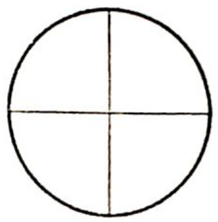
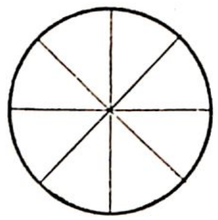
— O outro, está partido em quartos:



— E o outro em oitavos:

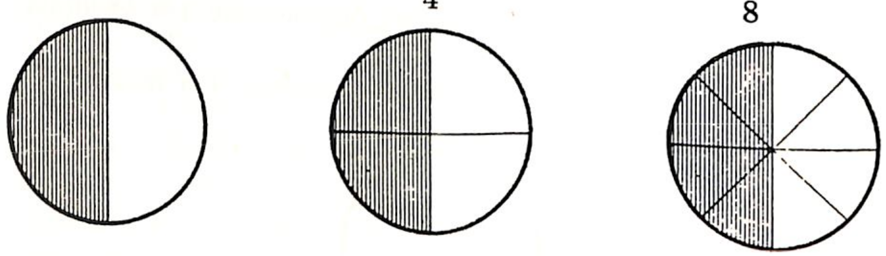


— De cada um dos queijos eu quero a metade. Quanto tomarei do 1º queijo? Vamos sombrear o pedaço que tomo e escrever ao lado a fração.

— E do 2º? Muito bem.

— E do 3º? Vamos marcar e escrever ao lado.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$



— Olhem estas 3 frações no quadro.

— Qual é a maior? Qual é a menor?

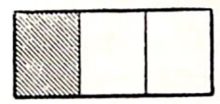


— Elas são iguais em valor. Mas os números que usamos em cada uma, são diferentes. Como aconteceu de se tornarem iguais, mesmo quando são escritas tão diferentemente?

É uma questão que vai exigir muito pensamento da criança na tentativa de formular uma justificativa. Vamos observar a resposta, por onde poderemos avaliar a compreensão da classe.

As atividades vão sendo repetidas para que possa haver progresso no nível de resposta.

— Vamos, agora, trabalhar com três retângulos: o primeiro será dividido em terços, e eu vou marcar 1/3.

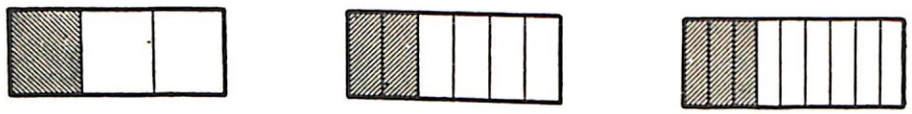


$\frac{1}{3}$

— O segundo, será dividido em sextos e eu vou marcar 2

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$

— O terceiro será dividido em nonos. E eu vou marcar $\frac{3}{9}$



$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$

— Olhem bem e respondam: De que retângulo marquei pedaço maior?

— Por quê, mesmo dividindo os retângulos em números diferentes de partes iguais, as partes que marquei têm valor igual?

Pode-se, depois, usar o sinal de igualdade entre as frações equivalentes. Por exemplo:

$$\frac{1}{4} = \frac{?}{8}$$

A professôra pede à classe que observe o que está escrito no quadro. Chama a atenção para o elemento numérico faltoso na igualdade. A criança pensa e diz o número de oitavos necessários para se ter um quarto do inteiro. Se preciso, será permitido que consulte o material, use o diagrama ou um desenho para encontrar a resposta.

À proporção que a classe descobre novas e novas equivalências, a professôra tem mais elementos para levar à observação da criança, possibilitando que chegue a sentir outras relações, atingindo generalizações mais difíceis. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{\ }{4};\ \frac{\ }{8};\ \frac{\ }{6};\ \frac{\ }{10}$$

Diante dessas ausências, indagar-se-á:

— De quantos quartos necessita-se para se ter a metade de uma laranja? de quantos oitavos? e sextos? e décimos? e se a laranja estiver dividida em 12 partes, de quantas vou precisar para ter a metade? e se estiver dividida em 14?

Dirige-se de tal maneira as atividades, que a criança possa observar que em tôdas as ocasiões dividimos o inteiro em determinado número de partes e tomamos sempre a metade dessas partes. Por fim, virá a questão: — Será fácil conhecer frações iguais a um meio?



A professôra pode, assim, registrar no quadro várias frações. A criança reconhece as que equivalem a um meio e vai, de algum modo, marcando-as. Com perguntas e sugestões a professôra encaminha-a a concluir que: **sempre que o numerador fôr a metade do denominador, a fração será igual a um meio**. Outras crianças poderão concluir em têrmos de multiplicação: — se eu dobro o número de partes em que divido o inteiro, tenho que dobrar também o número de partes que tomo, para ter a mesma quantidade. Daí, chegará à conclusão: **sempre que o denominador fôr o dôbro do numerador, a fração será igual a um meio.**

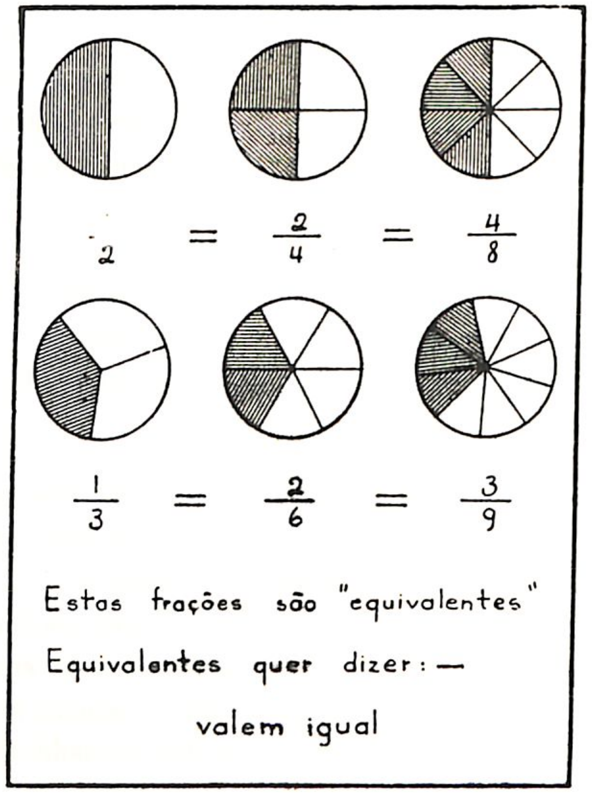
Estas e outras generalizações serão atingidas pelo trabalho de pensamento, em face de vários exemplos, através dos quais a criança percebe os elementos idênticos.

**O vocábulo «equivalente»** — Êste não é um vocábulo de uso social da classe, porquanto não a vemos usá-lo em nenhuma de suas atividades. É específico a esta situação matemática. Será, portanto, introduzido com o devido cuidado, após as experiências a que nos referimos.

Dirá a professôra, por exemplo:

— Já sabemos que há frações que possuem «valor igual». 1/3 é igual a 2/6; 1/2 = 4/8. Estas frações que têm «valor igual», recebem um nome especial. Êste nome é que vamos aprender hoje. Estas frações que têm «valor igual» são chamadas equivalentes (escrever no quadro). Reparem bem esta palavra. Ela mesma diz o seu significado: equi = igual; vale = valer.

A professôra, logo após, cria várias oportunidades onde a palavra seja usada para a natural fixação. Poderá depois figurar em um cartaz para consulta.




Num movimento contrário, leva-se a criança a descobrir que pode reduzir uma fração a têrmos menores. Dirá a professôra: — Você tem aí 2/4. Eu quero êste mesmo tamanho, porém empregando menos partes. Que fração terei? Com uma questão como esta, o pensamento trabalha à procura da solução, podendo a criança inclusive empregar, no início, desenho ou outro material concreto.

Vamos dar outra sugestão. Digamos: — Olhe a fração que está no quadro: 4/8. O inteiro está dividido em 8 partes





iguais e eu tomei 4 dessas partes. Quero escrever à frente uma equivalente, mas empregando números menores. Que fração escreverei?

### Frações maiores que um inteiro

Propositadamente não usamos o sub-título — «Frações impróprias». Na essência da organização de nosso trabalho queremos deixar impresso que o ensino tem sua base na aquisição da idéia, preparando a criança para receber depois, com possibilidade de êxito, o vocabulário específico que, em geral, é abstrato e sem significação social para o aluno.

Vamos aqui, trabalhar com as várias partes fracionárias insistindo para que o aluno veja:

a) — de quantas partes necessita para fazer um inteiro;
b) — que às vêzes temos mais partes que as necessárias para a formação do inteiro ou dos inteiros — são as frações maiores que o inteiro.

As atividades poderão ser realizadas com o uso do material e, depois, apenas com a forma simbólica, a fim de a criança aprender a caracterizar as frações menores, iguais e maiores que o inteiro.

Pode-se, por exemplo, ir registrando no quadro:

a) $\frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{4}{2}$

b) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}$

c) $\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{4}{4}; \frac{5}{4}; \frac{6}{4}$

d) $\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{5}{5}; \frac{6}{5}; \frac{7}{5}$

e) $\frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{4}{6}; \frac{5}{6}; \frac{6}{6}; \frac{7}{6}; \frac{8}{6}$

f) $\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{6}{7}; \frac{7}{7}; \frac{8}{7}; \frac{9}{7}$

g) $\frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{3}{8}; \frac{4}{8}; \frac{5}{8}; \frac{6}{8}; \frac{7}{8}; \frac{8}{8}; \frac{9}{8}; \frac{10}{8}$

A criança vai repetindo o que está sendo escrito, como se fôra fazendo uma contagem de partes fracionárias. Depois, focaliza-se sua atenção para o objetivo específico. Poder-se-á dizer: — Olhem as frações adiante da letra **a**. São meios. Entre essas frações, qual será igual a 1 inteiro?

Na hipótese de haver indecisão na resposta, pelo grau de dificuldade da pergunta, a professôra procura facilitá-la, indagando:

— De quantos meios precisarei para ter um inteiro? Que fração me diz isto? Muito bem! 2/2 é o mesmo que um inteiro.

— Olhemos, agora, na letra **b**. Que fração é igual a um inteiro? Muito bem: Preciso de 3/3 para ter um inteiro.

— Olhem bem adiante da letra **c**, a fração que é igual a um inteiro. Quando acharem levantem a mão. Qual é? Procurem agora nas letras: **d, e, f** e **g**. Acharam?

— Farei, agora, uma pergunta e vocês vão precisar pensar muito antes de responder: Como se conhece, só de olhar para a fração, que ela é igual a um inteiro?

Depois:

— Por que tôdas as frações que têm o mesmo número acima e abaixo do traço são iguais a um inteiro?



Naturalmente que a resposta a estas 2 perguntas é o importante coroamento de tôdas as atividades que levamos a efeito anteriormente. Se repetimos tantas vêzes é porque quem aprende precisa perceber a característica fundamental através de várias circunstâncias.

A professôra pode, depois, planejar outras atividades, a fim de que o conhecimento se firme. A criança adquiriu, assim, um ponto de referência que utilizará para identificar frações menores e maiores que um inteiro. Poderá dizer:

— Olhem as frações iguais a um inteiro que já conhecem tão bem. Digam quais são.

— Agora, olhem as frações que estão no quadro, adiante da letra **a** e digam: Quais as frações maiores que um inteiro? E adiante da letra **b**? E adiante da letra **c**? E assim por diante.

— Vocês mostraram conhecer bem as frações maiores que um inteiro. Pensem bem antes de responder a pergúnta que vou fazer: Como vocês conheceram, só de olhar para a fração, que ela é maior que um inteiro?

Não podemos furtar-nos de comentar a experiência que tivemos, observando a professôra que dirigiu uma aula com orientação semelhante. A esta pergunta obteve uma resposta geral: — É porque o número de baixo e de cima são diferentes. Realmente, neste trabalho de conceituação, a criança parte de uma caracterização geral. A boa técnica reside em a professôra não retrucar, porquanto existe uma verdade parcial na afirmação. Dêsse ponto em que está, a criança é levada a especificar a diferença entre numerador e denominador, quando se trata de uma fração imprópria.

Poderá a professôra prosseguir:

— Muito bem! Vocês conheceram as frações maiores que um inteiro, porque os números com os quais as escrevemos são diferentes. Olhem a fração 1/2. É maior ou menor que um inteiro? Você disse **menor** e os números são diferentes também.

— Olhem, agora 3/4; maior ou menor que um inteiro? Os números são diferentes.

— Então! Não posso dizer que conheço as frações maiores que o inteiro, porque os números são diferentes. Isto também é uma verdade nas frações menores que um inteiro.

Esta observação levará por certo a criança a definir melhor a fração imprópria, observando que, neste caso, o numerador é maior que o denominador. Podemos registrar as generalizações atingidas num cartaz e deixar na sala. São descobertas que a classe fêz e das quais muito se orgulha.

> Minhas descobertas
>
> – Quando o numerador e igual ao denominador a fração e' igual a um inteiro: $\frac{3}{3}$
>
> – Quando o numerador e' menor que o denominador a fração e' menor que um inteiro: $\frac{3}{4}$
>
> – Quando o numerador e' maior que o denominador a fração e' maior que um inteiro: $\frac{4}{3}$
>
> Sabe você por que isto e' verdade?

Esperamos que a professôra venha percebendo o quanto



a criança precisa pensar durante atividades como a que mencionamos. Durante todo o ensino de frações procuramos colocá-la diante de problemas, que exigem árduo trabalho de raciocínio.

Se o desenvolvimento da classe o permitir, poder-se-á introduzir a expressão «frações impróprias», de acôrdo com sugestões da página 136, bem como a expressão «fração própria».

### As operações

Constará de nosso trabalho uma parte especialmente dedicada às operações, razão pela qual não faremos aqui comentário mais minucioso.

A professôra descobre sempre oportunidades, mesmo relacionadas às atividades já citadas, para levar a criança a:

— juntar partes fracionárias para descobrir o total;

— retirar partes fracionárias de um total, para verificar o resto;

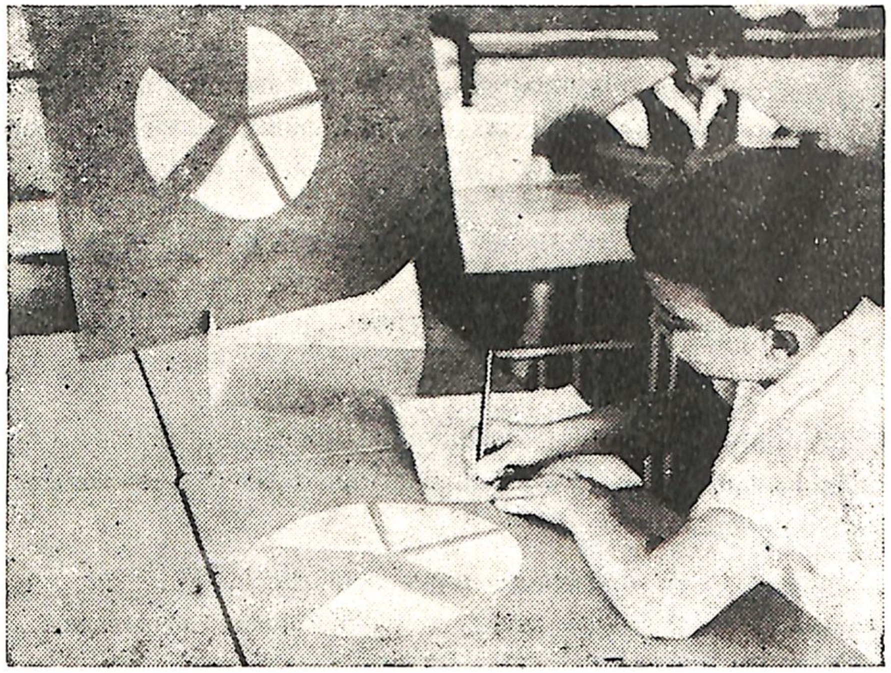
— repetir várias vêzes uma determinada parte fracionária para encontrar o produto;

— dividir uma determinada parte fracionária em partes iguais ou dividir um total de partes fracionárias em grupos iguais, para encontrar o resultado, etc.

Tôdas estas operações realizadas com o material concreto formam a melhor preparação para um posterior registro com os símbolos. Por exemplo:

— Vamos colocar, aqui, no flanelógrafo 1/5. Agora coloquemos 3/5. Olhem bem e respondam: Quanto temos ao todo no flanelógrafo?

— Vamos fazer esta mesma operação usando símbolo?



Consultando a parte referente às operações, a professôra tomará as etapas possíveis de serem desenvolvidas na 3ª série, realizando um trabalho graduado, de maneira que o aluno vá se despredendo do material para atingir o simbolismo, que constitui a meta final no ensino da aritmética, a ciência dos números.

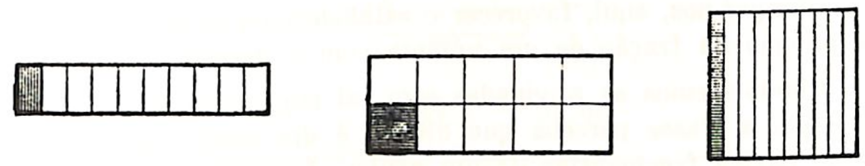
### Décimos e centésimos

Não queremos encerrar nossas considerações sem uma observação acêrca do inteiro quando dividido em 10 e 100 partes iguais. Embora o 100 seja um denominador por demais alto incluímo-lo entre os que devem ser estudados, por ser básico na compreensão de nosso sistema de medidas e de nosso sistema monetário.



É preciso que a criança veja várias coisas de tamanho e formato diferentes divididos em 10 e 100 partes iguais. É preciso que considere o tamanho e forma de cada parte em relação ao tamanho e forma do inteiro de onde foi tirado.

Há uma razão para esta nossa insistência. Temos observado que muitas crianças ligam a palavra **décimo** à palavra **decímetro** como se décimo significasse apenas decímetro. Esta conexão defeituosa leva-a a conceber o décimo como sendo sempre do mesmo tamanho e do mesmo formato: é sempre a décima parte do metro. Ora, podemos ter 1/10 de vários tamanhos e formatos e teremos um decímetro sempre do mesmo tamanho, pois é uma fração de uma medida estandardizada. O mesmo comentário podemos fazer em relação ao centésimo.



O conhecimento de algumas relações nesta aprendizagem de décimos e centésimos será de grande alcance para o aluno. Terá oportunidade, assim, de descobrir resposta para perguntas como:

— O que é maior: 1/10 ou 1/100? Por que?

— De quantos décimos preciso para ter a metade do inteiro?

$$\frac{1}{2} = \frac{?}{10}$$

— De quantos centésimos preciso para ter a metade do inteiro?

$$\frac{1}{2} = \frac{?}{100}$$

— De quantos centésimos preciso para ter um décimo do inteiro?

$$\frac{1}{10} = \frac{?}{100}$$

— Quantos centésimos há em 2/10? em 3/10? em 4/10?

Várias outras questões levá-lo-ão a pensar e, algumas vêzes, a consultar material, desenhos ou diagramas para encontrar as respostas. Poderá atingir muitas outras relações, tudo dependendo, naturalmente, da maturidade mental da classe.

### Fração de um grupo

Cumpre-nos, aqui, favorecer o estabelecimento sistemático da relação da fração de um número com a divisão.

Conduziremos as atividades com tal riqueza de experiências que a classe perceba que dividir é um modo rápido de achar partes fracionárias de um grupo. E assim chegará às seguintes conclusões:

a) — para achar um meio de um número, divido o número por 2;

b) — para achar 1/3, divido por 3; 1/3 do número é a terça parte dêsse número;

c) — para achar 1/4, divido por 4; 1/4 do número é a quarta parte dêsse número etc.

