Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras 354
197

Umuarama - Pr.

Curso: Matemática

Disciplina: Cálculo Numérico I

Professor:

Aluna: Neuza Bertoni Pinto - nº 223

5º termo

Em 07 de fevereiro de 1974

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras 354
197

Umuarama - Pr.

Curso: Matemática

Disciplina: Cálculo Numérico I

Professor:

Aluna: Neuza Bertoni Pinto - nº 223

5º termo

Em 07 de fevereiro de 1974

Mudanças de Bases

Sistema Decimal

01/02/74

$354 = 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = 300 + 50 + 4 = 354$

$197 = 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 100 + 90 + 7 = 197$

Sistema Binário

Base 2	Base 10
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14

Exercícios

$2^{-1} = \frac{1}{2^{1}} = \frac{1}{2} = 0,5$

$110 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$

$1010 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 0 = 10$

Transformar para base 10.

$(11001101,1011)_2 = (205,6875)_{10}$

1×2^7	$= 128$	$1 \times 2^{-1} =$	$0,5$
1×2^6	$= 64$	$0 \times 2^{-2} =$	0
0×2^5	$= 0$	$1 \times 2^{-3} =$	$0,125$
0×2^4	$= 0$	$1 \times 2^{-4} =$	$0,0625$
1×2^3	$= 8$		$0,6875$
1×2^2	$= 4$		
0×2^1	$= 0$		
1×2^0	$= 1$		
	205		

$205 + 0,6875 = 205,6875$

$(1000000000000)_2 = 1 \times 2^{12} = (4096)_{10}$

$(101,101)_2 = (5,625)_{10}$

$1 \times 2^2 =$	4	$1 \times 2^{-1} =$	$0,5$
$0 \times 2^1 =$	0	$0 \times 2^{-2} =$	0
$1 \times 2^0 =$	1	$1 \times 2^{-3} =$	$0,125$
	5		$0,625$

$5 + 0,625 = 5,625$

Conversão de Decimal em Binário

Um nº é convertido a binário pela subtração de maior potência de dois, depois a maior contida no resto.

Exemplo. Converter 54,38 à forma bin

	$54,38$		$2,38$
$2^5 =$	$32,00$	$2^1 =$	$2,00$
	$22,38$		$0,38$
$2^4 =$	$16,00$	$2^{-2} =$	$0,25$
	$06,38$		$0,13$
$2^2 =$	$4,00$	$2^{-3} =$	$0,125$
	$2,38$		$0,005$

$2^5\ \ 2^4\ \ 2^3\ \ 2^2\ \ 2^1\ \ 2^0\ ,\ 2^{-1}\ \ 2^{-2}\ \ 2^{-3}$

$(1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ ,\ 0\ \ 1\ \ 1)_2$

$(135,12)_{10} = 2^7\ 2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0\ ,\ 2^{-1}\ 2^{-2}\ldots$

$(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ ,\ 0\ 0\ 0\ 1)_2$

	135,12
$2^7 =$	128,00
	007,12
$2^2 =$	4,00
	3,12
$2^1 =$	2,00
	1,12
$2^0 =$	1,00
	0,12
$2^{-4} =$	0,042
	0,058

$(187)_{10} = 10111001_2$

	187
$2^7 =$	128
	59
$2^5 =$	32
	27
$2^4 =$	16
	9
$2^3 =$	8
	1
$2^0 =$	1
	0

errado

187	
128	2^7
59	
32	2^5
27	
16	2^4
11	
8	2^3
3	
2	2^1
1	
1	2^0
0	

$(10111011)_2$

09/02/74

Transformar para base 10:

$(11101,01)_2 = (29,25)_{10}$

$1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ ,\ 0\ \ 1$

$1\times2^4\ \ 1\times2^3\ \ 1\times2^2\ \ 0\times2^1\ \ 1\times2^0\ ,\ 0\times2^{-1}\ \ 1\times2^{-2}$

ordem decrescente   ordem crescente

$1\times2^4 = 16$

$1\times2^3 = 8$

$1\times2^2 = 4$

$0\times2^1 = 0$

$1\times2^0 = 1$

$0\times2^{-1} = 0$

$1\times2^{-2} = 0,25$

$29,25$

$(10,001)_2 = (2,125)_{10}$

$1\times2^1 = 2$

$0\times2^0 = 0$

$0\times2^{-1} = 0$

$0\times2^{-2} = 0$

$1\times2^{-3} = 0,125$

$2,125$

$(0,11)_2 = (0,75)_{10}$

$0 \times 2^0 = 0$
$1 \times 2^{-1} = 0,5$
$1 \times 2^{-2} = 0,25$
$0,75$

Transformar para base dois:

$(260)_{10} = (100000100)_2$

260
$-256 \quad 2^8$ → potência mais próxima de 260
004
$4 \quad 2^2$ → potência mais próxima de 4
000

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0	0	0	1	0	0

$(168,36)_{10}$

$(10101000,0101)_2$

168
$128 \quad 2^7$
40
$-32 \quad 2^5$
8
$-8 \quad 2^3$
0

parte decimal:

$0,36$
$-0,25 \quad 2^{-2}$
$0,1100$
$-0,0625 \quad 2^{-4}$
$0,0475$

Adição de Binários

$0+0=0$
$0+1=1$
$1+0=1$
$1+1=10$

$11010,1 + 10110,0 = 110000,1$

$1011100 + 111001 = 10010101$

$111001 + 111001 = 1110010$

$11111 + 11111 = 111110$

Subtração de Binários

É a soma algébrica.

$11011 - 10110 = 00101$

prova: $00101 + 10110 = 11011$

$$\begin{array}{r} 101110 \\ -\ 11110 \\ \hline 010000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111001 \\ -\ 110001 \\ \hline 001000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110000 \\ -\ 10111 \\ \hline 011001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111100 \\ -\ 11011 \\ \hline 100001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110000 \\ -\ 10111 \\ \hline 011001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100001 \\ -\ 11111 \\ \hline 000010 \end{array}$$

Multiplicação de Binários

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \times 0 = 0 \\ 0 \times 1 = 0 \\ 1 \times 0 = 0 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} 1001{,}1 \\ \times\ 10{,}101 \\ \hline 10011 \\ 10011\ + \\ \hline 1011111 \\ 10011.\ + \\ \hline 11000{,}1111 \end{array}$$

Multiplicam-se 2 algarismos de cada vez e efetua-se a adição. A seguir multiplica-se o algarismo seguinte e adiciona-se as parcelas.

$$\begin{array}{r} 110011 \\ \times\ 1011 \\ \hline 110011 \\ 110011 \\ \hline 10011001 \\ 110011 \\ \hline 1000110001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100111 \\ \times\ 100101 \\ \hline 100111 \\ 100111 \\ \hline 11000011 \\ 100111 \\ \hline 10110100011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111 \\ \times\ 111 \\ \hline 11111 \\ 11111 \\ \hline 1011101 \\ 11111 \\ \hline 11011001 \end{array}$$

Divisão de Binários

$$\begin{array}{r|l} 11001 & 101 \\ \cline{2-2} -101 & 101 \\ \cline{1-1} 00101 & \\ -101 & \\ \cline{1-1} 000 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \overline{110,}110\,100 & 1011 \\ -1011 & 0,100111 \\ \hline 0010101 & \\ -\ \ 1011 & \\ \hline 010100 & \\ -\ \ 1011 & \\ \hline 010010 & \\ -\ \ 1011 & \\ \hline 00111 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \overline{1100}011 & 1001 \\ -1001 & 1011 \\ \hline 001101 & \\ -\ 1001 & \\ \hline 001001 & \\ -\ 1001 & \\ \hline 000000 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \overline{11100}10 & 10010 \\ -10010 & 110 \\ \hline 010101 & \\ -\ 10010 & \\ \hline 000110 & \end{array}$$

21/02/74

Calcular

a) 101011 × 100,11 = 11001100,01

$$\begin{array}{r} 101011 \\ \times\ 100,11 \\ \hline 101011 \\ 101011 \\ \hline 10000001 \\ 101011 \\ \hline 11001100,01 \end{array}$$

b) 110,011110 ÷ 101,110 = 1,001

$$\begin{array}{r|l} 110,011110 & 101,110 \\ 101\,110 & 1,001 \\ \hline 000101110 & \\ 101110 & \\ \hline 000000 & \end{array}$$

c) 1010110 + 100111 = 111101

$$\begin{array}{r} 1010110 \\ 100111 \\ \hline 1111101 \end{array} +$$

d) 101010101 − 111011 = 100011010

$$\begin{array}{r} 101010101 \\ - \quad 111011 \\ \hline 100011010 \end{array}$$

Sistema Octal (base oito)

O sistema octal é formado pelos seguintes caracteres:

$\boxed{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \text{e}\ 7}$ → bases

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ... 20, 21...

O valor de cada digito é determinado pela posição em relação à vírgula.

Exemplo:

7634,152

$4 \times 8^0 = 4 \times 1$

$3 \times 8^1 = 3 \times 8$

$6 \times 8^2 = 6 \times 64$

$7 \times 8^3 = 7 \times 512$

$1 \times 8^{-1} = 1 \times 0{,}125$

$5 \times 8^{-2} = 5 \times 0{,}015625$

$2 \times 8^{-3} = 2 \times$

Transformar para base (10)

a) $(125)_8 = (85)_{10}$

$1 \times 8^2 = 1 \times 64 = 64$

$2 \times 8^1 = 2 \times 8 = 16$

$5 \times 8^0 = 5 \times 1 = 5$

85

b) $(35,51)_8 = (29,640)_{10}$

$3 \times 8^1 = 3 \times 8 = 24$
$5 \times 8^0 = 5 \times 1 = 5$
$5 \times 8^{-1} = 5 \times 0,125 = 0,625$
$1 \times 8^{-2} = 1 \times 0,015 = 0,015$

29,640

c) $(111,02)_8 = (73,030)_{10}$

$1 \times 8^2 = 1 \times 64 = 64$
$1 \times 8^1 = 1 \times 8 = 8$
$1 \times 8^0 = 1 \times 1 = 1$
$0 \times 8^{-1} = 0 \times 0,125 = 0$
$2 \times 8^{-2} = 2 \times 0,015 = 0,030$

73,030

Transfomar para base (8)

a) $(85)_{10} = (125)_8$

85 | 8
5   10 | 8
     2   1

b) $(134)_{10} = (206)_8$

134 | 8
54   16 | 8
6   0   2

c) $(2867)_{10} = (5463)_8$

2867 | 8
46   358 | 8
67   38   44 | 8
3   6   4   5

Transformação de octal p/a binário

$2^3 = 8$ Para cada octal corresponde três binários, conforme a tabela:

octal	binário
0 →	000
1 →	001
2 →	010
3 →	011
4 →	100
5 →	101
6 →	110
7 →	111

Exemplo:

a) $(3\ 4\ 5\ 7)_8$

$(11\ 100\ 101\ 111)_2$

b) $(766,43)_8$

$(111\ 110\ 110,100\ 011)_2$

Transformação de Binário para Octal

a) $(10\ 011)_2 = (23)_8$

b) $(1101,1011)_2 = (15,54)_8$

c) $(10001,0010)_2 = (21,10)_8$

Base Hexadecimal (base 16)

E' constituido por 16 caracteres sendo êles:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

$2^4 = 16$ Para cada caracteres corresponde quatro casas, conforme a seguinte tabela:

Hexagenária	Binário
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Transformar:

$(9FA1)_{16} = (1001.1111.1010.0001)_2$

$(222)_{16} = (0010.0010.0010)_2$

$(B,C1)_{16} = (1011,1100\ 0001)_2$

$(\underbrace{100}_{4}\underbrace{1011}_{B},\underbrace{1101}_{D}\underbrace{1}_{8})_2 = (4B, D8)_{16}$

$(\underbrace{101}_{5}.\underbrace{1001}_{9},\underbrace{1010}_{A}\underbrace{11}_{C})_2 = (59, AC)_{16}$

23/02/24

Revisão:

Equações e Inequações

① $y = x^2 + 8x + 15 > 0$

$$y = \frac{\pm b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

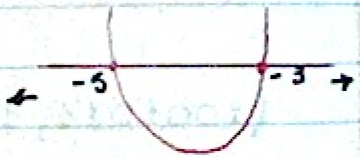
$x > \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{2}$

$x > \frac{-8 \pm 2}{2}$

$x' > \frac{-8+2}{2} > -3$

$x'' > \frac{-8-2}{2} > -5$

$\boxed{x > -3, -5}$



Verificação

$x = -2$

$y = x^2 + 8x + 15 > 0$

$y = 4 - 16 + 15 > 0$

$y = 3 > 0$

$\boxed{V = \{x \mid x > -3 \wedge x < -5\}}$

② $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x - 28} > 0$

$y' = x^2 - 5x + 4 > 0$

$y'' = x^2 - 3x - 28 > 0$

$y' = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$y' = \frac{+5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$

$y' = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$y' = \frac{5 \pm 3}{2}$

$y_1 = 4$

$y_2 = 1$

$\boxed{V = \{x \mid x > 4 \text{ e } x < 1\}}$

$y'' = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2}$

$y'' = \frac{3 \pm 11}{2}$

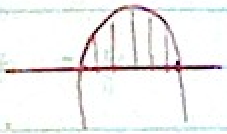
$y_1 = 7$

$y_2 = -4$

$\boxed{V = \{x \mid x > 7 \text{ e } x < 4\}}$

Obs: { sinal de a positivo entre val. neg.

sinal de a negativo entre val. pos. }



Estudo da variação do sinal

x	−4		1	4	7
y_1	+	+	−	+	+
y_2	+	−	−	−	+
y_1/y_2	+	−	+	+	+
y_2					

$\boxed{V = \{x \mid x < -4 \wedge 1 < x < 4 \text{ e } x > 7\}}$

③ $\dfrac{x^2 + 8x + 15}{3x^2 - 6x} < 0$

$y_1 = x^2 + 8x + 15 < 0$

$y_2 = 3x^2 - 6x < 0$

$y_1 = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2}$

$y_1 = \dfrac{-8 \pm 2}{2}$ → $y_1' = -3$; $y_1'' = -5$

$y_2 = \dfrac{+6 \pm \sqrt{36 - 4.3.0}}{6}$

$y_2 = \dfrac{6 \pm \sqrt{36}}{6}$ → $y_2' = 0$; $y_2'' = 2$

$\boxed{V_1 = \{x \mid x > -5 < x < -3 \wedge 0 < x < 2\}}$

x		-5		-3		0		2	
y_1	$-$		$+$		$-$		$-$		$-$
y_2	$+$		$+$		$+$		$-$		$+$
$\frac{y_1}{y_2}$	$-$		$+$		$-$		$+$		$-$

$V = \{x \mid x < -5 \text{ ou } (-3 < x < 0) \text{ ou } x > 2\}$

④ $y = (x^2 + 2x - 3) \cdot (3x^2 - 5x - 8) < 0$

$x_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$ → $x_1' = 1$, $x_1'' = -3$

$x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{6}$ → $x_2' = 8/3 \cong 2,6$, $x_2'' = -1$

$y_1 \begin{cases} x_1' = 1 \\ x_1'' = -3 \end{cases}$ $\quad y_2 \begin{cases} x_2' = 2,6 \\ x_2'' = -1 \end{cases}$

$V =$

Trinômio do 2º grau

Uma f é chamada função trinômio do 2º grau quando for definida pela seguinte sentença

$y = ax^2 + bx + c$, com

$a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

Ex: f definida por $y = 3x^2 + 5x + 1$

$f: x \rightarrow 3x^2+5x+1$

lê-se "a f leva x em $3x^2+5x+1$"

Pontos importantes de um trinômio do 2º grau.

a) As raízes ou zeros do trinômio
b) O vértice, ponto de interseção com o eixo.

