Desta maneira, colocamos a criança numa situação em que aceitará o problema realmente como seu problema e, desta forma, envidará todos os esforços para resolvê-lo. Por outro lado, podemos perceber a diferença entre os alunos no processo de pensamento envolvido na solução, bem como o grau de prontidão para a nova fase do trabalho. Quando a classe não consegue resolver uma situação pelos recursos que já possui, ainda que imaturos, mostra, de alguma forma, necessitar de atividades preparatórias, a fim de penetrar gradualmente na dificuldade.

Usando esta técnica, parte-se das soluções verbalizadas pela criança, para conduzí-la ao processo mais maturo de resolver a situação.

Em geral, procurando solucionar um exemplo com a dificuldade que estamos estudando, a classe demonstra precisar de muitas atividades que a levem a retirar partes fracionárias de um inteiro. Para isto, vamos planejar experiências específicas:

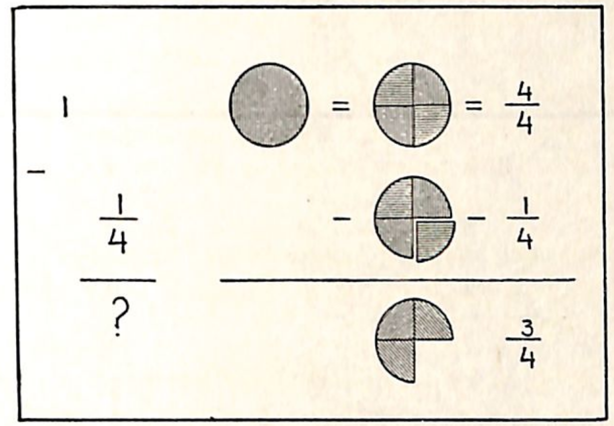
— Se eu tenho um queijo e quero dêle retirar três quartos, com quanto ainda ficarei? Como pensou você para dar esta resposta? Poderia mostrar isto usando o flanelógrafo?

— Que vamos colocar no flanelógrafo? Como retirar 3/4 de uma coisa que está inteira?

— E se eu tiver que retirar 1/5 de um inteiro? Como fazer?

A professôra encaminha as atividades para o aluno perceber que, somando-se 1/5 com 4/5, se obtém 5/5 ou 1 inteiro. Segue-se, portanto, que 1/5 pode ser retirado de 5/5 que é o mesmo que 1 inteiro. Êle precisa desenvolver considerável familiaridade com esta relação, porque o sucesso em resolver o exemplo, que apresentamos, depende da idéia que adquiriu de como proceder para retirar uma fração de um inteiro. Vê, assim, que o inteiro é transformado em partes fracionárias, das quais retiramos aquelas desejadas.

Tentando, por exemplo, subtrair 3/4 de um inteiro, a criança pensaria: desde que 1 = 4/4; posso retirar 1/4 de 4/4, encontrando ainda 3/4.



Depois de assim preparadas, dá-se uma série de atividades nas quais o inteiro pode ser fracionado para que se retirem as partes desejadas. Com êste conhecimento, o aluno enfrentará, mais seguro, um exemplo, como:

$$\begin{array}{r} 3 \\ -\,1\,\frac{3}{4} \\ \hline ? \end{array}$$

Vamos apresentá-lo dentro de um problema: — Mamãe comprou 3 queijos. Já gastou 1 3/4. Quanto ainda resta?

A professôra planeja sua aula de maneira que a classe aprenda como subtrair em exemplos semelhantes pelo processo da decomposição.

Qual o nosso exemplo?

$$\boxed{\begin{array}{r} 3 \\ -\,1\,\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}}$$

Devo retirar 3/4 de onde? Vamos tomar 1 do número inteiro que temos no minuendo e transformá-lo numa fração, da qual possamos retirar 3/4. Se assim fizermos, quantos inteiros ainda ficarão? Vamos escrever nossas idéias?

$$\begin{array}{r} 3 \\ -\,1\dfrac{3}{4} \\ \hline ? \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\dfrac{4}{4} \\ -\,1\dfrac{3}{4} \\ \hline ? \end{array}$$

Qual o nosso problema agora? Retirar 1 3/4 de 2 4/4. Qual a resposta?

Durante estas experiências, ter-se-á em vista dois objetivos essenciais:

a) — ajudar a criança a descobrir que pode tomar 1 do número inteiro e transformá-lo em fração;

b) — que o 1 deve ser transformado numa fração com o mesmo denominador da fração que compõe o número misto do subtraendo.

Note-se que, em exemplos semelhantes, a habilidade essencial a ser adquirida não é a de subtrair, mas a de conseguir um minuendo, número misto, que possibilite a subtração. Para isso prepara-se, por exemplo, cartões com a subtração indicada. O cartão é mostrado à criança. Pedir-lhe-emos, apenas, que diga com que minuendo havemos de trabalhar para efetuar

a operação. No reverso do material estará escrito a operação com nôvo minuendo para verificação. Outra criança poderá, então, dar o resultado.

$$\begin{array}{r} 2 \\ -\,1\dfrac{1}{5} \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1\dfrac{5}{5} \\ -\,1\dfrac{1}{5} \\ \hline \end{array}$$

À medida que há a aquisição da habilidade e sua conseqüente fixação, haverá possibilidade de respostas mais e mais rápidas.

Algumas crianças ainda sentirão dificuldade em perceber porque é possível modificar a apresentação do minuendo, sem modificar seu valor. Para estas, aconselhamos que a professôra siga a seguinte direção:

a) apresente o problema;

b) peça à criança que coloque no flanelógrafo os 3 inteiros que constituem o minuendo;

c) peça que retire daí

$$1\frac{3}{4};$$

d) ajude a descobrir como retirar 3/4 de inteiros;

e) deixe que tome o círculo inteiro e corte, com a tesoura, os quatro quartos;

f) dê ênfase ao fato de que, sempre que surgir situação semelhante, deve-se tomar um inteiro e fracioná-lo;

g) chame a atenção para o nôvo minuendo do flanelógrafo:

$$2\frac{4}{4};$$

h) indague se houve mudança no valor do minuendo, porque um inteiro foi fracionado;

i) deixe que a criança retire o valor do subtraendo e dê a resposta ao problema inicial;

j) dê outros exemplos para serem trabalhados de maneira semelhante;

l) encaminhe a criança para registrar, com símbolo, os passos que vem seguindo nas atividades no flanelógrafo;

m) peça, quando resolvido o problema com símbolos, que explique o que fêz, para facilitar a fixação do conhecimento.

Generalização.

Depois que a classe demonstra compreender o processo de subtrair um número misto de um número inteiro, a professôra pode motivá-la a formular uma regra que governe êsse tipo de subtração. A professôra dirige a criança nessa atividade, mas nunca impõe a regra pré-formulada.

$$\begin{array}{r} 3 \\ -\,1\frac{3}{4} \\ \hline ? \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\frac{4}{4} \\ -\,1\frac{3}{4} \\ \hline 1\frac{1}{4} \end{array}$$

JÁ SEI COMO FAZER:

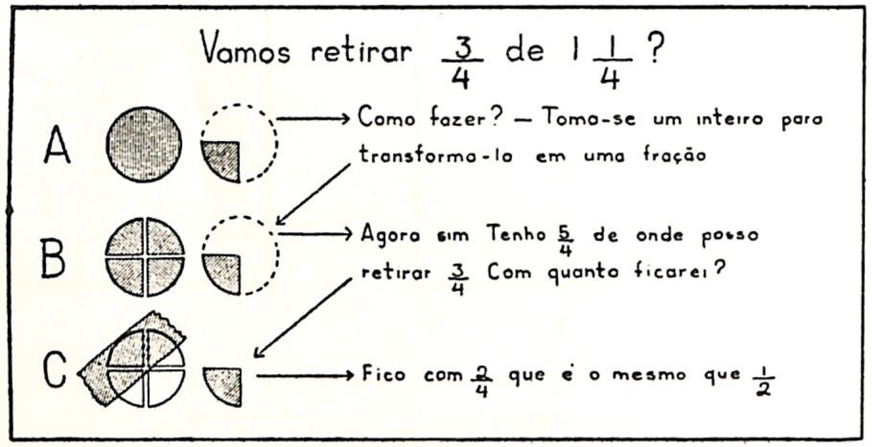
Quando temos que subtrair um número misto de um número inteiro, tomamos 1 dos inteiros para transformá-lo em fração. Assim, podemos efetuar a operação.

5. **Subtrair um número misto de outro, com necessidade de reagrupamento.**

$$\begin{array}{r} 5\frac{1}{4} \\ -\,2\frac{3}{4} \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2\frac{1}{3} \\ -\,1\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

Para evitar muitas dificuldades juntas, leva-se a classe, inicialmente, à discussão de como resolver exemplos como 1 1/4 — 3/4 ou 2 1/5 — 3/5.

Como retirar 3/4 de 1 1/4? Deixemos êsse problema para o aluno resolver. Acreditamos que, com o conhecimento adquirido através das atividades já vividas, consegue encontrar a solução, transformando o 1 do minuendo em 4/4, juntando-os ao 1/4 já existente, conseguindo assim 5/4 de onde poderá retirar 3/4. É importante que se peça a verbalização do processo empregado na busca da solução. Desta maneira terá um meio de avaliar o grau de compreensão da criança e encaminhá-la na aquisição da habilidade e, quando a situação de subtração exija, tomar um inteiro, transformá-lo em partes fracionárias, juntá-las às já existentes, conseguindo um minuendo que possibilite a operação.



Adquirida esta habilidade de tomar o inteiro, fracioná-lo, juntando-o às partes já existentes, apresenta-se então um exemplo mais difícil:

$$
\begin{array}{r}
5\,\frac{1}{4} \\[6pt]
-\;2\,\frac{3}{4}
\end{array}
$$

As perguntas muito auxiliarão a criança a se situar dentro do conteúdo aritmético apresentado pelo problema:

— Qual a fração minuendo?
— O que retiraremos desta fração?
— Onde iniciar esta operação?
— É possível retirar 3/4 de onde apenas temos 1/4?
— Como resolver esta situação?

Esperamos que as atividades preparatórias influenciem a criança a sugerir que se transforme o minuendo 5 1/4 em 4 5/4. Vencida esta dificuldade, resta reorganizar a operação e efetuá-la:

$$
\boxed{\begin{array}{r}
5\,\frac{1}{4} \\[6pt]
-\;2\,\frac{3}{4}
\end{array}}
\qquad
\boxed{\begin{array}{r}
4\,\frac{5}{4} \\[6pt]
-\;2\,\frac{3}{4}
\end{array}}
$$

A criança freqüentemente sente dificuldade nesta transformação, ao reagrupar o minuendo. É por isso que aconselhamos à professôra dar prática neste tipo de trabalho, antes de insistir que o aluno realize o tipo de subtração, que vai exigir esta habilidade.

C. SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES COM DENOMINADORES DIFERENTES.

Até esta fase do ensino, a criança tem aprendido a computar tôdas as espécies de subtração envolvendo frações e frações; números inteiros e frações; números inteiros e números mistos; fração e número misto; número misto e número misto. Tôdas as frações envolvidas, entretanto, têm sempre o mesmo denominador. Depois que aprende os princípios e técnicas para encontrar o denominador comum com o propósito de somar frações diferentes, relacionadas e não relacionadas, pode o aluno aplicar êsses mesmos princípios e técnicas para subtrair frações com denominadores diferentes. Tão mais facilitada será a aprendizagem, quanto maior fôr a relação que a professôra fizer do ensino da adição e subtração.

Vamos apenas alistar dificuldades graduadas sem, entretanto, fazer seguí-las nenhum comentário, certas de que a professôra lançará mão de nossa orientação dada quando do trabalho com adição e certas também de que a criança terá pleno sucesso, porquanto já foi munida dos conhecimentos necessários à resolução de novas dificuldades:

1 — **Subtrair frações com denominadores diferentes, mas relacionados.**

Exemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \qquad \frac{5}{6} - \frac{2}{3} =$$

2 — **Subtrair uma fração de um número misto; denominadores diferentes, mas relacionados.**

Exemplo:

a) $1\frac{3}{16} - \frac{3}{4} =$

b) $4\frac{7}{16} - \frac{3}{8} =$

3 — **Subtrair um número misto de um número misto; denominadores diferentes, mas relacionados.**

Exemplo:

$$5\frac{5}{8} - 2\frac{1}{4} = \qquad 7\frac{3}{10} - 6\frac{2}{5} =$$

4 — **Subtrair fração de fração; fração de número misto, número misto de número misto; denominadores diferentes e não relacionados.**

Exemplo:

$$5\frac{2}{5} - 3\frac{2}{3} = \qquad 7\frac{2}{3} - \frac{3}{10} =$$

Cada uma dessas etapas será cuidadosamente examinada pela professôra, para que possa planejar a introdução da classe na aprendizagem dêsses conhecimentos. A criança pode adquirir uma real compreensão das idéias matemáticas, se partimos de idéias mais simples; se o processo fôr gradual; se se lhe dá o tempo de que necessita, para consolidar sua aprendizagem

e, por fim, se a atitude da professôra favorece o gôsto pela matemática.

Atividades de enriquecimento

Assim chamamos essas atividades, porque serão levadas apenas aos alunos que demonstrarem um maior desenvolvimento na aprendizagem da matemática. Acreditamos que êles podem e devem ter oportunidades de acôrdo com sua capacidade intelectual, da mesma forma que insistimos com a professôra que não force a criança de nível intelectual fraco, com atividades muito abstratas.

Estas atividades de enriquecimento são variadas. Citaremos, aqui, apenas 3:

A. Levar a criança a subtrair números mistos, usando também o processo de transformar os números mistos em frações impróprias.

$$\begin{array}{r} 2\frac{1}{4} \\ -\,1\frac{3}{4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\frac{5}{4} \\ 1\frac{3}{4} \\ \hline \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{r} 2\frac{1}{4} \\ -\,1\frac{3}{4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \frac{9}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \hline \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}$$

B. Levar a criança a verificar a subtração de frações, usando a adição.

Quando a criança entende a relação entre minuendo e subtraendo; subtraendo e resto; resto e minuendo, torna-se fácil à professôra ajudar o aluno a descobrir **porque** e **como** pode verificar a subtração, usando a adição de frações.

Vamos, por exemplo, pedir à criança que faça esta subtração:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} =$$

Obtido o resultado, indaguemos:

— Como poderá você ter certeza de que sua conta está certa? Conhece você um meio de verificar isto?

Esperamos que o aluno tenha possibilidade de transferir conhecimentos já adquiridos quando trabalhou com números inteiros. A professôra prossegue com questões que o auxiliem a ver as relações entre os têrmos da operação:

— Por que somando a fração restante com a fração que você retirou, encontra a fração minuendo? Vamos experimentar se isto sucede sempre?

Assim proporciona-se à criança oportunidade de fixar o conhecimento adquirido, através de diferentes atividades.

C. Levar a criança a descobrir o membro faltoso de uma subtração.

$$\frac{3}{5} - \text{—} = \frac{2}{5} \qquad \text{—} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Quando a classe é bem guiada nesta atividade, sente real prazer em descobrir o membro faltoso na operação em sua forma equacional. Se a princípio tenta resolver a questão por simples contagem, a professôra aceita o processo de trabalho, mas busca encaminhá-la para processos mais maturos. É preciso, então, que a criança determine:

a) — que têrmos estão faltando?

b) — que têrmos conheço?

c) — através dos têrmos conhecidos, como determinar o desconhecido?

d) — por que é possível determinar o desconhecido, pelos conhecidos?

A procura de solução para problemas como êstes leva o aluno a um real trabalho de pensamento e à aquisição de uma atitude matemática desejável.

Capítulo 9

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES

Se se pretende ensinar multiplicação de frações de maneira significativa, teremos à nossa frente uma tarefa bem difícil. Será enormemente facilitada, entretanto, se a professôra, ela própria, através de um estudo minucioso conseguir segurança nos princípios matemáticos que regem o ensino dessa operação.

Alguns princípios da multiplicação de inteiros, já apreendidos pela criança, aqui se aplicam. Muitas vêzes, entretanto, o aluno a quem se ensina à base da compreensão, sente dificuldade em interpretar a resposta de um exemplo de multiplicação de frações. Isto porque sempre que multiplicamos dois números inteiros entre si, o produto será sempre igual a um dos fatôres ou maior que qualquer um dos inteiros. O mesmo não sucede se trabalhamos com as frações. Quando duas frações próprias são multiplicadas entre si, o produto será menor que qualquer uma das frações. Examinemos êste exemplo: $1/2 \times 1/4 = 1/8$. $1/8$ é uma fração menor que $1/4$ ou $1/2$. A tendência da criança, quando encaminhada a pensar na relação entre os têrmos da operação, é admirar-se diante de um fato que, aparentemente, choca-se com o que tem aprendido acêrca do significado da multiplicação.

Um dos problemas essenciais será, então, levá-la a perceber o «porquê» da resposta obtida, bem como compreender «como» a operação está sendo realizada. Isto implicaria, naturalmente, o conhecimento da função dos têrmos da multiplicação, da relação entre êsses têrmos, do significado de uma operação envolvendo frações, bem como do sentido da própria fração.

