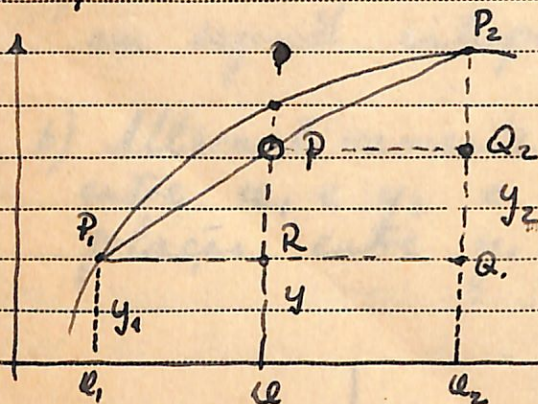


Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Prática do emprego de tabe-las.

1.ª) Função a uma variável: $y = f(x)$ tabelada.

$$\frac{P_2 Q}{P_1 Q_1} = \frac{PR}{P_1 R} \rightarrow$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \rightarrow$$

$$y - y_1 = (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \boxed{y = y_1 + (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$\frac{Q_2 P_2}{Q_1 P_2} = \frac{P Q_2}{P_1 Q_1} \rightarrow \frac{y_2 - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \rightarrow \boxed{y_2 = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}}$$

Aplicações: Logaritmos. Funções. Tabelas de observações diretas, etc.

Caso de função decrescente. Sinais.

2.ª) Função a duas variáveis: $Z = f(x, y)$

São conhecidos 4 pontos Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 cujas coordenadas são $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$ e se quer obter um quinto ponto Z_5 cujas coordenadas sejam $x_1 < x < x_2$ e $y_1 < y < y_2$.

A solução é obtida através de dois pontos



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

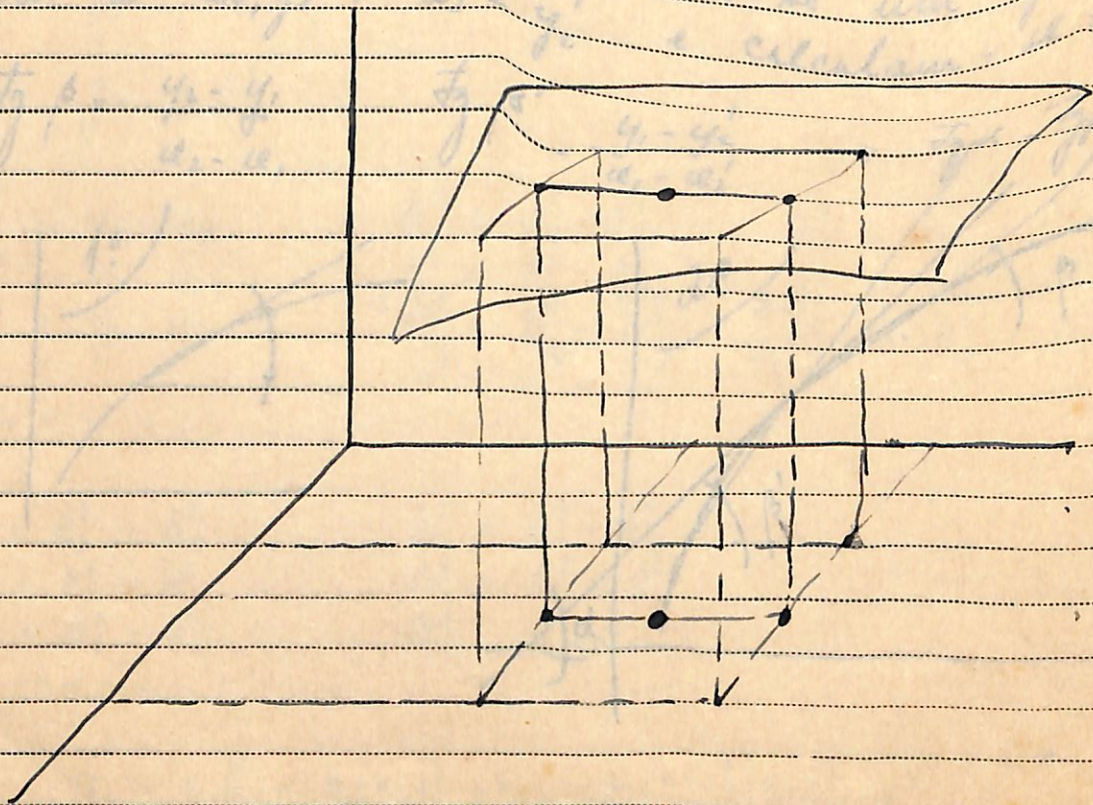
Curitiba, de

de 195

intermediários auxiliares, e depois interpolando entre esses dois pontos auxiliares.

a) Primeiro fixando u e y e interpolando entre u_1 e u_2 em seguida interpolando entre u_1 e u_2 e y_1 e y_2

b) Alternativamente fixando y e interpolando entre u_1 e u_2 e em seguida fazendo a interpolação entre y_1 e y_2





ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

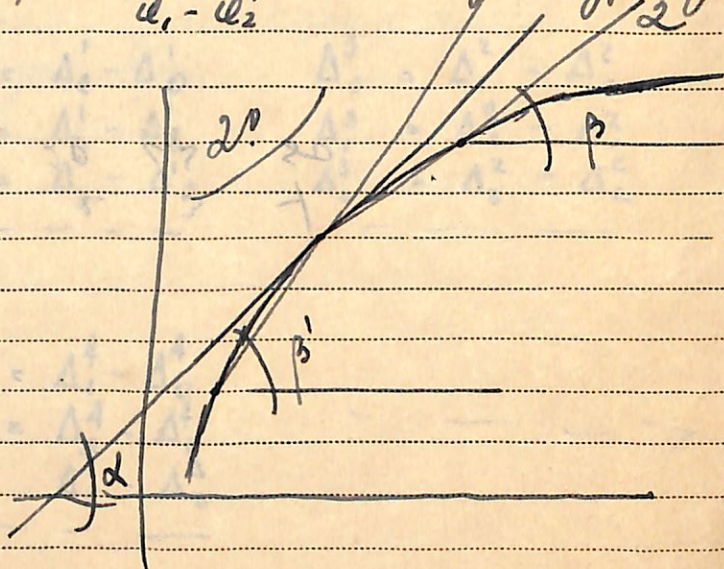
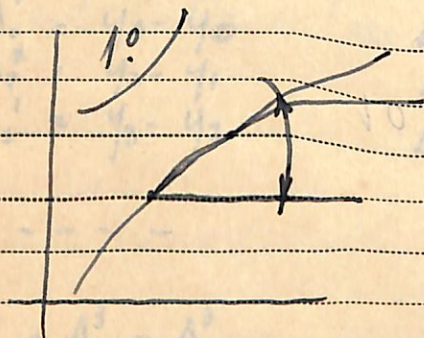
3º) caso de cálculo de tangente (isto é, de derivada) em um ponto dado, de uma função tabelada.