Obs: Gráficamente, um trinômio é uma parábola

$\Delta = b^2 - 4ac$ → discriminante do trinômio

$\Delta > 0$ → duas raízes reais e desiguais

$\Delta = 0$ → duas raízes reais iguais

$\Delta < 0$ → duas raízes imaginárias

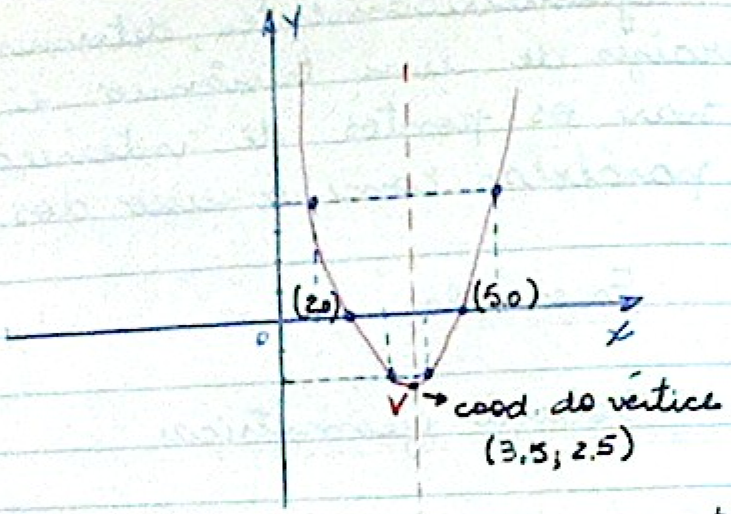
Geomètricamente, determinar as raízes de um trinômio é determinar os pontos de interseção da parábola com o eixo dos x

Exemplo: $y = x^2 - 7x + 10$

Solução Geométrica

x	y	
0	10	→ int. com y (0,10)
1	4	
2	0	→ int. com x (2,0) → raiz
3	-2	
4	-2	
5	0	→ int. com x (5,0) → raiz
6	4	

Gráfico →



eixo de simetria

$$x = \frac{2+5}{2} = 3,5$$

$y = 3,5^2 - 7 \cdot 3,5 + 10 = -2,25$

$V = \{2, 5\}$ → int. com x

Vértice $(3,5 ; 2,5)$

Vértice é o ponto V de uma parábola que determina o ponto mínimo ou o ponto máximo da curva.

Geometricamente, o vértice é o ponto de interseção com o eixo de simetria.

O ponto de interseção da parábola com o eixo y é aquele em que a abcissa é zero.

Exercícios:

① Determinar:

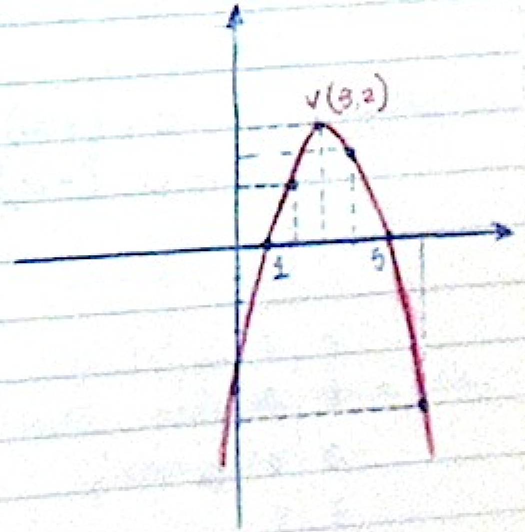
a) as raízes

b) o vértice

c) a interseção com y, do trinômio

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

x	y	
0	-5	$\cap$ y
1	0	raiz
2	2	
3	4	
4	3	
5	0	raiz
6	-5	



$V = \{1, 5\}$ $\quad y = -(3)^2 + 6 \cdot 3 - 5$

vértices: $(3, 2)$ $\quad y = 2$

eixo simetria : $x = \frac{1+5}{2} = 3$

Soluções:

a) $\{1, 5\}$
b) $(3, 2)$ → máximo
c) $(0, -5)$

---

② Idem para:

$y = 2x^2 - 8x + 8$

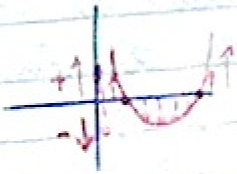
Obs: $a > 0$ $(+a)$ → vértice é pt. mínimo
$a < 0$ $(-a)$ → " " " máximo

x	y	
0	8	→ ∩ y
1	2	
2	0	→ raiz
3	8	
4	8	
5	18	

$a > 0 \Rightarrow$ Vértice é mínimo ∪

Variação do Sinal do Trinômio

$\boxed{\Delta > 0}$ $a > 0 \Rightarrow y < 0$ para valores entre as raízes

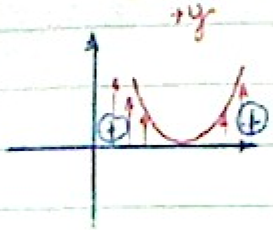


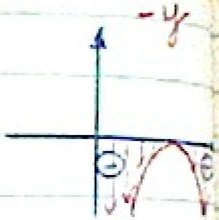
$a > 0 \Rightarrow y > 0$ p/a valores fora das raízes

$\boxed{\Delta = 0}$

$a > 0 \Rightarrow y > 0$

$a < 0 \Rightarrow y < 0$

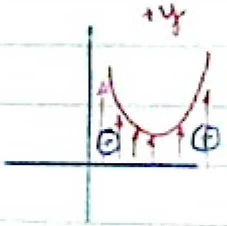


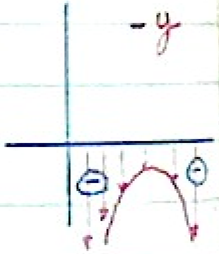


$\boxed{\Delta < 0}$

$a > 0 \Rightarrow y > 0$

$a < 0 \Rightarrow y < 0$





Estudar a variação do sinal dos seguintes trinômios

a) $y = -3x^2 + 9x - 9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

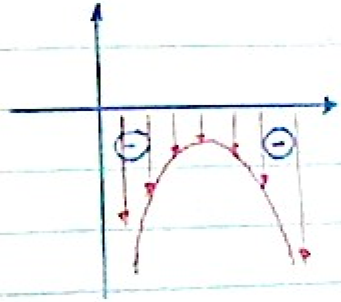
$\Delta = 9^2 - 4(-3)(-9)$

$\Delta = -27 \quad \therefore \quad \Delta < 0$

$\Delta < 0$

$a = -3$

$a < 0$



Conclusão: Todos os valores de $y < 0$ ou todo y será negativo

---

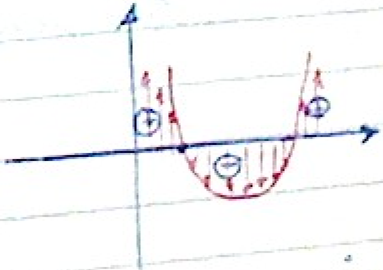
b) $y = 5x^2 + 9x - 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 9^2 - 4.5.(-2)$

$\Delta = 121 \Rightarrow \Delta > 0$

$\left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ a = 5 \\ a > 0 \end{array}\right\} y > 0$



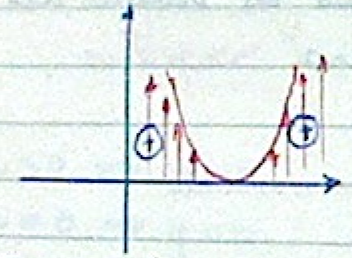
Conclusão: Valores entre as raízes ⊖
Valores extra raízes ⊕

c) $x^2 - 4x + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4.1.4$

$\Delta = 0$ $\therefore$ $\left.\begin{matrix}\Delta = 0\\ a = 1\\ a > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y > 0$



Conclusão: $y > 0$ e na origem é neutro

$y > 0$ entre raízes

$y < 0$ extra raízes

Inequações do 2º Grau

Chama-se inequação do segundo grau toda sentença da forma:

$\left.\begin{matrix}ax^2 + bx + c > 0\\ ax^2 + bx + c < 0\end{matrix}\right\}$ com $a \neq 0$

Exemplos:

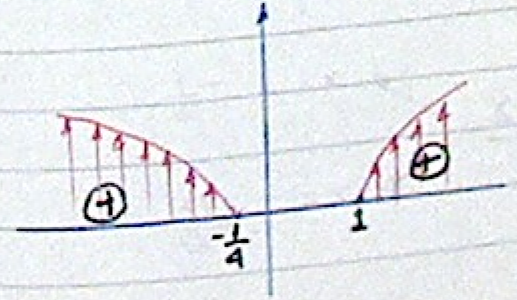
a) $4x^2 - 3x - 1 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 9 - 4.4(-1)$

$\Delta = 25 \therefore \Delta > 0$

$x = \dfrac{3 \pm 5}{8}$ → $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{4}$



$\boxed{V = \{x \mid x < -\frac{1}{4} \ \wedge \ x > 1\}}$

b) $\frac{x^2-1}{3} - 2(3x+1) > 3 + \frac{2x^2-5}{2}$

$2(x^2-1) - 12(3x+1) > 18 + 3(2x^2-5)$

$2x^2 - 2 - 36x - 12 > 18 + 6x^2 - 15$

$-4x^2 - 36x - 17 > 0$

$\boxed{4x^2 + 36x + 17 < 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1296 - 4.4.17$

$\Delta = 1024$

$\therefore \left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ a = 1 \\ a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y > 0$

$x = \frac{-36 \pm 32}{8}$ → $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{17}{2}$

Gráfico:

Resolver as inequações:

02/03/74

① $3x^2 - x + 8 \leq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1 - 96$

$\Delta = -95$

$\left.\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y < 0$

raízes imaginárias e inexatas.

② $4x^2 + (x+2)^2 > 4x(x+2)$

$4x^2 + x^2 + 4x + 4 > 4x^2 + 8x$

$\cancel{4x^2} + x^2 - \cancel{4x^2} + 4x - 8x + 4 > 0$

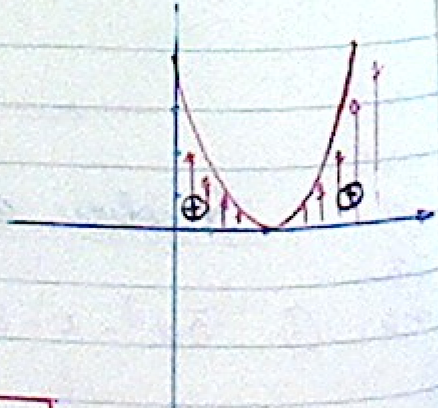
$\boxed{x^2 - 4x + 4 > 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 16 - 4.4$

$\Delta = 0 \quad \therefore \quad \left.\begin{matrix}\Delta = 0 \\ a > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y > 0$

x	y	
0	4	∩ com y
1	1	
2	0	→ raiz
3	1	
4	4	



$\boxed{V = \{x \mid x < 2 > x\}}$

③ $\frac{x^2}{3} - 4(x+1) < \frac{3x^2}{2} - 4$

$2x^2 - 24(x+1) < 9x^2 - 24$

$2x^2 - 24x - 24 < 9x^2 - 24$

$2x^2 - 9x^2 - 24x - \cancel{24} + \cancel{24} < 0$

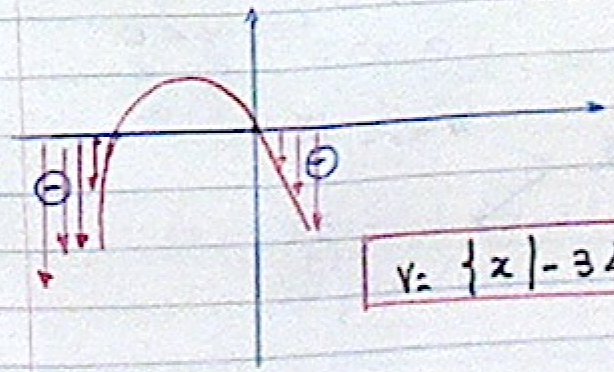
$-7x^2 - 24x \leq 0$

$\boxed{7x^2 + 24x > 0}$

$\Delta = 576$

$\Delta > 0 \qquad \left.\begin{matrix}\Delta > 0 \\ a > 0\end{matrix}\right\} y < 0$

$x = \frac{-24 \pm 24}{14} \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{-24}{7} \; (-3{,}42)$



$\boxed{V = \{x \mid -3{,}42 > x > 0\}}$

Os valores que satisfazem são extra-raízes (fora do intervalo) ou sejam os menores que -3,42

$$y<0 \quad y<-3,42$$

④ $(2-3x)^2 - 5x < -3-(2x-1)^2$

$$4-12x+9x^2-5x < -3-(4x^2-4x+1)$$

$$4-12x+9x^2-5x < -3-4x^2+4x-1$$

$$9x^2+4x^2-12x-4x-5x+4+3+1<0$$

$$\boxed{13x^2-21x+8<0}$$

$$\Delta = 441-4.13.8$$

$$\Delta = 441-416$$

$$\Delta = 25 \quad \therefore \quad \left.\begin{array}{l}\Delta>0\\ a>0\end{array}\right\} \Rightarrow y<0$$

$$x = \frac{21 \pm 15}{26} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{18}{13} \\ \searrow x_2 = \frac{3}{13} \end{array}$$

⑤ $\dfrac{x+2}{x-1} < \dfrac{3x-1}{x+3} \quad (x \neq 1,\ x \neq -3)$

$$\frac{x+2}{x-1} - \frac{3x-1}{x+3} < 0$$

$$\frac{(x+3)\,(x+2)-(x-1)\,(3x-1)}{(x-1)\,(x+3)} < 0$$

$$\frac{x^2+2x+3x+6-3x^2+2+3x-1}{x^2+3x-3-x}$$

$$\frac{-2x^2+9x+5}{x^2+2x-3} < 0$$

$$\boxed{\frac{2x^2-9x-5}{x^2+2x-3} > 0}$$

$y_1 = 2x^2-9x-5$

$$x_1 = \frac{9 \pm 11}{4} \quad \begin{cases} x_1' = 5 \\ x_1'' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y_2 = x^2+2x-3$

$$x_2 = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad \begin{cases} x_2' = 1 \\ x_2'' = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{Y: -3,\ -\frac{1}{2},\ 1,\ 5}$$

x		-3	$-\frac{1}{2}$	1	5
y_1	+	+	−	−	+
y_2	+	−	−	+	+
$\frac{y_1}{y_2}$	+	−	+	−	+

errado

$$\boxed{Y = \left\{x \mid x < -3,\ -\frac{1}{2} < x < 1,\ x > 5\right\}}$$

(6) $$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x+5} < 0$$

$y_1 = x^2-5x+6$

$$x_1 = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} x_1' = 3 \\ x_1'' = 2 \end{cases}$$

$y_2 = x^2-x+5$

$x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} \rightarrow$ imaginária

Resolvendo com outro sinal.