Etapas de dificuldades

Vamos, em nosso trabalho, apresentar sugestões para a aprendizagem dos seguintes exemplos:

A. Multiplicação de uma fração por um número inteiro. Exemplo:

$$8 \times \frac{1}{4}.$$

B. Multiplicação de um número inteiro por uma fração. Exemplo:

$$\frac{1}{4} \times 8.$$

C. Multiplicação de uma fração por outra fração Exemplo:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

D. Multiplicação envolvendo números mistos. Ex.:

$$2 \times 3\frac{1}{14} \text{ ou } \frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$$

Há uma estreita relação entre as dificuldades A e B, se considerarmos o princípio comutativo que rege a operação. No decurso de nosso estudo, entretanto, veremos que encerram diferentes interpretações. É preciso que a criança a quem se quer dar, realmente, oportunidade de penetração matemática, compreenda estas interpretações, antes que aceite que «a ordem dos fatôres não altera o produto». De fato, $8 \times 1/4$

e $1/4 \times 8$ dar-nos-ão o mesmo produto. Será a situação problemática a mesma? É o que tentaremos explicar, focalizando cada exemplo separadamente.

A. MULTIPLICAÇÃO DE UMA FRAÇÃO POR UM NÚMERO INTEIRO.

a	b	c
$2 \times \frac{1}{3} =$	$4 \times \frac{1}{2} =$	$3 \times \frac{3}{4} =$

A multiplicação de uma fração por um número inteiro é escolhida como o caso mais simples, porque:

a) — o conceito já conhecido de que multiplicar é repetir uma quantidade um determinado número de vêzes é aqui usado, o que possibilita uma apreensão mais rápida da relação entre a multiplicação de frações relacionada à adição. Se se pede, por exemplo, ao aluno a resposta para $3 \times 1/2$, poderá apresentar a seguinte solução:

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

b) — nestes exemplos, o conhecimento que a criança tem de que multiplicar significa aumentar, crescer, não é abruptamente violado, o que facilita a sua predisposição para esta nova fase da aprendizagem.

Quando $1/2$ é repetido 3 vêzes, a resposta $1\ 1/2$ será maior que $1/2$, quantidade com a qual se iniciou o problema.

Como iniciar.

Demos três exemplos: a, b e c, onde surge a multiplicação de fração por inteiro. No exemplo a, a resposta é uma fração própria; no exemplo **b** é um número inteiro e no **c**, um número misto. É uma graduação, mas a professôra perceberá que se houve anterior aquisição da habilidade de expressar a resposta em têrmos mais simples, não haverá grande dificuldade agora.

Quando o aluno, na 2ª série, tenta encontrar solução para questões como:

— Tenho 2 meios litros de leite, quantos litros tenho?
— Comprei 4 retalhos de fita de meio metro cada, quantos metros de fita comprei?

— Se colocarmos 3 vêzes um quarto de círculo no flanelógrafo, quanto terei ao todo?

está efetuando a multiplicação em têrmos concretos, o que constitui uma excelente preparação para o trabalho em nível mais abstrato. Esta preparação torna-se mais sistemática na 3ª série, possibilitando enfrentar, em base sólida, o trabalho final e atingir as generalizações desejáveis.

Não há necessidade de se esperar que a classe vença, formalmente, todos os casos de subtração, para iniciá-la no preparo aos casos mais simples de multiplicação.

Antes de apresentar a multiplicação de maneira simbólica, a criança resolve vários problemas orais, procurando a resposta através do uso do material individual e outros meios concretos.

A professôra dirá, por exemplo:

— Vamos colocar 4 vêzes um meio sôbre a carteira?

— O resultado será maior ou menor que 1 inteiro? Por que você pensa assim?

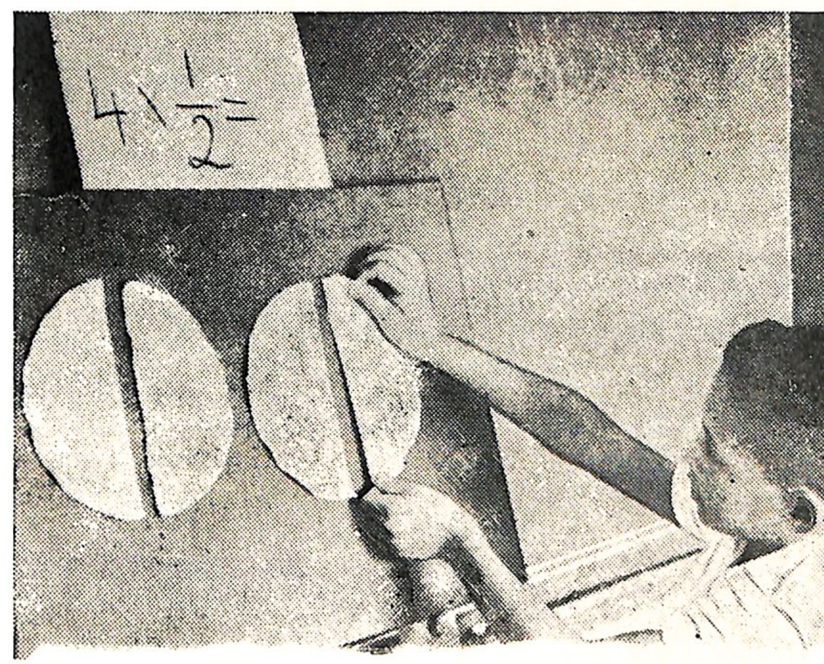
— Vamos procurar o resultado?

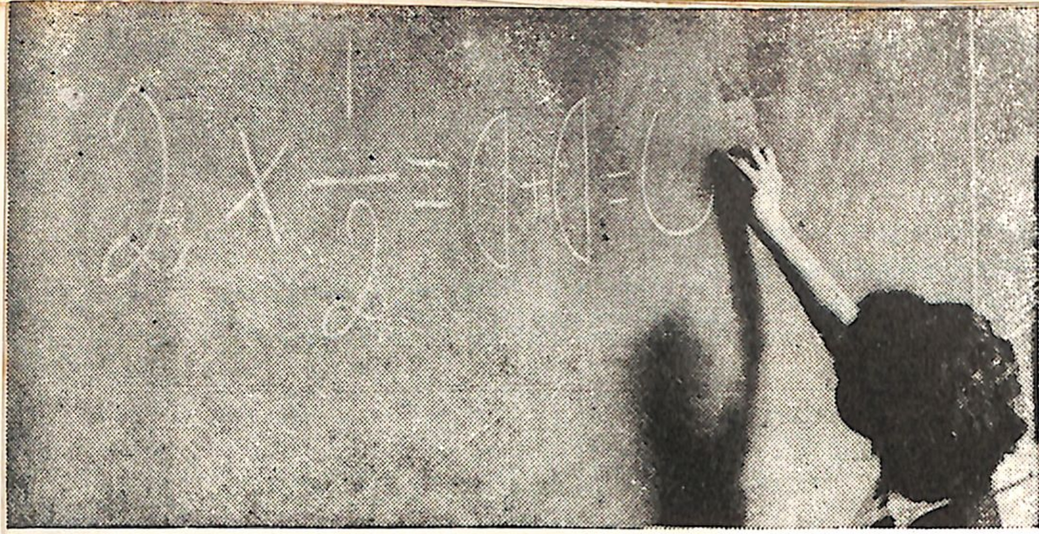
— Que fêz você para encontrá-lo?

Outros problemas virão, dando-se oportunidade para a criança discutir os vários meios de encontrar a resposta como:

a) — **usar o material individual**

b) — usar o flanelógrafo





c) — usar desenhos e diagramas

d) — relacionar com a adição 4 vêzes 1/2 é o mesmo que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

e) — expressar em forma simbólica da multiplicação:

$$4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

É muito fácil conduzir a criança a passar da solução pela adição, à solução pela multiplicação. Apresentada a solução de vários problemas pela adição, a professôra pergunta:

— Como fêz você?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

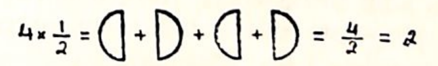
— De que outra maneira poderia dizer?
— O que fêz você com o 1/2?
— Quantas vêzes foi repetido?

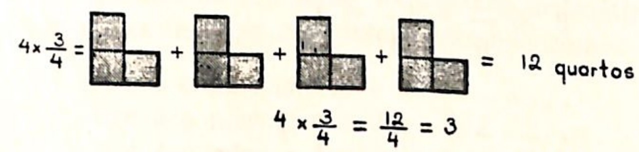
— Então podemos dizer 4 vêzes 1/2 e podemos escrever:

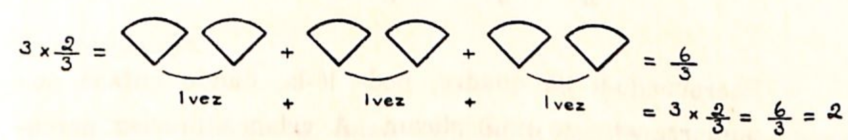
$$4 \times \frac{1}{2}.$$

Organizações das atividades.

Temos aconselhado que se iniciem as atividades usando, como multiplicando, frações unitárias (frações com o numerador 1), passando, depois, às demais frações.







Apreendidos os princípios matemáticos que regem esta seriação de exemplos, há necessidade de se planejar atividades que levem a classe a fixar a aprendizagem e acumular experiências que lhe permitam o trabalho de generalização.

Citaremos algumas atividades que podem ser usadas nesta fase:

a) — Podemos pedir à classe que escreva várias multiplicações, tomando uma fração constante como multiplicando: 1/3 por exemplo. A professôra poderá dar um limite para o total. Dirá: — Façam até encontrar 2 1/3.

Toma, depois, para discussão, várias maneiras usadas nesta organização:

$$1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ etc.}$$

Escrevendo-a no quadro, pode lê-la, dando ênfase aos números que se multiplicam. A criança precisa perceber que apenas o número de partes fica multiplicado e nós conservamos o nome das partes.

b) — A professôra pede a organização de seqüência semelhante, dando, neste caso, o multiplicador como ponto de referência.

Dirá: — Vamos multiplicar várias frações por 3. A

criança organiza, discute sua organização, descobre, então, que o número de partes ficou multiplicado pelo número de vêzes indicado pelo inteiro.

$$3 \times \frac{1}{2}$$

$$3 \times \frac{1}{3}$$

$$3 \times \frac{1}{4} \text{ etc.}$$

c) — Pode-se também pedir que escreva uma combinação que dê determinado produto. Por exemplo: — Escreva aí exemplos de multiplicação, cujo resultado seja 2/3.

d) — As crianças, depois que compreendem determinada relação, gostam de completar expressões aritméticas. Pede-se, assim, que completem algumas como:

3/8 é o mesmo que 3 × ....
6/8 é o mesmo que 2 × ....
3/4 é o mesmo que 3 × ....

Generalização.

Através de tôdas estas atividades repetidas, pretende-se conseguir o trabalho de generalização. A criança já percebeu a relação entre o multiplicando e o multiplicador. A professôra encaminha uma observação sistemática desta relação, até que o aluno componha a regra, que funcionará em todos os casos semelhantes. Nem sempre conseguimos, de princípio, uma linguagem aritmética apurada. É de nossa responsabilidade incentivar a classe para o uso do vocabulário especìficamente aritmético.

Depois que a classe atinge a regra, confecciona-se um cartaz, como coroamento de todo trabalho anterior, permitindo sua consulta sempre que necessário.

Sabe você multiplicar uma fração por um inteiro?

$$3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad 2 \times \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

Esta é a regra que descobrimos:

Multiplique o numerador da fração pelo inteiro e coloque sôbre o denominador da fração dada.

B. MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO INTEIRO POR UMA FRAÇÃO.

(procurar a parte fracionária de um número)
Exemplo:

a	b	c
$\frac{1}{4} \times 12$	$\frac{3}{4} \times 12$	$\frac{1}{2} \times 3$

A demonstração dêste 2º caso (fração × inteiro) é um pouco diferente do 1º (inteiro × fração), embora guardem relações entre si. Neste 2º caso, o aspecto partitivo da fração está claramente em evidência e, conseqüentemente, o processo pode ser considerado como **uma divisão**. Isto reflete um fato muito significativo: quando trabalhamos com as frações, os processos de multiplicação e divisão verdadeiramente se fundem. Multiplicar um número por uma fração unitária produz

o mesmo resultado que dividir o número pelo denominador da fração. Neste caso a idéia de «vêzes» precisa estender-se para cobrir a idéia de «repartir» e, ainda assim, não cessar de ser multiplicação.

Achamos estranho usar a palavra «vêzes» em conexão com a multiplicação de frações. «Quatro vêzes» alguma coisa é fácil de ser percebido, mas considerar «um quarto da vez» exige uma idéia bem mais abstrata. Multiplicar e não aumentar parece inerentemente contraditório. É o que acontece na multiplicação de um número inteiro por uma fração: o produto será sempre menor que o multiplicando.

Tôdas estas considerações são feitas para que a professôra possa iniciar a criança nesta aprendizagem, com a habilidade necessária, conhecendo as dificuldades provenientes de uma relação mais abstrata.

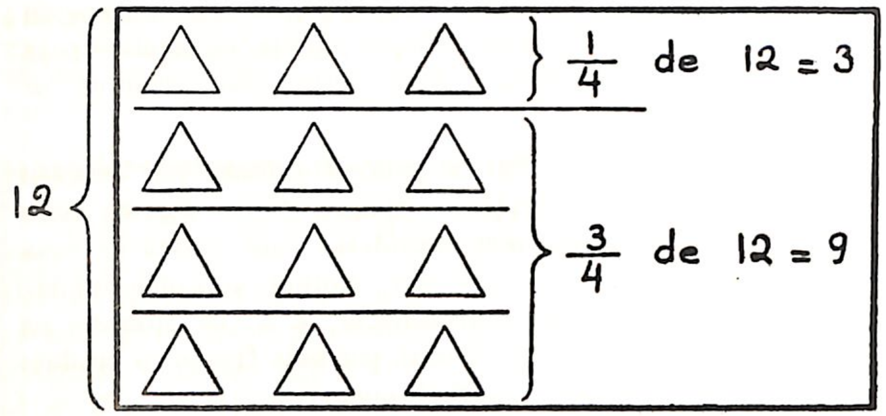
Como iniciar.

$$1/4 \times 12 = ?$$

Usaremos sempre um exemplo mais simples no início. Queremos levar a classe a descobrir que o produto de um número por uma fração é igual à parte fracionária dêsse mesmo número.

A criança já aprendeu, em inúmeras oportunidades anteriores, a achar 1/2 de 12; 1/4 de 20, 1/5 de 60 etc. O objetivo específico será aprender a relacionar êsse conhecimento adquirido, com esta nova situação aritmética. Vamos conduzí-la a usar a expressão «de» na multiplicação de frações.

A criança aprende, diante da expressão 1/4 × 12, a pensar em 1/4 de 12. Uma vez que pensa em 1/4 de 12 conhece como encontrar a solução, porquanto em várias atividades já foi levada a encontrar a parte fracionária de um número. Esta relação pode ser mostrada por meio de desenhos, diagramas e o uso de material concreto:



Muitas crianças são capazes de resolver, inclusive, mentalmente êsses cálculos. O importante para nós é que, lentamente, compreendam a razão pela qual 1/2 de 8 é o mesmo que 8 : 2 ou 1/4 de 12 é o mesmo que 12 : 4. Muitas experiências serão vividas até que, examinando um exemplo como 1/4 × 12, entenda que:

a) — um é 4 vêzes maior que 1/4 e

b) — 1 × 12 = 12; logo

c) — 1/4 × 12 será 4 vêzes menos que 12, donde se conclui

d) — 1/4 × 12 é igual a 12 : 4.

Vencidos os exemplos mais simples, planeja-se atividades com frações, cujos numeradores sejam maiores que 1.

$$\frac{2}{3} \times 15 \qquad\qquad \frac{3}{4} \times 16$$

A criança diante de exemplos tais lerá 2/3 de 15; 3/4 de 16. Aqui há uma excelente oportunidade de desenvolver a habilidade de fazer estimativa da resposta: 2/3 de 15 será

mais ou menos da metade de 15? Como pensou você? A resposta de 3/4 de 16 será muito próxima ou muito longe de 16? Por quê?

A prontidão para situações semelhantes será revelada, se lhe fôr possível perceber, que em 2/3 tenho mais da metade ou que em 3/4 tenho quase um inteiro.

Não é difícil encaminhar a classe na resolução de tais exemplos, quando teve muita experiência no trabalho com as frações de numerador 1. A criança que responde quanto é 1/3 de 90, sem hesitar, fàcilmente raciocinará que 2/3 de 90 serão iguais a 1/3 duas vêzes. Se 1/3 de 90 é 30, 2/3 serão 30 + 30 ou 60.

Finalmente, vamos levar a classe a enfrentar exemplos em que o produto será um número misto:

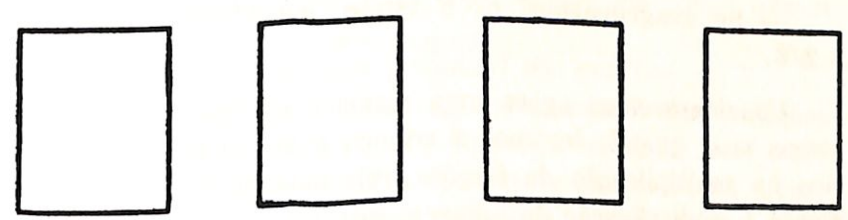
$$\frac{1}{2} \times 7 = \qquad\qquad \frac{2}{3} \times 4 =$$

Vejamos como o aluno pensara sôbre o outro exemplo:

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} = 2\,\frac{2}{3}$$

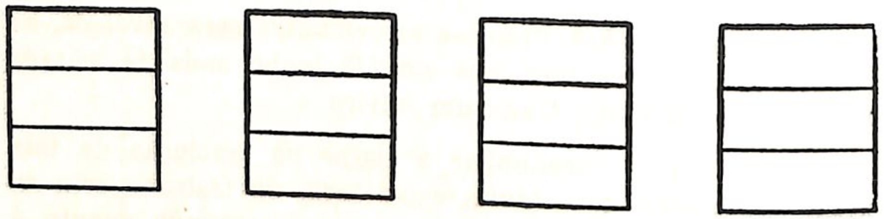
— Por que 8/3 como resultado desta multiplicação?