$$y' = f'x = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se $y_2 - y_1$ é pequeno: $y'(x_1, y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Com menos aproximação, usa-se um ponto anterior a x_1, y_1 : x'_1 e y'_1 e calculam-se:

$$f'x \beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad f'x \beta' = \frac{y_1 - y'_1}{x_1 - x'_1} \quad \rightarrow \quad f'x \alpha = \frac{f'x \beta + f'x \beta'}{2}$$





ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Método das diferenças.

u_0	y_0	Δ_0^1	Δ_0^2	Δ_0^3	Δ_0^4	Δ_0^5	Δ_0^6
u_1	y_1	Δ_1^2	Δ_1^2	Δ_1^3	Δ_1^4	Δ_1^5	Δ_1^6
u_2	y_2	Δ_2^1	Δ_2^2	Δ_2^3	Δ_2^4	Δ_2^5	Δ_2^6
u_3	y_3	Δ_3^1					
u_4	y_4	Δ_4^1					
u_5	y_5	Δ_5^1					
u_6	y_6	Δ_6^1					
u_7	y_7	Δ_7^1					
i	i						
u_n	y_n	Δ_n^1					

$$\Delta_0^1 = y_1 - y_0$$

$$\Delta_1^2 = y_2 - y_1$$

$$\Delta_2^1 = y_3 - y_2$$

$$\Delta_0^2 = \Delta_1^1 - \Delta_0^1$$

$$\Delta_1^2 = \Delta_2^1 - \Delta_1^1$$

$$\Delta_2^2 = \Delta_3^1 - \Delta_2^1$$

$$\Delta_0^3 = \Delta_1^2 - \Delta_0^2$$

$$\Delta_1^3 = \Delta_2^2 - \Delta_1^2$$

$$\Delta_2^3 = \Delta_3^2 - \Delta_2^2$$

$$\Delta_0^4 = \Delta_1^3 - \Delta_0^3$$

$$\Delta_1^4 = \Delta_2^3 - \Delta_1^3$$

$$\Delta_2^4 = \Delta_3^3 - \Delta_2^3$$

$$\Delta_0^5 = \Delta_1^4 - \Delta_0^4$$

$$\Delta_1^5 = \Delta_2^4 - \Delta_1^4$$

$$\Delta_2^5 = \Delta_3^4 - \Delta_2^4$$

$$y_n = y_0 + n \Delta_0^1 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta_0^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta_0^3 + \dots$$

As diferenças reduzem de uma ~~gr~~ unidade



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

O gráfico, se a função é um polinômio:

$$(u+1)^k = u^k + k u^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} u^{k-2} + \dots + 1$$

$$u^k = u^k$$

$$(u+1)^k - u^k = k u^{k-1} + \dots + 1$$

Os coeficientes binomiais estão tabelados!
(v. Yule e Kendall)

Exemplo de aplicações, graduações (dados do IBGE)
de estatísticas de população.

População brasileira acumulada

1950

Intervalo	Idade	Pop. Total	Pop. Total		
0	0	0.000.000	49.622.424	< 60	2.650.314
1	< 5		8.370.880	< 70	1.415.468
2	< 10	15.386.407	7.015.527	< 80	575.170
3	< 15	21.694.974	6.308.567	> 80	208.703
4	< 20	27.197.289	5.502.315		
5	< 25	32.188.428	4.991.139		
6	< 30	36.320.699	4.132.271		
7	< 35				
8	< 40	42.666.751	6.286.052		
9	< 45				
10	< 50	46.972.110	4.365.359		



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de _____ de 195__

Escala métricas e funcionais

- 1) Escala - Linha contada transversalmente a espaços regulares, por pequenos traços aos quais correspondem números crescentes ou decrescentes chamados "cotas"

Cada traço individualiza um ponto de linha, caracterizado por sua "cota", a qual determina a distancia do ponto à origem.

- 2) Suposte - A linha que constitui a escala.
- 3) Passo (intervalo) - distancia medida na linha (ou no suporte) e expressa em unidades de comprimento, entre dois traços consecutivos (i)
- 4) Segraim - diferença entre cotas correspondentes a dois traços consecutivos ou a um intervalo (d).

Escala $\left\{ \begin{array}{l} \text{métricas} \\ \text{funcionais} \end{array} \right.$

Métricas - as cotas (u_i) são proporcionais às distancias (t_i)

$$\frac{u_1}{t_1} = \frac{u_2}{t_2} = \dots = k$$

$$\frac{u_j}{t_j} = k \Rightarrow t_j = \frac{u_j}{k}$$

$$\frac{u_i}{d} = k \Rightarrow d = \frac{u_i}{k}$$

(módulo) $t_j = \frac{u_j}{k}$



Papel

Curitiba, de de 195.....

Funcionais - as ~~cotas~~ distâncias (t) são proporci-
onais a funções (y) das cotas (c)

$$\frac{y_1}{t_1} = \frac{y_2}{t_2} = k \rightarrow \frac{d'}{i} = k$$

$$\frac{t_k}{y_k} = \frac{t_j}{y_j} = m$$

$$t_j = \frac{y_j}{k}$$

$$\frac{i}{d} = m \rightarrow \left| \frac{t_k}{y_k} = m \right|$$

r

$i = l$ cm (comprimento disponível)

$d = u_n - u_0$ (variação máxima entre cotas)

$$\frac{i}{d} = \frac{l}{u_n - u_0} = \underline{m} \left(\frac{\text{cm}}{\text{var}} \right) \rightarrow t_j = u_j \cdot m$$