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-5}$$

$y_2 = x^2 - x - 5$

$$x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \begin{cases} x'_2 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \\ x''_2 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

$y_1 = x^2 - 5x + 6$

$$x_1 = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x'_1 = 3 \\ x''_1 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{V = \left\{ \frac{1-\sqrt{21}}{2},\ 2,\ \frac{1+\sqrt{21}}{2},\ 3 \right\}}$$

7) $\dfrac{x^2-11}{2x+1} > 1 \qquad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{x^2-11}{2x+1} - 1 > 0$$

$$\frac{x^2-11-(2x+1)}{2x+1} > 0$$

$$\frac{x^2-11-2x-1}{2x+1} > 0$$

$$\frac{x^2-11-2x-1}{2x+1} > 0$$

$$\frac{x^2-2x-12}{2x+1} > 0$$

$y_1 = x^2 - 2x - 12$

$x_1 = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{2}$ → $x_1' = 1+\sqrt{13}$; $x_1'' = 1-\sqrt{13}$

$\left.\begin{matrix}\Delta > 0 \\ a > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y < 0$

$y_2 = 2x + 1$

$x_2 = -\frac{1}{2}$

x		$1-\sqrt{13}$		$-\frac{1}{2}$		$1+\sqrt{13}$	
y_1	+		−		−		+
y_2	−		−		+		+
$\frac{y_1}{y_2}$	−		+		−		+

$$\boxed{r = \left\{x \mid x < 1-\sqrt{13} < -\frac{1}{2}\right\}}$$ ← nulo

$r = \{x \mid 1-\sqrt{13} < x < -\frac{1}{...}$ … $x > 1+\sqrt{13}$

07/03/74

Soluções de Equações Algébrica e Transcedentais

A solução destas equações visa a determinação de suas raízes. Raízes de uma equação são definidas com os valores de x, que satisfazem a equação na forma $f(x)=0$

Equações Transcendentais são aquelas que possuem termos trigonométricos

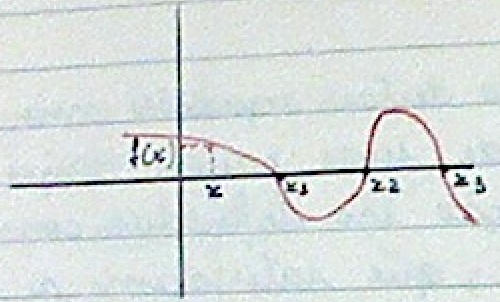
Ex: $x^2+3x+2=0$ } algébricas ou
$x^6+2x^4-2=0$ } polinomiais
$x - tg\,x = 0$ } trigonometal

Aproximações Gráficas de Funções

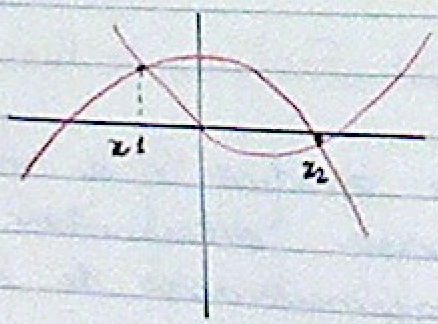
O método gráfico é a melhor maneira para determinar o número e a aproximação de raízes reais

a) Seja $f(x)=0$, a equação de raízes a serem calculadas. Colocando esta função num gráfico

$y = f(x)$ sendo: $f(x) = 0$

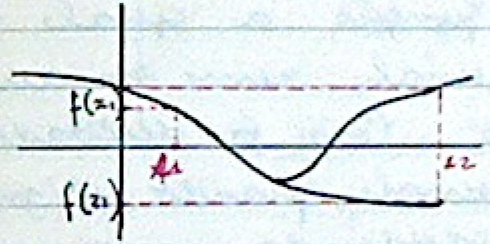


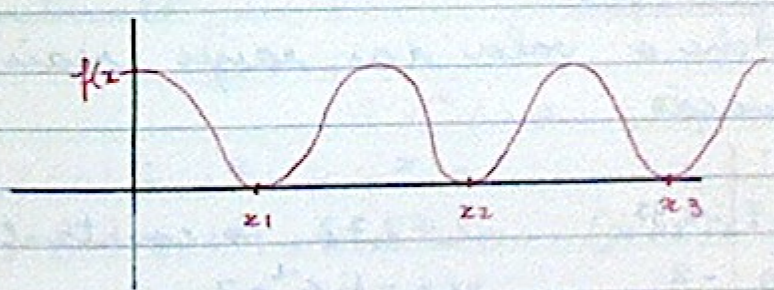
b) Seja $y = f(x) - f_1(x) = 0$ neste caso, os pontos nos quais as curvas se interceptam serão as raízes da equação, pois neles se tem $f_1(x) = f_2(x)$



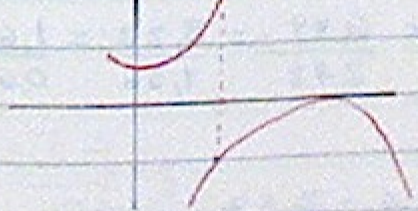
Isolamento de uma raiz

Se uma função é contínua no intervalo (x_1, x_2) e se $f(x_1)$ e $f(x_2)$ tiverem sinais opostos, ao menos uma raiz real $f(x)=0$, estava contida no intervalo (x_1, x_2)





Se uma função é descontínua, não existiram raízes no intervalo x_1, x_2 embora $f_1(x) \cdot f_2(x) < 0$



função estritamente monótona

Uma função é dita estritamente monótona quando sempre cresce com o aumento de x

Isto é caracterizado pela derivada da função a qual não muda de sinal, nem se anula no intervalo. Pois a derivada só muda de sinal quando é mudada a convexidade da curva.

Exemplo:

Ache o valor das raízes reais da equação: $x \cdot e^{x} = 2$

x	y
-1	-2,37
0	-2
1	0,718

$e = 2{,}72 \rightarrow$ constante

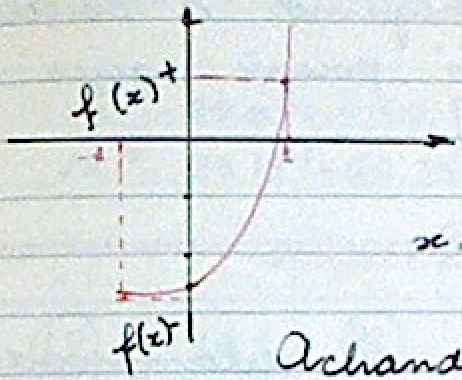
$y = -1 \cdot e^{-1} - 2$

$y = -1 \cdot \dfrac{1}{2{,}72} - 2$

$y = -\dfrac{1}{2{,}72} - 2$

$y = \dfrac{6{,}44}{2{,}72} = \dfrac{3{,}22}{1{,}36} = \dfrac{1{,}61}{0{,}68}$

$y = -1 \cdot (2{,}72)^{-1} - 2 = -2{,}37$ $\quad y = \boxed{-2{,}37}$



$x \cdot e^{x} = 2$

Achando a derivada de $f(x)$

$f(x) = x \cdot e^{x} - 2$, pode-se investigar se a função possui outras raízes fora do intervalo $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$f'(x)\ x \cdot e^{x} + x \cdot e^{x} - 2$

$f'(x)\ 1 \cdot e^{x} + x \cdot e^{x} - 0 \therefore (x+1)e^{x} = f(x)$

$$f'(x) = (x+1)e^{x}$$

Para $x < -1$, a derivada será negativa.

$x < -1 \rightarrow$ derivada $\ominus$

$x > -1 \rightarrow$ " $\oplus$

Através da análise da derivada

da função, chegamos à conclusão que ela só possui raízes no intervalo $[-1, 1]$

Método da Bissecção ou divisão

Considera-se um determinado intervalo pré determinado que contenha as raízes, o intervalo será subdividido para aproximar do local da raiz, podem ser continuados até que o subintervalo seja tão pequeno, que a raiz é determinada.

Exemplo:

Determinar a raiz da equação abaixo, que se encontra no intervalo

$[18, 21]$

$y = x^3 - 23x^2 + 62x - 40 = 0$

$f(18) = 544 \to x_1$

$f(21) = 380 \to x_2$

$x^3 - 23x^2 + 62x - 40 = 0$

$18^3 - 23 \cdot 18^2 + 62 \cdot 18 - 40 = 0$

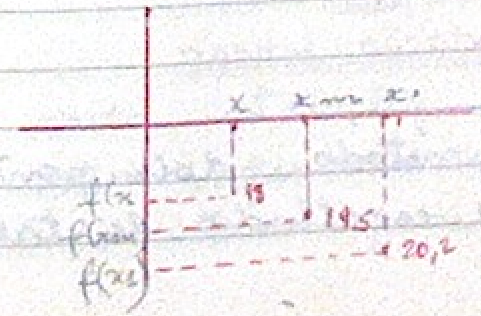
x_1	x_m	x_2	$f(x_1)$	$f(x_m)$	$f(x_2)$
18	19,5	21	-544	-162	380
19,5	20,2	21	-162	70	380
19,5	19,8	20,2	-162	-67	70
19,8	20,	20,2	-67	0	70

$f(20) = 0$, logo a raiz é 20

1) $x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 19,5$

$f(x_m) = f(19,5) = (19,5)^3 - 23(19,5)^2 + 62 \times 19,5 - 40$

$f(19,5) = -162$



II) $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{19,5 + 21}{2} = 20,2$

$f(x_m) = f(20,2) = (20,2)^3 - 23 \cdot 20,2^2 + 62 \cdot 20,2 - 40$

$f(20,2) = 70$

III) $x_m = \frac{19,5 + 20,2}{2} = \frac{39,7}{2} = 19,8$

$f(x_m) = f(19,8) = 19,8^3 - 23 \cdot 19,8^2 + 62 \cdot 19,8 - 40 = 0$

$f(19,8) = -67$

IV) $x_m = \frac{19,8 + 20,2}{2} = 20$

$f(x_m) = f(20) = 20^3 - 23 \cdot 20^2 + 62 \cdot 20 - 40 = 0$

$f(20) = 0$

14/03/74

Método da falsa Posição
ou
Interpolação Linear

Neste método dois pontos iniciais são escolhidos de tal forma que os valores das funções nestes pontos sejam de sinais contrários

Uma aproximação da raiz da equação, contida entre os 2 pontos pode ser obtida por interpolação linear e as aproximações sucessivas

Uns são feitos pelo uso contínuo de dois pontos cujos valores da função seja de sinais opostos

O cálculo das aproximações é feita através da fórmula feita através da fórmula

$$\frac{x_1 - x_2}{|f(x_1)| + |f(x_2)|} = \frac{x_3 - x_2}{|f(x_2)|}$$

$$x_3 = x_2 + \frac{(x_1 - x_2)\,|f(x_2)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

A cada interação redefinimos um novo intervalo e é determinado uma nova aproximação. O processo termina quando a diferença entre duas aproximações consecutivas for menor que a precisão desejada.

sen 1 $\quad 3,14$ — 180

$\quad\quad 1$ — x

$$x = \frac{180}{3,14} = 57,18'$$

Exemplo:

Calcule a raiz da equação:
$x^2 - \text{sen}\, x = 0$, contida no intervalo
$x = 0,8$ e $x = 1,0$

$x_1 = 1,0$
$x_2 = 0,8$

$f(x_1) = f(1) = 1^2 - \text{sen}\, 1$
$f(1) = 1 - \text{sen}\, 57°18'$
$f(1) = 1 - 0,8418$
$f(x) = f(1) = 0,158$

$f(x_2) = 0,8^2 - \text{sen}\, 0,8$
$f(x_2) = 0,64 - \text{sen}\, 45°51'$

$3,14$ — 180
$0,8$ — x

$$x = \frac{0,8 \times 180}{3,14} = \frac{144}{3,14} = 45°51'$$

$f(x_2) = 0,64 - 0,7173$
$f(x_2) = -0,077$

$$x_3 = 0,8 + \frac{(1 - 0,8)\,0,077}{0,158 + 0,077}$$

aplicação da fórmula:

$$x_3 = x_2 + \frac{(x_1 - x_2)\,|f(x_2)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

$x_3 = 0,865$

$f(x_3) = f(0,865) = 0,865^2 - \text{sen}\, 0,685$
$f(x_3) = -0,126$ $\quad$ P

$x_3 = 0,875$

$f(x_3) = f(0,875) = (0,875)^2 - \text{sen}\, 0,875$
$f(x_3) = f(0,875) = (0,875)^2 - \text{sen}\, 49°56'$
$f(x_3) = f(0,875) = 0,0018$

$$x_3 = 0,875 + \frac{(1-0,875) \times 0,0018}{0,158 + 0,0018}$$

$x_3 = 0,877$

x_1	x_3	x_2	$f(x_1)$	$f(x_3)$	$f(x_2)$
1.0	0,865	0,8	0,158	-0,126	-0,077
1.0	0,875	0,865	0,158	-0,0018	-0,126
1.0		0,875	0,158		-0,0018
		0,877 → raiz			
		0,002			

até a diferença ser 0,001.

Exercícios

16/03/74

Calcular por interpolação linear a raiz da equação $f(x) = x^5 - x - 0,2$ compreendida no intervalo $[1,0; 1,1]$ com erro menor que 0,0005

Fórmula: $$x_3 = x_1 + \frac{(x_1 - x_2)\,|f(x_2)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

$f(x_2)$: $f(1,1) = (1,1)^5 - 1,1 - 0,2$
$f(1,1) = 1,6105 - 1,1 - 0,2$
$f(1,1) = 0,3105 \rightarrow f(x_2)$

	x_1	x_3	x_2	$f(x_1)$	$f(x_3)$	$f(x_2)$
	1.0	1,0392	1.1	-0,2	-0,0278	0,3105
	1,0392	1,04469	1.1	-0,0278		~~1,0392~~
raiz		1,04487				
diferença		0,0002				

A diferença deve ser menor que 0,0005

$$x_3 = x_2 + \frac{(x_1 - x_2)|f(x_2)|}{|f(x_1)| + |f(x_2)|}$$

$$x_3 = 1{,}1 + \frac{(1{,}0 - 1{,}1) \cdot (0{,}3105)}{0{,}2 + 0{,}3105}$$

$$x_3 = 1{,}1 + \frac{(-0{,}1) \cdot (0{,}3105)}{0{,}5105}$$

$$x_3 = 1{,}1 + \frac{(-0{,}03105)}{0{,}5105}$$

$$x_3 = \frac{0{,}5305}{0{,}5105} \quad \therefore x_3 = 1{,}0391$$

$f(x_3) = f(1{,}0391) = (1{,}0392)^5 - 1{,}0392 - 0{,}2$

por logaritmo: $(1{,}0392)^5 =$

$5 \log 1{,}0392 = 5 \times 0{,}016628$

$(5 \times 0{,}083140)$ $\quad 0{,}083140$

1 039 —— 016628

ant. log. de 0,083140 = 1,2109 = 1,2114

$f(x_3) = 1{,}2114 - 1{,}0392 - 0{,}2$

$f(x_3) = -0{,}0278$

$$x_3 = 1{,}1 + \frac{(1{,}0392 - 1{,}1) \cdot 0{,}31051}{0{,}0278 + 0{,}31051}$$

$x_3 = 1{,}1 +$

$x_3 \cong 1{,}04469 = 1{,}0447$

$f(x_3) = f(1{,}0447) = (1{,}0447)^5 - 1{,}0447 - 0{,}2$

$f(x_3) =$

Conclusão: Calcula-se até ser encontrado um erro < que 0,0005 entre as raízes.

