

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA**

Guilherme Luiz Minetto Fredo

**ANÁLISE DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DA FUNÇÃO  
DE PRODUÇÃO HIDRELÉTRICA NO PROBLEMA DE  
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA DE MÉDIO  
PRAZO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Sistemas de Energia  
Orientador: Prof. Dr. Erlon Cristian Finardi.

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fredo, Guilherme Luiz Minetto  
ANÁLISE DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DA FUNÇÃO DE  
PRODUÇÃO HIDRELÉTRICA NO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA  
OPERAÇÃO ENERGÉTICA DE MÉDIO PRAZO / Guilherme Luiz Minetto  
Fredo ; orientador, Erlon Cristian Finardi - Florianópolis,  
SC, 2016.  
158 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia Elétrica. 2. Função de Produção  
Hidrelétrica. 3. Convex Hull. 4. Programação Dinâmica Dual  
Estocástica. I. Finardi, Erlon Cristian. II. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica. III. Título.

**Guilherme Luiz Minetto Fredo**

**ANÁLISE DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DA FUNÇÃO  
DE PRODUÇÃO HIDRELÉTRICA NO PROBLEMA DE  
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA DE MÉDIO  
PRAZO**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Elétrica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Santa Catarina

**Florianópolis, 04 de Março de 2016.**

---

**Prof. Carlos Galup Montoro, Dr.**  
**Coordenador do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**

---

**Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.**  
**Orientador**

**Banca Examinadora:**

---

**Prof. André Luís Marques Marcato, D. Sc.**  
**Universidade Federal de Juiz de Fora**

---

**Prof. Fabrício Yutaka Kuwabata Takigawa, D. Eng.**  
**Instituto Federal de Santa Catarina**

---

**Vitor Luiz de Matos, D. Eng.**  
**Plan4 Engenharia**



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer meus pais (Leoni e Jair), pois eles me proporcionaram a oportunidade de estudar e chegar até aqui. Nessa lista também, posso incluir meus irmãos (Fábio e Alexandre) e a todos meus familiares em especial a Madrinha Ivani e a Tia Nena.

A todos os Professores da Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFSC, em especial aos da área de Sistemas de Energia pelos conhecimentos compartilhados.

Agradecimento especial ao meu Orientador o Professor Erlon Finardi, pela orientação e por passar seus conhecimentos. Aos meus amigos e colegas Paulo Larroyd, Murilo Scuzziato e Vitor Luiz de Matos por sempre estarem disposto a passar seus conhecimentos. Agradecer também pelas direções iniciais do trabalho ao Raphael Gonçalves.

Gostaria de agradecer aos membros da banca, D. Sc. André Luís Marcato, Dr. Fabricio Takigawa e Eng. Vitor de Matos, por aceitarem o convite para participar da minha defesa, e pelas sugestões para melhoria do nível do trabalho

Queria agradecer aos meus amigos de turma Rodolfo Calderon, Felipe Beltran, Brunno Brito e Carlos Ernani pelo apoio que de certa forma contribuiu para este trabalho. Aos demais amigos de laboratório, Daniel Tenfen, Rodolfo Bialeck, Paulo A., Marcelo Benetti., Andréz, Gabriel Bolacel., Bruno Remor., Ivo Costa, Pedro Cesar, Valmor Zimmer, Marco Delgado, Marcelo Cordova, Rafael Costa, Thales Lang, Carlos Ayola, Fábio Mantelli, Humberto Alencar, Cezar Vicentin, Bruno Gris, Kauana Palma, Braulio Soares, José Cesario, Guido Moraes, Sara Einsfeld, Edson, Ciro, Edwin, Pablo Galvis.

Por Fim, ao PPGEEL da UFSC, ao CNPQ e ao projeto de P&D SPARHTACUS.



## RESUMO

O problema do Planejamento da Operação Energética (POE) de sistemas hidrotérmicos visa obter uma política operativa que atenda a demanda com o mínimo custo considerando um horizonte de planejamento plurianual. Devido à uma série de complexidades, o POE é dividido em subproblemas (etapas) com distintos horizontes e modelagens problema. Independentemente da etapa, um aspecto crucial para que a política operativa seja de boa qualidade diz respeito à modelagem da Função de Produção Hidrelétrica (FPH). Assim, este trabalho foca na modelagem da FPH no âmbito do POE de médio prazo. Para reduzir o esforço computacional, historicamente o problema de médio prazo tem utilizado uma representação da FPH muito simplista, como por exemplo, o modelo a reservatório equivalente de energia ou ainda, no caso de sistemas de menor porte, uma FPH com produtividade constante (i.e., aquela que não leva em consideração a variação da queda na produção). Deste modo, este trabalho tem como objetivo inicial analisar os impactos de uma representação mais detalhada de FPH no problema do POE de médio prazo. Inicialmente constrói-se uma FPH não linear agregada para cada usina e, subsequentemente, apresentam-se duas maneiras de aproximá-la no problema. A primeira, mais detalhada, é uma função linear por partes, obtida por meio de um algoritmo de *Convex Hull* (CH). Uma análise do erro médio quadrático em função do número de hiperplanos e pontos utilizado no CH é apresentada. Por sua vez, a segunda modelagem é dada pela FPH com produtividade constante. Para avaliar o compromisso entre a qualidade da política e esforço computacional, para cada modelo de FPH, o problema inicialmente é otimizado via Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE). Nesta etapa, de maior esforço computacional, está disponível um *lower bound* para o custo ótimo da solução associada a árvore de cenários. Na sequência, as Funções de Custo Futuro (FCFs) da PDDE são utilizadas em uma simulação baseada em otimização em 2.000 cenários de aflúncias referentes a mesma árvore usada na otimização. Como resultado, tem-se um valor do custo de operação, bem como as políticas operativas. Para realizar as análises supracitadas, este trabalho faz uso de uma configuração hidrotérmica com 134 usinas hidrelétricas e 122 termelétricas. Os resultados indicam que a política operativa da FPH linear por partes é em média 13% melhor que a FPH com produtividade constante. Contudo, o esforço computacional é em média 14 vezes mais elevado. Com base nestes resultados, este trabalho apresenta ainda três heurísticas com o intuito de diminuir o tempo computacional quando a FPH é linear por partes. Em termos gerais, a

ideia básica consiste em manter o número de aproximações lineares como função de alguma medida de “importância” na usina com relação ao SIN. Uma das heurísticas obteve políticas com diferença média de 6% e redução de esforço computacional na ordem de 7 vezes em comparação com o modelo mais detalhado.

