Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Produtos cruzados parciais algébricos e aplicação à Álgebra de Leavitt

Gabriela Silmaia da Silva Yoneda
Orientador: Prof. Dr. Daniel Gonçalves

Florianópolis

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Produtos cruzados parciais algébricos e aplicação à Álgebra de Leavitt

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de concentração em Álgebra.

Maio de 2015
Florianópolis

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Yoneda, Gabriela Silmaia da Silva
Produtos cruzados parciais algébricos e aplicação à Álgebra de Leavitt / Gabriela Silmaia da Silva Yoneda ; orientador, Daniel Gonçalves - Florianópolis, SC, 2015.
69 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Matemática pura. 3. Produtos cruzados parciais. 4. Álgebra de Leavitt. 5. Grupóides. I. Gonçalves, Daniel. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Agradecimentos

Agradeço à minha família e aos amigos, estejam eles perto, nem tão perto ou bastante longe. Em especial, sempre especial, ao Luiz.

Agradeço ao meu orientador, Professor Daniel, pela sugestão do tema e pela dedicação e paciência no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço aos professores da banca por terem aceitado o convite de participar e pelas correções e sugestões feitas.

Agradeço à Elisa, secretaria da Pós-Graduação, pelo trabalho impecável e por toda a ajuda com a parte burocrática sempre.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de estudos fornecida, sem a qual não seria possível escrever esta dissertação.

Resumo

Dado um grafo dirigido E podemos construir um produto cruzado parcial associado a ele por meio de uma ação parcial do grupo livre gerado pelas arestas de E ou por meio de uma ação parcial do grupoide gerado pelas arestas de E. Em ambos os casos temos um isomorfismo entre a álgebra de Leavitt de E e os produtos cruzados parciais mencionados.

Neste trabalho mostramos a construção desses dois produtos cruzados parciais e seus respectivos isomorfismos com $L_K(E)$. Além disso, estudamos condições suficientes para que dados dois grafos dirigidos E_1 e E_2, considerando seus grupoides G_1 e G_2, tenhamos um isomorfismo entre suas álgebras de Leavitt. Por fim, estudamos condições para que dado um isomorfismo entre as álgebras de Leavitt tenhamos uma relação mais forte entre os grupoides.

Palavras-chave: Álgebra. Grafos dirigidos. Álgebra de Leavitt. Produto cruzado parcial. Grupoide.

Abstract

Given a directed graph E, one can define a partial skew group ring associated to it by a partial action of the free group generated by the edges of E or by a partial action of the groupoid generated by the edges of E. In both cases, there is an isomorphism between the Leavitt path algebra $L_K(E)$ and the partial skew group(groupoid) ring mentioned.

In this work, we show how these partial skew group(groupoid) rings are constructed and we also show how there can be an isomorphism between them. Moreover, we study sufficient conditions so that given two directed graphs E_1 and E_2, considering their groupoids G_1 and G_2, there is an isomorphism between their Leavitt path algebras. Finally, we study conditions so that given an isomorphism between Leavitt path algebras there is a stronger relation between the groupoids.

Keywords: Algebra. Directed graphs. Leavitt path algebras. Partial skew group rings. Groupoid.

Sumário

Introdução

Ações parciais de grupos apareceram independentemente em várias áreas da matemática, em particular, na teoria de álgebra de operadores como uma ferramenta poderosa para seu estudo. Produtos cruzados parciais são generalizações naturais de produtos cruzados no contexto de ação parcial (veja [1], onde produtos cruzados parciais são introduzidos e sua associatividade estudada). Uma grande vantagem de estudar produtos cruzados parciais é a sua capacidade de fornecer um modo de construir anéis não-comutativos. Além disso, há indícios de que a teoria de anéis não-comutativos pode se beneficiar da teoria de produtos cruzados parciais. Um desses indicativos é a recente descrição das álgebras de Leavitt, uma classe de álgebra sobre corpos construída de grafos dirigidos, como produto cruzado parcial.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que a álgebra de Leavitt $L_K(E)$ de um grafo dirigido E é isomorfa ao pruduto cruzado parcial associado a uma ação parcial do grupoide gerado pelas arestas de E.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, introduziremos as noções de ações parciais de grupo e produtos cruzados parciais associados a essas ações, usando como referências principais [1] e [5]. Ainda no primeiro capítulo, falaremos de critérios para que um produto cruzado parcial seja simples. De [4], obteremos critérios para o caso de o grupo ser abeliano.

No segundo capítulo, nos dedicaremos ao estudo das álgebras de caminhos de Leavitt, $L_K(E)$, e à existência de um isomorfismo entre $L_K(E)$ e o produto cruzado parcial associado a uma ação parcial do grupo livre gerado pelas arestas do grafo dirigido E sobre uma determinada álgebra.

No terceiro capítulo, estudaremos ação parcial de grupoide e o produto cruzado parcial associado a essa ação, baseados em [8] e [9]. Mostraremos neste capítulo que existe um isomorfismo entre a álgebra de

Leavitt de um grafo E e o produto cruzado parcial associado a uma ação parcial do grupoide gerado pelas arestas de E.

No capítulo quatro, estudaremos condições necessárias para que, dados dois grupoides G_1 e G_2 associados a grafos E_1 e E_2, respectivamente, tenhamos um isomorfismo entre os produtos cruzados associados a eles. Mostraremos também condições suficientes em relação às álgebras de Leavitt para que tenhamos um homomorfismo entre os grupoides que preserva caminhos e damos um contra-exemplo caso uma das condições da proposição não seja satisfeita.

Capítulo 1

Produtos cruzados parciais e simplicidade de ações parciais de grupo

Neste capítulo introduziremos o conceito de ação parcial de um grupo de acordo com [1]. Em seguida, dada uma ação parcial, consideraremos o produto cruzado parcial associado a essa ação e discutiremos condições para que o produto cruzado parcial seja associativo (com base em [1] e [5]) e para que ele seja simples (com base em [3] e [4]). Os resultados que não são demonstrados aqui podem ser encontrados em [1], [4] ou [5].

1.1 Ações parciais de um grupo G

Definição 1.1.1. Uma *ação parcial de um grupo G sobre um conjunto X* é um par $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ em que, para cada $t \in G$, D_t é um subconjunto de G e $\alpha_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ satisfaz:

(i) $D_e = X$, em que $e \in G$ é o elemento neutro de G;

(ii) $\alpha_t^{-1}(D_t \cap D_{s^{-1}}) \subseteq D_{(st)^{-1}}$;

(iii) $\alpha_s \circ \alpha_t(x) = \alpha_{st}(x)$, para todo $x \in \alpha_t^{-1}(D_t \cap D_{s^{-1}})$

Observação 1.1.2. Note que a igualdade em (iii) está bem definida pois, se $x \in \alpha_t^{-1}(D_t \cap D_{s^{-1}})$, então $\alpha_t(x)$ faz sentido e $\alpha_t(x) \in D_t \cap D_{s^{-1}}$.

Sendo assim, podemos aplicar α_s em $\alpha_t(x)$. Além disso, o item (ii) garante que podemos aplicar α_{st} em x sempre que $x \in \alpha_t^{-1}(D_t \cap D_{s^{-1}})$.

Os itens (ii) e (iii) garantem uma certa compatibilidade entre as operações de composição dos isomorfismos e a operação do grupo.

Definição 1.1.3. Uma *ação parcial de um grupo G sobre um anel R* é uma ação parcial $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ do grupo G tal que D_t é um ideal de R e $\alpha_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ é um isomorfismo de anel, para todo $t \in G$.

Proposição 1.1.4. *As condições de 1.1.1 são equivalentes a:*

(i) $D_e = X$ *e* $\alpha_e = \mathrm{Id}_X$*;*

(ii) $\alpha_t(D_{t^{-1}} \cap D_s) = D_t \cap D_{ts}$*;*

(iii) $\alpha_s(\alpha_t(x)) = \alpha_{st}(x)$*, para todo* $x \in D_{t^{-1}} \cap D_{(st)^{-1}}$

Exemplo 1.1.5. Seja $\mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos inteiros e seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Defina, para cada $z \in \mathbb{Z}$,

$$D_z = \{n \in \mathbb{N} : n \geq z\}.$$

Note que $D_z = \mathbb{N}$, caso $z \leq 0$. Defina, para cada $z \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{cccc} \alpha_z : & D_{-z} & \to & D_z \\ & n & \mapsto & n+z. \end{array}$$

Veja que α_z está bem definida para todo $z \in \mathbb{Z}$ pois, se $z \leq 0$ e $n \in D_{-z}$, então $n \geq -z$ e $\alpha_z(n) = n + z \geq -z + z = 0$. Logo, $\alpha_z(n) \in \mathbb{N} = D_z$. Se $z > 0$ e $n \in D_{-z} = \mathbb{N}$, então $\alpha_z(n) = n + z \geq z$ e com isso $\alpha_z(n) \in D_z$.

Note que, para todo $z \in \mathbb{Z}$ e para todo $n \in D_z$, $\alpha_z \circ \alpha_{-z}(n) = z$. Logo, $\alpha_z^{-1} = \alpha_{-z}$.

Vamos mostrar que $\alpha = (\{D_z\}_{z\in\mathbb{Z}}, \{\alpha_z\}_{z\in\mathbb{Z}})$ é uma ação parcial do grupo $\mathbb{Z}$ sobre o conjunto $\mathbb{N}$.

(i) Por definição, $D_0 = \mathbb{N}$.

(ii) Para mostrar que $\alpha_z^{-1}(D_z \cap D_{-w}) \subseteq D_{-z-w}$ devemos considerar dois casos.

Caso 1: $-z - w \leq 0$. Neste caso, $D_{-z-w} = \mathbb{N}$ e então segue diretamente que $D_z \cap D_{-w} \subseteq D_{-z-w}$.

Caso 2: $-z - w > 0$. Neste caso, temos $z < -w$, o que implica em $D_z \cap D_{-w} = D_{-w}$. Daí, para $x \in D_{-w}$, temos

$$x \geq -w \text{ e } \alpha_{-z}(x) = x - z \geq -w - z.$$

Logo, $\alpha_{-z}(x) \in D_{-w-z}$.

Portanto, $\alpha_{-z}(D_z \cap D_{-w}) \subseteq D_{-z-w}$.

(iii) Sejam $z, w \in \mathbb{Z}$ e seja $n \in \alpha_z^{-1}(D_z \cap D_{-w})$. Então

$$\alpha_w \circ \alpha_z(n) = \alpha_w(z+n) = w + (z+n) = (w+z) + n = \alpha_{w+z}(n).$$

Exemplo 1.1.6. Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre um conjunto X e seja K um corpo qualquer.

Seja $K^X = \{f : X \to K | f \text{ é função }\}$. Considere, para cada $g \in G$,

$$E_g = \{f \in K^X : f|_{X\setminus D_g} = 0\}.$$

Para toda $f \in E_{g^{-1}}$, para todo $x \in X$, seja

$$\beta_g(f)(x) = \begin{cases} f(\alpha_{g^{-1}}(x)) & , \text{se } x \in D_g \\ 0 & , \text{se } x \notin D_g. \end{cases}$$

Veja que β_g é uma função $\beta_g : E_{g^{-1}} \to E_g$.

Vamos mostrar que $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de G sobre K^X.

(i) Note que

$$\begin{aligned} E_e &= \{f \in K^X : f|_{X\setminus D_e} = 0\} \\ &= \{f \in K^X : f|_{X\setminus X = 0}\} \\ &= K^X. \end{aligned}$$

(ii) Para quaisquer $g, h \in G$ e $f \in (E_{g^{-1}} \cap E_h)$, vamos mostrar que $\beta_g(f) \in E_{gh}$. Seja $x \in X \setminus D_{gh}$. Temos dois casos.

Caso 1: $x \notin D_g$.

Então $\beta_g(f)(x) = 0$, por definição.

Caso 2: $x \in D_g$.

Neste caso, temos que $x \in D_g \setminus D_{gh} = D_g \setminus (D_{gh} \cap D_g)$. Logo:

$$\begin{aligned} \alpha_{g^{-1}}(x) \in \alpha_{g^{-1}}(D_g \setminus (D_g \cap D_{gh})) &= D_{g^{-1}} \setminus \alpha_{g^{-1}}(D_g \cap D_{gh}) \\ &= D_{g^{-1}} \setminus (D_{g^{-1}} \cap D_h). \end{aligned}$$

Ou seja, $\alpha_{g^{-1}}(x) \in D_{g^{-1}} \setminus (D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq X \setminus D_h$.

Logo, $\beta_g(f)(x) = f(\alpha_{g^{-1}}(x)) = 0$, pois $f|_{X\setminus D_h} = 0$, visto que $f \in E_h$. Portanto, $\beta_g(f)|_{X\setminus D_{gh}} = 0$. Isto é, $\beta_g(E_{g^{-1}} \cap E_h) \subseteq E_{gh}$.

(iii) Para quaisquer $g, h \in G$, $f \in E_{h^{-1}} \cap E_{h^{-1}g^{-1}}$ e $x \in X$, temos

$$\beta_g(\beta_h(f))(x) = \begin{cases} \beta_h(f)(\alpha_{g^{-1}}(x)) & , \text{se } x \in D_g \\ 0 & , \text{se } x \notin D_g \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(x))) & , \text{se } x \in D_g \ , \ \alpha_{g^{-1}}(x) \in D_h \\ 0 & , \text{se } x \in D_g \ , \ \alpha_{g^{-1}}(x) \notin D_h \\ 0 & , \text{se } x \notin D_g. \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned} x \in D_g \text{ e } \alpha_{g^{-1}}(x) \in D_h &\Leftrightarrow x \in D_g \text{ e } \alpha_{g^{-1}}(x) \in D_h \cap D_{g^{-1}} \\ &\Leftrightarrow x \in D_g \text{ e } x = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)) \in \alpha_g(D_h \cap D_{g^{-1}}) \\ &\Leftrightarrow x \in D_g \text{ e } x \in D_{(g^{-1})^{-1}} \cap D_{(g^{-1})^{-1}(h^{-1})^{-1}} \\ &\Leftrightarrow x \in D_g \cap D_{gh}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\beta_g(\beta_h(f))(x) = \begin{cases} f(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(x))) & , \text{se } x \in D_g \cap D_{gh} \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(\alpha_{h^{-1}g^{-1}}(x)) & , \text{se } x \in D_{gh} \cap D_g \\ 0 & , \text{se } x \in D_{gh} \setminus D_g \\ 0 & , \text{se } x \notin D_{gh}. \end{cases}$$

Veja que se $x \in D_{gh} \setminus D_g = D_{gh} \setminus (D_{gh} \cap D_g)$, segue que

$$\begin{aligned} \alpha_{h^{-1}g^{-1}}(x) \in \alpha_{h^{-1}g^{-1}}(D_{gh} \setminus (D_{gh} \cap D_g)) &= D_{h^{-1}g^{-1}} \setminus \alpha_{h^{-1}g^{-1}}(D_{gh} \cap D_g) \\ &= D_{h^{-1}g^{-1}} \setminus (D_{h^{-1}g^{-1}} \cap D_{h^{-1}}) \\ &= D_{h^{-1}g^{-1}} \setminus D_{h^{-1}} \subseteq X \setminus D_{h^{-1}} \end{aligned}$$

Como $f \in E_{h^{-1}}$, obtemos $f(\alpha_{h^{-1}g^{-1}}) = 0$. Disso segue que

$$\beta_g(\beta_h(f))(x) = \begin{cases} f(\alpha_{h^{-1}g^{-1}}(x)), & \text{se } x \in D_g \cap D_{gh} \\ f(\alpha_{h^{-1}g^{-1}}(x)), & \text{se } x \in D_{gh} \setminus D_g \\ 0, & \text{se } x \notin D_{gh} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(\alpha_{h^{-1}g^{-1}}(x)), & \text{se } x \in D_{gh} \\ 0 & , \text{se } x \notin D_{gh}. \end{cases}$$

$$= \beta_{gh}(f)(x).$$

Como outros casos são equivalentes, temos que

$$\beta_g(\beta_h(f))(x) = \begin{cases} f(\alpha_{(gh)^{-1}}(x)) & \text{, se } x \in D_{gh} \\ 0 & \text{, se } x \notin D_{gh}. \end{cases}$$

Portanto, para quaisquer $g, h \in G$ e $f \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$, temos

$$\beta_g(\beta_h(f)) = \beta_{gh}(f).$$

1.2 Produto cruzado parcial

Seja A uma álgebra sobre um corpo K e seja $\alpha = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$ uma ação parcial de um grupo G sobre a álgebra A. Considere o conjunto de todas as somas formais finitas da forma $\sum_{g\in G} a_g\delta_g$, com $a_g \in D_g$.

Considere as seguintes operações no conjunto definido acima:

- $\sum_{g\in G} a_g\delta_g + \sum_{g\in G} b_g\delta_g = \sum_{g\in G}(a_g + b_g)\delta_g$;
- $\lambda \sum_{g\in G} a_g\delta_g = \sum_{g\in G}(\lambda a_g)\delta_g$, em que $\lambda \in K$;
- $(a_g\delta_g) \cdot (b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_g^{-1}(a_g)b_h)\delta_{gh}$. E essa operação estende-se linearmente para todo o conjunto.

Definição 1.2.1. O conjunto $\{\sum_{g\in G} a_g\delta_g : a_g \in D_g\}$ munido das operações acima é denominado *produto cruzado parcial associado a* α e denotado por $A \rtimes_\alpha G$.

Observação 1.2.2. Veja que a multiplicação está bem definida, pois, como $D_{g^{-1}}$ é um ideal bilateral de A, então $\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h \in D_{g^{-1}}$.

Observação 1.2.3. A aplicação $\iota : A \to A \rtimes_\alpha G$, $a \mapsto a\delta_e$ é um homomorfismo de álgebra injetivo, logo podemos identificar A com uma subálgebra de $A \rtimes_\alpha G$.

$A \rtimes_\alpha G$ é uma álgebra não necessariamente associativa. Ou seja, em geral, não é verdade que $(a_g\delta_g \cdot b_h\delta_h)\cdot c_j\delta_j = a_g\delta_g \cdot (b_h\delta_h \cdot c_j\delta_j)$. Todavia, como é mostrado em [1], vale o resultado que segue as definições abaixo.