Durante algum tempo trabalhamos apenas com a fração unitária (fração cujo numerador seja 1). Encaminhe-se o ensino para que o aluno perceba que o quociente encontrado representa um meio, um têrço ou um quarto do número com o qual estamos trabalhando. Assegurado êste conhecimento a professôra, cautelosamente, leva-o a concluir, por exemplo, que:

a) — quando desejamos encontrar um quarto de um número eu o divido por 4;

b) — se eu quero **dois** quartos, tenho que tomar o que representa um quarto, duas vêzes, isto é, a metade do número;



c) — se eu quero **três** quartos, tenho que tomar o que representa um quarto, **três** vêzes;

d) — se eu tomar **quatro** quartos, tomo o número todo.

Estas relações são feitas lentamente e diante de muitos e muitos exemplos. É preciso que a professôra não exija que a criança resolva problemas envolvendo tais relações, antes de estar certa de que os alunos hajam, realmente, atingido a compreensão.

$\frac{1}{4}$ de 80 é o mesmo que

$$80 \,\underline{|\; 4\;}\quad 20$$

$20$ é $\frac{1}{4}$ de 80

Como coroamento da aprendizagem a professôra ajudará na construção da regra a ser usada pela classe, em todos os casos em que necessitar encontrar qualquer fração de um número. Esta regra deve revelar a linguagem simples da criança, porquanto ela mesma a formulou.

Temos, nas experiências narradas, partido de um todo para descobrir a fração dêsse todo. Vamos, agora, levar a criança a perceber que, conhecendo parte do todo é possível descobrir o todo.

Proponhamos o problema:

— Eu sei que 1/4 de um número é 30. Qual será êsse número?

Uma questão como esta, quando proposta pela 1ª vez, sê-lo-á dentro da sala de aula, para que a mestra possa acompanhar as possíveis dificuldades. Permite-se que a criança a resolva usando seus próprios recursos, pelo caminho que melhor lhe convir. Virá, depois, o comentário sôbre as várias soluções apresentadas. Alguns terão usado a contagem:

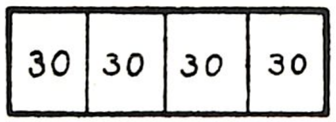
$\frac{1}{4}$ é 30

$\frac{2}{4}$ é 60

$\frac{3}{4}$ é 90

$\frac{4}{4}$ é 120

Outros, terão usado o desenho para atingir uma conclusão:




30 + 30 + 30 + 30 = 102

Outros usarão a relação:

$\frac{1}{4}$ é 30

$\frac{2}{4}$, que é a metade do inteiro, é 60.

O número será 120, que é o dôbro de 60.

Por fim alguns usarão a multiplicação, expondo seu pensamento. Se 1/4 é 30, 4/4 será $4 \times 30 = 120$.

O valor do comentário dos vários caminhos seguidos não pode ser subestimado. Todos participam, cada um contribuindo



de acôrdo com sua capacidade individual. Desta participação surge, naturalmente, o enriquecimento do pensamento.

Podemos, depois, levar a criança a fazer sua própria regra, que usará sempre que necessário. Ela gosta de obter um meio de resolver os problemas com maior rapidez.

Experiências que possibilitam a relação entre a parte fracionária de um número e a divisão de inteiros foram tôdas planejadas, quando o número dado possibilita uma divisão exata.

Poderão, entretanto, surgir problemas como:

— Quanto é a metade de 7? a metade de 9? um têrço de 7? um quarto de 10?

A resolução de tais questões levará a classe à interpretação do resto da divisão, usando-o como numerador de uma fração que será anexada ao inteiro do quociente, tendo como denominador o divisor. Levemos a criança a compreender a formação desta fração, vendo seu significado matemático. O resto constituirá parte do quociente, sendo anotado como uma divisão indicada, razão pela qual o divisor será o denominador. Com experiências semelhantes a criança amplia o conhecimento relativo à fração, adquirindo noções importantes para seu desenvolvimento em aritmética.

Algumas comparações serão feitas, para que a classe tenha oportunidade de fixar conhecimento já adquiridos. Por exemplo:

O que é mais

$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ de 40? por que?

$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{8}$ de 80? por que?

$\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{6}$ de 60? por que?

$\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$ de 120? por que?

$\frac{1}{8}$ ou $\frac{7}{8}$ de 80? por que?

$\frac{2}{5}$ ou $\frac{3}{5}$ de 100? por que?

As crianças, quando bem preparadas, sentem um prazer imenso em completar igualdades, como:

$$\frac{1}{2} \text{ de } 60 = \frac{?}{4} \text{ de } 60$$

$$\frac{1}{3} \text{ de } 90 = \frac{?}{6} \text{ de } 90$$

$$\frac{1}{10} \text{ de } 100 = \frac{?}{100} \text{ de } 100$$

Antes de pedir que a classe encontre o número faltoso em tais equações, é necessário que a professôra faça uma avaliação do conhecimento que possui do significado da igualdade. Podemos ajudá-la, com uma introdução, indagando:

— A metade de 60 será igual a quantos quartos de 60? Vamos pensar?

Posteriormente, a criança resolve a operação indicada nos membros da equação, provando assim que a igualdade procede.

Muitas outras ocasiões são dadas, através de uma graduação natural de dificuldades, para que haja fixação e possibilidade de que se formem as relações matemáticas.

### Fração das Medidas

O que vai importar-nos sobremaneira aqui é o amadurecimento dos conceitos a que nos referimos, quando falamos das atividades para a 2ª série. Nenhum conceito matemático recebe seu coroamento total em determinada série. Há, por assim dizer, uma possibilidade de as crianças aprofundarem conceitos já percebidos, descobrindo sempre novas relações, à proporção que se amadurecem mentalmente e vivem novas experiências.



Com que frações e com que medidas iremos trabalhar?

**O metro** — Inicialmente, deve-se criar oportunidade para a criança visualizar e estimar o tamanho relativo a:

um metro
meio metro
1/4 do metro
3/4 do metro
1/10 do metro,

bem como suas relações com a quantidade de centímetros.

Quando a criança percebeu que pode encontrar um décimo de vários objetos de diferentes formas e tamanhos, a professôra encaminha a atividade de maneira que o aluno vá encontrar também 1/10 do metro.

— 1/10 do metro terá sempre o mesmo tamanho?

Esta pergunta levará a criança a fixar o conhecimento do metro como medida padrão. Se o inteiro possui sempre o mesmo tamanho, a sua fração também o terá. Compreendida e sentida esta relação, que favorece a percepção da aritmética como um sistema de idéias, o aluno aprende que a décima parte do metro recebe um nome especial — **decímetro**. O estudo da composição do vocábulo ajudará a fixação de seu significado.

Outras questões surgem; para respondê-las, sempre que necessário, a criança terá material à mão:

— Mostre-me 1/10 do metro.
— Mostre-me, agora, 2/10.
— Quantos décimos haverá em meio metro?
— Quantos décimos em 1 metro? etc.

Muitas crianças percebem a centésima parte do metro, antes da décima parte. É a fôrça do uso social que é capaz de tornar fácil o que, pela lógica, é mais difícil.

Perceberá, então, o aluno que o metro é dividido em 100 partes iguais. Comparará 1/100 do metro com 1/10. Saberá dizer porque o primeiro é menor que o segundo; que 1/10 é o mesmo que 10/100, etc.

Atividades são planejadas para que a classe descubra as seguintes relações:

| | | |
|---|---|---|
| 1 metro | — | 100 centímetros |
| 1/2 metro | — | 50 centímetros |
| 1/4 metro | — | 25 centímetros |
| 2/4 metro | — | 50 centímetros |
| 3/4 metro | — | 75 centímetros |
| 1/10 metro | — | 10 centímetros |
| 1/100 metro | — | 1 centímetro, etc. |

**O quilo** — Deixemos que a classe viva experiências ricas nas quais trabalhe com meio quilo e um quarto de quilo, a fim de formar base que lhe permita perceber frações menores.

Convenhamos que estimar o pêso de um milésimo do quilo, ou seja, uma grama, exige uma habilidade que requer certo amadurecimento.

De acôrdo com o nível da classe, atividades são planejadas, para que descubra que:

| | | |
|---|---|---|
| 1 quilo são | — | 1000 gramas |
| 1/2 quilo são | — | 500 gramas |
| 1/4 quilo são | — | 250 gramas |
| 2/4 quilo são | — | 500 gramas |
| 3/4 quilo são | — | 750 gramas |
| 1/10 quilo são | — | 100 gramas |
| 1/100 quilo são | — | 10 gramas, etc. |

A balança «Roberval »é o tipo que melhor permite a comparação de pesos e o descobrimento das relações de equivalência.

Em um prato a criança pode colocar o pêso de 1 quilo. Quantos pesos de 500 gramas deverá colocar no outro prato para ter o equilíbrio? Neste caso, que fração de 1 quilo é 500 gramas? A professôra ajuda a criança a descobrir que tem



o mesmo quilo dividido em 2 partes iguais; uma das partes será, então, 1/2 quilo.

Novas experiências podem ser promovidas:

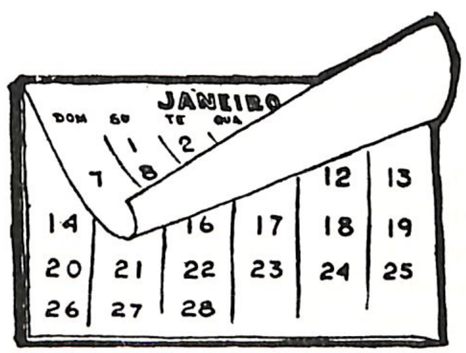
— Vamos colocar, agora, o pêso de um quilo. No outro prato ponhamos pesos de 100 gramas até conseguirmos o equilíbrio dos pratos. Quantos pesos de 100 gramas necessitamos? Que fração de 1 quilo ou 1.000 gramas é o pêso de 100 gramas?

— Como pensou você para dar esta resposta?

As experiências serão encaminhadas de forma que a criança esteja sempre à frente de uma situação problemática real, na qual empenha-se com muito pensamento, para encontrar a solução. Percebendo-se que algumas relações, aqui citadas, estão acima da capacidade dos alunos, serão elas adiadas para mais tarde, porquanto, queremos evitar o ensino decorativo que não esteja de acôrdo com o nível de maturidade da classe.

**O ano, o mês, o dia e a hora** — As frações já estudadas podem ser vistas, também, quando consideradas inteiros: o ano, o mês, o dia e a hora.

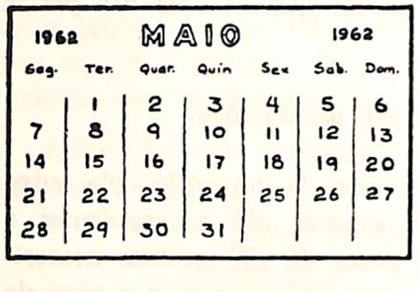
Deixemos que criança pense, investigue e complete tabelas semelhantes a que apresentamos.




**O ANO**

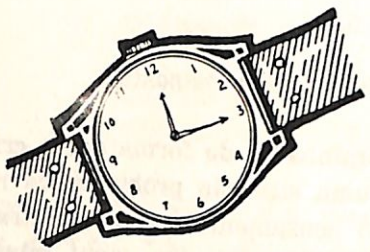
O ano tem 12 meses

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1/2 ano são | | ...... | meses |
| 1/4 | » | » ...... | meses |
| 3/4 | » | » ...... | meses |
| 1/6 | » | » ...... | meses |
| 1/3 | » | » ...... | meses |




**O MÊS**

Um mês são 30 ou 31 dias
1/2 » » ... » ... »
1/3 » » ... » ... »
2/3 » » ... » ... »
1/5 » » ... » ... »
1/6 » » ... » ... »

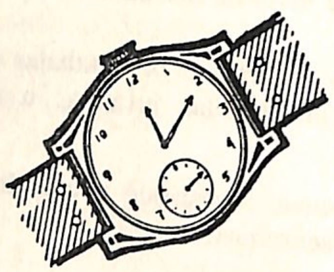


**O DIA**

1 dia são 24 horas
1/2 » » ... »
1/4 » » ... »
3/4 » » ... »
1/6 » » ... »

**A HORA**

A hora tem 60 minutos
1/2 » » ... »
1/4 » » ... »
2/4 » » ... »
3/4 » » ... »
1/3 » » ... »
1/5 » » ... »
1/6 » » ... »
1/10 » » ... »



**Fração do dinheiro**

Se na segunda série levamos a classe a encontrar meios e quartos de quantias que possibilitassem uma divisão **exata,** sem maiores dificuldades, vamos, aqui, encaminhar o trabalho de maneira que os casos mais difíceis surjam em graduação, até que na resposta haja a presença de centavos.



Partamos de relações que serão fàcilmente vencidas:

1/2 de Cr$ 20
40
60
80
100, etc.

Depois:

1/2 de Cr$ 30
50
70
90
110, etc.

Naturalmente que a professôra, ao trabalhar com terços, quartos, quintos etc., terá a mesma cautela em graduar os exemplos que apresenta. Por exemplo:

1º — um quarto de Cr$ 40
80
120
160
200, etc.

2º — um quarto de Cr$ 44
48
84
88
124, etc.

3º — um quarto de Cr$ 132
136
140, etc.

Quando a professôra planeja problemas, em que pede a quarta parte de determinada quantia, precisa, antes, examinar os elementos numéricos envolvidos, a fim de saber se tais dificuldades já foram vencidas especìficamente e não virão criar razões de fracasso.

A criança, no início, aprende a encontrar 1/4 da quantia. Descobre, depois, que pode empregar nesta situação as mesmas generalizações já usadas, quando resolvia as questões envolvendo a fração de um número.

As situações problemáticas serão apresentadas à classe que terá a assistência da professôra, sempre que necessário. De muito boa técnica é pedir que a criança explique «como» encontrou a resposta. Terá, assim, oportunidade de expressar um pensamento, empregando a linguagem específica, bem como proporciona à professôra ocasião de estudar os processos de raciocínio mais comuns e diagnosticar causas de êrro.

A honestidade e coerência obriga-nos a dizer que os problemas que empregamos no ensino de frações, em sua maioria, não são do tipo a que chamamos da **vida real** ou da experiência da criança. Vejamos alguns:

> Um queijo custa Cr$ 800. Se eu comprar 1/4 do queijo, quanto pagarei?

> Ganhei Cr$ 200 e já gastei 3/5 do dinheiro. Ainda tenho ........

> Um quarto do queijo custa Cr$ 250. Qual será o preço do queijo inteiro?

Convenhamos que são situações matemáticas colocadas dentro da linguagem do problema historiado, mas não correspondem às situações problemáticas que nos ocorrem na vida diária, quando compramos queijo ou gastamos dinheiro. Se nós o usamos mesmo assim, é porque temos, neste caso, um objetivo específico de perceber se a criança é capaz de empregar conceitos anteriormente adquiridos em exemplos e exercícios numéricos, em uma situação diferente.



A atividade é realizada, então, para atender, muito mais, ao objetivo matemático da matéria, que a seu objetivo social.

Esperamos, assim, ter preparado as crianças para que possam atingir a um trabalho mais sistemático na 4ª série, vendo sentido naquilo que fazem, compreendendo a razão, o «porque» dentro de cada passo de um determinado processo.

## Capítulo 6



# FRAÇÕES NA 4ª SÉRIE

A aritmética, ensinada à base da compreensão, é uma série organizada de idéias, processos e princípios relacionados. É um sistema de pensamento no qual conceitos e habilidades são desenvolvidos de uma forma sistemática e ordenada. Em geral, quando esta ordem e sistema são apreendidos com sentido e compreensão, a criança ganha satisfação e sucesso, resultando disto a segurança em si mesma. Percebe como cada nôvo tópico se relaciona e é construído sôbre aprendizagens feitas anteriormente. Quando um ou mais dêsses conceitos básicos não são aprendidos da melhor maneira e no melhor momento, dificuldades e frustrações podem ocorrer. Desta maneira, as experiências devem ser providas numa seqüência definida e organizada.

Esperamos que nossos leitores tenham verificado que os conceitos sôbre frações são trabalhados ao longo de uma linha ininterrupta. Um bom ensino de aritmética não pode ser seccionado. Assim, quando a professôra toma uma classe irá iniciar o ensino partindo do ponto em que as crianças estão e não do ponto prescrito pelo programa. Esperamos que a mestra encontre nas atividades programadas para a 3ª série sugestões para:

— promover um inventário
— diagnosticar as dificuldades
— anotar os conhecimentos que pedem re-ensino
— anotar os conhecimentos que necessitarão ensino

— amadurecer e aprofundar conceitos
— encaminhar a criança na aquisição de um conhecimento mais abstrato
— fazer a criança atingir generalizações
— fixar conhecimentos, etc.

Muitas vêzes usamos as mesmas atividades, os mesmos materiais, mas com objetivos diferentes, atendendo diferentes etapas do processo de aprendizagem.

Tomemos, portanto, como ponto central de nosso ensino **a criança,** suas necessidades e potencialidades.

### O que é fração

Depois que se verifica a compreensão que a classe possui do que seja uma fração pelo uso enriquecido em várias experiências, pode-se pedir que a criança, usando suas próprias palavras, explique o que é uma fração. É o ambiente emocional da classe que vem favorecer ou dificultar a espontâneidade da criança, quando procura definir. A professôra precisa mostrar-se amiga de tal forma, que o aluno não tenha receio de falar. Enquanto observa o que a criança diz, a mestra colhe excelente material de grande utilidade para seu planejamento futuro.

Muitas vêzes a definição é parcial. Aceitamo-la e providenciamos atividades de forma que tenha possibilidade de completar seu pensamento. A descrição que a criança dá do que seja uma fração, por exemplo, é o coroamento de tôdas as impressões que vem recebendo, desde o início da aprendizagem na 1ª série. Sòmente no fim da 4ª série podemos esperar que, definindo a fração, o aluno a perceba em seu variado significado, e não apenas como «uma das partes iguais da unidade».

Acreditamos que na 4ª série as crianças possam também perceber a fração como comparação entre 2 grandezas. Muitas situações reais surgem em que o aluno necessita fazer comparações. Se Paulo trouxe Cr$ 20 e Luiz Cr$ 30, as 2 quantias podem ser comparadas pela subtração ou pela divisão.



Usando o primeiro processo, concluiremos que Paulo tem Cr$ 10 menos que Luiz ou que Luiz tem Cr$ 10 mais que Paulo. As 2 quantias serão também comparadas pela divisão. Diremos que Paulo tem 2/3 do dinheiro que Luiz possui ou que Luiz possui 3 vêzes o que Paulo possui. Quando as crianças comparam os dias que freqüentaram a escola com os dias letivos do mês encontram, como resultado, em alguns casos, uma fração. Marília freqüentou 15 dias de aula num mês de 20 dias letivos. Vamos comparar as 2 quantidades? Marília freqüentou 15 dos 20 dias, ou seja, 15/20 que é o mesmo que 3/4.

As experiências com esta relação devem ser ricas para que a criança possa sentir o significado do que realiza. Quando a classe compreende realmente esta relação, usa-a, espontâneamente, quando necessita comparar grandezas.