**Palavras-chave:** função de produção hidrelétrica, *Convex Hull*, modelo linear por partes, modelo com produtibilidade constante, Programação Dinâmica Dual Estocástica.

## ABSTRACT

The problem of Energetic Operation Planning (EOP) of hydrothermal systems consists in calculate operatives policy, in order that demand for electric energy is met at lowest cost in a planning horizon. Due a set of complexity, the EOP is separate in subproblems (steps) with different horizons and steps modeling. Independently of step, a crucial aspect for that operative policy become good it concerns a Hydroelectric Function Production (HFP) modeling. Thus, this dissertation focus on HPF modeling in EOP long term. To decrease the computational time, historically the long-term problem has been used a representation of HPF very simple, for instance, the Equivalent Energy Reservoir (EER), or yet, to small systems with production coefficient constant (i.e. that one does not take in account height variation in production). Thus, the first goal of this work is analyze impacts provides of HFP more detailed in a long term EOP. Initially, proposed a HFP nonlinear for each hydro plant and, after, is detailed two manners of approximation. The First one, is a piecewise function provides from Convex Hull (CH) algorithm. An analyses about mean square error in function of hyperplane number and points used in CH is showing. The second modeling is using production coefficient constant. To evaluate the tradeoff between policy quality and computational time, in each HFP model, the problem, first is optimized with Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP). In this step, of larger computational time, is available a lower bound to optimum cost of scenario tree. In next step, the future cost function (FCF's) of SDDP are used in a simulation based in optimize 2000 scenarios of outflow related with the shame tree used on optimization. As result, have an operational cost, as well the operatives politicians. To realize analysis described above, this work uses a hydrothermal system with 134 hydro plants and 122 thermal plants. The results, show that politicians with HFP piecewise linear model is 13% better than model with production coefficient constant model. However, the computational time is 14 times higher. Based in this result, this work shows another tree heuristics aims to improve the computation time related with HFO piecewise linear model. In general, the basics idea consists in keep the number of linear approximations as function of some hydro plants as measure of "significance" related to SIN. One of this heuristics got politicians with 6% of variation and computational time decrease 7 times compared to more detail model.

**Keywords:** Hydroelectric Function Production, Convex Hull, piecewise linear model, production coefficient constant model, Stochastic Dual Dynamic Programming.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Função cota de montante da UHE de Camargos. ....	31
Figura 2.2 – Função cota de jusante da UHE de Salto Caxias. ....	32
Figura 2.3 – Rendimento de uma turbina geradora da UHE de Camargos em função de $hl$ . ....	34
Figura 2.4 – Produção da UHE de Funil em função do número de unidades utilizado. ....	36
Figura 2.5 – FPH sendo a envoltória superior das combinações. ....	37
Figura 2.6 – Potência da UHE de Funil Grande em função da vazão turbinada na usina. ....	38
Figura 2.7 – FPH Agregada de Sá Carvalho. ....	39
Figura 2.8 – Potência ótima da UHE de Salto Caxias em função do número de unidades em operação. ....	40
Figura 2.9 – FPH Agregada da UHE de Salto Caxias. ....	41
Figura 2.10 – FPH agregada da UHE de Camargos. ....	42
Figura 2.11 – FPH de Furnas com $s = 0$ ( $m^3/s$ ). ....	45
Figura 2.12 – FPH de Furnas com $v = 22950$ $hm^3$ . ....	45
Figura 2.13 – FPH de Furnas com $v = 5733$ $hm^3$ . ....	46
Figura 3.1 – Conjunto de pontos da FPH Furnas Agregada, considerando vertimento nulo. ....	49
Figura 3.2 – Envoltória obtida pelos planos escolhidos pelo algoritmo do <i>Convex Hull</i> . ....	49
Figura 3.3 – Modelo côncavo linear por partes da FPH de Furnas. ....	51
Figura 3.4 – FPH aproximada com destaque em um plano. ....	52
Figura 3.5 – Cálculo do $PH_{3z,P2}$ associado com o vertimento para o ponto P2. ....	53
Figura 3.6 – Coeficientes $PH_{3z,P1}$ e $PH_{3z,P3}$ referentes aos pontos P1 e P3. ....	53
Figura 3.7 – Dois modelos da FPH de Furnas. ....	54
Figura 3.8 – EMQ e número de hiperplanos em função do número de pontos utilizado. ....	56
Figura 3.9 – EMQ associado com a heurística proposta no Algoritmo 3.2. ....	58

Figura 3.10 – FPH não linear e com produtibilidade constante – UHE Furnas.	61
Figura 3.11 – FPH não linear com volume máximo e produtibilidade constante, para alguns valores de vertimento. ....	62
Figura 3.12 – FPH e Produtibilidade constante de Funil. ....	63
Figura 4.1 – Modelo linear por partes da FPH.....	66
Figura 4.2 – Modelo linear por partes da FPH com três valores fixos de $v$ e modelo de FPH com produtibilidade constante. ....	66
Figura 4.3 – Árvore de cenários em que $y_{tr}$ é a afluência do mês $t$ ( $m^3/s$ ) e realização $r$ . Ainda, $y_1$ é a afluência do mês 1. ....	67
Figura 4.4 – Custo inferior para o valor ótimo ao longo das 20 iterações. ....	78
Figura 4.5 – FCF do primeiro mês.....	78
Figura 4.6 – Aproximações lineares dominantes para o mês 2. ....	79
Figura 4.7 – Aproximações dominantes da FCF do terceiro mês a esquerda, e quarto mês, a direita. ....	80
Figura 4.8 – Custo inferior para o valor ótimo ao longo das 20 iterações. ....	84
Figura 4.9 – Aproximações que compõem a FCF e a FCF resultante, do mês 1. ....	85
Figura 4.10 – Aproximações dominantes para o segundo mês. ....	86
Figura 4.11 – Aproximações dominantes da FCF do terceiro mês a esquerda, e quarto mês, a direita. ....	87
Figura 4.12 – Desenho do Algoritmo 4.1. ....	88
Figura 4.13 – Custo de operação de cada cenário da árvore mostrada na Figura 4.3.....	89
Figura 4.14 – Produção térmica, hidrelétrica e do déficit, variáveis que compõem o atendimento a demanda.....	90
Figura 4.15 – Média do volume armazenado ao longo do horizonte de planejamento. ....	90
Figura 4.16 – Custo de operação de cada cenário da árvore mostrada na Figura 4.3.....	91