Definição 1.2.4. Seja A uma álgebra e seja I um ideal não-nulo de A. Dizemos que I é *idempotente* se $I = I^2$, isto é, se todo elemento de I é uma soma de produtos de outros elementos de I.

Definição 1.2.5. Seja A uma álgebra e seja I um ideal não-nulo de A. Dizemos que I é *não-degenerado* se para cada elemento não-nulo $a \in I$ existe $b \in I$ tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$.

Corolário 1.2.6. *Seja α uma ação parcial de um grupo G um uma álgebra A tal que, para todo $t \in G$, tem-se que D_t é idempotente ou não-degenerado. Então o produto cruzado parcial $A \rtimes_\alpha G$ é associativo.*

O resultado acima nos dá uma condição suficiente para que $A \rtimes_\alpha G$ seja associativo, sendo que tal condição depende de propriedades dos ideais D_t. Em seguida, nos preocupamos com a simplicidade de $A \rtimes_\alpha G$.

Considerando uma ação parcial $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ de um grupo *abeliano* G em um anel R, em [4], estudamos condições necessárias e suficientes para que $A \rtimes_\alpha G$ seja simples.

Durante os nossos estudos para o caso em que o grupo G é abeliano e cada D_t possui unidades locais (definiremos o que isso significa logo em seguida), conseguimos enfraquecer a condição encontrada em [4] que garante a simplicidade de $A \rtimes_\alpha G$.

Agora falaremos sobre os pré-requisitos necessários para enunciarmos o teorema mencionado acima. No que segue, G é um grupo abeliano, A é um anel e estão omitidas algumas demonstrações que podem ser encontradas em [4].

Definição 1.2.7. Seja $a = \sum\limits_{t \in G} a_t \delta_t \in A \rtimes_\alpha G$. Definimos:

(i) o *suporte de a*, denotado por $\mathrm{supp}(a)$, como o conjunto finito

$$\{t \in G : a_t \neq 0\};$$

(ii) a *projeção de a na coordenada g*, $P_g : A \rtimes_\alpha G \to A$, por

$$P_g(\sum_{t \in G} a_t \delta_t) = a_g.$$

Definição 1.2.8. Seja A um anel. Dizemos que A *possui unidades locais* se para todo conjunto finito $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \subseteq A$ existe $e \in A$ tal que $e^2 = e$ e $er_i = r_i = r_i e$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 1.2.9. Um *conjunto de unidades locais* $E \subseteq A$ é um conjunto de idempotentes tais que para todo subconjunto finito $\{r_1, \ldots, r_n\}$ de A existe $e \in E$ tal que $er_i = r_i e = r_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposição 1.2.10. *Seja $E \subseteq A$ um conjunto de unidades locais para A. Então $E\delta_0 = \{e\delta_0 : e \in E\}$ é um conjunto de unidades locais para $A \rtimes_\alpha G$.*

Demonstração: Seja $\{a^1, \ldots, a^n\}$ um subconjunto finito de $A \rtimes_\alpha G$, e escrevemos $a^i = \sum_{t \in G} a_t^i \delta_t$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então existe somente uma quantidade finita de a_t^i's que são diferentes de zero.

Seja $X = \{\alpha_{t^{-1}}(a_t^i) : a_t^i \neq 0\} \cup \{a_t^i : a_t^i \neq 0\}$. Como X é finito e A possui unidades locais, seja $e \in E$ unidade local para X. Daí,

$$e\delta_0 a_t^i \delta_t = e a_t^i \delta_t = a_t^i \delta_t \text{ e } a_t^i \delta_t e \delta_0 = \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t^i)e)\delta_t = \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a_t^i))\delta_t = a_t^i \delta_t.$$

Além disso, temos que

$$(e\delta_0)^2 = e\delta_0 \cdot e\delta_0 = \alpha_0(\alpha_0(e) \cdot e)\delta_0 = \alpha_0(e \cdot e)\delta_0 = \alpha_0(e)\delta_0 = e\delta_0,$$

como queríamos. □

Definição 1.2.11. Seja $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ uma ação parcial de um grupo G em um anel A. Dizemos que um ideal $I \trianglelefteq A$ é *G-invariante* se $\alpha_g(I \cap D_{g^{-1}}) \subseteq I \cap D_g$, para todo $g \in G$.

Definição 1.2.12. Dizemos que um anel A é *G-simples* se os únicos ideais G-invariantes de A são A e $\{0\}$.

Lema 1.2.13. *Seja E um conjunto de unidades locais para A. Seja α uma ação parcial de um grupo abeliano (aditivo) G tal que D_t tem unidades locais, para todo $t \in G$. Suponha que A é G-simples.*

Então, para todo elemento não nulo $r \in A \rtimes_\alpha G$, e para cada unidade local $e \in E$, existe $r' \in A \rtimes_\alpha G =: R$ tal que:

a. $r' \in RrR$;

b. $P_0(r') = e$;

c. $\# \operatorname{supp}(r') \leq \# \operatorname{supp}(r)$.

Definição 1.2.14. Seja R um anel. O centro de R é o conjunto $C(R) = \{a \in R : ab = ba, \text{ para todo } b \in R\}$.

Observação 1.2.15. Note que $C(R) \neq \varnothing$, pois $0 \in C(R)$. Além disso, para quaisquer $a, b \in C(R)$ e $r \in R$ temos $(a-b)r = ar - br = ra - rb = r(a-b)$ e $(ab)r = a(br) = a(rb) = (ar)b = (ra) = r(ab)$. Ou seja, $C(R)$ é um subanel comutativo de R.

Para $A \rtimes G =: S$ e $E \subseteq A$, denotaremos por C_e o centro de $e\delta_0 Se\delta_0$.

Definição 1.2.16. Sejam $R = A \rtimes_\alpha G$ produto cruzado parcial e E um conjunto de unidades locais para A. Para cada $e \in E$, definimos *o centro de* $e\delta_0 Re\delta_0$ como

$$C_e := \{x \in e\delta_0 Re\delta_0 : xy = yx, \text{ para todo } y \in e\delta_0 Re\delta_0\}.$$

Lema 1.2.17. *Considere as mesmas condições do lema anterior e seja $e \in E$. Então todo ideal não-nulo de $A \rtimes_\alpha G$ tem interseção não-nula com $C_e \cap \{e\delta_0 + \sum_{g \in G \setminus \{0\}} b_g \delta_g\}$.*

Por fim, enunciamos o teorema. Em [4], é mostrado que os itens (i) e (ii) são equivalentes.

Teorema 1.2.18. *Seja E um conjunto de unidades locais para A e seja α uma ação parcial de um grupo abeliano G tal que todo ideal D_t tem unidades locais. Então são equivalentes:*

(i) $A \rtimes_\alpha G$ *é simples;*

(ii) A *é G-simples e* C_e *é corpo, para todo* $e \in E$*;*

(iii) A *é G-simples e* C_e *é corpo, para algum* $e \in E$*.*

Demonstração: $(ii) \Rightarrow (iii)$ É óbvio.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Seja J um ideal não-nulo de $A \rtimes_\alpha G$. Pelo lema anterior, existe $r \in (J \cap C_e) \setminus \{0\}$. Como C_e é corpo, então $e\delta_0 = r \cdot r^{-1} \in J$.

Considere o morfismo $\varphi : A \to A \rtimes_\alpha G \;\; a \mapsto a\delta_0$. Então é fácil ver que $\varphi^{-1}(J)$ é ideal não-nulo de A.

Vamos mostrar que $\varphi^{-1}(J)$ é G-invariante. Seja $a \in \varphi^{-1}(J) \cap D_{-h}$. Seja e_h unidade para a em D_{-h}. Daí,

$$\begin{aligned}
\alpha_h(e_h)\delta_h \cdot a\delta_0 \cdot e_h\delta_{-h} &= \alpha_h(\alpha_{-h}(\alpha_h(e_h)a))\delta_h \cdot e_h\delta_{-h} \\
&= \alpha_h(e_h a)\delta_h \cdot e_h\delta_{-h} \\
&= \alpha_h(a)\delta_h \cdot e_h\delta_{-h} \\
&= \alpha_h(\alpha_0(a)e_h)\delta_0
\end{aligned}$$

$$= \alpha_h(a)\delta_0.$$

Logo $\alpha_h(a)\delta_0 \in J$ e então $\alpha_h(a) \in \varphi^{-1}(J)$, donde $\varphi^{-1}(J)$ é G-invariante e $\varphi^{-1}(J) = A$, pois A é G-simples e $\varphi^{-1}(J) \neq 0$. Portanto, $a\delta_0 \in J$ para todo $a \in A$.

Agora, seja $a_g \in D_g$ qualquer. Seja e_g unidade para $a_g \in D_g$. Daí,

$$a_g\delta_0 \cdot e_g\delta_g = \alpha_0(\alpha_0(a_g)e_g)\delta_g = \alpha_0(a_g e_g)\delta_g = a_g\delta_g.$$

Logo, $a_g\delta_g \in J$, para todo $a_g \in D_g$, para todo $g \in G$. Donde, $J = A \rtimes_\alpha G$ e, portanto, $A \rtimes_\alpha G$ é simples.

$\square$

Capítulo 2

As álgebras de caminhos de Leavitt como produto cruzado parcial

Neste capítulo nos concentramos em uma classe específica de produto cruzado parcial: o produto cruzado parcial associado a uma ação parcial de um grupo livre gerado por um grafo dirigido E. Em seguida, descreveremos as álgebras de caminhos de Leavitt (que chamaremos simplesmente de álgebras de Leavitt) como um produto cruzado parcial associado a uma ação parcial do grupo livre gerado por E..

2.1 Ação parcial do grupo livre gerado por um grafo dirigido

Definição 2.1.1. Um *grafo dirigido* $E = (E^0, E^1, r, s)$ consiste de conjuntos não vazios E^0, E^1 e funções $r, s : E^1 \to E^0$.
Os elementos de E^0 são chamados *vértices* e os elementos de E^1 são denominados *arestas*.
Para uma aresta e, $r(e)$ é o *range* de e e $s(e)$ é o *source* de e.

Exemplo 2.1.2. Seja $E = \{E^0, E^1, r, s\}$, em que $E^0 = \{u, v, w, k\}, E^1 = \{e, f, g, h\}$, $s(e) = w = r(h)$, $s(f) = u = r(e)$, $s(g) = v = r(f)$ e

$s(h) = k = r(g)$. Podemos representar este grafo por

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "f"] & v \arrow[d, "g"] \\
w \arrow[u, "e"] & k \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

Exemplo 2.1.3. Seja $E = \{E^0, E^1, r, s\}$, em que $E^0 = \{u, v, w, k, z\}$, $E^1 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$, $z = s(f_7)$, $u = r(f_1) = s(f_1) = s(f_2) = s(f_3)$, $v = r(f_3) = s(f_4) = s(f_6)$, $w = r(f_4) = s(f_5)$ e $k = r(f_2) = r(f_6) = r(f_5) = r(f_7)$. Podemos representar este grafo por

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[loop left, "f_1"] \arrow[r, "f_3"] \arrow[dr, "f_2"] & v \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "f_6"] & w \arrow[dl, "f_5"] \\
& k & z \arrow[l, "f_7"]
\end{tikzcd}$$

Definição 2.1.4. Seja E um grafo dirigido e seja K um corpo. A *álgebra de Leavitt de E com coeficientes em K*, denotada por $L_K(E)$, é a K-álgebra universal gerada por um conjunto $\{v : v \in E^0\}$ de idempotentes ortogonais entre si e um conjunto $\{e, e^* : e \in E^1\}$ de elementos satisfazendo:

(i) $s(e)e = er(e) = e$, para todo $e \in E^1$;

(ii) $r(e)e^* = e^*s(e) = e^*$, para todo $e \in E^1$;

(iii) para quaisquer $e, f \in E^1$ tem-se que $e^*f = 0$ se $e \neq f$ e $e^*e = r(e)$;

(iv) $v = \displaystyle\sum_{e \in E^1 : s(e) = v} ee^*$, para todo vértice v tal que $0 < \#\{e : s(e) = v\} < \infty$.

Agora serão introduzidas as convenções necessárias para definir o produto cruzado parcial que é isomorfo à álgebra de caminhos de Leavitt.

Definição 2.1.5. Um *caminho de tamanho n em um grafo E* é uma sequência $\mu = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$ tal que $r(\mu_i) = s(\mu_{i+1})$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Escrevemos $|\mu| = n$ para o comprimento de μ. Chamamos os vértices de caminhos de tamanho zero.

Definição 2.1.6. E^n é o *conjunto de caminhos de tamanho n*.

Estendemos as aplicações range e source para E^n definindo $s(\mu) = s(\mu_1)$ e $r(\mu) = r(\mu_1)$, se $n \geq 2$, e $s(v) = v = r(v)$, para $n = 0$.

Definição 2.1.7. W é o *conjunto de todos os caminhos finitos em* E, ou seja,

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mu_1 \ldots \mu_n : \mu_i \in E^1 \text{ e } r(\mu_i) = s(\mu_{i+1}),\ \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}\}.$$

Definição 2.1.8. W^∞ é conjunto de todos os caminhos infinitos de E, ou seja,

$$W^\infty = \{\mu_1\mu_2 \ldots : \mu_i \in E^1 \text{ e } r(\mu_i) = s(\mu_{i+1}),\ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Agora vamos estender $s, r : E^1 \to E^0$ para $W \cup W^\infty \cup E^0$.
Defina:

$s(\mu) = s(\mu_1)$, para $\mu = \mu_1\mu_2 \ldots \in W^\infty$ ou $\mu = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n$;

$r(\xi) = r(\xi_n)$, para $\xi = \xi_1 \ldots \xi_n \in W$;

$r(v) = v = s(v)$, para $v \in E^0$.

Definição 2.1.9. Dizemos que um caminho $\xi = \xi_1 \ldots \xi_n$ é o *começo do caminho* $\eta = \eta_1 \ldots \eta_m$ se $m \geq n$ e $\eta_i = \xi_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 2.1.10. O *grau de saída de um vértice* v é o número de arestas e tais que $s(e) = v$.
O *grau de entrada de um vértice* v é o número de arestas e tais que $r(e) = v$.

Definição 2.1.11. Uma *fonte* é um vértice com grau de entrada zero.
Um *poço* é um vértice com grau de saída zero.

Seja $\mathbb{F}$ o grupo livre gerado por E^1 e seja $X = \{\xi \in W : r(\xi) \text{ é um poço}\} \cup \{v \in E^0 : v \text{ é um poço}\} \cup W^\infty$.
Para cada $c \in \mathbb{F}$, defina:

$X_0 = X$, em que 0 é o elemento neutro de $\mathbb{F}$;

$X_{b^{-1}} = \{\xi \in X : s(\xi) = r(b)\}$, para todo $b \in W$;

$X_a = \{\xi \in X : \xi_1\xi_2 \ldots \xi_{|a|} = a\}$, para todo $a \in W$;

$X_{ab^{-1}} = \{\xi \in X : \xi_1\xi_2 \ldots \xi_{|a|} = a\} = X_a$, para $ab^{-1} \in \mathbb{F}$, com $a, b \in W$, $r(a) = r(b)$ e ab^{-1} na forma reduzida, ou seja, $a_{|a|} \neq b_{|b|}$,

$X_c = \varnothing$, para qualquer outro $c \in \mathbb{F}$.

Observação 2.1.12. Podemos ver W como um subconjunto de $\mathbb{F}$.

Proposição 2.1.13. *$r(b) \in X_{b^{-1}}$ se, e somente se, $r(b)$ é um poço. Além disso, se $r(b)$ é um poço então $X_{b^{-1}} = \{r(b)\}$ e $X_b = \{b\}$.*

Demonstração: Suponha que $r(b) \in X_{b^{-1}}$. Então $r(b) \in X \cap E^0$ e, pela definição de X, segue que $r(b)$ é poço. Suponha agora que $r(b)$ é poço. Como $r(b) \in X$ e $r(b) = s(r(e))$, temos que $r(b) \in X_{b^{-1}}$.

Se $r(b)$ é poço, então, para $\xi \in X_{b^{-1}}$, $r(b) = s(\xi)$ implica em $\xi \in E^0 \cap X$. Donde $\xi = r(b)$. Para $\xi \in X_b$ temos $\xi_1 \dots \xi_{|b|} = b$, o que implica em $r(\xi_{|b|}) = r(b)$ ser poço. Logo, $\xi = \xi_1 \dots \xi_{|b|} = b$.

□

Observação 2.1.14. Para todo $v \in E^0$, temos $v \in X_v := \{\xi \in X : s(\xi) = v\}$ se, e somente se, v é um poço. De fato,

$$v \in X_v \iff v \in X \iff v \text{ é poço} .$$

Além disso, se v é um poço, então $X_v = \{v\}$.