### Numerador e denominador

Na 4ª série, estabilizada a compreensão em têrmos concretos, cumpre-nos dedicar atenção especial ao trabalho de elaboração de conceitos e generalizações, numa graduação natural do processo de aprendizagem. Procura-se, assim, reunir todos os conhecimentos, tôdas as percepções que vêm sendo adquiridos desde a 1ª série, para que a criança possa enfeixá-los nessas generalizações. A elaboração de regras e definições vai exigir uma orientação habilidosa no desenvolvimento de uma linguagem concisa e exata, com o uso do vocabulário específico.

Estabelecida a resposta à pergunta: — O que é fração? — a classe dedica-se ao trabalho de aperfeiçoar a definição, já composta em série anterior, do que seja numerador e denominador, após algumas experiências renovadas. É uma oportunidade, que se tem, de comparar a evolução conceitual e a possibilidade de verbalização de um ano para outro, porquanto êste trabalho iniciou-se na 3ª série.

### A comparação

Conhecida a função e o nome específico dos têrmos da fração, a professôra encaminhará o trabalho de maneira que a criança possa **comparar** frações, para extrair relações mais abstratas. Através das atividades de comparação, o aluno decide a que têrmo observar, quando necessita escolher qual a maior ou qual a menor. A classe atingirá, assim, as seguintes conclusões:

1 — quando temos o mesmo numerador, quanto **maior** fôr o denominador, **menor** será o valor da fração.

2 — quando temos o mesmo denominador, quanto **maior** o numerador, **maior** será o valor da fração.

Sempre que as crianças chegam a essas generalizações, é bom que a professôra indague «porque» isto constitui uma verdade aritmética. Quando sente, no aluno, certa dúvida em explanar a verdade aritmética, permite que use algum desenho ou material concreto.

As crianças compararam, assim, as frações com o mesmo numerador e frações com o mesmo denominador.

Poderão, depois, ser guiadas a comparar frações com numeradores e denominadores diferentes. Os pontos de referência usados, (numeradores iguais, observar os denominadores; denominadores iguais observar os numeradores) não mais funcionarão. As crianças são, então, levadas a concluir que em tais frações necessitamos de procurar um **denominador comum**. Teremos, portanto, que transformá-las em suas equivalentes para facilitar a comparação.

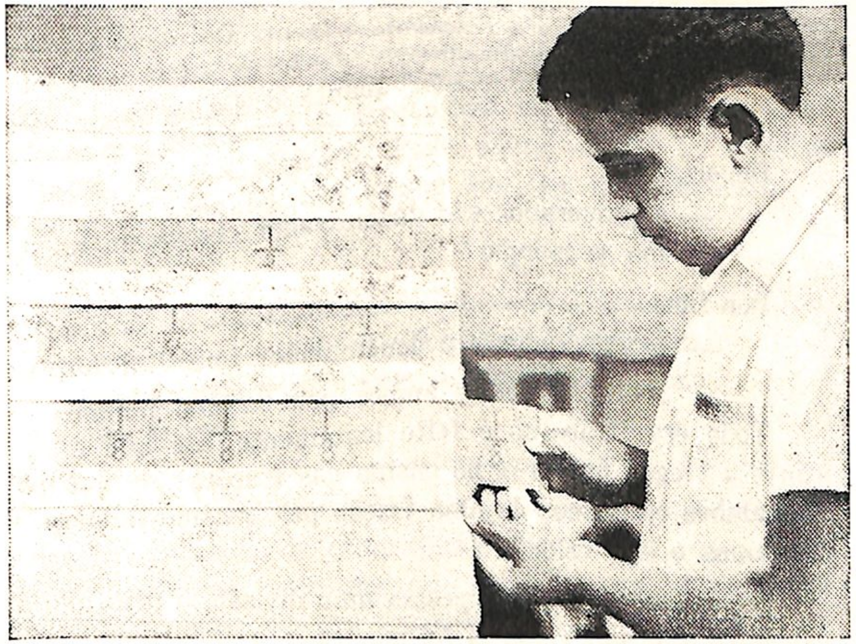
A aquisição da idéia de denominador comum é básica. A professôra deve encaminhar as atividades, de forma que a criança perceba que para comparar, somar e subtrair frações terá que representá-las por numerais fracionários com o mesmo denominador.

Autores mais modernos aconselham que a criança seja encaminhada na aquisição do conceito de denominador comum antes mesmo de ser iniciada nos processos de adição e subtração de frações, onde êste conhecimento será aplicado.

**A equivalência**

Nas séries anteriores a classe recebeu bastante experiência para compreender **quando, como** e **porque** conseguimos frações com o mesmo valor, usando material concreto, diagramas ou desenhos:





Por êste processo, entretanto, a criança terá possibilidade de encontrar um número de equivalentes muito limitado pela natural contingência do material que possui. Não vamos, portanto, deixá-la nesta etapa. Queremos que descubra, por si mesma, um meio, uma regra geral, que funcione no momento em que necessitar das equivalentes.

Suponhamos que o aluno faça, guiado por inteligentes questões, uma tabela, como:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4};\ \frac{3}{6};\ \frac{4}{8};\ \frac{5}{10};\ \frac{6}{12}\ \text{etc.}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6};\ \frac{3}{9};\ \frac{4}{12};\ \frac{5}{15};\ \frac{6}{18}\ \text{etc.}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8};\ \frac{3}{12};\ \frac{4}{16};\ \frac{5}{20};\ \frac{6}{24}\ \text{etc.}$$

Ainda guiado pela professôra, observa a relação entre as frações equivalentes e a fração de origem. De início a relação que identifica é generalizada:

— tanto o numerador quanto o denominador foram crescendo

Depois:

— o numerador e o denominador cresceram na mesma proporção

Por fim:

— o numerador e o denominador foram encontrados, multiplicando-se ambos pelo mesmo número.

Todo êsse trabalho é feito lentamente, até que a classe atinja a «regra de ouro» no ensino das frações: **se multiplicamos ambos os têrmos de uma fração pelo mesmo número, não alteramos o seu valor.**

Desde que a fração expressa uma divisão, o princípio aqui exposto é aplicado, como já foi mostrado, à divisão de inteiros: o dividendo e o divisor podem ser multiplicados pelo mesmo número, sem afetar o quociente. É uma oportunidade que a professôra explorará para relacionar o ensino de divisão ao ensino de fração.

Vários exercícios serão feitos, a fim de haver a fixação do conhecimento. Outrossim, pode a professôra dar oportunidade à criança de verificar a veracidade da regra, usando meios mais concretos. É preciso não abandonar a técnica de, uma vez por outra, indagar o «porque» da regra. É de muito bom resultado que façamos esta «volta ao concreto, à compreensão, ao porque», mesmo depois que nos encontremos na etapa abstrata.

### Simplificação de frações

A criança descobriu, quando trabalhou com as equivalentes, uma parte da **regra básica** do ensino das frações.

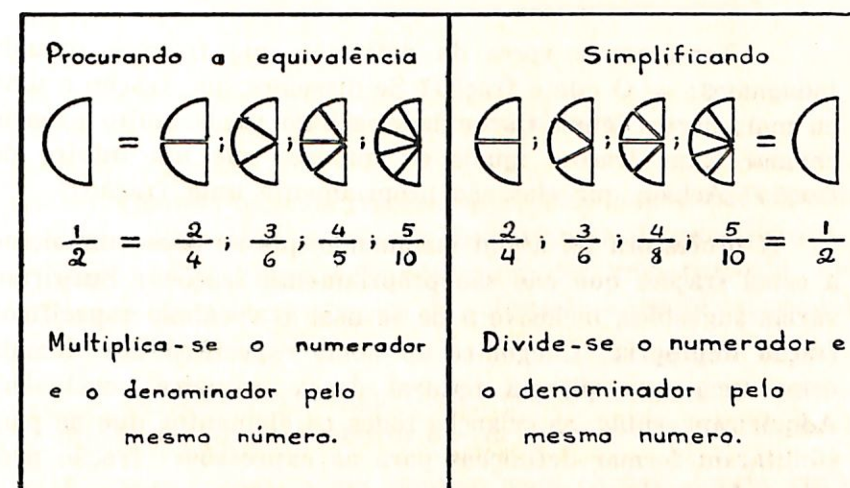
Desde que 1/2 = 2/4, é igualmente verdade que 2/4 = 1/2.



Desde que **3/4 = 12/16 podemos** dizer, por outro lado que 12/16 = 3/4. Nestes **casos**, ambos os têrmos da fração dada foram divididos pelo mesmo número. Descobrindo o significado desta relação, a classe atinge a segunda parte da regra: **dividindo ambos os têrmos da fração pelo mesmo número, o valor da fração não fica alterado**. Pode, agora, colocar as 2 partes juntas para formular o princípio que tem sido chamado «A Regra de Ouro das Frações»:

| |
|---|
| Multiplicar ou dividir ambos os têrmos da fração pelo mesmo número não altera o valor da fração. |

Conforme dissemos, todo nosso ensino da operação de frações vai depender da compreensão desta regra. Compreendendo-a, a criança reconhece, por exemplo, que, se se dobra **o número** de partes em que a unidade é dividida (tornando-as na metade do tamanho) para restaurar o original valor da fração, precisa-se tomar duas vêzes o número de partes. Por outro lado, se se toma metade do número de partes para se ter a mesma **fração**, as partes terão o dôbro do tamanho.



## Frações próprias e impróprias — Número misto

As crianças, na 3ª série, devem ter estabelecido as características essenciais das frações menores, iguais e maiores que um inteiro. Não terão dificuldade, assim em reconhecê-las e dizer «porque» são elas maiores, menores ou iguais a um inteiro. Nossa preocupação será, aqui, introduzir o vocabulário específico, designativo de cada uma dessas frações.

Em nosso trabalho experimental, na 4ª série primária do Instituto de Educação de Belo Horizonte, sugerimos à professôra que, paralelamente às atividades numéricas que recapitulam conhecimentos, neste setor, planejadas para a 3ª série, desenvolvesse atividades de linguagem, que levassem a classe a perceber o significado comum das palavras: própria e imprópria.

Depois que as crianças empregavam estas palavras em seu sentido vulgar, a professôra poderia dizer, por exemplo:

— Vamos hoje escrever no quadro várias frações iguais ou maiores que um inteiro:

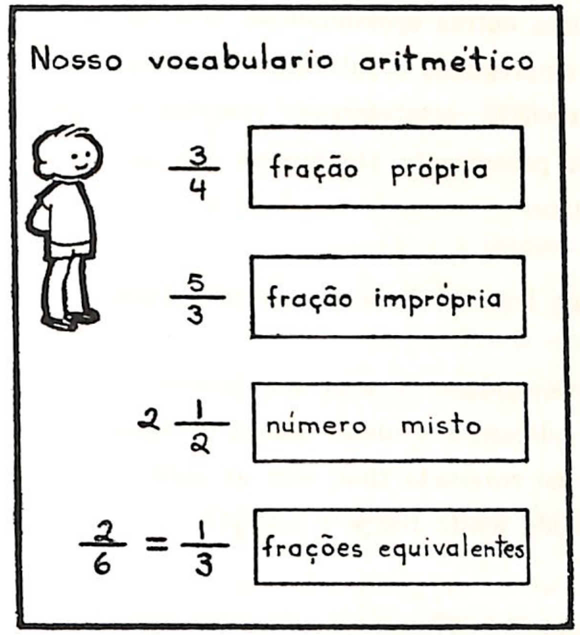
$$\frac{7}{4} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{9}{7} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{4}{3} \quad \text{etc.}$$

— Lembram-se vocês da definição que fizemos quando indagamos: — O que é fração? Se dissemos que fração é uma ou mais partes iguais da unidade, acham vocês muito **próprio** chamar estas frações iguais ou maiores que um inteiro de fração? Acham que elas são pròpriamente uma fração?

A professôra foi assim insinuando que se desse um nome a estas frações que não são **pròpriamente** frações. Surgiram várias sugestões, inclusive a de se usar o vocábulo específico: **fração imprópria**. Chegou-se ao nome específico das demais como uma conseqüência natural dessa primeira conclusão. Adquiriram, então, as crianças todos os elementos que as possibilitaram formar definições para as expressões: fração própria e fração imprópria.



Seguindo a mesma orientação, foi introduzida a expressão **número misto**. A professôra, em conseqüência, chamava a atenção dos alunos para verem que o vocabulário aritmético da classe estava aumentando sempre.




### Extração de inteiros

Quando usamos frações impróprias com valores numéricos não muito altos, a criança, pela riqueza de experiências vividas, não encontra dificuldade em dar uma resposta, raciocinando em têrmos simples de subtração e, às vêzes, até mesmo de contagem.

Peçamo-la que diga (antes que a mecânica lhe tenha sido imposta), quantos inteiros há em 7/5 e que fração ainda resta.

E, depois, diga como pensou para chegar àquela resposta.

Provàvelmente, dirá: — Em 7/5 tenho 1 inteiro e 2/5. Eu pensei assim: de 7/5 tiro 5/5 que eu sei que é 1 inteiro. 7/5 menos 5/5 é igual a 2/5. Assim eu sei que em 7/5 tenho e inteiro e 2/5.

Muitas outras oportunidades terá para resolver tais problemas empregando a subtração. Estaremos assim garantindo a compreensão, estabelecendo relações e penetrando no processo de pensamento até mesmo dos alunos de nível mental mais baixo.

Como levar a classe a usar um processo mais rápido?

A necessidade de usar um processo mais rápido surgirá quando colocamos o aluno diante de uma fração maior. Êle chegará ao resultado final com as subtrações sucessivas, mas terá tomado muito tempo e energia.

Peçamos à criança que descubra quantos inteiros há em 31/4 e que fração ainda sobra.

$\frac{31}{4}$ menos $\frac{4}{4} = \frac{27}{4}$ retirei 1 inteiro

$\frac{27}{4}$ menos $\frac{4}{4} = \frac{23}{4}$ ............ 1 inteiro

$\frac{23}{4}$ menos $\frac{4}{4} = \frac{19}{4}$ ............ 1 inteiro



$\frac{19}{4}$ menos $\frac{4}{4} = \frac{15}{4}$ ............ 1 inteiro

$\frac{15}{4}$ menos $\frac{4}{4} = \frac{11}{4}$ ............ 1 inteiro

$\frac{11}{4}$ menos $\frac{4}{4} = \frac{7}{4}$ ............ 1 inteiro

$\frac{7}{4}$ menos $\frac{4}{4} = \frac{3}{4}$ ............ 1 inteiro

7 inteiros

Resposta: 7 inteiros e 3/4.

Em geral, quando colocamos o aluno numa situação semelhante a esta, reage pedindo «um jeito mais fácil e que ande mais depressa». Algumas vêzes descobre, por si mesmo, processos mais fáceis de atingir a solução. Exploremos sempre as soluções inventadas pelos alunos.

A divisão guarda uma relação direta com a subtração. É a divisão, muitas vêzes, definida como um método curto de subtrair. O que fizemos, até então, quando procuramos o número de inteiros dentro de uma fração imprópria foi ir retirando a fração equivalente a um inteiro daquele total, em subtrações sucessivas, até esgotar a fração iniciante. Ora, se a divisão é um método curto de subtrair, podemos transformar o problema indagando:

— Quantas vêzes estão 4 quartos contidos em 31 quartos? A operação que mais ràpidamente me diz quantas vêzes um número está contido em outro é a divisão. Assim posso expressar a solução, reduzindo meu esfôrço e energia:

31 quartos | 4 quartos

$$\begin{array}{ll} 3 & 7\,\frac{3}{4} \end{array}$$

Abreviando-a ainda mais:

$$\frac{31}{4} = 31 \;:\; 4 = 7\,\frac{3}{4}$$

Através dessas etapas, depois de realizar vários exercícios com o mesmo objetivo, a criança estabelece sua própria regra: **para transformar uma fração imprópria em número misto, divide-se o numerador pelo denominador; o quociente será o número de inteiros a que se junta a fração restante.**

A regra assim conquistada terá um real significado para quem a conquistou e a criança saberá sempre explicar **porque** o que está dizendo encerra uma verdade matemática.

É de muito boa prática levar a classe, algumas vêzes, a transformar o número misto em fração imprópria, usando a subtração e a divisão. O confronto de 2 processos usados para que se atinja a mesma solução enriquece a experiência, provoca a descoberta de relações e amadurece o pensamento matemático.

Mais tarde, diante da regra, pede-se que a criança faça uma série de transformações. A fixação do conhecimento adquirido, através de muitas experiências para a compreensão, é bastante facilitada e feita num período relativamente rápido.

### Transformação do número misto em fração imprópria

Suponhamos que o número misto 5 3/4 deva ser mudado numa fração imprópria: 5 3/4 é o mesmo que 5 + 3/4. Ela já deve ter aprendido quantos quartos há em um inteiro e, depois,



quantos quartos há em vários inteiros. Terá, portanto, facilidade em perceber que 5 inteiros é o mesmo que 20/4. No número misto em fóco temos 5 inteiros para serem fracionados e, depois, adicionados aos 3/4 restantes. Assim temos: 5 3/4 = 23/4.

Deixemos que a criança por algum tempo use êste ou outro processo longo para transformar o número misto em fração imprópria, até que estejam assegurados a compreensão e o sentido.

Como poderá ser feita a passagem para um processo mais rápido?

Vamos dar um exemplo. Mostremos à classe um número misto: 8 1/3.

O que temos neste número misto? 8 inteiros mais 1/3.

Vamos transformá-lo apenas em terços?

Quantos terços teremos em 8 inteiros?

8 × 3 terços são 24 terços

24 terços mais 1 terço são 25 terços

25 terços é o mesmo que 25/3

Durante algum tempo deixemos que o aluno verbalize tôda a operação. Naturalmente desprender-se-á da mesma, passando a operar: 8 × 3 = 24; 24 + 1, 25/3.

Desta etapa à elaboração da regra teremos muito pouco.

A classe já terá formado o hábito de procurar um processo rápido a ser seguido, sempre que houver necessidade de resolver determinados problemas aritméticos. Vamos auxiliá-la na composição da regra:

> Para transformar um número misto em fração imprópria, multiplicamos o inteiro pelo denominador da fração e somamos o produto ao numerador. O total encontrado será o numerador da fração. O denominador será o mesmo denominador do número misto.

Os têrmos matemáticos são introduzidos depois que a classe demonstra compreender os conceitos básicos. Esta introdução é feita paulatina e especìficamente.

Consideramos, outrossim, os conceitos, generalizações, definições e regras o coroamento total. Êles coordenam e relacionam experiências. Insistimos, entretanto, que sejam resultado do trabalho de elaboração mental de quem aprende.

Também, aqui, é necessário que a professôra faça um planejamento específico para cada generalização. Não tente conseguir elaboração de vários conceitos ou regras ao mesmo tempo, porque fracassará certamente.

Importa muito, no ensino, o clima emocional de sucesso, que deve cercar a professôra e, acima de tudo, as crianças.

**As operações** — Pedimos que o leitor consulte a parte referente às operações, procurando situar sua classe nos casos citados.

**Fração dos números**

Vamos fazer aqui um trabalho de consolidação do que



vimos realizando nas séries anteriores, quando demos à classe inúmeras oportunidades de procurar a fração dos números.

Muitas e muitas experiências serão vividas com êsse conhecimento, para que se fixe a relação entre fração de um número e divisão de inteiros. A professôra encaminhará a criança na conquista das seguintes generalizações:

a) — encontra-se a fração de um número pela divisão;
b) — o quociente é sempre uma parte fracionária do dividendo;

c) — o divisor mostra em quantas partes iguais se dividiu o dividendo;

d) — se eu repetir o quociente (que é uma parte fracionária) tantas vêzes quantas manda o divisor, obterei o grupo inteiro (que é dividendo).