r

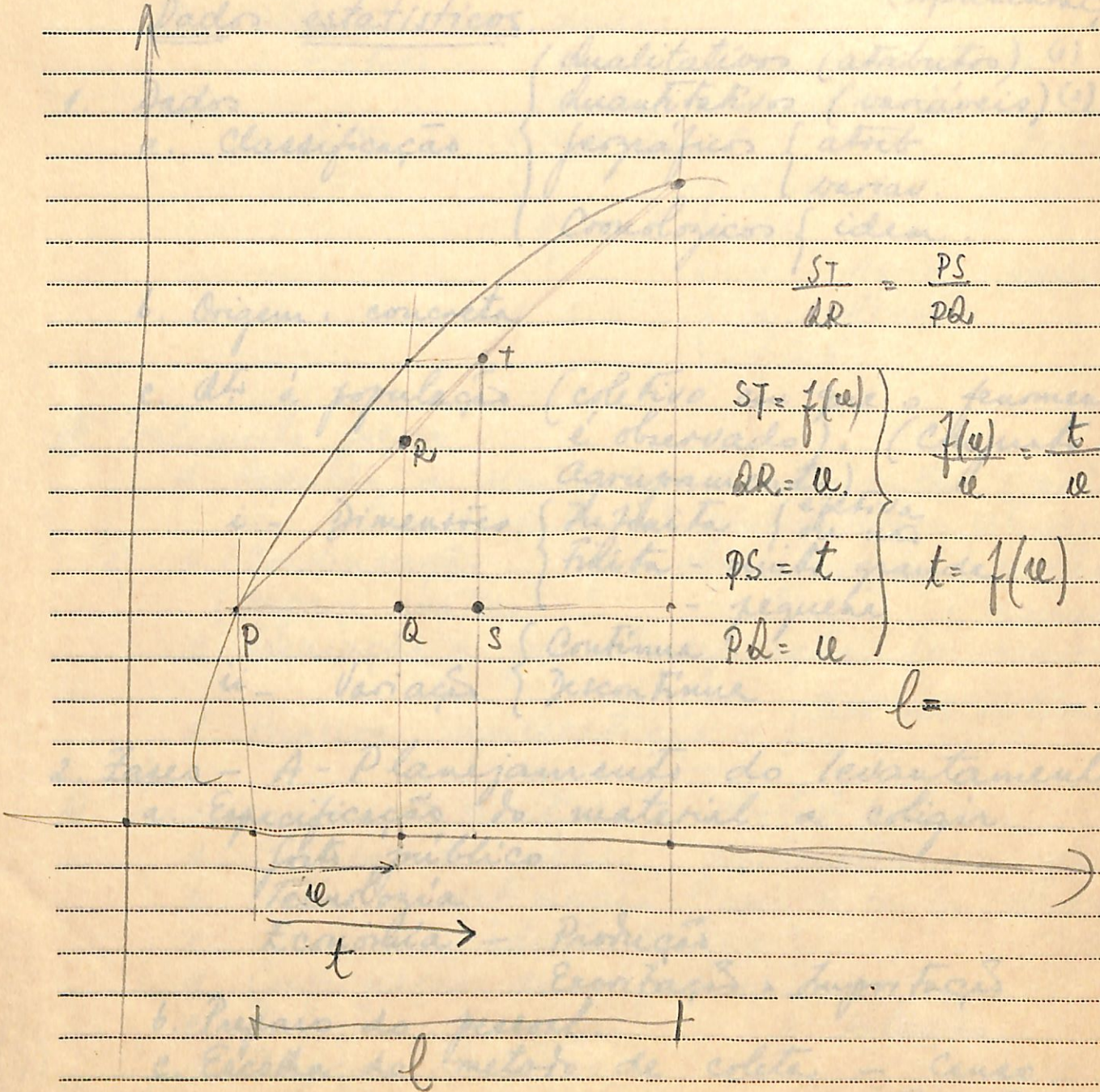


ESTÁDO DO PARANÁ

M

Memorandum

Curitiba, de de 195.....



$$\frac{ST}{AR} = \frac{PS}{PR}$$

$$\left. \begin{array}{l} ST = f(u) \\ AR = u \end{array} \right\} \frac{f(u)}{u} = \frac{t}{u}$$

$$\left. \begin{array}{l} PS = t \\ PR = u \end{array} \right\} t = f(u)$$

$$l =$$



Memorandum

Curitiba, de

{ Trat.º por
humanização
de 196
Apresentação

Dados estatísticos

1. Dados

a. Classificação

- { Qualitativos (atributos) (1)
- { Quantitativos (variáveis) (2)
- { Espaciais { atrib.
- { variav.
- { Cronológicos { idem.

b. Origem: concreta

c. Ref. à população (coletivo em que o fenômeno é observado). (Conjuntos ou agrupamentos)

- i - Dimensões { Infinita { efetiva
- { Finita - muito grande
- { - pequena

- ii - Variação { Contínua
- { Descontínua

2. Fases - A - Planejamento do levantamento

a. Especificação do material a coligir

fontes públicas
Tecnologia

Economia - Produção

Exportações e Importações

b. Preparo do pessoal

c. Escolha do método de coleta - Censo

Amostragem
Mixta.



ESTÁDO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, _____ de _____ de 195__

B. Obtenção dos dados (3)

1. Método - Censo - demora - custos
Amostragem - aleatoriedade

2. Fontes -

{	Individual	}	Primário		
	{		Oficial	}	Secundário
			IBGE		
			Mín. Faz.		
			" Agric.		
" Piaçã					
F.G.V.					

C. Tratamento prévio -

a. Redução a unidades convenientes (pode já estar executado) - sobretudo se forem heterogêneas

(A) b. Condensação - por classificação { mecânica
(preparo cartões) } manual

c. Separação - por classificações (se necessário)

d. Primeira apresentação - { Para uso intermediário
ou final.

(5)

D. Sumarização e análise Probabilidades

a. Cálculo de médias, parâmetros em geral

b. Teoria de estimações } Fixação de limites (val. prov.)

c. " de indução } experiência estat.

d. Confirmação de hipóteses

e. Projeções

f. Números índices

g. Relações

(6)

E. Apresentação Analítica
Gráfica

Anexo. Fore

Forma de apres. os qual



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, _____ de _____ de 195_____

Base para um estudo de alteração do programa.

1. Introdução. Inclusive recapitulação
2. Dados estatísticos.
3. Atributos
4. Probabilidades
5. Frequências. Classificações. Distribuições
6. Parâmetros das distribuições
7. Indução.
8. Testes estatísticos.



ESTÁDO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

ATRIBUTOS

1. Introdução

2. Relações entre as classes

3. Conjuntos fundamental de classes: positiva

$$(A) = (A) - (B) = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot (A) - (AB) = 2 \cdot \frac{1}{2} - (AB)$$

$$1 - (AB)$$

$$1) (ABC) = (AB) + (BC) + (AC) - (A) - (B) - (C) + \pi =$$

$$(A) + (B) + (C) - \pi - (AB) - (BC) - (AC) =$$

$$(AC) = -0,55(1/6)$$

$$2) (2 \cdot AC) = 2 \cdot (AC) = (AB) + (BC) + (AC) - (A) =$$

$$(A) + (B) - (AB)$$

$$\frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$3) (x \cdot AC) = 2 \cdot (AC) + (AB) + (BC) = 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$$

$$(AC) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



ESTÁDO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Dados incompletos

Obtém-se os limites dentro dos quais deve ficar situada a frequência de uma classe positiva (ou negativa) qualquer, observadas simultaneamente as condições convenientes de consistência.