Lema 2.1.15. *Sejam $a, c \in W$, $b, d \in W \cup \{0\}$ e $v \in E^0$. Então:*

(1) $X_{a^{-1}} \cap X_{c^{-1}} = \begin{cases} X_{a^{-1}} = X_{c^{-1}} & , \textit{se } r(a) = r(c) \\ \varnothing & , \textit{caso contrário} \end{cases}$

(2) $X_{a^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \begin{cases} X_{cd^{-1}} & , \textit{se } r(a) = s(c) \\ \varnothing & , \textit{caso contrário} \end{cases}$

(3) *Suponha $r(a) = r(b)$ e $r(c) = r(d)$.*

$$X_{ab^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \begin{cases} X_{ab^{-1}} & , \textit{se } a = ct, \textit{ para algum } t \in W \cup \{0\} \\ X_{cd^{-1}} & , \textit{se } c = at, \textit{ para algum } t \in W \cup \{0\} \\ \varnothing & , \textit{caso contrário} \end{cases}$$

(4) $X_v \cap X_{b^{-1}} = \begin{cases} X_v = X_{b^{-1}} & , \textit{se } r(b) = v \\ \varnothing & , \textit{caso contrário} \end{cases}$

(5) $X_v \cap X_{ab^{-1}} = \begin{cases} X_{ab^{-1}} & , \textit{se } s(a) = v \\ \varnothing & , \textit{caso contrário} \end{cases}$

(6) $X_v = \bigcup_{s(a)=v} X_{ab^{-1}}$

Demonstração:

$$(1)\ X_{a^{-1}} \cap X_{c^{-1}} = \{\xi \in X : s(\xi) = r(a)\} \cap \{\eta \in X : s(\eta) = r(c)\}$$
$$= \{\xi \in X : s(\xi) = r(a) = r(c)\}$$

Então

$$X_{a^{-1}} \cap X_{c^{-1}} = \begin{cases} X_{a^{-1}} = X_{c^{-1}} & \text{, se } r(a) = r(c) \\ \varnothing & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

(2) Se $r(c) = r(d)$ e cd^{-1} está na forma reduzida, então:

$$X_{a^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \{\xi \in X : s(\xi) = r(a)\} \cap \{\eta \in X : \eta_1\eta_2 \ldots \eta_{|c|} = c\}$$
$$= \{\xi \in X : s(\xi) = r(a) \text{ e } \eta_1\eta_2 \ldots \eta_{|c|} = c\}$$
$$= \{\xi \in X : s(\xi) = r(a) = s(c) \text{ e } c \text{ é começo para o caminho } \xi\}$$

Se $r(c) \neq r(d)$, então $X_{cd^{-1}} = \varnothing$. Logo,

$$X_{a^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \begin{cases} X_{cd^{-1}} = X_{c^{-1}} & \text{, se } r(a) = s(c) \\ \varnothing & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

$$(3)\ X_{ab^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = X_a \cap X_c$$
$$= \{\xi \in X : \xi_1 \ldots x_{|a|} = a\} \cap \{\eta \in X : \eta_1 \ldots \eta_{|c|} = c\}$$
$$= \{\xi \in X : a \text{ é começo de } \xi \text{ e } c \text{ é começo de } \xi\}$$

Temos três casos:

caso 1: a não é começo do caminho c e c não é começo do caminho a. Sendo assim, $X_a \cap X_c = \varnothing$.

caso 2: c é começo do caminho a.

Neste caso, existe $t \in W \cup \{0\}$ tal que $a = ct$. Daí,

$$X_{ab^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = X_a \cap X_c = \{\xi \in X : a \text{ é começo do caminho } \xi\} = X_{ab^{-1}}.$$

caso 3: a é começo do caminho c.

Neste caso, existe $t \in W \cup \{0\}$ tal que $c = at$. Daí,

$$X_{b^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = X_a \cap X_c = \{\xi \in X : c \text{ é começo do caminho } \xi\} = X_{cd^{-1}}.$$

$$(4)\ X_v \cap X_{b^{-1}} = \{\xi \in X : s(\xi) = r(v) = v\} \cap \{\eta \in X : s(\eta) = r(b)\}$$
$$= \{\xi \in X : s(\xi) = v = r(b)\}.$$

Então,

$$X_v \cap X_{b^{-1}} = \begin{cases} X_v = X_{b^{-1}} & \text{, se } r(b) = v, \\ \varnothing & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

(5) Se $r(a) \neq r(b)$, então $X_{ab^{-1}} = \varnothing$. Se $r(a) = r(b)$, então:

$$\begin{aligned} X_v \cap X_{ab^{-1}} &= \{\xi \in X : s(\xi) = v\} \cap \{\eta \in X : a \text{ é começo de } \eta\} \\ &= \{\xi \in X : s(\xi) = v = s(a) \text{ e } a \text{ é começo de } \xi\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$X_v \cap X_{ab^{-1}} = \begin{cases} X_{ab^{-1}} & \text{, se } s(a) = v \\ \varnothing & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

(6) Seja $\xi \in X_v$, ou seja, $s(\xi) = v$. Se $\xi \in W \cap X$, então $\xi \in X_\eta \subseteq \bigcup_{s(a)=v} X_{ab^{-1}}$. Se $\xi \in \{u \in E^0$:u é poço $\}$, então $s(\xi) = r(\xi) = v$. Se $\xi \in W^\infty$, então $s(\xi) = s(\xi_1) = v$ e, sendo assim, $\xi \in X_{\xi_1} \bigcup_{s(a)=v} X_{ab^{-1}}$.

A outra inclusão segue do item (5).

$\square$

Temos até agora o grupo livre $\mathbb{F}$ gerado por E^1 e o conjunto X sobre o qual $\mathbb{F}$ irá agir. Ainda falta definirmos, para todo $c \in \mathbb{F}$ tal que $X_{c^{-1}} \neq \varnothing$, bijeções $\theta_c : X_{c^{-1}} \to X_c$.

Defina $\theta_0 : X_0 \to X_0$ como a aplicação identidade. Para $b \in W$, defina $\theta_b : X_{b^{-1}} \to X_b$, por $\xi \mapsto b\xi$. Note que θ_b está bem definida, pois, para $\xi \in X_{b^{-1}}$ temos que $s(\xi) = r(b)$ e, portanto, $b\xi \in X_b$.

Para $a, b \in W$ com $r(a) = r(b)$ e $a_{|a|} \neq b_{|b|}$, defina $\theta_{ab^{-1}} : X_{ba^{-1}} \to X_{ab^{-1}}$, por $\xi \mapsto a\xi_{|b|+1}\xi_{|b|+2}\ldots$. Note que $\theta_{ab^{-1}}$ está bem definida, pois, para $\xi \in X_{ba^{-1}}$, temos que $\xi_1 \ldots \xi_{|b|} = b$ e, como $r(a) = r(b) = r(\xi_{|b|}) = s(\xi_{|b|+1})$, segue que $a\xi_{|b|+1}\xi_{|b|+2}\ldots \in X_{ab^{-1}}$.

Ainda, defina $\theta_{b^{-1}} : X_b \to X_{b^{-1}}$, por $\eta \mapsto \eta_{|b|+1}\eta_{|b|+2}\ldots$, se $r(b)$ não é poço, e $\eta \mapsto r(b)$, se $r(b)$ é poço.

Por fim, defina $\theta_{ba^{-1}} : X_{ab^{-1}} \to X_{ba^{-1}}$, por $\eta \mapsto b\eta_{|a|+1}\eta_{|a|+2}\ldots$.

Proposição 2.1.16. *Para $b \in W$, temos $\theta_{b-1} = \theta_b^{-1}$. Para $a, b \in W$ com $r(a) = r(b)$ e $a_{|a|} \neq b_{|b|}$, temos $\theta_{ab^{-1}}^{-1} = \theta_{ba^{-1}}$.*

Demonstração: Dado $\eta \in X_{b^{-1}}$, segue que

$$(\theta_{b^{-1}} \circ \theta_b)(\eta) = \theta_b^{-1}(\eta_{|b|+1}\eta_{|b|+2}\ldots) = b\eta_{|b|+1}\eta_{|b|+2}\ldots = \eta,$$

se $r(b)$ não é poço. Se $r(b)$ é poço, segue que

$$(\theta_{b^{-1}} \circ \theta_b)(\eta) = \theta_b^{-1}(r(b)) = br(b) = \eta.$$

Dado $\xi \in X_b$, segue que $(\theta_b \circ \theta_{b^{-1}})(\xi) = \theta_b(b\xi) = \xi$.

Para $\xi \in X_{ba^{-1}}$, segue que

$$(\theta_{ba^{-1}} \circ \theta_{ab^{-1}})(\xi) = (\theta_{ba^{-1}})(a\xi_{|b|+1}\xi_{|b|+2}\ldots) = b\xi_{|b|+1}\xi_{|b|+2}\ldots = \xi.$$

Para $\eta \in X_{ab^{-1}}$ segue que

$$(\theta_{ab^{-1}} \circ \theta_{ba^{-1}})(\eta) = (\theta_{ab^{-1}})(b\eta_{|a|+1}\eta_{|a|+2}\ldots) = a\eta_{|a|+1}\eta_{|a|+2}\ldots = \eta.$$

□

Proposição 2.1.17. *O par $\theta = (\{X_c\}_{c\in\mathbb{F}}, \{\theta_c\}_{c\in\mathbb{F}})$ é uma ação parcial.*

Demonstração: O axioma *(i)* de 1.1.1 segue das definições de X_0 e θ_0.

Para os outros axiomas de 1.1.1, basta que verifiquemos para $g, h \in \{ab^{-1} : a, b \in W \cup \{0\}\} \cup \{0\}$, pois, caso contrário, $X_g \cap X_{h^{-1}} = \varnothing$ e a inclusão ou igualdade é trivial.

Note que $\{ab^{-1} : a, b \in W \cup \{0\}\} \cup \{0\}$ é fechado por inversos. Note ainda que se $g = 0$ ou $h = 0$ então a inclusão é também trivial.

Então suponha que $g = ab^{-1}$ e $h = cd^{-1}$ com $a, b, c, d \in W \cup \{0\}$, ab^{-1}, cd^{-1} na forma reduzida, $r(a) = r(b)$, $r(c) = r(d)$, a, b não simultaneamente 0 e nem c, d simultaneamente 0.

(ii) Vamos mostrar que $\theta_h^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$. Temos 3 casos.

caso 1: a não é começo do caminho d e d não é começo do caminho a.

Em particular, $a \neq 0$ e $d \neq 0$. Como d não é começo de a, então $a \notin X_d$ e como a não é começo de d então $d \notin X_a$. Daí,

$$X_g \cap X_{h^{-1}} = X_{ab^{-1}} \cap X_{(cd^{-1})^{-1}} = X_a \cap X_d = \varnothing,$$

pois nenhum $\xi \in X$ pode começar com a e d simultaneamente.

caso 2: a é começo do caminho d, e escrevemos $d = ad'$.

Note que $a \neq 0 \Rightarrow d \neq 0$. Daí,

$$X_g \cap X_{h^{-1}} = X_{ab^{-1}} \cap X_{(cd^{-1})^{-1}}$$

$$= \begin{cases} X_{b^{-1}} \cap X_{c^{-1}} & \text{, se } a = d = 0 \\ X_{b^{-1}} \cap X_d & \text{, se } a = 0 \text{ e } d \neq 0 \\ X_a \cap X_d & \text{, se } a \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} X_{b^{-1}} \cap X_{c^{-1}} & \text{, se } a = d = 0 \\ X_{b^{-1}} \cap X_d & \text{, se } a = 0 \text{ e } d \neq 0 \\ X_d & \text{, se } a \neq 0 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \theta_g^{-1}(X_g \cap X_h^{-1}) &= \theta_{ba^{-1}}(X_g \cap X_{h^{-1}}) \\ &= \begin{cases} \theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_{c^{-1}}) & \text{, se } a = d = 0 \text{ (*)} \\ \theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_d) & \text{, se } a = d \text{ e } d \neq 0 \text{ (**)} \\ \theta_{ba^{-1}}(X_d) & \text{, se } a \neq 0 \text{ (***)} \end{cases} \end{aligned}$$

Em $(*)$, temos que $g^{-1}h^{-1} = ba^{-1}dc^{-1} = bc^{-1}$ e $b \neq 0$, pois $a = 0$. Então,

$$X_{g^{-1}h^{-1}} = X_{bc^{-1}} = X_b.$$

Logo,

$$\theta_g^{-1}(X_g \cap X_{h^{-1}}) = \theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_{c^{-1}}) \subseteq X_b = X_{g^{-1}h^{-1}},$$

como queríamos.

Em $(**)$, temos que $g^{-1}h^{-1} = bdc^{-1}$ e $d \neq 0, b \neq 0$, pois $a = 0$. Logo, $bd \neq 0$ e então

$$X_{g^{-1}h^{-1}} = X_{bdc^{-1}} = X_{bd}.$$

Daí, para todo $\xi \in X_{b^{-1}} \cap X_d$ temos $\xi = d\xi'$ e também

$$\theta_{g^{-1}}(\xi) = \theta_{ba^{-1}}(\xi) = \theta_b(\xi) = bd\xi' = (bd)\xi'.$$

Logo, $\theta_b(\xi) \in X_{bd}$. Assim,

$$\theta_{g^{-1}}(X_g \cap X_{h^{-1}}) = \theta_b(X_{b^{-1}} \cap X_d) \subseteq X_{bd} = X_{g^{-1}h^{-1}},$$

como queríamos.

Em $(***)$, temos mais dois casos. Se $b = d' = 0$, então $a = d$ e $r(c) = r(d) = r(a)$. Logo, $X_{c^{-1}} = X_{a^{-1}}$. Como $X_{g^{-1}h^{-1}} = X_{ba^{-1}dc^{-1}} = X_{c^{-1}}$, então

$$\theta_{g^{-1}}(X_g \cap X_{h^{-1}}) = \theta_{ba^{-1}}(X_d) = \theta_{a^{-1}}(X_a) = X_{a^{-1}} = X_{c^{-1}} = X_{g^{-1}h^{-1}}.$$

Se $bd' \neq 0$, então

$$X_{g^{-1}h^{-1}} = X_{ba^{-1}dc^{-1}} = X_{ba^{-1}ad'c^{-1}} = X_{bd'c^{-1}} = X_{bd'}.$$

Temos que mostrar que $\theta_{g^{-1}}(X_d) \subseteq X_{bd'}$. De fato, para todo $\xi \in X_d$, escrevemos $\xi = d\xi' = ad'\xi'$ e então

$$\theta_{ba^{-1}}(\xi) = \theta_{ba^{-1}}(ad'\xi') = bd'\xi \in X_{bd'}.$$

caso 3: d é começo da palavra a, e escrevemos $a = da'$.
Este caso é similar ao caso anterior.

(iii) $\theta_g \circ \theta_h(\xi) = \theta_{gh}(\xi)$, para todo $\xi \in \theta_{h^{-1}}(X_h \cap X_{g^{-1}})$. Temos 3 casos.

caso 1: a não é começo do caminho d e d não é começo do caminho a.
Neste caso, $X_g \cap X_{h^{-1}} = \varnothing$, como no primeiro caso do axioma *(ii)*.

caso 2: a é começo da palavra d, e escrevemos $d = ad'$.
Seja $\xi \in \theta_g^{-1}(X_g \cap X_{h^{-1}}) = \theta_{ba^{-1}}(X_{ab^{-1}} \cap X_{dc^{-1}})$. Então $\xi = \theta_{ba^{-1}}(\eta)$, para algum $\eta \in X_{ab^{-1}} \cap X_{dc^{-1}}$. Assim, $\eta = d\eta' = ad'\eta'$. Logo,

$$\xi = \theta_{ba^{-1}}(\eta) = \theta_{ba^{-1}}(ad'\xi') = bd'\eta'.$$

Daí, por um lado, temos que

$$\theta_h(\theta_g(\xi)) = \theta_{cd^{-1}}(\theta_{ab^{-1}}(bd'\eta')) = \theta_{cd^{-1}}(ad'\eta') = \theta_{cd^{-1}}(d\eta') = c\eta'$$

Por outro lado, segue que

$$\theta_{hg}(\xi) = \theta_{c(bd')^{-1}}((bd')\eta') = c\eta'.$$

caso 3: d é começo do caminho a, e escrevemos $a = da'$.
Este caso é similar ao caso anterior.

□

Temos então uma ação parcial no nível de conjuntos.

Seja $\mathcal{F}(X)$ a K-álgebra das funções de X no corpo K, com a multiplição ponto a ponto. Para cada $c \in \mathbb{F}$, com $X_c \neq \varnothing$, seja $\mathcal{F}(X_c)$ a K-álgebra de funções de X_c em K. Para $c \in \mathbb{F}$, com $X_c = \varnothing$, seja $\mathcal{F}(X_c)$ o subconjunto de $\mathcal{F}(X)$ que contém apenas a função nula.

Para todo $c \in \mathbb{F}$, $\mathcal{F}(X_c)$ é um ideal na K-álgebra $\mathcal{F}(X)$. Agora, para cada $c \in \mathbb{F}$, defina

$$\begin{array}{rccc} \alpha_c: & \mathcal{F}(X_{c^{-1}}) & \to & \mathcal{F}(X_c) \\ & f & \mapsto & f \circ \theta_{c^{-1}}. \end{array}$$

Para todo $c \in \mathbb{F}$, α_c é um K-isomorfismo. E, pelo Exemplo 1.1.6, segue que $\alpha = (\{\mathcal{F}(X_c)\}_{c\in\mathbb{F}}, \{\alpha_c\}_{c\in\mathbb{F}})$ é uma ação parcial de $\mathbb{F}$ sobre $\mathcal{F}(X)$.

O produto cruzado parcial associado a esta ação é "muito grande" para os nossos propósitos. Queremos "diminuir" nossa álgebra.

Para isso, seja $1_c \in \mathcal{F}(X_c)$ a função característica em X_c, ou seja,

$$1_c(\xi) = 1_{X_c}(\xi) = [\xi \in X_c] = \begin{cases} 1 & , \text{se } \xi \in X_c \\ 0 & , \text{se } \xi \notin X_c \end{cases}$$

Para cada $v \in E^0$, seja $1_v \in \mathcal{F}(X_v)$ a função característica em X_v.

Lema 2.1.18. *Sejam $p, q \in \mathbb{F}$. Então:*

(i) $\alpha_p(1_{p^{-1}}1_q) = 1_p 1_{pq}$;

(ii) Para $a \in W, b \in W \cup \{0\}$, segue que

$$\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v) = \begin{cases} 1_a & , \textit{se } r(a) = v \\ 0 & , \textit{se } r(a) \neq v \end{cases}$$

e

$$\alpha_{ab^{-1}}(1_{ba^{-1}}1_v) = \begin{cases} 1_{ab^{-1}} & , \textit{se } s(b) = v \\ 0 & , \textit{se } s(b) \neq v \end{cases}$$

Demonstração: (i) Suponha $p = ab^{-1}$ e $q = cd^{-1}$, com $a, c \in W$ e $b, d \in W \cup \{0\}$, $r(a) = r(b)$ e $r(c) = r(d)$.

