (2016), o projeto ótimo de muros de contenção foi objeto de muitos estudos no passado: Rhomberg e Street (1981), Keskar e Adidam (1989), Dembicki e Chi (1989), Basudhar et al. (2008) e Babu e Basha (2008).

Sobre a mesma temática, estudos mais recentes foram realizados utilizando algoritmos de otimização meta-heurísticos. Para avaliar projetos de peso e custo ótimos em muros cantilever de 3 e 4,5 metros, avaliando o efeito de uma chave na base do muro de maior altura, Gandomi (2015) utilizou os algoritmos *Accelerated Particle Swarm Optimization*, *Firefly Algorithm* e *Cuckoo Search*. No ano seguinte, Gandomi (2016) utilizou três algoritmos evolucionários: *Differential Evolution*, *Evolutionary Strategy* e *Biogeography Based Optimization Algorithm*. Também, sobre os mesmos estudos, Camp e Akin (2012) usou um algoritmo iterativo de busca heurística baseado em população, o *Big Bang-Big Crunch*. Segundo Gandomi (2015, p. 72), apesar de quantidade limitada de pesquisas sobre otimização de muros de contenção, há muitos estudos sobre o tópico de otimização

estrutural e geotécnica, como o de Sahab et al. (2013), Pezeshk e Camp (2002), Gholizadeh e Barati (2012), Bekdas (2014), Das (2005), Das e Basudhar (2006), Kashani et al. (2014) e Khajehzadeh et al. (2014).

O presente trabalho irá avaliar a efetividade do algoritmo de otimização meta-heurístico *Search Group Algorithm* (SGA) na otimização de muros de contenção cantilver, avaliar o efeito da adição de uma chave no muro e fazer uma análise de sensibilidade frente à variação de sobrecarga, ângulo de inclinação do talude e ângulo de atrito do solo de aterro.

Para tanto este volume está dividido em três partes: do capítulo 2 ao 7 são apresentadas as teorias utilizadas, o capítulo 8 discursará sobre a formulação matemática elaborada para explicitar as funções objetivo e o capítulo 9 traz os resultados obtidos e comentários sobre os mesmo.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho enfoca a utilização do algoritmo meta-heurístico SGA para tratar da minimização das funções objetivo independentes de custo e peso de um muro de contenção cantilever. Os parâmetros, variáveis de projeto e funções objetivo utilizados aqui são consistentes com aqueles apresentados por Camp e Akin (2012) e foram adaptados do estudo originalmente proposto por Saribas e Erbatur (1996). O objetivo principal é comparar os resultados obtidos com o algoritmo *Big Bang-Big Crunch*, por Camp e Akin com os obtidos neste trabalho utilizando o SGA, algoritmo desenvolvido na Universidade Federal de Santa Catarina por Gonçalves, Lopez e Miguel (2015).

A formulação matemática foi reproduzida, o mais fielmente possível, do artigo de Camp e Akin (2012) e outras literaturas serviram de referência: *Optimization of retaining wall design using recent swarm intelligence techniques*, Gandomi, 2015, e *Optimization of retaining wall design using evolutionary algorithms*, Gandomi, 2016.

A implementação foi realizada com MATLAB.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Testar a eficiência do SGA — originalmente desenvolvido para lidar com otimização de estruturas treliçadas — em muros de contenção.
2. Comparar os resultados obtidos com estudos feitos por Camp e Akin (2012) com o algoritmo *Big Bang-Big Crunch* (BB-BC).

3. Analisar a convergência do SGA.
4. Avaliar a sensibilidade dos projetos, obtidos pelo SGA, por variação paramétrica de: ângulo de atrito do solo de aterro, inclinação do talude e sobrecarga aplicada.

2 CRITÉRIO DE RUPTURA MOHR-COULOMB

Mohr apresentou em 1900 uma teoria de ruptura de materiais e na maioria dos casos, é possível aproximar a tensão cisalhante no plano de ruptura como uma função linear da tensão normal, Coulomb (1776, apud DAS, 2006, p. 365). Essa função linear, chamada de Critério de ruptura Mohr-Coulomb, pode ser expressa como:

$$\tau_f = c + \sigma \tan \phi \quad (2.1)$$

onde c é a coesão, ϕ é o ângulo de atrito interno, σ é a tensão normal no plano de ruptura e τ_f é a resistência cisalhante.

Em solos saturados, a soma da tensão efetiva σ' e da poropressão u resulta na tensão normal em determinado ponto:

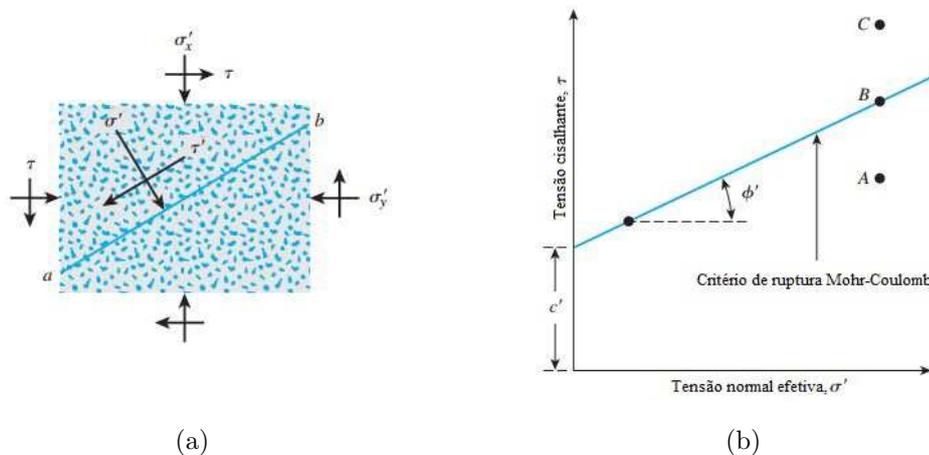
$$\sigma = \sigma' + u \quad (2.2)$$

A tensão efetiva é decorrente das partículas sólidas do solo e a poropressão é consequência da água. A poropressão não se soma à resistência do solo, portanto a equação 2.1 deve ser reescrita em termos de tensão efetiva:

$$\tau_f = c' + \sigma' \tan \phi', \quad (2.3)$$

onde c' e ϕ' são a coesão e o ângulo de atrito baseados na tensão efetiva. Logo a equação (2.1) e (2.3) são expressões de resistência cisalhante baseadas em tensão total e tensão efetiva, respectivamente.

Figura 1 – Critério de Ruptura Mohr-Coulomb



Fonte: Adaptado de *Principles of Geotechnical Engineering*, 7th ed., Das, 2006, p. 366

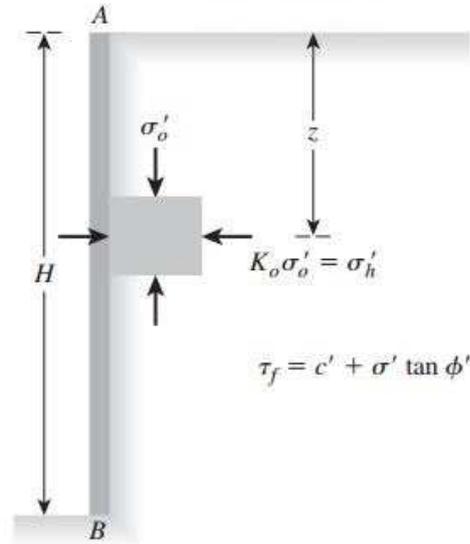
Segundo Das, a expressão do critério de ruptura Mohr-Coulomb pode ser entendida ao se observar a Figura (1). Sejam σ' e τ as tensões normais e cisalhantes atuando no plano

de ruptura ab na Figura (1-a). A Figura (1-b) mostra o gráfico gerado pela expressão da resistência cisalhante, equação (2.3). Se os valores de σ' e τ forem tais que resultem no ponto A da Figura (1-b), a ruptura ao cisalhamento não ocorrerá ao longo do plano ab . Caso a combinação de σ' e τ resultem no ponto B, haverá ruptura no plano ab por cisalhamento. O ponto C jamais poderá ocorrer pois a ruptura do solo teria ocorrido muito antes de tais valores de σ' e τ serem alçados (2006, p. 367).

De forma sintetizada, pode-se dizer que a resistência cisalhante tem a forma de uma reta definida pelos parâmetros ângulo de atrito, coesão e a combinação das tensões normais e cisalhantes atuantes no momento da ruptura. Porém deve-se ter cuidado nessa definição, pois a magnitude desses parâmetros é referente à ruptura, ou seja, os valores de c' e ϕ' utilizados em projeto não condizem com o estado atual do maciço de solo, mas sim, com o estado de ruptura do mesmo.

3 TEORIA DO EMPUXO DE RANKINE

Figura 2 – Tensão horizontal no estado de repouso



Fonte: Adaptado de *Principles of Geotechnical Engineering*, 7th ed., Das, 2006, p. 425

Na Teoria dos Empuxos, Rankine investigou as tensões num solo, que se encontra em estado plástico de equilíbrio, em busca das pressões laterais exercidas sobre uma barreira imóvel (um muro). Considerando a massa de solo, como mostra a Figura (2), contida por um muro de altura AB onde não há atrito entre o solo e o muro. Um elemento de solo a uma profundidade z está sujeito às tensões efetivas vertical e horizontal, σ'_0 e σ'_h , respectivamente. Não há tensões cisalhantes nos planos vertical e horizontal do elemento de solo considerado. Define-se então a relação entre tensão horizontal e vertical como sendo o coeficiente adimensional k , como ilustra a equação (3.1).

$$k = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_0} \quad (3.1)$$

Três casos podem ser descritos para o muro. O primeiro ocorre quando o muro encontra-se estático, ou seja ele não se move nem para a direita e nem para a esquerda e a massa de solo encontra-se então em estado de equilíbrio estático, como ilustra a Figura (2). Chama-se a tensão horizontal σ'_h de tensão no estado de repouso e k_0 o coeficiente de empuxo no repouso, como expresso na equação (3.2).

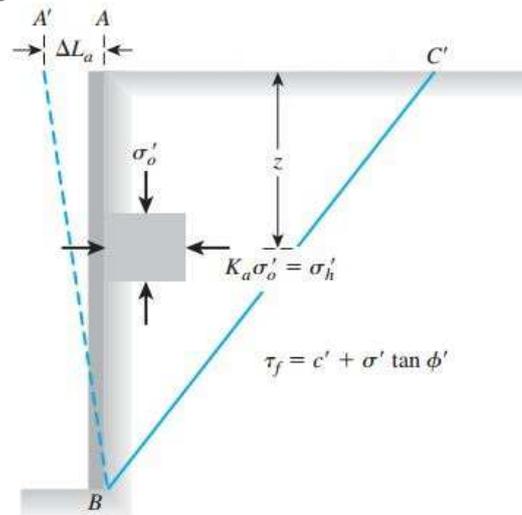
$$k_0 = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_0} \quad (3.2)$$

No segundo caso, se o muro se desloca de AB para A'B', como ilustra a Figura (3),

uma massa triangular de solo descrita por ABC' atingirá o estado plástico de equilíbrio e deslocar-se-á pelo plano de ruptura descrito por BC' . Nesse momento a tensão horizontal efetiva é denominada de tensão horizontal no estado ativo e k_a denominado de coeficiente de empuxo ativo, como expressa a equação (3.3).

$$k_a = \frac{\sigma'_a}{\sigma'_0} \quad (3.3)$$

Figura 3 – Tensão horizontal no estado ativo

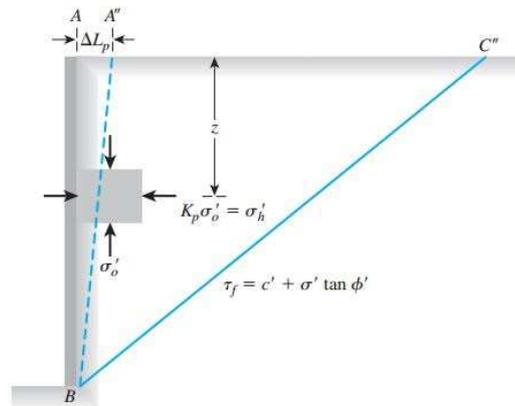


Fonte: Adaptado de *Principles of Geotechnical Engineering*, 7th ed., Das, 2006, p. 425

O terceiro caso ocorre quando o muro desloca-se da posição inicial para $A''B$ — Figura (4) — e a massa triangular de solo ABC'' atinge o estado plástico de equilíbrio rompendo-se e deslizando ao longo do plano de ruptura BC'' . A tensão horizontal efetiva nesse momento é chamada de tensão horizontal no estado passivo e k_p denominado coeficiente de empuxo passivo como mostra a equação (3.4).

$$k_p = \frac{\sigma'_p}{\sigma'_0} \quad (3.4)$$

Figura 4 – Tensão horizontal no estado passivo

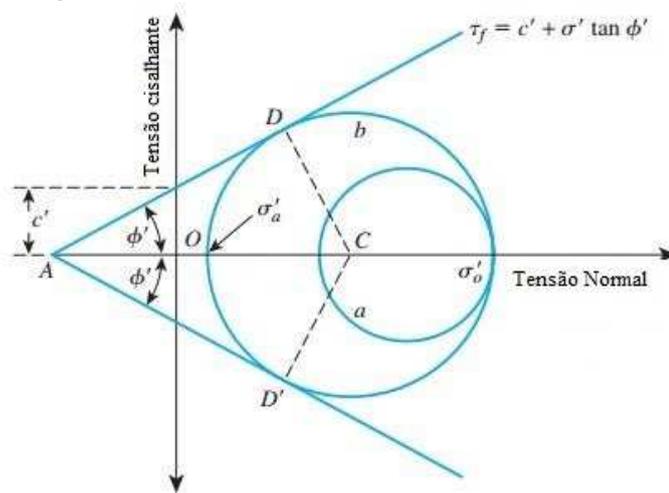


Fonte: Adaptado de *Principles of Geotechnical Engineering*, 7th ed., Das, 2006, p. 425

3.1 EMPUXO ATIVO

Ao permitir que o muro se desloque lentamente para o lado contrário do solo, o raio do círculo de Mohr descrito por um bloco de solo submetido às tensões principais aumenta, ou seja, a tensão principal horizontal efetiva diminui, como evidenciado na Figura (5) em que o estado de tensões inicial é representado pelo círculo a e o estado de tensões na ruptura é representado pelo círculo b. No momento em que o círculo de Mohr aumentar até a ruptura, o estado plástico de equilíbrio do solo será atingido, diz-se que esse é o Estado Ativo de Rankine e que a pressão lateral exercida sobre o muro é o Empuxo Ativo de Rankine.

Figura 5 – Círculo de Mohr no Empuxo Ativo



Fonte: Adaptado de *Principles of Geotechnical Engineering*, 7th ed., Das, 2006, p. 449

De acordo com Das (2006), o valor do coeficiente de empuxo ativo de Rankine pode

ser expresso pela equação (3.5).