Método da Interação

Este método é aplicável à equação $f(x)=0$, se a mesma puder ser expressa na forma $x = f(x)$. Conhecido um valor aproximado (x_0) substitui-se este valor no 2º membro da equação $x = f(x)$, obtendo-se assim um valor mais aproximado da raiz $x_1 = f(x_0)$, uma nova aproximação é obtida substituindo-se este valor (x_1) no 2º membro da equação, obtendo $x_2 = f(x_1)$. Repete-se o processo até obter a precisão desejada

(x_0) → valor inicial

$x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1)$

$x_3 = f(x_2)$

$x_n = f(x_{n-1})$

o domínio = à imagem do domínio anterior

Exemplo

Calcular a raiz da equação $x \cdot e^x = 1$ com precisão de 0,01 a partir do ponto inicial $x_0 = 1$

Calcula-se até encontrar a dif. de 0,01

$$x = \frac{1}{e^x} \therefore x = e^{-x}$$

$e = 2,72$ → constante.

$x_0 = 1$

$x_1 = f(x_0) = 0,37$

$x_2 = f(x_1) = 0,69$

$x_3 = f(x_2) = 0,50$

$x_4 = f(x_3) = 0,60$

$x_5 = f(x_4) = 0,54$

$x_6 = f(x_5) = 0,57$

$x_7 = f(x_6) = \underline{0,56}$

$0,57 - 0,56 = \boxed{0,01}$ então achamos a raiz cuja diferença é 0,01 → a raiz é $\boxed{0,56}$

x_1) $f(x_0) = f(1) = \dfrac{1}{2,72^1}$

$f(x_0) = \dfrac{1}{2,72} = 0,37$

x_2) $f(x_1) = \dfrac{1}{2,72^{0,37}}$

$f(x_1) = \dfrac{1}{0,37 \log 2,72}$

$f(x_1) = \dfrac{1}{1,448} = 0,69$

x_3) $f(x_2) = f(0,69) = \dfrac{1}{2,72^{0,69}}$

$= \dfrac{1}{0,69 \log 2,72} = \dfrac{1}{0,69x}$

$= 0,50$

$$x_4 = f(x_3) = f(0{,}50) = \frac{1}{2{,}72^{0{,}50}} = \frac{1}{0{,}50 \log 2{,}72} = 0{,}60$$

$$x_5 = f(x_4) = f(0{,}60) = \frac{1}{2{,}72^{0{,}60}} = \frac{1}{0{,}60 \log 2{,}72} = 0{,}54$$

$$x_6 = f(x_5) = f(0{,}54) = \frac{1}{2{,}72^{0{,}54}} = \frac{1}{0{,}54 \log 2{,}72} = 0{,}57$$

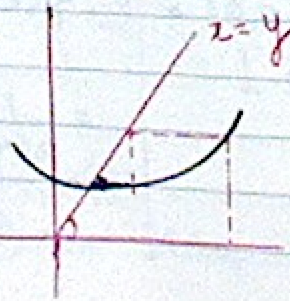
$$x_7 = f(x_6) = f(0{,}57) = \frac{1}{2{,}72^{0{,}57}} = \frac{1}{\log 2{,}72 \cdot 0{,}57} = 0{,}56$$

Casos de convergência do método de iteração

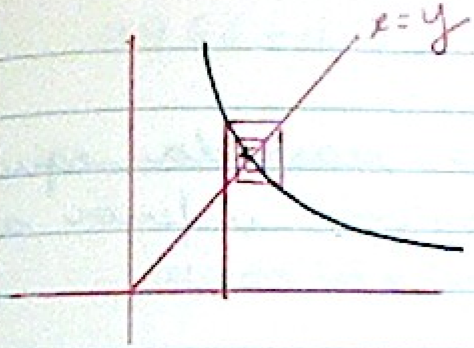
O método de iteração converge quando $|F'(x)| < 1$

Exemplos: (1) $0 < F'(x) < 1$

O método converge rápida/.



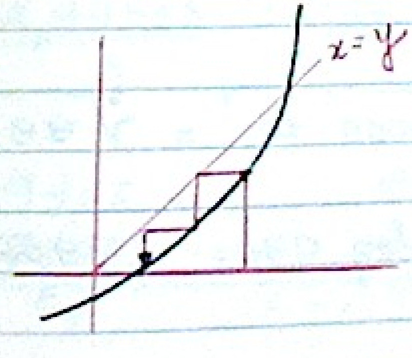
(2) $\boxed{-1 < F'(x) < 0}$



$\boxed{-1 < F'(x) < 0}$

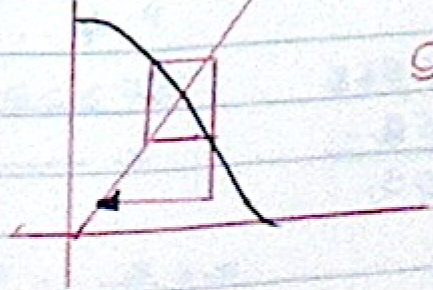
O método converge lentamente

(3) $F'(x) > 1$



O método diverge

(4) $\boxed{F'(x) < -1}$



O método diverge

Exercício

Achar as raízes reais da equação $x^3 + x = 1000$ com erro inferior a 10^{-4}, 0,0001 Ponto inicial $x_0 = 10$

Pelo método de iteração (ela converge)

931 $x^3 = 1000 - x$

031 $x = \sqrt[3]{1000 - x}$

74

$x_1 = f(x_0) = \sqrt[3]{1000 - 10} = \sqrt[3]{990}$

$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{3} \log 990 = \frac{2,99564}{3} =$ 0,9985466

9966 ——— 0,99852
9967 ——— 99856
1 ——— 4

0,9985566
0,99852
0,00003

1 ——— 4
x ——— 3

$x = \frac{2}{4} \therefore x = 0,5$

9966 + 0,75 = 9,96675

Característica é zero

$x_1 = 9,96675$

$x_2 = \frac{1}{3} \log 990,03335$

$x_2 = \frac{2,99565}{3} = 0,99855$

9966 ——— 99852
9967 ——— 99856
1 ——— 4
x ——— 3

$x = \frac{3}{4} = 0,75$

9,96675

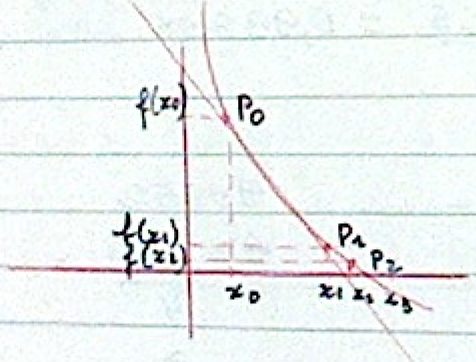
9,96675
− 9,96665
0,00010

9900 ———

0,3325 ——— x

Método de Newton (Haphson) (Raphon)

Esté método é aplicável quando a função é facilmente derivável.



É dado um ponto inicial x_0

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0}}$$

Para x_2 tem-se:

$$\boxed{x_2 = x_1 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

Para x_n tem-se:

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}$$

Convergência do Método de Newton-Haphson (Raphon)

$$f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_n = f(x_{n-1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

O método converge quando

$|f'(x)| < 1$ próximo da raiz.

$$f'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f''(x) \cdot f(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - [f'(x)]^2 + f(x)\, f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$f'(x) = \left| \frac{f(x)\, f''(x)}{[f(x)]^2} \right| < 1$$

$$\boxed{|f(x)\, f''(x)| < |[f'(x)]^2|}$$

Exercícios:

Determinar a raiz próxima de 2 com precisão de 0,0002 da equação $x^4 - x = 10$ e verificar a convergência.

$f'(x) = 4x^3 - 1$
$f''(x) = 12x^2$

$x_0 = 2$

$f(2) = 2^4 - 2 - 10 = 4$

$f'(2) = 4 \times 2^3 - 1 = 31$

$f''(2) = 12 \times 2^2 = 48$

$$|f(x)\, f''(x)| < |[f'(x)]^2|$$

$$|4 . 48| < |31^2|$$

$$|192| < |961|$$

$$192 < 961$$

$x_0 = 2$

$$x_1 = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

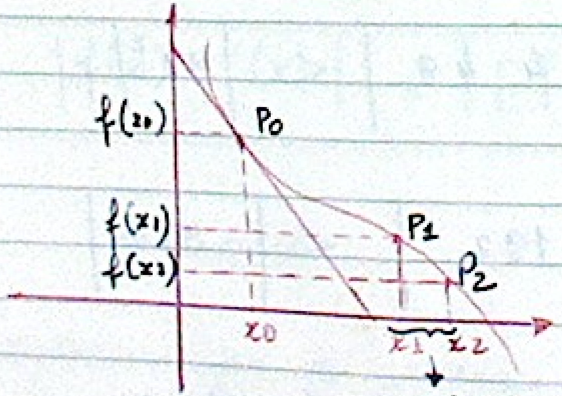
$$x_1 = 4 - \frac{4}{31}$$

Certo

$$x_1 = \frac{124 - 4}{31} = \frac{120}{31} = \boxed{3,870}$$

Método de Newton-Raphson

23/03/74



valores + próximos da raiz

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Obtém-se os pontos sucessivamente até encontrar os valores mais próximos da raiz de acordo com a precisão desejada.

Obs.: Sendo

$$|f'(x)| < 1$$

O processo converge quando

$$|f(x)\, f''(x)| < [f'(x)]^2$$

Se o 1º membro for menor que

o 2º é aplicado o método de newton - Raphson p/a ver se a função é convergente.

Exercício:

Determinar a raiz próxima de 2, com a precisão de 0,0002 da equação $x^4 - x = 10$

$x_0 = 2 \rightarrow$ pt. inicial

$f(x) = x^4 - x - 10$
$f(2) = 2^4 - 2 - 10$
$f(2) = 16 - 12$
$f(2) = 4$ $\quad f(x_0) = f(2) = 4$

Verificando se a função é convergente:

$f'(x) = 4x^3 - 1$
substituindo no ponto 2.
$f'(2) = 4 \times 8 - 1 =$
$f'(2) = 31$

$|f(x)\, f''(x)| < [f'(x)]^2$

$|\overset{4}{\cancel{31}} \cdot 48| < [31]^2$

$|\overset{124}{\cancel{192}}| < 961$.:.

é convergente

$f''(x) = 12x^2$
$f''(2) = 12 \cdot 2^2$
$f''(2) = 48$

p/a achar os valores, substitui-se, até encontrar a precisão desejada.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$x_0 = 2 \quad \therefore \quad f(2) = 4$

$$x_1 = 2 - \frac{4}{31}$$

$$x_1 = \frac{62-4}{31} = \frac{58}{31} = \boxed{1,871}$$

$f(x_1) = f(1,871) =$

$1,871^4 - 1,87 - 10$

$f(x_1) = 12,2545 - 1,871 - 10$

$f(x_1) = 0,3835$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$x_2 = 1,871 - \frac{0,3835}{25,1988}$

$4x^3 - x - 10$

$f'(x_1) = 4x^3 - 1$

$f'(1,871) = 4 \times (1,871)^3 - 1$

$4 \times 6,54970 - 1$

$f'(x_1) = 25,1988$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$x_2 = 1,871 - \frac{0,38348}{25,1988}$

$x_2 = 1,855782$

$1,870^3$

$3 \times \log 1,87$

$3 \times 0,$

$x_0 = 2$

$x_1 = 1,871$

$x_2 = 1,855782$

$x_3 = 1,855530$

$0,0002$ ...

a diferença já está na precisão exigida

Logaritmo:

$\log 4x = \log 4 + \log x$

$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

$\log x^y = y \log x$

$\log \sqrt[3]{x} = \frac{\log x}{3}$

Exemplo:

$(1,871)^4$

$\log x = 4 \log 1,871$ carac. n-1

$\log x = 4 \times 0,27207$

$\log x = 1,08828$

$x =$ (acha o antilogaritmo)

Procura-se a mantissa:
08828 (coluna log)

08814	—	1225
08849	—	1226
35		1

$$\begin{array}{r} 8828 \\ -\,8814 \\ \hline 14 \end{array}$$

35 — 1
14 — x

$$x = \frac{14}{35}$$

$x = 140 \div 35$; 00; 0,4

coloca-se

1225 + 0,4 ⇒ $\boxed{x = 12{,}254}$

portanto: $(1{,}871)^4 = 12{,}254$

Calcule a raiz de 10 com uma tolerância de 0,0001

partindo de $x_0 = 1$

Ponto de partida:

$f(x) = x^2 - 10 \Rightarrow x^2 = 10 \therefore x = \sqrt{10}$

$x_0 = 1$
$x_1 = 5{,}5$
$x_2 = 3{,}66$
$x_3 = 3{,}19612$
$x_4 = 3{,}16245$
$x_5 = 3{,}16244$
0,0001

raiz

$f(1) = -9$

$f'(1) = 2x = 2.1 = 2$

derivada de $x^2 - 10 = 2x = 2.1 = 2$

$x_1 = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2} = \boxed{5{,}5}$

desenvolver

$x^2 = 10 \therefore x^2 - 10 = 0$

$f(x) = x^2 - 10$

Convergência: $|f(x) \cdot f''(x)| < |f'(x_0)|^2$

$x_0 = 2$ $f(1) = 1^2 - 10$

$f(1) = -9$ $|-9 \cdot 2| < |2|^2$

$|-18| < |4|$

$f'(x) = x^2 - 10$

$f'(1) = 2x \therefore f'(1) = 2$ $18 \not< 4$

$f''(x) = 2$ não é convergente

$f''(1) = 2.1 = 2$

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_1 = 1 - \frac{-9}{2}$

$x_1 = 1 + \frac{9}{2} \therefore \boxed{x_1 = 5,5}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$x_2 = 5,5 - \frac{20,25}{11}$

$f(x_1) = f(5,5)$

$5,5^2 - 10$

$f(x_1) = 20,25$

$x_2 = 5,5 - 1,84$

$\boxed{x_2 = 3,66}$

$f'(x_1) =$

$f'(x_1) =$

$d_i \begin{cases} x^2 - 10 \\ 2x \end{cases}$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

$2 \cdot 5,5 = 11,0$

$x_3 = 3,66 - \frac{13,3956}{7,32}$

$f(3,66) =$

$3,66^2 - 10$

$13,3956 - 10 =$

$03,3956$

$x_3 = 3,66 - 0,463$

$\boxed{x_3 = 3,19612}$

$f'(3,66) = 2 \cdot 3,66 = 7,32$

$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

$f(3,196) =$

$3,196^2 - 10$

$0,214416$

$x_4 = 3,196 - \frac{0,214416}{6,392}$

$2 \cdot 3,196 = 6,392$

$x_4 = 3,196 - 0,0335$

$x_4 = 2,861$

K

Solução de Equações Polinomiais

20/04/74

Uma função polinomial de ordem n é uma expressão algébrica da forma:

$$f(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \dots a_n x^1 + a_n x^0$$

onde $a_1 \neq 0$

Se a função polinomial for igualada a zero, existirão n raízes que satisfarão a equação. As raízes poderão ser reais ou complexas. Se os coeficientes a_1, forem reais as raízes complexas aparecerão em pares na forma

$$x = a + bi$$
$$x = a - bi$$

tais números complexos são denominados: complexos conjugados.