Primeiro suponha que $c = at$, com $t \in W \cup \{0\}$. Seja $\xi \in X$. Então:

$$\begin{aligned} \alpha_p(1_{p^{-1}}1_q)(\xi) &= (\alpha_p(1_{p^{-1}})\alpha_p(1_q))(\xi) \\ &= \alpha_p(1_{p^{-1}})(\xi)\alpha_p(1_q)(\xi) \\ &= 1_{p^{-1}}(\theta_{p^{-1}}(\xi))1_q(\theta_{p^{-1}}(\xi)) \\ &= 1_{ab^{-1}}(\theta_{ab^{-1}}(\xi))1_{atd^{-1}}(\theta_{ab^{-1}}(\xi)) \\ &= [\theta_{ab^{-1}} \in X_{ab^{-1}}][\theta_{ab^{-1}}(\xi) \in X_{atd^{-1}}] \\ &= [\xi \in X_{ba^{-1}}][\theta_{ab^{-1}}(\xi) \in X_{atd^{-1}}] \\ &= [\xi \in X_{btd^{-1}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1_p 1_{pq}(\xi) &= 1_p(\xi)1_{pq}(\xi) = [\xi \in X_p][\xi \in X_{pq}] \\
&= [\xi \in X_{ba^{-1}} \cap X_{ba^{-1}cd^{-1}}] = [\xi \in X_{ba^{-1}} \cap X_{btd^{-1}}] \\
&= [\xi \in X_{btd^{-1}}]
\end{aligned}$$

Analogamente, se $a = ct$, para algum $t \in W$, mostra-se que o resultado segue.

Se $a \neq ct$, para todo $t \in W$, e $c \neq at$, para todo $t \in W$, então:

$$1_{ab^{-1}}1_{cd^{-1}} = 0 \text{ , pelo lema 3.1.1}$$

e

$$1_{ba^{-1}cd^{-1}} = 0 \text{ , pela definição.}$$

As outras possibilidades para $p, q \in \mathbb{F}$ são similares.

(ii) Sejam $a \in W,\ b \in W \cup \{0\}$. Para todo $\xi \in X$, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha_a(1_{a^{-1}}1_v)(\xi) &= \alpha_a(1_{a^{-1}})(\xi)\alpha_a(1_v)(\xi) \\
&= 1_{a^{-1}}(\theta_{a^{-1}})(\xi)1_v(\theta_{a^{-1}})(\xi) \\
&= [\theta_{a^{-1}}(\xi) \in X_{a^{-1}}][\theta_{a^{-1}}(\xi) \in X_v] \\
&= [\xi \in X_a][\xi \in X_v \cap X_a] \\
&= [\xi \in X_v \cap X_a] \\
&= \begin{cases} 1_a & \text{, se } X_v = X_a \\ 0 & \text{, se } r(a) \neq v \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{ab^{-1}}(1_{ab^{-1}}1_v)(\xi) &= \alpha_{ab^{-1}}(1_{ab^{-1}})(\xi)\alpha_{ab^{-1}}(1_v)(\xi) \\
&= 1_{ba^{-1}}(\theta_{ba^{-1}})(\xi)1_v(\theta_{ba^{-1}})(\xi) \\
&= [\theta_{ba^{-1}}(\xi) \in X_{ba^{-1}}][\theta_{ba^{-1}}(\xi) \in X_v] \\
&= [\xi \in X_{ab^{-1}}][\xi \in X_{ab^{-1}} \cap X_v] \\
&= \begin{cases} 1_{ab^{-1}} & \text{, se } X_v \cap X_{ab^{-1}} = X_{ab^{-1}} \text{ (se } s(a) = v) \\ 0 & \text{, se } s(a) \neq v \end{cases}
\end{aligned}$$

$\square$

Agora podemos definir a ação parcial que induz o produto cruzado parcial que é isomorfo à álgebra de caminhos de Leavitt.

Seja $D(X) = D_0 = \operatorname{span}\big(\{1_p : p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\} \cup \{1_v : v \in E^0\}\big)$ (span K-linear).

Seja, para cada $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $D_p \subseteq \mathcal{F}(X_p)$ definido como

$$D_p = 1_p D_0 = \operatorname{span}\{1_p 1_q : q \in \mathbb{F}\}.$$

Observação 2.1.19. Note que $D(X)$ e D_p são K-álgebras e que D_p é um ideal de D_0, para todo $p \in \mathbb{F}$.

Como $\alpha_p(1_{p^{-1}} 1_q) = 1_p 1_{pq}$, considere, para cada $p \in \mathbb{F}$, a restrição de α_p a $D_{p^{-1}}$:

$$\begin{array}{rccl} \alpha_p : & D_{p^{-1}} & \to & D_p \\ & 1_{p^{-1}} 1_q & \mapsto & \alpha_p(1_{p^{-1}} 1_q) = 1_p 1_{pq} \end{array}$$

Então $\alpha = (\{\alpha_p\}_{p \in \mathbb{F}}, \{D_p\}_{p \in \mathbb{F}})$ é uma ação parcial.

Seja $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ o produto cruzado parcial associado a α.

2.2 Álgebras de caminhos de Leavitt

Nesta seção, descreveremos a álgebra de caminhos de Leavitt associada a um grafo dirigido E como um produto cruzado parcial.

Proposição 2.2.1. *Existe um K-homomorfismo φ de $L_K(E)$ em $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ tal que, para todo $e \in E^1$, $\varphi(e) = 1_e \delta_e$ e $\varphi(e^*) = 1_{e^{-1}} \delta_{e^{-1}}$ e, para todo $v \in E^0$, $\varphi(v) = 1_v \delta_0$.*

Demonstração: Considere os conjuntos $\{1_e \delta_e, 1_{e^{-1}} \delta_{e^{-1}} : e \in E^1\}$ e $\{1_v \delta_0 : v \in E^0\}$ em $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$.

Vamos mostrar que tais conjuntos satisfazem as relações que definem a álgebra de Leavitt.

(i) $1_{s(e)} \delta_0 1_e \delta_e = \alpha_0(\alpha_0(1_{s(e)}) 1_e) \delta_e = 1_{s(e)} 1_e \delta_e = 1_e \delta_e$, pois

$$1_{s(e)} 1_e \delta_e(\xi) = 1_{X_{s(e)} \cap X_e}(\xi) = [\xi \in X_{s(e)} \cap X_e] = [\xi \in X_e] = 1_e(\xi).$$

$$\begin{aligned} 1_e \delta_e 1_{r(e)} \delta_0 &= \alpha_e(\alpha_{e^{-1}}(1_e) 1_{r(e)}) \delta_e = \alpha_e(1_{e^{-1}} 1_{r(e)}) \delta_e \\ &= 1_e 1_{er(e)} \delta_e = 1_e 1_e \delta_e = 1_e \delta_e \end{aligned}$$

(ii)

$$1_{r(e)}\delta_0 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = \alpha_0(\alpha_0(1_{r(e)})1_{e^{-1}})\delta_{e^{-1}} = 1_{r(e)}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}},$$

pois

$$\begin{aligned}1_{r(e)}1_{e^{-1}}(\xi) &= 1_{X_{r(e)}}1_{X_{e^{-1}}}(\xi) = 1_{X_{r(e)}\cap X_{e^{-1}}}\\ &= [\xi \in X_{r(e)} \cap X_{e^{-1}}] = [\xi \in X_{e^{-1}}]\\ &= 1_{e^{-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}1_{s(e)}\delta_0 &= \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_{s(e)})\delta_{e^{-1}} = \alpha_{e^{-1}}(1_e 1_{s(e)})\delta_{e^{-1}}\\ &= 1_{e^{-1}}1_{e^{-1}s(e)}\delta_{e^{-1}} = 1_{e^{-1}}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}\\ &= 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}.\end{aligned}$$

(iii) Sejam $f, g \in E^1$. Então

$$1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}1_g\delta_g = \alpha_{f^{-1}}(\alpha_f(1_{f^{-1}})1_g)\delta_{f^{-1}g} = \alpha_{f^{-1}}(1_f 1_g)\delta_{f^{-1}g}.$$

Se $f \neq g$, então pelo lema 3.1.1, $1_{f^{-1}}1_g = 0$. Logo,

$$1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}1_g\delta_g = 0, \text{ se } f \neq g.$$

Se $f = g$, então

$$\begin{aligned}1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}1_f\delta_f &= \alpha_{f^{-1}}(\alpha_f(1_{f^{-1}})1_f)\delta_{f^{-1}f} = \alpha_{f^{-1}}(1_f 1_f)\delta_0\\ &= \alpha_{f^{-1}}(1_f)\delta_0 = 1_{f^{-1}}\delta_0\end{aligned}$$

Como $1_{f^{-1}} = 1_{r(e)}$, pelo lema 3.1.1, segue que

$$1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}1_f\delta_f = 1_{r(e)}\delta_0.$$

(iv) Seja $v \in E^0$ tal que $0 < \#\{e : s(e) = v\} < \infty$. Lembre que $X_v = \bigcup_{e \in E^1 : s(e) = v} X_e$. Então:

$$\sum_{e\in E^1:s(e)=v} 1_e\delta_e 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = \sum_{e\in E^1:s(e)=v} 1_e\delta_0 = (\sum_{e\in E^1:s(e)=v} 1_e)\delta_0 = 1_v\delta_0.$$

Como $\{1_e\delta_e, 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} : e \in E^1\}$ e $\{1_v\delta_0 : v \in E^0\}$ satisfazem as condições da Álgebra de Leavitt, pela propriedade universal, existe um homomorfismo $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ tal que, para todo $e \in E^1$, $\varphi(e) = 1_e\delta_e$ e $\varphi(e^*) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ e, para todo $v \in E^0$, $\varphi(v) = 1_v\delta_0$. $\square$

Antes de mostrarmos a injetividade de φ, seguimos com algumas definições.

Definição 2.2.2. Seja A um anel. Dizemos que A é $\mathbb{Z}$-graduado se existe uma coleção de subgrupos aditivos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de A tal que

(i) $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$;

(ii) $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.2.3. Para cada $p \in \mathbb{F}$, seja $|p| := m - n$, em que m é o número de geradores (elementos de E^1) de p e n é o número de inversos de geradores de p.

Para mostrar que o K-homomorfismo de 2.2.1 é injetivo usaremos o Teorema da unicidade de graduação de [7] que afirma que

Teorema 2.2.4. *Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo e seja $L_K(E)$ a álgebra de Leavitt associada a E com a graduação usual. Se A é um anel $\mathbb{Z}$-graduado e $\varphi : L_K(E) \to A$ é um homomorfismo graduado de anel tal que $\varphi(v) \neq 0$, para todo $v \in E^0$, então φ é injetiva.*

Para isso, usaremos a seguinte $\mathbb{Z}$-graduação para $D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ (veja [7]): para cada $z \in \mathbb{Z}$, defina $A_z \subseteq D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ como o span K-linear de $\{a_p\delta_p : a_p \in D_p \text{ e } |p| = z\}$. Para $L_K(E)$, estamos considerando a $\mathbb{Z}$-graduação $\{R_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, em que

$$R_z = \operatorname{span}\{ab^{-1} : a, b \in W \cup E^0 \ , \ |a| - |b| = z\}.$$

Teorema 2.2.5. *O homomorfismo $\varphi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ da proposição 2.2.1 é um K-isomorfismo.*

Demonstração: Vamos mostrar que φ é injetora. Pelo teorema da unicidade de graduação, só é preciso mostrar que φ é um homomorfismo de anel graduado tal que $\varphi(v) \neq 0$, para todo $v \in E^0$.

Para cada $ab^{-1} \in R_z$, pela definição de φ, temos que $\varphi(ab^{-1}) \in D_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}}$.

Como $|ab^{-1}| = |a| - |b| = z$, então $D_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}} \subseteq A_z$. Logo, $\varphi(R_z) \subseteq A_z$.

Além disso, $\varphi(v) = 1_v\delta_0 \neq 0$, pois $1_v \neq 0$ para todo $v \in E^0$. Então, segue que φ é injetora.

Vamos mostrar agora que φ é sobrejetora.

Afirmação: Para todo $a \in W$, temos que $\varphi(a) = 1_a\delta_a$ e $\varphi(a^*) = 1_{a^{-1}}\delta_{a^{-1}}$. Além disso, para quaisquer $a, b \in W$ com $a_{|a|} \neq b_{|b|}$ e $r(a) = r(b)$, segue que $\varphi(ab^*) = 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}}$.

Note que, da afirmação, segue que, para cada $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $1_p\delta_p \in Im(\varphi)$.

Seja $a = a_1 \dots a_n \in W$. Se $n = 1$, pela definição de φ, segue que $\varphi(a) = 1_a\delta_a$. Suponha $n \geq 2$ e que seja válido $\varphi(a_2 \dots a_n) = 1_{a_2\dots a_n}\delta_{a_2\dots a_n}$. Então

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= \varphi(a_1)\varphi(a_2 \dots a_n) \\
&= 1_{a_1}\delta_{a_1}1_{a_2\dots a_n}\delta_{a_2\dots a_n} \\
&= \alpha_{a_1}(\alpha_{a^{-1}}(1_{a_1})1_{a_2\dots a_n})\delta_{a_1a_2\dots a_n} \\
&= \alpha_{a_1}(1_{a_1^{-1}}1_{a_2\dots a_n})\delta_a \\
&= 1_{a_1}1_{a_1\dots a_n}\delta_a = 1_{a_1\dots a_n}\delta_a \\
&= 1_a\delta_a.
\end{aligned}$$

Analogamente, $\varphi(a^*) = 1_{a^{-1}}\delta_{a^{-1}}$.

Sejam $a, b \in W$ com $r(a) = r(b)$ e $a_{|a|} \neq a_{|b|}$. Então:

$$\begin{aligned}
\varphi(ab^{-1}) &= 1_a\delta_a 1_{b^{-1}}\delta_{b^{-1}} = \alpha_a(\alpha_{a^{-1}}(1_a)1_{b^{-1}})\delta_{ab^{-1}} \\
&= \alpha_a(1_{a^{-1}}1_{b^{-1}})\delta_{ab^{-1}} = 1_a 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}} \\
&= 1_{ab^{-1}}\delta_{ab^{-1}}.
\end{aligned}$$

Para mostrar que φ é sobrejetora, é suficiente mostrar que $D_p\delta_p \subseteq Im(\varphi)$, para todo $p \in \mathbb{F}$.

Primeiro, vamos mostrar que $D_0\delta_0 \subseteq Im(\varphi)$. Por linearidade, é suficiente mostrar que $1_v\delta_0 \in Im(\varphi)$ e que, para cada $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, $1_p\delta_0 \in Im(\varphi)$.

Sabemos que $1_v\delta_0 = \varphi(v) \in Im(\varphi)$. Agora, seja $p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Note que:

$$\begin{aligned}
1_p\delta_p 1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}} &= \alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(1_p)1_{p^{-1}})\delta_0 \\
&= \alpha_p(1_{p^{-1}}1_{p^{-1}})\delta_0 \\
&= \alpha_p(1_{p^{-1}})\delta_0 \\
&= 1_p\delta_0.
\end{aligned}$$

Ou seja, $1_p\delta_0 = 1_p\delta_p 1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}}$. Como $1_p\delta_p, 1_{p^{-1}}\delta_{p^{-1}} \in Im(\varphi)$, então $1_p\delta_0 \in Im(\varphi)$.

Vamos mostrar agora que $D_p\delta_p \in Im(\varphi)$. Por linearidade, é suficiente mostrar que $1_p1_q\delta_q \in Im(\varphi)$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Note que:

$$1_p\delta_0 1_q\delta_q = \alpha_0(\alpha_0(1_p)1_q)\delta_q = 1_p1_q\delta_q.$$

Como $1_p\delta_0, 1_q\delta_q \in Im(\varphi)$, então $1_p 1_q \delta_q \in Im(\varphi)$. Logo, φ é sobrejetora.

$\square$

Capítulo 3

$L_K(E)$ como produto cruzado parcial de um grupoide

No capítulo anterior mostramos que a álgebra de Leavitt $L_K(E)$ é isomorfa a um produto cruzado parcial associado a uma ação parcial do grupo livre gerado por E^1. Neste capítulo, mostraremos que o conjunto W dos caminhos finitos de um grafo dirigido E admite uma estrutura de grupoide e que $L_K(E)$ é isomorfo ao produto cruzado parcial associado a uma ação parcial deste grupoide.

3.1 Grupoides

Definição 3.1.1. Um *grupoide* é um conjunto G não vazio equipado com uma operação binária parcialmente definida tal que:

(i) para quaisquer $g, h, l \in G$, $g(hl)$ existe se, e somente se $(gh)l$ existe. Em caso afirmativo, $g(hl) = (gh)l$;

(ii) para quaisquer $g, h, l \in G$, $g(hl)$ existe se, e somente se, gh e hl existem;

(iii) para qualquer $g \in G$, existem únicos $d(g), \epsilon(g) \in G$ tais que $gd(g)$ e $\epsilon(g)g$ existem e $gd(g) = g = \epsilon(g)g$;

(iv) para cada $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $d(g) = g^{-1}g$ e $\epsilon(g) = gg^{-1}$.

Exemplo 3.1.2. Todo grupo é um grupoide.

Exemplo 3.1.3. Seja $Gl(n,\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes inversíveis de ordem n com coeficientes reais e seja $GL(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes inversíveis com coeficientes reais. Considere em $GL(\mathbb{R})$ a multiplicação usual de matrizes. Então, para $A, B \in GL(\mathbb{R})$, $A \cdot B$ está definida se, e somente se, A e B têm uma mesma ordem n e $A \cdot B$ tem ordem n. Além disso, dada uma matriz $A \in GL(\mathbb{R})$ de ordem n existe uma única matriz $A^{-1} \in GL(\mathbb{R})$ de ordem n tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, em que I_n denota a matriz identidade de ordem n.

Logo, $GL(\mathbb{R})$ é um grupoide.