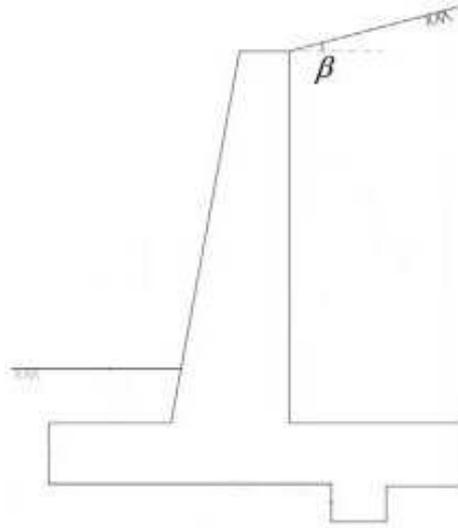
$$k_a = \tan^2 \left(45 - \frac{\phi'}{2} \right) \quad (3.5)$$

e em casos de talude inclinado pode ser expresso por

$$k_a = \cos(\beta) \frac{\cos(\beta) - \sqrt{\cos(\beta)^2 - \cos(\phi')^2}}{\cos(\beta) + \sqrt{\cos(\beta)^2 - \cos(\phi')^2}}, \quad (3.6)$$

onde β é o ângulo de inclinação do talude, ilustrado na Figura (6), e ϕ' é o ângulo de atrito interno do solo de aterro.

Figura 6 – Ângulo de inclinação do talude de aterro β

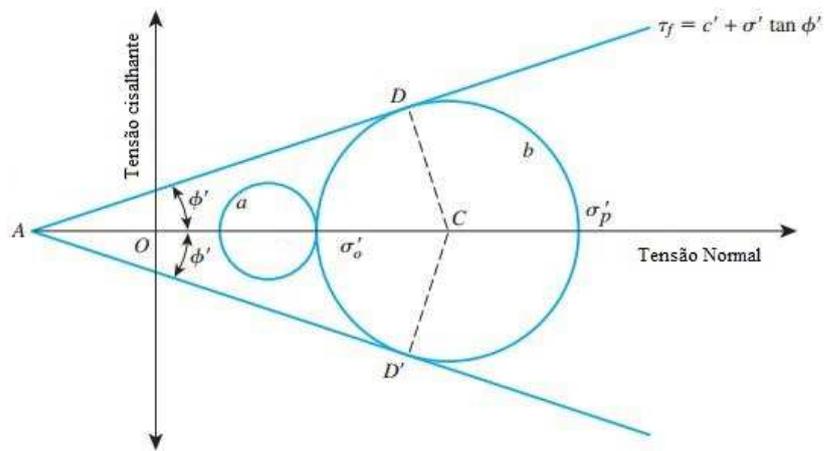


Fonte: Adaptado de *Optimization of retaining wall design using recent swarm intelligence techniques*, Gandomi et al., 2015.

3.2 EMPUXO PASSIVO

Considerando o mesmo sistema solo-muro da seção anterior, deixando que desta vez o muro se mova lentamente em direção ao solo, a tensão principal horizontal de um bloco de solo situado próximo ao muro irá aumentar até que se atinja o estado plástico de equilíbrio do solo, à tensão principal horizontal nesse momento de ruptura dá-se o nome de Empuxo Passivo de Rankine. Na Figura (7), o estado de tensões inicial é representado pelo círculo a e o estado de tensões na ruptura é representado pelo círculo b.

Figura 7 – Círculo de Mohr no Empuxo Passivo



Fonte: Adaptado de *Principles of Geotechnical Engineering*, 7th ed., Das, 2006, p. 452

Segundo Das (2006), a razão de σ'_p por σ'_0 , ou coeficiente de empuxo passivo k_p , pode ser expressa por:

$$k_p = \tan^2 \left(45 + \frac{\phi'}{2} \right) \quad (3.7)$$

4 ESTABILIDADE GEOTÉCNICA DE MUROS DE CONTENÇÃO RÍGIDOS

4.1 TRANSLAÇÃO

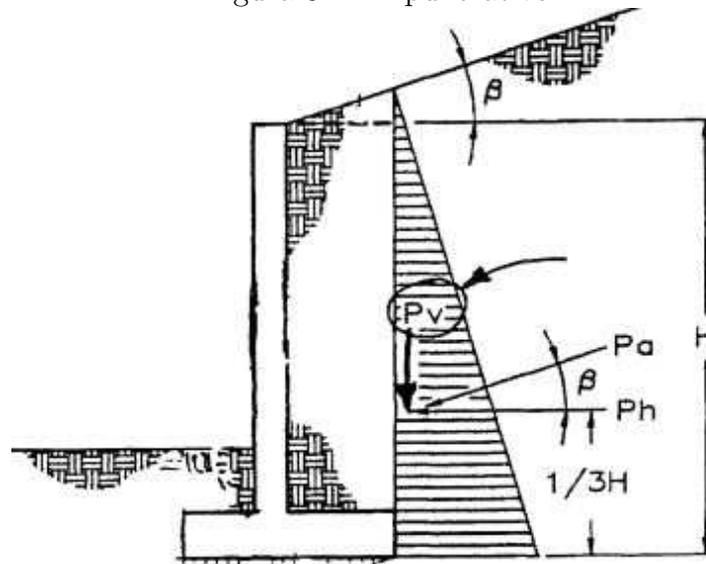
O fenômeno de translação equivale ao deslizamento da base do muro de contenção em relação à superfície do solo de fundação. Portanto as forças laterais solicitantes que atuam no muro devem ser menores que as forças resistentes:

$$FS_t = \frac{F_r}{F_s} \quad (4.1)$$

em que F_r e F_s são as forças resistentes e forças deslizantes, respectivamente.

Os agentes mobilizantes do muro serão as forças provenientes do empuxo ativo de Rankine do lado direito do muro, Figura (8), já a parcela resistente é composta pela soma do empuxo passivo ao lado esquerdo, do atrito na base do muro causado pelo ângulo de atrito solo-muro ($\frac{2}{3}\phi'$) e da adesão solo-muro, a qual é função da coesão do solo de fundação.

Figura 8 – Empuxo ativo



Fonte: Basics of Retaining Wall Design, 2nd ed., Brooks, 2010, p. 53

Segundo Brooks, a parcela de empuxo ativo do lado esquerdo do muro, devido ao solo acima do pé, é geralmente desconsiderada nos cálculos de estabilidade (2010, p. 55).

A resistência do atrito é a soma dos carregamentos verticais acima da base do muro multiplicados pelo coeficiente de atrito entre a base e o muro, como descrito na equação (4.2).

$$F_{atrito} = \sum F_v \tan(\phi') \quad (4.2)$$

Na hipótese de haver solo coesivo na fundação, a adesão entre a base do muro e o solo provê resistência lateral evidenciada pela equação (4.3):

$$F_{adesao} = \frac{2}{3}cB, \quad (4.3)$$

em que c é a coesão do solo de fundação e B o comprimento da base do muro.

O empuxo passivo é calculado na altura do pé do muro ou, caso exista, até a altura da chave.

Definidos os contribuintes, pode-se reescrever a equação (2.16) da seguinte maneira:

$$FS_t = \frac{F_{atrito} + F_{adesao} + P_p}{P_{ax}}, \quad (4.4)$$

onde P_p é a soma dos empuxos passivos e P_{ax} a parcela horizontal de empuxo ativo.

4.2 TOMBAMENTO

Verificação dos momentos em relação ao ponto inferior direito da base do muro, o ponto A da Figura (9), deve respeitar um fator de segurança:

$$FS_T = \frac{M_R}{M_S} \quad (4.5)$$

sendo M_R os momentos resistentes e M_S os momentos solicitantes.

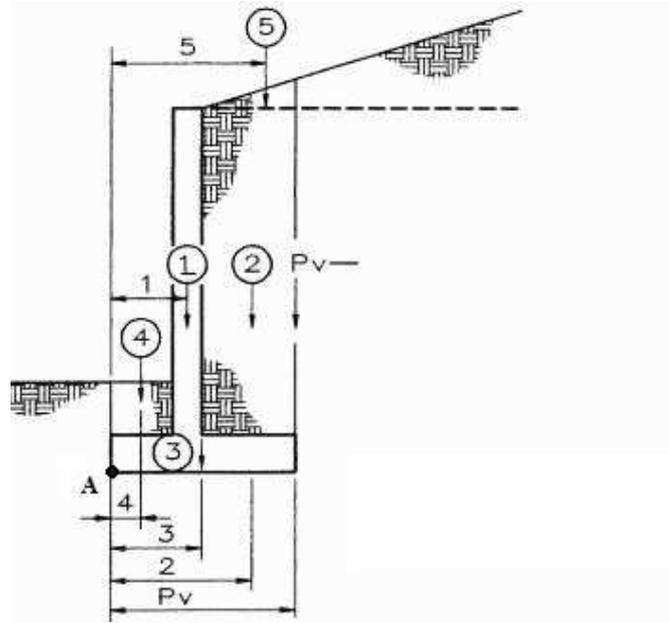
O momento solicitante se alude apenas à componente horizontal do empuxo ativo multiplicado pelo seu braço de alavanca. Na situação de sobrecarga sobre talude inclinado, a parcela de empuxo da sobrecarga dará uma distribuição de tensões retangular com braço de alavanca $H/2$, onde H é altura do bloco de tensões em um plano vertical que inicia no ponto inferior direito do muro e termina na superfície de solo inclinado. A parcela do empuxo do solo resulta em uma distribuição triangular de tensões com inclinação β , o momento será a resultante dessa distribuição vezes o braço de alavanca de $H/3$, onde H é a altura do mesmo plano vertical descrito anteriormente. A resultante e o braço de alavanca da parcela de empuxo devido ao solo está ilustrada na Figura (8).

Todas as forças verticais aplicadas à direita da extremidade esquerda da base do muro são agentes do momento resistente, entre elas usualmente encontram-se o peso do muro, o peso de solo acima da base, a parcela vertical de empuxo e a resultante da sobrecarga. Assim sendo, o momento resistente será o somatório das forças verticais multiplicadas pelos seus respectivos braços de alavanca, como demonstrado na Figura (9).

Conforme Brooks, em taludes inclinados é recomendado que a parcela vertical do empuxo ativo seja usada apenas no cálculo dos momentos resistentes, assim sendo, deve ser desprezada na verificação de deslizamento e capacidade de carga última, visto que a

mesma reduz significativamente as pressões no solo de fundação (2010, p. 53).

Figura 9 – Forças verticais e seus braços de alavanca



Fonte: Adaptado de Basics of Retaining Wall Design, 2nd ed., Brooks, 2010, p. 52

4.3 CAPACIDADE DE CARGA ÚLTIMA DA FUNDAÇÃO

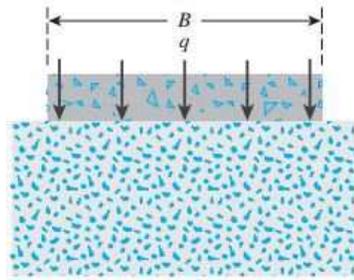
“À parte mais inferior de uma estrutura chamamos de fundação e sua função é transferir os carregamentos da estrutura para o solo o qual os recebe. Uma fundação propriamente dimensionada transfere os carregamentos sem sobrecarregar o solo, pois um solo sobrecarregado pode romper por cisalhamento ou resultar em recalques excessivos e essas duas situações acarretam danos à estrutura. Assim sendo, engenheiros geotécnicos e de estruturas, que projetam fundações, devem avaliar a capacidade de carga dos solos de assentamento.” (DAS, 2006, tradução nossa, p. 576).

Para elucidar o conceito de capacidade de carga, é suposta uma fundação superficial retangular de largura B e comprimento $L \gg B$ assentada sobre uma camada de solo, como mostra a Figura (10).

Ao se aplicar uma sobrecarga q à sapata, ocorre um pequeno recalque; ao se aumentar essa sobrecarga q , o recalque aumenta gradualmente. O colapso por se atingir a capacidade de suporte ocorre quando a sobrecarga assume um valor igual a q_u , como se pode observar na Figura (11). Ao atingir q_u a sapata recalca grandes proporções sem nenhum incremento na pressão do solo, o solo nos dois lados da sapata se desloca acima da superfície original do solo. Nesse exemplo o comportamento do solo referente à relação

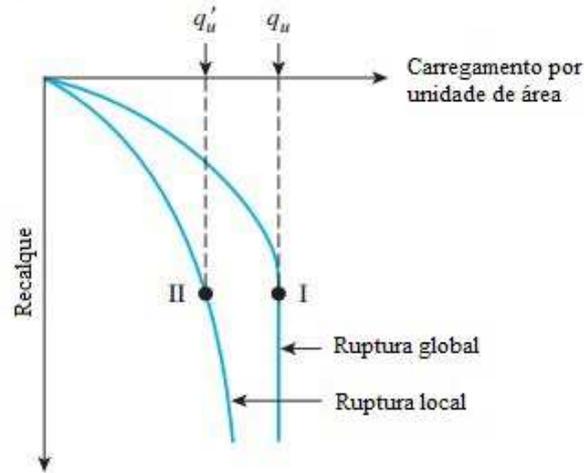
sobrecarga-recalque é próximo à curva I da Figura (11) e q_u é definido como a capacidade última de suporte do solo.

Figura 10 – Sapata retangular



Fonte: Principles of Geotechnical Engineering, 7th ed., Das, 2006, p. 578

Figura 11 – Sobrecarga x Recalque na ruptura



Fonte: Adaptado de Principles of Geotechnical Engineering, 7th ed., Das, 2006, p. 578

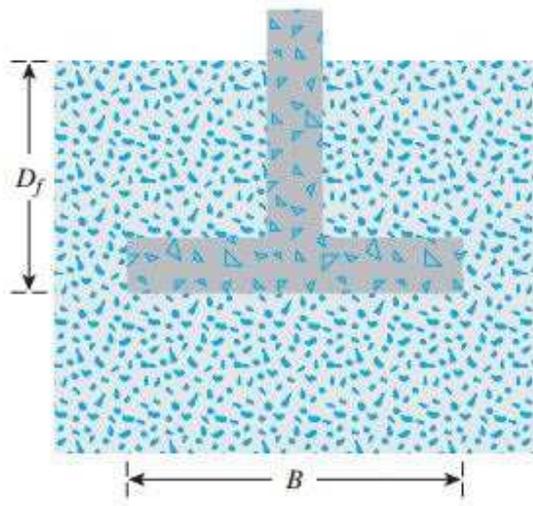
A ruptura descrita é chamada de ruptura global do solo e ocorre quando, ao se aplicar uma sobrecarga à fundação assentada no solo, uma parcela triangular de solo abaixo da fundação é empurrada para baixo e conseqüentemente empurra o solo ao seu redor para os lados e posteriormente para cima. Neste momento o solo passa para o estado de equilíbrio plástico e a ruptura acontece.

A relação descrita pela curva II da Figura (11) é denominada ruptura local e sua interface de ruptura não se projeta para a superfície como no caso global, ela se projeta para dentro.