Figura 4.17 – Produção térmica, hidrelétrica e do déficit, variáveis que compõem o atendimento a demanda.....	91
Figura 4.18 – Volume armazenado ao longo do horizonte de planejamento. ....	92
Figura 4.19 – Comparativo entre FCF's de cada mês. ....	93
Figura 5.1 – FPH da UHE de Itaipu.....	96
Figura 5.2 – EMQ e número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizados no algoritmo do CH. ....	97
Figura 5.3 – FPH ótima da UHE de Itaipu.....	97
Figura 5.4 – FPH da UHE de Xingó. ....	99
Figura 5.5 – EMQ e número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizados no algoritmo do CH. ....	99
Figura 5.6 – EMQ associado com a FPH da UHE de Xingó. ....	100
Figura 5.7 – FPH aproximada ótima da UHE de Xingó. ....	101
Figura 5.8 – FPH de Santo Antônio.....	102
Figura 5.9 – FPH da UHE de Itaparica. ....	102
Figura 5.10 – EMQ e número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizados no algoritmo do CH.....	103
Figura 5.11 – EMQ associado com a heurística - UHE Itaparica. ....	103
Figura 5.12 – FPH aproximada da UHE Itaparica. ....	104
Figura 5.13 – FPH da UHE Tucuruí. ....	105
Figura 5.14 – EMQ e número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizados no algoritmo do CH.....	105
Figura 5.15 – EMQ associado com a heurística - UHE Tucuruí.....	106
Figura 5.16 – FPH aproximada da UHE de Tucuruí.....	107
Figura 5.17 – Configuração hidrotérmica. ....	108
Figura 5.18 – Demanda ao longo dos meses.....	109
Figura 5.19 – Comportamento do custo inferior – casos com 20 realizações. .	112
Figura 5.20 – Custo de operação esperado – Árvores com 20 realizações por estágio.....	113
Figura 5.21 – Custo de operação de cada cenário da Árvore 1. ....	113

Figura 5.22 – Volume útil médio total do sistema - Árvore 1. ....	114
Figura 5.23 – Produção hidrelétrica média total - Árvore 1 .....	114
Figura 5.24 – Déficit médio obtido na simulação com as FCFs obtidas pela otimização da Árvore 1.....	115
Figura 5.25 – Comportamento do custo inferior – Casos com 50 realizações. ....	116
Figura 5.26 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.....	117
Figura 5.27 – Comportamento do custo inferior – Casos com 100 realizações. .....	118
Figura 5.28 – Custo de operação esperado – Árvores com 100 realizações por estágio.....	118
Figura 5.29 – Custo de operação esperado – Árvores com 20 realizações por estágio.....	121
Figura 5.30 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.....	123
Figura 5.31 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.....	124
Figura 5.32 – Custo de operação esperado – Árvores com 20 realizações por estágio.....	125
Figura 5.33 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.....	126
Figura 5.34 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.....	127
Figura 10.1 – Convergência pelo tempo de cada iteração para o Modelo 1. ...	147
Figura 10.2 – Convergência pelo tempo de cada iteração para o Modelo 2. ...	147

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores de volume armazenado (Fonte: ONS).....	31
Tabela 3.1 – Tabela dos coeficientes dos hiperplanos que definem a aproximação linear por partes da FPH de Furnas. ....	54
Tabela 3.2 – Resultados associados com a UHE Furnas.....	60
Tabela 4.1 – Coeficientes do modelo linear por partes da FPH. ....	65
Tabela 4.2 – Variáveis primais ótimas do PL de primeiro mês. ....	69
Tabela 4.3 – Variáveis primais do PL de segundo mês. ....	69
Tabela 4.4 – Variáveis primais do PL de terceiro mês.....	70
Tabela 4.5 – Variáveis primais do PL de quarto mês.....	70
Tabela 4.6 – Variáveis primais do PL de quinto mês.....	70
Tabela 4.7 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{5,31}$ ). ....	73
Tabela 4.8 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{4,14}$ ). ....	74
Tabela 4.9 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{4,15}$ ). ....	75
Tabela 4.10 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{3,6}$ ). ....	76
Tabela 4.11 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{3,7}$ ). ....	76
Tabela 4.12 – Custo ótimo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{2,2}$ ). ....	77
Tabela 4.13 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{2,3}$ ). ....	77
Tabela 4.14 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 1.....	78
Tabela 4.15 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 2.....	79
Tabela 4.16 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 3.....	80
Tabela 4.17 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 4.....	80
Tabela 4.18 – Variáveis primais do PL de primeiro mês. ....	81
Tabela 4.19 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 1.....	85

Tabela 4.20 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 2. ....	85
Tabela 4.21 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 3. ....	86
Tabela 4.22 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 4. ....	86
Tabela 4.23 – Limite inferior do custo esperado da otimização e custo médio de simulação com volume inicial do reservatório igual a 120 hm <sup>3</sup> . ....	93
Tabela 4.24 – Limite inferior do custo esperado da otimização e custo médio de simulação com volume inicial do reservatório igual a 792 hm <sup>3</sup> . ....	93
Tabela 5.1 – Tipos de UHEs por subsistema utilizados para a análise de erro. ....	96
Tabela 5.2 – Análise de erro das usinas do Tipo 1. ....	98
Tabela 5.3 – Análise de erro das usinas do Tipo 2. ....	101
Tabela 5.4 – Análise de erro das usinas do Tipo 3. ....	104
Tabela 5.5 – Análise de erro das usinas do Tipo 4. ....	107
Tabela 5.6 – Recursos energéticos da configuração hidrotérmica. ....	109
Tabela 5.7 – Custo incremental de déficit (R\$/MWh) em função da profundidade do déficit. ....	110
Tabela 5.8 – Otimização via PDDE com árvores de 20 realizações por estágio. ....	111
Tabela 5.9 – Otimização via PDDE com árvores de 50 realizações por estágio. ....	115
Tabela 5.10 – Considerando 100 realizações por estágio. ....	117
Tabela 5.11 – Usinas utilizadas nos modelos 4 e 5. ....	119
Tabela 5.12 – Otimização via PDDE com árvores de 20 realizações por estágio. ....	120
Tabela 5.13 – Otimização via PDDE com árvores de 50 realizações por estágio. ....	122
Tabela 5.14 – Otimização via PDDE com árvores de 100 realizações por estágio. ....	123