Proposição 3.1.4. *Seja G um grupoide. São válidas as seguintes afirmações:*

(1) Se gh existe, então $d(gh) = d(h)$ e $\epsilon(gh) = \epsilon(g)$;

(2) $d(g) = \epsilon(g^{-1})$, para todo $g \in G$;

(3) g^{-1} é único, para todo $g \in G$;

(4) $(g^{-1})^{-1} = g$, para todo $g \in G$;

(5) gh existe se, e somente se, $d(g) = \epsilon(h)$ se, e somente se, $h^{-1}g^{-1}$ existe;

(6) se gh existe, então $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Demonstração: (1) $(gh)d(h)$ existe pois gh e $hd(h)$ existem. Daí, segue que

$$(gh)d(h) = g(hd(h)) = gh.\text{Logo,}d(h) = d(gh).$$

Do mesmo modo, $\epsilon(g)(gh)$ existe pois $\epsilon(g)g$ e gh existem. Daí, segue que

$$\epsilon(g)(gh) = (\epsilon(g)g)h = gh. \text{ Logo, } \epsilon(g) = \epsilon(gh).$$

(2) Primeiramente, note que $(gg^{-1})(gg^{-1})$ existe e que

$$(gg^{-1})(gg^{-1}) = g(g^{-1}g)g^{-1} = (gd(g))g^{-1} = gg^{-1}.$$

Logo, $gg^{-1} = d(gg^{-1})$. Assim, $\epsilon(g) = gg^{-1} = d(gg^{-1}) = d(g^{-1})$, pelo item anterior. Donde $\epsilon(g) = d(g^{-1})$. Além disso, temos que

$$(g^{-1}g)(g^{-1}g) = g^{-1}(gg^{-1})g = g^{-1}\epsilon(g)g = g^{-1}g.$$

Ou seja, $g^{-1}g = \epsilon(g^{-1}g)$. Logo, $d(g) = g^{-1}g = \epsilon(g^{-1}g) = \epsilon(g^{-1})$, pelo item anterior. Portanto, $d(g) = \epsilon(g^{-1})$.

(3) Seja $g \in G$ e sejam $g_1, g_2 \in G$ como no item (iv) da definição de grupoide. Então,

$$g_1 = g_1 d(g_1) = g_1 \epsilon(g) = g_1(gg_2) = (g_1 g)g_2 = d(g)g_2 = r(g_2)g_2 = g_2.$$

(4) Note que $gg^{-1} = \epsilon(g) = d(g^{-1})$ e $g^{-1}g = d(g) = \epsilon(g^{-1})$. Logo $(g^{-1})^{-1} = g$, pela unicidade mostrada em (3).

(5) Suponha que gh existe. Vamos mostrar que $d(g) = \epsilon(h)$. Como

$$gh = (gd(g))h = (gd(g))(\epsilon(h)h) = g(d(g)\epsilon(h))h,$$

então $d(g)\epsilon(h)$ existe pelo item (ii) da definição de grupoide. Daí, como $d(g)$ e $\epsilon(h)$ são identidades, segue que

$$d(g) = d(g)\epsilon(h) = \epsilon(h).$$

Suponha que $d(g) = \epsilon(h)$. Então $g\epsilon(h)$ existe. Como $g\epsilon(h) = g(hh^{-1}) = (gh)h^{-1}$, então segue pelo item (ii) da definição de grupoide que gh existe.

Vamos mostrar agora que gh existe se, e somente se, $h^{-1}g^{-1}$ existe. Sabemos que gh existe se, e somente se, $d(g) = \epsilon(h)$. Como $d(g) = \epsilon(g^{-1})$ e $\epsilon(h) = d(h^{-1})$, então $d(h^{-1}) = \epsilon(g^{-1})$ se, e somente se, $h^{-1}g^{-1}$.

(6) Basta notar que

$$\begin{aligned}(gh)(h^{-1}g^{-1}) &= g(hh^{-1})g^{-1} = g\epsilon(h)g^{-1} \\ &= gd(g)g^{-1} = gg^{-1} = \epsilon(g) = \epsilon(gh)\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}(h^{-1}g^{-1})(gh) &= h^{-1}(g^{-1}g)h = h^{-1}d(g)h \\ &= h^{-1}\epsilon(h)h = h^{-1}h = d(h) = d(gh).\end{aligned}$$

Logo $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

□

Observação 3.1.5. Note que $d(g)$ e $\epsilon(g)$ são idempotentes, para todo $g \in G$. De fato,

$$d(g) = g^{-1}g = g^{-1}(gd(g)) = (g^{-1}g)d(g) = d(g)^2$$

e

$$\epsilon(g) = gg^{-1} = (\epsilon(g)g)g^{-1} = \epsilon(g)(gg^{-1}) = \epsilon(g)^2.$$

Definição 3.1.6. Seja G um grupoide. O conjunto dos *pares admissíveis de G* é o conjunto $G^2 = \{(g, h) \in G \times G : d(g) = \epsilon(h)\}$.

Definição 3.1.7. Um elemento $e \in G$ é chamado de *identidade de G* se $e = d(g) = \epsilon(g^{-1})$, para algum $g \in G$. Denotamos por G_0 o conjunto de todas as identidades de G.

Observação 3.1.8. Note que $G_0 = \{g^{-1}g : g \in G\}$.

Proposição 3.1.9. *Para todo $e \in G_0$, temos que $e^{-1} = e$ e $d(e) = \epsilon(e) = e$.*

Demonstração: Como $d(g)^2 = d(g)$, então $e^2 = e$. Daí $d(e) = \epsilon(e) = e$. Além disso, como $ee = e$, então $e^{-1} = e$. □

Exemplo 3.1.10. Sejam $(G_1, \cdot_1), (G_2, \cdot_2)$ grupos. Seja $G = G_1 \sqcup G_2$ (união disjunta) e seja $G^2 = \{(g, h) \in G \times G : g, h \in G_1 \text{ ou } g, h \in G_2\}$. Considere a seguinte operação em G:

$$gh = g \cdot_1 h, \text{ se } g, h \in G_1 \text{ ou } gh = g \cdot_2 h \text{ se } g, h \in G_2.$$

Então G é um grupoide.

Exemplo 3.1.11. Seja X um conjunto não-vazio qualquer e seja $R \subseteq X \times X$ uma relação de equivalência.

Vamos mostrar que R admite uma estrutura de grupoide, sendo $R^2 = \{((x, y), (y', z)) \in R \times R : y = y'\}$ e definindo

$$(x, y) \cdot (y, z) = (x, z),$$

para todo $((x, y), (y, z)) \in R^2$, e

$$(x, y)^{-1} = (y, x),$$

para todo $(x, y) \in R$.

Primeiramente, veja que a operação está bem definida pela transitividade da relação de equivalência e o inverso está bem definido pela propriedade simétrica da relação de equivalência.

(i) Sejam $(a, b), (x, y), (g, h) \in R$. Suponha que

$$(((a, b) \cdot (x, y)), (g, h)) \in R^2.$$

Então $g = y$ e $b = x$. Como $b = x$, então $((a, b), (x, y)) \in R^2$ e $(a, b) \cdot (x, y) = (a, y)$. Como $y = g$, então $((a, y), (g, h)) \in R^2$ e $(a, y) \cdot (g, h) = (a, h)$.

Logo, $(((a,b)\cdot(x,y)),(g,h)) \in R^2$.

Suponha agora que $(((a,b)\cdot(x,y)),(g,h)) \in R^2$.

Então $b = x$ e $y = g$. Como $b = x$, então $((a,b),(x,y)) \in R^2$ e $(a,b)\cdot(x,y) = (a,y)$. Como $y = g$, então $((a,y),(g,h)) \in R^2$ e $(a,y)\cdot(g,h) = (a,h)$.

Logo, $((a,b),((x,y),(g,h))) \in R^2$. E,

$$(a,b)\cdot((x,y)\cdot(g,h)) = (a,h) = (a,b)\cdot(x,h) = (a,b)\cdot((x,y)\cdot(g,h)).$$

(ii) Veja que, do item anterior, temos que se $(a,b)\cdot((x,y)\cdot(g,h)) \in R^2$ então $g = y$ e $b = x$. Logo, $((a,b),(x,y)) \in R^2$ e $((x,y),(g,h)) \in R^2$.

Suponha agora que $((a,b),(x,y)) \in R^2$ e $((x,y),(g,h)) \in R^2$. Então $b = x$ e $y = g$. Logo, $(x,y)\cdot(g,h) = (x,h)$ e então $((a,b),(x,h)) \in R^2$.

(iii) Dado $(x,y) \in R$, considere $(x,x),(y,y) \in R$.

É claro que $((x,y),(y,y)),((x,x),(x,y)) \in R^2$ e também

$$(x,y)\cdot(y,y) = (x,y) = (x,x)(x,y).$$

Logo, $(y,y) = d(x,y)$ e $(x,x) = \epsilon(x,y)$.

(iv) Seja $(x,y) \in R$. Daí $(x,y)^{-1} = (y,x) \in R$ e temos que

$$\begin{cases} (x,y)\cdot(y,x) = (x,x) = \epsilon(x,y) \\ (y,x)\cdot(x,y) = (y,y) = d(x,y) \end{cases}$$

Exemplo 3.1.12. Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo dirigido e seja W o conjunto dos caminhos finitos de E.

Seja $(E^1)^*$ um conjunto disjunto de E^1 e de mesma cardinalidade. Fixe uma bijeção $e \mapsto e^*$. Agora estendemos as aplicação r, s para $(E^1)^*$ por $s(e^*) = r(e)$ e $r(e^*) = s(e)$, para todo $e \in E^1$.

Para $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \in W$, defina $\alpha^* := \alpha_n^* \dots \alpha_1^*$.

Seja $P = \{\alpha_1 \dots \alpha_n : \alpha_i \in E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0 \text{ e } r(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})\}$.

Por exemplo, um elemento da forma $e_1 e_2 e_3^* e_4$, que pode ser representado como abaixo,

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e_1"] & \bullet \arrow[r, "e_2"] & \bullet & \\ & & \bullet \arrow[u, "e_3"] \arrow[r, "e_4"] & \bullet \end{tikzcd}$$

pertence a P.

Defina em P uma operação $\cdot$ de concatenação de forma que

$e_1 \cdot e_2 = e_1 e_2$ (concatenação);

$e \cdot r(e) = s(e) \cdot e = e$;

$e \cdot e^* = s(e)$;

$e^* \cdot e = r(e)$;

e esta operação é estendida para caminhos da maneira natural.

Dados $a_1, \ldots, a_n, b \in E^1 \cup (E^1)^* \cup E^0$ e sequências das formas

$$a_1 \cdots a_k b b^* a_{k+1} a_n$$

e

$$a_1 \cdots a_k r(a_k) a_{k+1} \cdots a_n = a_1 \cdots a_k s(a_{k+1}) a_{k+1} \cdots a_n$$

que pertençam a P, dizemos que $a_1 \cdots a_k a_{k+1} a_n$ é uma *redução* destas sequências.

Uma sequência de P é dita irredutível se não admite redução.

Por exemplo,

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e_1"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "e_2"'] \arrow[d, "e_3"] \\
& \bullet \arrow[r, "e_4"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

é irredutível.

Seja G o conjunto das sequências irredutíveis de P. Note que toda sequência α de P pode ser reduzida a uma sequência $\mathrm{irr}(\alpha) \in G$. Estenda as aplicações r, s por $r(\alpha) = r(\alpha_n)$ e $s(\alpha) = s(\alpha_1)$, para todo $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n \in G$.

Vamos mostrar que G admite estrutura de grupoide, sendo $G^2 = \{(\alpha, \beta) \in G \times G : r(\alpha) = s(\beta)\}$ e a operação parcial $G^2 \to G$ dada por $\alpha \cdot \beta = \mathrm{irr}(\alpha\beta)$.

(i) Suponha que $(g, (hl)) \in G^2$. Em particular, $(h, l) \in G^2$ e $r(h) = s(l)$. Como $(g, (hl)) \in G^2$, então $r(g) = s(hl) = s(h)$. Logo $(g, h) \in G^2$. Como $r(gh) = r(h) = s(l)$, então $((gh), l) \in G^2$.

Suponha que $((gh), l) \in G^2$. Então $(g, h) \in G^2$ e $r(g) = s(h)$ e como $((gh), l) \in G^2$ então $r(h) = r(gh) = s(l)$. Logo, $(h, l) \in G^2$. Como $r(g) = s(h) = s(hl)$, então $(g, (hl)) \in G^2$.

(ii) Suponha que $(g,(hl)) \in G^2$. Então $(h,l) \in G^2$. E, como $(g,(hl)) \in G^2$, então $r(g) = s(hl) = s(h)$. Logo $(g,h) \in G^2$.

Suponha que $(g,h),(h,l) \in G^2$. Então $r(g) = s(h)$ e $r(h) = s(l)$. Então $r(g) = s(h) = s(hl)$ e, portanto, $(g,(hl)) \in G^2$.

(iii) Seja $\alpha \in G$. Note que $(s(\alpha),\alpha) \in G^2$, pois $s(\alpha) = r(s(\alpha))$ e $(\alpha, r(\alpha)) \in G^2$, pois $r(\alpha) = s(r(\alpha)) = r(\alpha)$. Então $s(\alpha) = \epsilon(\alpha)$ e $r(\alpha) = d(\alpha)$.

(iv) Dado $\alpha \in G$, note que $(\alpha,\alpha^*),(\alpha^*,\alpha) \in G^2$. Além disso,

$$\alpha\alpha^* = s(\alpha) \text{ e } \alpha^*\alpha = r(\alpha).$$

Definição 3.1.13. O grupoide G definido acima será chamado de *grupoide dos caminhos.*

Observação 3.1.14. Note que podemos ver W como um subconjunto de G.

3.2 Ação parcial de grupoide

Nesta seção introduziremos o conceito de ação parcial de um grupoide sobre um anel de acordo com [8] e [9].

Definição 3.2.1. Uma ação parcial α de um grupoide G em um conjunto X é um par $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ tal que:

(I) para todo $g \in G$, $X_{\epsilon(g)}$ é um subconjunto de X e X_g é um subconjunto de $X_{\epsilon(g)}$;

(II) $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g$ é uma bijeção que satisfaz:

  (i) α_e é a identidade $\mathrm{Id}_{\mathrm{X_e}}$ de X_e, para todo $e \in G_0$;

  (ii) $\alpha_h^{-1}(X_{g^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$, sempre que $(g,h) \in G^2$;

  (iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(X_{g^{-1}} \cap X_h)$ e $(g,h) \in G^2$.

Definição 3.2.2. Uma ação parcial α de um grupoide G em um anel R é um par $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ tal que:

(I) para todo $g \in G$, $D_{\epsilon(g)}$ é um ideal de R e D_g é um ideal de $D_{\epsilon(g)}$;

(II) $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é um isomorfismo que satisfaz:

(i) α_e é a identidade $\mathrm{Id}_{\mathrm{D_e}}$ de D_e, para todo $e \in G_0$;

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$, sempre que $(g,h) \in G^2$;

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$ e $(g,h) \in G^2$.

Observação 3.2.3. Note que o domínio de $\alpha_g\alpha_h$ é $\alpha_{h^{-1}}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$ e a imagem de $\alpha_g\alpha_h$ é $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$.

Definição 3.2.4. Dizemos que α é *global* se $\alpha_g\alpha_h = \alpha_{gh}$, para todo $(g,h) \in G^2$.

Lema 3.2.5. *Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupoide G em um anel R. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(i) α é global se, e somente se, $D_g = D_{\epsilon(g)}$, para todo $g \in G$;

(ii) $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$;

(iii) $\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g) = D_h \cap D_{hg}$, para todo $(h,g) \in G^2$.

Demonstração: (i) Suponha α global. Então

$$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = \mathrm{im}(\alpha_g\alpha_h) = \mathrm{im}(\alpha_{gh}) = D_{gh},$$

para todo $(g,h) \in G^2$.

Em particular, temos, para todo $g \in G$,

$$D_{\epsilon(g)} = D_{gg^{-1}} = \mathrm{im}(\alpha_g\alpha_{g^{-1}}) = \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}}) = D_g.$$

Suponha agora que $D_g = D_{\epsilon(g)}$, para todo $g \in G$. Então $D_g = D_{\epsilon(g)} = D_{d(g^{-1})}$ e lembre que, se $(g,h) \in G^2$ então $d(g) = \epsilon(h)$. Daí, para quaisquer $(g,h) \in G^2$ temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(\alpha_g\alpha_h) &= \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) = \alpha_h^{-1}(D_{d(g)} \cap D_{\epsilon(h)}) \\
&= \alpha_h^{-1}(D_{d(g)} \cap D_{\epsilon(h)}) = \alpha_h^{-1}(D_{\epsilon(h)}) \\
&= \alpha_h^{-1}(D_h) = D_{h^{-1}} = D_{d(h)} \\
&= D_{d(gh)} = D_{\epsilon((gh)^{-1})} = D_{(gh)^{-1}} \\
&= \mathrm{dom}(\alpha_{gh}).
\end{aligned}$$

(ii) Segue diretamente da definição de ação parcial de grupoide.

(iii) Pelo item (ii) da definição de ação parcial de grupoide com $g = (hg)^{-1}$ e notando que

$$((hg)^{-1}h)^{-1} = (g^{-1}d(h))^{-1} = (g^{-1}d(g^{-1}))^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g,$$

temos que $\alpha_h^{-1}(D_{hg} \cap D_h) \subseteq D_{((hg)^{-1}h)^{-1}} = D_g$.

Como α_h é isomorfismo de $D_{h^{-1}}$ em D_h, temos que $D_{hg} \cap D_h \subseteq \alpha_h(D_g) = \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g)$.

É claro que $\alpha_h(D_g \cap D_{h^{-1}}) \subseteq D_h$. Pelo item (ii) da definição de ação parcial de grupoide, com $g = g^{-1}$ e $h = h^{-1}$, temos $\alpha_h(D_g \cap D_{h^{-1}}) \subseteq D_{hg}$. Logo, $\alpha_h(D_g \cap D_{h^{-1}}) \subseteq D_h \cap D_{hg}$.

□

3.3 Álgebra de Leavitt como produto parcial de grupoide

Nesta seção, falaremos sobre o produto cruzado parcial de uma ação de um grupoide de acordo com [8] e [9]. Em seguida, definiremos uma ação parcial do grupoide G dos caminhos (3.1.12) e mostraremos que o produto cruzado parcial associado a essa ação é isomorfo à álgebra de Leavitt.

Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial do grupoide G em um anel R. Seja $R \rtimes_\alpha G$ o conjunto de todas as somas formais finitas da forma $\sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g$, com $a_g \in D_g$.

Considere em $R \rtimes_\alpha G$, a adicão usual e a multiplicação dada por

$$a_g\delta_g \cdot b_h\delta_h = \begin{cases} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} & \text{, se } (g,h) \in G^2; \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Veja que a multiplicação está bem definida pois, como $d(g) = \epsilon(h)$, para todo $(g,h) \in G^2$, então $D_{g^{-1}}$ e D_h são ambos ideias de $D_{d(g)} = D_{\epsilon(h)}$. Logo, $\alpha_g^{-1}(a_g)b_h \in D_{g^{-1}} \cap D_h$. Além disso, pelo item (iii) de 3.2.5, segue que

$$\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh},$$

para todo $(g,h) \in G^2$. Logo, $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h) \in D_{gh}$.

Definição 3.3.1. $R \rtimes_\alpha G$ com as operações acima é o *produto cruzado parcial do grupoide G associado à α.*

Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo dirigido e seja G o grupoide como definido em 3.1.12. Seja $W \subseteq G$ o conjunto dos caminhos finitos de E e seja $X = \{\xi \in W : r(\xi) \text{ é poço}\} \cup \{v \in E^0 : v \text{ é poço}\} \cup W^\infty$.

Para $a \in W \setminus E^0$, defina $X_a := \{\xi \in X : \xi_1 \ldots \xi_{|a|} = a\}$ e $X_{a^{-1}} := \{\xi \in X : r(\xi) = r(a)\}$.

Para $ab^{-1} \in G$, com $a, b \in W$ e $a, b \notin E^0$, defina $X_{ab^{-1}} := X_a$. Para $v \in E^0$, defina $X_v := \{\xi \in X : s(\xi) = v\}$. Para qualquer outro $g \in G$, defina $X_g = \varnothing$.

Vamos definir agora uma ação de grupoide.

Para $v \in E^0$, defina

$$\begin{array}{rccc} \theta_v : & X_v & \to & X_v \\ & \xi & \mapsto & \xi \end{array}$$

Para $b \in W$, defina

$$\begin{array}{rccc} \theta_b : & X_{b^{-1}} & \to & X_b \\ & \xi & \mapsto & b\xi \end{array}$$

E $\theta_{b^{-1}} : X_b \to X_{b^{-1}}$, por

$$\theta_{b^{-1}}(\xi) = \begin{cases} \xi_{|b|+1}\xi_{|b|+2}\cdots & \text{, se } r(b) \text{ não é poço} \\ r(b) & \text{, se } r(b) \text{ é poço.} \end{cases}$$

Para $ab^{-1} \in G$, defina

$$\begin{array}{rccc} \theta_{ba^{-1}} : & X_{ab^{-1}} & \to & X_{ba^{-1}} \\ & \xi & \mapsto & b\xi_{|a|+1}\xi_{|a|+2}\cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \theta_{ab^{-1}} : & X_{ba^{-1}} & \to & X_{ab^{-1}} \\ & \xi & \mapsto & a\xi_{|b|+1}\xi_{|b|+2}\cdots. \end{array}$$

Proposição 3.3.2. $\theta = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ *é uma ação parcial do grupoide G no conjunto X.*

Demonstração: (I) É fácil ver que $X_{\epsilon(g)}$ é um subconjunto de X e que X_g é um subconjunto de $X_{\epsilon(g)}$.

(II) $\theta_g : X_{g^{-1}} \to X_g$ é bijeção :

É claro que θ_g é injetiva. Agora, dado $\xi \in X_g$, então $\xi = g\xi'$. Logo, $s(\xi) = s(g) = r(g^{-1})$. Então $\theta_g(\xi') = g\xi' = \xi$ e, portanto, θ_g é sobrejetiva.

(i) Seja $v \in E^0$. Vamos mostrar que θ_v é identidade de X_v. Dado $\xi \in X_v$, então $s(\xi) = v = r(\xi)$. Daí,

$$\theta_v(\xi) = v\xi = s(\xi)\xi = \xi.$$

(ii) Vamos mostrar que $\theta_h^{-1}(X_{g^{-1}} \cap X_h) \subseteq X_{(gh)^{-1}}$.
Sejam $g = ab^{-1}, h = cd^{-1} \in G$.
Como $X_{g^{-1}} \cap X_h = X_{ba^{-1}} \cap X_{cd^{-1}}$, devemos considerar três casos:
Caso 1: b não é começo de c e c não é começo de b.
Neste caso, $X_{ba^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \varnothing$.
Caso 2: b é começo de c e escrevemos $c = bc'$.

$$X_{ba^{-1}} \cap X_{cd^{-1}} = \begin{cases} X_{a^{-1}} \cap X_{d^{-1}} & \text{, se } b = r(a), c = r(d) \in E^0 \\ X_{a^{-1}} \cap X_c & \text{, se } b \in E^0, c \notin E^0 \\ X_b \cap X_c & \text{, se } b, c \notin E^0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} X_{a^{-1}} \cap X_{d^{-1}} & \text{, se } b = r(a), c = r(d) \in E^0 \\ X_{a^{-1}} \cap X_c & \text{, se } b \in E^0, c \notin E^0 \\ X_c & \text{, se } b, c \notin E^0 \end{cases}$$

Então,

$$\theta_h^{-1}(X_{g^{-1}} \cap X_h) = \begin{cases} \theta_{d^{-1}}^{-1}(X_{a^{-1}} \cap X_{d^{-1}}) \quad (1) \\ \theta_{cd^{-1}}(X_{a^{-1}} \cap X_c) \quad (2) \\ \theta_{cd^{-1}}^{-1}(X_c) \quad (3) \end{cases}$$

Em (1), temos

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = dc^{-1}ba^{-1} = da^{-1}.$$

Então $X_{(gh)^{-1}} = X_{da^{-1}} = X_d$ e, portanto,

$$\theta_d(X_{a^{-1}} \cap X_{d^{-1}}) \subseteq X_d = X_{(gh)^{-1}}.$$

Em (2), temos

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = dc^{-1}ba^{-1} = dc^{-1}a^{-1}.$$

Então $X_{(gh)^{-1}} = X_{dc^{-1}a^{-1}} = X_d$ e, portanto,

$$\theta_{dc^{-1}}(X_{a^{-1}} \cap X_c) \subseteq X_{dc^{-1}} = X_d = X_{(gh)^{-1}}.$$

Em (3), temos

$$(gh)^{-1} = dc^{-1}ba^{-1} = dc'^{-1}b^{-1}ba^{-1} = dc'^{-1}r(b)a^{-1} = dc'^{-1}a^{-1}.$$

Então $\theta_{dc^{-1}} \subseteq X_{dc^{-1}} = X_{dc'^{-1}b^{-1}} = X_{(gh)^{-1}}$.

Caso 3: c é começo de b e escrevemos $b = cb'$.

Esse caso é similar ao caso anterior.

(iii) Vamos mostrar que $\theta_h \circ \theta_g(\xi) = \theta_{hg}(\xi)$, para todo $\xi \in \theta_g^{-1}(X_g \cap X_{h^{-1}})$. Temos três casos.

Caso 1: a não é começo de d e d não é começo de a.

Neste caso, $X_{h^{-1}} \cap X_g = \varnothing$.

Caso 2: a é começo de d e escrevemos $d = ad'$.

Seja $\xi \in \theta_g^{-1}(X_g \cap X_{h^{-1}}) = \theta_{ba^{-1}}(X_{ab^{-1}} \cap X_{dc^{-1}})$. Então $\xi = \theta_{ba^{-1}}(\eta)$, para algum $\eta \in X_{ab^{-1}} \cap X_{dc^{-1}}$. Daí,

$$\xi = \theta_{ba^{-1}}(\eta) = \theta_{ab^{-1}}(ad'\xi') = bd'\eta'.$$

Por outro lado, como

$$hg = cd^{-1}ab^{-1} = cd'a^{-1}ab^{-1} = cd'r(a)b^{-1} = cd'b^{-1},$$

temos

$$\theta_{hg}(\xi) = \theta_{c(bd')^{-1}}((bd')\eta') = c\eta'.$$

Caso 3: d é começo de a e escrevemos $a = da'$.

Este caso é similar ao caso anterior.

Portanto, $\theta = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de grupoide.

□

Vamos definir uma ação parcial de grupoide no nível de anel.

Seja K um corpo e seja $\mathcal{F}(X) = \{f : X \to K | f \text{ é função}\}$. Para $X_g \neq 0$, considere $\mathcal{F}(X_g) = \{f \in \mathcal{F}(X) : f \text{ se anula fora de } X_g\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ e para $X_g = \varnothing$, seja $\mathcal{F}(X_g) = \{$ função nula $\}$.

Defina também

$$\begin{array}{rccc} \alpha_g : & \mathcal{F}(X_{g^{-1}}) & \to & \mathcal{F}(X_g) \\ & f & \mapsto & f \circ \theta_{g^{-1}} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \alpha_v : & \mathcal{F}(X_v) & \to & \mathcal{F}(X_v) \\ & f & \mapsto & f \circ \theta_v \end{array}$$

Proposição 3.3.3. *$\alpha = (\{\mathcal{F}(X_g)\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial do grupoide G no anel $\mathcal{F}(X)$.*

Demonstração: Note que o único item não trivial da definição de ação parcial é o item $(II)-(ii)$.

Dada $f \in \alpha_h^{-1}(\mathcal{F}(X_{g^{-1}}) \cap \mathcal{F}(X_h))$, vamos mostrar que $f \in \mathcal{F}(X_{(gh)^{-1}})$.

Note que, em particular, $f \in \mathcal{F}(X_{h^{-1}})$, isto é, $f|_{X\setminus X_{h^{-1}}} = 0$. Então, devemos mostrar que $f|_{X\setminus X_{(gh)^{-1}}} = 0$.

Também,

$$(X \setminus X_{(gh)^{-1}}) \setminus (X \setminus X_{h^{-1}}) = X_{h^{-1}} \setminus (X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}}).$$

Tome $x \in X_{h^{-1}} \setminus (X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}})$. Então

$$\theta_h(x) \in X_h \setminus (\theta_h(X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}}) = X_h \setminus X_{g^{-1}},$$

pois $\theta_p^{-1}(X_{q^{-1}} \cap X_p) \subseteq X_{(qp)^{-1}}$.

Logo,

$$0 = \alpha_h(f)(\theta_h(x)) = f(x),$$

para todo $x \in X_{h^{-1}} \setminus (X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}})$.

Portanto, f é zero em $(X \setminus X_{h^{-1}}) \cup (X_{h^{-1}} \setminus (X_{(gh)^{-1}} \cap X_{h^{-1}})) = X \setminus X_{(gh)^{-1}}$.

□

Considere $D(X) = \text{span}\{1_g : g \in G\}$ e $D_p = 1_p D(X) = \text{span}\{1_p 1_g : g \in G\}$, para todo $p \in G$ (span K-linear), e considere a restrição de α_p aos ideais D_p,

$$\begin{array}{rccc} \alpha_p : & D_{p^{-1}} & \to & D_p \\ & 1_{p^{-1}}1_q & \mapsto & \alpha_p(1_{p^{-1}}1_p) = 1_p 1_{pq} \end{array}$$

Então $\tilde{\alpha} = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial do grupoide G no anel $D(X)$.

Seja $D(X) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$ o produto cruzado associado a $\tilde{\alpha}$.

Observação 3.3.4. No capítulo 2, com a ação parcial do grupo livre $\mathbb{F}$, considerávamos $D(X) = \text{span}\{\{1_p : p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\} \cup \{1_v : v \in E^0\}\}$. Agora, devemos tomar um certo cuidado quando v é poço. Mas, se v é poço, então $X_v = \{v\}$ e, portanto, $1_v\delta_v \in D(X) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$.

Proposição 3.3.5. *Existe um K-homomorfismo ϕ de $L_K(E)$ em $D(X) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$ tal que, para todo $e \in E^1$, $\phi(e) = 1_e\delta_e$ e $\phi(e^*) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$ e, para todo $v \in E^0$, $\phi(v) = 1_v\delta_v$.*

Demonstração: Considere os conjuntos $\{1_e\delta_e, 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} : e \in E^1\}$ e $\{1_v\delta_v : v \in E^0\}$ em $D(X) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$.

Vamos mostrar que tais conjuntos satisfazem as relações que definem a álgebra de Leavitt.

(i)

$$\begin{aligned}
1_{s(e)}\delta_{s(e)}1_e\delta_e &= \alpha_{s(e)}(\alpha_{s(e)^{-1}}(1_{s(e)})1_e)\delta_{s(e)e} \\
&= \alpha_{s(e)}(1_{(s(e))^{-1}}1_e)\delta_e \\
&= 1_{s(e)}1_{s(e)e}\delta_e \\
&= 1_{s(e)}1_e\delta_e \\
&= 1_e\delta_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1_e\delta_e 1_{r(e)}\delta_{r(e)} &= \alpha_e(\alpha_e^{-1}(1_e)1_{r(e)})\delta_{er(e)} \\
&= \alpha_e(\alpha_e^{-1}(1_e)1_{r(e)})\delta_e \\
&= \alpha_e(1_{e^{-1}}1_r(e))\delta_e \\
&= 1_e 1_{er(e)}\delta_e \\
&= 1_e\delta_e
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
1_{r(e)}\delta_{r(e)}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} &= \alpha_{r(e)}(\alpha_{r(e)^1}(1_{r(e)})1_{e^{-1}})\delta_{r(e)e^{-1}} \\
&= \alpha_{r(e)}(1_{r(e)^{-1}}1_{e^{-1}})\delta_{s(e^{-1})e^{-1}} \\
&= 1_{r(e)}1_{r(e)e^{-1}}\delta_{e^{-1}} \\
&= 1_{r(e)}1_{s(e^{-1})e^{-1}}\delta_{e^{-1}} \\
&= 1_{r(e)}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} \\
&= 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}1_{s(e)}\delta_{s(e)} &= \alpha_{e^{-1}}(\alpha_e(1_{e^{-1}})1_{s(e)})\delta_{s(e)e^{-1}} \\
&= \alpha_{e^{-1}}(1_e 1_{s(e)})\delta_{e^{-1}r(e^{-1})} \\
&= 1_{e^{-1}}1_{e^{-1}s(e)}\delta_{e^{-1}} \\
&= 1_{e^{-1}}1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} \\
&= 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}
\end{aligned}$$

(iii) Sejam $f, g \in E^1$. Note que

$$1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}1_g\delta_g = \alpha_{f^{-1}}(\alpha_f(1_{f^{-1}})1_g)\delta_{f^{-1}g} = \alpha_{f^{-1}}(1_f 1_g)\delta_{f^{-1}g}.$$

Se $f \neq g$, pelo lema 3.1.1, $1_f 1_g = 0$. Vejamos agora $1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}1_f\delta_f$.

$$\begin{aligned}
1_{f^{-1}}\delta_{f^{-1}}1_f\delta_f &= \alpha_f^{-1}(\alpha_f(1_{f^{-1}})1_f)\delta_{f^{-1}f}\\
&= \alpha_f^{-1}(1_f 1_f)\delta_{r(e)}\\
&= \alpha_{f^{-1}}(1_f)\delta_{r(f)}\\
&= 1_{f^{-1}}\delta_{r(e)}\\
&= 1_{r(f)}\delta_{r(f)}
\end{aligned}$$

(iv) Seja $v \in E^0$ tal que $0 < \#\{e : s(e) = v\} < \infty$. Como $X_v = \bigcup_{e\in E^1:s(e)=v} X_e$, então

$$\sum_{e\in E^1:s(e)=v} 1_e\delta_e 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} = \sum_{e\in E^1:s(e)=v} 1_e\delta_{s(e)} = (\sum_{e\in E^1:s(e)=v} 1_e)\delta_v = 1_v\delta_v.$$

□

Proposição 3.3.6. *Existe um isomorfismo entre $D_0 \rtimes_\alpha \mathbb{F}$ e $D(X) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$.*

Demonstração: Sabemos que existe um único homomorfismo

$$\phi : L_K(E) \to D(X) \rtimes_{\tilde{alpha}} G$$

tal que $\phi(e) = 1_e\delta_e$, $\phi(e^*) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$, para todo $e \in E^1$, e $\phi(v) = 1_v\delta_v$, para todo $v \in E^0$. Também,

$$L_K(E) \cong D_0 \rtimes_\alpha \mathbb{F}. \qquad (\star)$$

Para cada $e \in E^1$, considere $1_e\delta_e \in D(X) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$ e $1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$. Para cada $v \in E^0$, considere $1_v\delta_v \in D(X) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$.

Pela propriedade universal de $L_K(E)$ e por $\star$, existe um único homomorfismo

$$\Gamma : D_0 \rtimes \mathbb{F} \to D(X) \rtimes G$$

tal que $\Gamma(1_e\delta_e) = 1_e\delta_e$, $\Gamma(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}$, para todo $e \in E^1$, e $\Gamma(1_v\delta_0) = 1_v\delta_v$, para todo $v \in E^0$.

Γ é sobrejetora pois $\{1_e\delta_e, 1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}} : e \in E^1\}$ e $\{1_v\delta_v : v \in E^0\}$ geram $D(X) \rtimes_\alpha G$ (como álgebra). Vamos mostrar que Γ é injetora.

Seja $x \in \operatorname{Ker}\Gamma$. Então podemos escrever $x = a_0\delta_0 + \sum a_g\delta_g$, em que $a_g \in D_g$ e $a_0 = \left(\sum \lambda_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}} + \sum \beta_w 1_w\right) \in D_0$.

Para $0 \neq g \in 0$, como Γ é homomorfismo, é fácil ver que $\Gamma(a_g\delta_g) = a_g\delta_g$.