4.3.1 Teoria da Capacidade de Carga Última de Terzaghi

Em 1943, Terzaghi extrapolou a teoria das deformações plásticas de Prandtl para determinar a capacidade de suporte de sapatas corridas superficiais. Uma sapata é denominada corrida caso seu comprimento seja maior que cinco vezes a largura, e superficial caso o embutimento seja menor do que a largura. Para efeitos de cálculo, o solo acima da sapata pode ser considerado como uma sobrecarga de valor igual ao peso específico do solo multiplicado pela sua altura (DAS, 2006, p. 579).

Figura 12 – Sapata corrida superficial



Fonte: Principles of Geotechnical Engineering, 7th ed., Das, 2006, p. 579

Para a situação descrita acima e exemplificada na Figura (12), Terzaghi formulou a seguinte equação

$$q_u = c'N_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma \quad (4.6)$$

que é a Equação de Capacidade de Suporte de Terzaghi. N_c , N_q e N_γ são denominados fatores de capacidade de carga e são dados em função do ângulo de atrito do solo de fundação.

4.4 SEGURANÇA QUANTO A CAPACIDADE DE SUPORTE DO SOLO DE FUNDAÇÃO

Definida a capacidade de suporte da fundação na seção precedente, para que haja segurança quanto a ruptura do solo de fundação, a seguinte relação deve ser respeitada:

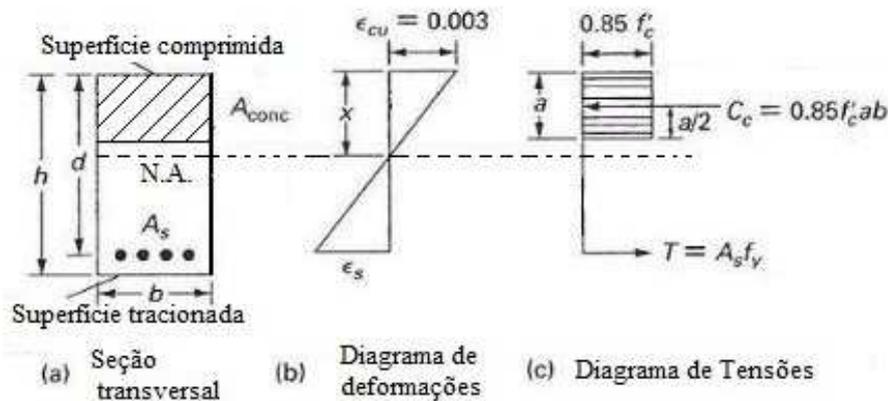
$$FS_u = \frac{q_{ult}}{q_{max}} \quad (4.7)$$

e esse fator de segurança é estipulado por norma, porém no presente trabalho está definido de acordo com Camp e Akin (2012) e vale 1.5 para solos de fundação coesivos e 3.0 para solos de fundação não-coesivos.

5 DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL DE ACORDO COM ACI 318-05

As armaduras do muro de contenção serão dimensionadas baseando-se nas recomendações do *American Concrete Institute* (ACI). O cálculo da resistência à flexão é deduzido do diagrama de tensões exposto na Figura (13).

Figura 13 – Diagrama de tensões



Fonte: Adaptado de www.qph.ec.quoracdn.net/main-qimg-b90e6151422258e9eb826941c5ac8038?convert_to_webp=true

Fazendo o somatório de momentos em relação ao ponto de aplicação da resultante do bloco de tensões e admitindo que o aço está em escoamento, pode-se obter a resistência última à flexão, como expresso a seguir:

$$M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (5.1)$$

sendo A_s a área de concreto na seção considerada, f_y a resistência do aço no escoamento, d a distância da superfície de compressão até o centroide das armaduras e ϕ fator de redução definido por ACI 318-05 (2005, p. 375) e equivale a 0.9. A altura do bloco equivalente de tensões, segundo ACI (2005, p. 120), é expressa por

$$a = \beta_1 c \quad (5.2)$$

sendo c a distância da linha neutra até a fibra comprimida mais deformada e β_1 igual a 0.85 para valores de resistência à compressão do concreto f_c maiores que 17 MPa e menores que 28 MPa. β_1 será reduzido linearmente a uma taxa de 0.05 para cada 7 MPa de resistência acima de 28 MPa, porém não poderá ser menor que 0.65.

$$\begin{cases} 17MPa \leq \beta_1 \leq 28MPa, & \beta_1 = 0.85 \\ \beta_1 \geq 28MPa, & \beta_1 = 0.85 - 0.05 \left(\frac{f_c - 28}{7} \right) \end{cases} \quad (5.3)$$

A resistência aos esforços cortantes é definida pela equação (5.4) (ACI, 2005, p. 151).

$$V_c = \phi 0.17 \sqrt{f_c} b_w d \quad (5.4)$$

sendo ϕ o coeficiente de redução nominal igual a 0.75 (ACI, 2005, 375) e b_w a largura da seção considerada. As áreas mínimas, equação (5.5), e máximas, equação (5.6), de aço são computadas como se segue (ACI, 2005, p. 124)

$$A_{s,min} = \frac{0.25 \sqrt{f_c}}{f_y} b_w d \geq \frac{1.4 b_w d}{f_y} \quad (5.5)$$

$$A_{s,max} = 0.85 \beta_1 \frac{f_c}{f_y} \left(\frac{600}{600 + f_y} \right) b_w d \quad (5.6)$$

O cálculo de armadura suplementar, utilizada para evitar fissuras por contração do concreto e variações de temperatura, são necessários quando se tem armaduras de resistência à flexão unidirecionais, e será calculada através da equação seguinte

$$A_{s,sup} = A_b \rho_{sup} \quad (5.7)$$

onde A_b é a área bruta de concreto da seção considerada e ρ_{sup} a taxa de armadura suplementar, igual a 0.2% (ACI, 2005, p. 91).

Os comprimentos de ancoragem básicos e por gancho são avaliados segundo as equações (5.8) e (5.9), respectivamente (ACI, 2005, p. 195-198).

$$\frac{l_d}{dn} = \begin{cases} \frac{12 f_y \psi_t \psi_e \lambda}{25 \sqrt{f_c}} \geq 300 \text{ mm para } dn < 19 \text{ mm} \\ \frac{12 f_y \psi_t \psi_e \lambda}{20 \sqrt{f_c}} \geq 300 \text{ mm para } dn \geq 19 \text{ mm} \end{cases} \quad (5.8)$$

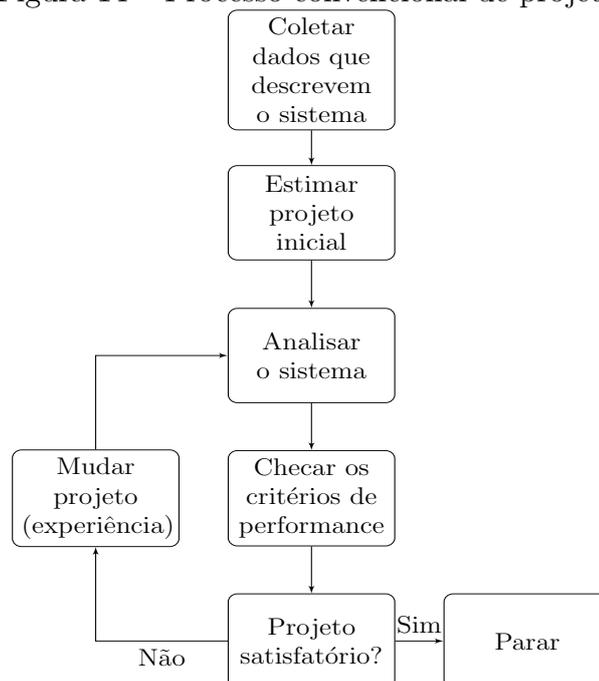
$$l_{dh} = dn 0.24 \frac{f_y}{\sqrt{f_c}} \geq 150 \text{ mm} \quad (5.9)$$

6 PROJETO ÓTIMO

“A Engenharia consiste de um número de atividades bem estabelecidas, incluindo análise, projeto, fabricação, vendas, pesquisa e o desenvolvimento de sistemas. O assunto deste texto — o projeto de sistemas — é um campo importante na área da engenharia e foi desenvolvido ao longo de séculos. A existência de sistemas complexos como construções, pontes, rodovias, automóveis, aeroplanos, veículos espaciais, entre outros, são um ótimo testemunho disto. Entretanto a evolução destes sistemas tem sido devagar. O processo até então tem sido demorado e custoso, necessitando recursos substanciais, tanto humanos quanto materiais. Portanto a prática usual tem sido projetar, fabricar e utilizar o sistema independentemente de ter sido *o melhor*. Sistemas aperfeiçoados foram elaborados apenas após um investimento substancial e executam o mesmo número de tarefas, ou talvez até mais, custam menos e são mais eficientes.” (ARORA, 2004, p.1, tradução nossa).

Seguindo a linha de raciocínio pode-se afirmar que para um sistema existem vários projetos exequíveis que respeitam os critérios de performance e suas restrições, porém preocupa-se aqui em encontrar *o melhor* projeto para o problema. Segundo Arora (2004), o projeto de sistemas pode ser formulado como problemas de otimização em que um indicador de performance deve ser otimizado enquanto respeita todas as suas restrições.

Figura 14 – Processo convencional de projeto



Fonte: adaptado de Arora, 2004, p.5

Podemos dizer que o processo convencional de projeto em engenharia se divide em duas partes, a Análise e o Projeto. De acordo com Arora (2004, p.5) a parte da Análise corresponde a calcular o comportamento de determinado sistema a partir de *inputs* previamente especificados, ou seja, conhece-se o projeto do sistema a priori. O projeto inicial define então a forma do sistema que deve respeitar as especificações técnicas de desempenho.

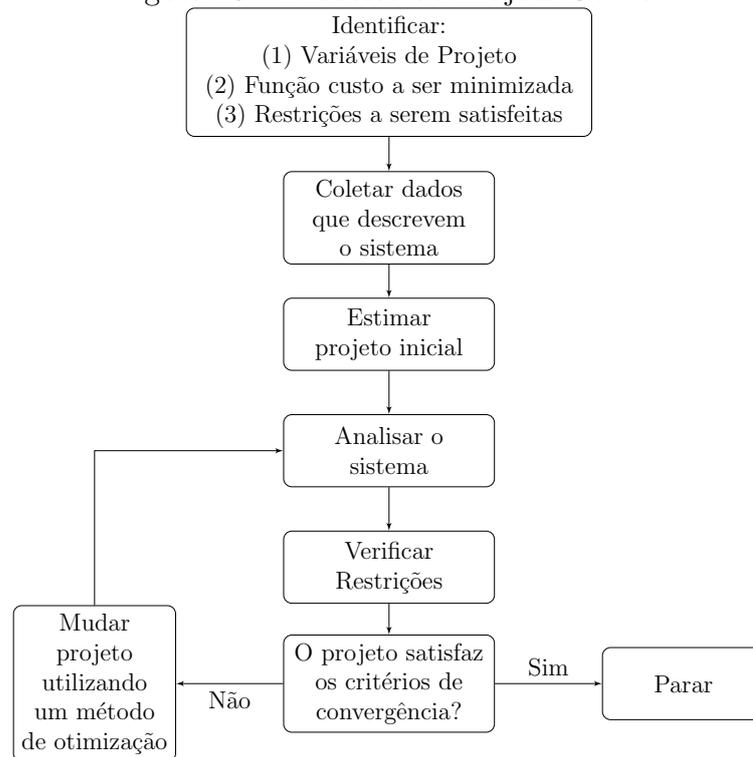
Projetar um sistema é um processo de tentativa e erro, estima-se um projeto para depois analisá-lo e verificar se o mesmo comporta-se de acordo com as especificações. A capacidade de julgamento do projetista tem grande influência na qualidade da análise, pois serão indispensáveis a sua experiência, intuição, criatividade e conhecimento técnico. Isto pode ser visto como um ponto negativo ao se deixar o julgamento humano decidir sobre sistemas grandes e muito complexos onde a possibilidade de ocorrer erro é considerável, como por exemplo em situações que possuam restrições de vibrações estruturais ou uma gama muito grande de carregamentos. Porém, como vantagem, o projetista tem a liberdade de fazer mudanças conceituais no projeto. As Figuras (14) e (15) apresentam os fluxogramas que ilustram o processo convencional e de Projeto Ótimo, respectivamente.

A partir da descrição precedente podemos, através de contraste, definir o método de otimização de projeto como sendo o processo em que o “projetista identifica as variáveis de projeto, uma função a ser otimizada (função objetivo) e as funções de restrição do sistema”(ARORA, tradução nossa, 2004, p.5). Ou seja, os atributos não são fixados, as variáveis de projeto são determinadas numericamente e aplicadas à função objetivo enquanto respeitam as restrições impostas pelo sistema, dando o valor otimizado de projeto.¹

No Projeto Ótimo a preocupação não está em saber se o mesmo respeita as restrições técnicas relativas ao problema, pois isto já está incluso na formulação matemática. A preocupação é saber se o projeto é o melhor, ou o mais próximo possível do melhor.

¹Variáveis de projeto, função objetivo e restrições estão detalhadas em 2.1.1

Figura 15 – Processo de Projeto Ótimo



Fonte: adaptado de Arora, 2004, p.5

6.1 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS ATRAVÉS DO MÉTODO DO PROJETO ÓTIMO

A formulação de um problema a ser resolvido é representada por uma sequência lógica de procedimentos que representem de forma completa o comportamento do sistema. Quanto melhor formulado o problema, melhor será a solução do mesmo, portanto esta etapa possui alto grau de importância. Segundo Arora (2004), para a maioria dos casos pode-se dividir o problema em 5 passos:

1. Declaração do problema
2. Coleta de dados e informações
3. Definição das Variáveis de Projeto
4. Definição da Função Objetivo
5. Definição das Restrições

6.1.1 Declaração do problema

Inicia-se por fazer uma declaração discursiva do projeto. Aqui devem ser definidas as metas e objetivos, assim como as restrições.

6.1.2 Coleta de dados e informações

As informações técnicas relevantes, custo e propriedades físicas de materiais, critérios de desempenho estipulados por norma, entre outros.

6.1.3 Definição das variáveis de projeto

Comumente chamadas de variáveis de otimização, elas são independentes e podem assimilar qualquer valor dentro do domínio especificado. É o conjunto que irá determinar o resultado procurado para o sistema (peso mínimo, custo mínimo, etc.), portanto diferentes conjuntos resultarão em diferentes projetos². O termo variáveis de projeto remete ao conjunto de incógnitas do problema que serão representadas pelo vetor coluna \mathbf{x} ³ e seu número de elementos indica o grau de liberdade do projeto.

6.1.4 Definir a Função Objetivo

A formulação precisa de um parâmetro que será usado para comparar os diferentes projetos provenientes das diferentes variáveis de otimização, ou seja, esse parâmetro será o critério de escolha e é uma função escalar de valor numérico que poderá ser obtida após a especificação do sistema. Tal critério é chamado de função objetivo e representa a característica a que se deseja maximizar ou minimizar, dependendo da situação, e deve ser obrigatoriamente função das variáveis de projeto. Na engenharia é comum pensar em termos de menor custo, peso ou maior eficiência energética, portanto nesses casos têm-se as funções objetivos de minimização de custo, peso e função objetivo de maximização de eficiência energética, logo um projeto otimizado possui o melhor valor para determinada função objetivo.