Vamos procurar, com um exemplo, mostrar a relação entre a divisão de inteiros e a fração de um número:

A. Tendo 8 laranjas para repartir entre 4 crianças, quantas laranjas cada criança receberá?

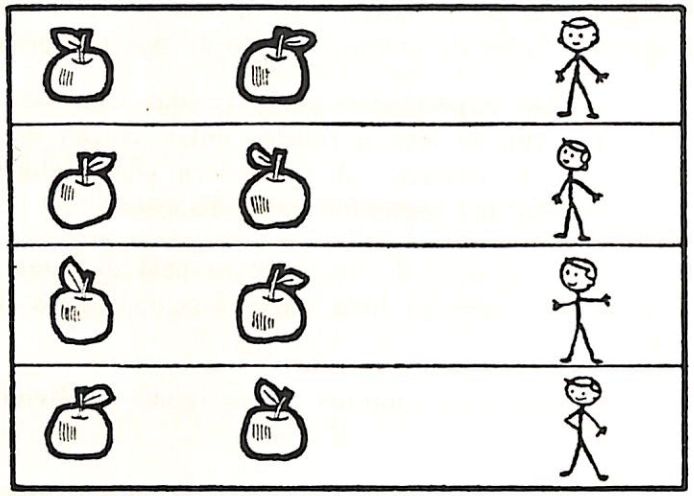
B. Tenho 8 laranjas e vou dar 1/4 dessas laranjas a cada criança. Quantas laranjas cada uma receberá?

Aí estão duas situações enfrentadas pelos alunos desde a 2ª série, que surgem paralelamente. A professôra leva, cada vez mais, a criança a ver que estas duas situações estão relacionadas pelo mesmo sentido matemático.

Resolvamos o primeiro problema:

$$\begin{array}{l|l} \text{8 laranjas} & 4 \\ \cline{2-2} & \text{2 laranjas} \end{array}$$

Não será esta a mesma solução para o 2º problema? 8 laranjas repartidas em 4 grupos iguais, teremos 2 laranjas em cada grupo.



Diante de uma gravura como a que temos acima, podem ser feitas duas perguntas diferentes, atendendo ao sentido da divisão e da fração.

O ensino deve ser realizado de maneira a favorecer a descoberta desta relação. Muitas professôras tentam dizer a criança que esta relação existe, fazendo-a repetir, na esperança de que a repetição traga a aprendizagem. Nosso trabalho é muito mais delicado. Criamos as situações. Planejamos as experiências. Predispomos a classe. Encaminhamos o pensamento. Despertamos o raciocínio através de perguntas. Mas a descoberta final, o «insight», o «estalo» é da criança. Precisamos aprender a esperar, a respeitar o trabalho de seu pensamento.

Quando as experiências foram bastante, os exemplos adequados, e a maneira de conduzir a aula tanto quanto possível perfeita, a professôra sente-se compensada do sacrifício da espera, pelos olhos brilhantes do aluno, por sua fisionomia radiante, quando diz: — Descobri uma coisa! Agora já sei. Tôdas as vêzes que divido por 5, acho 1/5; tôdas as vêzes que divido por 6, acho 1/6.

Outro diz: — Eu pensei diferente. Pensei de outro jeito. Tôda vez que D. Maria pede 1/5 eu divido por 5; tôda vez que pede 1/6 divido por 6.



Outro diz: — É isto mesmo! O resultado da divisão é sempre uma fração do grupo total. O divisor mostra em quantas partes iguais o grupo total foi dividido.

Outras e outras descobertas vão sendo feitas, à proporção que a professôra sugere e apresenta situações problemáticas.

Conforme dissemos no capítulo anterior, quando se planejam atividades para que a classe veja a relação entre a fração de um número e a divisão de inteiros, deve-se explorar também a interpretação do resto na divisão de inteiros, quando é integrado ao quociente como parte fracionária.

### A fração nas outras áreas da aritmética

Englobaremos aqui ligeiros comentários relacionando a fração ordinária às outras áreas do ensino da aritmética.

Terá a professôra que planejar aulas com o objetivo específico de levar a criança a perceber que as frações decimais podem ser escritas de 2 maneiras diferentes:

$\frac{1}{10}$ ou 0,1

$\frac{1}{100}$ ou 0,01

$\frac{1}{1000}$ ou 0,001

Acreditamos que não haverá dificuldade na percepção desta relação, mòrmente quando se realiza atividades com o metro.

Se a professôra partir das sugestões dadas à 3ª série, irá prosseguir, agora, com mais intensidade, trabalhando com:

$\frac{1}{10}$ do metro

$\frac{1}{100}$ do metro

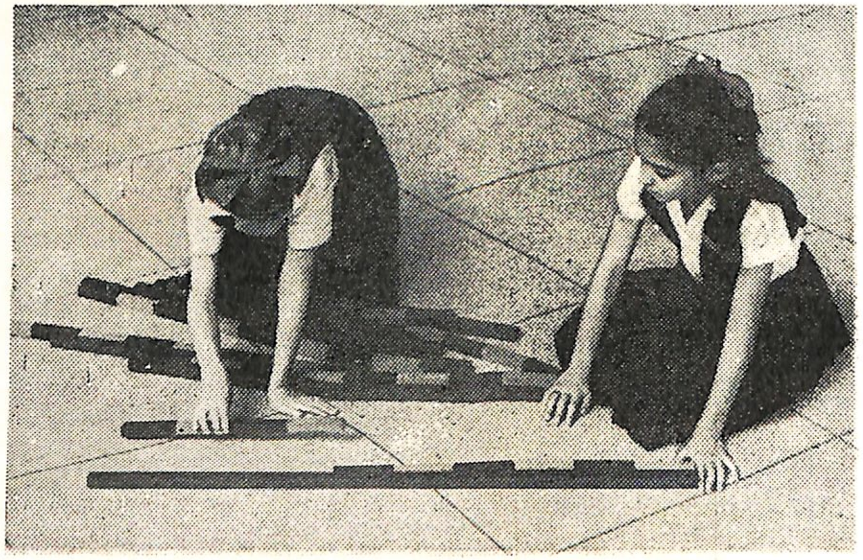
$\frac{1}{1000}$ do metro, deixando que as próprias crianças elaborem tabelas de equivalência, usando também outras medidas do sistema de unidades de medidas. Quando a criança é bem guiada na confecção dessas tabelas, a própria professôra mostra-se surpreendida com a capacidade da classe em ver relações e estabelecer equivalências.

Nova oportunidade de estender o conceito fracionário terá a classe, quando procurar frente ao material concreto (é indispensável) responder a questões, como:

— Quantos decímetros quadrados temos em 1/10 do metro quadrado?

— Quantos décimos do metro quadrado necessitaremos para ter um metro quadrado?

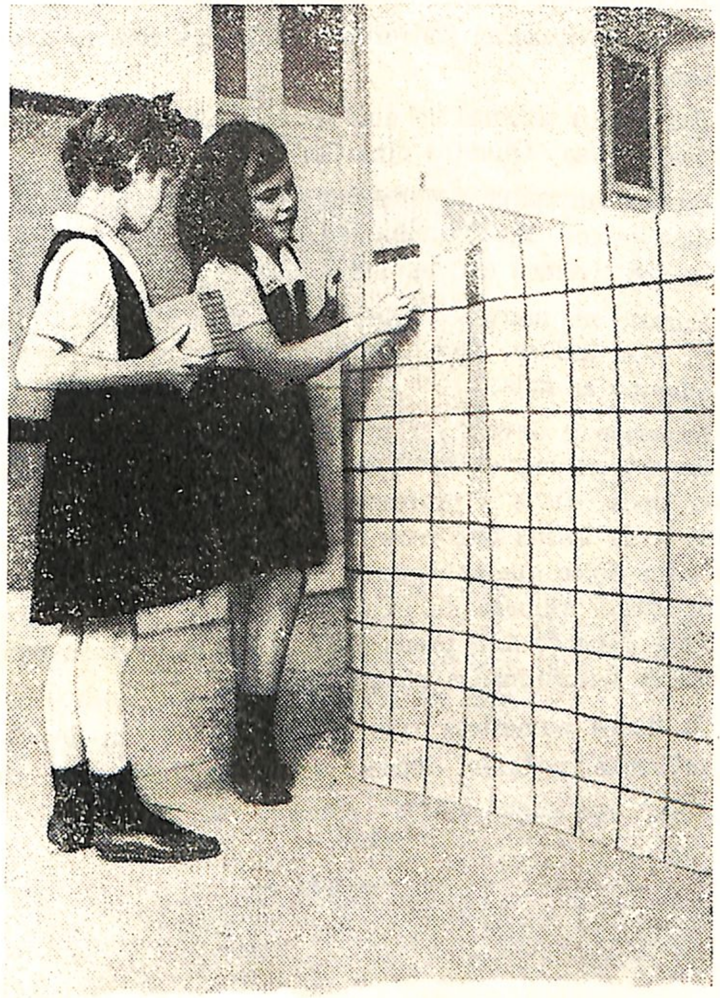
— Que tamanho terá 1/100 do metro quadrado? Qual será seu nome específico?





A criança diante de tais problemas pensa e investiga; usando o material, faz operações e registra suas conclusões, que consultará sempre que julgar necessário.

Depois de realizada a aprendizagem de metro cúbico, poderá aprender a ver a fração do metro cúbico. Evitemos que o aluno funcione com cifras sem sentido. Deixemo-lo ver e, se possível, até construir o metro cúbico. Não é objetivo de nosso trabalho falar sôbre as atividades para o ensino de Medidas. Queremos, entretanto, deixar bem claro que a criança precisa ter uma visão do metro cúbico, antes que pensemos em levá-la a considerar suas partes fracionárias. Estabelecidos os conceitos concernentes à medida como um todo, vamos levar o aluno a comparar êsse todo com outra medida menor, que é sua parte fracionária: 1/1000 do metro cúbico é = ..........



A fração do ano, do mês, do dia, da hora, será vista com mais minúcia, à proporção que a criança dilata seus conhecimentos de fração e das medidas do tempo.

Apresentamos, assim, apenas algumas sugestões. Confiamos na criatividade e interêsse da professôra que saberá explorar tôdas as oportunidades sociais que surgirem na sala de aula, bem como tôdas as possibilidades que as demais matérias oferecem, para fazer a criança se aprofundar cada vez mais no conhecimento das frações.

**Três tipos de problemas.**

No trabalho com as frações encontramos 3 tipos de problemas, envolvendo diferentes questões:

1. procurar a parte fracionária de um número;
2. procurar o número quando é dada sua parte fracionária;
3. procurar que parte fracionária um número é de outro.

Essas 3 situações podem ser ilustradas com os seguintes problemas:

1. Em março tivemos 20 dias letivos. Carlos foi à aula 3/4 dêsses dias. Quantos dias Carlos foi à aula?
2. Carlos, em março, freqüentou a escola sòmente em 3/4 dos dias letivos. Êle freqüentou 15 dias de aula. Quantos dias letivos tivemos em março?
3. Carlos, em março, freqüentou 15 dias de aula. Tivemos 20 dias letivos. Que fração dos dias letivos Carlos freqüentou as aulas?

Experiêncis devem ser providas durante o ano, para que a criança descubra que relações usar na solução de cada um dêsses tipos. Deve a professôra, com riqueza de atividades, auxiliá-la de forma que reconheça os elementos presentes em cada situação, o que está sendo procurado e o processo a ser usado. Desta riqueza de experiências com êsses 3 tipos de problema dependerá o preparo da classe para caracterizá-los através de determinadas generalizações.

Os dados numéricos, que integram cada um dos 3 tipos de problemas, poderão, depois, ser organizados num cartaz.

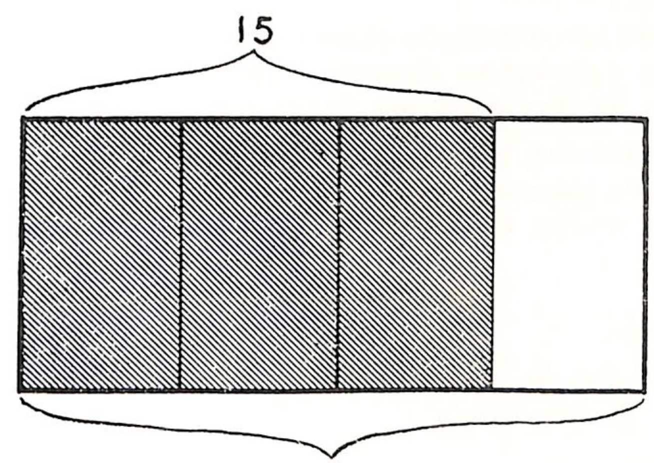


Em cada tipo, dois dos três números envolvidos são conhecidos. O terceiro é o que falta. Como encontrá-lo?

| Tipo | Fração | Um Número | Outro Número |
|---|---|---|---|
| 1 | 3/4 | ? | 20 |
| 2 | 3/4 | 15 | ? |
| 3 | ? | 15 | 20 |

A criança necessita de muita ajuda para perceber como encontrar a solução para cada um dêsses problemas. Enquanto o 1º tipo é muito familiar, o 2º é de aplicação social limitada. Muitas crianças encontram dificuldade em solucioná-lo. Quando usamos o desenho favorecemos o trabalho de pensamento do aluno, na procura do elemento que falta.

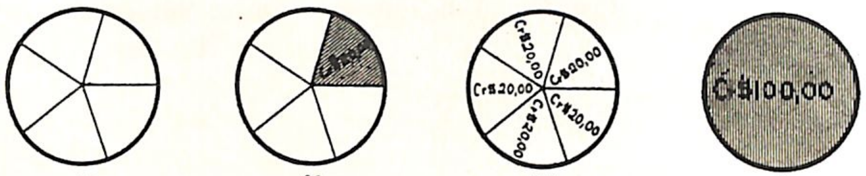
Vejamos:




A fração marcada equivale ao número de dias de aula em que Carlos foi freqüente, ou sejam 15 dias. Ora, se 3/4 de um total são 15 dias, 1/4 serão 5 dias, ou seja 15 ÷ 3. Se 1/4 são 5 dias o total, ou seja 4/4, serão 20 dias.

Outro exemplo:

Marcos comprou um caderno. Marcos sabe que 1/5 do preço do caderno é Cr$ 20. Qual o preço do caderno? Procuremos a solução pelo desenho.




1º 2º 3º 4º

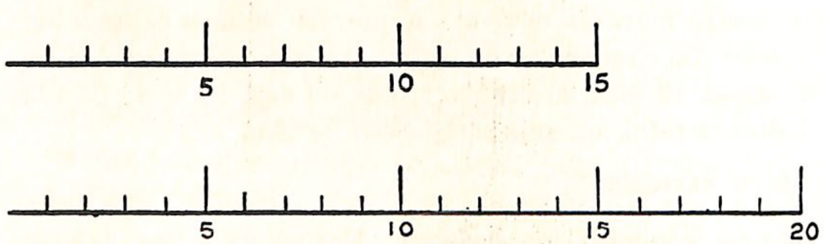
No 1º desenho mostramos que todo o dinheiro de Marcos, nesta situação problemática, está dividido em 5 partes iguais. O 2º desenho nos mostra que cada uma dessas partes é Cr$ 20. O 3º desenho faz-nos descobrir que, havendo na quantia total, 5 partes iguais, equivalendo cada uma a Cr$ 20, a quantia total será igual a 5 × Cr$ 20. Por fim vemos o resultado de nosso problema: Cr$ 100.

Façamos um comentário sôbre o 3º tipo. Necessário será encaminhar a criança na aquisição da habilidade de comparar números, a fim de concluir que fração um número é de outro.

Encaminhemos, através de várias atividades, a classe à descoberta de que um número, colocado sôbre outro em forma fracionária, mostra, em seu conjunto, que fração êsse número é do outro.

Vejamos:

São 15 dias de aulas freqüentadas que devem ser comparadas aos 20 dias letivos.






Observando-se êsse conjunto de 2 linhas, através da comparação, podemos concluir que uma linha é 15/20 de outra, ou sejam, 3/4.

Cabe à professôra ir introduzindo cada situação problemática de acôrdo com o desenvolvimento e as possibilidades da classe.

Êsses três tipos de problemas guardam uma estreita relação entre decimais e percentagem. É preciso que mais tarde a criança seja conduzida, por meio de atividades específicas, a descobrir estas relações.

# PARTE III

Capítulo 7

# ADIÇÃO DE FRAÇÕES

O ensino de adição e subtração de frações deve ser feito paralelamente, para que a criança possa perceber os princípios fundamentais que informam êstes dois processos e a relação que guardam entre si. Tradicionalmente o ensino era feito separadamente e cada processo subdividido em «casos específicos» que eram ensinados, um por um por meio de exercícios mecânicos. Esta forma de conduzir a aprendizagem dificulta a percepção de princípios gerais.

Se considerarmos o preparo anterior da criança, vamos notar que a adição e subtração de frações com os mesmos denominadores não oferece nenhuma dificuldade. Por isto mesmo os exemplos com tais frações serão usados apenas para que a criança perceba que, se, encontrar frações com denominadores diferentes, deverá procurar um denominador comum, antes de, com elas operar. Ora, conforme dissemos, a noção de denominador comum, será desenvolvida anteriormente, para guiar a criança nas atividades de comparação de frações.

Apresentamos neste capítulo, assim como no seguinte, uma série de sugestões de atividades, esperando que a professôra não escravize a aprendizagem a uma série rígida de exemplos.

Assim teríamos 3 grandes classificações:

A. Frações tendo os mesmos denominadores.

Exemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$$

B. Frações tendo denominadores diferentes, mas relacionados.

Exemplo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$$

C. Frações tendo denominadores diferentes e não relacionados.

Exemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

A. FRAÇÕES TENDO OS MESMOS DENOMINADORES

**1 — Não há dificuldade no total:**

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{5} =$$

Como iniciar:

Antes, bem antes de a criança enfrentar o ensino formal da adição, opera com a mesma em têrmos ainda concretos. Quantas vêzes encontramos, na 2ª série, a classe juntando um quarto de círculo a outro quarto e descobrindo, radiante, que o resultado desta ação é dois quartos! Muitos levam o raciocínio avante, concluindo que estas duas partes fracionárias, encontradas como total, são iguais a um meio.

— Que estará fazendo?

Somando em têrmos concretos e, ao mesmo tempo, preparando-se para o trabalho abstrato.



Antes de iniciar a classe no simbolismo da adição, procura-se intensificar estas atividades. Faz-se, assim, uma preparação sistematizada, dando-se oportunidade para a exploração de tôdas as combinações de partes fracionárias já estudadas.



Uma atividade preparatória de grande valor é a experiência com a contagem de partes fracionárias. A criança retira do envelope o seu material individual e conta:

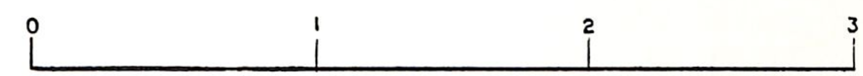
um quarto
dois quartos
três quartos
quatro quartos
cinco quartos...

Esta contagem realizada racionalmente leva o aluno a perceber a quantidade de partes fracionárias sempre acrescida de mais uma.

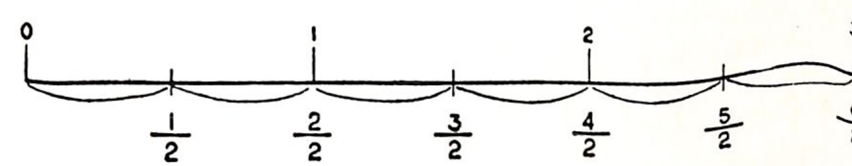
Ênfase tôda especial pode ser dada à contagem nesta fase preparatória e exploratória, através da construção de linhas numéricas, onde se fará o arranjo das frações.