Interpolação

Fórmula fundamental de newton:

A aproximação é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$f(x_0, x_1, x_2, \dots x_n)$ que é um polinômio de grau n que passa pelos pontos

$$[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)] \dots [x_n, f(x_n)]$$

da função $y = f(x)$ expressa na forma:

$$\begin{array}{ccl} x_0 & y_0 & = f(x_0) \\ x_1 & y_1 & = f(x_1) \\ x_2 & y_2 & = f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \\ x_n & y_n & = f(x_n) \end{array}$$

K

Solução de Equações Polinomiais

20/04/74

Uma função polinomial de ordem n é uma expressão algébrica da forma:

$$f(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \dots + a_n x^1 + a_n x^0$$

onde $a_1 \neq 0$

Se a função polinomial for igualada a zero, existirão n raízes que satisfarão a equação. As raízes poderão ser reais ou complexas. Se os coeficientes a_i forem reais as raízes complexas aparecerão em pares na forma

$x = a + bi$

$x = a - bi$

tais números complexos são denominados: complexos conjugados.

Interpolação

Fórmula fundamental de newton:

A aproximação é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$f(x_0, x_1, x_2, \dots x_n)$ que é um polinômio de grau n que passa pelos pontos

$[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)] \dots [x_n, f(x_n)]$

da função $y = f(x)$ expressa na forma:

$x_0 \quad y_0 = f(x_0)$

$x_1 \quad y_1 = f(x_1)$

$x_2 \quad y_2 = f(x_2)$

$\vdots$

$x_n \quad y_n = f(x_n)$

Fórmula da Diferença Dividida de Newton

x_i $f(x_i)$	1ª diferença		2ª diferença		3ª diferença
x_0 $f(x_0)$					
$f(x_0, x_1) =$	$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$	$f(x_0, x_1, x_2) =$	$\frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3) =$	$\frac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_1, x_2, x_3)}{x_0 - x_3}$
x_1 $f(x_1)$					
$f(x_1, x_2)$	$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$	$f(x_1, x_2, x_3) =$	$\frac{f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3)}{x_1 - x_3}$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	$\frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_2, x_3, x_4)}{x_1 - x_4}$
x_2 $f(x_2)$					
$f(x_2, x_3) =$	$\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$	$f(x_2, x_3, x_4) =$	$\frac{f(x_2, x_3) - f(x_3, x_4)}{x_2 - x_4}$	$f(x_2, x_3, x_4, x_5) =$	$\frac{f(x_2, x_3, x_4) - f(x_3, x_4, x_5)}{x_2 - x_4}$
x_3 $f(x_3)$					
$f(x_3, x_4) =$	$\frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4}$	$f(x_3, x_4, x_5) =$	$\frac{f(x_3, x_4) - f(x_4, x_5)}{x_3 - x_5}$	$f(x_3, x_4, x_5, x_6) =$	$\frac{f(x_3, x_4, x_5) - f(x_4, x_5, x_6)}{x_3 - x_6}$
x_4 $f(x_4)$					
$f(x_4, x_5) =$	$\frac{f(x_4) - f(x_5)}{x_4 - x_5}$	$f(x_4, x_5, x_6) =$	$\frac{f(x_4, x_5) - f(x_5, x_6)}{x_4 - x_6}$		
x_5 $f(x_5)$					
$f(x_5, x_6) =$	$\frac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6}$				

	4ª diferença		5ª diferença
$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) =$	$\dfrac{f(x_0,x_1,x_2,x_3) - f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{x_0 - x_4}$		
		$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) =$	$\dfrac{f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}{x_0 - x_5}$
$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) =$	$\dfrac{f(x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_2,x_3,x_4,x_5)}{x_1 - x_5}$		
		$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) =$	$\dfrac{f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) - f(x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)}{x_1 - x_6}$
$f(x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) =$	$\dfrac{f(x_2,x_3,x_4,x_5) - f(x_3,x_4,x_5,x_6)}{x_2 - x_6}$		

		6ª diferença
$\ldots x_4, x_5)$		
$\ldots x_5, x_6)$	$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) =$	$\dfrac{f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) - f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)}{x_0 - x_6}$

Fórmula para aproximação:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\, f(x_0,x_1,x_2) + \ldots f(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\, f(x_0,x_1,\ldots x_n).$$

Formula da Diferença dividida de Newton

2/4/4

$\boxed{x_0 \quad f(x_0)}$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$\boxed{x_1 \quad f(x_1)}$

$$\boxed{f(x_0, x_1, x_2)} = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$

$$\boxed{f(x_0, x_1, x_2, x_3)} = \frac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_1, x_2, x_3)}{x_0 - x_3}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$\boxed{x_2 \quad f(x_2)}$

$$\boxed{f(x_1, x_2, x_3)} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3)}{x_1 - x_3}$$

$$\boxed{f(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_2, x_3, x_4)}{x_1 - x_4}$$

$$f(x_2, x_3) = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

$\boxed{x_3 \quad f(x_3)}$

$$\boxed{f(x_2, x_3, x_4)} = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_3, x_4)}{x_2 - x_4}$$

$$f(x_3, x_4) = \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4}$$

* $\boxed{f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)} = \dfrac{f(x_0, x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{x_0 - x_4}$

obs: desenvolver até x_5.

Exercícios

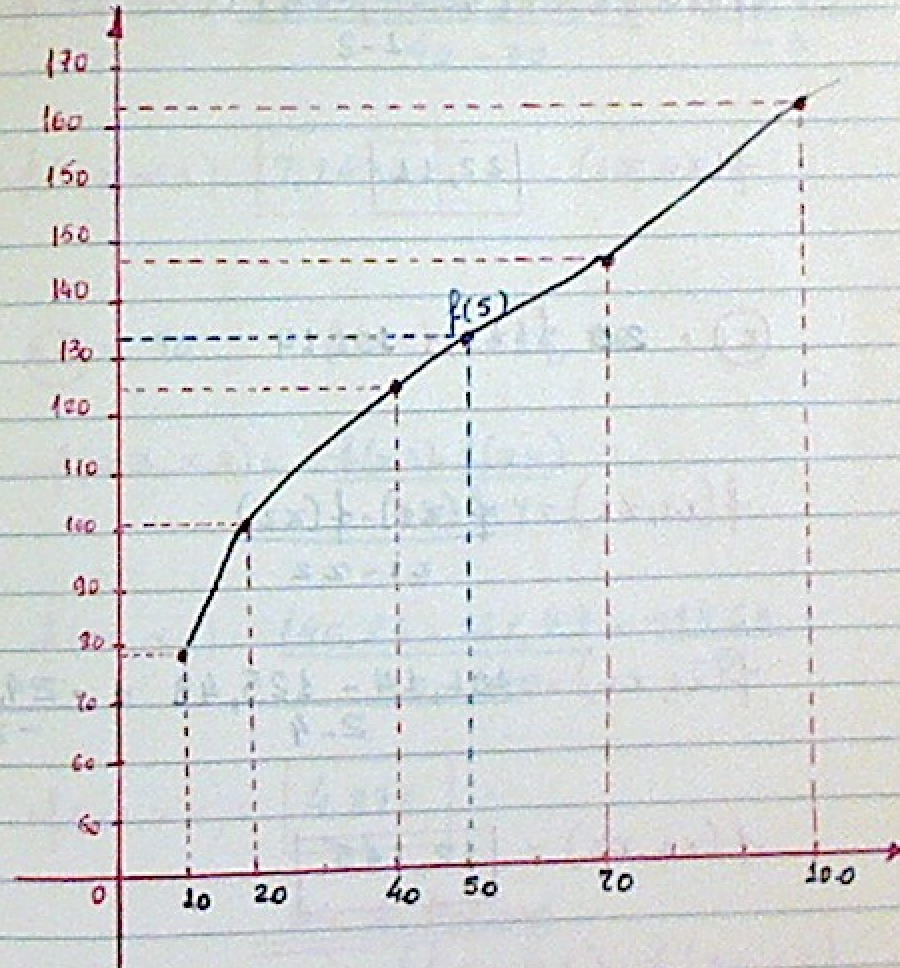
Dada a tabela

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	1.0	2.0	4.0	7.0	10.0
fx	$f(x_0)$ 79,03	$f(x_1)$ 101,14	$f(x_2)$ 125,43	$f(x_3)$ 146,86	$f(x_4)$ 161,49

1ª dif 2ª dif 3ª dif 4ª dif

Calcular a $f(5)$

Gráfico



1ª diferença

$\boxed{x_0} = 1.0$ $f(x_0) = 79,03$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$f(x_0,x_1) = \dfrac{79,03 - 101,14}{1-2}$

$f(x_0,x_1) = \boxed{22,11}$

$x_1 = 2.0 \quad f(x_1) = 101,14$

$f(x_1,x_2) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

$f(x_1,x_2) = \dfrac{101,14 - 125,43}{2-4} = \dfrac{-24,29}{-2}$

$f(x_1,x_2) = \boxed{12,145}$

$x_2 = 4.0 \quad f(x_2) = 125,43$

$f(x_2,x_3) = \dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$

$f(x_2,x_3) = \dfrac{125,43 - 146,86}{4,0 - 7,0} = \dfrac{-21,43}{-3}$

$f(x_2,x_3) = \boxed{7,143}$

$x_3 = 7,0 \quad f(x_3) = 146,86$

$f(x_3,x_4) = \dfrac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4}$

$f(x_3,x_4) = \dfrac{146,86 - 161,49}{7,0 - 10,0} = \dfrac{-14,63}{-3} =$

$f(x_3,x_4) = \boxed{4,876}$

2ª diferença

$f(x_0,x_1,x_2) = \dfrac{(f x_0,x_1) - f(x_1,x_2)}{x_0 - x_2}$

$f(x_0,x_1,x_2) = \dfrac{22,11 - 12,145}{1,0 - 4,0}$

$f(x_0,x_1,x_2) = \dfrac{9,965}{-3} = \boxed{-3,321}$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_1, x_2, x_3)}{x_0 - x_3}$$

nulo

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = -3{,}321 -$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3)}{x_1 - x_3}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{12{,}145 - 7{,}143}{2{,}0 - 7{,}0} = \frac{+5{,}002}{-5{,}0}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \boxed{-1{,}000}$$

$$f(x_2, x_3, x_4)$$

$$f(x_2, x_3, x_4) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_3, x_4)}{x_2 - x_4}$$

$$f(x_2, x_3, x_4) = \frac{7{,}143 - 4{,}876}{4{,}0 - 10{,}0} = \frac{2{,}267}{-6}$$

$$f(x_2, x_3, x_4) = \boxed{0{,}378}$$

3ª diferença

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_0, x_1, x_2) - f(x_1, x_2, x_3)}{x_0 - x_3}$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{-3{,}321 - (-1{,}000)}{1{,}0 - 7{,}0}$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{-3{,}321 + 1{,}000}{-6{,}0}$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{-2{,}321}{-6{,}0}$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \boxed{-0{,}386}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_2, x_3, x_4)}{x_1 - x_4}$$

$$= \frac{-1{,}000 - 0{,}378}{2{,}0 - 10{,}0}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \boxed{0{,}077}$$

4ª diferença

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{f(x_0, x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{x_0 - x_4}$$

$$= \frac{0{,}386 - 0{,}077}{1.0 - 9.0}$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \boxed{-0{,}034}$$

A aproximação é dada pela fórmula:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) + \dots f(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\, f(x_0, x_1, \dots x_n).}$$

$$f(5) = 79{,}03 + (5-1) \cdot 22{,}11 + (5-1) \cdot (5-2) + (-3{,}322) + (5-1)(5-2)(5-4)(0{,}387) + (5-1)(5-2)(5-4)(5-7)(-0{,}034)$$

$$f(5) = 79{,}03 + 4 \times 22{,}11 + 4 \times 3 \times (-3{,}321) + 4 \times 3 \times 1\, (0{,}386) + 4 \times 3 \times 1 \times (-2) \cdot (-0{,}034)$$

$$f(5) = 79{,}030 + 88{,}440 - 39{,}860 + 4{,}642 + 0{,}824$$

$$\boxed{f(5) = 133{,}08} \Rightarrow$$

Parábola Interpolante

Um dos caminhos para o estabelecimento da função interpolante polinomial é expressá-la na forma

$$P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$$

substituindo os $n+1$ valores da função neste polinômio, produzindo um sistema de $n+1$ equações que deverá ser resolvido para $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$.

A parábola interpolante é expressa na seguinte forma:

$$\boxed{P(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3}$$

Exercícios

25/04/74

Conhecida a tabela abaixo, calcular sen 22°, através da parábola interpolante

x (graus) $f(x) = \text{sen}(x)$

$P(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

x	$f(x)$	$\text{sen}(x)$
$x_0 =$	20	0,34202
$x_1 =$	25	0,42262
$x_2 =$	30	0,50000

$P(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$

$P(x_1) = 20^2 a_1 + 20 a_2 + a_3 = 0,34202$

$P(x) = 25^2 a_1 + 25 a^2 + a^3 = 0,42262$

$P(x_3) = 30^2 a_1 + 30 a_2 + a_3 = 0,50000$

$$① \left\| \begin{array}{l} 400 a_1 + 20 a_2 + a_3 = 0,34202 \\ 625 a_1 + 25 a_2 + a_3 = 0,42262 \\ 900 a_1 + 30 a_2 + a_3 = 0,50000 \end{array} \right.$$

Tomando ①, evidenciando a_1, temos

$$a_1 = \frac{0,34202 - 20 a_2 - a_3}{400}$$

Tomamos a_1 e substituímos ② e ③

$$625 \left(\frac{0,34202 - 20 a_2 - a_3}{400} \right) + 25 a^2 + a^3 = 0,42262$$

$$900 \left(\frac{0,34202 - 20 a_2 - a_3}{400} \right) + 30 a_2 + a_3 = 0,50000$$

$2.13,7.6250 - 12.500 a_2 - 625 a_3 + 10000 a_2 + 400 a_3 =$

169,04800

$-2500a_2 - 225a_3 = -44,71450$

$307,8100 - 18000a_2 - 900a_3 + 12000a_2 + 400a_3 = 200$

$-6000a_2 - 500a_3 = -107,81800$

$$\begin{cases} 2500a_2 + 225a_3 = 44,71450 & (1) \\ 6000a_2 + 500a_3 = 107,81800 & (2) \end{cases}$$

(1) $a_2 = \dfrac{44,71450 - 225a_3}{2500}$

$6000\left(\dfrac{44,71450 - 225a_3}{2500}\right) + 500a_3 = 107,81800$

$268287 - 1350000a_3 + 1.250.000a_3 = 269545$

$-100.000a_3 = 1258$

$a_3 = 1258 / -100.000$

$\boxed{a_3 = 0,01258}$

$a_2 = \dfrac{44,71450 - 225 - 0,01258}{2500}$

$a_2 = \dfrac{47,54500}{2500}$

$\boxed{a_2 = 0,01902}$

$a_1 = \dfrac{0,34202 - 20 \cdot 0,01902 - 0,01258}{400}$

$\boxed{a_1 = -0,0000644}$

$P(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$

$P(x) = -0,0000644x^2 + 0,01902x - 0,01258$

$P(22) = -0,0000644 \cdot 22^2 + 0,01902 \cdot 22 - 0,01258$

$P(22) = 0,37465$

$\boxed{\text{sen } 22° = 0,37465}$ Por ser o processo de resolução do sistema de três equações dificultoso, podemos escrever a parábola interpolante na forma $\boxed{P(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)}$

$P(x_1) = a_1$

$P(x_2) = a_1 + a_2(x - x_1)$

$P(x_3) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)$

$x \to$ graus	$f(x) \to$ sen x
20	0,34202
25	0,42262
20	0,50000

$P(x_1) = \boxed{a_1 = 0,34202}$

$P(x_2) = a_1 + a_2(x - x_1)$

$0,42262 = 0,34202 + a_2(20 - 25)$

$0,42262 = 0,34202 - 5a^2$

$\boxed{a_2 = -0,01612}$

$P(x_3) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2)$

$0,50000 = 0,034202 - 0,01612(20 - 25) + a_3(20 - 25).(20 - 30)$

$0,50000 = 0,34202 + 0,08060 + 50a_3$

$a_3 = \dfrac{0,50000 - 0,34202 - 0,08060}{50}$ $a_3 = -0,01258$

27/04/74

Interpolação entre intervalos equidistantes

Diferenças Ascendentes

(um termo menos seu antecessor)

Δ $\boxed{\Delta y_k = y_{k+1} - y_k}$

		1ª diferença Δ	2ª diferença Δ^2	3ª diferença Δ^3	4ª diferença Δ^4
x_0	y_0				
		$\Delta y_0 = y_1 - y_0$			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$		
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$		$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$
		$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$		
		$\Delta y_3 = y_4 - y_3$			
x_4	y_4				

A relação entre as diferenças divididas e as diferenças ascendentes é dado por

$$\boxed{f(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!\,h^k}\,\Delta^k y_0}$$

Onde:

h = é uma constante

$x_{k+1} = x_k + h \quad , k = 0, 1, 2, \ldots n$

ou

h – é o intervalo entre x_{k+1} e x_k

Substituindo a relação dada no polinômio interpolante de Newton, temos:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) + \ldots (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})\, f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

Substituindo pela fórmula

$$\boxed{f(x_0, x_1, \ldots x_k) = \frac{1}{k!\,h^k}\,\Delta^k y_0}$$

Resulta:

$$f(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)\,\Delta y_0}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!\,h^3}\,\Delta^3 y_0 + \ldots +$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})}{k!\,h^k}\Delta^k y_0$$

Polinômio interpolante.