— Vamos considerar o multiplicando 4.

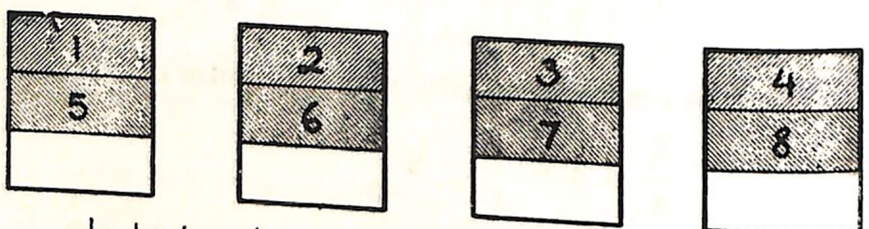


— Os 4 inteiros serão divididos em terços, porque devo considerar terços de 4.

— Assim, vamos dividí-los em 3 partes iguais.



— Quantos terços consideraremos em cada inteiro? 2/3. Considerando 2/3 de 4 inteiros, teremos um total de 8 terços.



$\frac{1}{3}$ de $4 = \frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$ de $4 = \frac{8}{3}$

— Se reagruparmos os 8 terços encontrados, teremos 2 2/3.

Consideraremos agora uma maneira diferente que poderemos usar quando levamos a criança a ver sentido matemático na multiplicação de frações, relacionando-a mais diretamente à multiplicação de números inteiros.

Tomemos o exemplo $1/4 \times 8$.

— Qual é o multiplicando?

— Que função tem numa multiplicação?

— Que quer dizer o multiplicador?

Buscando resposta para esta última pergunta, a criança compreenderá que o 8 será usado não uma vez, mais 1/4 da vez. Encaminhada pela professôra, poderá descobrir as seguintes relações:

— se uso o 8 uma vez, terei o resultado 8
— se uso o 8 a metade da vez, terei 4
— se uso o 8 um quarto da vez, terei 2.

Estas atividades terão um curso lento na compreensão. Envolvem um conceito abstrato e a apreensão de relações difíceis.

A organização e o estudo de uma tabela onde surjam os 2 tipos de multiplicador (inteiro e fracionário) ajuda muito o trabalho de pensamento. Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
8 \times 8 &= 64 \\
4 \times 8 &= 32 \\
2 \times 8 &= 16 \\
1 \times 8 &= 8 \\
1/2 \times 8 &= 4 \\
1/4 \times 8 &= 2 \\
1/8 \times 8 &= 1
\end{aligned}
$$

Examinando tabelas semelhantes, a criança é guiada a observar que:

a) — os multiplicandos são constantes;
b) — lendo de cima para baixo os multiplicadores decrescem num padrão definitivo;
c) — cada multiplicador é 2 vêzes menor em valor que o antecedente;
d) — e o que acontece aos produtos? por quê?

A conclusão final será um coroamento das relações apreendidas para perceber que o número a ser repetido é constante, mas o número de vêzes decresce, o que ocasiona o produto também decrescido numa proporção constante.

Depois que o aluno tem oportunidade de ver, estudar e examinar tabelas semelhantes poderá, êle mesmo, organizar outras.

Organizações das atividades.

Segundo nossas observações, muitas professôras realizam um excelente trabalho na introdução de um nôvo conhecimento, mas tentam muito depressa levar o aluno à resolução mecânica de exemplos, envolvendo aquêle conhecimento. Necessitamos, antes disto, organizar uma riqueza de atividades através das quais a compreensão se firme e a fixação se faça naturalmente, evitando o fracasso. É preciso que a criança tenha inúmeras oportunidades de viver o conhecimento adquirido, para que possa também atingir algumas generalizações.

Citaremos várias atividades, certas de que a professôra enriquecerá nossas sugestões:

a) — A professôra pode, por exemplo, pedir à criança que dê o resultado de:

1/5 de 20 —
2/5 de 20 —
3/5 de 20 —
4/5 de 20 —
5/5 de 20 —

Diante dos resultados, pedirá que o aluno explique como os atingiu.

b) — A professôra pede que organize uma tabela em que apareçam todos **os quartos** de 16. A criança escreve:

$1/4 \times 16 =$
$2/4 \times 16 =$
$3/4 \times 16 =$
$4/4 \times 16 =$

Diante dos resultados surgirão questões como:

— Com que fração trabalhou você para encontrar a metade de 16? Por que?

— Com que fração trabalhou você para encontrar todo o número? Por que?

c) — A professôra coloca no quadro vários exemplos:

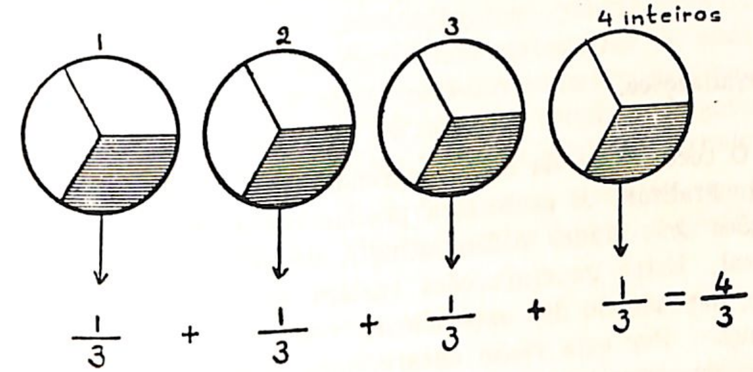
$2/3 \times 15$ $\quad 4/7 \times 21$ $\quad 3/4 \times 24$
$1/5 \times 20$ $\quad 1/4 \times 24$ $\quad 3/5 \times 40$

Pede à criança que assinale os exemplos, cujas respostas serão mais que a metade do número. Indaga, depois, «como» foi possível descobrir isto sem efetuar a operação.

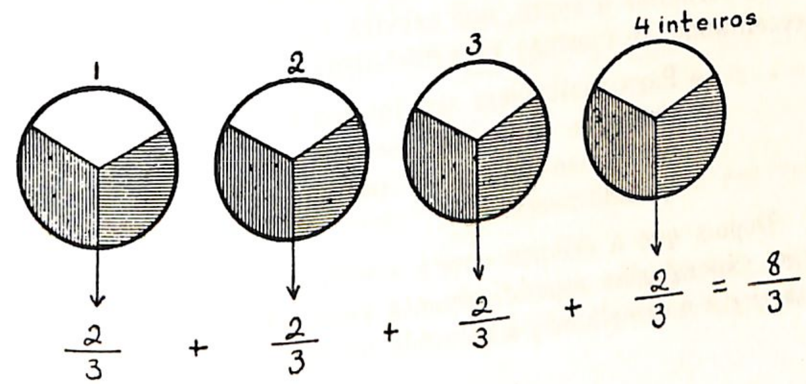
d) — A professôra pede à classe que ilustre, com desenho, exemplos como:

$1/3 \times 4 = 4/3$
$2/3 \times 4 = 8/3$
$3/3 \times 4 = 12/3$

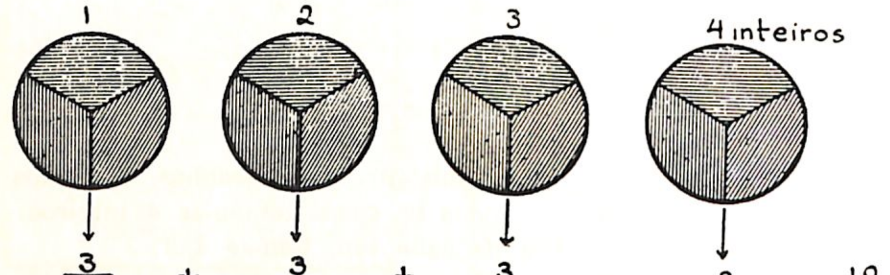
Quando a criança tenta ilustrar, com desenhos, exemplos semelhantes, vê que, em todos os casos tomou-se 4 inteiros. Ora, se se considera 1/3 de cada um, tem-se 4/3:



Se se considera 2/3 de cada inteiro, tem-se 8/3.



Se se considera 3/3 de cada, tem-se um total de 12/3 que, reagrupados, formarão os 4 inteiros iniciais.



$$\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = \frac{12}{3}$$

Generalizações.

O coroamento de tôda a aprendizagem reside no processo de generalizar. A professôra precisa conhecer a que generalizações seus alunos podem atingir, de acôrdo com seu nível mental. Estas generalizações variam em nível de profundidade, dependendo das experiências vividas e nível mental das crianças. Por esta razão encarecemos a importância das experiências organizadas com um fim específico.

Depois que o aluno atinge a compreensão do significado dêsse tipo de multiplicação, a professôra encaminha-o no sentido de formular a regra, que servirá para todos os exemplos, apresentando as mesmas características:

— Para multiplicar um inteiro por uma fração, multiplica-se o inteiro pelo numerador da fração, dividindo-se depois o produto pelo denominador, quando necessário.

Depois que a criança chega a esta conclusão pode-se planejar experiências especìficamente para que o aluno veja que esta regra é semelhante à atingida no estudo do caso anterior.

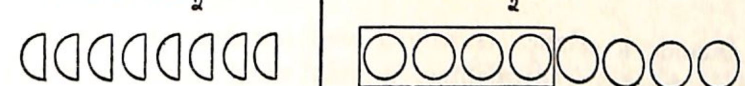
Dois cartazes serão, por fim, levados à frente da classe, para comparação das verdades aritméticas atingidas e fixação da relação apreendida:

Multiplicação de uma fração por inteiro	Multiplicação de um inteiro por uma fração
$8 \times \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$	$\frac{1}{2} \times 8 = \frac{8}{2} =$

Desta maneira, a criança poderá atingir uma regra única, aplicando o princípio de comutação, mas quando questionada, explicará a diferença no significado matemático de cada um dos exemplos. Será de muito proveito recordar que, também no estudo da multiplicação de números inteiros, chegaram à conclusão de que «a ordem dos fatôres não altera o produto».

Ainda buscando relacionar os 2 casos estudados, ao mesmo tempo que mostrar a diferença entre ambos, a professôra confecciona um cartaz como:

Isto é $8 \times \frac{1}{2}$: | Isto é $\frac{1}{2} \times 8$:



Multiplicando o numerador da fração pelo inteiro e dividindo pelo denominador — ou — multiplicando o inteiro pelo numerador da fração e dividindo pelo numerador,

obtem-se o mesmo produto.

Outras generalizações a que as crianças chegarão ao final do estudo, citaremos aqui, certas de que a professôra promo-

verá atividades adequadas, para que a aprendizagem seja, realmente, resultado de um trabalho ativo do pensamento e não mera recitação memorizada:

1 — podemos usar a expressão «de», quando multiplicamos um inteiro por uma fração;

2 — quando multiplicamos o inteiro por uma fração, o produto será sempre menor que o inteiro.

Acreditamos que a classe assim conduzida, vencendo paulatinamente todos êsses conhecimentos, prepara-se, formando base indispensável para enfrentar com sucesso a aprendizagem da multiplicação de uma fração por outra fração.

C. MULTIPLICAÇÃO DE UMA FRAÇÃO POR OUTRA FRAÇÃO.

a	b	c	d
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$

Não há, na infância, realmente, necessidade social de resolver problemas envolvendo a multiplicação de uma fração por outra. Acreditamos, entretanto, que êste aspecto envolve relações numéricas que realmente poderão estimular e motivar o aluno, se selecionarmos as atividades eficazmente e prepararmos bem a classe para vencê-las.

Quando a criança trabalhou com o material para descobrir as frações equivalentes, muitas vêzes usou expressões como: 1/2 de 1/2 é 1/4; 1/2 de 1/4 é 1/8 etc.

Diante da vasilha de 1/4 de litro, descobriu que 1/4 do litro é a metade da metade. Será, naturalmente, seguindo esta linha de atividades que iniciaremos o ensino, de maneira que o produto encontrado seja significativo e não o resultado de um processo mecânico.

Em aprendizagens anteriores, a criança adquiriu conhecimentos que serão de suma importância nesse nôvo estudo.

O fato de já saberem interpretar o multiplicador fracionário e de usarem a expressão «de» na multiplicação de frações facilitará, em grande parte, a nossa nova tarefa.

Como iniciar.

Partindo dos conhecimentos adquiridos incidentalmente a professôra agora, intencionalmente, leva a criança a resolver problemas orais com os casos mais fáceis de multiplicação de uma fração por outra fração.

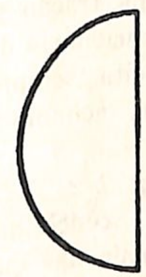
Usa, depois, partes fracionárias (material individual), diagramas e desenhos, a fim de que o aluno veja a relação entre conhecimentos já adquiridos e a multiplicação de frações.

A professôra diz, por exemplo:

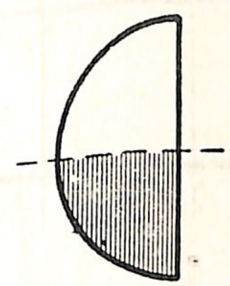
— Quanto é a metade da metade?

A criança, usando o material, encontrará fàcilmente a resposta: — um quarto.

Examinando um desenho verá a metade:



A professôra pede, então, que marque a metade da metade.



Pela contínua experiência com o material concreto, o aluno reconhecerá logo o resultado da operação, ou seja, **um quarto**.

Outras questões virão:

— Vamos procurar 1/3 de 1/2? e 1/4 de 1/2

— Vamos procurar 1/2 de 1/4?

Tôdas as primeiras experiências limitar-se-ão às frações unitárias. Desde o início a criança observa que a fração encontrada é sempre menor que a fração que se tomou, para dela tirar-se uma parte fracionária.

O aluno, com certa facilidade, verá a relação entre:

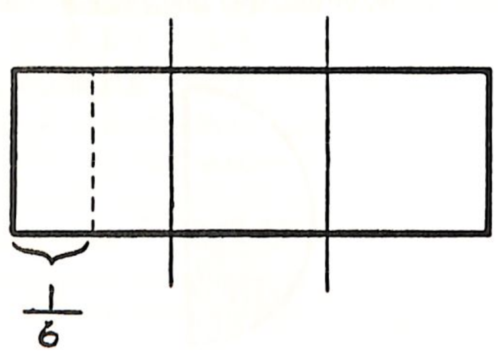
1/2 de 1/2 e 1/2 × 1/2
1/2 de 1/3 e 1/2 × 1/3

Pode-se ainda, nesta etapa do trabalho, apresentar um exemplo como: 1/2 × 1/4 e encaminhar o pensamento com questões como:

a) — qual é o multiplicando?
b) — quantas vêzes vou repetí-lo?
c) — o produto será maior ou menor que o multiplicando?
d) — por que?

A multiplicação de uma fração por outra é interpretada como a procura da parte fracionária de uma fração. Conforme referência anteriormente feita, sempre que buscamos a parte fracionária de alguma coisa, achamo-nos envolvidas num processo de divisão.

Vejamos êste exemplo: 1/2 × 1/3 = ... Podemos interpretá-lo como 1/2 de 1/3, concluindo que o que se nos pede é uma das duas partes iguais nas quais 1/3 será dividido.

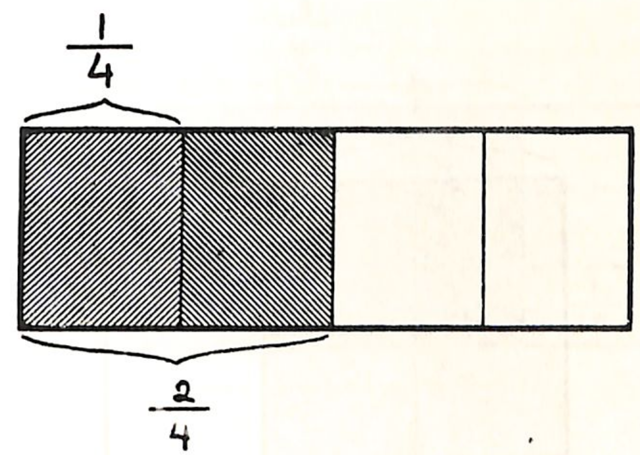


Realmente, os processos de multiplicação e divisão de frações se fundem. Não conseguiríamos justificar o primeiro sem conceitos inerentes ao segundo.

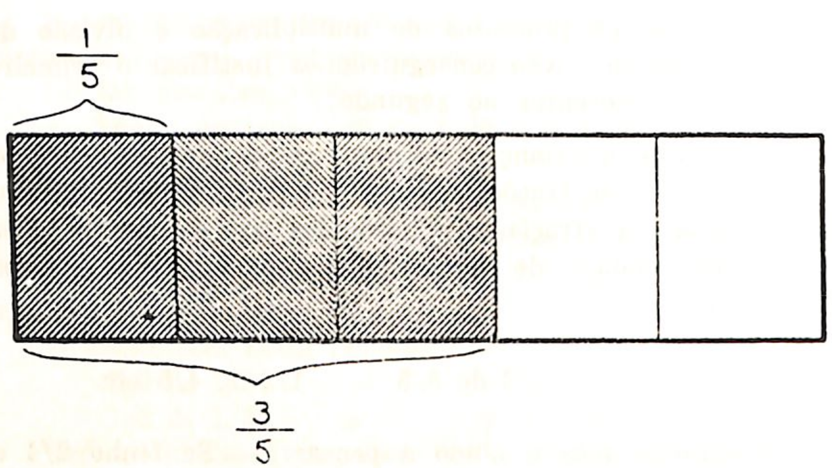
Depois que a criança trabalha, usando vários exemplos de multiplicação de frações unitárias, a professôra usa exemplos nos quais a «fração multiplicando» não é unitária, mas oferece possibilidade de ser dividida sem envolver relações mais difíceis:

1/2 × 2/4 1/3 de 3/5 1/2 × 4/5 etc.