Exemplo:

$$(A) - (B) - (C) = N/2$$
$$0.80(A) = (AB) \quad 0.75(A) = (AC) \quad \text{Fixar os limites para } (BC).$$

$$1) (ABC) \underset{0 \leq}{=} (AB) + (AC) + (BC) - (A) - (B) - (C) + N \rightarrow$$

$$(A) + (B) + (C) - N - (AB) - (AC) \leq (BC) \rightarrow$$

$$(BC) \geq -0.55(N/2)$$

$$2) (\alpha \beta C) \geq 0 \rightarrow (ABC) \geq (AB) + (BC) - (B) \geq 0 \rightarrow$$

$$(BC) \geq (B) - (AB)$$
$$\geq N/2 - 0.80 N/2$$
$$\geq 0.2(N/2)$$

$$3) (\alpha \beta C) \geq 0 \rightarrow (AC) + (BC) - (C) \geq 0 \rightarrow$$

$$(BC) \geq (C) - (AC)$$
$$\geq N/2 - 0.75 N/2$$
$$\geq 0.25(N/2)$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

4) Devendo ser, de acordo com 1):

$$(ABC) \leq (AB) + (AC) + (BC) - (A) - (B) - (C) + N$$

e como	{	$(ABC) \leq (AB)$	de	$(AB) \geq 0$
		$(ABC) \leq (AC)$	de	$(AC) \geq 0$
		$(ABC) \leq (BC)$	de	$(BC) \geq 0$

resultam: 4') $(AB) \leq (AB) + (AC) + (BC) - N/2$

ou

$$(AC) + (BC) \geq N/2$$

$$(BC) \geq N/2 - 0.75 N/2$$

$$\geq 0.25 N/2$$

4'') $(AC) \leq (AB) + (AC) + (BC) - N/2$

$$(AB) + (BC) \geq N/2$$

$$(BC) \geq 0.20 N/2$$

4''') $(BC) \geq (AB) + (AC) - (A)$
 $\geq 0.05 N/2$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

(BC)

Blank lined area for writing the memorandum content.



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

$$(\alpha\beta) = (1-A)(1-B)N = N - (A) - (B) + (AB)$$

$$N - (A) - (B) + (AB) \geq 0$$

leve ficar
qualquer,
ções de

$$\begin{aligned} (BC) &\geq (AB) + (AC) - (A) \\ &\geq 1.55 - 1 \geq 0.55 \quad N/2 \end{aligned} \quad \Bigg| -$$

$$\geq (AB) \quad (AC) - (B)$$

$$(\alpha\beta) \geq 0 \rightarrow \frac{(AC)}{0.75} \geq \frac{(AC)}{0.80} + (AC) -$$

$$(AB) \geq 0 \rightarrow (DB) + (AC) - (A) \leq (BC)$$

$$(BC) \geq 1.05$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Dados incompletos.

Obtem-se os limites dentro dos quais deve ficar situada a frequência de uma classe positiva qualquer, observadas simultaneamente todas as condições de consistência.

$$(A) = (B) = (C) = N/2$$

$$0.8(A) = (AB)$$

$$0.75(A) = (AC)$$

fixar os limites para (BC)

$$1) \quad (BC) \geq (A) + (B) + (C) - (AB) - (AC) + N \rightarrow$$
$$\geq 3N/2 - 1,55N/2 - N$$

$$\geq \frac{3N - 3,55N}{2} = -0,55(N/2) \quad (B) - 0,55(B)$$

$$2) \quad (BC) \leq (A) \rightarrow (BC) \leq N/2 = 1$$

$$3) \quad (BC) \leq (C) \rightarrow (BC) \leq N/2 = 1$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

ASSOCIAÇÃO DE ATRIBUTOS Independência

Hipótese: Não há relação entre A e B.

Conseq. :
$$\left[\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\bar{B})}{(\bar{B})} \right] \quad (1)$$

Definição: A e B são independentes.

De (1) Resultam :

$$(2) \quad \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\bar{B})}{(\bar{B})} \rightarrow \frac{(B) - (AB)}{(B)} = \frac{(B) - (A\bar{B})}{(B)}$$

$$\rightarrow \left[\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\bar{B})}{(\bar{B})} \right]$$

$$(3) \quad \frac{(AB)}{(A)} = \frac{(A\bar{B})}{(\bar{A})} \quad \text{etc.}$$

e mais, sendo
$$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\bar{B})}{(\bar{B})} \Rightarrow \frac{(AB) + (A\bar{B})}{(B) + (\bar{B})} = \frac{(AB)}{(B)}$$

ou
$$\frac{(A)}{N} = \frac{(AB)}{(B)} \rightarrow (AB) = \frac{(A)(B)}{N}$$

ou
$$\frac{(AB)}{N} = \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(B)}{N}$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195

ASSOCIAÇÃO DE ATRIBUTOS
Independência

Hipótese: Não há relação entre A e B.

Conseq.
$$\left[\frac{(AB)}{(B)} - \frac{(A\bar{B})}{(B)} \right] \quad (1)$$

Definição: A e B são independentes.

De (1) resultam:

$$(2) \quad \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\bar{B})}{(B)} \rightarrow \frac{(B) - (AB)}{(B)} = \frac{(B) - (A\bar{B})}{(B)}$$

$$\rightarrow \left[\frac{(AB)}{(B)} - \frac{(A\bar{B})}{(B)} \right]$$

$$(3) \quad \frac{(AB)}{(A)} = \frac{(A\bar{B})}{(A)} \quad \text{etc.}$$

e mais, sendo $\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\bar{B})}{(B)} \Rightarrow \frac{(AB) + (A\bar{B})}{(B) + (B)} = \frac{(AB)}{(B)}$

$$\text{ou } \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(AB)}{(B)} \rightarrow \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A)}{N} \cdot (B)$$

$$\text{ou } \frac{(AB)}{N} = \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(B)}{N}$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Independência

$$(1) \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(AB)}{(\beta)}$$

$$\frac{(B) - (AB)}{(B)} = \frac{(\beta) - (AB)}{(\beta)}$$

$$(2) \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\beta)}$$

$$(3) \frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha)}$$

$$(4) \frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha)}$$

$$\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(AB)}{(\beta)} \rightarrow \frac{(AB) + (A\beta)}{(B) + (\beta)} = \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A)}{(N)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)}$$

$$\text{Int e: } \frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A)}{N} \quad \therefore \rightarrow \frac{(AB)}{(A)} = \frac{(B)}{N}$$

$$(3) (AB) = \frac{(A) \cdot (B)}{N} \rightarrow \frac{(AB)}{N} = \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(B)}{N} \quad (A)$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Das relações obtidas resultam:

$$(A\beta) = \frac{(A)(\beta)}{N} \quad (\alpha B) = \frac{(\alpha)(B)}{N} \quad (\alpha\beta) = \frac{(\alpha)(\beta)}{N}$$