Tabela 7.1 – Dados Gerais das Usinas.....	131
Tabela 7.2 – Dados das unidades Geradoras UHE Funil e Sá Carvalho. ....	131
Tabela 7.3 – FCM e FCJ. ....	132
Tabela 7.4 – Coeficientes de Rendimento .....	132
Tabela 7.5 – Dados de Furnas, Salto Caxias e Camargos .....	132
Tabela 8.1 – Dados Gerais de Furnas. ....	135
Tabela 8.2 – Dados de Funil. ....	135
Tabela 8.3 - Coeficientes de FCM (hm), FCJ (hj) e Rendimento (ne) de Furnas. .....	135
Tabela 9.1 – EMQ x hiperplanos x n° de pontos e produtividade de todas as UHE do sistema. ....	137
Tabela 9.2 – Dados das Unidades Térmicas do Sistema. ....	141



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANEEL	- Agência Nacional de Energia Elétrica
CCEE	- Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CEPEL	- Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CH	- <i>Convex Hull</i>
CMO	- Custo Marginal de Operação
EMQ	- Erro Médio Quadrático
FCF	- Função de Custo Futuro
FPE	- Função de Produção Energética
FPH	- Função de Produção Hidrelétrica
HL	- Altura de Queda Líquida
ONS	- Operador Nacional do Sistema Elétrico
PCOP	- Planejamento de Curto Prazo da Operação Hidrotérmica
PDDE	- Programação Dinâmica Dual Estocástica
PDO	- Programação Diária da Operação Eletroenergética
PEN	- Planejamento Anual da Operação Energética
PHC	- Perda Hidráulica Constante
PMOP	- Planejamento de Médio Prazo da Operação Hidrotérmica
PL	- Programação Linear
PMO	- Programa Mensal da Operação Energética
PNL	- Programação Não Linear
POE	- Planejamento da Operação Energética
REE	- Reservatório Equivalente de Energia
SEB	- Sistema Elétrico Brasileiro
UHE	- Usina Hidrelétrica
UTE	- Usina Termelétrica



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
1.1	Revisão Bibliográfica .....	22
1.2	Objetivos do Trabalho .....	26
1.3	Estrutura do Trabalho .....	27
<b>2</b>	<b>FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DE UMA USINA</b>	
	<b>HIDRELÉTRICA .....</b>	<b>29</b>
2.1	Função de Produção Hidrelétrica.....	29
2.1.1	Queda Líquida.....	30
2.1.2	Rendimento Hidráulico da Unidade.....	33
2.2	Modelo de Otimização para Agregar a FPH de uma Usina Hidrelétrica .....	34
2.2.1	Usinas Fio D'água .....	35
2.2.1.1	Tipo 1 – FPH sem Influência da Vazão Vertida.....	35
2.2.1.2	Tipo 2 – Com Influência da Vazão Vertida .....	39
2.2.2	Usinas com Capacidade de Regularização .....	41
2.2.2.1	Tipo 3 – Não dependentes da Vazão Vertida .....	41
2.2.2.2	Tipo 4 – Dependentes da Vazão Vertida.....	43
<b>3</b>	<b>REPRESENTAÇÃO LINEAR DA FUNÇÃO DE</b>	
	<b>PRODUÇÃO HIDRELÉTRICA.....</b>	<b>47</b>
3.1	Representação Linear por Partes da FPH.....	47
3.1.1	Etapa 1 - Cálculo da Grade de Pontos.....	48
3.1.2	Etapa 2 - Convexificação da FPH .....	49
3.1.3	Etapa 3 - Inclusão da Vazão Vertida .....	51
3.1.4	Análise da Precisão da Aproximação Linear por Partes .....	55
3.1.5	Heurística para a Busca dos Planos Ótimos.....	56
3.2	Representação da FPH por Produtibilidade Constante .....	58
3.2.1	Cálculo da Produtibilidade.....	59

<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DE MÉDIO PRAZO VIA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA .....</b>	<b>65</b>
4.1	Solução do Problema do PMOP com FPH Representada por Produtibilidade Constante.....	68
4.2	Solução do Problema do PMOP com FPH linear por partes.....	80
4.3	Análise Comparativa entre as Modelagens da FPH .....	87
<b>5</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>95</b>
5.1	Análise de Erro da FPH .....	95
5.2	Análise Comparativa entre as Modelagens da FPH .....	108
5.3	Análise Comparativa de Heurísticas Aplicadas nas Modelagens da FPH .....	119
5.4	Análise Comparativa das Modelagens da FPH via Simulação <i>Out-Sampled</i> .....	124
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>129</b>
6.1	Sugestões de Trabalhos Futuros.....	130
<b>7</b>	<b>Apêndice A: Dados Gerais das UHE do Capítulo 2 .....</b>	<b>131</b>
<b>8</b>	<b>Apêndice B: Dados Gerais da Usinas de Furnas e Funil.....</b>	<b>135</b>
<b>9</b>	<b>Apêndice C: Planos ótimos e Dados Gerais acerca do Sistema. ....</b>	<b>137</b>
<b>10</b>	<b>Apêndice D: Validação do Modelo de Otimização .....</b>	<b>146</b>
<b>11</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>149</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os recursos de geração de um sistema hidrotérmico são formados pelas unidades geradoras que compõem as usinas hidrelétricas (UHEs) e termelétricas (UTEs). Um dos problemas mais importantes para o uso eficiente dos recursos de geração de um sistema dessa natureza é aquele relacionado com o Planejamento da Operação Energética (POE). Neste problema, o objetivo consiste em determinar uma política operativa para atender a demanda com o mínimo custo de operação esperado em um horizonte de planejamento (usualmente plurianual). O custo esperado é composto pelo uso de geração termelétrica e eventuais cortes no atendimento à demanda (déficit de energia). Adicionalmente, a política obtida pelo problema do POE deve atender a um determinado requisito de confiabilidade deste suprimento. Conforme é sabido, mínimo custo e confiabilidade elevada são objetivos conflitantes. Por um lado, sob ponto de vista energético, uma operação segura demanda quantidades elevadas de geração termelétrica para lidar com a incerteza futura no armazenamento dos reservatórios. Por outro lado, usar demasiadamente a água pode representar uma probabilidade de déficit futuro aquém do aceitável pela sociedade.