Encaminharemos o aluno a pensar: — Se tenho 2/4 e desejo apenas a metade desta fração, terei 1/4, pois a metade de 2 é 1.



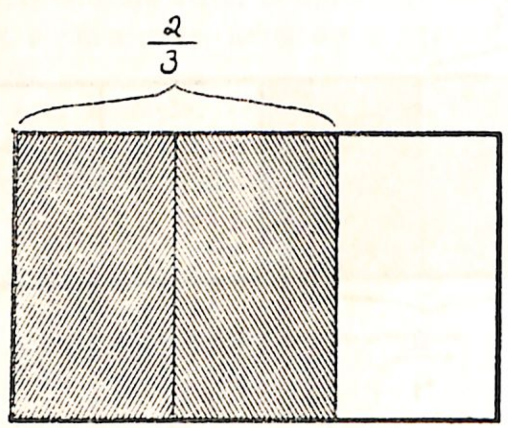
— Se tenho 3/5 e desejo a terça parte desta fração, terei 1/5, pois um têrço de 3 é 1.



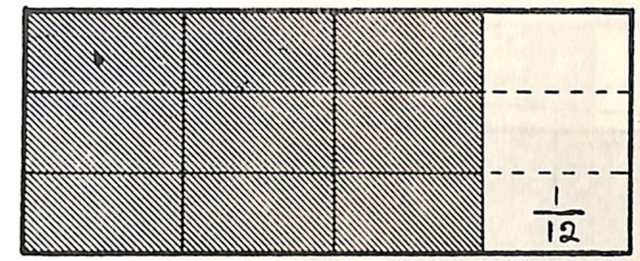
Por fim introduziremos exemplos mais difíceis, exigindo um pensamento bem mais abstrato.

$$2/3 \times 3/4 = ?$$

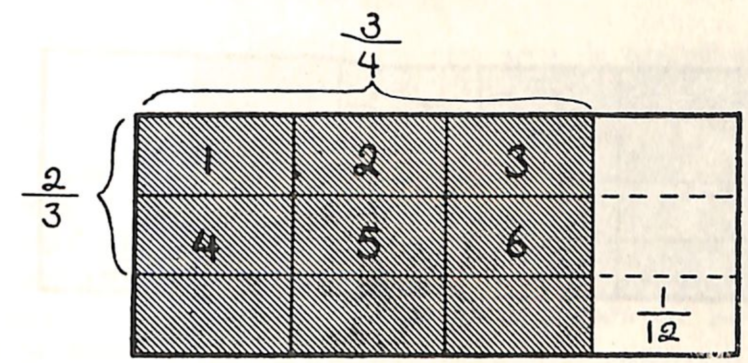
Vamos pedir que o aluno considere o multiplicando por meio de um desenho.



Peçamô-lo, em seguida, que descubra um modo de tomar 2/3 dêsses 3/4; isto significa, naturalmente, tomar 2/3 de cada 1/4. Ora, para que isto aconteça, os quartos serão divididos em terços.

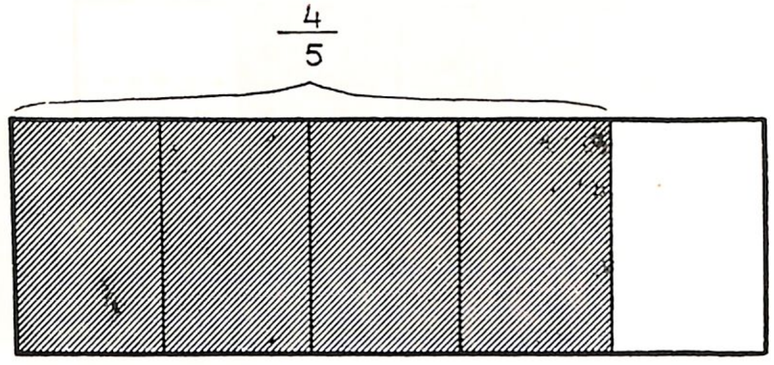


Com esta ação consegue-se que, cada parte obtida seja 1/12. O problema inicial pede que se tome, de cada quarto, 2/3, ou seja, 2/12. Sendo 3, os quartos considerados, terei um total de 6/12 ou 1/2.

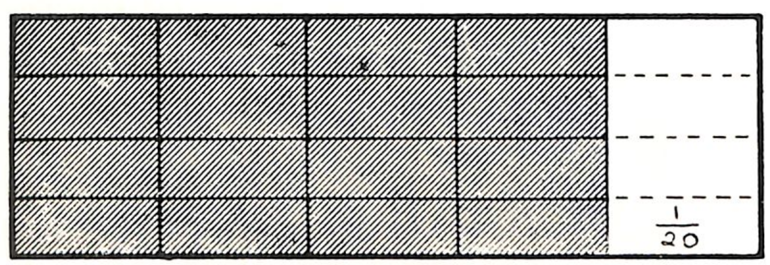


Vejamos outro exemplo: $3/4 \times 5$.

Designemos o multiplicando: 4/5

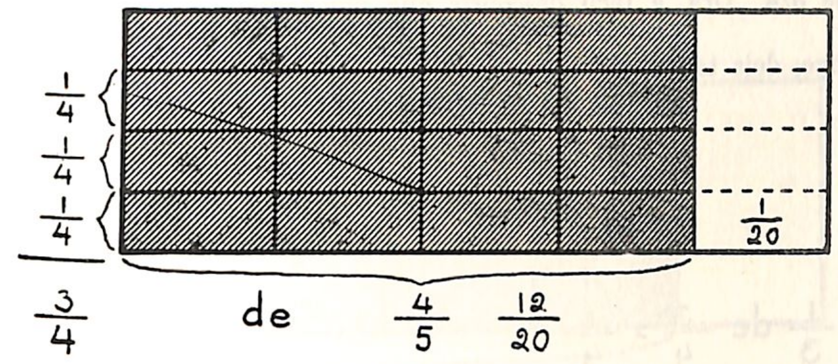


Pensemos como obter 3/4 dessa fração. Naturalmente teremos que dividir cada quinto em quartos, ou seja, em 4 partes iguais:



Cada parte será então 1/20, porquanto todo o inteiro ficou dividido.

Voltemos ao problema inicial 3/4 de 4/5. Olhemos, agora os 4/5 e consideremos os 3/4 dêles. Encontraremos 12/20 ou 3/5.



O raciocínio processa-se, naturalmente, por etapas. Se eu quero quartos de quintos, terei os quintos transformados em 20 avos.

1/4 de 16/20 são 4/20
2/4 de 16/20 são 8/20
3/4 de 16/20 são 12/20

A professôra insistirá em uma série de multiplicações, deixando que, em todos os exemplos, a criança busque a solução usando diagramas.

Durante qualquer aula de aritmética, entretanto, encontramos alunos que sempre respondem mais depressa, porque usaram processos mais rápidos, dada sua maior habilidade matemática. O professor perspicaz segue o pensamento da criança, a fim de conhecer sua dinâmica, para ser possível favorecê-la.

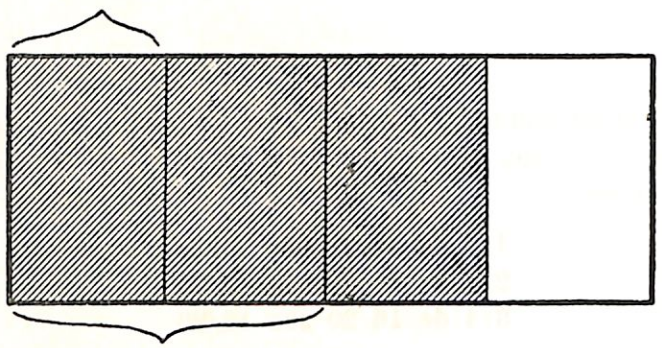
Os dois exemplos anteriormente apresentados foram, com relativa facilidade, solucionados por poucos alunos nossos, num nível de relações abstratas, da seguinte maneira:

1º exemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = ?$$

— Quero saber que fração resulta quando procuro 2/3 de 3/4. Ora, é fácil descobrir que um terço de 3/4 é 1/4 logo, dois terços serão 2/4 ou 1/2.

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$



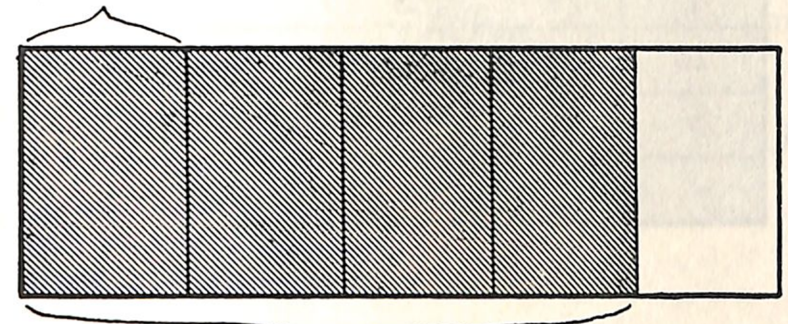
$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2º exemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = ?$$

— Quero saber que fração resulta quando procuro 3/4 de 4/5. Ora, 1/4 de 4/5 é 1/5, logo três quartos serão 3/5.

$$\frac{1}{4} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$



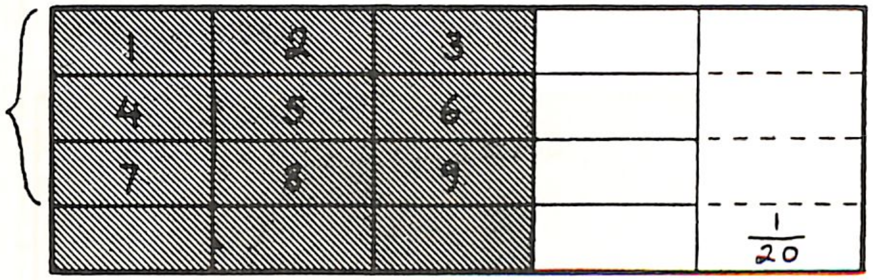
$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

É da responsabilidade do professor encarar o problema de ajustamento de conteúdo, tanto quanto do processo de ensino e material, para responder a estas diferenças. Os alunos de maior capacidade e penetração matemática devem ser encorajados a operar em níveis mais altos de abstração. Descobrir, explorar e estimular interêsses, aptidões e potencialidades dos alunos no campo da matemática é da responsabilidade do professor, tanto quanto programar atividades que estejam de acôrdo com os mais fracos.

Nem todos os exemplos de multiplicação poderão ser resolvidos através do exame da relação entre a parte fracionária que se deseja e o número de partes considerado. Quando a criança encontra uma questão com esta dificuldade, descobre que o caminho seguido anteriormente não lhe é favorável, procurando então nôvo processo de solução.

Exemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = ?$$



Examinando o exemplo dado, a criança verificará não ser fácil descobrir 3/4 de 3/5 a não ser que consideremos os 3/5 divididos em quartos para, finalmente, focalizarmos três dêsses quartos que são 3/20.

Após um número variado de atividades, em que a criança usa diferentes processos para encontrar a solução, encaminhamo-la para o registro simbólico de suas experiências, quando não necessitar de meios mais concretos. Esperamos, então, ter fornecido experiência bastante que lhe permita explicar, com relativa facilidade, porque os denominadores e numeradores são multiplicados entre si.

Mesmo depois que a criança atinge a fase abstrata, constitui boa técnica pedir-lhe, de quando em vez, depois da resolução de um exemplo, que explique, através de um desenho, como conseguiu aquêle produto, ou o que significa realmente aquêle produto. É uma oportunidade que se lhe dá de aprofundar num pensamento abstrato e usar a linguagem adequada para exprimí-lo.

Organização das atividades.

Muitas são as atividades que serão vividas no processo de aprendizagem, antes do uso automático apenas da regra da multiplicação de frações.

Pela repetição da mesma relação em situações diferentes

é que a criança vê que existe algo de comum em tôdas as experiências vividas.

a) — A professôra pode, por exemplo, dar esta série para ser resolvida:

$1/2 \times 1/2 =$
$1/2 \times 1/3 =$
$1/2 \times 1/4 =$
$1/2 \times 1/5 =$
$1/2 \times 1/6 =$
$1/2 \times 1/7 =$
$1/2 \times 1/8 =$
$1/2 \times 1/9 =$
$1/2 \times 1/10 =$

A criança resolve procurando a resposta por meio de desenho. A professôra, então, conduz seu pensamento na descoberta da relação entre o denominador da fração produto e o denominador da fração multiplicando. Por que o produto teve sempre uma fração, cujo denominador foi o dôbro do denominador da fração que consideramos para repetir?

Por que o produto é uma fração menor que aquela multiplicada?

Quando as atividades são em número suficiente, a criança sente um real prazer em dar resposta a questões semelhantes.

b) — Nova série poderá ser dada, tomando-se, então, 1/3 de várias frações. Por exemplo:

$1/3 \times 1/2 =$
$1/3 \times 1/3 =$
$1/3 \times 1/4 =$
$1/3 \times 1/5 =$
$1/3 \times 1/6 =$
$1/3 \times 1/7 =$ etc.

A professôra também aqui deixa, se necessário, que a criança procure a solução através de algum meio concreto e, depois, propõe as questões:

Por que quando procuramos têrço de meio, encontramos sexto?

Por que quando procuramos têrço de têrço encontramos nono?

Por que encontramos 12 avos quando buscamos têrço de quarto?

Da professôra exige-se muita habilidade na maneira de conduzir o raciocínio do aluno para descobrir tais relações.

c) — Numa seqüência natural de dificuldades, a professôra passa, então, a uma outra série:

$$2/3 \times 1/2 =$$
$$2/3 \times 1/3 =$$
$$2/3 \times 1/4 =$$
$$2/3 \times 1/5 =$$
$$2/3 \times 1/6 = \text{etc.}$$

Nas atividades anteriores o aluno teve sua atenção sempre voltada para o denominador das frações. Agora considerará também seus numeradores.

Por que a resposta vem em sextos no 1º exemplo? Por que encontramos 2/6? Por que encontramos 2/9 no segundo exemplo?

Pelas experiências ricas e variadas que a criança teve, aprendeu porque os denominadores são multiplicados. Será agora dirigida a descobrir que também os numeradores o são, devendo saber explicar «porque» o são.

d) — A professôra poderá também apresentar à classe, de maneira rápida, cartões com multiplicações indicadas. A criança dirá, por exemplo, ràpidamente, apenas qual será o denominador da fração produto.

e) — A professôra poderá planejar atividades para a criança descobrir que, nestes casos, «a ordem dos fatôres não altera o produto». Pede ao aluno que mostre, por diagrama, a solução para:

$1/3 \times 1/2 =$ e $1/2 \times 1/3$

$1/2 \times 1/4 =$ e $1/4 \times 1/2$

$1/3 \times 1/4 =$ e $1/4 \times 1/3$

O aluno descobre que, embora as situações matemáticas encerrem sentidos diferentes, o resultado será o mesmo em ambas as multiplicações.

f) — Pode-se, ainda, dar à classe uma fração como sendo o produto de 2 outras que foram multiplicadas entre si. Pedir que escrevam as frações.

Generalização.

A criança é introduzida no processo de multiplicação de frações de maneira que a compreensão fique garantida e que tenha sempre recursos para explicar a razão matemática de uma resposta encontrada. Depois dar-se-lhe-á oportunidade de realizar atividades constantes, através das quais poderá descobrir relações e adquirir uma compreensão cada vez mais profunda do processo.

À proporção que a criança realiza estas atividades, organizadas visando um fim específico, realiza-se um trabalho de direção intencional, para que possa atingir generalizações inerentes às experiências vividas.

Como cooramento de todo êsse processo de aquisição do conhecimento, desejamos que descubram e verbalizem as seguintes generalizações:

1 — O produto de duas frações é sempre menor que qualquer das frações multiplicadas.

2 — A ordem dos fatôres fracionários não altera o produto.

3 — Quando vamos multiplicar duas frações, multiplicamos os numeradores e denominadores entre si, encontrando assim a fração produto.

D. MULTIPLICAÇÃO ENVOLVENDO NÚMERO MISTO.

a	b	c
$3 \times 3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$

É possível efetuar a multiplicação envolvendo número misto, usando 2 processos:

1 — Expressar o número misto em fração imprópria e efetuar a operação, recaindo em um caso já estudado:

$$3 \times 3 \frac{1}{4} = 3 \times \frac{13}{4} = \frac{39}{4} = 9 \frac{3}{4}$$

2 — Multiplicar a fração pelo inteiro, depois multiplicar o inteiro pelo inteiro, somando por fim os 2 produtos parciais:

$$3 \times 3 \frac{1}{4} = 3 \left(3 + \frac{1}{4}\right) = (3 \times 3) + \left(3 \times \frac{1}{4}\right) = 9 \frac{3}{4}$$

ou

$$\begin{array}{rl} 3 \frac{1}{4} & \\ \times 3 & \\ \hline \frac{3}{4} & \left(3 \times \frac{1}{4}\right) \\ 9 & (3 \times 3) \\ \hline 9 \frac{3}{4} & \end{array}$$

Achamos vantagens em ambos: Se o número misto tem um inteiro muito alto, achamos que o 2º processo torna-se mais fácil, porque leva a criança a funcionar sempre com números menores diminuindo a possibilidade de êrro. A criança através do uso do 2º processo vê os mesmos princípios usados com números inteiros aqui aplicados.