Note ainda que, dado $1_a\delta_0 \in D_0\delta_0$, com $a \in W$, temos

$$\begin{aligned} 1_a\delta_a \cdot 1_{a^{-1}}\delta_{a^{-1}} &= \alpha_a(\alpha_{a^{-1}}(1_a)1_{a^{-1}})\delta_0 \\ &= \alpha_a(1_{a^{-1}}1_{a^{-1}})\delta_0 \\ &= 1_a\delta_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Gamma(1_a\delta_0) &= \Gamma(1_a\delta_a)\Gamma(1_{a^{-1}}\delta_{a^{-1}}) \\ &= 1_a\delta_a \cdot 1_{a^{-1}}\delta_{a^{-1}} \\ &= \alpha_a(\alpha_{a^{-1}}(1_a)1_{a^{-1}})\delta_{aa^{-1}} \\ &= \alpha_a(1_{a^{-1}})\delta_{s(a)} \\ &= 1_a\delta_{s(a)}. \end{aligned}$$

Sendo assim, pelo o que foi feito acima, pelo fato de Γ ser homomorfismo, $1_{cd^{-1}} = 1_c$ e $1_{d^{-1}} = 1_{r(d)}$, para $c, d \in W$, segue que

$$\begin{aligned} \Gamma(a_0\delta_0) &= \Gamma((\sum \lambda_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}} + \sum \beta_w 1_w)\delta_0) \\ &= \sum \lambda_{ab^{-1}}1_{ab^{-1}}\delta_{s(a)} + \sum \beta_w 1_w \delta_w \\ &= \sum_{v \in V'} 1_v a_0 \delta_v, \end{aligned}$$

em que $V' = \{v \in V^0 : v = s(ab^{-1}) \text{ para } \lambda_{ab^{-1}} \text{ ou } \beta_v \neq 0\}$.

Daí,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) = 0 &\iff \sum_{v \in V'} 1_v a_0 \delta_v + \sum a_g \delta_g = 0 \\ &\iff a_0 = 0 \text{ e } a_g = 0, \text{ para todo } g. \end{aligned}$$

Portanto Γ é injetora. $\square$

Exemplo 3.3.7. Seja $E = (E^0, E^1, r, s)$ um grafo dirigido, em que $E^0 = \{v_1, v_2\}$, $E^1 = \{e\}$, $s(e) = v_1$ e $r(e) = v_2$, e seja K um corpo. Então o grupoide gerado por E^1 é $\{v_1, v_2, e, e^*\}$.

Note que $X = \{v_2, e\}$, $X_{v_1} = \{e\}$, $X_e = \{e\}$, $X_{v_2} = \{v_2\}$, $X_{e^*} = \{v_2\}$. Note ainda que $D(X) = \text{span}\{1_{v_1}, 1_{v_2}, 1_e, 1_{e^*}\}$, $D_{v_1} = \text{span}\{1_{v_1}\}$, $D_{v_2} = \text{span}\{1_{v_2}\}$, $D_e = \text{span}\{1_e\}$ e $D_{e^*} = \text{span}\{1_{e^*}\}$.

Temos $D(X) \rtimes G$ o conjunto das somas formais finitas

$$\lambda_1 1_{v_1}\delta_{v_1} + \lambda_2 1_{v_2}\delta_{v_2} + \lambda_3 1_e\delta_e + \lambda_4 1_{e^*}\delta_{e^*},$$

ou seja, $D(X) \rtimes G = K1_{v_1}\delta_{v_1} \bigoplus K1_{v_2}\delta_{v_2} \bigoplus K1_e\delta_e \bigoplus K1_{e^*}\delta_{e^*}$. Desse modo, identificamos $D(X) \rtimes G$ com K^4 por

$$\begin{array}{rcl} D(X) \rtimes G & \to & K^4 \\ \lambda_1 1_{v_1}\delta_{v_1} + \lambda_2 1_{v_2}\delta_{v_2} + \lambda_3 1_e\delta_e + \lambda_4 1_{e^*}\delta_{e^*} & \mapsto & (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4). \end{array}$$

Para determinar o produto em K^4 via esta identificação, note que, usando o isomorfismo do teorema, $L_K(E) \to D(X) \rtimes G$, $z \mapsto 1_z\delta_z$, obtemos

$$(1_z\delta_z)(1_w\delta_w) = \begin{cases} 1_{zw}\delta_{zw}, & \text{se } z \text{ e } w \text{ são componíveis} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo assim, segue que o produto em $D(X) \rtimes G \cong K^4$ é dado por
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) =$
$(\lambda_1\mu_1 + \lambda_3\mu_4, \lambda_4\mu_3 + \lambda_2\mu_2, \lambda_1\mu_3 + \lambda_3\mu_2, \lambda_4\mu_1 + \lambda_2\mu_4)$.

O leitor atento pode notar que o produto acima é semelhante a um produto matricial. Mais do isso, a aplicação $\phi : K^4 \to M_2(K)$, dada por $\phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ é, na verdade, um isomorfismo de álgebras.

Finalmente, podemos concluir que $L_K(E)$ é isomorfa a $M_2(K)$.

Capítulo 4

Isomorfismos entre álgebras de Leavitt

No capítulo 2, mostramos que a álgebra de Leavitt $L_K(E)$ é isomorfa a um produto parcial associado a uma ação parcial do grupo livre gerado pelas arestas do grafo E. No capítulo 3, mostramos que $L_K(E)$ é isomorfa a um produto cruzado parcial associado a uma ação parcial do grupoide gerado pelas arestas de E. Ou seja, o produto cruzado parcial construído no capítulo 2 é isomorfo ao produto cruzado construído no capítulo 3.

Neste capítulo estudaremos condições necessárias para que, dados dois grupoides G_1 e G_2 associados a grafos E_1 e E_2, respectivamente, tenhamos um isomorfismo entre os produtos cruzados associados a eles.

4.1 Homomorfismos de grupoides

Definição 4.1.1. Sejam G, H grupoides. Uma aplicação $h : G \to H$ é um *homomorfismo de grupoides* se $(g_1, g_2) \in G^2$ implica em $(h(g_1), h(g_2)) \in H^2$ e $h(g_1 g_2) = h(g_1)h(g_2)$.

Seja $E_i = (E_i^0, E_i^1, r, s)$ grafo dirigido e seja G_i grupoide de caminho associado a E_i, como definido em 3.1.12, para $i \in \{1, 2\}$. Seja $W_i \subseteq G_i$ o conjunto dos caminhos finitos de E_i e seja $X_i = \{\xi \in W_i : r(\xi) \text{ é poço}\} \cup W_i^\infty$, para $i \in \{1, 2\}$. Seja $\theta_i = (\{X_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ a ação parcial do grupoide G_i no conjunto X_i, como definido no capítulo anterior, para $i \in \{1, 2\}$.

Definição 4.1.2. Definimos $S \subseteq G$ por

$$S = \{g \in G : X_g \neq \varnothing\}.$$

Considere $h : G_1 \to G_2$ um homomorfismo entre os grupoides. Vamos mostrar alguns lemas a respeito de h. Tais lemas serão utilizados para os resultados da próxima seção.

Lema 4.1.3. *Para todo $\alpha \in W_1$, temos que $h(s(\alpha)) = s(h(\alpha))$ e $h(r(\alpha)) = r(h(\alpha))$.*

Demonstração: Como $h(s(\alpha)) = h(s(\alpha)s(\alpha)) = h(s(\alpha))h(s(\alpha))$, então $h(s(\alpha)) \in E_1^0$.

Como $h(\alpha) = h(s(\alpha)\alpha) = h(s(\alpha))h(\alpha)$, então $s(h(\alpha)) = h(s(\alpha))$.

Como $h(r(\alpha)) = h(r(\alpha)r(\alpha)) = h(r(\alpha))h(r(\alpha))$, então $h(r(\alpha)) \in E_1^0$. Como

$$h(\alpha) = h(\alpha r(\alpha)) = h(\alpha)h(r(\alpha),$$

então $r(h(\alpha)) = h(r(\alpha))$. □

Lema 4.1.4. *Dado $\alpha \in W_1$, segue que $h(\alpha^{-1}) = h(\alpha)^{-1}$.*

Demonstração: Note que

$$h(\alpha^{-1})h(\alpha) = h(\alpha^{-1}\alpha) = h(r(\alpha)) = r(h(\alpha)) = h(\alpha)^{-1}h(\alpha) \text{ e}$$

$$h(\alpha)h(\alpha^{-1}) = h(\alpha\alpha^{-1}) = h(s(\alpha)) = s(h(\alpha)) = h(\alpha)h(\alpha)^{-1}.$$ □

Corolário 4.1.5. *Para quaisquer $(\alpha, \beta^{-1}) \in G_1^2$, temos que $h(\alpha\beta^{-1}) = h(\alpha)h(\beta)^{-1}$.*

Lema 4.1.6. *Para todo $v \in E_1^0$, temos $h(v) \in E_2^0$.*

Demonstração: Seja $\alpha \in G_2$ tal que $h(v) = \alpha$. Então

$$\alpha = h(v) = h(vv) = h(v)h(v) = \alpha\alpha.$$

Logo, $\alpha \in E_2^0$. □

Lema 4.1.7. *Suponha que h seja injetiva em W_1. Então, para quaisquer $\alpha, \beta \in W_1$, temos que $r(\alpha) = r(\beta)$ se, e somente se, $r(h(\alpha)) = r(h(\beta))$.*

Demonstração: Suponha que $r(\alpha) = r(\beta)$. Então $(\alpha, \beta^{-1}) \in G_1^2$. Como h é homomorfismo, então $(h(\alpha), h(\beta^{-1})) \in G_2^2$.

Logo, $r(h(\alpha)) = s(h(\beta^{-1})) = r(h(\beta^{-1})^{-1})) = r(h(\beta))$, como queríamos.

Suponha agora que $r(\alpha) \neq r(\beta)$. Então $h(r(\alpha)) \neq h(r(\beta))$, pois h é homomorfismo injetivo em W_1. Então

$$r(h(\alpha)) = h(r(\alpha)) \neq h(r(\beta)) = r(h(\beta)). \qquad \square$$

Lema 4.1.8. *Suponha que h seja injetiva em W_1 e que $h(W_1) = W_2$. Então, para todo $\alpha \in W_1$, $r(\alpha)$ é poço se, e somente se, $r(h(\alpha))$ é poço.*

Demonstração:

$$r(h(\alpha)) \text{ não é poço } \iff \text{ existe aresta } e_2 \text{ tal que } h(\alpha)e_2 \in W_2.$$

Como $e_2 \in W_2$ e $h(W_1) = W_2$, então existe $e_1 \in W_1$ tal que $h(e_1) = e_2$. Pelo lema anterior, então

$$h(\alpha)e_2 = h(\alpha)h(e_1) = h(\alpha e_1),$$

o que significa que $r(\alpha)$ não é poço. $\square$

Lema 4.1.9. *Suponha que h seja injetiva em W_1. Então $(\alpha, \beta) \in G_1^2$ se, e somente se, $(h(\alpha), h(\beta)) \in G_2^2$.*

Demonstração: Suponha que $(\alpha, \beta) \notin G_1^2$. Então $r(\alpha) \neq s(\beta)$. Como h é injetiva em W_1, então

$$r(h(\alpha)) = h(r(\alpha)) \neq h(s(\beta)) = s(h(\beta)).$$

Logo, $(h(\alpha), h(\beta)) \notin G_2^2$. $\square$

Lema 4.1.10. *Suponha que h seja injetiva em W_1 e que $h(W_1) = W_2$. Então, para qualquer $\alpha \in W_1$, $|\alpha| = 1$ se, e somente se, $|h(\alpha)| = 1$.*

Demonstração: Seja $e \in E_1^1$. Suponha que $h(e) = \alpha_1\alpha_2 \in W_2$, com $\alpha_1, \alpha_2 \notin E_2^0$. Então existem $f_1, f_2 \in W_1$ tais que $h(f_1) = \alpha_1$ e $h(f_2) = \alpha_2$.

Note que $f_1, f_2 \notin E_1^0$, por 4.1.6. Então

$$h(f_1 f_2) = h(f_1)h(f_2) = \alpha_1\alpha_2 = h(e).$$

Logo, $f_1 f_2 = e$, o que implica em $f_1 \in E_1^0$ ou $f_2 \in E_1^0$, o que é um absurdo. Agora, suponha que $h(e) \in E_2^0$. Então

$$h(ee) = h(e)h(e) = h(e),$$

logo $e \in E_1^0$, o que é um absurdo.

Por outro lado, dado $\alpha \in W_1$ suponha que $|h(\alpha)| = 1$. Se $\alpha \in E_1^0$, então $h(\alpha) \in E_2^0$ e $|h(\alpha)| = 0$. Suponh então que $|\alpha| = n, n \geq 2$. Então $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$, para $\alpha_i \in E_1^1$. Daí,

$$h(\alpha) = h(\alpha_1 \dots \alpha_n) = h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n),$$

e então $1 = |h(\alpha)| = |h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n)| = n$, o que é um absurdo. □

Corolário 4.1.11. *Suponha h injetiva e que $h(W_1) = W_2$. Então $|\alpha| = |h(\alpha)|$, para todo $\alpha \in W_1$.*

Lema 4.1.12. *Suponha que h seja injetiva em W_1 e que $h(W_1) = W_2$. Então $h : G_1 \to G_2$ é sobrejetora.*

Demonstração: Seja $\gamma \in G_2$. Então podemos escrever $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$, em que $\gamma_i \in E_2^1 \cup (E_2^1)^*$. Como $h(W_1) = W_2$ e $h(W_1^*) = W_2^*$, então $\gamma_i = h(e_i)$, para certos $e_i \in W_1$. Pelo lema 4.1.10, $e_i \in E_1^1 \cup (E_1^1)^*$. Pelo lema 4.1.9, $e_1 \dots e_n$ é componível, logo

$$h(e_1 \dots e_n) = h(e_1) \dots h(e_n) = \gamma_1 \dots \gamma_n = \gamma. \qquad \square$$

Lema 4.1.13. *h é injetiva em W_1^*.*

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta \in W_1^*$ tais que $\alpha \neq \beta$. Então $\alpha^*, \beta^* \in W_1$ e $\alpha^* \neq \beta^*$. Como h é 1-1 em W_1, segue que $h(\alpha^*) \neq h(\beta^*)$. Sendo assim,

$$h(\alpha) = h(\alpha^*)^* \neq h(\beta^*)^* = h(\beta). \qquad \square$$

Lema 4.1.14. *Suponha que h seja injetiva em W_1 e que $h(W_1) = W_2$. Então $h : G_1 \to G_2$ é injetiva.*

Demonstração: Dado $g = e_1 \dots e_n \in G_2$, com $e_i \in E_2^0 \cup E_2^1 \cup (E_2^0)^* \cup (E_2^1)^*$. Pelos lemas 4.1.10 e 4.1.12, existe um único $f_i \in E_1^0 \cup E_1^1 \cup (E_1^0)^* \cup (E_1^1)^*$ tal que $h(f_i) = e_i$.

Defina $h^{-1}(e_1 \dots e_n) = f_1 \dots f_n$. Note que $|f_1 \dots f_n| = |e_1 \dots e_n|$, pois se $|f_1 \dots f_n| < |e_1 \dots e_n|$, então $e_1 \dots e_n = h(f_1) \dots h(f_n)$ não seria forma reduzida. □

4.2 Isomorfismos graduados entre álgebras de Leavitt

Definição 4.2.1. Seja G um grupoide e seja R um anel associativo (não necessariamente unital). Dizemos que R é *G-graduado*, ou graduado por G, se R é uma soma direta de subgrupos aditivos R_t indexados por elementos de G e tais que $R_t R_s \subseteq R_{ts}$, para quaisquer $s, t \in G$.

Definição 4.2.2. Sejam $A = \bigoplus_{g \in G_1} A_g$ e $B = \bigoplus_{h \in G_2} B_h$ álgebras graduadas pelos grupoides G_1 e G_2, respectivamente. Um homomorfismo graduado por grupoide entre A e B é um par (φ, h) em que $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebra, $h : G_1 \to G_2$ é um homomorfismo de grupoide e $\varphi(A_g) \subseteq B_{h(g)}$, para todo $g \in G_1$.

Proposição 4.2.3. *Se existe $h : G_1 \to G_2$ homomorfismo de grupoide tal que $h|_{W_1}$ é injetivo e $h(W_1) = W_2$, então $D(X_1) \rtimes G_1 \cong^{grad} D(X_2) \rtimes G_2$, via um isomorfismo $\varphi : D(X_1) \rtimes G_1 \to D(X_2) \rtimes G_2$ tal que $\varphi(1_e \delta_e) = 1_{h(e)} \delta_{h(e)}$ e $\varphi(1_v \delta_v) = 1_{h(v)} \delta_{h(v)}$.*

Demonstração: Considere em $L_K(E_2)$ a família

$$\mathcal{F} = \{1_{h(e)}\delta_{h(e)}, 1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})}, 1_{h(v)}\delta_{h(v)} : v \in E_1^0, e \in E_1^1\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ satisfaz as condições de álgebra de Leavitt de $L_K(E_1)$.