Neste cenário de incertezas, e devido ainda a uma série de características complexas adicionais (e.g., não linearidades, grande número de usinas, acoplamentos temporal e espacial) (LARROYD, 2012), o POE classicamente é resolvido indiretamente (e aproximadamente) separando-se o problema original de planejamento em, pelo menos, três outros problemas:

- (1) **Problema do POE de médio prazo:** neste caso, utiliza-se um horizonte de planejamento com três a cinco anos (ou mais) de dimensão. Dependendo das características do sistema e do ambiente regulatório em que o mesmo está inserido, o horizonte é discretizado em etapas semanais ou mensais. Dada a necessidade de se lidar com as incertezas das aflúncias, este problema é estocástico e com alto desempenho computacional, por isso, em geral as usinas hidrelétricas e o sistema de transmissão são modelados de maneira bem simplificada;
- (2) **Problema do POE de curto prazo:** aqui um horizonte de planejamento com alguns meses é utilizado, sendo o mesmo discretizado em etapas diárias ou semanais. Embora o problema ainda possa ser caracterizado como estocástico, devido ao menor horizonte, as usinas hidrelétricas e os

reservatórios passam a ser melhor representados com relação ao problema de médio prazo;

- (3) **Problema da programação diária da operação energética:** neste caso, o horizonte pode ser de um dia até uma semana, com discretizações horárias nos primeiros dias. Nesta etapa de planejamento, todos os elementos do sistema passam a ter um detalhamento sofisticado para representar de forma precisa as características operativas, uma vez que este problema é aquele que fornece os pontos de referência de potência ativa para o despacho em tempo real do sistema (e/ou estudos de validação elétrica baseados em fluxos de potência não linear). Assim, os recursos de geração são representados a nível de unidade geradora e o sistema de transmissão é tratado usualmente por um modelo linear.

Ainda com relação as etapas descritas, a política de operação obtida na resolução do problema de médio prazo fornece condições finais para o problema de curto prazo. Similarmente, a política operativa associada com a solução do problema de curto prazo é usada como entrada para determinar as condições de fronteira do problema da programação. Em sistemas hidrotérmicos, com predominância de recursos hidrelétricos, essas condições de fronteira são aproximações do valor esperado da água como função de condições de armazenamento dos reservatórios em estágios futuros. As etapas de médio e curto prazos são modeladas como problemas de otimização estocástica linear (PEREIRA, 1989), enquanto a programação diária tem em geral as não linearidades e decisões do tipo binárias priorizadas em sua representação; portanto, matematicamente a mesma é representada como um problema de programação não linear inteiro misto (GROSSMANN; KRAVANJA, 1997);(BAZARRA; SHERALI; SHETTY, 2006).

Independente da etapa relacionada com o problema do POE, um aspecto de grande importância para que as políticas de geração obtidas em cada etapa sejam de boa qualidade diz respeito com a modelagem dos recursos hidrelétricos. E, neste cenário, a função de produção hidrelétrica (FPH) é o aspecto crucial, dado que a mesma representa como a energia armazenada é transformada em energia elétrica para o atendimento à demanda.

No caso da programação diária, o maior desafio consiste em representar adequadamente, por meio da FPH, as não linearidades associadas com perdas, rendimentos, quedas, entre outros aspectos. Adicionalmente, existem descontinuidades ligadas com as zonas proibidas de operação das unidades, as quais são fundamentais de serem

representadas neste horizonte devido à proximidade com a operação em tempo real. Estas e outras restrições relacionadas com a FPH podem ser encontradas em diversos trabalhos na literatura (FINARDI, 2003); (ENCINA et al., 2008);(FINARDI; DA SILVA, 2006);(TAKIGAWA, 2010), sendo que a representação da FPH na programação diária não é de interesse desta dissertação.

Por outro lado, conforme citado anteriormente, no caso das outras etapas da cadeia, algum nível de simplificação da FPH é necessário pois tratam-se de problemas de otimização estocástica em que o grande esforço computacional exigido é bem conhecido. Atualmente, é consenso em termos de literatura que, dado o horizonte mais longo desses problemas, pode-se optar pela representação das usinas por meio de uma unidade equivalente que visa levar em conta as características operativas dos diferentes conjuntos de unidades que compõem as mesmas. No caso do problema de curto prazo, vários trabalhos têm avançado nessa direção para tratar a FPH com o nível de detalhe condizente com esta etapa.

Em contrapartida, poucas análises com relação a FPH são encontradas na literatura no tocante ao problema do PMOP. Em geral, dado o grande esforço computacional requerido por esse tipo de problema, a FPH é usualmente representada por uma função linear que depende apenas da vazão turbinada na usina ou, em casos mais simplificados, conforme é feito no problema de médio prazo no Brasil, utiliza-se uma agregação das usinas hidrelétricas em um reservatório equivalente de energia (REE) (ARVANITIDITS; ROSING, 1970) . Dado o evidente avanço dos recursos computacionais verificado nos últimos anos, os quais permitiram construir novos paradigmas para melhorias nas metodologias de solução de modelos de otimização estocástica (DE MATOS; PHILPOTT; FINARDI, 2015), é possível, pelo menos, avaliar a relação entre precisão de modelagem da FPH e o esforço computacional associado no âmbito do médio prazo.

A análise de diferentes representações da FPH no problema do PMOP é o principal objetivo deste trabalho. Para tanto, está dissertação realiza os seguintes passos: (i) agregação da FPH das unidades de uma usina em uma FPH não linear que representa a unidade equivalente da usina; (ii) aproximação linear (ou linear por partes) da FPH definida em (i) para manter a convexidade do problema de médio prazo; (iii) investigação do erro da FPH linearizada em relação a FPH não linear como função do número de aproximações lineares; (iv) comparação de custos das políticas obtidas pelos modelos de médio prazo em função de diferentes modelos lineares de representação da FPH.