Não vemos inconveniente em, no início, deixar o aluno resolver o exemplo por ambos, explicar os princípios que regem cada um, escolhendo finalmente aquêle a ser usado com freqüência. A criança que resolve uma situação matemática por diferentes maneiras tem muito maior possibilidade de êxito, e demonstra muito maior capacidade para pensar com os números.

No início deixemos que o aluno busque, com seus próprios recursos, solução para um problema como:

> Uma receita de bôlo pede 3 1/4 xícaras de farinha. Mamãe fêz 3 receitas. Quantas xícaras gastou?

Proposta a questão, a classe procurará resolvê-la por diferentes maneiras, depois de ter tido oportunidade de estimar a resposta. Provàvelmente alguns usarão a adição.

Depois de solucionar, por seus próprios recursos, vários exemplos semelhantes, a professôra leva os alunos a considerar o exemplo em sua forma simbólica:

$$3 \times 3 \frac{1}{4}$$

A interpretação é, aqui, de suma importância para a compreensão do significado matemático.

— Quantas xícaras de farinha mamãe toma de cada vez?
— Quantas vêzes usa esta quantidade?
— Como resolver o problema usando só os números?

O processo mais natural é, sem dúvida, seguido pela criança. Sugere que se multiplique as 3 xícaras por 3 e 1/4 por 3 também.

A professôra, neste ponto, registra, no quadro, o raciocínio exposto.

$$
\begin{array}{r}
3\frac{1}{4} \\
\times\ 3 \\
\hline
9\frac{3}{4}
\end{array}
$$

Novos exemplos serão dados: $6 \times 25\ 3/4 =$

— Qual será o resultado aproximado?

— Como pensar para encontrar o produto efetivo?

— Como resolver êste exemplo?

$$
\begin{array}{rl}
25\frac{3}{4} & \\
\times\ 6 & \\
\hline
4\frac{1}{2} & (6 \times \frac{3}{4}) \\
150 & (6 \times 25) \\
\hline
154\frac{1}{2} &
\end{array}
$$

O que fizemos aqui?

a) — Multiplicamos 3/4 por 6 conseguindo 18/4 que é o mesmo que 4 1/2.

b) — Multiplicamos depois 25 por 6 e conseguimos 150 que colocamos exatamente sob os 4 inteiros já conseguidos.

c) — Somamos, enfim, os 2 produtos parciais e temos o produto total 154 1/2.

À proporção que a classe apreende o significado de cada um dêsses passos, está enfrentando situações problemáticas que virão desenvolver seu raciocínio.

Depois que a professôra julgar que a criança fixou a essência dêsse processo, promove atividades que a leve a transformar o número misto em fração imprópria antes de efetuar a operação.

Vejamos, agora, o outro exemplo:

— Nossa receita de pudim pede 2 1/2 xícaras de leite.

Marta vai fazer a metade da receita. Quanto gastará?

$1/2 \times 2\ 1/2$ ou $1/2$ de $2\ 1/2$

O que pede o nosso problema?

a) — a metade de 1/2 e

b) — a metade de 2 inteiros.

Qual será o resultado?

a) — a metade de $1/2 = 1/4$;

b) — a metade de $2 = 1$;

c) — logo, a metade de $2\ 1/2 = 1\ 1/4$.

Por fim, a criança tentará resolver êste problema:

A receita do bôlo pede 2 1/2 xícaras de açúcar. Vamos fazer 2 1/2 receitas. Quanto gastaremos de açúcar?

Há assim, a estimativa da resposta, a busca da solução pela compreensão da situação problemática, atingindo-se por último a representação abstrata do exemplo:

$$2\ 1/2 \times 2\ 1/2 =$$

$$\begin{array}{r} 2\ 1/2 \\ \times\ 2\ 1/2 \\ \hline 1\ 1/4 \\ 5 \\ \hline 6\ 1/4 \end{array}$$

Como pensamos resolvendo êste exemplo?

a) — Tomando-se a metade de 2 1/2, consegue-se 1 1/4.
b) — Tomando-se duas vêzes 2 1/2, tem-se 5.
c) — Logo, tomando-se 2 1/2, duas vêzes e meia, 6 1/4.

Muitos e variados exemplos serão resolvidos pela classe que vai, por si, descobrindo sempre novas relações, novos caminhos para resolver as questões que lhe são propostas. Em tôdas as oportunidades levá-la-emos a julgar criticamente o resultado obtido, a fim de que adquira a habilidade de examinar a solução.

Capítulo 10

DIVISÃO DE FRAÇÕES

A divisão de frações é considerada a mais difícil das operações. Vários fatôres contribuem para torná-la assim. As racionalizações que se tem pretendido fazer desta operação, em geral, envolvem conceitos muito abstratos, sua lógica se origina diretamente de um arcabouço matemático de princípios e interpretações que raramente são atingidos, com compreensão, por crianças entre 10 e 12 anos de idade.

Por outro lado, a divisão de frações não corresponde ao critério do uso social dos números. Estudos feitos sôbre o «uso e habilidades numéricas por adultos» revelam que esta operação é usada raramente, exceto no exercício de algumas profissões específicas. Certo é que, em suas experiências diárias, a criança não sente necessidade vital de efetuar esta operação.

É também verdade que problemas comuns envolvendo divisão de frações podem usualmente ser resolvidos, e o são, por suas equivalentes decimais.

Tais considerações são feitas com o objetivo de alertar a professôra. Reconhecendo a problemática da situação, a mestra será mais cautelosa no planejamento das atividades de aprendizagem, aceitando que seu aluno irá descobrindo as relações matemáticas, mas com relativa morosidade. Os conceitos a que atingirá apresentarão também uma forma imprecisa, inconsistente, muitas vêzes.

O processo que é intrìnsecamente difícil, pode tornar-se pior se não procuramos racionalizá-lo através de um bom preparo, do uso de diagramas e de uma riqueza de experiências considerável.

Princípios básicos de divisão

Certos princípios básicos de divisão com números inteiros aplicam-se, naturalmente, à divisão com frações. Durante esta aprendizagem terão as crianças oportunidade de rever conceitos já descobertos, estabelecendo relações entre as 2 aprendizagens. Assim verão que:

a) — a divisão é um caminho curto de subtração;
b) — a divisão é o inverso da multiplicação;
c) — pela divisão procura-se o número de vêzes que uma determinada fração está contida em outra; ou
d) — procura-se a fração resultante da divisão de uma fração em partes iguais.

Achamos de suma importância que a criança, ao iniciar o estudo de divisão de frações, tenha um bom conhecimento dêsses princípios básicos. Diríamos mesmo que o ensino teria início com atividades que levassem o aluno a determinar, com segurança, as questões que uma divisão pode requerer.

Examinemos êsses 2 problemas:

a) — Tenho 24 laranjas para repartir por 6 crianças. Quantas laranjas cada criança receberá?
b) — Tenho 24 laranjas e desejo dar 4 laranjas a cada criança. Quantas crianças receberão laranjas?

O primeiro problema encerra uma idéia diferente do segundo, embora ambos sejam resolvidos por um mesmo processo. Dizemos que problemas do 1º tipo encerram uma idéia **de Repartir**. Através dos problemas desta espécie, procuramos repartir um determinado grupo em partes iguais, para conhecer o tamanho, o conteúdo de cada sub-grupo. A resposta é sempre concreta e da mesma espécie do dividendo.

Dizemos que problemas do 2º tipo encerram a idéia de **Medir**. Solucionando-os, buscamos saber quantas vêzes um número está contido em outro. Tomamos o divisor como uma

medida, comparando-o ao dividendo. Dividendo e divisor são da mesma espécie e o quociente é abstrato. Êsses problemas podem ser também resolvidos pela subtração.

A criança que descobre essas idéias estará melhor equipada para explorá-las quando trabalhar em divisão de frações, de acôrdo com a conveniência da situação.

Focalizemos estas idéias, em têrmos de fração:

a) $2 : \frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{2} : 2 =$

Diante da fração a, façamos a pergunta:

— Quantos meios há em 2? ou

— Quantas vêzes 1/2 está contido em 2? (idéia de Medir).

Diante da fração b, indaguemos:

— Se dividirmos um meio em 2 partes iguais, que fração obteremos? (idéia de Repartir).

Inegàvelmente usamos, em cada situação, diferentes questões. Num nível mais abstrato, entretanto, podemos usar ambas as interpretações numa mesma divisão. Um conhecimento tanto quanto possível profundo da matemática, permitir-nos-á selecionar os significados que melhor favoreçam a concretização do ensino, para que o pensamento da criança funcione na descoberta do sentido que todo êsse simbolismo deva ter.

No decurso, então, de todo o ensino da divisão, exploremos as idéias básicas que informam êsse processo, de acôrdo com a situação matemática e a capacidade da classe.

Etapas de dificuldades

Podemos classificar os exemplos de divisão em 3 tipos:

A — Divisão de um inteiro por uma fração.
Exemplo:

$$6 : \frac{3}{4} =$$

B — Divisão de uma fração por um número inteiro.
Exemplo:

$$\frac{1}{4} : 2 =$$

C — Divisão de uma fração por uma fração.
Exemplo:

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} =$$

A. DIVISÃO DE UM INTEIRO POR UMA FRAÇÃO.

a	b	c	d
$1 : \frac{1}{2} =$	$3 : \frac{1}{4} =$	$2 : \frac{2}{3} =$	$2 : \frac{3}{4} =$

Examinando os 4 exemplos apresentados dentro desta classificação, notará o leitor uma seqüência de dificuldades.

Iniciamos o ensino levando a classe a ver que em problemas como:

quantos meios há em 1?
quantos terços há em 1?
quantos sextos há em 1? etc.,

está incluída a idéia de divisão. Em tôdas estas situações, dividimos 1 inteiro em partes iguais para saber quantas dessas partes iguais existem.

Com o 2º exemplo levamos a classe a aprender como dividir um inteiro por uma fração, quando os divisores sejam formados por frações unitárias (frações com o numerador 1).

Logo após, as atividades serão relacionadas às divisões cujos divisores não sejam frações unitárias e o quociente seja um número inteiro.

Por fim, as crianças trabalharão com exemplos em que o quociente seja um número misto.

Como iniciar.

Acreditamos que o aluno, com facilidade, vencerá as divisões dentro do 1º exemplo. Isto servirá de estímulo, de motivação para os exemplos seguintes. Será também a referência a que recorrerá quando se lhe pedir a resposta para a divisão:

$$3 : \frac{1}{4} =$$

Exploraremos a divisão com a pergunta:

— Quantas vêzes 1/4 estará contido em 3?

Com esta questão, pode o aluno prever a ação a ser realizada na busca da resposta. A reação pode ser pronta, quando a professôra indagar:

— Como pensou para achar a resposta?

Julgamos de importância básica esta verbalização do início do processo de aprendizagem. É valioso que a criança nêle se situe, e isto só é possível quando focaliza o problema que deve resolver.

Quando se observa que a classe não resolve a questão por uma generalização prontamente, dar-se-lhe-á oportunidade de descobrir a solução através de meios mais concretos, que já lhe são familiares: material, desenhos, diagramas etc. Fará, ainda, uma série de problemas, como:

Quantas metades de queijo há em 3 queijos?
Quantos meios litros há em 3 litros?
Se eu tiver 3 metros para repartir em pedaços de

meios metros, quantos meios metros obterei?

Marcos comprou 3 quilos de manteiga que vieram em pacotes de meio quilo.

Quantos pacotes recebeu?

A criança de aprendizagem lenta necessita que se lhe dê muita atividade, antes que possa usar processos mais abstratos. A observação da linguagem, quando tenta explicar o caminho seguido na procura da resposta, proporciona-nos oportunidade de avaliar o grau de compreensão e possibilidade de guiá-la na percepção de que estas situações são resolvidas pelo processo formal da divisão.

Fixados êsses conhecimentos básicos, levaríamos o aluno a perceber a relação entre o que vem resolvendo e o símbolo usado na sua representação.

Muitas vêzes, neste momento de unir a idéia ao simbolismo recorremos ao material concreto apenas como meio de mostrar que naquele simbolismo processam-se os mesmos fatos que se processaram no material.

Vamos dar um exemplo:

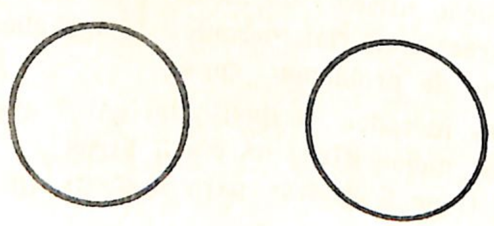
— Repartindo 2 queijos em pedaços de 1/4, quantos pedaços terei?

A criança atinge a solução pelo uso do desenho ou recorrendo apenas à imagem mental já formada. A professôra passa, então, a interpretar o problema, usando conceitos aritméticos mais evoluídos:

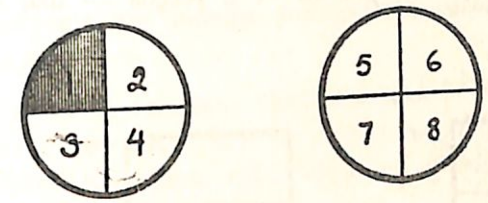
— Que desejamos descobrir neste problema?

— Para sabermos quantas vêzes 1/4 está contido em 2, que operação faremos?

Que vamos dividir?



— Se dividirmos 2 em quartos, quantas vêzes teremos 1/4?



— Vamos fazer a operação?

$$2 : \frac{1}{4} = 8$$

Alguns problemas com esta orientação serão dados, possibilitando a aquisição da habilidade de usar o simbolismo com sentido.

A criança, conforme vimos, resolve problemas semelhantes, em têrmos de multiplicação. Poderá dizer, por exemplo: — Em um queijo tenho 4 vêzes um quarto. Em 2 queijos terei 2 vêzes 4, ou sejam, 8.

É bom que se ressalte e se dê ênfase a tal raciocínio. Isto ajudará o aluno a coordenar a estreita relação existente entre as 2 operações, preparando-o para perceber o «porquê» se multiplica o dividendo pelo denominador da fração divisora.

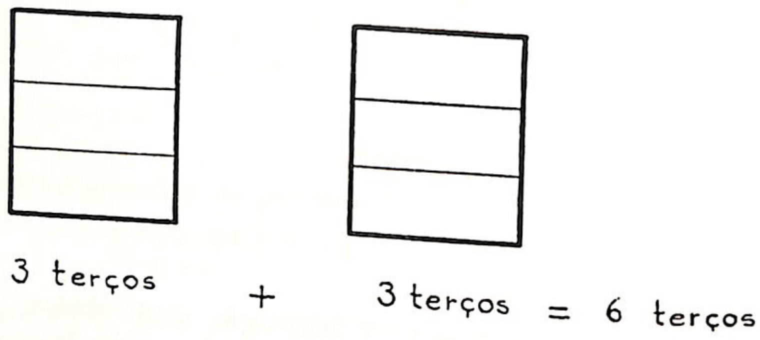
Em tôdas estas atividades iniciantes usamos, apenas, como divisor, as frações unitárias. Depois que a classe estiver bem familiarizada com tais exemplos, usaremos as divisões em que o divisor não é uma fração unitária e o quociente é um número inteiro. Exemplo:

$$2 : \frac{2}{3} =$$

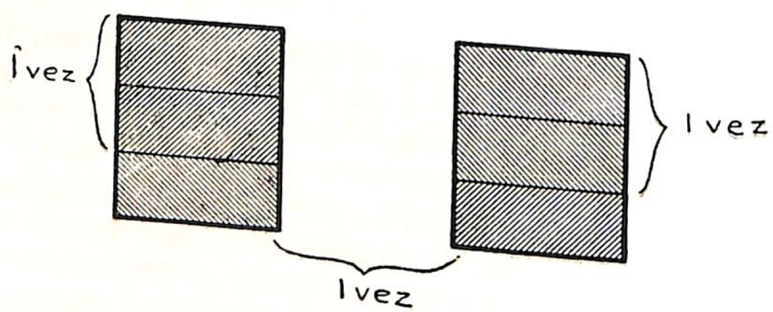
— Que pergunta nos faz tal exemplo?

— Quantas vêzes 2/3 estão contidos em 2 inteiros?

Deixemos que a criança pense e encaminhemô-la para perceber que, de início, precisamos saber quantos têrços teremos em 2 inteiros. Se em cada inteiro há 3 têrços em 2 inteiros há, justamente, 6 têrços (2 × 3 têrços — uso da multiplicação).



Nosso problema, tem agora, a sua segunda etapa: num total de 6 têrços, quantas vêzes temos 2/3?



$$\frac{6}{3} : \frac{2}{3} = 3$$

Que significado terá êste 3? A criança é, assim, levada a perceber que êste 3 significa o número de vêzes em que 2/3 estão contidos em 6/3.

Vejamos outro exemplo:

— **Preciso repartir 6 queijos em pedaços de 3/4. Quantos pedaços obterei?**

O problema nos indaga, justamente, quantos 3/4 teremos em 6 queijos.

Que possível resposta encontraremos? Esta oportunidade de estimar o quociente, leva a criança a raciocinar: «Em cada queijo temos 3/4 uma vez. Teremos, portanto, no mínimo 6 vêzes 3/4.

Como solucioná-lo? Se em cada inteiro temos 4 quartos em 6 inteiros teremos 6 ×4 quartos, ou sejam, 24 quartos.

O primeiro passo de nosso raciocínio está feito (uso da multiplicação).