6.1.5 Definir as restrições

Todos os requisitos técnicos, de desempenho, de segurança, as diretrizes normativas as quais devem ser respeitadas e os limites impostos pela natureza do problema serão denominados restrições. Essas restrições permitirão que a função objetivo retorne valores factíveis na realidade e que representem a prática comum de engenharia. Cada restrição deve ser função de ao menos uma variável de projeto pois só assim seus valores mudam ao rodar o algoritmo.

²Neste contexto e em páginas seguintes, “projeto” refere-se às variáveis de projeto e à função objetivo correspondente

³algarismos em negrito representam vetores

6.2 MODELO DE OTIMIZAÇÃO PADRÃO

A maioria dos problemas pode ser transformada de uma formulação descritiva em formulação matemática seguindo este modelo: Encontrar o enésimo vetor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

de variáveis de projeto que minimizem a função custo

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.2)$$

estando $f(\mathbf{x})$ sujeito às p restrições de igualdade $h_j(\mathbf{x})$

$$h_j(\mathbf{x}) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad j=1 \text{ à } p \quad (6.3)$$

e às m restrições de desigualdade

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0; \quad i=1 \text{ à } m \quad (6.4)$$

7 SEARCH GROUP ALGORITHM

Desenvolvido na Universidade Federal de Santa Catarina, no *Center for Optimization and Reliability in Engineering*¹ (CORE) por Matheus Silva Gonçalves, Rafael Holdorf Lopez e Leandro Fleck Fadel Miguel.

“[...]um novo método de otimização metaheurístico, o *Search Group Algorithm* (SGA), que lida com a otimização de estruturas treliçadas. A efetividade do SGA é demonstrada pela seleção de problemas de *benchmark* tirados da literatura. Atenção especial é dada aos problemas que envolvam otimização topológica, variáveis de projeto discretas e/ou restrições de frequências naturais devido às complexidades que representam. Como conclusão principal desses experimentos numéricos, o SGA foi capaz de prover estruturas mais leves em 5 dos 6 exemplos investigados, até a melhor ciência possível dos autores.[...]” (GONÇALVES; LOPEZ; MIGUEL, 2015, p. 165, tradução nossa).

De acordo com Gonçalves et al.(2015, p. 169), para encontrar valores de função objetivo próximos do ótimo, o algoritmo tenta balancear a fase de exploração global com exploração local do espaço do domínio, a maneira com que um novo indivíduo é gerado torna isso possível ao SGA. Nas primeiras iterações do processo de otimização o algoritmo procura por regiões do domínio promissoras (exploração global) e à medida que as iterações vão passando, o algoritmo molda seu comportamento para refinar os projetos obtidos até então (exploração local). Há também um operador de mutação que faz o SGA gerar novos projetos longe dos já contidos no grupo de busca —a geração de indivíduos é tarefa executada por alguns membros da população designados de grupo de busca.

“O SGA é compreendido por cinco passos: geração da população inicial, seleção do grupo de buscas inicial, mutação do grupo de buscas, geração das famílias e seleção do novo grupo de buscas.” (GONÇALVES; LOPEZ; MIGUEL, 2015, p. 170, tradução nossa).

7.1 POPULAÇÃO INICIAL

Sendo “indivíduo”o conjunto de variáveis de um projeto, a população inicial é o conjunto de indivíduos e sua grandeza é definida pelo parâmetro n_{pop} . Como descrito por Gonçalves et al.(2015, p. 171), a população inicial é gerada de acordo com a equação 7.1 de forma aleatória no domínio de busca. Onde P_{ij} é a j -ésima variável de projeto do i -ésimo indivíduo da população \mathbf{P} , $\cup[0, 1]$ é uma variável uniforme aleatória que varia de 0 a 1, x_j^{min} e x_j^{max} são o limite inferior e superior da j -ésima variável de projeto, respectivamente,

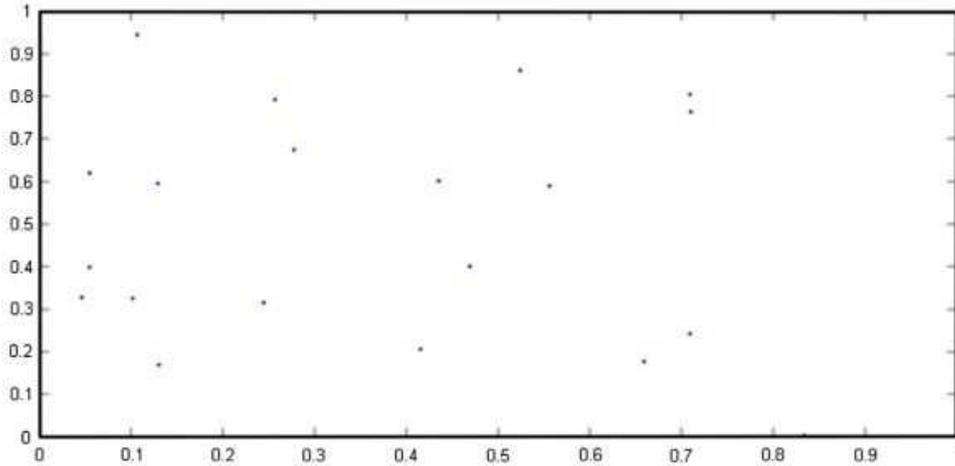
¹Centro de Otimização e Confiabilidade em Engenharia

n é a quantidade de variáveis de projeto e n_{pop} é o tamanho da população.

$$P_{ij} = x_j^{min} + (x_j^{max} - x_j^{min}) \cup [0, 1]: \quad j = 1 \text{ a } n, i = 1 \text{ a } n_{pop} \quad (7.1)$$

A Figura (16) ilustra a geração aleatória de uma população contida num domínio de duas dimensões. Cada ponto representa um indivíduo da população.

Figura 16 – Geração da população inicial

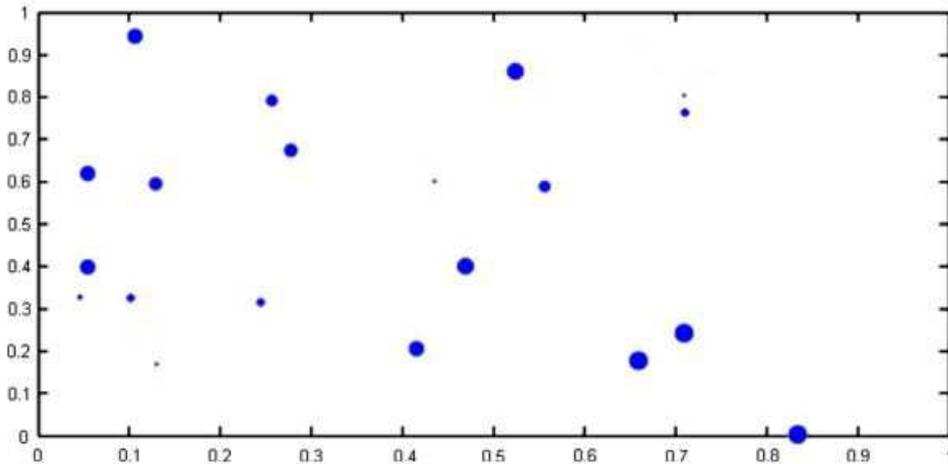


Fonte: Gonçalves et al., 2015, p. 166

7.2 SELEÇÃO DO GRUPO DE BUSCAS INICIAL

Após geração da população inicial a função objetivo de cada indivíduo é avaliada. A Figura (17) mostra os indivíduos com tamanhos diferentes: quanto maior o círculo, melhor a função objetivo.

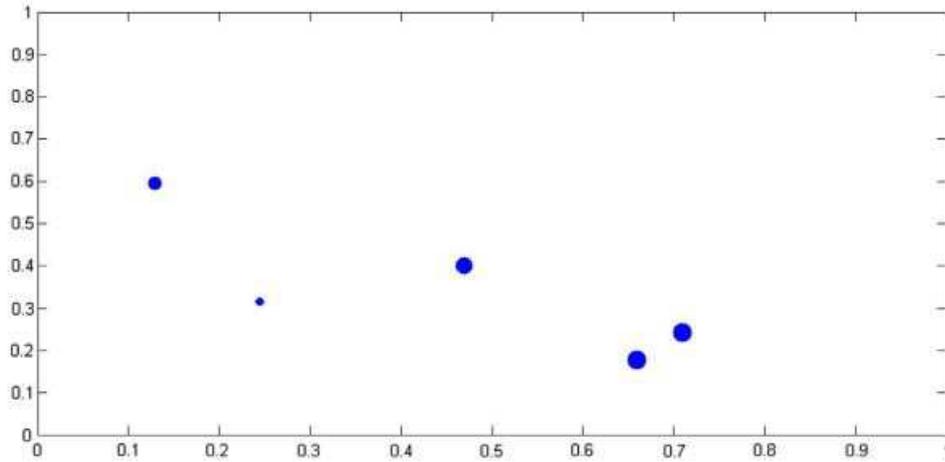
Figura 17 – População inicial com valor da função objetivo representada pelo tamanho dos círculos



Fonte: Gonçalves et al., 2015, p. 166

Após levantamento das funções objetivos o grupo de busca \mathbf{R} é criado a partir da seleção de n_g indivíduos², esta seleção é ilustrada pela Figura (18).

Figura 18 – Grupo de buscas inicial



Fonte: Gonçalves et al., 2015, p. 166

Como na população \mathbf{P} , cada linha do grupo de buscas \mathbf{R} representa um indivíduo, assim sendo \mathbf{R}_i representa a i -ésima linha de \mathbf{R} e também o i -ésimo indivíduo do grupo de buscas. Os indivíduos do grupo de buscas são rearranjados, após cada iteração do SGA, de forma que as primeiras linhas serão os melhores valores encontrados até então, ou seja \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_{n_g} serão sempre o melhor e pior projeto, respectivamente, sendo n_g o número de indivíduos contido no grupo de buscas.

7.3 MUTAÇÃO DO GRUPO DE BUSCAS

Outra estratégia de exploração global do algoritmo consiste em mudar o grupo de buscas a cada iteração, isto ocorre substituindo n_{mut} indivíduos de \mathbf{R} por novos indivíduos gerados a partir das estatísticas do grupo de buscas atual. Essa parcela de \mathbf{R} substituída é gerada longe da posição do domínio explorado pelo grupo de buscas corrente, explorando assim novas regiões do domínio, portanto ampliando a efetividade da fase de exploração global e diminuindo a probabilidade de o programa parar em um mínimo local. A seguinte equação 7.2 aponta como a geração de novos indivíduos ocorre,

$$x_j^{mut} = E[\mathbf{R}_{:,j}] + t\varepsilon\sigma[\mathbf{R}_{:,j}], \quad j=1 \text{ a } n \quad (7.2)$$

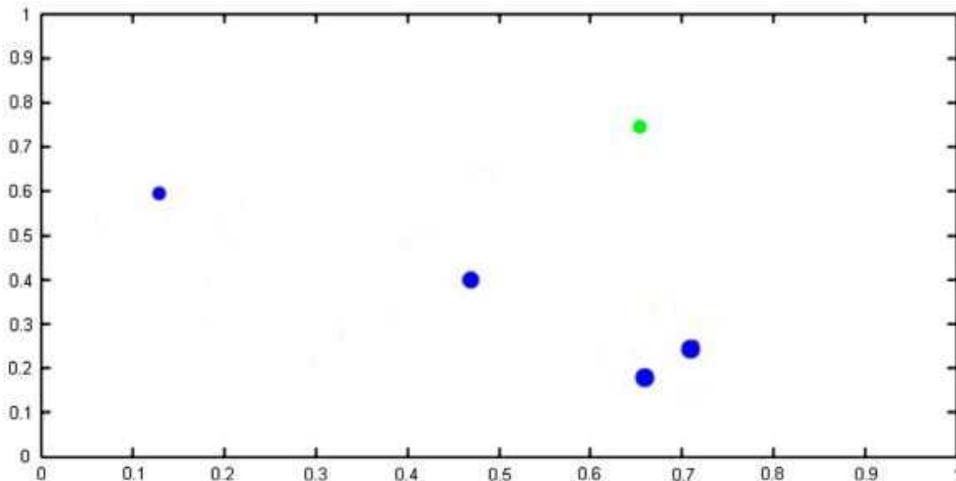
em que x_j^{mut} representa a j -ésima variável de projeto de um indivíduo que mudou por mutação, E e σ representam a média e o desvio padrão, respectivamente, ε é uma variável

²Método do *tournament selection* Goldberg DE., Genetic algorithms in search optimization and machine learning, 1989

aleatória, t é um parâmetro que controla o quão longe a j -ésima variável de projeto será gerada e $\mathbf{R}_{.j}$ é a j -ésima coluna da matriz grupo de buscas, a qual representa uma variável de projeto do indivíduo modificado.

Os indivíduos com os piores valores de função objetivo, contidos no grupo de buscas, é que serão modificados. Em outras palavras, os piores projetos têm mais chance de serem substituídos. A Figura 19 mostra o grupo de busca da Figura 18 após mutação, vê-se que o pior indivíduo — menor círculo azul — é substituído por um indivíduo com função objetivo levemente melhor — o círculo verde.

Figura 19 – Mutação de indivíduos, círculo verde



Fonte: Gonçalves et al., 2015, p. 167

7.4 GERAÇÃO DAS FAMÍLIAS DE CADA MEMBRO DO GRUPO DE BUSCAS

Denomina-se família o conjunto composto por um indivíduo do grupo de buscas e os indivíduos gerados pelo mesmo, denota-se cada família por \mathbf{F}_i onde i varia de 1 a n_g . Isto é, após a formação do grupo de buscas \mathbf{R} , cada um de seus elementos formará uma família, isso está descrito pela perturbação da equação seguinte:

$$x_j^{novo} = R_{ij} + \alpha \varepsilon, \quad j=1 \text{ a } n, \quad (7.3)$$

em que α controla o grau de perturbação e é reduzida a cada iteração k , de acordo com a equação 7.4:

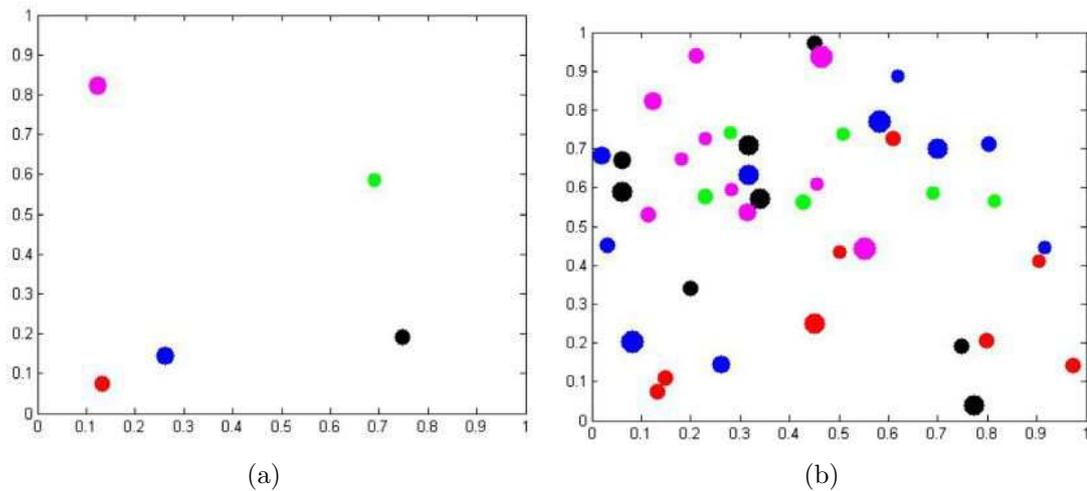
$$\alpha^{k+1} = b\alpha^k, \quad (7.4)$$

onde b é um parâmetro do SGA.