Nota-se que não se está interessado em comparar as diferentes representações da FPH, as quais são modelagens a usinas individualizadas, como o modelo a REE. Este último, embora usado ainda no caso Brasileiro, é sabido que fornece decisões muito otimistas. Um estudo nessa direção pode ser visto em (CARVALHO, 2002).

Na próxima seção é apresentada uma revisão bibliográfica dos principais trabalhos encontrados na literatura com base na representação da FPH no problema do POE, com foco em modelos com horizontes de curto e médio prazos.

### 1.1 Revisão Bibliográfica

O objetivo desta seção é citar as principais referências utilizadas neste trabalho, destacando a maneira com que os autores utilizam a FPH em etapas de médio e curto prazos no problema do POE. Um dos primeiros autores a estudar o problema do POE foi (WATCHORN, 1967), o qual constatou que a produção de energia de uma hidrelétrica está diretamente ligada como a bilinearidade vazão turbinada e queda, sendo esta última uma função que depende do nível do reservatório e do nível do canal de fuga.

No Brasil, um dos primeiros passos na direção ao planejamento e coordenação dos recursos hídricos de médio prazo foi desenvolvido com base em (TERRY; PEREIRA; NETO; SILVA; SALES, 1986). Neste trabalho, as usinas hidrelétricas são representadas por meio do conceito do REE, o qual agrega usinas de um mesmo subsistema em um único reservatório que armazena, gera e verte energia. Outros autores que utilizaram a mesma forma de representação das usinas hidrelétricas foram (KLIGERMAN; FILHO, 1992);(CARVALHO, 2002);(MATOS, 2008). O enfoque principal desses trabalhos não é a modelagem da FPH, pois todos estão focados no âmbito do problema de médio prazo. Por isso, todos optaram pela representação agregada do sistema hidrelétrico. Neste cenário, também é importante destacar que o modelo de otimização estocástica utilizado no problema do POE de médio prazo realizado no Brasil, o NEWAVE (CEPEL, 2001), utiliza o REE para modelar as usinas hidrelétricas.

Em (CARVALHO, 2002) constatou-se a necessidade de modelar as usinas no problema de médio prazo por meio de usinas individualizadas, em oposição ao REE. Neste trabalho, a modelagem da FPH é dada por uma função linear que depende da vazão turbinada na usina. O coeficiente angular dessa função é a produtividade da usina, obtida considerando valores constantes de rendimento e queda líquida.

Embora esse tipo de modelo (i.e., produtibilidade constante) possa ser utilizado no horizonte de médio prazo, para o caso do curto prazo tal aproximação pode ser muito pobre em termos de precisão. Desta forma (CUNHA; PRADO; DA COSTA, 1997) apresentam o conceito de Função de Produção Energética (FPE) para a modelagem da produtividade variável em usinas hidrelétricas. Esta modelagem assume que o valor da produção total de energia em determinado período de simulação é dado uma função de duas variáveis: volume armazenado e vazão defluente. Dado que esta função é não linear, então, é possível fazer uma aproximação linear côncava, chamada de FPEA pelos autores. Segundo os autores, esta representação possui um nível adequado de perdas ou ganhos em relação ao modelo não linear com base nas decisões operativas. Este trabalho tem foco na modelagem da FPH, cujo modelo pode, teoricamente, ser aplicado em qualquer horizonte de planejamento. O trabalho apresenta ainda algumas comparações e cálculos em torno do erro médio apresentado da FPEA com o modelo não linear; vale a pena ressaltar que esta modelagem é a base para aquela que vem sendo utilizada no DECOMP (CEPEL, 2013), o qual é o modelo de otimização utilizado na etapa do POE de curto prazo no Brasil.

Por sua vez, (SUANNO, 1995) utiliza o conceito de produtibilidade variável de uma outra maneira. É sabido que a cada período a produtibilidade varia de acordo com as decisões de volume armazenado, por exemplo. Contudo, esta forma de representação inclui não convexidades ao problema e, portanto, é feita uma transformação de variáveis baseada nos conceitos do REE. Segundo a autora, esta modelagem da FPH por produtibilidade variável é extremamente necessária no sistema brasileiro, pois a produção de muitas hidrelétricas varia consideravelmente em função do volume armazenado em problemas com decisões semanais e mensais.

No âmbito do problema de médio prazo, (SOUZA THOMÉ, 2013) desenvolveu uma FPH convexificada baseada em (SUANNO, 1995) para usar a PDDE em um modelo multistágio de programação inteira mista. A FPH é convexificada através da transformação das variáveis de volume de água armazenada em variáveis de energia armazenada e, desta maneira, torna-se possível eliminar o problema da representação explícita da FPH por meio da variável de volume.

Em termos comerciais, merece destaque o modelo SDDP, criado por (PEREIRA, 1989), (PEREIRA; PINTO, 1991). Esta ferramenta consiste em um modelo computacional de despacho hidrotérmico estocástico. Segundo seus desenvolvedores, o modelo SDDP propicia o cálculo de políticas de operação levando em conta os detalhes operativos

das hidrelétricas, modelos detalhados de termelétricas, rede de transmissão, incerteza hidrológica entre outras coisas.

No modelo de POE de médio prazo no sistema norueguês (GJELSVIK; MO; HAUGSTAD, 2010), a FPH varia em função da queda e da vazão turbinada. Segundo o autor, a variação da altura de queda poderia levar alguma não linearidade ao problema; porém, a influência da altura é calculada através de coeficientes de penalidade por meio de uma heurística e incluídos na função objetivo do problema de médio prazo linear, sendo que o modelo então torna-se linear neste caso. Mais detalhes de como é calculado essa sensibilidade podem ser encontrados em (GJELSVIK; HAUGSTAD, 2005).

Em contrapartida aos modelos estocásticos comumente utilizados no horizonte de médio prazo, podem-se citar os trabalhos de (CARVALHO; SOARES, 1987);(OLIVEIRA; SOARES, 1995);(SIQUEIRA; ZAMBELLI; CICOGNA; ANDRADE; SOARES, 2006);(ZAMBELLI, 2009), os quais, através de um modelo determinístico baseado em uma técnica de controle preditivo, construíram uma plataforma computacional para a otimização do despacho do SIN. Neste caso, a FPH é modelada por meio uma função não linear do volume, vazão turbinada e vertida, cujas cotas de montante e jusante variam com polinômios de até quarto grau.