O aluno usa a linha para encontrar nela as frações, contando-as e verificando os diferentes nomes que podem ter.

Vamos dar um exemplo. Aqui temos uma linha numerada até 3:




Vamos, agora, marcar o meio de cada espaço e contar para ver quantos meios temos nesta linha:




A classe conta:

$$\frac{1}{2};\ \frac{2}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{6}{2}$$

Com orientação observa:

a) — em que parte da linha estão situados 2/2

b) — que outra expressão pode, portanto, ser usada em substituição a 2/2

c) — em que parte da linha estão situados 3/2

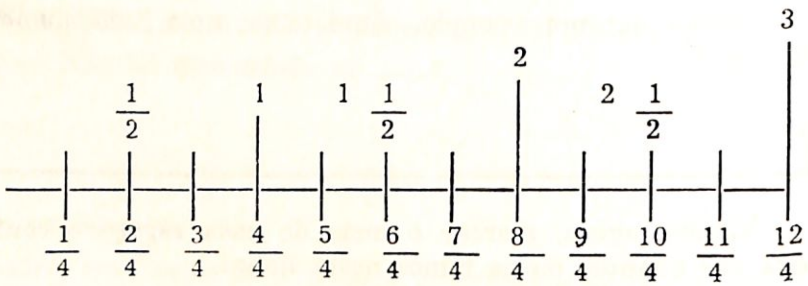
d) — que outra expressão pode ser usada em substituição a 3/2 etc.

A criança verá, assim, a possibilidade de fazer a contagem de 2 maneiras:

a) $\frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{5}{2}; \frac{6}{2}$

b) $\frac{1}{2}; 1; 1\frac{1}{2}; 2; 2\frac{1}{2}; 3$

Seguindo a mesma orientação a professôra trabalha com uma linha em quartos.




Conta:

$\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{4}{4}; \frac{5}{4}; \frac{6}{4}; \frac{7}{4}; \frac{8}{4}$, etc.

Depois:

$\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; 1; 1\frac{1}{4}; 1\frac{2}{4}; 1\frac{3}{4}; 2; 2\frac{1}{4}$, etc.



Por fim:

$\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; 1\frac{1}{4}; 1\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}; 2; 2\frac{1}{4}$, etc.

É preciso que a criança tenha várias oportunidades de experimentar esta contagem para conseguir fazê-la usando a expressão mais simples. Terá para isto a ajuda inteligente da professôra, que não a forçará, mas incentivará dizendo: — Você é capaz de escrever esta série de maneira diferente? Olhe em que ponto da linha estão os 4/2? Que poderíamos, então, escrever no lugar dos 4/2?

Vencidas as primeiras dificuldades, pode, depois, experimentar:

a) — colocar uma série em ordem crescente;

b) — colocar uma série em ordem decrescente;

c) — encontrar a fração faltosa numa determinada série;

d) — preparar desenho mostrando a contagem de frações etc.;

Vamos dar exemplos de atividades que atendem ao que dissemos:

a) — Colocar no quadro uma série de frações desordenadas em seu valor:

$\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{5}{4}; \frac{4}{4}$

Dizer às crianças: — Aqui está uma série de frações. Vamos colocá-la em ordem, começando com a de menor valor, até escrever a de maior valor.

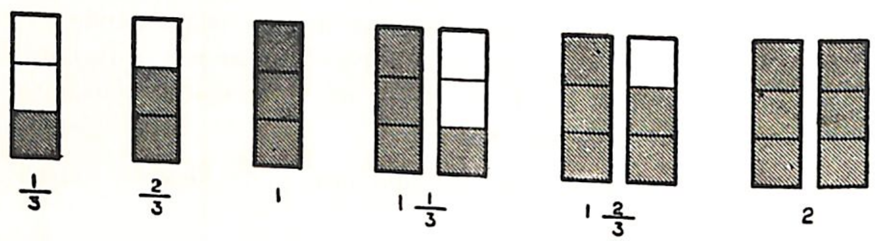
b) $\frac{7}{8}; \frac{1}{8}; \frac{3}{8}; \frac{5}{8}; \frac{2}{8}; \frac{4}{8}$

— Olhem as frações que escrevi no quadro. Vocês vão copiá-las no seu caderno, começando da maior até registrar a de menor valor.

c) $\frac{1}{2}; 1; 1\frac{1}{2};$ —; —; 3

— Aqui está uma série. Quem é capaz de descobrir e escrever aquilo que estiver faltando nesta série?

d) — Vamos fazer um desenho mostrando a contagem em terços?




Esperamos ajudar, com êstes poucos exemplos, no planejamento de atividades que levem a criança à contagem, preparando-a melhor para a adição de frações.

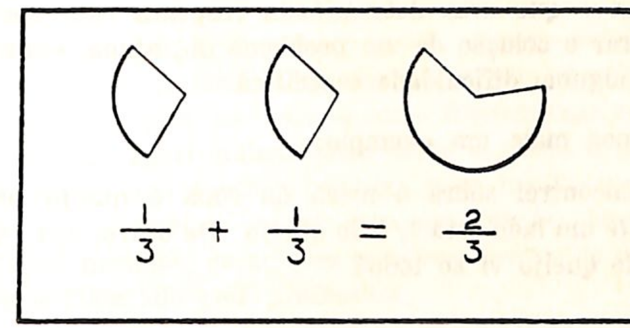
No início do trabalho simbólico, pode-se aindar lançar mão do material concreto, de desenhos ou diagramas, a fim de que a criança compreenda, que sucede com os símbolos o mesmo que com o material concreto. Êste preparo todo e as muitas oportunidades que o aluno teve evitam que, usando o símbolo, some numeradores e denominadores também. Interpretamos êste êrro como ausência de conceituação que deveria ter sido formada antes da fase da abstração. A criança, cometendo tal falta, demonstra não ter recebido boa preparação para perceber que juntamos número de partes e conservamos o nome comum das partes. Sempre somamos número de coisas e não o nome das coisas. Aliás, certas similaridades entre adição de números inteiros e adição de frações podem ser discutidas em classe para que se formulem conclusões adequadas.

Vamos tomar o exemplo 1/3 + 1/3 e verificar a facilidade com que pode ser introduzido em sua forma abstrata. Em geral, a criança antes de ver o símbolo já dá resposta oral para problemas como:

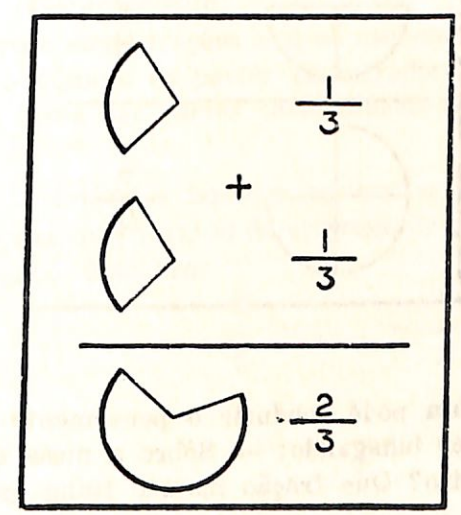


D. Maria recebeu 1/3 da fôlha de cartolina de Luiza e 1/3 da de Marta. Quanto D. Maria tem ao todo?

Depois que obtiver a resposta, a professôra pode fazer um convite: — Vamos resolver êste problema usando os símbolos? De maneira geral há boa reação ao convite. Pode-se, então, apresentar o símbolo junto ao concreto, para que o aluno o receba apenas como registro das idéias adquiridas anteriormente.




Ainda procurando dirigí-lo no sentido de descobrir as similaridades entre a adição de números inteiros e a adição de frações, podemos mostrar-lhe também a adição armada em sentido vertical:

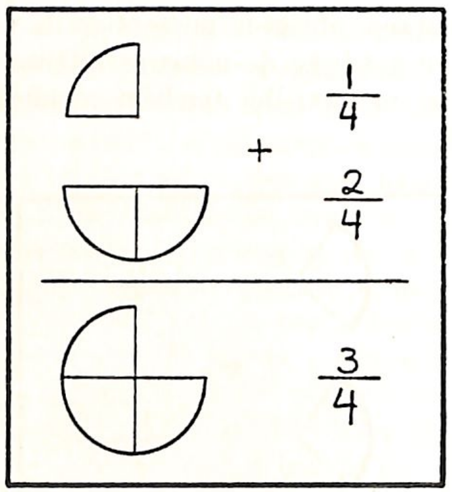


Esta forma de apresentar a adição de frações em muitos casos, conforme veremos mais tarde, visualizará bem mais claramente o processo que a forma horizontal. Por outro lado, quanto maior a variedade de experiências que se possa dar em relação a um processo, tanto mais estaremos contribuindo para o enriquecimento do pensamento.

Apresentado o 1º exemplo em sua forma abstrata, a professôra propõe outros mais até retirar completamente o material concreto ou semi-concreto. A êle retornará para que a criança prove que uma determinada resposta está certa, ou para ilustrar a solução de um problema ou, ainda, quando demonstrar alguma dificuldade específica.

Vejamos mais um exemplo:

> Encontrei sôbre a mesa da copa o queijo partido. De um lado está 1/4 do queijo. De outro, 2/4. Quanto de queijo vi ao todo?




A professôra pode conduzir o pensamento da criança a novas conclusões indagando: — Sôbre a mesa da copa havia um queijo inteiro? Que fração mamãe tinha gasto no doce?



Diante de um quadro como êste, incidentalmente perguntar-se-ia: — Eu disse 1/4 mais 2/4. De que outra maneira poderia propor esta adição? Olhem bem, no quadro, a fração 2/4. Que outro nome poderia dar a ela? Assim a criança vai sendo preparada para exemplos com nova dificuldade.

**Organização de atividades.**

a) — Uma atividade que temos usado com bastante interêsse do aluno, após a aquisição dêstes conceitos básicos, consiste em dizer: — Veja quantas adições você pode fazer com o total 5/6. A criança pensa, escreve e depois registra-as no quadro. A professôra observa, então, se registraram tôdas as combinações possíveis, e como fizeram êsse registro. É uma excelente oportunidade para levar o aluno a descobrir que a operação com frações também pode ter 2 ou mais parcelas. Os alunos gostam de ter esta experiência: descobrir e armar, por si mesmos, as adições possíveis dentro de um determinado total apontado pela professôra.

Através de tal riqueza de experiências, a professôra conduz a criança a perceber que:

1. como na adição dos números inteiros, a adição de frações pode ser registrada vertical e horizontalmente;
2. se tenho um total de partes fracionárias, posso combiná-las diferentemente;
3. quando somo frações com os mesmos denominadores, somo só o número de partes (numeradores) e conservo o mesmo nome das partes (denominadores).

b) — Podemos também apresentar adições com elemento faltoso para que, através do emprêgo de relações já conhecidas, a criança o descubra:

$$\frac{3}{5} + \ldots = \frac{4}{5}$$

$$\ldots + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

As perguntas habilidosas muito auxiliarão na percepção de que os elementos faltosos poderão ser encontrados pela subtração. Desta maneira, a aprendizagem da relação entre adição e subtração de números inteiros é transferida para esta nova situação.

c) — O uso de cartões-relâmpago para resposta rápida é ótimo auxiliar nesta etapa em que a classe se encontra preparada para a fixação da aprendizagem. A professôra, ou um líder de grupo, mostra ràpidamente um cartão, onde se encontra determinada combinação. No seu reverso coloca-se o total para pronta verificação:

$$\boxed{\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =} \qquad \boxed{\frac{3}{5}}$$

d) — O poder criador do aluno será despertado, pedindo-se que idealize pequenos jogos para serem disputados através do trabalho com a adição de frações.

**Exame crítico da resposta.**

É necessário que se forme, na classe, a habilidade de fazer o exame crítico da resposta encontrada, decidindo se é sensível e razoável.

Vamos supor que a professôra pedisse a resposta para esta adição:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$$

Diante do exemplo com a resposta, far-se-ia perguntas semelhantes às que apresentamos abaixo:

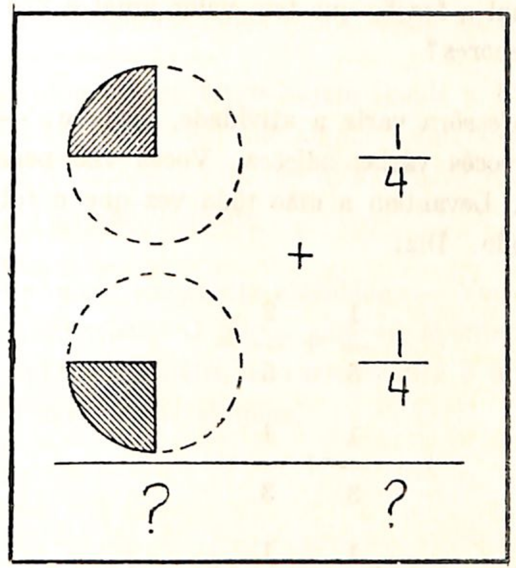
a) — Por que o total encontrado é menor que um inteiro?
b) — Quanto ainda falta ao total para que se tenha um inteiro?
c) — De quantos quintos precisaria ter em cada parcela para que a soma fôsse um inteiro?
d) — A resposta é maior ou menor que um meio?



e) — Como pensou você para dar esta resposta?
f) — Quer você provar que sua resposta está certa, usando um desenho?

Assim auxiliado, o aluno descobre relações e penetra realmente no sentido aritmético do processo com o qual está trabalhando.

**2 — O total deve ser reduzido à sua expressão mais simples:**




Em exemplos semelhantes ao que apontamos acima, não há, no processo em si, nenhuma nova dificuldade. Por isso mesmo, a atenção deve ser dirigida para a aquisição da habilidade em observar o total conseguido e reduzí-lo à sua expressão mais simples.

Em geral, como um preparo, a professôra nesta ocasião intensifica as atividades de redução de frações (ver parte II, cap. 6, pág. 134), de forma que a criança reaja espontâneamente à redução, quando observa a resposta encontrada. Se, nestes exemplos, temos o objetivo específico de conseguir a aquisição da habilidade de examinar o total e reduzí-lo, vamos dar ao nosso trabalho uma direção neste sentido.

**Organização de atividades.**

a) — Diremos, por exemplo: — Se eu somar 1/4 com 1/4, que total conseguirei?

— Qual a fração que tem valor igual a 2/4 em têrmos menores?

b) — A professôra varia a atividade, dizendo: — Vou dizer para vocês várias adições. Vocês vão pensar na resposta. Levantem a mão tôda vez que o total deva ser reduzido. Diz:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} =$$

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} =$$



$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} =$$

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \text{etc.}$$

É preciso observar a reação da classe, a fim de contrôlar a rapidez com que as combinações serão ditas.

A professôra no início diz uma série de combinações onde existirão algumas cujos totais sejam iguais a 1/2.

Depois, algumas cujos totais sejam iguais a 1/3. Mais tarde, uma série virá em que alguns totais serão reduzidos a 1/2 e outros a 1/3. As dificuldades vão, assim, aumentando gradativamente.

c) — Pode, ainda, usar a seguinte atividade: — Vou dizer algumas combinações. O aluno, que eu apontar, dirá o total. O seu companheiro de carteira dirá o total reduzido à expressão mais simples.

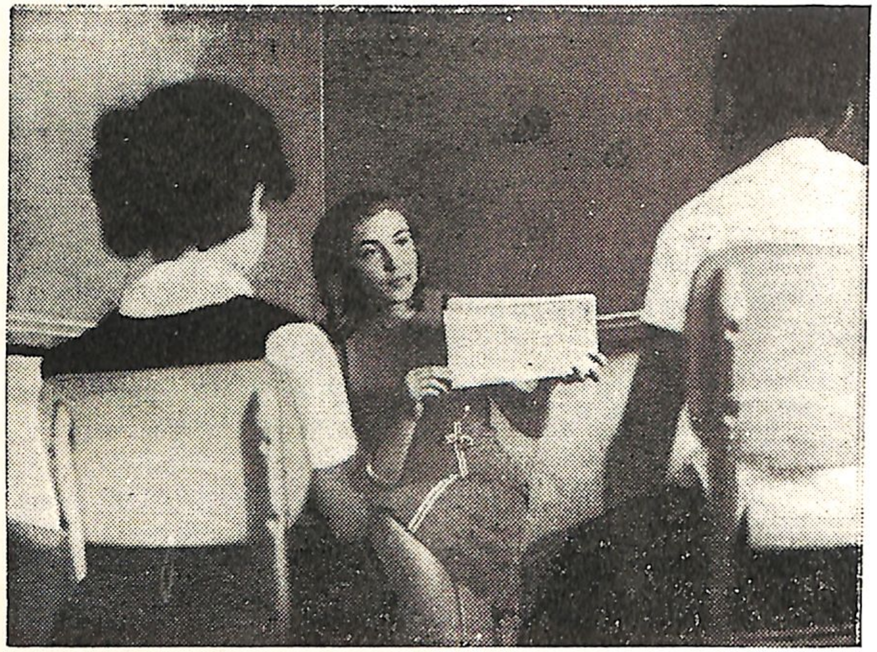
Atenção:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{9} =$$

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{10} =$$

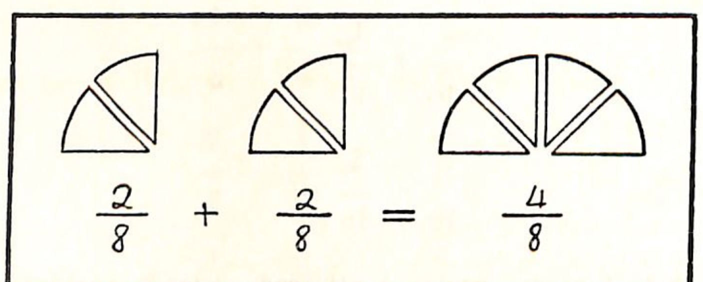
d) — Pode também variar a atividade, usando cartões.



Em alguns casos, usa-se o flanelógrafo para proteger aquelas crianças que exigem maior tempo nas atividades concretas, para atingir a abstração.

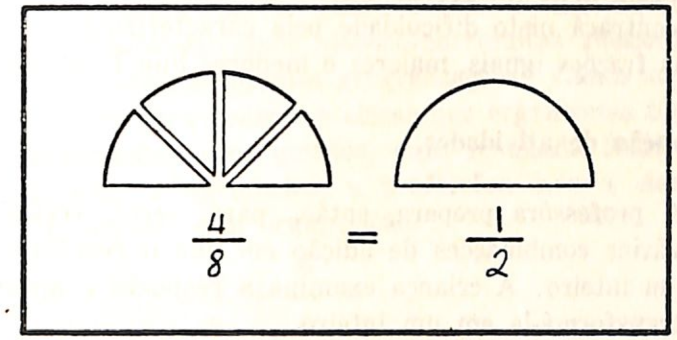
— Vamos somar 2/8 e 2/8 usando o flanelógrafo?

— Qual a primeira resposta que conseguiremos? Estará certa?






— Que acontecerá com o total se juntarmos tôdas as partes nêle contidas, para formarmos apenas uma parte? Vamos experimentar?




— Então, se somarmos 2/8 e 2/8, qual a resposta final? 1/2.