Toma-se a diagonal descendente da tabela dada

Exemplo

Dada a tabela:

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x	2,0	2.2	2.4	2.6	2.8
$f(x)$	0,51037	0,52078	0,51041	0,48133	0,43592
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

Determinar $f(x)$ para:

a) $x = 2{,}13 \rightarrow 0{,}51960$

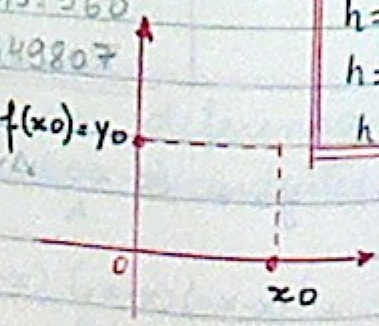
b) $x = 2{,}50 \rightarrow 0{,}49807$

$h = x_{k+1} - x_k$

$h = x_2 - x_1$

$h = 2{,}4 - 2{,}2$

$h = 0{,}2$



1ª diferença

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$

$\Delta y_0 = 0{,}52078 - 0{,}51037$

$\Delta y_0 = 0{,}01041$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$

$\Delta y_1 = 0{,}51041 - 0{,}52078$

$\Delta y_1 = -0{,}01037$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2$

$\Delta y_2 = 0{,}48133 - 0{,}51041$

$\Delta y_2 = -0{,}02908$

$\Delta y_3 = y_4 - y_3$

$\Delta y_3 = 0{,}43592 - 0{,}48133$

$\Delta y_3 = -0{,}04541$

2ª diferença

$\Delta_2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

$\Delta_2 y_0 = -0{,}01037 - 0{,}01041$

$\Delta_2 y_0 = -0{,}02078$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$
$\Delta^2 y_1 = -0,02908 + 0,01037$
$\Delta^2 y_1 = -0,01871$

$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$
$\Delta^2 y_2 = -0,04541 + 0,02908$
$\Delta y_2 = -0,01633$

3ª diferença

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$\Delta^3 y_0 = -0,01871 + 0,02078$
$\Delta^3 y_0 = 0,00207$

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$
$\Delta^3 y_1 = -0,01633 + 0,01871$
$\Delta^3 y_1 = 0,00238$

4ª diferença

$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$
$\Delta^4 y_0 = 0,00238 - 0,00207$
$\Delta^4 y_0 = 0,00031$

Substituindo na fórmula

$$f(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!\,h^3}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{4!\,h^4}\Delta^4 y_0 +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})}{k!\,h^k}\Delta^k y_0$$

$$f(2{,}13) = 0{,}51037 + \frac{(2{,}13-2{,}0)}{0{,}2}.(0{,}01041) +$$
$$+ \frac{(2{,}13-2{,}0)(2{,}13-2{,}2)}{2!(0{,}2)^2}.(0{,}02078) +$$
$$+ \frac{(2{,}13-2{,}0)(2{,}13-2{,}2)(2{,}13-2{,}4)}{3!(0{,}2)^3}.(0{,}00207) +$$
$$+ \frac{(2{,}13-2{,}0)(2{,}13-2{,}2)(2{,}13-2{,}4)(2{,}13-2{,}6)}{4!(0{,}2)^4}.(0{,}00031)$$

$$f(2{,}13) = 0{,}51037 + \frac{(2{,}13-2{,}0)}{0{,}2}(0{,}01041) +$$
$$\frac{(2{,}13-2{,}0)(2{,}13-2{,}2)}{0{,}08}.(-0{,}02078) +$$

$$+ \frac{(2,13-2,0)(2,13-2,2)(2,13-2,4)}{0,048} \cdot (0,00207) +$$

$$+ \frac{(2,13-2,0)(2,13-2,2)(2,13-2,4)(2,13-2,6)}{0,0384} \cdot (0,00031)$$

$$f(2,13) = 0,51037 + \frac{0,13 \times 0,01041}{0,2} +$$

$$+ \frac{0,13 \times (-0,07) \times (-0,02078)}{0,08} + \frac{(0,13) \cdot (-0,07) \cdot (0,00\ldots}{0,048}$$

$$+ \frac{0,13 \cdot (-0,07) \cdot (-0,27) \cdot (-0,47) \cdot (0,00031)}{0,0384} =$$

$$f(2,13) = 0,51037 + 0,00676 + 0,00236 + 0,0001\ldots$$
$$- 0,000009 =$$

$$\boxed{f(2,13) = 0,51960}$$

coluna

	x_0	x	x_1	x_2	x_3	x_4
x	2.0	2,13	2.2	2,4	2,6	2,8
$f(x)$	0,51037	0,5196	0,52078	0,51041	0,48133	0,43592
	y_0	y	y_1	y_2	y_3	y_4

solução

$$f(2,50) = 0,51037 + \frac{(2,50-2,0)}{0,2} \cdot (0,01041) +$$

$$+ \frac{(2,50-2,0) \cdot (2,50-2,2)}{2!\,(0,2)^2} \cdot (-0,02078) +$$

$$+ \frac{(2,50-2,0)(2,50-2,2) \cdot (2,50-2,4)}{3!\,(0,2)^3} \cdot (0,00207) +$$

$$+ \frac{(2,50-2,0)(2,50-2,2)(2,50-2,4)(2,50-2,6)}{4!\,(0,2)^4} \cdot$$

$$\cdot (0,00031) =$$

$$f(2,50) = 0,51037 + \frac{0,50}{0,2} \cdot (0,01041) +$$

$$\frac{(0,50) \cdot (0,30) \cdot (-0,020708)}{0,08} + \frac{(0,50)(0,30)(0,10) \cdot}{0,048}$$

$$(0,00207) + \frac{(0,50) \cdot (0,30) \cdot (0,10) \cdot (-0,10) \cdot (0,00031)}{0,0384}$$

$$f(2,50) = 0,51037 + 0,026025 - 0,03896 +$$
$$+ 0,00064687 - 0,00012109 =$$

$$f(2,50) = 0,49796078 \quad \text{ou}$$

$$\boxed{f(2,50) = 0,49807}$$

coluna

	x_0	x_1	x_2	x	x_3	x_4
x	2.0	2.2	2.4	2.5	2.6	2.8
$f(x)$	0,51037	0,52078	0,51041	0,49807	0,48133	0,43592
	y_0	y_1	y_2	y	y_3	y_4

solução

02/04/74

Ajustamento de Curvas

① Determinação de polinômios que melhor se ajuste a uma tabela dada.

Método dos mínimos Quadrados

Fórmula:

$$(n+1)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)a_2 + \dots \left(\sum_{k=0}^{n} x_i^{m}\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^3\right)a_2 + \dots \left(\sum_{k=0}^{n} x_i^{m+1}\right)a_m = \left(\sum_{k=0}^{n} x\, f(x)\right)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_i^{m}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1}\right)a_1 + \dots \left(\sum_{k=0}^{n} x_i^{km}\right)a_m = \sum_{k=0}^{n} x_k^{m} f(x_k)$$

A solução do sistema de $m+1$ equações algébricas nos levará os valores de $a_0, a_1, a_2 \dots a_m$

Excemplo: Determinar o polinômio do 2º grau $\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ que melhor se ajusta aos dados da tabela abaixo.

$x_0 = 0 \quad f(x_0) = 3,3$

$x_1 = 1,0 \quad f(x_1) = 3,6$

$x_2 = 2,4 \quad f(x_2) = 3,2$

$x_3 = 2,7 \quad f(x_3) = 2,0$

$\boxed{n=3}$

Aplicando a fórmula:

$$4a_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x_k^2\right)a_2 = \boxed{\sum_{k=0}^{3} f(x_k)}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{3} x_k\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x^2_k\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x^3_k\right)a_2 = \boxed{\sum_{k=0}^{3} x\, f(x_k)}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{3} x^2_k\right)a_0 + \left(\sum_{k=0}^{3} x^3_k\right)a_1 + \left(\sum_{k=0}^{3} x^4_k\right)a_2 = \boxed{\sum_{k=0}^{3} x^2 f(x_k)}$$

	x	$f(x)$	$xf(x)$	x^2	$x^2f(x)$	x^3	x^4
	0	3,3	0	0	0	0	0
	1	3,6	3,6	1	3,6	1	1
	2,4	3,2	7,68	5,76	18,432	13,824	33,1776
	2,7	2,0	5,4	7,29	14,58	19,683	53,1441
Σ	6,1	12,1	16,68	14,05	36,612	34,507	87,3217

$$\begin{cases} 4a_0 + 6{,}1a_1 + 14{,}05a_2 = 12{,}1 \\ 6{,}1a_0 + 14{,}05a_1 + 34{,}507a_2 = 16{,}68 \\ 14{,}05a_0 + 34{,}507a_1 + 87{,}3217a_2 = 36{,}612 \end{cases}$$

$$\left\|\begin{array}{ccc} 4 & 6{,}1 & 14{,}05 \\ 6{,}1 & 14{,}05 & 34{,}50 \\ 14{,}05 & 34{,}50 & 87{,}32 \\ 4 & 6{,}1 & 14{,}05 \\ 6{,}1 & 14{,}05 & 34{,}50 \end{array}\right\|$$

$a_0 = 3{,}22$

$a_1 = 1{,}00$

$a_2 = -0{,}49$

Substituindo em $\phi(x)$ obtemos então o polinômio procurado que é

$$\phi(x) = 3{,}22 + x - 0{,}49x^2$$

Dado a tabela:

$x_0 = 1$ $\quad f(x_0) = 2{,}0$

$x_1 = 1{,}5$ $\quad f(x_1) = 3{,}2$

$x_2 = 2{,}0$ $\quad f(x_2) = 2{,}8$

$x_3 = 2{,}4$ $\quad f(x_3) = 2{,}2$

Determinar o polinômio do 2º grau $\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, que melhor se ajuste aos dados da tabela acima:

x	$f(x)$	$x f(x)$	x^2	$x^2 f(x)$	x^3	x^4
1	2,0	2,0	1,0	2,0	1	1
1,5	3,2	4,80	2,25	7,20	3,375	5,062
2,0	2,8	5,60	4,00	11,20	8,00	16,00
2,4	2,2	5,28	5,76	12,672	13,824	33,17
6,9	10,2	17,68	13,010	33,072	26,199	55,232

$4a_0 + 6{,}9a_1 + 13{,}01a^2 = 10{,}2$

$6{,}9a_0 + 13{,}01a_1 + 26{,}199a^2 = 17{,}68$

$13{,}01a_0 + 26{,}199a_1 + 55{,}232a_2 = 33{,}072$

$4a_0 + 6{,}9a_1 + 13{,}01a_2 = 10{,}2$

$$a_0 = \frac{10{,}2 - 6{,}9a_1 - 13{,}01a_2}{4}$$

$$6{,}9\left(\frac{10{,}2 - 6{,}9a_1 - 13{,}01a_2}{4}\right) + 13{,}01a_1 + 26{,}199a^2 = 17{,}68$$

$70{,}38 - 47{,}61a_1 - 89{,}769a_2 + 52{,}04a_1 + 104{,}796a_2 = 70{,}72$

$15{,}027a_2 + 4{,}43a_1 = 70{,}72 - 70{,}38$

$4{,}43a_1 + 15{,}027a_2 = 0{,}34$

$$13{,}01\left(\frac{10{,}2 - 6{,}9a_1 - 13{,}01a_2}{4}\right) + 26{,}199a_1 + 55{,}232a_2 = 33{,}072$$

$132{,}702 - 89{,}769a_1 - 169{,}26a_2 + 104{,}796a_1 + 220{,}928a_2 = 132{,}288$

$15{,}027a_1 + 51{,}668a_2 = 132{,}288 - 132{,}702$

$15{,}027a_1 + 51{,}668a_2 = -0{,}414$

$$a_1 = \frac{0{,}34 - 15{,}027a_2}{4{,}43}$$

$$15{,}027\left(\frac{0{,}34 - 15{,}027a_2}{4{,}43}\right) + 51{,}668a_2 = -0{,}414$$

$5{,}1091 - 225{,}8107a_2 + 228{,}8892a_2 = -1{,}834$

$3{,}0783a_2 = -1{,}834 - 5{,}1091$

$3,0783\, a_2 = -6,9431$

$a_2 = \dfrac{-6,9431}{3,0783} \therefore \boxed{a_2 = -2,2554}$

$a_1 = \dfrac{0,34 - 15,027 \overset{a_2}{(-2,2554)}}{4,43}$

$a_1 = \dfrac{0,34 + 33,8918}{4,43}$

$a_1 = \dfrac{34,2318}{4,43} \therefore \boxed{a_1 = 7,72}$

$a_0 = \dfrac{10,2 - 6,9 a_1 - 13,01 a_2}{4}$

$a_0 = \dfrac{10,2 - 6,9(7,72) - 13,01(-2,2554)}{4}$

$a_0 = \dfrac{10,2 - 53,268 + 29,3427}{4}$

$a_0 = \dfrac{-13,7253}{4}$

$\boxed{a_0 = -3,4313}$

$\phi(x) = -3,43 + 7,72x - 2,25x^2$

$\phi(x) : 3,43 - 7,72x + 2,25x^2$ ou

$\phi(x) = 343 - 772x + 225x^2$

Exercícios (p/a nota)

04/03/74

① Construir a tabela de diferenças do polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, para: $x = -1, 1, 3, 5, 7$ e 9.