(i)

$$\begin{aligned}
1_{h(s(e))}\delta_{h(s(e))} \cdot 1_{h(e)}\delta_{h(e)} &= 1_{s(h(e))}\delta_{s(h(e))} \cdot 1_{h(e)}\delta_{h(e)} \\
&= \alpha_{s(h(e))}(\alpha^{-1}_{s(h(e))}(1_{s(h(e))})1_{h(e)})\delta_{s(h(e))h(e)} \\
&= \alpha_{s(h(e))}(1_{s(h(e))^{-1}}1_{h(e)})\delta_{h(s(e))h(e)} \\
&= \alpha_{s(h(e))}(1_{s(h(e))}1_{h(e)})\delta_{h(s(e)e)} \\
&= \alpha_{s(h(e))}(1_{h(e)})\delta_{h(e)} \\
&= 1_{h(e)}\delta_{h(e)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1_{h(e)}\delta_{h(e)} \cdot 1_{r(h(e))}\delta_{r(h(e))} &= 1_{h(e)}\delta_{h(e)} \cdot 1_{h(r(e))}\delta_{h(r(e))} \\
&= \alpha_{h(e)}(\alpha^{-1}_{h(e)}(1_{h(e)})1_{r(h(e))})\delta_{h(e)r(h(e))} \\
&= \alpha_{h(e)}(1_{h(e)^{-1}}1_{r(h(e))})\delta_{h(er(e))} \\
&= \alpha_{h(e)}(1_{h(e)^{-1}})\delta_{h(e)} \\
&= 1_{h(e)}\delta_{h(e)}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
1_{h(r(e))}\delta_{h(r(e))}\cdot 1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})} &= 1_{r(h(e))}\delta_{r(h(e))}\cdot 1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})}\\
&= \alpha_{r(h(e))}(\alpha^{-1}_{r(h(e))}(1_{r(h(e))})1_{h(e)^{-1}})\delta_{h(e^{-1})}\\
&= \alpha_{r(h(e))}(1_{r(h(e))}1_{h(e^{-1})})\delta_{h(e^{-1})}\\
&= \alpha_{r(h(e))}(1_{h(e^{-1})})\delta_{h(e^{-1})}\\
&= 1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})}\cdot 1_{s(h(e))}\delta_{s(h(e))} &= 1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})}\cdot 1_{s(h(e))}\delta_{s(h(e))}\\
&= \alpha_{h(e^{-1})}(\alpha^{-1}_{h(e^{-1})}(1_{h(e^{-1})})1_{s(h(e))})\delta_{h(e^{-1})s(h(e^{-1}))}\\
&= \alpha_{h(e^{-1})}(1_{h(e^{-1})^{-1}}1_{s(h(e))})\delta_{h(e^{-1}s(e))}\\
&= \alpha_{h(e^{-1})}(1_{h(e)}1_{s(h(e))})\delta_{h(e^{-1})}\\
&= \alpha_{h(e^{-1})}(1_{h(e)})\delta_{h(e^{-1})}\\
&= 1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})}1_{h(g)}\delta_{h(g)} &= \alpha_{h(e^{-1})}(\alpha^{-1}_{h(e^{-1})}(1_{h(e^{-1})})1_{h(g)})\delta_{h(e^{-1})h(g)}\\
&= \alpha_{h(e^{-1})}(\alpha_e(1_{h(e^{1})}1_{h(g)}))\delta_{h(e^{-1})h(g)}\\
&= \delta_{h(e),h(g)}1_{h(e)}\delta_{h(r(e))}\\
&= \delta_{e,g}1_{h(e^{-1})}\delta_{h(r(e))}
\end{aligned}$$

(iv) Seja $e \in E_1^0$ tal que $0 < \#\{h(e) : s(h(e)) = h(v)\} < \infty$. Note que

$$\begin{aligned}
\{e : s(e) = v\} = \{e : h(s(e)) = h(v)\} &= \{e : s(h(e)) = h(v)\}\\
&= \{e : s(h(e)) = s(h(v))\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{s(e)=v} &= \sum_{s(e)=v} 1_{h(e)}\delta_{h(e)}1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})} = \sum_{s(e)=v} 1_{h(e)}\delta_{s(h(e))}\\
&= \sum_{s(e)=v} 1_{h(e)}\delta_{s(h(e))} = \sum_{s(e)=v} 1_{h(e)}\delta_{h(v)}\\
&= \left(\sum_{e:s(h(e))=h(v)} 1_{h(e)}\right)\delta_{h(v)}
\end{aligned}$$

Então, basta mostrar que $\displaystyle\sum_{e:s(h(e))=h(v)} 1_{h(e)} = 1_{h(v)}$.

Note que para cada e tal que $s(e) = h(v)$ existe um único f tal que $h(f) = e$. Além disso, se $(h(v), e) \in G_2^2$ então $(v, f) \in G_1^2$, ou seja, $s(f) = v$. Note também que para cada e tal que $s(e) = v$ temos que $(h(v), h(e)) \in G_2^2$, logo, $s(h(e)) = h(v)$. Portanto,

$$\sum_{e:s(h(e))=h(v)} 1_{h(e)} = \sum_{f:s(f)=h(v)} = 1_{h(v)}.$$

Portanto, existe um homomorfismo $\varphi : L_K(E_1) \to L_K(E_2)$ tal que $\varphi(1_e\delta_e) = 1_{h(e)}\delta_{h(e)}$, $\varphi(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = 1_{h(e^{-1})}\delta_{h(e^{-1})}$ e $\varphi(1_v\delta_v) = 1_{h(v)}\delta_{h(v)}$.

Considere agora em $L_K(E_1)$ a família

$$\mathcal{H} = \{1_{h^{-1}(e)}\delta_{h^{-1}(e)}, 1_{h^{-1}(e^{-1})}\delta_{h^{-1}(e^{-1})}, 1_{h^{-1}(v)}\delta_{h^{-1}(v)} : v \in E_2^0, e \in E_2^1\}.$$

Como $h : G_1 \to G_2$ é uma bijeção tal que $h^{-1}(W_2) = W_1$ e $h^{-1}|_{W_2} = W_1$, mostra-se de modo análogo que existe um homomorfismo $\phi : L_K(E_2) \to L_K(E_1)$ tal que $\phi(1_e\delta_e) = 1_{h^{-1}(e)}\delta_{h^{-1}(e)}$, $\varphi(1_{e^{-1}}\delta_{e^{-1}}) = 1_{h^{-1}(e^{-1})}\delta_{h^{-1}(e^{-1})}$ e $\varphi(1_v\delta_v) = 1_{h^{-1}(v)}\delta_{h^{-1}(v)}$

Por fim, note que ϕ é a inversa de φ. $\square$

Vamos mostrar agora uma recíproca para a proposição anterior.

Proposição 4.2.4. *Suponha que E_1 satisfaz a condição (L). Suponha que $\varphi : D(X_1) \rtimes G_1 \to D(X_2) \rtimes G_2$ seja um isomorfismo e que $h : G_1 \to G_2$ seja um homomorfismo de grupoide tais que (φ, h) seja um isomomorfismo graduado. Suponha que φ é tal que*

$$\varphi(\{1_v\delta_v : v \in E_1^0\}) = \{1_w\delta_w : w \in E_2^0\}.$$

Então $h|_{W_1}$ é injetiva e $h(S_1) = S_2$.

Demonstração: Note que, pelo lema 4.1.6, $h(E_1^0) \subseteq E_2^0$.

Afirmação 1: $h(S_1) = S_2$.

Dado $g \in S_1$, temos que $1_g\delta_g \neq 0$ em $D(X_1) \rtimes G_1$. Logo $0 \neq \varphi(1_g\delta_g) \in D_{h(g)}\delta_{h(g)}$, pois φ é injetiva, e, portanto, $h(g) \in S_2$.

Por outro lado, seja $c \in S_2$. Então $1_c\delta_c \neq 0$. Como φ é isomorfismo, existe $x = \sum \alpha_g\delta_g$ tal que $1_c\delta_c = \varphi(x) = \sum \varphi(\alpha_g\delta_g)$.

Como $\varphi(\alpha_g\delta_g) \in D_{h(g)}\delta_{h(g)}$, para todo g, então $1_c\delta_c = \sum_{h(g)=c} \varphi(\alpha_g\delta_g) \neq 0$. Logo, existe g tal que $h(g) = c$ e $\varphi(\alpha_g\delta_g) \neq 0$, portanto $\alpha_g\delta_g \neq 0$ e $g \in S_1$.

Afirmação 2: $h|_{E_0^1}$ é injetiva.

Sejam $v, w \in E_1^0$. Por hipótese,

$$\varphi(1_v\delta_v 1_w\delta_w) = \varphi(1_v\delta_v)\varphi(1_w\delta_w) = 1_{h(v)}\delta_{h(v)}\cdot 1_{h(w)}\delta_{h(w)} = \delta_{h(v),h(w)}1_{h(v)}\delta_{h(v)}.$$

Por outro lado,

$$\varphi(1_v\delta_v 1_w\delta_w) = \varphi(\delta_{v,w}1_v\delta_v) = \delta_{v,w}1_{h(v)}\delta_{h(v)}.$$

Portanto, $h(v) = h(w)$ se, e somente se, $v = w$.

Afirmação 3: Seja $\alpha \in S_1$. Se $h(\alpha) \in E_2^0$ então $\alpha \in E_1^0$.

Vamos mostrar que se $\alpha \notin E_1^0$ então $h(\alpha) \notin E_2^0$. Note que, pelo lema 4.1.3 e como $h(\alpha) \in E_2^0$, então

$$h(s(\alpha)) = s(h(\alpha)) = r(h(\alpha)) = h(r(\alpha)).$$

Pela afirmação anterior, $s(\alpha) = r(\alpha)$. Vamos mostrar que $\alpha \in E_1^0$. Suponha, por absurdo, o contrário. Daí,

$$\varphi(1_\alpha\delta_\alpha 1_{\alpha^{-1}}\delta_{\alpha^{-1}}) = \varphi(1_\alpha\delta_\alpha)\varphi(1_{\alpha-1}\delta_{\alpha^{-1}}) = a\delta_{h(\alpha)}b\delta_{h(\alpha^{-1})} = ab\delta_{h(\alpha)},$$

em que $a, b \in D_{h(\alpha)} = D_{h(\alpha^{-1})}$ são tais que $\varphi(1_\alpha\delta_\alpha) = a\delta_{h(\alpha)}$ e $\varphi(1_{\alpha^{-1}}\delta_{\alpha^{-1}}) = b\delta_{h(\alpha^{-1})} = b\delta_{h(\alpha)}$.

Analogamente, $\varphi(1_{\alpha^{-1}}\delta_{\alpha^{-1}}1_\alpha\delta_\alpha) = ba\delta_{h(\alpha)} = ab\delta_{h(\alpha)}$.

Como φ é isomorfismo, segue que $1_\alpha\delta_\alpha 1_{\alpha^{-1}}\delta_{\alpha^{-1}} = 1_{\alpha^{-1}}\delta_{\alpha^{-1}}1_\alpha\delta_\alpha$, ou seja,

$$1_\alpha\delta_{s(\alpha)} = 1_{\alpha^{-1}}\delta_{r(\alpha)}.$$

Portanto, $r(\alpha) = s(\alpha)$ e $\alpha = \alpha^{-1}$.

Primeiro vamos supor que $\alpha \in W_1$ ou $\alpha \in W_1^*$. Trocando α por α^{-1} se necessário, vamos assumir que $\alpha \in W_1$. Como E_1 satisfaz a condição (L) e α é um ciclo, existe uma saída $e \in E_1^1$ de α e então podemos tomar um subcaminho α' de α (possivelmente nulo, caso $s(e) = s(\alpha)$) tal que $\alpha' e$ é componível e não contém α como subcaminho. Então $1_\alpha(\alpha' e) = 0$ e $1_{s(\alpha)}(\alpha' e) = 1$, porém, $1_{s(\alpha)} = 1_{\alpha^{-1}}$, e temos um absurdo.

Suponha agora que $\alpha = \beta\gamma^{-1}$, em que $\beta, \gamma \in W_1 \setminus E_1^0$ e $r(\beta) = r(\gamma)$, na forma reduzida. Daí,

$$1_\beta = 1_\alpha = 1_{\alpha^{-1}} = 1_\gamma,$$

contradizendo o fato de que $\alpha = \beta\gamma^{-1}$ está na forma reduzida.

Portanto, $\alpha \in E_1^0$.

Afirmação 4: h é injetivo em W_1.

Sejam $\alpha, \beta \in W_1$ tais que $h(\alpha) = h(\beta)$. Então

$$h(r(\alpha)) = r(h(\alpha)) = r(h(\beta)) = h(r(\beta)).$$

Pela afirmação 2, temos que $r(\alpha) = r(\beta)$. Sendo assim, $\alpha\beta^{-1}$ é componível e

$$h(\alpha\beta^{-1}) = h(\alpha)h(\beta)^{-1} = h(\alpha)h(\alpha)^{-1} = s(\alpha) \in E_2^0.$$

Pela afirmação 3, $\alpha\beta^{-1} \in E_1^0$. Portanto, $\alpha = \beta$. $\square$

Proposição 4.2.5. *Sob as mesmas condições da proposição anterior e supondo que* $\varphi(\{1_e\delta_e : e \in E_1^1\}) = \{1_f\delta_f : f \in E_2^1\}$, *então* $h(W_1) = W_2$.

Demonstração: Note que como φ é graduado, então $\varphi(1_e\delta_e) = 1_{h(e)}\delta_{h(e)}$, para todo $e \in E_1^1$.

Seja $f \in E_2^1$. Como $\varphi(\{1_e\delta_e : e \in E_1^1\}) = \{1_f\delta_f : f \in E_2^1\}$, então existe $e \in E_1^1$ tal que $1_f\delta_f = \varphi(1_e\delta_e)$. Como $\varphi(1_e\delta_e) = 1_{h(e)}\delta_{h(e)}$, então $h(e) = f$. Dado $f_1 \dots f_n \in W_2$, então existem $e_1, \dots, e_n \in W_1$ tais que $h(e_i) = f_i$. Logo, pelo lema 4.1.9

$$f_1 \dots f_n = h(e_1) \dots h(e_n) = h(e_1 \dots e_n).$$

Portanto, $W_2 \subseteq h(W_1)$.

Seja $e_1 \dots e_n \in W_1$. Então $h(e_1 \dots e_n) = h(e_1) \dots h(e_n)$; como $h(e_i) \in E_2^1$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então $h(e_1 \dots e_n) \in W_2$. Logo, $h(W_1) \subseteq W_2$. $\square$

Vejamos agora que a condição adicional na proposição anterior é necessária para obtermos $h(W_1) = W_2$.

Exemplo 4.2.6. Seja $E_1 = \{E_1^0, E_1^1, r_1, s_1\}$, em que $E_1^0 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E_1^1 = \{e_1, e_2\}$, $r_1(e_1) = v_2 = s_1(e_2)$, $s_1(e_1) = v_1$ e $r_1(e_2) = v_3$. Podemos representar este grafo por

$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3$$

Seja $E_2 = \{E_2^0, E_2^1, r_2, s_2\}$, em que $E_2^0 = \{w_1, w_2, w_3\}$, $E_2^1 = \{f_1, f_2\}$, $r_2(f_1) = w_3 = r_2(f_2)$, $s_2(f_1) = w_1$ e $s_2(f_2) = w_2$. Podemos representar este grafo por

$$\begin{tikzcd} & w_3 & \\ w_1 \arrow[ur, "f_1"] & & w_2 \arrow[ul, "f_2"'] \end{tikzcd}$$

Note que $G_1 = \{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_1^{-1}, e_2^{-1}, e_1e_2, e_2^{-1}e_1^{-1}\}$.

Defina $h : G_1 \to G_2$ de modo que $h(e_1) = f_1^{-1}$, $h(e_2) = f_1 f_2^{-1}$, $h(e_1^{-1}) = h(e_1)^{-1}$ e $h(e_2^{-1}) = h(e_2)^{-1}$. Note que

$$\begin{aligned} h(v_1) &= h(e_1 e_1^{-1}) = h(e_1)h(e_1)^{-1} = f_1^{-1} f_1 = r(f_1) = w_3 \\ h(v_2) &= h(e_1^{-1} e_1) = h(e_1)^{-1} h(e_1) = f_1 f_1^{-1} = s(f_1) = w_1 \\ h(v_3) &= h(e_2^{-1} e_2) = h(e_2)^{-1} h(e_2) = (f_1 f_2^{-1})^{-1} (f_1 f_2^{-1}) \\ &= f_2 r(f_1) f_2^{-1} = s(f_2) = w_2. \end{aligned}$$

É fácil ver que existe um isomorfismo $\varphi : L_K(E_1) \to L_K(E_2)$ tal que $\varphi(1_{e_1}\delta_{e_1}) = 1_{f_1^{-1}}\delta_{f_1^{-1}}$, $\varphi(1_{e_2}\delta_{e_2}) = 1_{f_1 f_2^{-1}}\delta_{f_1 f_2^{-1}}$, $\varphi(1_{v_1}\delta_{v_1}) = 1_{w_3}\delta_{w_3}$, $\varphi(1_{v_2}\delta_{v_2}) = 1_{w_1}\delta_{w_1}$, $\varphi(1_{v_3}\delta_{v_3}) = 1_{w_2}\delta_{w_2}$ e que (φ, h) é um isomorfismo graduado.

Note que $\varphi(\{1_{v_1}\delta_{v_1}, 1_{v_2}\delta_{v_2}, 1_{v_3}\delta_{v_3}\}) = \{1_{w_1}\delta_{w_1}, 1_{w_2}\delta_{w_2}, 1_{w_3}\delta_{w_3}\}$, mas $\varphi(\{1_{e_1}\delta_{e_1}, 1_{e_2}\delta_{e_2}\}) \neq \{1_{f_1}\delta_{f_1}, 1_{f_2}\delta_{f_2}\}$. Ou seja, a condição adicional da proposição 4.2.5 não é satisfeita e temos, claramente, $h(W_1) \neq W_2$.

Referências Bibliográficas

[1] M. Dokuchaev e R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Tans. Amer. Math. Soc., 357, (2005), 1931-1952

[2] D. Gonçalves e D. Royer, *Leavitt path algebras as partial skew group rings*, Communications in Algebra, v. 42, p. 3578-3592, 2014.

[3] D. Gonçalves, J. Öinert e D. Royer, *Simplicity of partial skew group rings with applications to Leavitt path algebras and topological dynamics*, Journal of Algebra (Print), v. 420, p. 201-216, 2014.

[4] D. Gonçalves, *Simplicity of partial skew group rings of abelian groups*, Canadian Mathematical Bulletin, v. 57, p. 1-11, 2014.

[5] G. Boava, *Caracterizações da C*-álgebra gerada por uma compressão aplicadas a cristais e quasicristais* - Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina, (2007).

[6] D. Gonçalves, Produtos Cruzados - Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Santa Catarina, (2001).

[7] M. Tomforde, *Uniqueness theorems and ideal structure for Leavitt path algebras*, (2007), J. Algebra, 318, 270-299

[8] D. Bagio, D. Flores, A. Paques, *Partial actions of ordered grupoids on rings*, (2010), Jornal of Algebra and its applications, vol 9 issue 3.

[9] D. Bagio, A. Paques *Partial grupoid actions: globalization, Morita theory and Galois theory*, Communications In Algebra (Online), v. 40, p. 3658-3678, 2012.