Se eu uso 3/4 de cada vez em 24 quartos eu terei 8 vêzes 3/4, ou seja, 24 : 3 = 8 (uso de uma divisão). Que significa o 8 encontrado? 8 vêzes 3/4.

Novos e novos exercícios serão dados, para que o aluno vá percebendo, sem lhe ser dito, que o inteiro é multiplicado pelo denominador e dividido pelo numerador. Quando a verdade aritmética é assim descoberta, a criança saberá sempre o «porquê» de cada passo que efetua. Por outro lado, nesta relação entra, lentamente, em contato com o «processo de inversão».

Por fim, introduziremos um exemplo mais difícil:

$$2 : \frac{3}{4} =$$

A interpretação do quociente de exemplos semelhantes exigirá uma riqueza de experiências muito grande por causa de seu nível maior de abstração. A professôra deverá estar bem preparada para encaminhar, com sucesso, o pensamento nesta interpretação.

Já pelas atividades vividas anteriormente, a criança estará preparada para iniciar, sem grande dificuldade, a interpretação do exemplo apresentado:

$$2 : \frac{3}{4} =$$

— Quantas vêzes 3/4 estarão contidos em 2 inteiros?

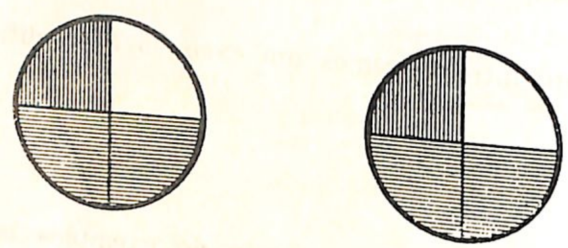
— Vamos estimar a resposta? Será mais ou menos de 2?

Diante dêste problema esperamos que o aluno possa, de algum modo, atingir a seguinte conclusão: — São 2 inteiros. Em cada inteiro há 3/4, portanto, há 2 vêzes 3/4 e ainda há um resto: 2/4

Que representará êste resto em relação ao divisor? É a resposta desta pergunta que tem ocasionado certa dificuldade a muitas professôras que, assim, não conseguem dirigir a aprendizagem com êxito.

Que representará êste resto do dividendo, em relação ao divisor? Vamos procurar a solução através do desenho.

$$2 : \frac{3}{4} =$$



São 8 quartos (2 × 4) que serão repartidos em grupos de 3/4 (8 : 3), ressaltando, como resposta, 2, com 2/4 restantes. Que sentido terá êste resto em relação ao divisor 3/4? Vejamos a medida tomada, ou seja, 3/4.

Esta medida é uma unidade em si, dividida em 3 partes. Se comparamos os 2/4 com esta unidade, concluímos que 2/4 são, justamente, 2/3 dos 3/4, razão pela qual para o problema 2 : 3/4, temos a resposta completa 2 2/3.

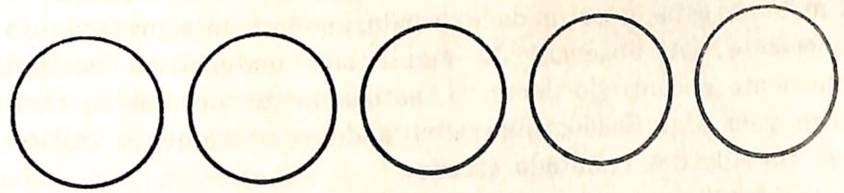
Podemos concretizar nossa-idéia usando a própria divisão:

$$\begin{array}{l|l} 8 \text{ quartos} & 3 \text{ quartos} \\ \hline 2 & 2\,\frac{2}{3} \end{array}$$

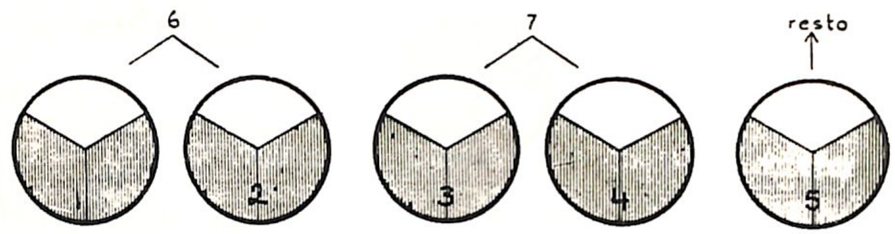
Sempre que há um resto em divisão, êle constituirá parte integrante do quociente, como numerador de uma fração que terá, como denominador, o divisor. O mesmo sucede quando trabalhamos com as frações.

Vamos usar um outro exemplo:

$$5 : \frac{2}{3}$$



O exemplo pede que retiremos de 5 inteiros tantos 2/3 quantos fôr possível.



Podemos retirar 7 vêzes 2/3 e ainda há um resto de 1/3. Estamos interessados em conhecer quantos 2/3 há em 5. Êste 1/3 restante é exatamente a metade dos 2/3 que tomamos como ponto de referência. Assim, em 5, temos exatamente 7 vêzes 2/3 e mais a metade da vez: 7 1/2. Esta interpretação coincide, naturalmente, com a resposta que possamos obter, usando simplesmente a divisão:

$$\begin{array}{l|l} 15 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & \\ & 7\,\frac{1}{2} \end{array}$$

Interpretação do quociente.

Ao longo de todo nosso trabalho, vimos dando ênfase à necessidade de guiar a criança na interpretação matemática do quociente.

Sempre que se apresenta ao aluno um problema de divisão, é bom pedir-lhe que estime a resposta. Efetuada a operação, confronta a resposta encontrada com sua estimativa. Em tôdas estas oportunidades conduzimo-lo à interpretação do quociente. A ausência de significado matemático de um quociente encontrado denuncia, naturalmente, um ensino também sem significado, impossibilitando o pensamento crítico, em face de um resultado errado.

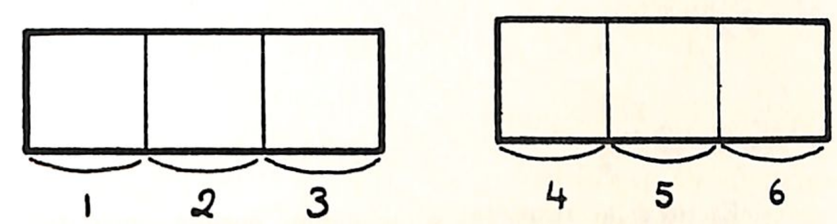
Suponhamos que a criança deva efetuar esta divisão:

$$2 : \frac{1}{3} =$$

Irá, com o pensamento, procurando resposta para questões, como:

— Que pergunta êste exemplo?
— Qual será a possível resposta?
— Como encontrá-la?
— Por que multiplicar 2 × 3?
— Que significa o 6 encontrado como quociente?

Através de conhecimentos adquiridos por um real trabalho de aprendizagem, saberá que êste 6 não são 6 inteiros, da mesma categoria que o 2 dividendo o é. Êste 6 é o número de vêzes em que a fração 1/3 está contida em 2 inteiros. Nesta interpretação perceberá a razão pela qual o quociente, em exemplos semelhantes, é maior que o dividendo.



Organização de atividades.

Se a maneira de introduzir um nôvo conceito é importante, não menos importante é o planejamento de atividades, através das quais se ganhe um domínio mais completo da compreensão, fixando o conhecimento adquirido.

Estas atividades serão variadas, porém sistemàticamente promovidas em vista de um objetivo preciso. A professôra seleciona-las-á, naturalmente, de acôrdo com o grau de amadurecimento da classe e as necessidades características da fase em que se encontram. A vivência dessas atividades favorece o refinamento, exclui inadequações da aprendizagem, encaminha o pensamento na descoberta de generalizações, levando o aluno a penetrar, cada vez mais, no sentido e relações matemáticas do que lhe é ensinado.

Daremos aqui, algumas atividades, como sugestões:

1 — Dizer à criança: — Olhe a série que vou escrever no quadro:

$$2 : \frac{1}{2} =$$

$$2 : \frac{1}{3} =$$

$$2 : \frac{1}{4} =$$

$$2 : \frac{1}{5} =$$

$$2 : \frac{1}{6} =$$

— Escreva a resposta e explique porque encontrou quocientes cada vez maiores.

2 — Vamos tomar o 3 como dividendo. Escreva várias divisões, tendo sempre uma fração como divisor. Resolva-as.

3 — Vamos tomar o 4 como dividendo. Escreva uma série de divisões, usando a fração como divisor.
Os quocientes deverão ser, sempre, cada vez menores.

4 — Olhe o que vou escrever no quadro:

$$5 : \ldots\ldots\ldots = 10$$
$$5 : \ldots\ldots\ldots = 15$$
$$5 : \ldots\ldots\ldots = 20$$
$$5 : \ldots\ldots\ldots = 25$$
$$5 : \ldots\ldots\ldots = 30 \text{ etc.}$$

Escreva os divisores faltosos e explique **como** os encontrou.

5 — Agora, olhe esta série:

a) $\ldots\ldots : \frac{1}{2} = 6$ b) $\ldots\ldots : \frac{1}{3} = 15$

$\ldots\ldots : \frac{1}{2} = 8$ $\ldots\ldots : \frac{1}{3} = 18$

$\ldots\ldots : \frac{1}{2} = 10$ $\ldots\ldots : \frac{1}{3} = 21$

$\ldots\ldots : \frac{1}{2} = 12$ $\ldots\ldots : \frac{1}{3} = 24$ etc.

Procure os dividendos faltosos e explique **como** os encontrou.

Em tôdas estas atividades usamos, apenas, as frações unitárias. À proporção que a classe vence novas etapas de dificuldades, conforme expusemos, a professôra organiza diferentes atividades com as demais frações, de maneira que proporcione sempre possibilidade de êxito.

Generalizações.

A várias conclusões gerais pode a criança chegar, quando viveu uma riqueza de experiências idênticas. Estas generalizações constituem o ápice, o coroamento de todo o ensino. A elas não chegará com segurança, se não tiver trilhado todo o caminho já descrito por nós. Tudo depende muito da habilidade da professôra em saber guiá-la.

À criança que se dá, por exemplo, uma série como:

$$3 : \frac{1}{2} = 6$$

$$4 : \frac{1}{2} = 8$$

$$5 : \frac{1}{2} = 10$$

$$6 : \frac{1}{2} = 12$$ etc., está encaminhada a descobrir

que: dividir por um meio é o mesmo que multiplicar por 2. O resultado de comparar 3 com 1/2, revela que 3 é 6 vêzes maior que um meio, etc.

Quando, numa seqüência continuada de atividades, o aluno procura a relação entre o quociente encontrado e os membros da divisão, poderá concluir que a resposta da divisão de um inteiro por uma fração unitária é o resultado da multiplicação do inteiro pelo denominador da fração. Sempre dirigida pela professôra, chega a formular sua regra: **para dividir o inteiro por uma fração com o numerador 1, é só multiplicar o inteiro pelo denominador da fração.**

Mais tarde, quando fôr iniciado nas demais frações e tiver experiências neste sentido, reformulará a regra já adquirida, para uma mais geral: **para dividir um inteiro por uma fração, multiplica-se o inteiro pelo denominador e divide-se o produto encontrado pelo numerador da fração.**

Seguindo várias lições nesta direção, encaminha-se a criança a fixar o conhecimento adquirido acêrca da função com

que é usado o numerador e o denominador da fração divisora em tais casos.

As respostas destas questões revelam que o denominador da fração é usado para multiplicar o inteiro, e o numerador para dividir o produto resultante.

Por exemplo: 4 : 2/3 — o número inteiro 4 é multiplicado pelo denominador 3 e o produto 12 é dividido por 2, que é o numerador da fração.

O seguinte problema poderia ser levantado: — desde que multiplicamos pelo denominador e dividimos pelo numerador, não seria mais fácil se escrevêssemos esta inversão simbòlicamente? E a classe seguiria o raciocínio:

$$4 : \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2}$$

$$5 : \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3}$$

$$3 : \frac{2}{5} = 3 \times \frac{5}{2}$$ etc.

À criança poder-se-á pedir, então, que resolva de várias maneiras os exemplos de divisão:

a) — por desenho
b) — por computação mental
c) — pelo denominador comum
d) — pelo processo de inversão.

Poder-se-á, ainda, levar a criança a comparar os 2 últimos caminhos para concluir que muito se assemelham.

É mostrado assim:

Denominador comum —

$$6 : \frac{7}{8} = \frac{48}{8} : \frac{7}{8} = 48 : 7 = 6\frac{6}{7}$$

Processo de inversão —

$$6 : \frac{7}{8} = 6 \times \frac{8}{7} = \frac{48}{7} = 6\,\frac{6}{7}$$

A criança vê que, em ambos, multiplica-se os mesmos números e divide-se os mesmos números.

Outras considerações levam o aluno a aceitar que o «processo de inversão» é um modo rápido de mostrar a divisão envolvendo fração.

Outras descobertas, feitas pela classe, podem ser trabalhadas e a elas dar-se-á ênfase, para ocasionar um crescimento do vocabulário específico.

A criança sendo levada a examinar determinadas séries de divisões, estudando a relação entre o quociente e os membros da operação, poderá concluir que:

— quando o dividendo permanece constante e o divisor decresce, o quociente será sempre cada vez maior;

— quando o dividendo decresce e o divisor permanece constante, o quociente será cada vez menor.

Não podemos finalizar sem ressaltar aqui o prazer intelectual que é dado à criança sentir, quando é encaminhada no processo de aprendizagem de forma tal que possa, ela mesma, atingir estas generalizações.

B. DIVISÃO DE UMA FRAÇÃO POR UM NÚMERO INTEIRO.

a	b	c
$\frac{1}{2} : 2 =$	$\frac{4}{5} : 2 =$	$\frac{2}{3} : 5 =$

A divisão de uma fração por um número inteiro é mais fàcilmente compreendida, quando nela exploramos a idéia partitiva.

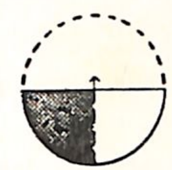
Consideremos o 1º exemplo e perguntemos:

— Que encontrarei se dividir 1/2 queijo entre 2 pessoas? Que tamanho terá cada parte?

Como iniciar.

Podemos introduzir êsses casos através de problemas, com a direção usual, para que a criança escreva a questão usando números, procure a resposta e, tente mostrar que a resposta está certa. Neste caso usará desenhos, diagramas, material concreto, etc.

A professôra auxilia pedindo que mostre a solução usando o quadro-negro para o desenho verbalizando a solução.

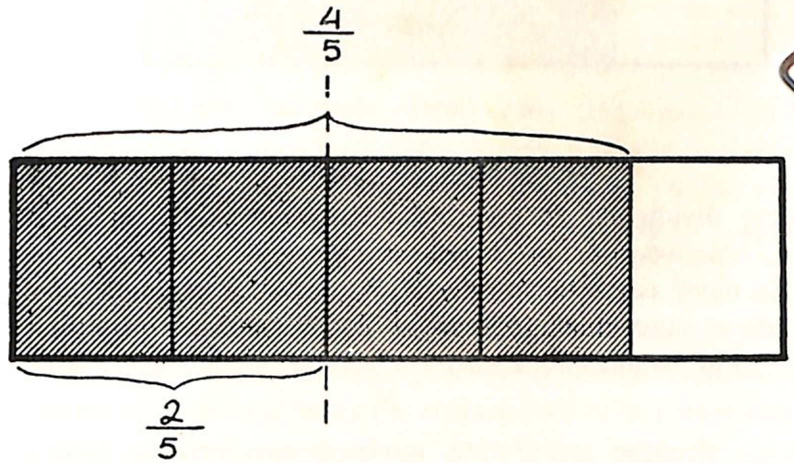


Nesta oportunidade várias frações unitárias serão apresentadas, para serem divididas por 2, por 3 ou por 4.

Vejamos o outro exemplo:

$$\frac{4}{5} : 2 =$$

Quando a criança usa o diagrama para resolver esta divisão, é encaminhada a descobrir que o número de partes iguais que está sendo considerado é divisível pelo número que se tem no divisor, logo, fácil é encontrar o quociente.



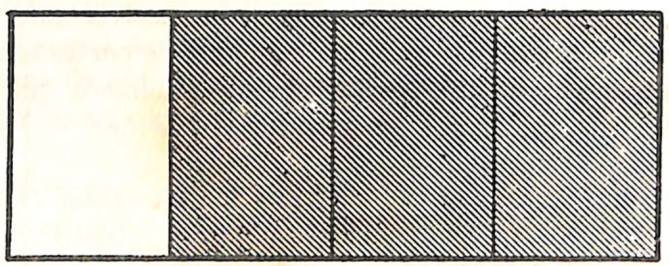
Várias divisões com estas mesmas características como 2/3 : 2, 6/7 : 3, 8/9 : 4 etc., serão trabalhadas, para que a criança possa, com facilidade descobrir a relação que existe entre o numerador da fração dividendo e o divisor, que é um número inteiro.

Examinemos agora êste exemplo:

$$\frac{2}{3} : 5.$$

Qual será o tamanho de cada parte, quando dividimos 2/3 em 5 partes iguais?

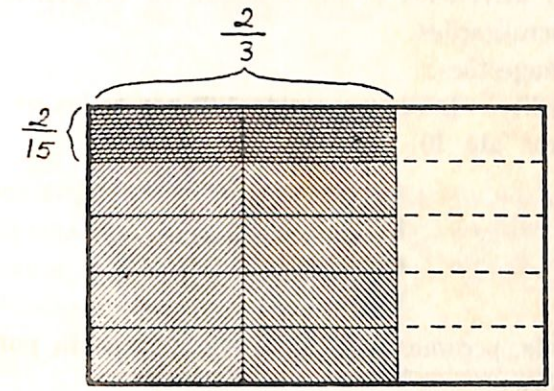
Naturalmente, a criança, através dos conceitos já adquiridos relativos à divisão, percebe que deve partir da fração 2/3 que é fração dividendo.