Com efeito, sendo

$$1) (AB) = \frac{(A)(B)}{N} \quad e \quad (AB) + (A\beta) = (A) \rightarrow$$

$$(A\beta) = (A) - (AB) \quad ou:$$

$$(A\beta) = (A) - \frac{(A)(B)}{N}, \quad isto \acute{e}:$$

$$= \frac{(A)}{N} [N - (B)] = \frac{(A)(\beta)}{N} \quad \text{donde}$$

$$(A\beta) = \frac{(A)(\beta)}{N} \quad \text{cqd.}$$

$$2) (\alpha B) + (AB) = (B) \rightarrow$$

$$(\alpha B) = (B) - (AB) = \frac{N}{N} (B) - \frac{(A)(B)}{N}$$

$$= \frac{(B)}{N} [N - (A)] = \frac{(B)(\alpha)}{N}$$

$$(\alpha B) = \frac{(\alpha)(B)}{N} \quad \text{cqd.}$$

logo:

etc.



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Quadro geral.

	B	β	
A	$\frac{(A) \cdot (B)}{N}$	$\frac{(A) \cdot (\beta)}{N}$	(A)
α	$\frac{(\alpha) \cdot (B)}{N}$	$\frac{(\alpha) \cdot (\beta)}{N}$	(α)
	(B)	(β)	N

Outra forma de exprimir a independência.

$$\frac{(AB)}{N} = \frac{(A)(B)}{N} \quad (\alpha\beta) = \frac{(\alpha) \cdot (\beta)}{N}$$

$$(AB) \cdot (\alpha\beta) = \frac{(A)(B)(\alpha)(\beta)}{N^2}$$

$$\frac{(A\beta)}{N} = \frac{(A) \cdot (\beta)}{N} \quad (\alpha B) = \frac{(\alpha) \cdot (B)}{N}$$

$$(A\beta) \cdot (\alpha B) = \frac{(A) \cdot (\beta) \cdot (\alpha) \cdot (B)}{N^2} \rightarrow$$

$$(AB) \cdot (\alpha\beta) = (A\beta) \cdot (\alpha B) \rightarrow \frac{(AB)}{(\alpha B)} = \frac{(A\beta)}{(\alpha\beta)}$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Associação

$(AB) > \frac{(A)(B)}{N}$ positiva ou associação

$(AB) < \frac{(A)(B)}{N}$ negativa ou dissociação



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Sendo:

$$1 \quad (ABC) \geq 0$$

$$2 \quad \cdot \geq (AB) + (AC) - (A) \cdot$$

$$3 \quad \cdot \geq (AB) + (BC) - (B) \cdot$$

$$4 \quad \cdot \geq (AC) + (BC) - (C) \cdot$$

175

$$5 \quad (ABC) \leq (AB)$$

$$6 \quad \leq (AC) \cdot$$

$$7 \quad \leq (BC) \cdot$$

$$8 \quad \leq (AB) + (AC) + (BC) - (A) - (B) - (C) + N$$

Resultam:

de (1) e (8) I $(AB) + (AC) + (BC) \geq (A) + (B) + (C) - N$

de (2) e (7) II $(AB) + (AC) - (BC) \leq (A)$

de (3) e (6) III $(AB) + (BC) - (AC) \leq (B)$

de (4) e (5) IV $-(AB) + (AC) + (BC) \leq (C)$

Se: $(A) = (B) = (C) = N/2$ $(AC) = 0.75 (A)$ $(AB) = 0.80 (A)$

$$I \rightarrow (BC) \geq \frac{1}{2} N - \frac{1}{2} N - 1.55 \frac{N}{2} = - \boxed{0.55 \frac{N}{2}}$$

$$II \rightarrow (BC) \geq (AB) + (AC) - (A) \rightarrow \geq 1.55 - 0.50 = \boxed{1.05 \frac{N}{2}}$$

$$III \rightarrow (BC) \leq (BC) + (B) - (AB) \rightarrow \geq 1.0 + 0.75 - 0.80 = \boxed{0.95 \frac{N}{2}}$$

$$IV \rightarrow (BC) \leq (C) + (AB) - (AC) \rightarrow \geq 1 + 0.8 - 0.75 = \boxed{1.05 \frac{N}{2}}$$



ESTÁDO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, _____ de _____ de 195_____

	A	α	
B	$\frac{20}{70}$	$\frac{30}{0}$	$70 = (B)$
β	$\frac{70}{20}$	$\frac{0}{30}$	$70 = (\beta)$
	$70 = (A)$	$30 = (\alpha)$	100

$$(AB) \geq 0$$

$$(AB) \geq (A) + (B) - N \quad 70 + 70 - 100 = 20$$

$$(AB) \leq (A) \quad (AB) \leq (B) \quad (AB) \leq 70 \quad (AB) \leq 70$$

$$20 \leq (AB) \leq 70$$



ESTÁDO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

$$(AB)_0 = \frac{(A) \cdot (B)}{N}$$

$$\delta = (AB) - (AB)_0$$

	B	b	
A	$(AB)_0 + \delta$	$(AB)_0 - \delta$	(A)
a	$(aB)_0 - \delta$	$(aB)_0 + \delta$	(a)
	(B)	(b)	N

ora: $\delta = (AB) - (AB)_0 =$

$$= (AB) - \frac{(A)(B)}{N} = (AB) - \frac{[(AB) + (aB)] [(AB) + (aB)]}{N}$$

$$= (AB) - \frac{(AB) \cdot (AB) + (AB) \cdot (aB) + (aB) \cdot (AB) + (aB) \cdot (aB)}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ (AB) [N - (aB) - (AB) - (aB)] \right\} - \frac{(aB)(aB)}{N}$$

$$\delta = \frac{1}{N} \left[(AB) \cdot (aB) - (aB) \cdot (AB) \right]$$

δ é o número que permite a medida da intensidade da associação.