$x_0 = -1 \quad f(x_0) = f(-1) = -1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 2$

$x_1 = 1 \quad f(x_1) = f(1) = 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 2$

$x_2 = 3 \quad f(x_2) = f(3) = 3^3 + 3^2 - 3 + 1 = 34$

$x_3 = 5 \quad f(x_3) = f(5) = 5^3 + 5^2 - 5 + 1 = 146$

$x_4 = 7 \quad f(x_4) = f(7) = 7^3 + 7^2 - 7 + 1 = 386$

$x_5 = 9 \quad f(x_5) = f(9) = 9^3 + 9^2 - 9 + 1 = 802$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	-1	1	3	5	7	9
$f(x)$	2	2	34	146	386	802

1ª diferença

$f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \dfrac{2-2}{-1-1} = \dfrac{0}{-2} = 0$

$f(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{2-34}{1-3} = \dfrac{-32}{-2} = 16$

$$f(x_2,x_3) = \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} = \frac{34-146}{3-5} = \frac{-112}{-2} = 56$$

$$f(x_3,x_4) = \frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4} = \frac{146-386}{5-7} = \frac{-240}{-2} = 120$$

$$f(x_4,x_5) = \frac{f(x_4)-f(x_5)}{x_4-x_5} = \frac{386-802}{7-9} = \frac{-416}{-2} = 208$$

2ª diferença

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_0,x_1)-f(x_1,x_2)}{x_0-x_2} = \frac{0-16}{-1-3} = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_2,x_3)}{x_1-x_3} = \frac{16-56}{1-5} = \frac{-40}{-4} = 10$$

$$f(x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_2,x_3)-f(x_3,x_4)}{x_2-x_4} = \frac{56-120}{3-7} = \frac{-64}{-4} = 16$$

$$f(x_3,x_4,x_5) = \frac{f(x_3,x_4)-f(x_4,x_5)}{x_3-x_5} = \frac{120-208}{5-9} = \frac{-88}{-4} =$$

3ª diferença

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_0,x_1,x_2)-f(x_1,x_2,x_3)}{x_0-x_3} =$$

$$= \frac{4-10}{-1-5} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_2,x_3,x_4)}{x_1-x_4}$$

$$= \frac{10-16}{1-7} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$f(x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{f(x_2,x_3,x_4)-f(x_3,x_4,x_5)}{x_2-x_5}$$

$$= \frac{16-22}{3-9} = \frac{-7}{-7} = 1$$

4ª diferença

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_0,x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{x_0-x_4}$$

$$= \frac{1-1}{-1-7} = \frac{0}{-8} = 0$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{f(x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_2,x_3,x_4,x_5)}{x_1 - x_5}$$

$$= \frac{1-1}{1-9} = \frac{0}{-8} = 0$$

5ª diferença

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{x_0 - x_5}$$

$$= \frac{0-0}{-1-9} = \frac{0}{-10} = 0$$

$f(x_5)=0$

---

② Dado a tabela:

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	6	5	0	3	2

Formar o polinômio interpolador utilizando o método de Gregory newton.

1ª diferença

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{6-5}{-1-0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{5-0}{0-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$f(x_2,x_3) = \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} = \frac{0-3}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$f(x_3,x_4) = \frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4} = \frac{3-2}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

2ª diferença

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_0,x_1)-f(x_1,x_2)}{x_0-x_2} = \frac{-1+5}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_2,x_3)}{x_1-x_3} = \frac{-5-3}{0-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$f(x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_2,x_3)-f(x_3,x_4)}{x_2-x_4} = \frac{3+1}{1-3} = \frac{4}{-2} = -2$$

3ª diferença

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_0,x_1,x_2) - f(x_1,x_2,x_3)}{x_0 - x_3} = \frac{-2-4}{-1-2} = 2$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_1,x_2,x_3) - f(x_2,x_3,x_4)}{x_1 - x_4} = \frac{4+2}{0-3} = -2$$

4ª diferença

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{f(x_0,x_1,x_2,x_3) - f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{x_0 - x_4}$$

$$= \frac{2+2}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$$

Substituindo na fórmula:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\cdot f(x_0,x_1) + (x-x_0)\cdot(x-x_1)\, f(x_0,x_1,x_2) + (x-x_0)\cdot(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) =$$

$$f(x) = 6 + (x+1)\cdot(-1) + (x+1)\cdot(x-0)\cdot(-2) + (x+1)\,(x-0)\cdot(x-1)\cdot 2 + (x+1)\cdot(x-0)(x-1)(x-2)\cdot(-1) =$$

$$6 - x - 1 - 2x^2 - 2x + 2x^3 - 2x - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x =$$

$$-x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$$

$f(x) =$ $\boxed{x^4 - 4x^3 + x^2 + 7x - 5 = 0}$ polinômio interpolador.

---

(3) Dado a tabela:

x	0	2	4	6
$f(x_i)$	1	3	2	5

Obter o valor de y para $x=5$

$x_0 = 0$ $y_0 = 1$

$x_1 = 2$ $y_1 = 3$

$x_2 = 4$ $y_2 = 2$

$x_3 = 6$ $y_3 = 5$

1ª diferença:

1ª diferença

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$

$\Delta y_0 = 3 - 1$

$\Delta y_0 = 2$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$

$\Delta y_1 = 2 - 3$

$\Delta y_1 = -1$

$\Delta y_2 = y_2 - y_1$

$\Delta y_2 = 5 - 3$

$\Delta y_2 = 3$

2ª diferença

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

$\Delta^2 y_0 = -1 - 2$

$\Delta^2 y_0 = -3$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$

$\Delta^2 y_1 = 3 + 1$

$\Delta^2 y_1 = 4$

3ª diferença

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$

$\Delta^3 y_0 = 4 + 3$

$\Delta^3 y_0 = 7$

Substituindo na fórmula:

↓

$$f(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{h}\,\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,h^2}\,\Delta^2 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!\,h^3}\cdot \Delta^3 y_0 =$$

$$f(5) = 1 + \frac{(5-0)}{2}\cdot 2 + \frac{(5-0)(5-2)}{2 \cdot 2^2}\cdot(-3) + \frac{(5-0)(5-2)(5-4)}{6 \cdot 2^3}\cdot 7 =$$

$$f(5) = 1 + \frac{10}{2} + \frac{5 \cdot 3 \cdot (-3)}{8} + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 7}{6 \cdot 8} =$$

$$f(5) = 1 + 5 - \frac{45}{8} + \frac{105}{48}$$

$$f(5) = 1 + 5{,}0 - 5{,}625 + 2{,}1875$$

$$\boxed{f(5) = 2{,}5625}$$

4) Dados:

$x_0 = 1$	$f(x_0) = 2{,}0$
$x_1 = 2{,}0$	$f(x_1) = 3{,}1$
$x_2 = 2{,}5$	$f(x_2) = 2{,}9$
$x_3 = 3{,}4$	$f(x_3) = 2{,}2$

Através do método dos mínimos quadrados obter o sistema de equações que determina a_0, a_1, a_2

x	$f(x)$	$x f(x)$	x^2	$x^2 f(x)$	x^3	x^4
1,0	2,0	2,0	1	2,0	1	1
2,0	3,1	6,2	4	12,40	8	16
2,5	2,9	7,25	6,25	18,125	15,625	39,0625
3,4	2,2	7,48	11,56	25,432	39,304	133,6336
$\sum$ 8,9	10,2	22,93	22,81	57,957	63,929	189,6961

$$4a_0 + 8{,}9a_1 + 22{,}81a_2 = 10{,}2$$
$$8{,}9a_0 + 22{,}81a_1 + 63{,}92a_2 = 22{,}93$$
$$22{,}81a_0 + 63{,}92a_1 + 189{,}69a_2 = 57{,}957$$

$$a_0 = \frac{10{,}2 - 8{,}9a_1 - 22{,}81a_2}{4}$$

$$8{,}9\left(\frac{10{,}2 - 8{,}9a_1 - 22{,}81a_2}{4}\right) + 22{,}81a_1 + 63{,}929a_2 = 22{,}93$$

$$90{,}78 - 79{,}21a_1 - 203{,}009a_2 + 91{,}24a_1 + 255{,}716a_2 = 91{,}72$$

$$12{,}03a_1 + 52{,}707a_2 = 0{,}94$$

$$22{,}81\left(\frac{10{,}2 - 8{,}9a_1 - 22{,}81a_2}{4}\right) + 63{,}92a_1 + 189{,}69a_2 = 91{,}72$$

$$12{,}03a_1 + 52{,}707a_2 = 0{,}94$$

$$22{,}81\left(\frac{10{,}2 - 8{,}9a_1 - 22{,}81a_2}{4}\right) + 63{,}929a_1 + 189{,}69a_2 = 57{,}957$$

$$232{,}662 - 203{,}009a_1 - 520{,}2961a_2 + 255{,}68a_1 + 758{,}76a_2 = 231{,}828$$

II $$52{,}671a_1 + 238{,}4639a_2 = -0{,}834$$

$$a_1 = \frac{0{,}94 - 52{,}707a_2}{12{,}03} \qquad 52{,}671\left(\frac{0{,}94 - 52{,}707a_2}{12{,}03}\right) + 238{,}4639a_2 = -0{,}834$$

$$49{,}51074 - 2776{,}1303a_2 + 2868{,}7207a_2 = -10{,}03302$$

$$92{,}5904a_2 = -59{,}54376$$

$$a_2 = -\frac{59{,}54376}{92{,}5904} \qquad \boxed{a_2 = 0{,}64}$$

$$a_1 = \frac{-0{,}834 - 238{,}4639\,a_2}{52{,}671}$$

$$a_1 = \frac{-0{,}834 - 238{,}4639(0{,}643)}{52{,}671}$$

$$a_1 = \frac{-0{,}834 + 153{,}3322}{52{,}671}$$

$$a_1 = \frac{152{,}4982}{52{,}671} \therefore \boxed{a_1 = 2{,}89}$$

$$a_0 = \frac{10{,}2 - 8{,}9a_1 - 22{,}81\,a_2}{4}$$

$$a_0 = \frac{10{,}2 - 8{,}91(2{,}89) - 22{,}81(-0{,}64)}{4}$$

$$a_0 = \frac{10{,}2 - 25{,}7499 + 14{,}5984}{4}$$

$$a_0 = \frac{-0{,}9515}{4} \therefore \boxed{a_0 = -0{,}23}$$

$$\phi(x) = -0{,}23 + 2{,}89x - 0{,}64x^2$$
$$\phi(x) = 0{,}23 - 2{,}89x + 0{,}64x^2$$
$$\phi(x) = 23 - 289x + 64x^2$$

09/06/
74

Interpolação a Lagrange

Fórmula de Lagrange

$$P(x) = f(x_1)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n+1})} +$$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n+1})} + \ldots$$

$$+ f(x_{n+1})\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n)}$$

Exercício

1. De acordo com a tabela dada, formar o polinômio interpolador de Lagrange.

	x_1	x_2	x_3
x	0	0,5	1
$f(x)$	7,5	-5,1	6

$$P(x) = f(7{,}5)\cdot\frac{(x-0{,}5)(x-1)}{(0-0{,}5)(0-1)} + (-5{,}1)\,\frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(0{,}5-0)\cdot(0{,}5-1)}$$

$$+ 6\frac{(x-0)(x-0,5)}{(1-0)(1-0,5)} =$$

$$7.5\frac{(x^2-1,5x+0.5)}{0.5} - \frac{5,1(x^2-x)}{-0,25} + \frac{6(x2-0,5x)}{0,5}$$

$$P(x) = 7.5\frac{(x^2-1,5x+0,5)}{0,5} - \frac{5,1(x^2-x)}{-0,25} + \frac{6(x^2-0,5x)}{0,5}$$

$$P(x) = 15(x^2-1.5x+0,5)+20,4(x^2-x)+12(x^2-0,5x)$$

$$P(x) = 15x^2-22,5x+7,5+20,4x^2-20,4x+12x^2-0,6x =$$

$$\boxed{P(x) = 47,4x^2-48,9x+7,5}$$

② Considerando a tabela:

x	$f(x)$
20	0,34202
25	0,42262
30	0,50000

Pela fórmula de Lagrange obter $f(x)$ para $x=22$ ou seja $P(22)$.

$$P(22) = 0,34202\frac{(22-25)(22-30)}{(20-25)(20-30)} + 0,42262\frac{(22-20)(22-30)}{(25-20)(25-30)} + 0,5\frac{(22-20)(22-25)}{(30-20)(30-25)} =$$

$$0,34202\left(\frac{24}{50}\right) + 0,42262\left(\frac{-16}{-25}\right) + 0,5\left(\frac{-6}{50}\right) =$$

$$0,34202\left(\frac{12}{25}\right) + 0,42262\left(\frac{16}{25}\right) + 0,5\left(\frac{-3}{25}\right) =$$

$$P(22) = \frac{4,10404+6,76192-15}{25} = \frac{9.36616}{25}$$

$$\boxed{P(22) = 0,3746464}$$

③ Construir para a função $f(x)=|x|$ no intervalo $[-1,1]$, o polinômio de Lagrange, atribuindo a x os seguintes valores $x_n = 0 \pm \frac{1}{2} \pm 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_n	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
$f(x)$	1	$1/2$	0	$1/2$	1

$$P(x) = \frac{1\,(x+1/2)(x-0)(x-1/2)(x-1)}{(-1+1/2)(-1-0)(-1-1/2)(-1-1)} + \frac{1}{2}\,\frac{\overset{x+1}{(x-(-1))}\,(x-0)(x-1/2)(x-1)}{(-\frac{1}{2}-(-1))(-1/2-0)(-1/2-1/2)(-1/2-1)} + \frac{0\,(x-(-1))(x-(-1/2))}{(0-(-1))(0-(-1/2))}$$

$$\frac{(x-1/2)(x-1)}{(0-1/2)(0-1)} + \frac{1}{2}\,\frac{(x-(-1))(x-(-1/2))(x-0)(x-1)}{(\frac{1}{2}-(-1))(\frac{1}{2}-(-1/2))(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-1)} +$$

$$+ \frac{(x-(-1))(x-(-1/2))(x-0)(x-1/2)}{(1-(-1))(1-(-1/2))(1-0)(1-1/2)} =$$

$$P(x) = 1\cdot\left(\frac{x^4 - x^3 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}}{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cancel{4}_1}}\right) + 0 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x^4 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}}{-\frac{3}{8_4}}\right) + 1\cdot\left(\frac{x^4 + x^3 - \frac{1x^2}{4} - \frac{x}{4}}{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$\cancel{2}\cdot\left(\frac{4x^4 - 4x^3 - x^2 + x}{\cancel{12}_6}\right) + \cancel{2}\left(\frac{2x^4 - 3x^3 + x}{\cancel{2}}\right)$$

?