Como dividir 2/3 em 5 partes iguais? Lançando-se a questão, espera-se que a criança apresente as possíveis soluções. No ouvir estas possíveis soluções está a grande oportunidade de se estudar o processo do pensamento infantil, conduzindo com habilidade, a classe a aceitar a melhor solução sugerida.

Numa situação semelhante, ouvimos uma criança dizer:

— Temos que dividir 2/3 em 5 partes iguais. Então vamos dividir cada têrço em 5 partes iguais e depois consideramos 1 parte de cada 1 dos terços. A solução sugerida foi seguida:



Uma dificuldade as crianças enfrentaram: descobrir que as 2 partes encontradas seriam designadas como 15 avos, sendo, assim, a resposta final

$$\frac{2}{15}.$$

Naturalmente, tentando dividir cada têrço em 5 partes estaremos, implicitamente, dividindo todo o inteiro, ou sejam, 3/3 em 5 partes, o que equivale a um total de 15/15. Como estamos trabalhando apenas com 2/3, temos também apenas 10/15 que divididos em 5 partes dão um total de 2/15.

Novos exemplos serão dados através de desenhos e usando a verbalização, a fim de que, pela variedade de experiências, possa haver a consolidação da compreensão e a apreensão de conceitos mais abstratos.

Organização de atividades.

Tão logo a professôra descobre que a criança caminhou bem nos primeiros passos da compreensão, insiste nas atividades sistematizadas para consolidar e conservar a aquisição feita.

Com essas atividades o aluno adquirirá elementos para atingir as generalizações.

Algumas sugestões:

1 — Vamos pedir à classe que divida 1/2 por todos os números inteiros até 10.

1/2 : 2 =
1/2 : 3 =
1/2 : 4 =
1/2 : 5 =

Em seguida, peçamos que comprove a resposta por meio de desenhos.

2 — Vamos dar à criança séries, como:

1/2 : 2 =	1/2 : 3 =
1/3 : 2 =	1/3 : 3 =
1/4 : 2 =	1/4 : 3 =
1/5 : 2 =	1/5 : 3 =
1/6 : 2 = etc.	1/6 : 3 = etc.

Depois que examina as respostas encontradas e as confirma pelo uso do diagrama, a criança pode concluir que:

a) dividir uma fração por 2 é achar 1/2 da fração;
b) dividir uma fração por 3 é o mesmo que procurar 1/3 da fração etc.

3 — Vamos apresentar à criança várias divisões indicadas:

$$\frac{2}{5} : 4 = \qquad \frac{3}{4} : 5 = \qquad \frac{2}{8} : 3 =$$

Face a estas divisões dirá, apenas, o denominador da fração quociente, explicando «porque» será êste o denominador.

4 — Vamos apresentar várias divisões indicadas:

1/5 : 3 = 2/3 : 5 = 3/8 : 2 =

A criança irá encontrar a solução, procurando-a, apenas, através de desenhos.

5 — Apresentemos uma série como:

1/2 : 2 = 1/4
1/3 : 2 = 1/6
1/4 : 2 = 1/8
1/5 : 2 = 1/10

Vamos trabalhar com a criança para que explique porque a resposta foi decrescendo progressivamente.

6 — Deixemos que a criança complete a divisão, quando há um têrmo faltoso:

1/5 : ...... = 10
1/5 : ...... = 15
1/5 : ...... = 20

Generalizações.

Muitas e importantes generalizações a classe irá atingir nesta etapa do trabalho. Tornam-se ainda mais importantes, se consideramos que todos êsses conhecimentos formarão a estrutura necessária para a aprendizagem a ser efetuada posteriormente.

Depois que as crianças resolvem, sob a direção da professôra, uma série rica de exemplos de divisão dêste tipo, procurarão formular a sua regra:

Para dividir uma fração por um número inteiro, multiplica-se o denominador pelo número inteiro.

Depois de atingida a regra, de quando em vez, gostamos de pedir que demonstre, através de um diagrama, «porque» a regra é verdadeira.

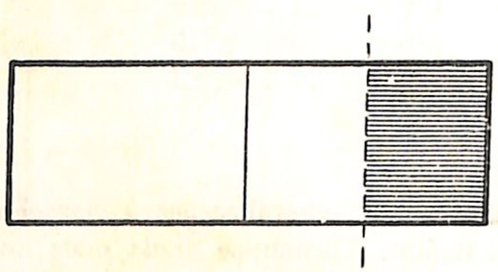
Atingindo esta generalização, está a criança enfrentando, mais uma vez, a relação entre divisão e multiplicação de frações. Familiariza-se com o fato matemático de que a divisão é resolvida pelo processo de multiplicação.

Quando a professôra apresentar à classe séries como:

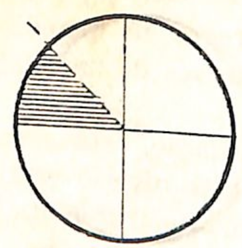
1/2 : 2 = 1/4	1/2 : 3 = 1/6
1/3 : 2 = 1/6	1/3 : 3 = 1/9
1/4 : 2 = 1/8	1/4 : 3 = 1/12
1/5 : 2 = 1/10	1/5 : 3 = 1/15

poderá levá-la a examinar a operação efetuada, a espécie de resposta encontrada, auxiliada pelo uso de material, para atingir conclusões como:

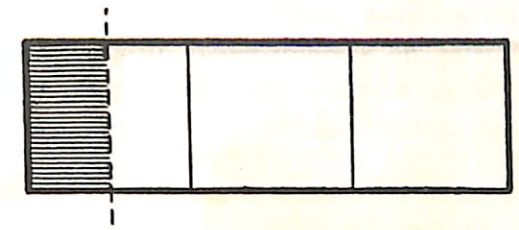
1/2 : 2 é o mesmo que a metade da metade; assim 1/2 : 2 é equivalente a 1/2 × 1/2.



1/4 : 2 é o mesmo que a metade de um quarto; assim 1/4 : 2 é equivalente a 1/4 × 1/2.



1/2 : 3 é o mesmo que um têrço de um meio; assim 1/2 : 3 é equivalente a 1/2 × 1/3.



Nesta etapa, a criança descreve o processo de «inverter o divisor e multiplicar», apesar de êste processo não ser realmente essencial para a solução dêsses tipos de divisão. Será, assim, como um preparo para etapas mais difíceis, porquanto tôda a aprendizagem escolar se baseia sôbre os conceitos anteriormente adquiridos.

C. DIVISÃO DE FRAÇÃO POR FRAÇÃO.

$$\overset{a}{\frac{3}{4} : \frac{1}{4}} \qquad \overset{b}{\frac{1}{4} : \frac{3}{4}} \text{ etc.}$$

Autores abalisados são concordes em suas observações quanto ao grau de abstração inerente às relações que envolvem o processo de divisão de fração por fração, aconselhando que se espere um desenvolvimento mental que possibilite a aprendizagem significativa.

Os currículos de aritmética usados nas escolas americanas, em geral, colocam êste tipo de divisão na 6ª série do curso primário.

Na opinião de Grossnickle e Brueckner, a divisão de fração por fração não deve fazer parte do currículo preparado para as crianças de aprendizagem lenta. Outrossim, a divisão de 2 frações será ensinada, primeiramente, por seu valor do ponto de vista de conteúdo matemático, porquanto, reconhecidamente, sua aplicação social é muito escassa.

Observações desta natureza nós as fazemos, e nelas insistimos, para que sejamos cautelosas no planejamento e direção das experiências de aprendizagem, procurando dosar as dificuldades e observar a reação da criança para descobrir se se realiza uma real assimilação.

Como iniciar.

Procurando estabelecer uma graduação de dificuldades dentro da divisão de fração por fração. Isto possibilitará um progresso normal a níveis mais elevados e abstratos de pensamento.

Eis alguns exemplos:

a) 3/4 : 3/4 = c) 5/8 : 3/8 =
b) 8/10 : 2/10 = d) 3/4 : 1/2 =
e) 1/2 : 3/4 etc.

Para que a criança possa ver sentido em tais exemplos, dar-se-lhe-á oportunidade de estimar a possível resposta. A formação desta habilidade dependerá, naturalmente, dessas oportunidades, guiadas com a habilidade da professôra. A criança que procura estimar a resposta de um exemplo de divisão examina, significativamente, a relação entre os têrmos da divisão, interpretando a função de cada um.

A maior ou menor facilidade em fazer tal estimativa dependerá do grau de compreensão que o aluno possui das seguintes generalizações:

a) — o quociente de um número dividido por si mesmo é 1 Ex.: 7: 7 = 1.

b) — o quociente de um número dividido por um número menor é maior que 1. Ex.: 24 : 6 = 4.

c) — o quociente de um número dividido por um número maior é menor que 1. Ex.: 1 : 2 = 1/2.

O aluno que compreende tais princípios, transferi-los-á, com o auxílio da mestra, para o trabalho com frações, tendo, assim, um ponto de referência para julgar a possível resposta de um exemplo. Faria, desta forma, a comparação entre os membros da divisão, podendo prever o possível quociente. Possuindo tal habilidade poderá também interpretar o «porquê» da qualidade do quociente encontrado.

Vejamos o 1º exemplo por nós apontado como o mais fácil:

3/4 : 3/4 =

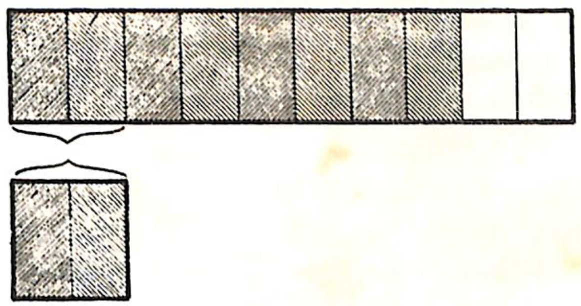
Nesta etapa apresentaríamos todos os exemplos que resultariam no quociente 1.

De que maneira a criança irá interpretar esta divisão? Quantas vêzes 3/4 estarão contidos em 3/4? Que significa êste 1 encontrado como resposta?

Acreditamos que êstes exemplos são fàcilmente vencidos e prepara a classe para resolver o seguinte:

8/10 : 2/10 =

— A resposta será maior ou menor que 1?
— Como pensou você para dar esta resposta?
— Poderíamos encontrar a solução através de um diagrama?
— Vamos comparar 2/10 com 8/10.



Examinando diagramas semelhantes, a criança descobre o número de vêzes que 2/10 estão contidos em 8/10.

Estas comparações bem trabalhadas em número suficiente, fornecerão habilidade ao aluno em dar resultado rápido de algumas divisões, e em interpretar o quociente encontrado.

Poderá ainda, descobrir que nestes exemplos, em que temos as 2 frações com o mesmo denominador, apenas fazemos a divisão entre os numeradores. É o que chamamos: **dividir frações pelo processo do denominador comum.**

Vejamos mais um exemplo:

$$\boxed{5/8 : 3/8}$$

— Qual será o possível quociente?

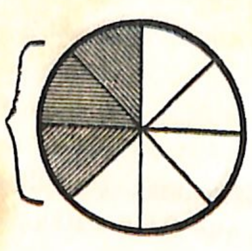
— Como pensou para encontrar tal resposta?

— Por que teremos um número misto no quociente?

Pela habilidade já formada em pensar sôbre os têrmos da divisão, a criança descobre que em 5/8 temos uma vez 3/8 e ainda há um resto de 2/8. A interpretação dêste resto em relação ao divisor causa certa problemática no processo de pensamento. É natural. Interpretemo-lo com o aluno, de maneira que seu raciocínio matemático se desenvolva.

Que relação existe entre os 2/8 restantes e a fração tomada como unidade de medida? (3/8).

Se se procurar a solução através de um diagrama, haverá mais facilidade em visualizar os 2/8 restantes como 2/3 da fração divisora (3/8).



Podemos recorrer também à apresentação da divisão da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} 5 \text{ oitavos} & 3 \text{ oitavos} \\ \cline{2-2} 2 & \quad 1\,\dfrac{2}{3} \end{array}$$

Através desta forma, a criança irá transferir um conhecimento adquirido, quando aprendeu a interpretar o resto de uma divisão de números inteiros. O resto constitui o numerador da parte fracionária do quociente, cujo denominador será o divisor da operação.

Muitos exemplos serão trabalhados. De início estas experiências terão, para a criança, características descontínuas, fragmentadas. Pouco a pouco, à medida que acumula experiências semelhantes, a criança, de acôrdo com seu desenvolvimento mental, vai se tornando capaz de estabelecer relações e, finalmente, adquirir um conhecimento real.

Para o êxito no ensino é primordial que reconheçamos o nível de dificuldade daquilo que pretendemos que o aluno apreenda.

Quando fazemos uma avaliação da aprendizagem e decidimos que um exemplo com uma nova dificuldade pode ser apresentado, levamô-lo a examinar o seguinte:

$$\boxed{3/4 : 1/2 =}$$

Êste exemplo será apresentado de maneira que o próprio aluno venha a notar que, neste caso, terá a comparar 2 frações de denominadores diferentes. Esperamos que, pela prática e conhecimento já possuído da equivalência, possa a classe sugerir que se trabalhe com denominadores comuns, para a busca das equivalentes. Neste caso, assim seria transformado o exemplo:

3/4 : 1/2 = 3/4 : 2/4 = ?

Examinando a divisão com denominadores comuns, pode-se dizer que 2/4 cabem uma vez em 3/4, havendo ainda um resto de 1/4. Comparando-se 1/4 com 2/4, conclui-se que 1/4 é a metade de 2/4, razão pela qual a resposta à questão é 1 1/2.

$$\begin{array}{l|l} 3 \text{ quartos} & 2 \text{ quartos} \\ \hline 1 & 1\,\frac{1}{2} \end{array}$$

Quando a criança depara com um exemplo como:

1/4 : 1/2 =

a professôra poderá avaliar sua prontidão através de duas reações:

a) — a criança perceberá que o dividendo é menor que o divisor;

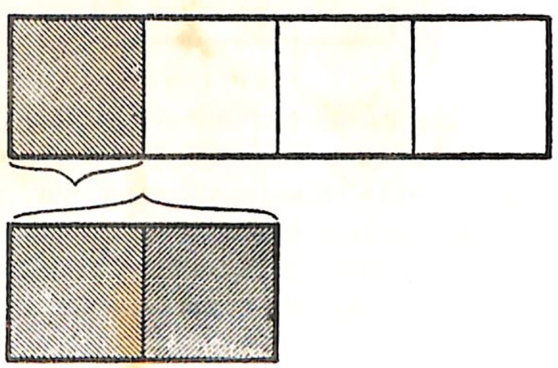
b) — por esta razão o quociente será um número fracionário.

A percepção destas 2 relações é muito importante. A criança poderá assim determinar se a resposta é ou não sensível para aquela situação matemática.

O aluno que se propõe a resolver o exemplo 1/4 : 1/2 usará experiências passadas, trabalhando pelo «processo do denominador comum». Assim sendo, a situação ficará transformada para:

1/4 : 1/2 = 1/4 : 2/4 =

Usando o diagrama, o aluno compara um quarto com dois quartos e percebe que 1/4 é, justamente, apenas 1/2 da fração tomada como divisor (2/4).



Em tôdas as situações de divisão de fração por fração, vimos conduzindo a criança no uso do «processo do denominador comum». Não é êste o processo encontrado comumente nos livros de matemática ou usado pelos nossos professôres. Tradicionalmente, a divisão de fração por fração é ensinada pelo «processo da inversão», de uma maneira mecânica, porque é um processo de difícil compreensão. Em geral, a criança aceita a regra imposta pelo professor e resolve um sem número de exemplos até automatizá-la. Tal procedimento vem de encontro ao conceito de aprendizagem por nós adotado, pois não proporciona oportunidade de estimar, de interpretar a relação entre os têrmos da divisão, de ver sentido matemático na resposta encontrada, enfim, de pensar.

Brueckner (*) refere-se a uma investigação limitada feita por Brownell revelando que as crianças de aprendizagem lenta preferem trabalhar pelo «processo de denominador comum».

Eis porque, em nossa opinião, a professôra prepara a classe pelo «processo do denominador comum» que permite uma racionalização mais eficiente de acôrdo com o nível mental dos alunos. Construída esta base, poderá a classe enfrentar o processo tradicional de inversão.

O processo de inversão.

A professôra poderá, naturalmente, guiar a classe a ver que existe o «processo de inversão».

Como preparo, dará algumas atividades em que a criança volte a dividir um inteiro por uma fração, quando já usou o «processo de inversão». Fazendo êste preparo, a professôra conduz o aluno a se recordar e deixar bem estabelecido que, ao dividir com fração, pensamos em têrmos de multiplicação, porque multiplicamos o dividendo pelo denominador da fração divisora e o produto é dividido pelo seu numerador.

Revendo alguns casos, em que a criança funciona com esta generalização, a professôra simplesmente mostra que,

(*) "Discovering Meaning in Arithmetic".

também na divisão de fração por fração, invertemos os sinais. invertemos os têrmos da fração divisora e multiplicamos. Desta forma, a criança inverte o sinal, os têrmos da fração divisora e efetua a operação.

$$1/5 : 3/4 = \qquad 1/5 \times 4/3 = 4/15$$

Uma experiência muito rica consiste em deixar a classe resolver vários exemplos usando os dois processos. Além de encontrar um meio de usar um processo como verificação do outro, tem possibilidade de decidir que processo é mais conveniente quanto à compreensão e quanto à rapidez.