**Generalização.**

A professôra sistematiza o trabalho com uma variedade de experiências, até que a criança atinja a generalização:

**Quando somo duas ou mais frações, devo examinar o total encontrado. Se fôr necessário, devo reduzí-lo à expressão mais simples.**

**3 — A soma das partes é igual a um inteiro ou maior que um inteiro:**

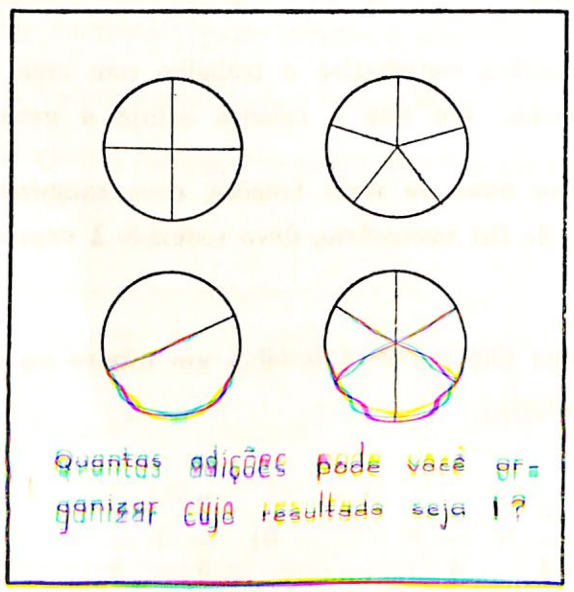
a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} =$ b) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} =$

A habilidade em estimar a resposta, antes de efetuar a operação, é um meio muito eficiente quando se procura solução para exemplos semelhantes aos que demos acima. Conforme dissemos, quando tratamos do caso anterior, não há, também aqui, nova dificuldade no processo, mas há necessidade de levar a criança ao exame matemático da resposta. Não encontrará nisto dificuldade pela caracterização já realizada das frações iguais, maiores e menores que 1 inteiro.

**Organização de atividades.**

a) — A professôra prepara, então, para serem resolvidas, várias combinações de adição em que o resultado seja um inteiro. A criança examina a resposta e aprende a transformá-la em um inteiro.

b) — Poderá, também, usar processo inverso. Apresentando um cartaz com vários círculos fracionados, a professôra pede que a classe organize tantas combinações quantas forem possíveis e cujo resultado seja um inteiro.






c) — Os alunos gostam de organizar suas próprias combinações. E a professôra estudando esta organização, tem uma excelente oportunidade de observar a habilidade de organização que suas crianças possuem. Pode mesmo discutir em classe as várias organizações apresentadas, deixando que a classe decida o tipo melhor. Através desta atividade, descobrem muitas relações e chegam mesmo a algumas generalizações. Vamos supor que a professôra pedisse à classe que organizasse tôdas as combinações com quintos, cujo resultado fôsse 1. Examinadas e agrupadas, a professôra leva à classe, para discussão, esta organização:

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{5} =$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$$

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} =$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} =$$

A professôra pode dirigir o pensamento dos alunos com as seguintes perguntas: — Quantas combinações conseguimos? — Por que tôdas elas deram o total 1? — Olhem a primeira parcela de tôdas as combinações. Elas foram aumentando. À proporção que elas foram aumentando, o que aconteceu com a segunda parcela? Por quê?

d) — Vejamos, agora, êste exemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} =$$

Quando o aluno vem bem preparado ao exame de um exemplo como êste, reage de uma maneira muito viva,

**prevendo** que a resposta será maior que um inteiro. **Esta habilidade** em prever que a resposta é maior que um inteiro, apoia-se na orientação anterior, quando houver oportunidade de caracterizar as combinações que dariam resultado igual a um inteiro.

A criança precisa ter sempre oportunidade de estimar a resposta para exemplos que vê, antes de usar o lápis e o papel. A professôra poderá, por exemplo, apresentar vários cartões com diferentes combinações de frações. A criança é orientada para, em face de cada combinação, dizer:

menor que um inteiro
igual a um inteiro
maior que um inteiro, conforme a combinação vista:

$$\boxed{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=} \quad \boxed{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=} \quad \boxed{\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=} \quad \boxed{\frac{7}{8}+\frac{2}{8}=}$$

e) — Depois, então, a professôra toma um grupo de cartões onde as combinações tôdas resultam em um total maior que um inteiro. Apresenta, um a um, pedindo a resposta àquela combinação. O resultado pode estar escrito no reverso do cartão, facilitando o trabalho de verificação.

$$\boxed{\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=} \qquad \boxed{1\frac{1}{7}}$$

O ensino sistematizado deve ter possibilitado uma reação favorável em cada uma dessas situações. A professôra depois encaminha uma discussão para que o aluno descreva, passo por passo, sua ação mental para atingir o resultado final.



f) — Haverá, também, para a classe oportunidade de resolver, por escrito, alguns problemas, envolvendo a dificuldade em estudo.

g) — Muitas vêzes, a criança não reage tão prontamente ao trabalho abstrato, ou por pobreza de experiência ou mesmo por deficiência mental. Revela, assim, necessitar de uma ajuda específica. Ajudemo-la planejando um trabalho em base mais concreta:

1. Olhe o exemplo no quadro:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=$$

2. Qual será a resposta? Use o flanelógrafo para encontrá-la.
3. De que outra maneira podemos dizer a resposta?
4. Use, agora, o Quadro de Frações para ver se a resposta está certa.
5. Quantos terços encontrou você no total?
6. Como você reagrupou êsses 4 terços?
7. Diga tudo quanto você fêz, desde o início, para encontrar esta resposta final.
8. Faça, agora, esta adição no caderno, sem usar material concreto.

E a professôra usará novos problemas para garantir a aprendizagem da criança.

**Generalizações.**

Usando múltiplas atividades, algumas conclusões vão sendo elaboradas. Com a assistência da professôra, são redigidas, constituindo material para cartaz ou para o caderno individual do aluno. Vejamos algumas:

— quando somo duas ou mais frações e encontro no total uma fração igual a um número inteiro, devo escrever a resposta final como número inteiro;

— quando somo duas ou mais frações e encontro, como total, uma fração imprópria devo extrair os inteiros, escrevendo a resposta final como um número misto.

4 — **Adição de um número misto e um número inteiro e vice-versa:**

Horizontal / Vertical

$$2\frac{1}{4} + 1 = \qquad \begin{array}{r} 2\frac{1}{4} \\ +\ 1 \\ \hline \end{array}$$

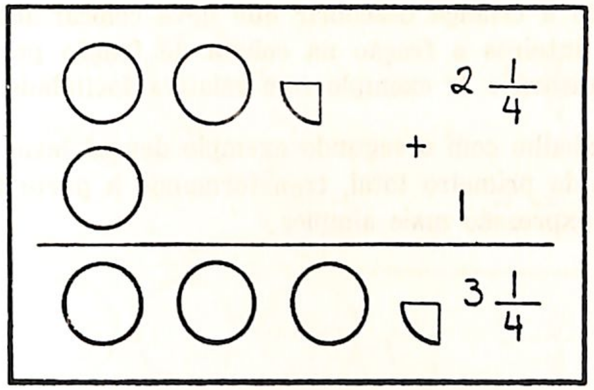
$$2\frac{1}{3} + 2 = \qquad \begin{array}{r} 2\frac{1}{3} \\ +\ 2 \\ \hline \end{array}$$

$$1 + 3\frac{2}{5} = \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 3\frac{2}{5} \\ \hline \end{array}$$

Nestes casos, a apresentação vertical exerce muita influência na visualização do resultado. Eis porque damos ênfase a esta direção, quando levamos a criança a somar número misto e número inteiro.

Ainda aqui o uso do flanelógrafo será de grande utilidade. Na colocação do que deve ser somado, o aluno descobre que os inteiros serão organizados na mesma coluna, deixando as frações em outra coluna. Relaciona, assim, um conhecimento já adquirido em outras situações aritméticas.






**Organização de atividades.**

Diante de vários exemplos resolvidos em situações múltiplas e auxiliada pela professôra, a criança descobre a **Generalização:**

— para somarmos um número misto e um número inteiro, basta somarmos o inteiro ao inteiro do número misto, juntando o total à parte fracionária.

A professôra pode, depois, organizar problemas orais com esta dificuldade, levando a criança a usar o conhecimento adquirido de que, nestes exemplos, apenas a parte inteira é acrescida, sendo, portanto, muito fácil encontrar a resposta.

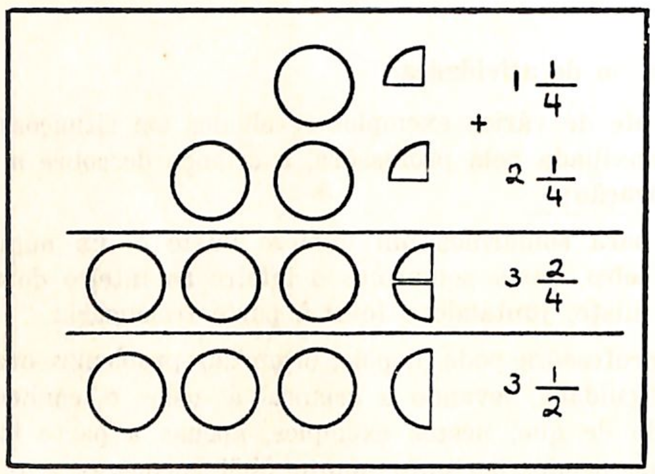
5 — **Adição de 2 números mistos:**

$$\begin{array}{r} 1\frac{1}{5} \\ +\ 2\frac{2}{5} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\frac{1}{4} \\ +\ 2\frac{1}{4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\frac{2}{4} \\ +\ 2\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$$

Na adição de 2 números mistos há várias dificuldades. Observando do primeiro ao terceiro exemplo, a professôra notará que há, em cada um, uma diferente relação aritmética.

Quando a criança descobrir que deve colocar inteiros na coluna de inteiros e fração na coluna de fração para depois somar, realizará o 1º exemplo com relativa facilidade.

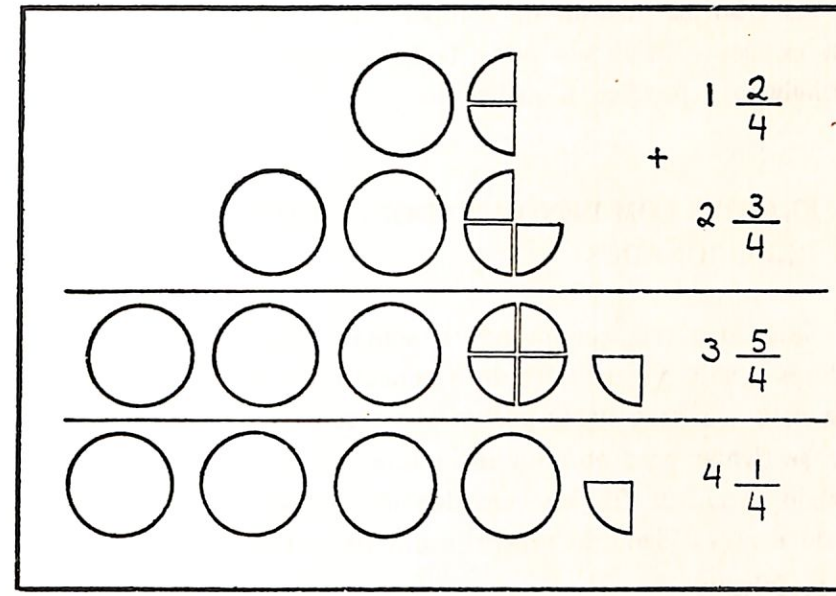
No trabalho com o segundo exemplo deverá levar o raciocínio além do primeiro total, transformando a parte fracionária à sua expressão mais simples.




É necessária, assim, a aquisição da habilidade de examinar o primeiro resultado, prevendo a possibilidade de sua redução. Isto conseguir-se-á com variedade de situações.

No terceiro exemplo, há o acréscimo de uma etapa a mais no raciocínio. Somam-se as partes fracionárias e os inteiros, encontrando a resposta. Esta resposta, entretanto, deve ser ainda trabalhada, uma vez que o total de partes fracionárias permite um reagrupamento para formação de mais um inteiro que será adicionado aos demais.






Muitos exercícios serão planejados de maneira que a criança se desprenda do concreto e vá abandonando as etapas intermediárias até chegar a levar diretamente o inteiro, conseguido pelo excesso de partes fracionárias, para a coluna dos inteiros, sem grande dificuldade.

Com o objetivo de sistematizar o trabalho que vem efetuando e chegar à composição de uma regra, pode-se pedir à criança:

a) — Olhe a adição indicada no quadro:

$$2\frac{3}{5} + 3\frac{3}{5} =$$

b) — Procure a resposta, usando o seu material;

c) — Agora use o símbolo para mostrar o que você fêz;

d) — Veja se você pode pensar numa regra a ser seguida, tôdas as vêzes que você tiver que somar 2 números mistos e as frações tenham o mesmo denominador.

As crianças gostam de compor suas próprias regras. É uma excelente atividade onde terão oportunidade de usar o vocabulário específico à aritmética.

## B. FRAÇÕES COM DENOMINADORES DIFERENTES, MAS RELACIONADOS

Quando a criança aprende a somar frações com denominadores iguais, vai adquirindo o conceito de que sòmente frações com o mesmo nome podem ser somadas. Esta idéia precisa se firmar para que o aluno tenha um ponto de referência, quando encontrar frações com denominadores diferentes, aceitando a necessidade de procurar um denominador comum.

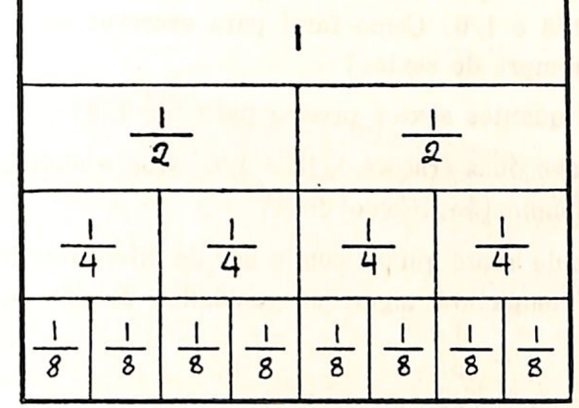
**Como iniciar.**

Das experiências passadas com as equivalentes, a classe ganhou, sem dúvida, alguma familiaridade com a relação entre 1/2 e 1/4; 1/2 e 1/8; 1/4 e 1/8 e possìvelmente entre 1/3 e 1/6. É importante que a professôra faça um bom preparo para a adição com denominadores diferentes, levando-a a descobrir que podemos encontrar um nome comum para as partes que queremos somar. O conhecimento de que pode haver um nome comum para várias frações que desejamos comparar, somar e subtrair, é inestimável no desenvolvimento da idéia do denominador comum.

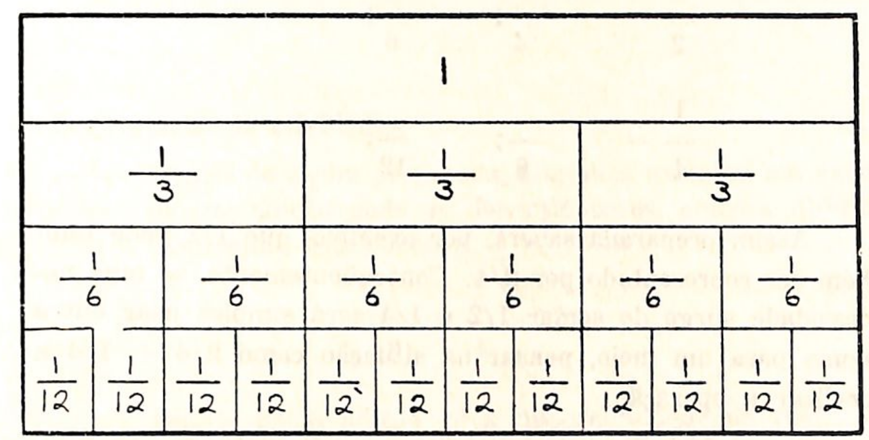
A professôra prepara a classe para a aquisição dêsse conhecimento, sistematizando as atividades que a leve a reconhecer ràpidamente as equivalentes, usando, para isto, material adequado. No início, naturalmente, serão usados os denominadores relacionados.

O uso de «Cartazes de Frações» ajuda o aluno a ver estas relações:






Diante de um cartaz como êste a professôra poderá dizer:
— Olhe bem o cartaz e diga-me: que outros nomes posso dar a 1/2? Por quê? Que outro nome posso dar a 1/4? Por quê? Poderá também usar o Cartaz com terços, sextos e doze avos




Perguntas semelhantes serão usadas sempre com o objetivo de levar a criança a descobrir que 2 ou mais frações de denominadores diferentes podem ser designadas sob uma denominação comum.

— Vou dar para vocês 2 frações com denominadores diferentes: 1/3 e 1/6. Como farei para escrever as duas, chamando-as sempre de sextos?

— De quantos sextos preciso para ter 1/3?

— Tenho duas frações 1/12 e 1/6. Quero chamá-las pela mesma denominação. Como direi?

Depois de assim guiada com o uso de diferentes materiais, a criança completará algumas igualdades usando apenas os símbolos.

$$\frac{1}{3} = \quad \frac{\ }{6}; \quad \frac{\ }{9};$$

$$\frac{2}{3} = \quad \frac{\ }{\ }; \quad \frac{\ }{\ };$$

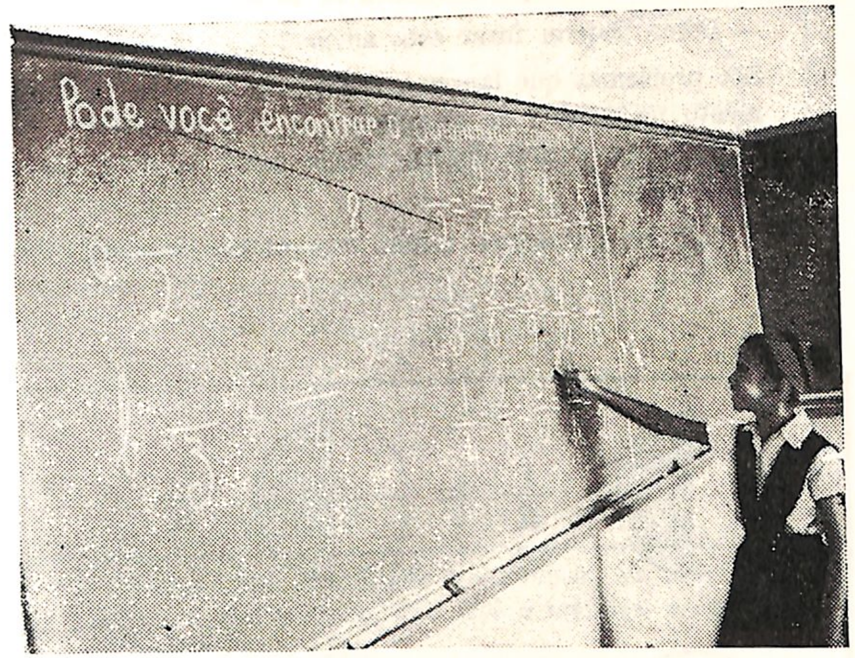
$$\frac{1}{2} = \quad \frac{\ }{4}; \quad \frac{\ }{6};$$

$$\frac{1}{4} = \quad \frac{\ }{8}; \quad \frac{\ }{12};$$

Assim preparada saberá, por exemplo, que 1/2 pode também ser representado por 2/4. Conseqüentemente, se uma necessidade surge de somar 1/2 e 1/4 será simples usar outro nome para um meio, pensar na situação como 2/4 + 1/4 e realizar a operação.