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Coefficiente de associação

$$d = \frac{\delta}{(rA)(\alpha\beta) + (r\beta)(\alpha B)}$$

Associações parciais

$$(ABC) \leq \frac{(rC)(BC)}{(c)} \quad (\text{associação entre } r \text{ e } B \text{ em } c)$$

$$(ACD) \geq \frac{(rC)(BCD)}{(cD)} \quad (\text{associação entre } r \text{ e } B \text{ em } cD)$$

$$\text{Se } (rB, c) = \frac{(rC)(BC)}{c} \rightarrow (rB, c)_0$$

$$(rB, cD) = \frac{(rC)(BCD)}{(cD)} \rightarrow (rB, cD)_0$$

Vale a mesma definição para δ :

$$\delta' = (rAC) - (rB, c)_0 =$$

$$\delta'' = (rACD) - (rB, cD)_0$$



ESTADO DO PARANÁ

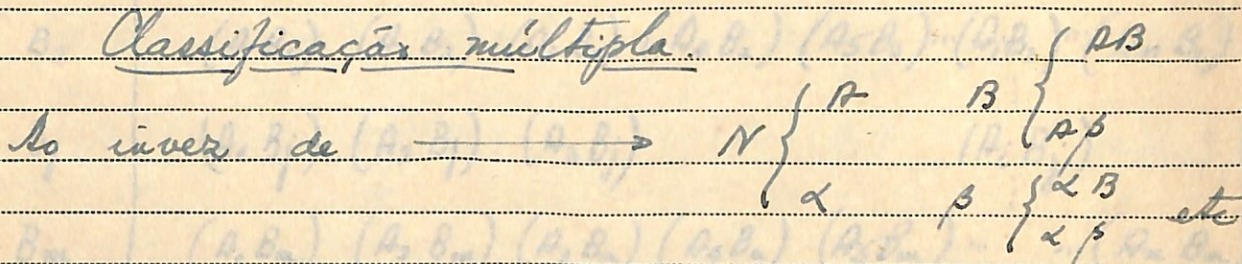
Memorandum

Curitiba, _____ de _____ de 195_____

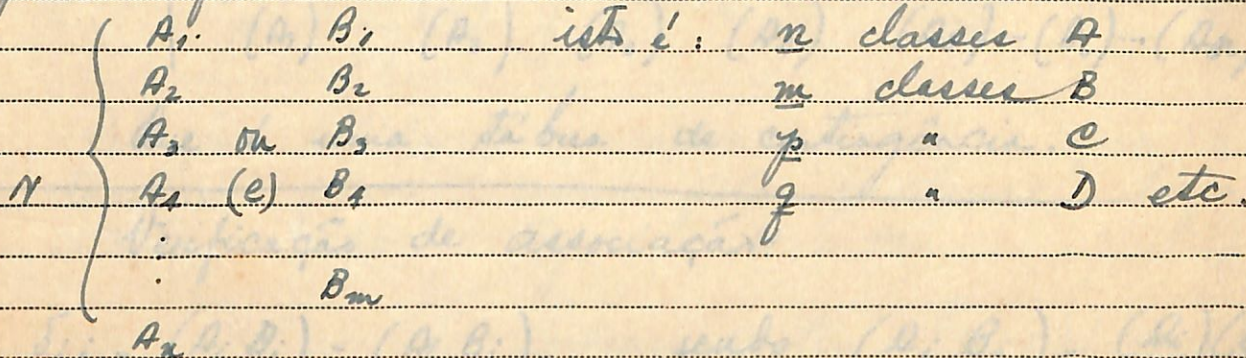
Coefficiente de contingência quadrática:

$$\chi^2 = \frac{S^2}{(AB)_0}$$

Classificação múltipla



podemos fazer:



Número de classes:

a) últimas: $n \times m \times p \times q \dots$

b) totais: $(n+1)(m+1)(p+1)(q+1) \dots$

Consistência: $(A_i B_j C_k D_s \dots) \leq 0$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Caso prático A_i e B_j

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...	A_i	...	A_n	
B_1	$(A_1 B_1)$	$(A_2 B_1)$	$(A_3 B_1)$	$(A_4 B_1)$	$(A_5 B_1)$...	$(A_i B_1)$...	$(A_n B_1)$	(B_1)
B_2	$(A_1 B_2)$	$(A_2 B_2)$	$(A_3 B_2)$	$(A_4 B_2)$	$(A_5 B_2)$...	$(A_i B_2)$...	$(A_n B_2)$	(B_2)
B_j	$(A_1 B_j)$	$(A_2 B_j)$	$(A_3 B_j)$				$(A_i B_j)$			(B_j)
B_m	$(A_1 B_m)$	$(A_2 B_m)$	$(A_3 B_m)$	$(A_4 B_m)$	$(A_5 B_m)$	$(A_n B_m)$	(B_m)
	(A_1)	(A_2)	(A_3)	(A_4)	(A_5)	...	(A_i)	...	(A_n)	N

Que é uma tabela de contingência.

Verificação de associação:

$$\delta_{ij} = (A_i B_j) - (A_i B_j)_0 \quad \text{sendo} \quad (A_i B_j)_0 = \frac{(A_i)(B_j)}{N}$$

Propriedades dos números δ_{ij} :

a) $\delta_{ij} \neq \delta_{ji}$ ($A_j \neq A_i$) e ($B_j \neq B_i$)

b) não são independentes algebricamente:

$$\delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3} + \dots + \delta_{ij} + \dots + \delta_{in} =$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, _____ de _____ de 195_____

$$\begin{aligned} &= \frac{(A_i B_1)}{N} - \frac{(A_i)(B_1)}{N} + \frac{(A_i B_2)}{N} - \frac{(A_i)(B_2)}{N} + \dots \\ &+ \frac{(A_i B_j)}{N} - \frac{(A_i)(B_j)}{N} + \dots + \frac{(A_i B_m)}{N} - \frac{(A_i)(B_m)}{N} \\ &= (A_i B_1) + (A_i B_2) + (A_i B_3) + \dots + (A_i B_j) + \dots + (A_i B_m) - \\ &- \left[\frac{(A_i)(B_1)}{N} + \frac{(A_i)(B_2)}{N} + \dots + \frac{(A_i)(B_j)}{N} + \dots + \frac{(A_i)(B_m)}{N} \right] \\ &= (A_i) - \frac{(A_i)}{N} \left[\sum_{j=1}^m (B_j) \right] = (A_i) - \frac{(A_i)}{N} N = 0 \end{aligned}$$

Relação válida para uma coluna e que é também para uma fila qualquer, logo:
números de δ_{ij} : $n \times m$

" " δ_{ij} independentes: $(n-1)(m-1)$

Coefficiente de contingência média quadrática geral:

$$\chi^2 = \sum \left[\frac{\delta_{ij}^2}{(A_i B_j)_0} \right]$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