Quando dissemos, em parágrafo anterior «a professôra simplesmente mostra...» deixamos antever que, em nossa opinião, a criança de 4ª série (10 a 12 anos de idade) não atingiu ainda o desenvolvimento mental necessário para apreender, com sucesso, todo o arcabouço de abstrações matemáticas que envolve a razão do «processo de inversão». É verdade, que não temos nenhuma pesquisa neste sentido. Nossa evidência é de experiência nascida do contato com as crianças. Isto não exclui da professôra a responsabilidade de buscar o «porquê» do processo de inversão, fazendo depois, ela própria, um trabalho experimental com alunos de 5ª série, ou mesmo de 4ª série, para verificar a possibilidade da classe face a estas abstrações.

Deixamos em nosso trabalho, como apêndice, uma explicação com o objetivo de ajudar a professôra em seu preparo para o ensino.

Organização das atividades.

Muitas são as atividades que o pensamento criativo da mestra organizará, a fim de levar a classe a fixar conhecimentos adquiridos, relativos a tôdas as etapas de divisão de fração por fração.

Daremos, apenas, alguns exemplos:

1 — Peçamos à classe que organize uma série de divisão de frações, cujo quociente seja 1.

2 — Apresentemos alguns casos fáceis de divisão, em cartões, estimulando a classe a dar respostas cada vez mais rápidas.

$$\boxed{\frac{8}{10} : \frac{2}{10} =} \qquad \boxed{\frac{6}{8} : \frac{2}{8} =}$$

Estimulemô-la a explicar« como» pensou para conseguir respostas tão rápidas.

3 — Apresentemos uma série de divisão onde haja sempre um têrmo faltoso, pedindo à criança que a complete e explique «como» pensou para encontrá-lo:

3/5 : ...... = 1
4/9 : ...... = 1
4/8 : ...... = 2
6/10 : ...... = 3 etc.

4 — Escrevamos no quadro várias divisões indicadas. Peçamos à criança que copie, em seu caderno, apenas os casos em que o quociente seja um número misto. Peçamos, depois, que explique «como» pensou para saber que, naqueles exemplos, o quociente seria um número misto.

6/8 : 2/8 =	4/5 : 3/5 =	8/9 : 4/9 =
8/9 : 4/9 =	4/5 : 2/5 =	3/10 : 2/10 =
1/4 : 1/2 =	7/9 : 7/9 =	3/7 : 2/7 =

5 — Deixemos no quadro as expressões:

Inteiro — Número misto — Frações

Peçamos à criança que escreva, abaixo de cada expressão, em coluna, divisões indicadas, cujo quociente seja um número inteiro, um número misto ou uma fração.

6 — Deixemos que a criança procure a solução para vários exemplos dados, usando apenas o diagrama.

7 — Apresentemos à classe uma série de cartões com diferentes tipos de divisão, pedindo-lhe que diga, tão depressa quanto possível, a espécie de quociente que se terá em cada caso: inteiro, fração ou número misto.

8 — Deixemos que a criança resolva vários exemplos de divisão de fração por fração, usando os 2 processos: o «processo de denominador comum» e o «processo de inversão».

9 — Apresentemos no quadro várias divisões indicadas. Apontando cada uma, peçamos à criança que apenas diga a que ficará transformada a expressão, se formos resolvê-la pelo «processo da inversão».
Por exemplo: mostrando 1/3 : 2/5 a criança apenas dirá: $1/3 \times 5/2$.

10 — Façamos exercício semelhante ao anterior, empregando cartões para apresentação rápida.

Generalizações.

Tôdas estas atividades são selecionadas, para a criança perceber os elementos idênticos predominantes e característicos em cada situação. Esta base é indispensável para o trabalho de generalização.

Quando ao aluno é dada a oportunidade de realizar várias atividades, nas quais o quociente das divisões apresentadas é sempre 1, chegará à seguinte conclusão: quando o dividendo e o divisor são constituídos pela mesma fração, o quociente será sempre 1. Outras generalizações surgirão. Por exemplo:

- quando a fração dividendo é menor que a fração divisora, o quociente será sempre uma fração;
- quando a fração dividendo é maior que a fração divisora, o quociente será um número inteiro ou um número misto;
- para dividir frações com o mesmo denominador, dividimos os numeradores entre si;

- para dividir frações com denominadores diferentes, podemos transformá-las ao mesmo denominador, dividindo os numeradores entre si;
- para dividir frações podemos também inverter os sinais, inverter os têrmos da fração divisora e processar a multiplicação.

A professôra estará sempre alerta para descobrir o melhor momento de conduzir o processo de aprendizagem na formulação das generalizações. Grande ajuda necessitará o aluno na composição delas. Muitas vêzes sente dificuldades próprias do desenvolvimento lingüístico ou do emprêgo do vocabulário específico.

Grande é, portanto, nossa responsabilidade, quando conduzimos as experiências de aprendizagem.

APÊNDICE

Por que invertemos o divisor e multiplicamos?

Eis uma pergunta muito comum entre os estudiosos da matéria. Muito comum também tem sido a ausência de uma resposta racional e significativa, uma vez que todo o ensino vem sendo feito em bases mecânicas, conforme comentamos.

Daremos aos nossos leitores 2 respostas baseadas em diferentes princípios:

Primeira:

Os princípios básicos de matemática, que governam o processo de inverter o divisor e multiplicar, são:

1 — Dividendo e divisor podem ser multiplicados pelo mesmo número, sem que se altere o quociente.
2 — O produto de uma fração por sua recíproca é sempre 1.
3 — Multiplicar a fração divisora por sua recíproca é conseguir o 1 como divisor efetivo.
4 — O número 1 é o mais fácil número de ser usado como divisor.
5 — Desde que dividir uma fração por outra é um processo difícil, usemos os princípios enunciados para transformar o exemplo, de maneira que o divisor seja 1.

Usemos um exemplo, desenvolvendo-o etapa por etapa, a fim de perceber como funcionam estas verdades aritméticas dentro da divisão de fração por fração:

$$1/3 : 2/5 =$$

O mais fácil divisor de ser trabalhado é 1. Como transformar esta fração divisora em 1? Multiplicando-a por sua recíproca. Assim:

$$1/3 : (2/5 \times 5/2) =$$

Se multiplicamos o divisor por 5/2, sabemos que também o dividendo deverá ser multiplicado pelo mesmo número, para que não se altere o valor da expressão. Assim:

$$(1/3 \times 5/2) : (2/5 \times 5/2) =$$

Sabemos que o produto das recíprocas é sempre 1; neste caso nosso exemplo será agora assim:

$$(1/3 \times 5/2) : 1 =$$

Desde que qualquer número permanece o mesmo quando dividido por 1, podemos ignorar o divisor e escrever o que há a computar assim:

$$1/3 \times 5/2 = 5/6.$$

A compreensão dos fundamentos do «processo de inversão» exige, naturalmente, o conhecimento precedente do que sejam números recíprocos. Quando o produto de 2 números é 1, cada número é chamado recíproco do outro. Assim 2/3 é a recíproca de 3/2; 3/2 é a recíproca de 2/3. Da mesma forma 5/6 e 6/5 são recíprocas.

A criança será, então, preparada para usar o «processo de inversão» pela compreensão do que sejam números recíprocos.

Alguns exercícios serão usados para levá-la a descobrir que números são multiplicados entre si para se encontrar o produto 1. Por exemplo:

$$2 \times \ldots\ldots = 1$$
$$3 \times \ldots\ldots = 1$$
$$1/4 \times \ldots\ldots = 1\ .$$
$$3/5 \times \ldots\ldots = 1 \text{ etc.}$$

Partindo dêsse conhecimento, o professor revê os demais princípios, usando-os, depois, para conduzir a criança no processo de aprendizagem do «porque invertemos o divisor e multiplicamos».

Uma vez que a classe compreendeu, passo por passo, todo êsse processo, não irá, naturalmente, realizar etapa por etapa, quando tiver diante de si um exemplo de divisão de fração por fração. Simplesmente fará a inversão procedendo a multiplicação, com tôda a segurança que a compreensão lhe trouxe.

Segunda:

Jácomo Stávale em seu livro «Primeiro ano de matemática», assim explica o «processo de inversão»: «A divisão é a operação que tem por fim, dados dois números, achar um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro». De acôrdo com esta definição, dividir 3/5 por 7/8 é achar um número que, multiplicado por 7/8 reproduza o número 3/5. Ora, se êste número multiplicado por 7/8 é igual a 3/5, segue-se que 3/5 representa 7/8 dêste número, ou seja, 7/8 do número procurado é igual a 3/5.

Mas, desde que **sete oitavos** do número procurado é igual a 3/5, então, **um oitavo** do número procurado é a **sétima parte** de 3/5, isto, é,

$$\frac{3}{5 \times 7}.$$

E, desde que **um oitavo** do número procurado é

$$\frac{3}{5 \times 7},$$

então **oito oitavos** do número procurado, isto é, **todo** o número procurado é **oito vêzes** $\frac{3}{5 \times 7}$, isto é, $\frac{3 \times 8}{5 \times 7}$. Portanto,

$$\frac{3}{5} : \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7}$$

Mas, invertendo os têrmos da fração divisora, e multiplicando em lugar de dividir, teremos:

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7}.$$

Comparando os dois resultados, verifica-se que dividir 3/5 por 7/8 é o mesmo que multiplicar 3/5 por 8/7. Ora, se repetimos todo o raciocínio que fizemos neste parágrafo, com outros exemplos, 2/3 : 5/6; 4/9 : 7/10; 11/10 : 13/30 etc., chegaremos sempre à mesma conclusão; podemos, pois, estabelecer a seguinte **regra:** Para dividir uma fração por outra, é bastante multiplicar a primeira fração pela segunda fração invertida.

Qualquer um dos dois processos pode ser experimentado em classes de meninos mais bem dotados, comportando-se o professor como bom pesquisador, a fim de observar a reação da criança durante seu trabalho mental.

★

Numa última palavra, diríamos que o sucesso do ensino depende do poder de penetração do professor em reconhecer os princípios que regem o processo escolhido, bem como seu entusiasmo pela matéria que ensina.

BIBLIOGRAFIA

Albuquerque, Irene — «Metodologia da Matemática» — Editôra Conquista, Rio de Janeiro, 1958.

American Council on Education — «Helping Teachers Understand Children» — National Education Association (ed.) — Washington, D.C., 1945.

Banks, J. Houston — «Learning and teaching Arithmetic» — Allyn and Bacon Inc., Boston, 1959.

Bell, E.T. — «Development of Mathematics» — McGraw-Hill, New York, 1940.

Bezerra, Manoel Jairo — «Didática de Matemática» — Ministério da Educação e Cultura (C.A.D.E.S.), Rio de Janeiro, 1962.

Brownell, W.A. e outros — «Arithmetic in Grades I and II» — Duke University — Research on Study of Education — Duke University Press.

Brueckner, L.J. e F.E. Grossnickle — «Discovering meanings in Arithmetic» — John C. Winston Company, Philadelphia, 1959.

Bruner, J.S. — «A Study of Thinking» — Wiley, 1956 — London.

Buckingham, B.R. — «Arithmetic, its meaning and practice» — Ginn and Company — Boston, 1949.

Campos, França — «Didática da Aritmética» — J. Ozon Editor — Rio de Janeiro, 1962.

Campos, Maria dos Reis e outros — «Matemática na Escola Primária» — Ministério da Educação e Cultura, 1962.

Castelnuovo, Emma — «L'insegnamento delle frazioni» — Gazeta de Matemática nº 50 — dezembro de 1951.

Clark, J.R. e L.K. Eads — «Guiding Arithmetic Learning» — World Book Company, Yonkers, N.Y., 1954.

Division of Curriculum, Louisville Public Schools Kentucky — «A curriculum guide in Mathematics», 1954.

Ferreira, Maria Luiza de Almeida — «Formação e Desenvolvimento de Conceitos» — PABAEE, Belo Horizonte, 1963.

Glennon, J.V. e Sunnicutt, C.W. — «What does Research say about Arithmetic » — Association for Supervision and Curriculum Development, Washington 6, D.C. — 1957.

Hickerson, J.A. — «Guiding children's Arithmetic Experiences» — Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1952.

Hicks, Hanne J. — «Administrative leadership in the Elementary School» — The Ronald Press Company, N.Y., 1956.

Hollister, G.E. e A.G. Gunderson — «Teaching Arithmetic in grades I and II» — D.C. Heat and Company, Boston, 1954.

Larsen, H.D. — «Arithmetic for colleges» — The Macmillan Company, N.Y., 1958.

Lee, J.M. e Lee, Doris M. — «The Child and his Development» — Century Crofts, Inc., N.Y., 1958.

Malba Tahan — «Didática da Matemática» — Edição Saraiva, São Paulo, 1961.
Marks, John L. e outros — «Teaching Arithmetic for Understanding» — Mc Graw-Hill Company Inc., N.Y., 1958.
Mouly, George J. — «Psychology for Effective Teaching» — Henry Holt and Co., N.Y., 1960.
Mueller, Francis — «Arithmetic, its Structure and Concepts» — Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.Y., 1956.
National Council of Teachers of Mathematics — «Arithmetic in General Education» — Sixteenth Yearbook, Washington, D.C., 1941.
National Council of Teachers of Mathematics — «The Growth of Mathematical Ideas (Grade K/2) — Twenty Fourth Yearbook, Washington, D.C., 1959.
National Council of Teachers of Mathematics — «The Arithmetic Teacher» — (a journal): October, 1957 — November, 1957 — December, 1957 — March, 1958 — November, 1958 — March, 1960 — February, 1962.
National Society for the Study of Education — «The Teaching of Arithmetic» — Fiftieth Yearbook, part II, University of Chicago Press, Chicago, 1951.
Oliveira, Wagner Brandão — «Aritmética Prática» — Rua dos Carijós, 150 — Belo Horizonte, 1960.
Pereira, Waldecyr C. de Araújo — «Matemática Dinâm .a com Números em Côres» — Recife, 1961.
Piaget, J. — «A linguagem e o pensamento da criança» — Editôra Fundo de Cultura, 1956.
Public Schools of the District of Columbia — «Elementary Mathematics Curriculum — Washington, D.C., 1960.
Quintella, Ary — «Matemática» — 1ª série ginasial — Editôra Nacional, São Paulo, 1962.
Ragan, William B. — «Modern Elementary Curriculum» — Henry Holt and Company, N.Y., 1960.
Russel, David, H. — «Children's Thinking» — Ginn and Company, Boston, 1956.
Schonell, Fred J. — «Backwardness in the basic subjects» — Oliver and Boyd, London, 1956.
Silva, Caio de Figueiredo — «Processologia na Escola Primária» — Editôra do Brasil, 1956.
Smith, Stanley, Shores — «Fundamentals of Curriculum Development» — World Book Company, N.Y., 1957.
Spencer, P.L. e M.N. Brydegaard — «Building Mathematical Concepts in the Elementary School» — Henry Holt and Company, Inc., N.Y., 1952.
Spitzer, H.F. — «The teaching of Arithmetic» — Houghton Mifflin Company, Boston, 1954.
Stávale, Jácomo — «Primeiro ano de Matemática» — Companhia Editôra Nacional, 1952.
Stern, Catherine — «Children Discover Arithmetic» — Harper and Brothers, N.Y., 1949.
Stokes, C.N. — «Teaching the meanings of Arithmetic» — Appleton Century Crofts, Inc. — N.Y., 1951.
Woodworth, Robert S. e Marquis, Donald — «Psicologia» — Cia. Editôra Nacional, São Paulo, 1958.

Impresso pela
Minas Gráfica Editôra Ltda.
Rua Rio Grande do Sul, 426
Belo Horizonte — Minas Gerais

OUTRAS PUBLICAÇÕES DA EDITÔRA DO PROFESSOR

Criança de Quatro Anos — Nazira Féres Abi-Sáber.
Como Ensinar Gramática Funcional (3.º ano) — Léa Nogueira Cavalcante, Geralda Caldeira Soares, Norma de Castro Leite.
Como Ensinar Gramática Funcional (4.º ano) — mesmas autoras.
Energia Nuclear e suas Aplicações — Teresinha Nardelli Cambraia.
Frações na Escola Elementar — Rizza Araújo Porto.
Recursos da Comunidade no Ensino de Estudos Sociais — Francisca Alba Teixeira.
Treinamento do Professor Primário — Lauro Oliveira Lima.
O Fôgo e sua Prevenção — Teresinha Nardelli Cambraia.
Eletricidade no Lar e na Comunidade — Teresinha Nardelli Cambraia.
De Que São Feitas as Coisas — Cecília Lobato
Gravuras no Ensino de Estudos Sociais — Francisca Alba Teixeira.
Estudos Sociais na Primeira Série — Maria de Lourdes Almeida.
Jogos "Pré-Primário" — (material para flanelógrafo).
Série "A Família" — (material para flanelógrafo).
Meios de Comunicação — (material para flanelógrafo).
Falando de Deus aos Pequeninos — Haydée Pôrto.
A Revolta das Bruxinhas — Ivana Gallery.
Trabalho de Grupo — Maura Valadares
Como Descobrimos as Coisas — Maria José Berutti — (Manual para a professôra).
Como Descobrimos as Coisas — Maria José Berutti — (livro para o aluno — Ciências Naturais para a 1.ª série elementar).

PRÓXIMOS LANÇAMENTOS

Arte na Educação Elementar — Bartolomeu Campos Queiroz.
Infância e Adolescência — Stone and Church.
Teorias da Adolescência — Rolf E. Muuss.

ATENDE-SE PELO REEMBÔLSO POSTAL

editôra do professor
cx. postal 1843 — belo horizonte