Observando as equações 7.3 e 7.4 pode-se compreender a forma como o SGA se comporta ao passar de iterações. No começo α^k é alto o suficiente para que, estatisticamente falando, qualquer ponto do domínio de projeto seja explorado. Em outras palavras, o novo

indivíduo não ficará necessariamente na vizinhança do grupo de buscas. Após algumas iterações o valor de α é diminuído, fazendo com que os indivíduos gerados nesta fase do processo fiquem mais perto da vizinhança do grupo de buscas. As figuras (20-a) e (20-b) mostram a geração de famílias nas primeiras iterações, a Figura (20-a) mostra os cinco membros do grupo de busca e a Figura (20-b) mostra os indivíduos gerados pelo mesmo. As figuras (21-a) e (21-b) mostram o efeito da diminuição do parâmetro α . Nota-se que

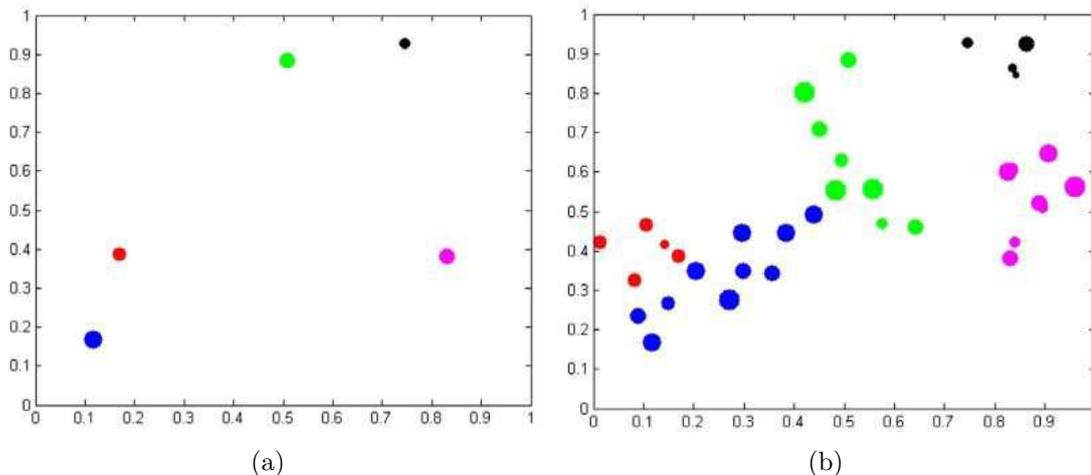
Figura 20 – Geração de famílias nas primeiras iterações



Fonte: Gonçalves et al., 2015, p. 167

os indivíduos gerados estão mais aglutinados.

Figura 21 – Geração das famílias em iterações posteriores



Fonte: Gonçalves et al., 2015, p. 167

Como mencionado anteriormente — e exposto agora — é o parâmetro α que permite ao SGA balancear as mudanças de fase, inicialmente os indivíduos gerados poderão explorar grande parte do domínio, tentando encontrar regiões onde a solução ótima global esteja localizada para depois refinar esses resultados.

Outra característica desse processo é que a quantidade de indivíduos gerados por determinado membro do grupo de buscas é proporcional à qualidade do mesmo, em outras palavras, o membro \mathbf{R}_1 irá gerar mais indivíduos que o membro \mathbf{R}_{n_g} . Essa quantidade gerada é imposta por um vetor $\mathbf{v} = [v_1], \dots, v_{n_g}$ onde, por exemplo, o elemento v_1 define quantos indivíduos o membro do grupo de busca \mathbf{R}_1 gera. Duas regras estão implícitas para que \mathbf{v} funcione:

1. $\sum_i^{n_g}(\mathbf{v}) = n_{pop} - n_g$
2. $v_{i+1} \leq v_i$

A primeira mantém o número da população constante após cada iteração e a segunda permite que melhores projetos possuam famílias maiores.

7.5 SELEÇÃO DO NOVO GRUPO DE BUSCAS

Como já mencionado, durante as primeiras iterações do SGA, diz-se que o mesmo está na fase global e seu principal objetivo é explorar o máximo possível do domínio escolhendo ao mesmo tempo os melhores indivíduos de cada família para fazer parte do grupo de buscas. Quando o número de iterações ultrapassa o parâmetro it_{global}^{max} , a seleção dos membros do grupo de buscas é modificada. Nesse momento o algoritmo está na fase local e o grupo de busca é formado pelos n_g melhores membros entre todas as famílias, explorando assim as regiões dos melhores projetos encontrados até então.

7.6 MÉTODO DE PENALIDADE EM OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA

Os métodos de otimização que utilizam funções de penalidade permitem a resolução de problemas com restrições através da formulação de problemas sem restrições. Um algoritmo de otimização, ao ser executado, irá arbitrar as variáveis de projeto, dentro dos limites inferior e superior especificados, para um conjunto chamado população inicial e testar a resposta da função objetivo de custo, por exemplo, para essa população. Os menores valores de custo são salvos para a próxima iteração. Portanto a técnica utilizada para fazer o software convergir para um valor factível é o emprego de funções de penalidade. Caso uma solução não respeite as restrições impostas pelo algoritmo, a função objetivo dessa solução é incrementada por uma penalidade proporcional ao grau de violação da restrição, como descrito na equação 7.5

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + P_t(\mathbf{x}) \quad (7.5)$$

Aumentando o valor da função objetivo dessa forma — caso seja função objetivo de minimização — a solução torna-se suscetível a ser descartada, já que são as melhores

soluções que são armazenadas.

Na literatura encontram-se diversos métodos de penalidade, entre eles os mais populares são a *quadratic loss function*, *inverse barrier function*, *log barrier function* e *augmented Lagrangian methods* (ARORA, 2004).

O presente trabalho utilizou o método descrito em Gonçalves et al. (2015, p. 168) e a função penalidade é descrita na equação 7.6:

$$P_t(\mathbf{x}) = h \left[\sum_{i=1}^q \left(1 - \frac{p_i}{p_i^*} \right)^+ \right] \quad (7.6)$$

“onde $(\cdot)^+ = \frac{(\cdot) + |(\cdot)|}{2}$, em que $|(\cdot)|$ indica o valor absoluto, h é um escalar positivo, p_i é uma resposta do sistema e p_i^* é o seu limite. A função penalidade $P_t(\mathbf{x})$ é então adicionada à equação 7.5” (GONÇALVES; LOPEZ; MIGUEL, 2015, p. 168, tradução nossa).

8 FORMULAÇÃO

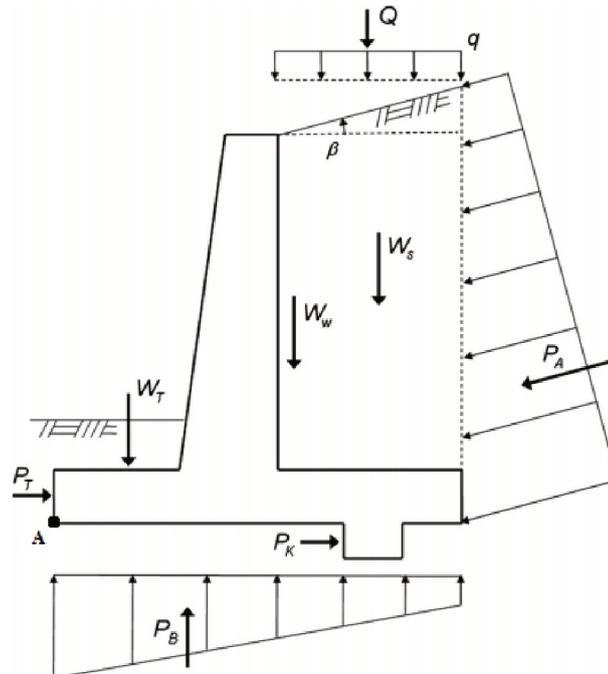
8.1 DIMENSIONAMENTO DO MURO DE CONTENÇÃO

Procurou-se reproduzir a formulação utilizada por Camp e Akin (2012) e nesta seção serão descritos os critérios utilizados neste trabalho.

8.1.1 Estabilidade geotécnica

A Figura (22) mostra as forças agindo no muro de contenção, onde q é a sobrecarga uniformemente distribuída sobre o talude; Q a resultante da sobrecarga; P_A o empuxo ativo; P_T e P_K os empuxos passivos no pé e na chave, respectivamente; W_T o peso do solo sobre o pé; W_W o peso total do muro (concreto e armadura); W_S o peso do solo de aterro acima do calcanhar; e P_B é a resultante das tensões na base da fundação do muro. Esta configuração foi adaptada de Saribas e Erbatur (1996). No presente caso, foram considerados os empuxos passivos no pé e na chave e as forças agindo na base do muro.

Figura 22 – Forças agindo no muro de contenção



Fonte: Design of retaining walls using Big Bang-Big Crunch Optimization, Camp e Akin, 2012.

Devem-se considerar, no dimensionamento de muros de contenção, as estabilidade geotécnica e estrutural. A primeira compreende a satisfação de três modos de ruptura: tombamento do muro, deslizamento da base sobre o solo de fundação e ruptura por mo-

bilização da capacidade de suporte última do solo de fundação. Essas imposições são expressas por três fatores de segurança, o primeiro, FS_T , é computado através da seguinte equação

$$FS_T = \frac{\sum M_R}{\sum M_S} \quad (8.1)$$

sendo $\sum M_R$ o somatório dos momentos resistentes em relação ao ponto A, exposto na Figura (22), composto por todas as forças verticais multiplicadas por seus respectivos braços de alavanca, excetuando os empuxos passivos P_T e P_K ; e $\sum M_S$ o somatório das forças que favorecem o tombamento, compreendido unicamente pela parcela horizontal do empuxo ativo P_{ax} , expresso por

$$P_{ax} = P_a \cos \beta \quad (8.2)$$

As pressões laterais devido ao solo — empuxos — são calculadas através da Teoria de Empuxo Ativo e Passivo de Rankine (DAS, 2006). O coeficiente de empuxo ativo k_a e o coeficiente de empuxo passivo k_p são definidos segundo as Equações (8.3) e (8.4), respectivamente

$$k_a = \cos \beta \frac{\cos \beta - \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \theta}}{\cos \beta + \sqrt{\cos^2 \beta - \cos^2 \theta}} \quad (8.3)$$

$$k_p = \tan^2 \left(45 + \frac{\theta}{2} \right) \quad (8.4)$$

em que β é o ângulo de inclinação do talude, como na Figura (22), e θ o ângulo de atrito do solo considerado.

O fator de segurança ao deslizamento FS_D é avaliado de acordo com

$$FS_D = \frac{\sum F_R}{\sum F_S} \quad (8.5)$$

sendo o somatório de forças horizontais resistentes ao deslizamento $\sum F_r$, definido pela Equação (8.6), composta por: atrito causado pelo peso do muro, peso do solo acima da base e sobrecarga, a adesão da base do muro ao solo de fundação devida à coesão, e o empuxo passivo agindo ao lado esquerdo do muro. O somatório de forças horizontais solicitantes $\sum F_S$ compreende apenas a parcela de empuxo lateral ativo do solo de aterro descrito na Equação (8.2).

$$\sum F_R = \left(\sum V \right) \tan \left(\frac{2\phi_{base}}{3} \right) + \frac{2Bc_{base}}{3} + P_p \quad (8.6)$$

onde $\sum V$ é a soma das forças verticais devido ao peso do muro, do solo e da sobrecarga; ϕ_{base} o ângulo de atrito interno do solo de fundação; B a largura da base; c_{base} a adesão entre o solo de fundação e a base do muro; e P_p o empuxo passivo computado até o plano horizontal definido pela extremidade inferior do muro, como definido por

$$P_p = \frac{1}{2}\gamma_{base}D_1^2k_p + 2c_{base}D_1\sqrt{k_p} \quad (8.7)$$

em que γ_{base} é o peso específico do solo de fundação e D_1 é a altura do bloco de tensões do empuxo lateral passivo.

O fator de segurança quanto a capacidade de suporte do solo de fundação FS_u é avaliado com

$$FS_u = \frac{q_{ult}}{q_{max}} \quad (8.8)$$

onde q_{ult} é a capacidade de suporte última descrita pela equação de Terzaghi

$$q_{ult} = cN_c + \gamma_{aterro}DN_q + \frac{1}{2}\gamma_{base}N_\gamma B' \quad (8.9)$$

sendo c a coesão do solo de fundação; N_c , N_q e N_γ os fatores de capacidade de carga de Terzaghi; γ_{aterro} o peso específico do solo de aterro; D a altura de solo acima da base do muro; B' a largura efetiva da base do muro e e a excentricidade:

$$B' = B - 2e \quad (8.10)$$

$$e = \frac{B}{2} - \frac{\sum M_R - \sum M_S}{\sum V} \quad (8.11)$$

As tensões agindo na base da fundação q_{max} e q_{min} são calculadas a partir de

$$q_{min}^{max} = \frac{\sum V}{B} \left(1 \pm \frac{6e}{B} \right) \quad (8.12)$$

8.1.2 Resistências e demandas estruturais

Para satisfazer os critérios estruturais, as solicitações de momento e esforço cortante em cada seção crítica devem ser menores que as resistências à flexão e ao esforço cortante. As resistências são calculadas através de

$$M_n = \phi A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) \quad (8.13)$$

em que M_n é a resistência à flexão, ϕ é o coeficiente nominal de resistência, que segundo ACI (2005) equivale a 0.9; A_s é a área transversal de aço na seção, f_y é a resistência ao escoamento do aço, d a distância da face mais comprimida ao centroide das armaduras e a a altura do bloco de tensões equivalente, dada na seguinte equação

$$a = \beta_1 dl \quad (8.14)$$

onde β_1 é um coeficiente de valor igual 0.85 para o intervalo $17MPa \leq f_c \leq 28MPa$ e dl a distância da fibra de maior deformação à linha neutra (ACI, 2005).