$$+ \cancel{4}^{2}\left(\frac{2x^4 + x^3 - x^2 - x}{-\cancel{6}_3}\right) + \cancel{2}\left(\frac{4x^4 + 4x^3 - x^2 - x}{\cancel{12}_6}\right) =$$

$$= \frac{4x^4 - 4x^3 - x^2 + x}{6} + 2x^4 - 3x^3 + x + \frac{4x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x}{-3} + \frac{4x^4 + 4x^3 - x^2 - x}{6}$$

$$= -(4x^4 - 4x^3 - x^2 + x) - 6(2x^4 - 3x^3 + x) + 2(4x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x) - (4x^4 + 4x^3 - x^2 - x) =$$

$$-4x^4 + 4x^3 + x^2 - \cancel{x} - 12x^4 + 18x^3 - 6x + 8x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x - 4x^4 - \cancel{4x^3} + x^2 + \cancel{x} =$$

$$-12x^4 + 22x^3 - 2x^2 - 10x = 0$$

$$12x^4 - 22x^3 + 2x^2 + 10x = 0$$

R: $\boxed{6x^4 - 11x^3 + x^2 + 5x = 0}$

$$R - P(x) = 0{,}46x^4 + 1{,}55x^3 - 4{,}42x^2 - 1{,}55x$$

Exercícios

11/05/74

Calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$, sendo $f(x)$ o polinômio interpolador de Lagrange, obtido com bases na tabela abaixo:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	5	4.5	3	2.5	5
	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$

Fórmula

$$P(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)} +$$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)} +$$

$$+ f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)} +$$

$$f(x_4)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)} +$$

$$+ f(x_5)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)}$$

$f(x_1)$

$$5 . \left(\frac{(x-0{,}5)(x-1)(x-1{,}5)(x-2)}{(0-0{,}5)(0-1)(0-1{,}5)(0-2)}\right) =$$

$$5 . \left(\frac{(x-0{,}5)(x-1)(x-1{,}5)(x-2)}{(-0{,}5).(-1).(-1{,}5).(-2)}\right) =$$

$$5 . \left(\frac{x^4-5x^3+8{,}75x^2-6{,}25x+1{,}5}{1{,}5}\right)$$

$f(x_2)$

$$4{,}5 \left(\frac{(x-0)(x-1)(x-1{,}5)(x-2)}{(0{,}5-0)(0{,}5-1)(0{,}5-1{,}5)(0{,}5-2)}\right)$$

$$4{,}5 . \left(\frac{x^4-4{,}5x^3+6{,}5x^2-3x}{-0{,}375}\right)$$

$f(x3)$

$$3\left(\frac{(x-0)(x-0,5)(x-1,5)(x-2)}{(1-0)(1-0,5)(1-1,5)(1-2)}\right)$$

$$3\left(\frac{x^4-4x^3+4,75x^2-1,5x}{0,25}\right)=$$

$f(x4)$

$$2.5\left(\frac{(x-0)(x-0,5)(x-1)(x-2)}{(1,5-0)(1,5-0,5)(1,5-1)(1,5-2)}\right)$$

$$2.5\left(\frac{x^4+3,5x^3+3,5x^2-x}{-0,375}\right)$$

$f(x5)$

$$5\left(\frac{(x-0)(x-0,5)(x-1)(x-1,5)}{(2-0)(2-0,5)(2-1)(2-1,5)}\right)$$

$$5\left(\frac{x^4-3x^3+2,75x^2-0,75x}{1,5}\right)$$

$$P(x)= 5\left(\frac{x^4-5x^3+8,75x^2-6,25x+1,5}{1,5}\right)+$$

$$4,5\left(\frac{x^4-4,5x^3+6,5x^2-3x}{-0,375}\right)+$$

$$3\left(\frac{x^4-4x^3+4,75x^2-1,5x}{0,25}\right)+$$

$$2,5\left(\frac{x^4+3,5x^3+3,5x^2-x}{-0,375}\right)+$$

$$5\left(\frac{x^4-3x^3+2,75x^2-0,75x}{1,5}\right)=$$

$$P(x)= 3,33\ldots(x^4-5x^3+8,75x^2-6,25x+1,5)$$
$$-12(x^4-4,5x^3+6,5x^2-3x)+12(x^4-4x^3$$
$$+4,75x^2-1,5x)-6,66\ldots(x^4-3,5x^3+3,5x^2$$
$$-x)+3,33(x^4-3x^3+2,75x^2-0,75x)=$$

$$P(x)= 3,33x^4-16,65x^3+29,1375x^2-20,8125x$$
$$+5-12x^4+54x^3-78x^2+36x+12x^4-$$
$$48x^3+57x^2-18x-6,66x^4-23,31x^3-23,31$$
$$x^2-6,66x+3,33x^4-9,99x^3+9,1575x^2-$$
$$2,5x=$$

$P(x) = 2,67x^3 - 6,03x^2 + 1,35x + 5$

Integrando o polinômio

$$\int_0^2 (2,67x^3 - 6,03x^2 + 1,35x + 5)\,dx =$$

$$2,67\int_0^2 x^3 dx - 6,03\int_0^2 x^2 dx + 1,35\int_0^2 x\,dx + 5\int_0^2 dx =$$

$$\left[2,67\frac{x^4}{4} - 6,03\frac{x^3}{3} + 1,35\frac{x^2}{2} + 5x\right]_0^2 =$$

$$\left[2,67 \cdot 4 - 6,03 \cdot \frac{8}{3} + 1,35 \cdot 2 + 5,2\right] - [0] =$$

$$\left[10,68 - \frac{48,24}{3} + 2,7 + 10\right] =$$

$$\frac{32,04 - 48,24 + 8,1 + 3,0}{3} = \frac{21,9}{3}$$

ou $\cong \frac{22}{3} = 7,3$

Interpolação Inversa

Interpolação Inversa é o processo de determinar o valor da variável independente correspondente a um dado valor da função $f(x)$

1º processo.

Construir o polinômio interpolante padrão e fazê-lo igual a um dado valor $f(x)$ e resolver a equação polinomial para x

Exemplo:

x	$f(x)$
20	0,34202
25	0,42262
30	0,50000

A parábola que passa por estes três pontos é: $P(x) = -0,0000644x^2 +$

$0,01902x - 0,01258 - 0,39875 -$

$- 0,0000644x^2 + 0,01902x - 0,41133 =$

$0,0000644x^2 - 0,01902x + 0,41133 = 0$

Resolvendo a equacão do 2º grau acima, temos:

$$\boxed{x = 23,52275}$$

2º processo

Procura-se a $f(x)$, trocando-se as variáveis dependentes pelas independentes.

E' o processo inverso.

Extrapolação

Dados os conjuntos de $n+1$ pontos para $x_1, x_2 \ldots x_{n+n}$ ordenadas de tal forma que $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, extrapolação consiste na determinação de valores de $f(x)$ para pontos fora do intervalo (x_1, x_{n+1})

16/05/74

Determinação de Raizes Complexas de um polinômio

Método Lin

Consiste na determinação, através de processo iterativo dos coeficientes p e q, definidos pela expressão.

$$\frac{f(x)}{x^2+px+q} = f_1(x) + \frac{R(x)}{x^2+px+q}$$

$R(x)$ deverá assumir coeficientes nulos quando forem atingidos os valores escatos de p e q.

As raízes da equação: $x^2 + px + q = 0$ determinarão duas raízes da equação $f(x) = 0$ obtidas estas raízes faz-se a redução de ordem do polinômio $f(x)$, se o grau do polinômio resultante for $\geqslant 3$ procura-se determinar uma nova equação quadrática, temos:

$$f(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n x + a_{n+1}$$

$$f_1(x) = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots b_{n-2} x + b_{n-1}$$

$$R(x) = R_1 x + R_2$$

O processo iterativo é iniciado atribuindo-se valores arbitrários a p e q e os coeficientes b_i são determinados pelo seguinte algoritmo

$$b_i = a_i - p_1 \overset{b(3-1)}{b_{i-1}} - q_1 b_{i-2}^{\,b(3-2)}$$

p/a achar o valor de b

Ex: $b_3 = a_3 - p_1 \cdot b_2 - q_1 \cdot b_1$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - p_1 b_1$$

A cada iteração obtém novos valores para p e q através das fórmulas:

$$q_2 = \frac{a_{n+1}}{b_{m-1}} \qquad p_2 = \frac{a_n - q_2 b_{m-2}}{b_{m-1}}$$

e assim sucessivamente e o processo termina quando as diferenças entre duas aproximações consecutivas forem menor do que uma tolerância fixada.

$$p_{i+1} - p_i \leqslant \varepsilon$$
$$q_{i+1} - q_i \leqslant \varepsilon$$

Exemplo

① A equação a seguir possui 4 raízes imaginárias.
Determine-as:

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16 = 0$$

partindo-se dos valores iniciais

de $P_1 = -1$ e $q_1 = 1$

Os coeficientes de $f(x)$

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a	$f(x)$	1	-6	18	-24	16
b?	$f_1(x)$	?				

$b_1 = a_1 = 1$

$b_2 = a_2 - P_1 b_1 = -6 - (-1).(1) = -5$

$b_i = a_i - P_1 b_{i-1} - q_1 b_i = 2$

$i=3$ $b_3 = 18 - (-1).(-5) - 1.1$

$b_3 = 18 - 5 - 1 = 12$

$i=4$ $b_4 = -24 - (-1).12 - 1.(-5)$ (ñ precisa continuar)

				a_n	a_{n+1}
$f(x)$	1	-6	18	-24	16
$f_1(x)$	1	-5	12	...	....
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
			b_{n-1}	b_n	b_{n+1}

$q_2 = \frac{a_{n+1}}{b_{n-1}}$

$q_2 = \frac{16}{12} = \boxed{1,33}$

$P_2 = \frac{a_n - q_2 b_{n-2}}{b_{n-1}}$

$P_2 = \frac{-24 - 1,33(-5)}{12} = -1,45$

$\boxed{P_2 = -1,45}$

	a_1	a_2	a_3	a_4 (a_n)	a_5 (a_{n+1})
$f(x)$	1	-6	18	-24	16
$f_2(x)$	1	-4,55	10,07		

procurando a $f_2(x)$

$b_1 = a_1 = 1$

$b_2 = a_2 - P_2 b_1 = -6 - (-1,45) 1 = \boxed{-4,55}$

$b_3 = a_3 - P_2 b_3 = 1 - q_2 . b_{3-2} =$

$a_3 - p_2 b_2 - q_2 . b_1 =$

$18 - (-1,45).(-4,55) - 1,33 . 1$

$18 - 6,5975 - 1,33$

$\boxed{10,0725}$

$q_3 = \frac{a_{n+1}}{b_{n-1}}$ $q_3 = \frac{16}{10,07} = 1,59$

$\boxed{q_3 = 1,59}$

$p_3 = \frac{a_n - q_3 b_{n-2}}{b_{n-1}}$

$p_3 = \frac{-24 - 1,59 \times (-4,55)}{10,07}$

$p_3 = \frac{-24 + 7,2345}{10,07}$

$p_3 = \frac{-16,7655}{10,07} = \boxed{-1,66}$

$p = -2$

$q = 2$

Substituindo na equação:

$x^2 + px - q = 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$ $\boxed{x' = 1+i \quad x'' = 1-i}$

$\frac{x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 24x + 16}{x^2 - 2x + 2}$ (divide)

$x^2 - 4x + 8 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2}$ $\boxed{x' = 2+2i \quad x'' = 2-2i}$

Exercícios

18/05/74.

Dada a tabela de valores da função $y = f(x)$

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	2	1	4	3

Por Lagrange, obter.

ⓐ obter x para $f(x) = 2{,}5$

$x_1 = 1$ $\quad f(x_1) = 2$

$x_2 = 2$ $\quad f(x_2) = 1$

$x_3 = 3$ $\quad f(x_3) = 4$

$x_4 = 4$ $\quad f(x_4) = 3$

$$f(x_1) \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + f(x_2) \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + f(x_3) \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} =$$

$$2 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 1 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} =$$

$$2 \cdot \frac{(x^3-9x^2+26x-24)}{-6} + 1 \cdot \frac{(x^3-8x^2+19x-12)}{2} + 4 \cdot \frac{(x^3-7x^2+14x-8)}{-2} + 3 \cdot \frac{(x^3-6x^2+11x-6)}{6} =$$

$$P(x) = -0{,}33\,(x^3-9x^2+26x-24) + 0{,}5\,(x^3-8x^2+19x-12) - 2\,(x^3-7x^2+14x-8) + 0{,}5\,(x^3-6x^2+11x-6) =$$

$$P(x) = -0{,}33x^3 + 2{,}97x^2 - 8{,}58x + 7{,}92 + 0{,}5x^3 - 4x^2 + 9{,}5x - 6 - 2x^3 + 14x^2 - 28x + 16 + 0{,}5x^3 - 3x^2 + 5{,}5x - 3 =$$

$$P(x) = -1{,}33x^3 + 9{,}97x^2 - 21{,}58x + 14{,}92$$

$$\boxed{P(x) = 1{,}33x^3 - 10x^2 + 21{,}58x - 15}$$

polinômio interpolador

$f(x) = 2,5$

$$2,5 = 1,33x^3 - 10x^2 + 21,58x - 15$$
$$1,33x^3 - 10x^2 + 21,58x - 15 - 2,5 = 0$$
$$\boxed{1,33x^3 - 10x^2 + 21,58x - 17,5 = 0}$$

Obs: Para achar o valor de x precisamos resolver a equação do 3º grau.

---

b) obter $f(x)$ para $x = 5$

$$f(5) = 1,33x^3 - 10x^2 + 21,58x - 15$$
$$f(5) = 1,33\,(5)^3 - 10(5)^2 + 21,58(5) - 15$$
$$f(5) = 1,33 \cdot 125 - 10 \cdot 25 + 21,58 \cdot 5 - 15$$
$$f(5) = 166,25 - 250 + 107,90 - 15$$
$$f(5) = -83,75 + 92,90$$
$$f(5) = 9,15$$

---

c) obter $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{2} (1,33x^3 - 10x^2 + 21,58x - 15)\,dx$$

$$1,33\int_{-1}^{2} x^3\,dx - 10\int_{-1}^{2} x^2\,dx + 21,58\int_{-1}^{2} x\,dx - 15\int_{-1}^{2} dx$$

$$\left[1,33\frac{x^4}{4} - 10\frac{x^3}{3} + 21,58\frac{x^2}{2} - 15x\right]_{-1}^{2} =$$

$$\left[1,33 \cdot \frac{2^4}{4} - 10 \cdot \frac{2^3}{3} + 21,58 \cdot \frac{2^2}{2} - 15 \cdot 2\right] - \left[1,33 \cdot \frac{(-1)^4}{4}\right.$$
$$\left. - 10 \cdot \frac{(-1)^3}{3} + 21,58\,\frac{(-1)^2}{2} - 15\,(-1)\right] =$$

$$\left[1,33 \cdot 4 - 10 \cdot \frac{8}{3} + 21,58 \cdot 2 - 30\right] - \left[\frac{1,33}{4}\right.$$
$$\left. + \frac{10}{3} + \frac{21,58}{2} + 15\right] =$$

$$\left[5,32 - \frac{80}{3} + 43,16 - 30\right] - \left[\frac{1,33}{4} + \frac{10}{3} + \frac{21,58}{2} + 15\right]$$

$$\left[\frac{15,96 - 80 + 129,48 - 90}{3}\right] - \left[\frac{3,99 + 40 + 129,48 + 180}{12}\right]$$

$$\left[-\frac{24,56}{3}\right] - \left[\frac{353,47}{12}\right] =$$

$$-8,18 - 29,45 = \boxed{-37,64}$$