A₁ A₂ A₃B₁ 11 / 21 / 31 / 40B₂ 12 / 22 / 32 / 30B₃ 13 / 23 / 33 30

10 20 10 100

Dados

$$\delta_{11} = 5 \quad \delta_{12} = 3$$

$$\delta_{21} = 7 \quad \delta_{22} = 2$$

$$\delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{31} = 0 \rightarrow \delta_{31} = -12$$

$$\delta_{12} + \delta_{22} + \delta_{32} = 0 \rightarrow \delta_{32} = -5$$

$$\delta_{13} + \delta_{23} + \delta_{33} = 0 \rightarrow \delta_{33} = 17$$

" " " "

$$\delta_{11} = (A_1 B_1) - \frac{(A_1)(B_1)}{N} \rightarrow (A_1 B_1) = \frac{(A_1)(B_1)}{N} + \delta_{11} = \frac{20 \times 50}{100} + 5 = 25$$

$$\delta_{12} = (A_1 B_2) - \frac{(A_1)(B_2)}{N} \rightarrow (A_1 B_2) = \frac{50 \times 30}{100} + 3 = 18$$

$$\delta_{13} = (A_1 B_3) - \frac{(A_1)(B_3)}{N} \rightarrow (A_1 B_3) = \frac{50 \times 30}{100} - 8 = 9$$

Pechem-se as

$$(A_i B_j) = ?$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195

Sistemas de classificação

- a) Extensão da classificação por atributos à classificação por variáveis por meio das ~~tabelas~~ ~~de contingência~~ classificações múltiplas.
- b) Classificação de uma tabela de contingência:
 1. manual
 2. mecânica
- c) Classificação por variáveis: fixação dos intervalos. Problemas.

Exemplos a uma e a duas dimensões.



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Probabilidade

Acontecimentos {

 Exaustivos { *um grupo inclui todos os possíveis* A_i

 Mutuamente { *um exclui o outro* } A e B

 exclusões { *ou (e) vice-versa* }

Populações {

 Combinados {

 Sucessivos - lançadas de uma mesma moeda { *peças sucessivas em fabricação*

 Simultâneos - A e B

Seja um grupo de N elementos em que se vai observar um atributo A e seja (A) a frequência desse atributo na população e mais $h = \frac{(A)}{N}$ sua

frequência relativa.

Em repetidas experiências realizadas para medir (A) e h , os seus valores podem diferir. Diz-se então que (A) e h são duas variáveis "aleatórias" ou "estocásticas" (alieu = sorte, acaso)

Para séries de valores de N , teremos valores diferentes $(A)_i$ para a frequência do atributo e também para h_i . Tanto $(A)_i$ como h_i tendem a agrupar-se em torno de um valor central, o qual depende de N .

(v. exemplos)

Demons-se probabilidade de ocorrência do aconteci-



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, _____ de _____ de 195_____

mentos (ou atributos) A , os valores limite de relação
 $h_i = \frac{(A)_i}{N}$ ou o valor em termos do qual oscilam
 $N \rightarrow \infty$ N

as proporções h_i . (h_i é ponto de acumulação)

de acordo com essa definição $\rightarrow 0 \leq p \leq 1$.

Propriedades das distribuições

População brasileira em 1950 - (mais de 15 as)

Homens 14.924 (A)

Mulheres 15.325

30.249

Sabem ler 12.100 (B)

Não " " 18.149

Homens que sabem ler - (AB) = 8.164

	A	α	
B	8.164	3.936	12.100
β	6.760	13.389	18.149
	14.924	15.325	30.249



ESTADO DO PARANÁ

M.

Memorandum

Curitiba, _____ de _____ de 195_____

mentos (ou atributos) A , ao valor limite de relação
 $h_i = \frac{(A)_i}{N}$ ou o valor em torno do qual oscilam
 $N \rightarrow \infty$ N

as proporções h_i . (h_i é ponto de acumulação)

de acordo com essa definição $\rightarrow 0 \leq \beta \leq 1$.

Propriedades das distribuições

População brasileira em 1950 - (mais de 15 as)

Homens 14.924 (A)

Mulheres 15.325

30.249

Sabem ler 12.100 (B)

Não " " 18.149

Homens que sabem ler - (AB) = 8.164

	A	α	
B	8.164	3.936	12.100
β	6.760	13.389	18.149
	14.924	15.325	30.249



ESTADO DO PARANÁ

M

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Disso resultam os seguintes quadros:

(A) Distr. condic. de acf of instruçã
Homens ↓ Mulheres

(B)	Homens	Mulheres	
Sabem ler	54.7	25.7	40.0
Não sabem	45.3	74.3	60.0
	100	100	100

Distr. condic. de acf of sexo

(B)	(A) Homens	Mulheres	
Sabem ler	67.4	32.6	100
Não sabem	37.3	62.7	100
	49.4	10.6	100

$$49.4 \times 54.7 = 27.0\%$$

$$27.0 = L(AB) \quad 54.7 = L(B/A) \quad 49.4 = L(A)$$

$$67.4 = L(A/B)$$

$$\left. \begin{aligned} L(AB) &= L(A) \cdot L(B/A) = 49.4 \times 54.7 \\ &= L(B) \cdot L(A/B) = 40 \times 67.4 \end{aligned} \right\} = 27.0\%$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Caso genérico

	A	α	
β	a_1	a_2	$a_1 + a_2$
β	a_3	(a_2)	$a_3 + a_1$
	$(a_1 + a_3)$	$a_2 + a_1$	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = N$

Sejam: $AB, A\beta, \alpha B, \alpha\beta =$ acontec. combinados $(A \text{ e } B)$

$A+B$ ocorrência de ao menos um $(A \text{ e } B)$
della

$A+B$ - A ou B ocorre, incluindo o caso de ocorrência simultânea

A/B ocorre A tendo ocorrido B.

$$\text{Então: } h(A) = \frac{a_1 + a_3}{N} \quad h(B) = \frac{a_1 + a_2}{N}$$

$$h(AB) = \frac{a_1}{N} \quad h(\alpha\beta) = \frac{a_2}{N}$$

$$h(A+B) = h(A\beta) + h(\alpha B) = \frac{a_3 + a_2}{N}$$

$$h(A+B) = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{N}$$

e mais: $h(A) + h(\alpha) = 1$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Axiomas:

1. $0 \leq p \leq 1$
2. $p = 1$ o acontecimento é certo
3. $p = 0$ o é impossível
4. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Prob. de que ao menos um dos acontecimentos ocorra é igual à soma das probabilidades de cada um, menos a probabilidade do acf combinado

5. A probabilidade de ocorrência de combinação de dois acontec. é igual à prob. de um, multiplicada pela prob. condicional do outro tendo o primeiro ocorrido.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) \\ - P(B) \cdot P(A/B)$$

Numa serie, um acontecimento ocorre com uma frequência relativa que pouco difere de sua probabilidade (praticamente igual).



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de

de 195.....