A resistência ao cisalhamento é avaliada pela seguinte expressão

$$V_n = \phi 0.17 \sqrt{f_c} b d \quad (8.15)$$

em que ϕ é o coeficiente nominal de resistência, equivalente a 0.75 para resistência ao cisalhamento; f_c a resistência à compressão do concreto e b a largura da seção avaliada (1 metro neste estudo).

$$dl = \frac{f_y A_s}{0.85 f_c \beta_1 b} \quad (8.16)$$

$$d = h - Cb - \frac{dn}{2} \quad (8.17)$$

sendo h a altura da seção, Cb o cobrimento nominal de concreto e dn o diâmetro nominal da barra de aço.

As taxas mínimas e máximas de armadura são avaliadas pelas seguintes equações

$$\rho_{min} = 0.25 \frac{\sqrt{f_c}}{f_y} \geq \frac{1.4}{f_y} \quad (8.18)$$

$$\rho_{max} = 0.85 \beta_1 \frac{f_c}{f_y} \left(\frac{600}{600 + f_y} \right) \quad (8.19)$$

8.2 VARIÁVEIS DE PROJETO

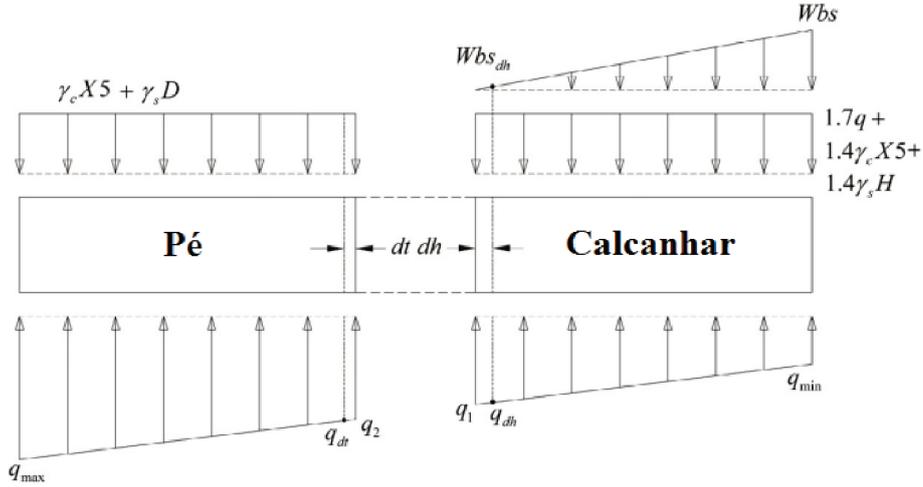
A Figura (23) ilustra as variáveis de projeto utilizadas na formulação do muro de contenção. São 12 variáveis de projeto, sendo 8 delas referentes à geometria do muro e 4 referentes à área de armadura, uma para cada seção crítica. As variáveis geométricas são tomadas como contínuas, já as de armadura foram configuradas como discretas. X_1 representa o comprimento da base do muro; X_2 o comprimento do pé; X_3 a largura inferior do tardo; X_4 a largura superior do tardo; X_5 a espessura da base; X_6 a distância da extremidade esquerda da base até a face posterior da chave; X_7 a largura da chave; e X_8 a altura da chave. Entre as variáveis de reforço estrutural, R_1 refere-se à armadura vertical do tardo; R_2 à armadura horizontal do pé; R_3 à armadura horizontal do calcanhar; e R_4 à armadura vertical da chave.

As variáveis de reforço estrutural estão arranjadas em uma base de dados, onde a configuração das armaduras é pré-definida respeitando os limites geométricos e de taxas mínimas de aço recomendados por ACI 318-05 (2005). São 223 combinações representando de 3 a 28 barras, igualmente espaçadas, com diâmetros variando de 10 a 30 mm. A Tabela

8.3 ESFORÇOS SOLICITANTES

Os esforços solicitantes serão computados sobre as faces dos suportes (tardoz, pé, calcanhar e chave). A Figura (24) mostra os esforços na base do muro.

Figura 24 – Esforços na base do muro



Fonte: Adaptado de Optimization of retaining wall design using recent swarm intelligence techniques, Gandomi et al., 2015.

O pé do muro está sujeito aos carregamentos: peso do solo acima do pé, peso próprio do pé (aço e concreto) e as pressões do solo abaixo do pé. Os cortantes são considerados até a seção crítica, que dista dt da junção do tardoz ao pé. Sendo $dt = X_5 - C_b$, o momento e cortante são avaliados pelas seguintes equações

$$M_p = \left[1.7 \left(\frac{q_2}{6} + \frac{q_{max}}{3} \right) - 0.9(\gamma_c X_5 + \gamma_s D) \right] lpe^2 \quad (8.20)$$

$$V_t = \left[1.7 \left(\frac{q_{dt} + q_{max}}{2} \right) - 0.9(\gamma_c X_5 + \gamma_s D) \right] (lpe - dt) \quad (8.21)$$

onde q_2 é a intensidade da pressão do solo na junção do tardoz ao pé, γ_c o peso específico do concreto, γ_s o peso específico do solo, lpe o comprimento do pé do muro e q_{dt} a intensidade da pressão do solo a uma distância dt da junção tardoz-pé.

Similarmente, o calcanhar está sujeito ao peso do solo, ao peso do muro, à sobrecarga e às pressões do solo de fundação. O esforço cortante será considerado a uma distância dh do intercepto do tardoz com o calcanhar, sendo $dh = X_5 - C_b$ o momento e cortante são descritos por

$$M_c = \left[\left(\frac{1.7q + 1.4\gamma_c X_5 + 1.4\gamma_s H}{2} \right) + \frac{1.4W_{bs}}{3} - \left(\frac{q_1 + 2q_{min}}{6} \right) \right] lcal^2 \quad (8.22)$$

$$V_c = \left[1.7q + 1.4\gamma_c X_5 + 1.4\gamma_s H + 1.4 \frac{W_{bs} + W_{bsd h}}{2} - 0.9 \frac{q_{dh} + q_{min}}{2} \right] (l_{cal} - dh) \quad (8.23)$$

sendo q a sobrecarga sobre o talude; W_{bs} o peso máximo da parcela do talude inclinado acima do tardez; q_1 é a intensidade da pressão de fundação no intercepto do tardez e o calcanhar; l_{cal} é o comprimento do calcanhar; $W_{bsd h}$ é a intensidade do peso do talude inclinado acima do tardez, a uma distância dh para a direita e q_{dh} é a intensidade da pressão da fundação a uma distância dh .

Devem ser determinados os comprimentos de ancoragem básicos descritos por ACI 318-05, como se segue

$$\frac{l_d}{dn} = \begin{cases} \frac{12f_y\psi_t\psi_e\lambda}{25\sqrt{f_c}} \geq 300 \text{ mm para } dn < 19 \text{ mm} \\ \frac{12f_y\psi_t\psi_e\lambda}{20\sqrt{f_c}} \geq 300 \text{ mm para } dn \geq 19 \text{ mm} \end{cases} \quad (8.24)$$

ψ_t , ψ_e e λ são tomados neste estudo como 1.0. O comprimento de ancoragem com gancho será calculado através de

$$l_{dh} = dn 0.24 \frac{f_y}{\sqrt{f_c}} \geq 150 \text{ mm} \quad (8.25)$$

e para o cálculo da quantidade de aço, as ancoragens com gancho deverão ser acrescidas de $12dn$ (comprimento do gancho).

8.4 FUNÇÃO OBJETIVO

Em concordância com o problema originalmente proposto por Saribas e Erbatur (1996), duas funções objetivos foram verificadas: função objetivo de minimização de custo e função objetivo de minimização de peso, f_{custo} e f_{peso} , respectivamente. Os parâmetros de custo consideram a quantidade de material utilizado, mão de obra e instalação. O custo e o peso são avaliados para um metro de muro.

$$f_{custo} = C_a W_a + C_c V_c \quad (8.26)$$

sendo C_a o custo do aço por quilograma, W_a o peso do aço, C_c o custo do concreto por m^3 e V_c o volume de concreto.

$$f_{peso} = W_a + 100V_c\gamma_c \quad (8.27)$$

sendo o escalar 100 utilizado para conversão de unidades, nesse caso para retornar o peso de concreto em quilogramas.

8.5 RESTRIÇÕES

Para obter resultados em concordância com a boa prática da engenharia, o dimensionamento deve possuir estabilidades geotécnica e estrutural respeitando limitações geométricas. Pode-se dividir as restrições em duas categorias: restrições de contorno e restrições de desigualdade. A técnica utilizada para fazer o algoritmo convergir para um valor factível é o emprego das funções penalidade. Caso uma solução não respeite as restrições impostas, a função objetivo dessa solução é incrementada por uma penalidade proporcional ao grau de violação da restrição, como descrito a seguir

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + P_t(\mathbf{x}) \quad (8.28)$$

Aumentar o valor da função objetivo dessa forma faz com que a solução seja descartada, pois apenas as melhores são armazenadas. Foi utilizado o método exposto por Gonçalves et al. (2015) e a função penalidade é descrita por

$$P_t(\mathbf{x}) = h \left[\sum_{i=1}^q \left(1 - \frac{p_i}{p_i^*} \right)^+ \right] \quad (8.29)$$

onde $(\cdot)^+ = \frac{(\cdot) + |\cdot|}{2}$, $|\cdot|$ indica o valor absoluto, h é um escalar positivo, p_i é uma resposta do sistema e p_i^* é o seu limite. A função penalidade $P_t(\mathbf{x})$ é então adicionada à equação 8.28.

8.5.1 Restrições de contorno

Para obter projetos de dimensões factíveis e em acordo com o estado da arte, utilizaram-se os limites inferiores e superiores de variáveis de projeto propostos por Saribas e Erbatur (1996) e Camp e Akin (2012). Esses limites são incorporados ao SGA e serão especificados nas seções seguintes.

8.5.2 Restrições de desigualdade

A Tabela (2) compreende todas as restrições de desigualdade, sendo $g_{[1-3]}$ as restrições geotécnicas, $g_{[5-12]}$ as restrições estruturais, $g_{[13-20]}$ os limites de armadura, $g_{[21-22]}$ as restrições geométricas do muro e $g_{[23-26]}$ as limitações geométricas para o comprimento de ancoragem.

$FS_{Tprojeto}$, $FS_{Dprojeto}$, $FS_{uprojeto}$ são pré-definidos para cada exemplo; como o solo não resiste à tração q_{min} deve ser positivo.

Tabela 2 – Restrições de desigualdade

Restrição	Função	Restrição	Função
g_1	$\frac{FS_{Tprojeto}}{FS_T} - 1 \leq 0$	$g_{[17-20]}$	$\frac{As}{As_{max}} - 1 \leq 0$
g_2	$\frac{FS_{Dprojeto}}{FS_D} - 1 \leq 0$	g_{21}	$\frac{X_2+X_3}{X_1} - 1 \leq 0$
g_3	$\frac{FS_{uprojeto}}{FS_u} - 1 \leq 0$	g_{22}	$\frac{X_6+X_7}{X_1} - 1 \leq 0$
g_4	$q_{min} \geq 0$	g_{23}	$\frac{ldhtardo}{X_5-C_b} - 1 \leq 0$
$g_{[5-8]}$	$\frac{M_d}{M_n} - 1 \leq 0$	g_{24}	$\frac{ldbpe}{X_1-X_2-C_b} - 1 \leq 0$
$g_{[9-12]}$	$\frac{V_d}{V_n} - 1 \leq 0$	g_{25}	$\frac{ldbcalc}{X_2+X_3-C_b} - 1 \leq 0$
$g_{[13-16]}$	$\frac{As_{min}}{As} - 1 \leq 0$	g_{26}	$\frac{ldhchave}{X_5-C_b} - 1 \leq 0$

Fonte: elaborado pelo autor.

9 OTIMIZAÇÃO E RESULTADOS

Nesta seção será discutida a eficiência do algoritmo proposto. Os dois estudos de caso avaliados aqui foram adaptados de Saribas e Erbatur (1996). O primeiro exemplo é idêntico ao original e o segundo exemplo foi modificado para observar o efeito da adição de uma chave na base do muro. Foi feita também a análise de sensibilidade nos dois exemplos, variando o ângulo de atrito interno do aterro, o ângulo de inclinação do talude e a sobrecarga atuante.

Para tanto, os parâmetros do SGA serão iguais nas análises de sensibilidade, para os dois exemplos: $n_{pop} = 100$ (população); $it^{max} = 200$ (número de iterações); $it_{global}^{max} = 0,9$ (percentagem de iterações atribuída à fase global); $\alpha^k = 2$ (perturbação descrita na seção 7.4); $\alpha_{min} = 0,015$; $n_{mut} = 4$ (número de mutações); $n_g = 0,1$ (grupo de buscas equivalente a 10% da população) e o expoente de penalidade $h = 10^4$. Cada resultado foi obtido por 100 execuções do algoritmo e estão expostos em termos de: melhor função objetivo, média e desvio padrão.

9.1 EXEMPLO 1

9.1.1 Melhores projetos

Neste exemplo foram avaliadas a função objetivo custo e função objetivo peso. Os parâmetros de projeto utilizados estão retratados na Tabela (3) e os limites inferior e superior das variáveis de projeto na Tabela (4). Tanto os parâmetros quanto os limites das variáveis foram retirados do estudo de Camp e Akin (2012).

Não é considerada chave abaixo da base, assim sendo as variáveis de projeto se restringem a cinco (X_{1-5}) variáveis dimensionais e três (R_{1-3}) variáveis estruturais. Os melhores projetos obtidos estão considerados na Tabela (5) e conjuntamente se encontram os resultados obtidos por Camp e Akin (2012).

Tabela 3 – Parâmetros (exemplo 1)

Parâmetro	Unidade	Símbolo	Valor
Altura do tardo	m	H	3,0
Resistência ao escoamento do aço	MPa	f_y	400
Resistência à compressão do concreto	MPa	f_c	21
Cobrimento nominal	m	C_b	0,07
Coefficiente de armadura suplementar	—	ρ_{st}	0,002
Sobrecarga	kPa	q	20
Inclinação do talude	°	β	10
Ângulo de atrito interno do aterro	°	ϕ_1	36
Ângulo de atrito interno do solo de fundação	°	ϕ_2	0
Peso específico do solo de aterro	kN/m ³	γ_{s1}	17,5
Peso específico do solo de fundação	kN/m ³	γ_{s2}	18,5
Peso específico do concreto	kN/m ³	γ_c	23,5
Coesão do solo de fundação	kPa	c	125
Altura de embutimento do muro	m	D	0,5
Custo do aço	\$/kg	C_a	0,4
Custo do concreto	\$/m ³	C_c	40
Fator de segurança ao tombamento	—	$SF_{Tprojeto}$	1,5
Fator de segurança ao deslizamento	—	$SF_{Dprojeto}$	1,5
Fator de segurança para capacidade de suporte	—	$SF_{uprojeto}$	3

Fonte: adaptado de *Design of Retaining Walls using Big Bang-Big Crunch Optimization*, Camp e Akin, 2012.

Tabela 4 – Limites das variáveis de projeto (exemplo 1)

Variável de projeto	Unidade	Limite inferior	Limite Superior
X_1	m	1,3090	2,3333
X_2	m	0,4363	0,7777
X_3	m	0,2000	0,3333
X_4	m	0,2000	0,3333
X_5	m	0,2722	0,3333
R_1	—	1	223
R_2	—	1	223
R_3	—	1	223

Fonte: adaptado de *Design of Retaining Walls using Big Bang-Big Crunch Optimization*, Camp e Akin, 2012.