Chamado de HIDROTERM, baseada em (ZAMBON; BARROS; LOPES; BARBOSA; FRANCATO; YEH, 2012), consiste de um modelo de otimização estocástico não linear para gerenciar e operar o sistema hidrotérmico do SIN com objetivo de minimizar custos operacionais com base em decisões mensais. Quanto a representação da FPH, o autor considera para usinas de reservatório as não linearidades contidas no nível de armazenamento do reservatório e na altura de cota jusante, ambas por polinômios de quarto grau. Por outro lado, para as centrais fio d'água mantém valores constantes para as cotas de jusante e montante. Outro trabalho que merece destaque também é (SILVA; ZAMBON, 2013), o qual propõe uma simplificação da FPH utilizando técnicas de regressão linear com o objetivo de substituir as não linearidades da FPH encontrada no HIDROTERM. Esta metodologia foi aplicada nesta ferramenta e segundo o autor reduziu consideravelmente o tempo computacional.

Outra importante aplicação da modelagem da FPH diz respeito a modelos de simulação da operação, onde neste cenário alguns autores usam a FPH não linear com maior nível de detalhamento. Em (RAMOS, 2011) é desenvolvido um simulador das políticas traçadas pelo (NEWAVE) com reservatórios individualizados e modela-se a FPH considerando que a produtividade da usina é calculada em função da

queda. A conta montante é representada por um polinômio de quarto grau em função do volume armazenado. Por outro lado, a cota jusante é representada por uma função sigmoide aproximada pela pelo polinômio cota-jusante na região de validade do polinômio.

Com respeito ao caso canadense, é válido mencionar o trabalho de POE de médio prazo (P. - L. CARPENTIER, 2013). A FPH assume que a potência de saída de cada planta depende da vazão turbinada e da altura líquida do reservatório formando uma função côncava linear por partes. Ainda, nota-se que o autor considera as usinas fio d'água como fontes de energia pré-determinada do problema.

Utilizando o sistema hidrotérmico de Portugal (CATALAO; MARIANO; MENDES; FERREIRA, 2009) representa a variação da queda do reservatório na FPH. Este trabalho faz uma aproximação não linear da FPH partindo de um outro modelo não linear que considera a função de produção expressa por uma série de funções que dependem da vazão turbinada e do rendimento total da usina. Através da linearização do rendimento e da altura o autor propõe uma aproximação não linear da FPH, que segundo o mesmo tem uma vantagem maior por considerar a altura de queda de forma explícita em uma única função de produção hidrelétrica.

Conforme o horizonte de planejamento diminui, faz-se necessário uma representação com maior exatidão da FPH; desta forma, no âmbito dos problemas de curto prazo (DINIZ; ESTEVES; SAGASTIZABAL, 2004) faz uma aproximação da FPH da usina através de uma função linear por partes, a qual considera as variáveis de vazão vertida, vazão turbinada e volume. Inicialmente, o autor considera apenas que a FPH depende da vazão turbinada e do volume e faz uma aproximação linear por partes com base em uma envoltória convexa à FPH. O efeito da vazão vertida é incluído posteriormente através de um modelo de otimização irrestrito que visa calcular uma aproximação secante do comportamento da FPH proposto inicialmente com menor erro médio quadrático. Segundo (DINIZ et al., 2004), a aproximação apresentada é considerada boa, mesmo se a discretização seja apenas em relação a vazão turbinada, a qual é a variável mais importante pelas não linearidades da FPH.

Por outro lado, a metodologia apresentada por (DINIZ; MACEIRA, 2008) calcula uma aproximação da FPH baseada no conceito de *Convex Hull* proposto por (ANDREW, 1979) que consiste em uma estratégia que traça planos que envolvem a função original em todo o seu domínio. Primeiramente, usa-se a *Convex Hull* para aproximar a FPH como função da vazão turbinada e o do volume, e em seguida, utiliza-se a mesma estratégia já descrita em (DINIZ et al., 2004) para a inclusão da

vazão vertida. Nesta metodologia, a FPH considera o rendimento dos conjunto turbina-gerador constante e as perdas hidráulicas são dados como uma porcentagem da potência de saída das máquinas. Os polinômios de cota montante e jusante são modelados como funções de quarto grau.

Também no âmbito do problema de curto prazo, em (GONÇALVES; FINARDI; SILVA, 2011) é utilizada uma função linear por partes para aproximar a FPH. Primeiramente, são calculados planos que aproximam as variáveis do volume e da vazão turbinada, sendo com isso aplicado um fator de correção aos planos encontrados ainda com vazão vertida desconsiderada. Com o objetivo de considerar a vazão vertida é aplicado cortes secantes na dimensão da vazão vertida, semelhante ao exposto em (DINIZ; MACEIRA, 2008).

Ainda no tocante ao problema de curto prazo, com base na programação não linear inteira mista para construir uma unidade equivalente de uma usina, (QUINTERO, 2013) procura quantificar o impacto que geram as simplificações feitas em nesta FPH agregada com relação uma representação bem detalhada. Para tal estudo, considera-se que a FPH é dada pelo produto queda líquida e vazão e do produto rendimento do grupo turbina-gerador.

## 1.2 Objetivos do Trabalho

Conforme pode ser percebido na seção anterior, não está disponível na literatura uma análise referente aos impactos de diferentes níveis de representação da FPH em problemas do PMOP, quando estes são representados por modelos de otimização estocástica linear multiestágio. Para proceder neste sentido, esta dissertação realiza os seguintes passos:

- (1) Apresenta um algoritmo baseado em programação não linear inteira mista para representar a produção de energia de uma UHE por meio de uma unidade equivalente. Basicamente, este modelo de otimização por usina da FPH visa encontrar, para uma série de valores operativos, os pontos que maximizam a potência de saída por meio da enumeração das unidades geradoras. De certo modo, esse passo é uma continuidade daquele realizado em (QUINTERO, 2013), em que não são consideradas usinas com diferentes conjunto-gerador, pois, segundo dados oficiais (CCEE, 2015), cerca de 18% das usinas do SIN possuem grupos de unidades com características distintas. Isto significa que, a proposta da FPH apresentada nesta