Neste período de preparação para a adição de frações com denominadores diferentes, é importante que o aluno adquira compreensão sólida desta possibilidade matemática de «renomear» as frações, antes que qualquer técnica formal de procurar o denominador comum seja introduzida.






**Organização de atividades.**

a) — Depois de assim preparada, a criança examina um exemplo de adição onde os denominadores, embora diferentes, sejam relacionados.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = ?$$

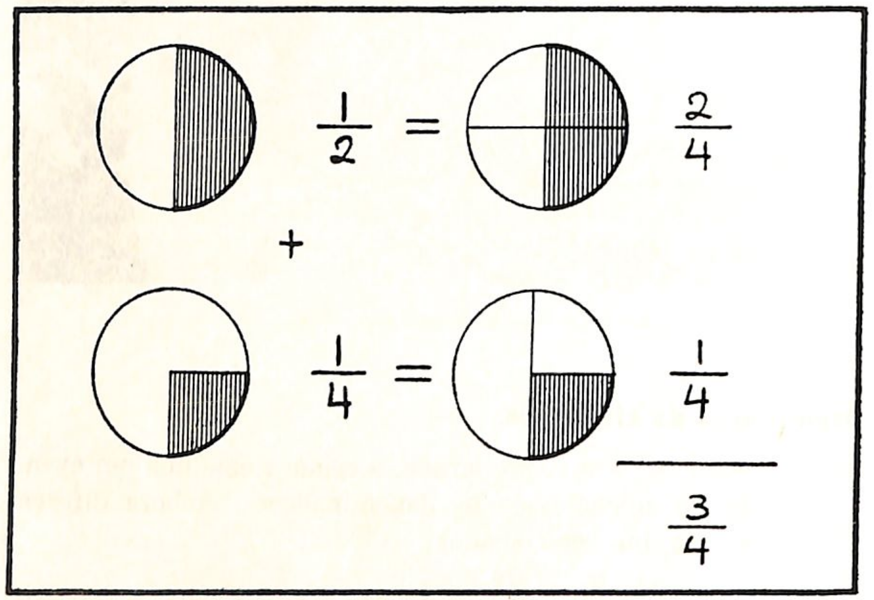
Diante desta adição vê a impossibilidade de realizá-la, uma vez que já se decidiu sòmente adicionar coisas da mesma espécie, pois, quando somamos frações, somamos o número das partes (numerador) e conservamos o nome comum das partes (denominador). A professôra encaminha o pensamento da criança para que lance mão do conhecimento anteriormente adquirido e procure a denominação comum para as duas frações.

— Que denominação daríamos ao total?

— Como poderei fazer esta adição?

São problemas que lançamos para encaminhar o pensamento no sentido de descobrir que 1/2 pode ser considerado como 2/4, desaparecendo assim a dificuldade do exemplo.

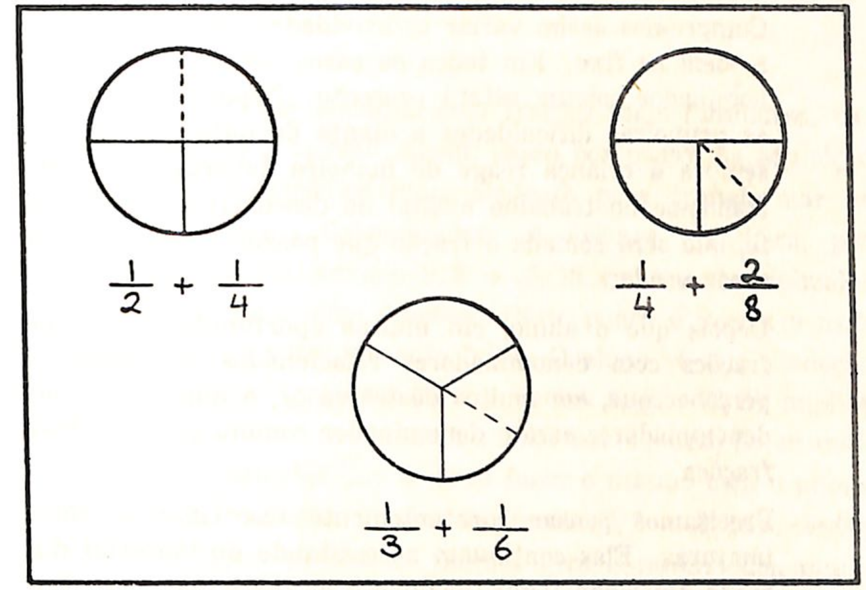
O trabalho prossegue, assim, com outras frações relacionadas.




b) — A professôra pode colocar no quadro vários exemplos, a fim de que o aluno apenas diga que denominador comum irá usar para efetuar aquelas adições. A habilidade em descobrir o denominador comum é a base para a resolução dêsses exemplos.

c) — Um material de consulta de grande valor é a apresentação de um cartaz com vários círculos, nos quais o aluno verá as equivalentes de que necessita para efetuar as operações.






d) — A criança será estimulada a organizar, ela própria, sua tabela de equivalência, que será o material de consulta, sempre que necessário.

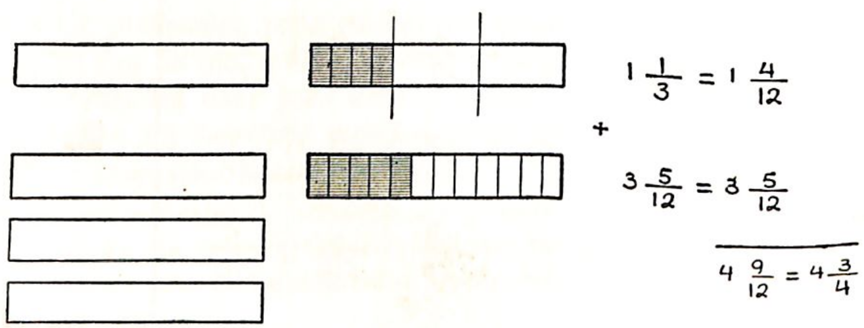
Tabela de equivalências

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ = | $\frac{2}{4}$ ; | $\frac{3}{6}$ ; | $\frac{4}{8}$ ; | $\frac{5}{10}$ |
| $\frac{1}{3}$ = | $\frac{2}{6}$ ; | $\frac{3}{9}$ ; | $\frac{4}{12}$ ; | $\frac{5}{15}$ |
| $\frac{1}{4}$ = | $\frac{2}{8}$ ; | $\frac{3}{12}$ ; | $\frac{4}{16}$ ; | $\frac{5}{20}$ |
| $\frac{1}{5}$ = | $\frac{2}{10}$ ; | $\frac{3}{15}$ ; | $\frac{4}{20}$ ; | $\frac{5}{25}$ |
| $\frac{1}{6}$ = | $\frac{2}{12}$ ; | $\frac{3}{18}$ ; | $\frac{4}{24}$ ; | $\frac{5}{30}$ |

Cumpre-nos assim variar as atividades, de maneira que a idéia se fixe. Em todos os casos semelhantes, o denominador comum estará presente. Depois de vencidas as primeiras dificuldades e diante de outros exemplos, sempre a criança reage de maneira favorável, concentrando-se no trabalho mental de descobrir a equivalente, que será somada à fração que possui o denominador a ser usado.

Depois que o aluno, em muitas oportunidades, somou frações com denominadores relacionados, é guiado a perceber que, em muitos dêstes casos, o maior dos dois denominadores será o denominador comum para as duas frações.

e) — Precisamos pensar constantemente nas crianças mais imaturas. Elas continuam necessitando de material durante um longo tempo, enquanto as mais maturas atingem a fase do pensamento em têrmos abstratos. Estas crianças serão atendidas em suas necessidades pessoais resolvendo seus problemas através da consulta de diferentes espécies de material.
Não vamos citar aqui os demais exemplos com dificuldades crescentes, que podem ser trabalhados nesta etapa. A professôra apresenta, depois, por exemplo, a adição de números mistos, onde as frações sejam relacionadas por seus denominadores. Neste caso voltará, se necessário, ao uso de diagramas para auxiliar a compreensão.






**Generalização.**

Partindo dêsse trabalho com frações mais familiares, vamos conduzindo a aprendizagem, passo por passo, na aquisição do processo matemático mais abstrato para transformar as frações ao mesmo denominador. A criança identifica, por exemplo, o 12 no exemplo $2/3 + 5/12$ como o denominador comum ideal para estas frações. Dêste ponto é levada a usar uma descoberta anteriormente feita. O aluno vê que a adoção do 12 como denominador para a primeira fração (2/3) implica a multiplicação do denominador inicial por 4. Ora, se eu multiplico o denominador por 4, devo fazer o mesmo com o numerador para não alterar o valor da fração ($2/3 = 8/12$). Assim procedendo, terei ambas as frações com o mesmo denominador, podendo, portanto, efetuar a operação ($8/12 + 5/12 =$ ).

É importante que o aluno compreenda o sentido matemático da regra que nos possibilita encontrar equivalentes, quando necessitamos somar frações com denominadores diferentes.

Mais tarde, como coroamento da aprendizagem, a professôra leva a criança a elaborar os passos que se seguem para somar tais frações:

1. reconhecer qual será o denominador comum;

2. mudar as frações por suas equivalentes, de modo que tôdas tenham êsse denominador comum;

3. adicionar as frações.

Êsses passos, elaborados pela própria criança, podem constituir excelente material para a confecção de um cartaz de aritmética.

Para somar frações com denominadores diferentes

1- procuramos saber qual o denominador comum

2- trocamos as frações por suas equivalentes

3- somamos as frações

4- examinamos o total encontrado.

C. FRAÇÕES COM DENOMINADORES DIFERENTES, NÃO RELACIONADOS

| -A- | -B- |
| --- | --- |
| $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$ | $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$ |

As adições acima exemplificam duas situações em que os denominadores são diferentes e não relacionados. No exemplo **A**, o denominador comum será o produto dos dois denominadores. O mesmo não sucederá ao exemplo **B**.

Êsses casos raramente representam uma situação social. Conforme observações feitas no início de nosso trabalho, a ênfase principal na adição de tais frações será na compreensão matemática do processo.

**Exemplo A.**

Apresentando adições semelhantes ao exemplo **A**, a criança, que vem bem guiada no estudo de frações, descobrirá que o denominador comum não está presente. A técnica, que vem usando, não funcionará nesta situação. Sentir-se-á diante de um problema real e concentrará seu pensamento na procura da solução.



A professôra dirá: — Que faremos então? Qual será o denominador comum para essas duas frações? Assim guiada, a criança procurará a parte fracionária em cujos têrmos a adição será interpretada. Desde que **meio** não pode ser transformado em **têrço** ou têrço em meio, conforme processo que vinha sendo usado, é preciso encontrar a fração comum através da qual posso expressar 1/2 e 1/3. É preciso procurar, então, o denominador comum para ambas as frações.

Naturalmente, o primeiro passo será encaminhar a criança para a consulta ao material. No «Quadro de Frações», descobrirá que cada uma das frações em estudo pode ser expressa em sextos.

A tabela de equivalência por nós já citada é um material que deve estar sempre à disposição da classe.

Depois que vários problemas forem solucionados por êsse meio, os resultados experimentais são registrados com símbolos.

A professôra, partindo das descobertas já feitas, através do uso do concreto, pode organizar novas tabelas com a classe. Nelas encontrará as frações de que necessitam para realizar a adição.

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \;;\; \boxed{\frac{3}{6}} \;;\; \frac{4}{8} \qquad\qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{6}} \;;\; \frac{3}{9} \;;\; \frac{4}{12} \qquad\qquad = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \;;\; \frac{3}{9} \;;\; \boxed{\frac{4}{12}} \qquad\qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \;;\; \boxed{\frac{3}{12}} \;;\; \frac{4}{16} \qquad\qquad \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Consultando tabelas semelhantes, o aluno encontra o denominador comum às frações que deverão ser somadas, bem como o numerador que servirá a cada uma. Depois de usar várias atividades semelhantes, dirige-se a atenção da classe para a relação entre o denominador comum e os dois denominadores das frações em jôgo, até que o aluno possua elementos que o possibilitem concluir que, em todos os exemplos, o denominador comum é o produto dos denominadores diferentes.



É preciso estudar sempre a resposta encontrada, para adquirir a habilidade de determinar a sensibilidade da mesma. A soma de 1/2 e 1/3 é 5/6. Esta resposta é sensível? Por quê? Eu sei que 1/2 + 1/2 = 1. Ora, desde que uma das parcelas é 1/3 e 1/3 é menor que 1/2, o total será um pouco menor que 1 inteiro. E a fração 5/6 é um pouco menor que 1 inteiro, ipso-fato, é sensível. Para atingir êsse grau de raciocínio a criança precisa muito da ajuda da professôra que não perderá nenhuma oportunidade para levar a classe a pensar, estimando.

**Exemplo B.**

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$$

O produto dos denominadores de duas frações será, em qualquer hipótese, um denominador comum. Mas o produto será o menor denominador comum sòmente quando os números forem primos. Vamos dar um exemplo: o produto dos denominadores $\frac{\quad}{4}$ e $\frac{\quad}{6}$ é 24, que será um denominador comum, mas não o menor que devemos buscar.

A criança, baseada em conhecimentos adquiridos com o trabalho anterior, será inclinada a achar o denominador comum, multiplicando os 2 denominadores. O processo é concreto, mas o aluno verá que, neste caso, o total encontrado será sempre redutível, o que será um motivo para encaminhá-lo a querer encontrar um denominador comum, que seja o menor possível. Naturalmente, poderá ser levado a construir e consultar as tabelas a que já nos referimos:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \;;\; \boxed{\frac{3}{12}} \;;\; \frac{4}{16} \;;\; \frac{5}{20} \;;\; \boxed{\frac{6}{24}}$$

$$\frac{1}{6} = \boxed{\frac{2}{12}} \;;\; \frac{3}{18} \;;\; \boxed{\frac{4}{24}} \;;\; \frac{5}{30} \;;\; \frac{6}{36}$$

Através do exame de uma tabela como esta, verifica que a multiplicação dos denominadores produz o denominador comum, mas que antes há um denominador comum **menor,** ao qual daremos preferência por razões já citadas.

A criança seria, assim, realmente motivada a elaborar uma regra através da qual fôsse possível encontrar o menor denominador comum.

Esta etapa será uma etapa final, onde é levada a ver que poderá obter o menor denominador comum, seguindo os seguintes passos:

a) — tome o denominador maior e veja se é divisível pelo outro denominador; se fôr, será êle o denominador comum. Ex.: 1/4 + 1/8. O 8 será o menor denominador comum porque é divisível por 4;

se não fôr

b) — tome o denominador maior e dobre-o; verifique se o seu dôbro é divisível pelo outro denominador; ex.: 3/7 + 1/2. O 7 não é divisível por 2; experimentamos, então, o seu dôbro (2 ×7 = 14). O 14 é divisível por 2, portanto será o menor denominador comum;

se não

c) — multiplique o maior denominador por 3 e experimente se o produto é divisível pelo outro denominador;

ou

d) — multiplique por 4 e assim por diante.

Em cada um dêsses passos, a criança é levada a compreender o «porquê» da realização. É preciso que a professôra dê ênfase ao fato de que em todos êsses caminhos, o que estamos fazendo é procurar as frações equivalentes para somar.

A classe terá grande interêsse, depois de vencida esta etapa, em classificar as adições de acôrdo com as dificuldades apresentadas na busca do denominador comum.

A professôra colocará no quadro, por exemplo, uma série de adições, não para serem resolvidas, mas para serem examinadas, a fim de obter resposta a questões como:



**a) — mostre-me as adições nas quais o menor denominador comum está presente;**

**b) — mostre-me as adições nas quais o maior denominador deva ser multiplicado por 2;**

**c) — agora, mostre-me aquelas em que o denominador seja multiplicado por 4, etc.**

**Outra atividade de grande alcance será pedir à criança que organize alguns exemplos dentro de tal ou tal dificuldade.**

**O aluno gosta de organizar seus próprios exemplos, com esta experiência ganha fixação o conhecimento adquirido e proporciona à professôra oportunidade de avaliar o grau de compreensão no processo em estudo.**

**Conforme o que acima expusemos, se a classe adquiriu uma compreensão clara da idéia de denominador comum e também adquiriu alguma habilidade em encontrá-lo, a aprendizagem do processo ficará em muito simplificada. A professôra poderá encaminhar a classe na aquisição de uma técnica mais formal e mais rápida, na procura do denominador comum.**

**Adição de 3 ou mais frações**

$$\begin{array}{rrrr}
\frac{1}{5} & 2\,\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 2\,\frac{1}{3} \\[6pt]
+\ \frac{2}{5} & +\ 1\,\frac{1}{6} & +\ \frac{1}{3} & +\ 1\,\frac{1}{9} \\[6pt]
\frac{1}{5} & 1\,\frac{3}{6} & \frac{1}{8} & 2\,\frac{1}{6} \\
\hline
\end{array}$$

**Tôda a nossa discussão anterior foi acêrca de adição de duas frações. A adição de 3 frações com o mesmo denominador não constitui, realmente, uma dificuldade específica. A professôra pode ver confirmado êste ponto de vista pedindo, por**

exemplo: — Escreva uma adição formada de 3 frações, cujo resultado seja 6/7. O aluno o fará com segurança e a professôra explora a oportunidade para mostrar que também na adição de frações as parcelas podem ser mais de duas.

É preciso, entretanto, esperar que as crianças adquiram um domínio das demais dificuldades, antes que lhes peçamos para somar três ou mais frações de denominadores diferentes e não relacionados. Questiona-se mesmo se se pode esperar que uma criança, que tenha dificuldade em compreender e manipular a adição de casos mais simples, deva enfrentar casos mais complicados como êstes.

Esta espécie de adição mais difícil constitui, algumas vêzes, excelente motivação para as crianças mais bem dotadas. Elas encontram, na manipulação de tais números, uma oportunidade para ganhar uma compreensão mais profunda e descobrir novas relações aritméticas. Serão guiadas, neste ponto, para aplicar princípios e técnicas já adquiridas, quando trabalham para atingir a solução de tais exemplos.

Por fim, recomendamos que não sejam dadas, na escola primária, frações cujos denominadores sejam muito grandes. Computando sòmente com denominadores menores, que podem, com mais facilidade, serem visualizados, muitos alunos poderão aproveitar e gostar dêste trabalho. Importa-nos assegurar o sucesso do aluno, quando trabalha com aritmética. Isto só será atingido se soubermos graduar o ensino de acôrdo com as possibilidades pessoais de cada um.





## Capítulo 8

# SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

**A aritmética precisa ser apresentada como um sistema seqüencial interrelacionado. A habilidade em assim apresentá-la influirá consideràvelmente na qualidade do ensino e no desenvolvimento da capacidade de penetração da criança. A professôra encarando o ensino da aritmética desta forma, assume a responsabilidade de descobrir como relacionar as várias áreas, conduzindo o ensino de maneira que cada nova aprendizagem surja de conceitos anteriormente descobertos. No ensino da subtração de frações, teria então oportunidade de encaminhar a criança a descobrir que a usamos com os mesmos propósitos com que usamos a subtração dos números inteiros. Prepararia também a classe para sentir que, em tôda a situação de subtração de frações, é importante focalizar o total do número de partes, de onde retirará um determinado número de partes. Haveria, assim, oportunidade de rever, nestas circunstâncias, o conceito fundamental da subtração, já apreendido no trabalho com inteiros e focalizar a relação que guarda com a adição.**

**Podemos focalizar a atenção da classe para êsse conceito a que nos referimos, através de um problema como: «Jane encontrou 2/3 do queijo sôbre a mesa e comeu 1/3. O que sobrou do queijo?» Em face de um problema como êste, a professôra guia o pensamento do aluno para a formação das idéias básicas de subtração.**

— Qual o total do queijo que Jane viu?