Para a função objetivo custo obteve-se valor mínimo de \$70,16/m, média de \$70,46/m e desvio padrão de \$0,225/m. O mínimo é 1,03% menor do que o obtido pelo BB-BC.

Tanto a quantidade de aço quanto o volume de concreto são levemente menores e a principal diferença entre os projetos encontra-se no comprimento da base do muro, representado pela variável X_1 , como exposto na Tabela (5).

O menor valor obtido para a função objetivo peso foi de 2584,46 kg/m, sua média foi 2589,00 kg/m e o desvio padrão 2,189 kg/m. O resultado é 0,92% menor, comparado ao de Camp e Akin (2012), sendo que o resultado obtido pelo SGA retornou aproximadamente 1 kg a mais de aço, porém o peso geral acabou menor devido ao volume de concreto levemente inferior. As variáveis de projeto são similares, excetuando o comprimento da base do muro (X_1) que é 2,23% menor.

Tabela 5 – Melhores projetos (exemplo 1)

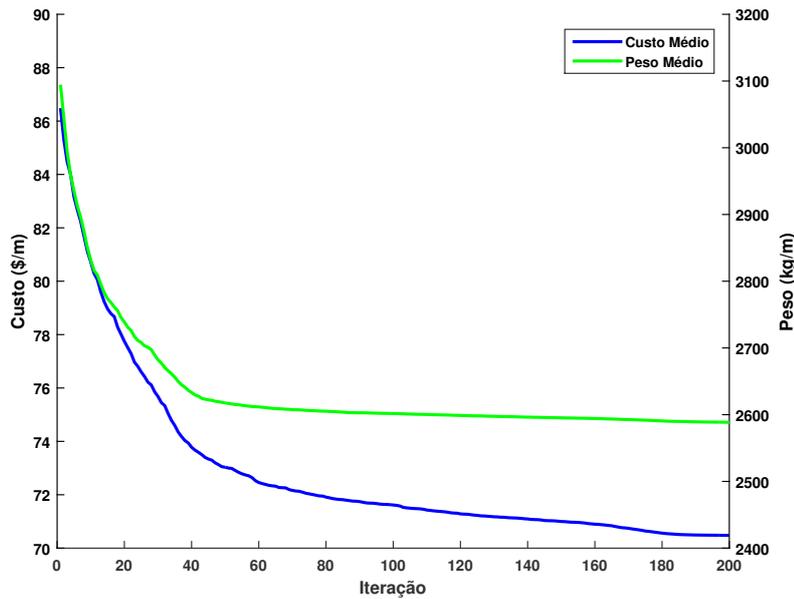
Variável de projeto	BB-BC, Camp e Akin (2012)		SGA	
	Custo	Peso	Custo	Peso
X_1 (m)	1,7428	1,7450	1,7056	1,7061
X_2 (m)	0,6197	0,6424	0,6019	0,6546
X_3 (m)	0,2678	0,2000	0,2677	0,2000
X_4 (m)	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000
X_5 (m)	0,2722	0,2722	0,2722	0,2722
R_1	15-10mm	27-10mm	15-10mm	27-10mm
R_2	10-10mm	10-10mm	9-10mm	12-10mm
R_3	10-10mm	10-10mm	9-10mm	10-10mm
Aço (kg/m)	59,6182	82,1380	58,8023	83,1023
Concreto (m ³ /m)	1,1761	1,0750	1,1658	1,0644
Função Objetivo	\$70,89/m	2608,37 kg/m	\$70,1584/m	2584,46 kg/m

Fonte: elaborado pelo autor.

9.1.2 Análise da convergência

A Figura (25) ilustra a forma da convergência do SGA para a média obtida em 200 iterações. Nota-se uma leve inflexão da curva de custo a partir da iteração 180, que representa a mudança de fase global para fase local de exploração. Porém, nota-se também que a solução não se diferencia muito ao passar de fases. Essa mudança é quase imperceptível na curva de pesos, porém há uma leve inflexão.

Figura 25 – Curvas de convergência (exemplo 1)



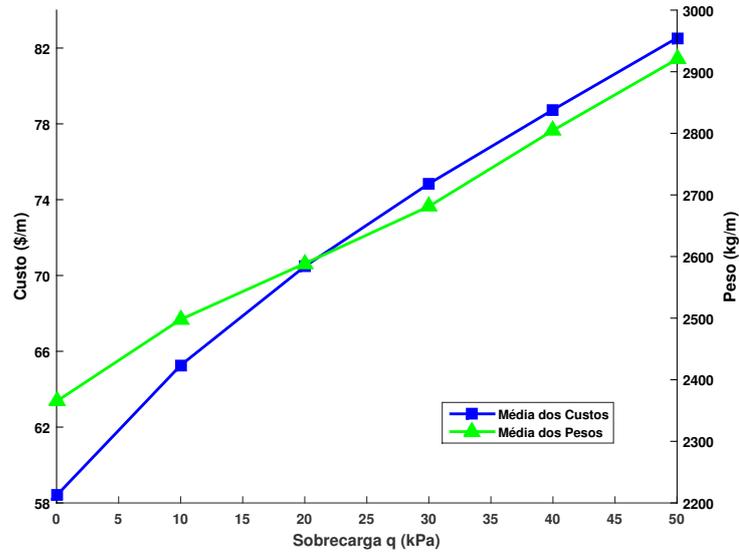
Fonte: elaborado pelo autor.

A curva de pesos convergiu muito mais rápido que a de custos, isto se deve ao fato de que a função objetivo de custo leva em consideração as constantes C_c e C_a , ou seja, existe uma dualidade em que o aço tem alto impacto no custo final do projeto, portanto o processo de otimização tenta balancear entre os dois parâmetros, volume de concreto e peso de aço, até o final do procedimento. Como a quantidade de aço e seu respectivo peso têm pouca relevância no peso total, a rápida convergência da curva de pesos se dá pelo fato de que as variáveis de dimensão refletem em magnitude maior e portanto são definidas inicialmente, pouco importando o peso do aço, pois o mesmo vai sendo refinado posteriormente e, ainda assim, pouco impactando o resultado final.

9.1.3 Análise da sensibilidade

A Figura (26) ilustra a sensibilidade do custo e do peso em função da variação da sobrecarga. Para esta análise, foram coletadas a média de custo e a média de peso, variando a sobrecarga de 0 kPa a 50 kPa. Os resultados indicam que, entre os extremos, houve aumento de 41.33% no custo e de 23.48% no peso. Logo, a variação da sobrecarga é mais influente no custo, o que é natural, pois sua ação impacta diretamente nos esforços solicitantes e conseqüentemente na quantidade de armadura necessária.

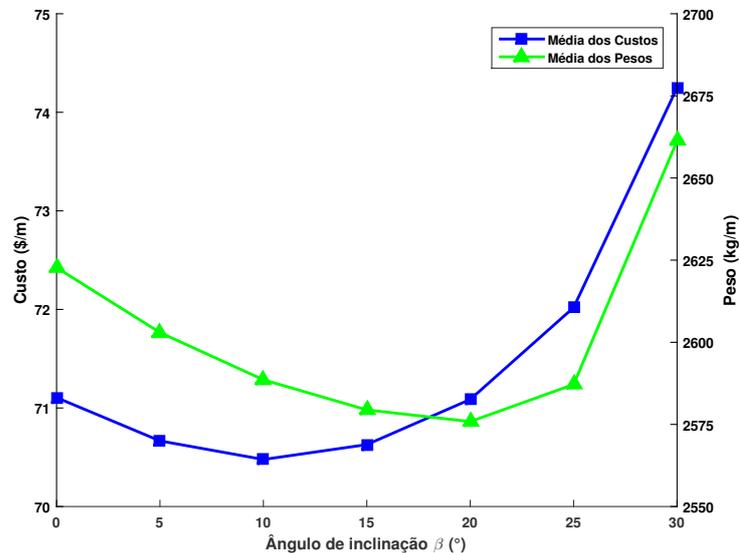
Figura 26 – Efeito da sobrecarga sobre custo e peso (exemplo 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura (27) apresenta as curvas de custo e peso sobre variação do ângulo de inclinação do talude, que foi variado de 0° a 30° . Houve aumento de 4.42% no custo e 1.47% no peso. Analogamente ao caso anterior, o custo é mais sensível que o peso.

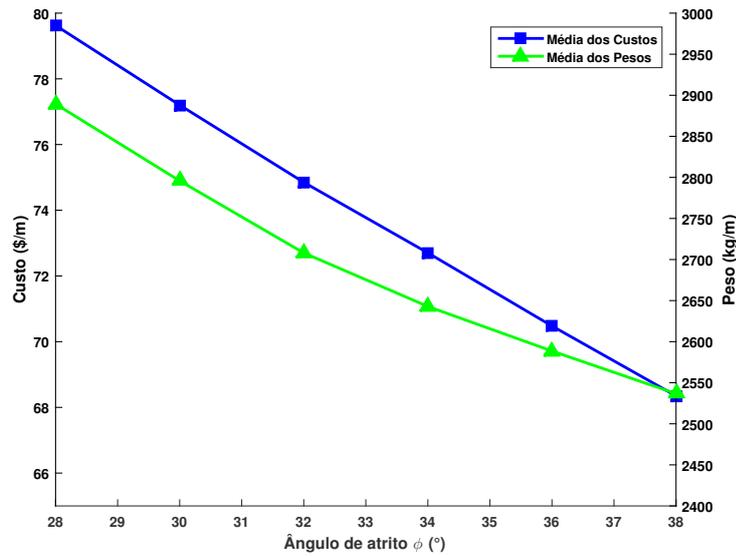
Figura 27 – Efeito do ângulo de inclinação do talude sobre custo e peso (exemplo 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

No gráfico representado pela Figura (28), ilustra-se a diminuição do peso e do custo, causada pela variação do ângulo de atrito, de 28° a 38° . Houve diminuição de 14.16% para o custo e de 12.21% para o peso.

Figura 28 – Efeito do ângulo de atrito do solo de aterro sobre custo e peso (exemplo 1)



Fonte: elaborado pelo autor.

De forma sintetizada, o custo é mais sensível aos parâmetros analisados. Pode-se inferir que isto se deve ao fato de que todos os parâmetros sujeitos à análise de sensibilidade influenciam diretamente nos esforços solicitantes e portanto na quantidade de armadura necessária. O concreto possui mais relevância nas restrições geotécnicas, e sua contribuição principal é no peso do sistema. Assim sendo, por ser um material mais oneroso, o aço enquanto necessidade estrutural acaba por tornar a função custo mais sensível.

9.2 EXEMPLO 2: CASO 1 (SEM CHAVE) E CASO 2 (COM CHAVE)

9.2.1 Melhores projetos

Neste exemplo dois projetos são considerados: um com chave na base (caso 1) e outro sem chave na base (caso 2). Os parâmetros são correlatos aos propostos por Saribas e Erbatur (1996), entretanto o valor da coesão foi considerado igual a zero, fazendo com que a resistência ao deslizamento seja composta apenas pela parcela do atrito e do empuxo passivo. Dessa forma, a chave torna-se mais relevante e seu efeito mais perceptível. A Tabela (6) contém os parâmetros utilizados no exemplo 2 e a Tabela (7) contém os limites inferiores e superiores das variáveis de projeto. Tanto os parâmetros quanto os limites das variáveis foram retirados do estudo de Camp e Akin (2012).

Tabela 6 – Parâmetros (exemplo 2)

Parâmetro	Unidade	Símbolo	Valor
Altura do tardo	m	H	4,5
Resistência ao escoamento do aço	MPa	f_y	400
Resistência à compressão do concreto	MPa	f_c	21
Cobrimento nominal	m	C_b	0,07
Coefficiente de armadura suplementar	—	ρ_{st}	0,002
Sobrecarga	kPa	q	30
Inclinação do talude	°	β	0
Ângulo de atrito interno do aterro	°	ϕ_1	28
Ângulo de atrito interno do solo de fundação	°	ϕ_2	34
Peso específico do solo de aterro	kN/m ³	γ_{s1}	18,5
Peso específico do solo de fundação	kN/m ³	γ_{s2}	17,0
Peso específico do concreto	kN/m ³	γ_c	23,5
Coesão do solo de fundação	kPa	c	0
Altura de embutimento do muro	m	D	0,3
Custo do aço	\$/kg	C_a	0,4
Custo do concreto	\$/m ³	C_c	40
Fator de segurança ao tombamento	—	$SF_{Tprojeto}$	1,5
Fator de segurança ao deslizamento	—	$SF_{Dprojeto}$	1,5
Fator de segurança para capacidade de suporte	—	$SF_{uprojeto}$	1,5

Fonte: adaptado de *Design of Retaining Walls using Big Bang-Big Crunch Optimization*, Camp e Akin, 2012.

Tabela 7 – Limites das variáveis de projeto (exemplo 2)

Variável de projeto	Unidade	Limite inferior	Limite Superior
X_1	m	1,96	5,50
X_2	m	0,65	1,16
X_3	m	0,25	0,50
X_4	m	0,25	0,50
X_5	m	0,40	0,50
X_6	m	1,96	5,50
X_7	m	0,20	0,50
X_8	m	0,20	0,50
R_1	—	1	223
R_2	—	1	223
R_3	—	1	223
R_4	—	1	223

Fonte: adaptado de *Design of Retaining Walls using Big Bang-Big Crunch Optimization*, Camp e Akin, 2012..

As Tabelas (8) e (9) exibem os valores mínimos obtidos com o SGA e por Camp e Akin (2012) nos casos 1 e 2, respectivamente. Para o caso 1, sem chave na base, o menor custo obtido foi de \$241,99/m, o qual é 3,50% maior que o de Camp e Akin (2012), média de \$245,08/m e desvio padrão de \$2,26/m. O menor peso foi de 8123,62 kg/m, 3,86% maior que o BB-BC, média de 8144,47 kg/m e desvio padrão de 31,51 kg/m.

Tabela 8 – Melhores projetos para o exemplo 2.1 (sem chave)

Variável de projeto	BB-BC, Camp e Akin (2012)		SGA	
	Custo	Peso	Custo	Peso
X_1	4,40	4,31	4,1240	4,0690
X_2	0,70	0,65	0,6649	0,6501
X_3	0,49	0,41	0,4884	0,4150
X_4	0,25	0,25	0,2500	0,2500
X_5	0,40	0,40	0,4495	0,4515
R_1	23-12mm	22-14mm	23-12mm	22-14mm
R_2	15-10mm	15-10mm	18-10mm	23-10mm
R_3	27-12mm	22-14mm	21-14mm	22-14mm
Aço (kg/m)	242,0282	280,4037	253,4662	290,1265
Concreto (m ³ /m)	3,425	3,209	3,5151	3,3334
Função Objetivo	\$233,8113/m	7821,554 kg/m	\$241,9920/m	8123,62 kg/m

Fonte: elaborado pelo autor.