Extensões dos axiomas:

$$P(A \dot{+} B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Se $P(AB) = 0$ (mutuamente exclusivos)

$$P(A \dot{+} B) = P(A) + P(B) = P(A + B)$$

sendo A e α exaustivos:

$$P(A + \alpha) = P(A) + P(\alpha) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(\alpha)$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\beta) \quad (\text{probabilid. marginais})$$

Probabilidade de ao menos um dos acontecimentos A e B : $P(A \dot{+} B) = 1 - P(\alpha\beta)$

$$P(A \dot{+} B \dot{+} C) = P[A \dot{+} (B \dot{+} C)] = P(A) + P(B \dot{+} C) - P[A \cdot (B \dot{+} C)]$$

$$\text{Como } P[A \cdot (B \dot{+} C)] = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$

$$P(A \dot{+} B \dot{+} C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$



ESTADO DO PARANÁ

M. 017

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

$$\text{Se } P(AB) = P(AC) = P(BC) = \dots = 0$$

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

em geral:

$$P(A+B+C+\dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots$$

em particular, se: $\underbrace{P(A) = P(B) = P(C) = \dots = P}_n$

$$P(A+B+C+\dots) = nP = 1$$

$$\rightarrow P = \frac{1}{n}$$

$$P = \frac{k}{n}$$



Memorandum

Curitiba, de de 195.....

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$= P(B) \cdot P(A/B) \quad \text{ou}$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{e} \quad P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Se $P(A/B) = P(A/\beta)$ (independentes estocasticamente)

$$P(A/B) = P(A/\beta) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B/\alpha) = P(B)$$

e

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

em particular

$$P(A, B, C, D, \dots) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot P(D/ABC) \dots$$

Se há independência:

$$P(A, B, C, D, \dots) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \dots$$



ESTADO DO PARANÁ

Memorandum

Curitiba, de de 195.....

Distribuição de freqüências.

Atributo → classificação múltipla - distribuições de freqüências (classificações, variáveis)

Consistência. Compatibilidade entre as frequências das várias classes.

Condições que exprimem a consistência: Todas as classes devem ser ≥ 0 . Ou, o que é v. 1) verso a mesma coisa Todas as últimas classes devem ser positivas ou nulas.

Casos: 1) Dois atributos -

a) classes últimas: (AB) $(A\beta)$ (αB) $(\alpha\beta)$

b) condições:

$$(AB) \geq 0 \text{ como } (A) = (AB) + (A\beta) \text{ e}$$

$$(B) = (AB) + (\alpha B) \text{ resulta}$$

$$(AB) \leq (A) \text{ e } (AB) \leq (B)$$

$$(A\beta) \leq (A) \quad (\alpha B) \leq (B) \text{ etc.}$$

c) Em geral: (v. 2 verso)

$$(AB) \geq 0 \rightarrow (AB) \leq (A)$$

$$(\alpha B) \geq 0 \rightarrow (AB) \leq (B)$$

$$(\alpha\beta) \geq 0 \rightarrow (AB) \geq (A) + (B) - N$$

2) Três atributos.

a) classes últimas: (ABC) $(AB\gamma)$ (αBC) $(\alpha\beta\gamma)$
 $(\alpha\beta C)$ $(\alpha\beta\gamma)$ $(\alpha\beta\gamma)$ $(\alpha\beta\gamma)$

b) Condições:

$$(ABC) \geq 0$$

$$(AB\gamma) \geq 0 \rightarrow (ABC) \leq (AB)$$

$$(A\beta C) \geq 0 \rightarrow (ABC) \leq (AC)$$

$$(\alpha BC) \geq 0 \rightarrow (ABC) \leq (BC)$$

Conjuntos fundamental de classes: clas. positivas.

- Prop.: 1) Algebricamente independentes
 2) Não são funções inteiramente das demais
 3) seu número é 2^n

Seja: (ABC) $(AB\gamma)$ $(A\beta C)$ $(\alpha\beta\gamma)$ $(\alpha\beta C)$ $(\alpha\beta\gamma)$
 $(\alpha\beta C)$ $(\alpha\beta\gamma)$ \rightarrow
 (ABC) (AB) (AC) (BC) (A) (B) (C) e N

Tratamento algébrico.

$$(A) = N \cdot A \rightarrow (\alpha) = N \cdot \alpha$$

$$(A) + (\alpha) = N \cdot A + N \cdot \alpha = N \rightarrow \begin{cases} A + \alpha = 1 \\ \alpha = 1 - A \end{cases}$$

$$\alpha = N(1 - A)$$

Analogamente:

$$(AB) = A \cdot (B) = B \cdot (A) = N \cdot AB \text{ resulta:}$$

$$(\alpha\beta) = \alpha \cdot \beta \cdot N = (1 - A)(1 - B)N =$$

$$= (1 + AB - A - B)N =$$

$$= N + (AB) - (A) - (B)$$

$$(\alpha\beta\gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot N = (1 - A)(1 - B)(1 - C) \cdot N =$$

$$= (1 - A - B - C + AB + AC + BC - ABC)N$$

$$= N - (A) - (B) - (C) + (AB) + (AC) + (BC) - (ABC)$$

1

$$\begin{aligned}
 (ABC) + (AB\bar{C}) - (AB) &\geq 0 \\
 &\geq 0 \quad \geq 0 \\
 (AB) + (A\bar{B}) - (A) &\geq 0 \\
 &\geq 0 \quad \geq 0
 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
 (\alpha B) &\geq 0 \rightarrow \\
 (\alpha B) &= (1-A) \cdot B \cdot N = (B) - (AB) \\
 (B) - (AB) &\geq 0 \rightarrow (B) \geq (AB) \\
 (A\bar{B}) &\geq 0 \\
 (A\bar{B}) &= A \cdot (1-B) \cdot N = (A) - (AB) \geq 0 \rightarrow (A) \geq (AB) \\
 (\alpha\beta) &\geq 0 \\
 (\alpha\beta) &= (1-A)(1-B)N = N - (A) - (B) + (AB) \\
 N - (A) - (B) + (AB) &\geq 0 \rightarrow \\
 (AB) &\geq (A) + (B) - N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A\beta\bar{\gamma}) \geq 0 &\rightarrow (ABC) \geq (AB) + (BC) - (A) \\
 (\alpha\beta C) \geq 0 &\rightarrow (ABC) \geq (AC) + (BC) - (C) \\
 (\alpha\beta\bar{\gamma}) \geq 0 &\rightarrow (ABC) \geq (AB) + (AC) - (B) \\
 (\alpha\beta\gamma) \geq 0 &\rightarrow (ABC) \leq (AB) + (AC) + (BC) - (A) - (B) - (C) + N
 \end{aligned}$$

Quanto q m^o maiores, etc