— Que é que Jane retirou?

— O que sobrou?



Com algumas atividades semelhantes a criança adquire a importante habilidade em perceber que também na subtração de frações, é preciso determinar a fração minuendo e a fração subtraendo e que, necessàriamente, uma será maior que a outra. Inúmeras vêzes, temos encontrado crianças tentando resolver uma subtração de frações com o subtraendo maior que o minuendo. Isso é motivado, algumas vêzes, pela ausência de planejamento da professôra em relação aos exercícios que pretende dar à classe. Apresentando-os sem um prévio exame, coloca o aluno numa situação insolúvel pelos recursos que possui na escola elementar. As frações de denominadores e numeradores diferentes são, às vêzes, difíceis de serem comparadas, exigindo, por isso, muita habilidade no planejamento dos exemplos.

**As 3 idéias em subtração**

O ensino de subtração de frações será muito enriquecido, se a criança revê e aplica aqui a idéia de que a subtração é usada para encontrar:

A. a fração que resta (idéia subtrativa)

B. a diferença entre duas frações (idéia comparativa)

C. a fração que será somada a uma outra determinada, para que se tenha um determinado total (idéia aditiva).

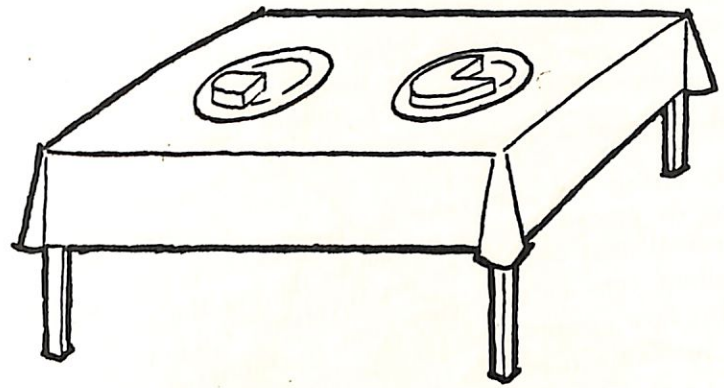
Assim, durante todo o ensino, os problemas apresentados o serão em uma variedade de vocabulário que permita a percepção das diferentes idéias da subtração.

Vamos exemplificar, com um problema, cada uma das idéias:

A. Idéia subtrativa — Deixei sôbre a mesa uma barra de goiabada. Mamãe retirou 1/4 para dar à minha irmã. Quanto ainda sobrou?

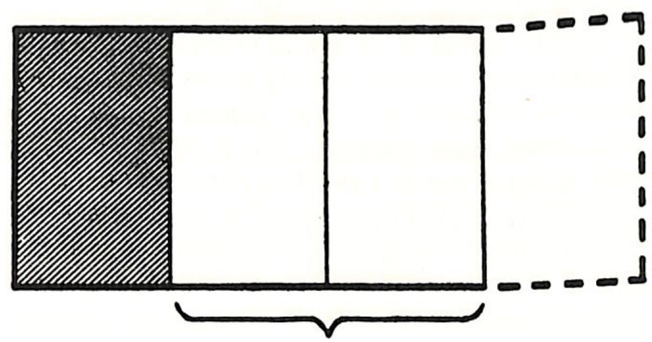
B. Idéia comparativa — Mamãe levou para a mesa 3/4 do pudim de creme e 1/4 do pudim de laranja. De que pudim havia maior quantidade? Quanto mais?





A criança, diante de uma situação como esta, considera uma quantidade, considera a outra e, por fim, decide por comparação «quanto mais» ou «quanto menos».

C. Idéia aditiva — Marcos precisa colorir 3/4 da fôlha de papel. Já coloriu 1/4. Quantos quartos a mais precisa colorir?



Assim, durante o ensino sistemático da subtração de frações, o aluno aprenderá a procurar soluções para diferentes questões:

quanto sobrou?
quanto ainda falta?
quem tem mais? quanto mais?
quem tem menos? quanto menos?

### A relação com a adição

O ensino da subtração de frações deve vir paralelo ao ensino da adição para a aquisição da habilidade de perceber, que constituem dois processos inversos. Quando a criança já trabalhou com estas idéias com os números inteiros, nesta ocasião fará apenas uma transferência da aprendizagem adquirida, mediante o auxílio da professôra.

Acreditamos que o aluno que pode somar 1/3 + 1/3, pode, ao mesmo tempo, subtrair 1/3 de 2/3. Assim, o ensino da subtração seguiria paralelo ao da adição com um objetivo específico: levar a criança a descobrir que os processos são inversamente relacionados.

Não vamos, portanto, vencer tôdas as dificuldades de adição, para, então, iniciar a subtração. Vamos programar atividades paralelas, com as duas operações.

### Etapas de dificuldades

Naturalmente, desde a 2ª série, pequenas subtrações vêm sendo realizadas, mas sempre à vista do concreto. Na 3ª série êsse trabalho se intensifica, numa passagem natural para o abstrato, em casos mais simples. Na 4ª série então, o material concreto ainda é usado com diferentes finalidades, mas a professôra pretende conduzir a classe a abandoná-lo para um trabalho sistematizado com o simbolismo, vencendo etapas mais difíceis.

A compreensão em aritmética é contínua, cresce dentro da criança, ao longo de sua carreira na escola. Isto implica, naturalmente, em responsabilidade para a professôra, que estará sempre procurando conhecer as idéias que já foram apresentadas e, deliberadamente, usá-las, tanto quanto possível, como base para o ensino de novas idéias. Olharia também para



o futuro, a fim de saber em que sentido está conduzindo a classe. Sòmente assim, poderá estar certa de preparar os alunos para atingirem conceitos mais abstratos, mesmo que não os consiga em seu completo amadurecimento. Para isso, precisa ter uma visão geral daquilo que ensina, estabelecendo, depois, um roteiro das dificuldades que o processo apresenta. Através dêsse roteiro guiará o ensino, conseguindo sempre um ambiente de aprendizagem, que possibilite o sucesso e o gôsto pela matemática.

A seqüência de dificuldades, que apresentaremos a seguir, será cuidadosamente examinada pela professôra. Queremos que seja considerada flexível, com possibilidade de ser relacionada à seqüência apresentada no estudo da adição de frações:

A — Subtração de frações com denominadores iguais.
Exemplo:
$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} =$$

— Subtração de números inteiros e mistos.
Exemplo:
$$3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{5} = 4 - 2\frac{1}{2} = \text{etc.}$$

— Subtração de frações com denominadores diferentes.
Exemplo:
$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$$

A. SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES COM DENOMINADORES IGUAIS

1 — **Não há necessidade de redução na resposta encontrada.**
Exemplo:
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \qquad \frac{5}{6} - \frac{4}{6} \quad \text{etc.}$$

A criança, conforme observações feitas por nós, não encontra dificuldade na resolução de exemplos semelhantes, que serão trabalhados através de problemas envolvendo as três idéias a que nos referimos.

**Como iniciar.**

Quando êsses exemplos são usados para a introdução da forma simbólica, o aluno os representa no flanelógrafo ou outro material concreto, a fim de ver que o abstrato é o registro do que sucede no concreto.

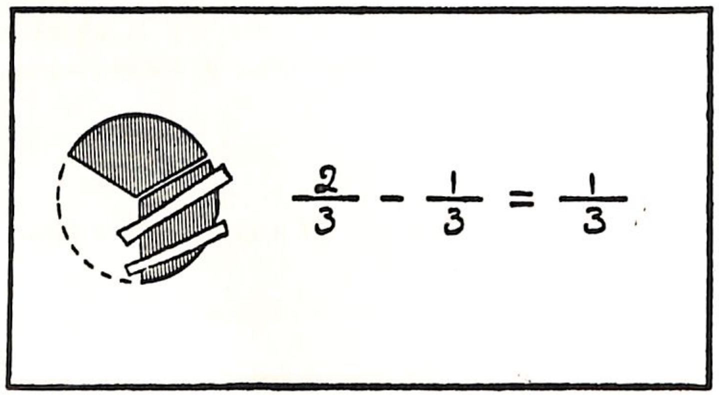
Poder-se-á dizer:

— Vamos colocar 2/3 no flanelógrafo?

— Retire, agora 1/3. O que restou no flanelógrafo?

— Vamos escrever, no quadro, a operação que nos diz justamente isto que fizemos?

E a criança escreve o total inicial, a fração retirada e o restante.




Como dissemos, é de suma importância a percepção de que a fração minuendo, nesses casos, é sempre a maior.

2 — **Há necessidade de redução na resposta encontrada.**
Exemplo:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \qquad \frac{5}{6} - \frac{3}{6} =$$



Quando o exemplo a ser resolvido encerra uma resposta que exija uma redução, mais um problema deve ser enfrentado para cuja solução, o aluno estará bem preparado, se adquiriu as habilidades necessárias, vencendo gradualmente as dificuldades que vimos expondo. Naturalmente, nossa responsabilidade será dirigí-lo no exame do resto encontrado, para que reconheça a necessidade da redução.

**Organização de atividades.**

São inúmeras as atividades que podem ser usadas na subtração de frações com o mesmo denominador. Citaremos algumas, deixando que a lista seja completada pela criatividade de nossas professôras:

a) — escreva uma fração no quadro e diga: — Retire desta fração tôdas as frações possíveis. Vá escrevendo, em seu caderno, tôdas as subtrações que, desta maneira, você conseguiu.
Através desta atividade, consegue-se um excelente material para comentar com as crianças, conduzindo-as a descobrir várias relações aritméticas;

b) — a professôra pode colocar no quadro uma subtração (5/6 — 4/6) dizendo: — Vocês vão escrever três problemas que possam ser resolvidos por esta subtração. Os problemas devem encerrar idéias diferentes;

c) — a professôra escreve no quadro uma adição:
3/5 + 1/5 = 4/5.
Pede, então, aos alunos que escrevam as subtrações relacionadas a esta adição;

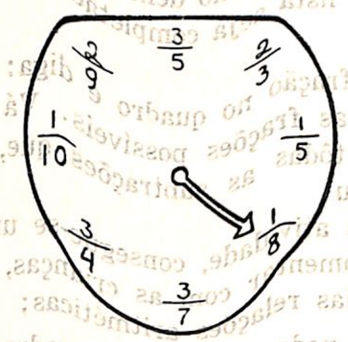
d) — escreva no quadro uma fração: 1/8, por exemplo. Diga: — Vocês vão retirar esta fração de outras. Registrem em seus cadernos. Depois, comente a organização feita pelas crianças, dando-lhes oportunidade de explicar o «porquê» de sua organização;

e) — a professôra escreve no quadro uma fração, 1/7, por exemplo, dizendo: — Esta foi a fração que restou de uma subtração que fiz. Que subtração fiz eu?

f) — escreva, no quadro, várias subtrações indicadas, cujos restos serão e não serão redutíveis. Diga à classe: — Há várias subtrações indicadas aqui no quadro. Pensem bem qual será a resposta de cada uma. Copiem no caderno apenas aquelas, cujos restos serão redutíveis;

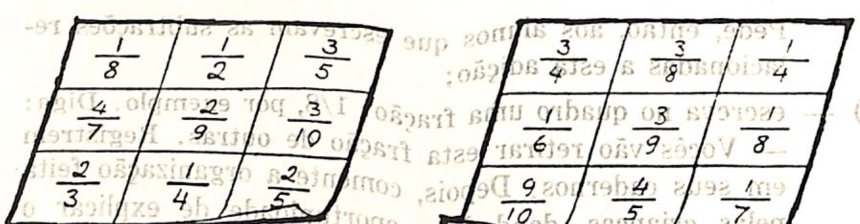
g) — a professôra prepara cartões com subtrações indicadas. Faz a apresentação rápida, pedindo que o aluno dê a resposta;

h) — faça a «Roda da Fração»:




A criança gira o ponteiro. Deve, então, dizer uma subtração que dê aquêle resultado indicado;

i) — a professôra prepara vários cartões com frações:




Cada criança receberá um cartão. A professôra diz a combinação. A criança procura a resposta no cartão para marcá-la, usando, para isso, grão de feijão. A



criança, que primeiro preencher o cartão, receberá uma salva de palmas dos colegas;

j) — a professôra divide a classe em pequenos grupos. Cada grupo terá um líder. As crianças recebem cartões com as combinações. O líder diz uma fração. A criança, que possui o cartão com a subtração, cujo resultado é aquêle dito pelo líder, faz a entrega ao líder. Aquela que em primeiro lugar ficar sem os cartões será a vencedora.

As sugestões acima apresentadas serão adaptadas, não apenas para serem usadas à proporção que a classe vence cada nova etapa da subtração, como também para com os demais processos fundamentais: adição, multiplicação e divisão. Tôdas estas atividades exigem certa rapidez de resposta. Devem ser usadas, portanto, sòmente depois que a compreensão estiver garantida. Devem trazer prazer à criança, que se sentirá segura, porque lhe foi dada uma atividade para a qual está preparada. A maneira de conduzir o ensino da aritmética muda a atitude da criança perante a matéria e é importante a atitude da professôra em relação ao desenvolvimento da atitude da criança.

**Generalizações.**

É fácil subtrair frações com o mesmo denominador?

Com a vivência de inúmeras experiências, a resposta não se faz esperar. Procuremos conduzir a aprendizagem de maneira que as conclusões sejam verbalizadas com clareza pelos próprios alunos:

— na subtração de frações com denominadores iguais, subtraimos os numeradores e usamos o mesmo denominador na fração restante;

— quando encontramos, como resto, uma fração redutível, fazemos a redução à expressão mais simples.

B. SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS E MISTOS.

No trabalho com a subtração, quando envolvemos frações e inteiros; inteiros e números mistos; números mistos e números mistos, deparamos com uma série de dificuldades, para as quais a classe precisa ir sendo preparada cuidadosamente.

Vejamos algumas dessas dificuldades:

1 — **Subtrair um número inteiro de um número misto.**
**Exemplo:**

$$\begin{array}{r} 2\,\frac{1}{4} \\ -\,1 \\ \hline \end{array}$$

Inicia-se o trabalho apresentando um problema: — Vimos na confeitaria 2 bolos e 1/4. Compramos um bôlo. Quanto ainda ficou na confeitaria?

O problema pode ser dramatizado com o uso do flanelógrafo. Assim a professôra diria: — Quantos bolos vamos colocar no flanelógrafo?

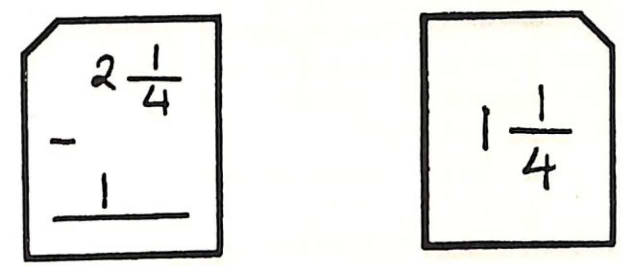


— Isto é tudo que vimos na confeitaria. Quanto o homem retirou para nos dar? Então vamos retirar um bôlo do flanelógrafo.

— Quanto ainda ficou?

Depois da experiência com o concreto, far-se-á o convite: — vamos fazer êsse mesmo problema usando só os símbolos? A êsse convite a criança vai registrar o que já realizou, sendo guiada na colocação dos inteiros sob os inteiros.

Em geral, não há dificuldade na resolução de problemas dessa natureza. Tanto que a professôra pode incentivar a classe a dar respostas a problemas orais ou a dar respostas prontas, quando se lhe mostra a operação em cartões com apresentação rápida.




verso reverso

Êsses cartões trazem, no reverso, a resposta da operação, para que o próprio aluno possa fazer a avaliação de seu trabalho.

A habilidade essencial a ser adquirida, através dessas atividades, reside em descobrir que a subtração é feita apenas na parte concernente a inteiros. A aprendizagem será, por isso mesmo, guiada em direção da aquisição desta habilidade.

2. **Subtrair um número misto de outro sem necessidade de reagrupamento.**

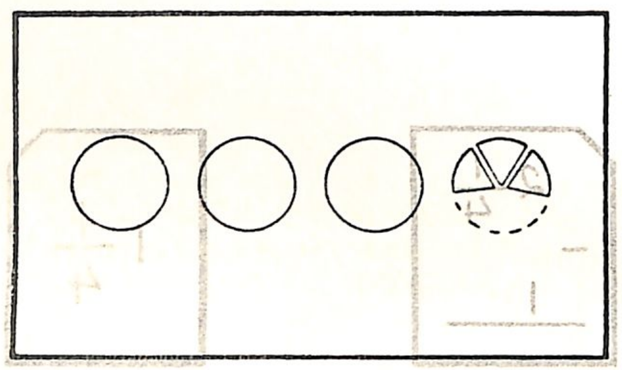
Exemplo:

$$3\frac{3}{5} \qquad 7\frac{3}{4}$$

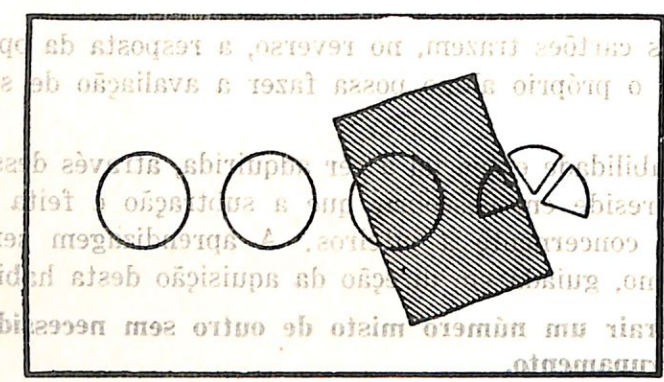
$$-1\frac{1}{5} \qquad -2\frac{1}{4}$$

Acima demos dois exemplos; no segundo caso a criança terá que reduzir a parte fracionária da resposta à sua expressão mais simples.

— Vamos colocar no flanelógrafo o minuendo, de acôrdo com o primeiro exemplo.



— Vamos, agora, com uma ficha de cartolina, tapar o que foi retirado dêsse total e descobrir o restante.





Examinando o exemplo, apenas em sua forma simbólica, a criança aprende que vai subtrair a parte fracionária, posteriormente os inteiros, atingindo a resposta. Nesta aprendizagem, quando bem orientada, tem oportunidade de transferir conhecimentos adquiridos no trabalho com os inteiros.

**3. Subtrair um número misto de um número misto, sendo o resto um número inteiro.**

Exemplo:

$$3\frac{1}{2} \qquad 4\frac{3}{5}$$

$$-2\frac{1}{2} \qquad -2\frac{3}{5}$$

Nesses exemplos a criança não experimenta grande dificuldade e à proporção que os resolve adquire confiança em dar a resposta sem efetuar a operação. Essa habilidade em resolver mentalmente problemas com frações deve ser incentivada, desde que haja evidência de prontidão para istó.

**4. Subtrair um número misto de um número inteiro.**

Exemplo:

$$4 \qquad 3$$

$$-2\frac{1}{3} \qquad -1\frac{3}{4}$$

Êsses exemplos encerram dificuldade maior. Uma técnica que vimos usando, quando introduzimos uma nova etapa em qualquer processo, consiste em dizer, por exemplo: — Temos hoje um exemplo mais difícil. Nós ainda não trabalhamos com êle. Quem será capaz de resolvê-lo? Para isso podem usar desenhos, diagramas, material ou outro recurso de que necessitarem.