Como no exemplo 1, a grande diferença nas variáveis de projeto se encontra no comprimento da base do muro, porém desta vez a quantidade de armadura e a altura da base X_5 se diferenciaram levemente. Isso se deve pelo seguinte motivo: a formulação matemática em que esse estudo se baseou não está completamente explícita, portanto há uma pequena divergência entre os dois estudos, apesar de grandes esforços para encontrar a forma utilizada em alguns cálculos, obscuros para o presente autor.

Um exemplo claro é na formulação dos esforços resistentes ao deslizamento: nas funções de custo e peso, a altura da base do muro ficou levemente maior, ou seja, neste estudo o algoritmo teve que majorar a influência do empuxo passivo na computação dessa resistência para que a mesma respeitasse o fator de segurança ao deslizamento (quanto mais profundo o embutimento do muro, maior será o empuxo passivo). Entretanto no estudo de Camp e Akin (2012) o comprimento da base X_1 foi maior. Arrisca-se dizer que esse incremento no comprimento aumentou a quantidade de solo acima do muro, aumentando o peso sobre o mesmo e elevando a parcela de resistência ao deslizamento por atrito. De forma sintetizada, aumentou-se a parcela do atrito em detrimento do empuxo passivo. Para melhor compreensão consultar Equação (8.6).

Para o caso 2, com chave na base, foram obtidos resultados melhores. O custo (\$225,63/m) foi 0,81% menor, com média de \$228,13/m e desvio padrão de \$5,11/m. O peso (7442,92 kg/m) foi 1,10% menor, a média das 100 execuções foi de 7483,89 kg/m e o desvio padrão de 68,33 kg/m.

Tabela 9 – Melhores projetos para o exemplo 2.2 (com chave)

Variável de projeto	BB-BC, Camp e Akin (2012)		SGA	
	Custo	Peso	Custo	Peso
X_1	3,97	3,76	3,6119	3,4559
X_2	0,84	0,68	0,7625	0,6501
X_3	0,49	0,41	0,4998	0,4150
X_4	0,25	0,25	0,2519	0,2500
X_5	0,40	0,40	0,4286	0,4222
X_6	2,90	3,22	2,2678	2,2314
X_7	0,20	0,20	0,2017	0,2002
X_8	0,48	0,49	0,4875	0,5000
R_1	23-12mm	22-14mm	10-18mm	22-14mm
R_2	15-10mm	18-10mm	16-10mm	20-10mm
R_3	24-12mm	20-14mm	10-18mm	24-12mm
R_4	6-10mm	6-10mm	13-10mm	27-10mm
Aço (kg/m)	233,7902	270,9573	230,2975	263,12
Concreto (m ³ /m)	3,349	3,087	3,3378	3,0552
Função Objetivo	\$227,4761/m	7525,407 kg/m	\$225,6312/m	7442,92 kg/m

Fonte: elaborado pelo autor.

Esse resultado confirma os problemas e diferenças entre estudos, apontado na análise do caso 1, pois a aplicação de chave em muros de contenção se deve principalmente a resistir o deslizamento, através do empuxo passivo. Deve-se notar que no caso 1 os projetos obtidos pelo SGA foram piores, pois o algoritmo tentava respeitar o fator de segurança ao deslizamento aumentando a altura da base do muro X_5 (elevando o empuxo passivo). Em contrapartida, no caso 2 os resultados foram melhores, pois o presente código melhor aproveita o empuxo passivo, e a profundidade de cálculo do mesmo é maior: altura da chave somada à altura da base do muro ($X_5 + X_8$), tornando a chave mais eficiente.

9.2.2 Análise da sensibilidade

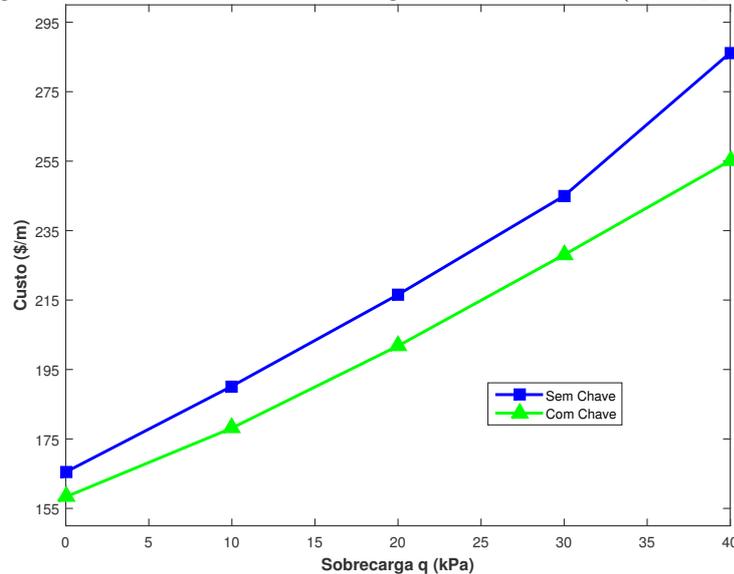
Diferentemente do exemplo 1, não será avaliada a sensibilidade da função peso. Os gráficos representados pelas Figuras (29), (30) e (31) ilustram o comportamento da função

objetivo custo frente à variação dos parâmetros sobrecarga, ângulo de inclinação do talude e ângulo de atrito, respectivamente. Através destas informações pode-se aferir a utilidade da chave embutida, refletida na diminuição dos custos.

Relembrando que neste exemplo a coesão é tomada como nula, elevando o grau de importância do empuxo passivo e o atrito entre solo e muro para resistir aos esforços deslizantes. A sobrecarga foi variada de 0 kPa a 40 kPa, o ângulo de inclinação β de 0° a 15° e o ângulo de atrito do solo de aterro de 28° a 36° . Os resultados para β maiores que 15° não foram expostos, pois o algoritmo não retornou projetos concordantes com as restrições impostas.

Para sobrecarga nula o muro com chave teve custo 4,33% menor que o muro com chave e para sobrecarga de 40 kPa o custo foi 12,18% menor que o caso sem chave.

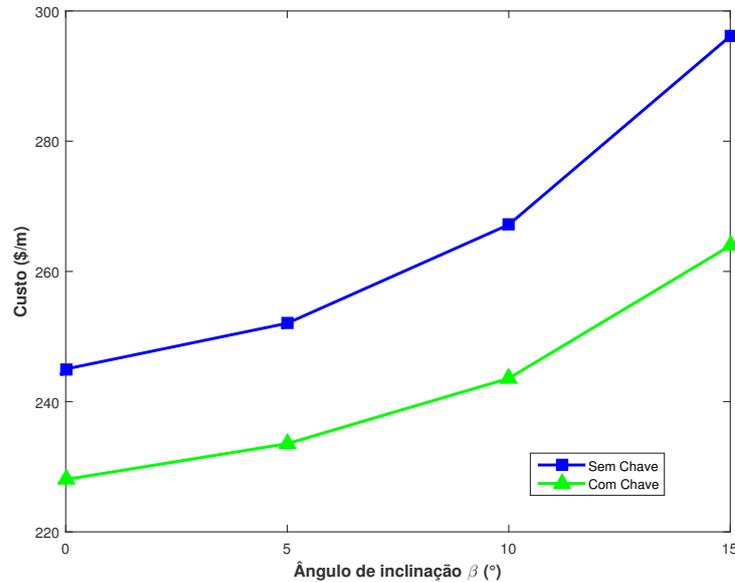
Figura 29 – Efeito da sobrecarga sobre o custo (exemplo 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

Para ângulo de inclinação 0° o custo foi 6,82% menor e para 15° o custo foi 10,87% menor.

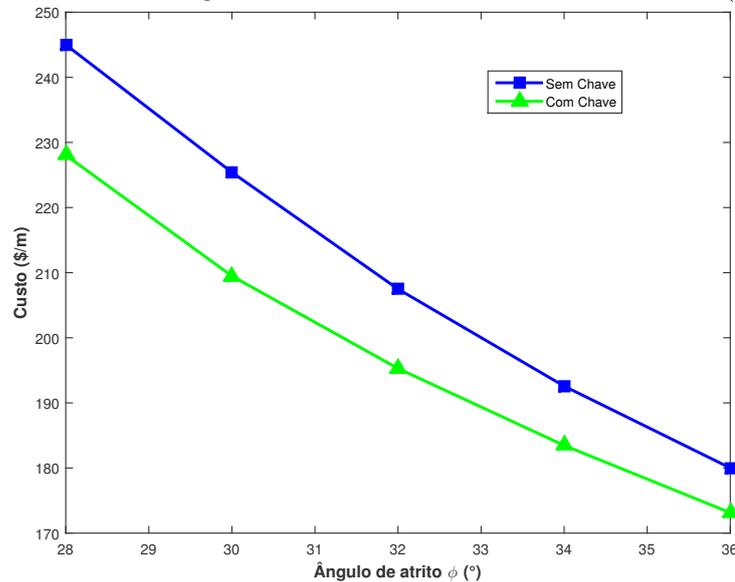
Figura 30 – Efeito do ângulo de inclinação do talude sobre o custo (exemplo 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

O ângulo de atrito impactou menos na diferença de custos, sendo 6,82% menor, para $\phi = 28^\circ$, que o caso sem chave.

Figura 31 – Efeito do ângulo de atrito do aterro sobre o custo (exemplo 2)



Fonte: elaborado pelo autor.

De forma geral, a utilização da chave resultou em custos menores em todas as análises. Afere-se também que quanto mais extrema a situação, maior a eficácia da chave e maior a economia ao se utilizar a mesma, principalmente em solos de fundação não-coesivos.

10 CONCLUSÃO

A formulação de dimensionamento deste trabalho foi feita considerando as hipóteses de que não existe atrito entre o solo e o muro e que o muro se comporta como um corpo rígido. Para essas hipóteses foi feita a codificação em MATLAB das funções objetivo, parte mais fastidiosa de todo o conjunto, tentando se aproximar da formulação descrita por Camp e Akin (2012) e pode-se dizer, pelos resultados próximos entre os estudos, que há similaridade satisfatória entre as formulações matemáticas e, conseqüentemente, nos resultados.

Com poucas iterações, o algoritmo de otimização meta-heurístico SGA convergiu para projetos adequados, demonstrando eficácia funcional e eficiência computacional. Não obstante, deixou a desejar na avaliação das variáveis estruturais, todavia crê-se que impor um limite superior às restrições de momentos balancearia este problema.

Ficou claro que em situações que demandem estruturas mais robustas, ou que possuem solo de fundação não coesivo, a utilização da chave na base do muro retorna soluções mais econômicas. Caso seja pretensão o uso desta solução em obras extensas, como por exemplo em rodovias, a redução de gastos será significativa. Deve-se constatar também o aspecto prático que a maleabilidade da formulação permite, como por exemplo, trocar alguns parâmetros para avaliar a resposta do sistema e usar esta informação para tomar decisões de projeto. Dois exemplos práticos seriam variar, além dos parâmetros utilizados no estudo de sensibilidade, a resistência característica do concreto (f_{ck}) ou a tensão de escoamento do aço (f_y).

De forma sumarizada, a utilização de um algoritmo de otimização já influi na obtenção de sistemas mais eficientes e, ao empregar este método conjuntamente com um elemento construtivo que pressuponha melhora no desempenho (uso de chave no muro), projetos econômicos são esperados.

10.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho enfocou a utilização de um complemento construtivo (chave) que serve majoritariamente para resolver problemas de estabilidade translacional. Semelhante caracterização poderia ser feita com outros sistemas construtivos, como por exemplo o uso de geotêxteis e tirantes. Poderia ser estudado o efeito do nível da água no custo e a utilização de um tipo de drenagem ou outra.

Um aprimoramento notável seria formular o presente problema considerando o muro elástico e implementar o Método dos Elementos Finitos no cálculo das tensões e deformações.

REFERÊNCIAS

- ACI. **Building code requirements for structural concrete (ACI 318M-05) and Commentary**. [S.l.]: American Concrete Institute, 2005. 438 p. ISSN 02625075. ISBN 9780870312649.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 2nd. ed. San Diego, California: Elsevier/Academic Press, 2004. 657–679 p. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780123813756000176>>.
- BABU, G. L. S.; BASHA, B. M. Optimum design of cantilever walls using target reliability approach. **International Journal of Geomechanics**, 2008.
- BASUDHAR, P. K. et al. Cost optimization of reinforced earth walls. **Geotechnical and Geological Engineering**, 2008.
- BEKDAS, G. Harmony search algorithm approach for optimum design of post tensioned axially symmetric cylindrical reinforced concrete walls. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10957-014-0562-2>>.
- CAMP, C.; AKIN, A. Design of Retaining Walls Using Big Bang Big Crunch Optimization. **Journal of Structural Engineering**, v. 138, n. March, p. 438–448, 2012. ISSN 07339445. Disponível em: <[http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000461](http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000461)>.
- DAS, B. M. **Principles of Geotechnical Engineering**. 7th. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2006. 1689–1699 p. ISSN 1098-6596. ISBN 9788578110796.
- DAS, S. K. Slope stability analysis using genetic algorithm. **Electronic Journal of Geotechnical Engineering**, 2005.
- DAS, S. K.; BASUDHAR, P. K. Comparison study of parameter estimation techniques for rock failure criterion models. **Canadian Geotechnical Journal**, 2006.
- DEMBICKI, E.; CHI, T. System analysis in calculation of cantilever retaining walls. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1989.
- GANDOMI, A. H. et al. Optimization of retaining wall design using recent swarm intelligence techniques. **Engineering Structures**, Elsevier Ltd, v. 103, p. 72–84, 2015. ISSN 18737323. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.08.034>>.
- GANDOMI, A. H. et al. Optimization of retaining wall design using evolutionary algorithms. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, p. 1–17, 2016. ISSN 16151488. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00158-016-1521-3>>.
- GHOLIZADEH, S.; BARATI, H. A comparative study of three metaheuristics for optimum design of trusses. **International Journal of Optimization in Civil Engineering**, 2012.

GONÇALVES, M. S.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Search group algorithm: A new metaheuristic method for the optimization of truss structures. **Computers and Structures**, v. 153, n. August 2016, p. 165–184, 2015. ISSN 00457949.

KASHANI, A.; AH, G.; M, M. Imperialistic competitive algorithm: a metaheuristic algorithm for locating the critical slip surface in 2-dimensional slopes. **Geosciences Frontiers**, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.gsf.2014.11.005>>.

KHAJEHZADEH, M. et al. A modified gravitational search algorithm for slope stability analysis. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, 2012.

PEZESHK, S.; CAMP, C. V. Recent advances in optimal structural design. ASCE, 2002.

RHOMBERG, E. J.; STREET, W. M. Optimal design of retaining walls. **Journal of Structural Engineering**, 1981.

SAHAB, M. G.; TOROPOV, V. V.; GANDOMI, A. H. Traditional and modern structural optimization techniques - theory and application. **Geotechnical Geological Engineering**, Elsevier, 2013.

SARIBAS, A.; ERBATUR, F. Optimization and sensitivity of retaining structures. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 1996.