- dissertação é uma forma genérica podendo ser utilizada para todas as centrais hidrelétricas;
- (2) Com base na FPH não linear obtida em (1), este segundo passo consiste em fazer uma aproximação linear (ou linear por partes) baseada em técnicas de *Convex Hull*, para manter a convexidade do problema de médio prazo.;
  - (3) Após, tem-se uma investigação do erro da FPH linear por partes obtida, em relação a FPH não linear agregada, como função do número de aproximações lineares. Este passo visa mostrar que, como as usinas hidrelétricas apresentam características operativas diferentes, a relação entre número de aproximações lineares e precisão varia consideravelmente entre usinas. Ainda, este tipo de análise visa destacar regiões operativas que apresentam maiores erros;
  - (4) Por fim, analisa-se a qualidade da política obtida pelo modelo de médio prazo em função de diferentes modelos lineares de representação da FPH. Para tanto, cada tipo de FPH é incluído em um modelo de otimização estocástica multiestágio linear para encontrar as políticas ótimas operativas do POE de médio prazo. Para obter tais políticas, faz-se uso do algoritmo de PDDE (PEREIRA; PINTO, 1991) e, subsequentemente, simulações entre as diferentes representações da FPH são realizadas para analisar questões tais como diferenças em custos e esforço computacional, basicamente.

Para realizar os passos anteriores de maneira didática, em especial em (1)-(3), esta dissertação utiliza usinas do SIN que possuem FPH com características diferentes. Em contrapartida, as análises pretendidas em (4) se dão com base em um problema de grande porte baseado também nas características do POE do caso Brasileiro.

### 1.3 Estrutura do Trabalho

Esta dissertação de mestrado está organizada da seguinte maneira. Inicialmente, no Capítulo 2, explica-se como se comporta a operação da usina hidrelétrica e seus principais componentes, bem como descreve as equações matemáticas envolvidas na produção de energia. Adicionalmente, mostra-se uma modelagem não linear inteira mista que visa agregar todas unidades geradoras contidas em uma usina em apenas uma, favorecendo a aplicação em problemas de médio prazo.

O terceiro capítulo trata de exemplificar como são desenvolvidas as aproximações em torno da FPH proposta no Capítulo 2. Primeiramente, é explicado como são obtidos os coeficientes para a aplicação do modelo da produtividade constante e, por fim, a aplicação das técnicas de *Convex Hull* para construir uma envoltória convexa da FPH.

No Capítulo 4 é descrito o algoritmo da PDDE através de um problema de menor porte. O objetivo principal é ilustrar a obtenção das políticas de operação pela PDDE e como as mesmas são usadas para analisar a qualidade das aproximações da FPH propostas nesta dissertação.

No Capítulo 5 são apresentadas as principais análises acerca dos resultados obtidos por meio das simulações, considerando um sistema hidrotérmico retirado do SIN com 134 unidades hidrelétricas e 122 unidades térmicas.

Por último, no Capítulo 6 estão descritas as principais conclusões sobre o tema estudado, bem como algumas diretrizes para trabalhos futuros.

## 2 FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DE UMA USINA HIDRELÉTRICA

Este capítulo visa apresentar um modelo de função de produção de geração em uma usina hidrelétrica por meio da agregação de todas as unidades geradoras uma em uma única unidade geradora equivalente. Essa estratégia é atrativa para a representação da geração hidrelétrica em problemas de planejamento da operação energética em horizontes de médio e curto prazos, pois é possível obter uma redução considerável na dimensão destes respectivos problemas. Contudo, faz-se necessário estabelecer uma regra operativa para determinar como essa agregação deve ser feita. Para demonstrar com isso é feito, este capítulo inicia apresentando as principais características da Função de Produção Hidrelétrica (FPH) relacionada com uma unidade geradora. Na sequência, mostra-se então o modelo agregado da usina, o qual é obtido por meio da otimização da produção da usina hidrelétrica para diferentes pontos operativos.

Conforme será visto na próxima seção, algumas características da FPH dependem se a usina é fio d'água ou de regularização, bem como se existe influência do vertimento na produção de energia. Para destacar tais peculiaridades, este trabalho faz uso de diferentes usinas presentes no caso brasileiro que explicitam bem essas questões.

### 2.1 Função de Produção Hidrelétrica

Define-se por FPH de uma unidade geradora a expressão matemática que representa o comportamento da potência de saída em função das diferentes variáveis de controle e estado que compõem o processo de geração baseado na hidroeletricidade. Esta expressão depende, de maneira não linear, do produto entre queda líquida, vazão turbinada e rendimento global da unidade. Considerando como unitárias as perdas mecânicas da turbina e globais do gerador, a potência de saída de uma unidade hidrelétrica é dada por:

$$p = G \cdot \eta(u, hl) \cdot hl \cdot u, \quad (2.1)$$

em que:

$G$             constante dada por 0,00981 (MW/(m<sup>3</sup>/s).m);  
 $p$             potência ativa da unidade geradora (MW);

- $u$  vazão turbinada na unidade geradora ( $m^3/s$ );  
 $hl$  queda líquida da unidade (m);  
 $\eta(u,hl)$  rendimento hidráulico da unidade.

Na geração hidrelétrica tem-se como variáveis de controle a vazão turbinada na unidade e a vazão vertida pelo reservatório. Por sua vez, tem-se como variáveis de estado o nível de armazenamento do reservatório e a vazão total turbinada pela usina. Portanto, deve-se detalhar em (2.1) a queda líquida e o rendimento hidráulico da unidade como função dessas variáveis, sendo esse o objetivo das próximas seções.

### 2.1.1 Queda Líquida

Como pode ser visto em (2.1), a potência de uma unidade depende do valor da queda líquida em que a mesma está submetida. Porém, antes de definir a queda líquida, é importante descrever a queda bruta que é dada pela diferença entre os níveis de montante e de jusante do reservatório. Entretanto, quando a água atravessa os condutos forçados, existe uma perda de energia associada basicamente ao atrito entre o material o qual o conduto é composto e a massa da água. Assim, essa perda precisa ser considerada e isso é feito com base em uma perda (conhecida comumente por perda hidráulica, em metros) no valor da queda bruta. Portanto, a altura de queda líquida é obtida descontando-se da queda bruta o valor das perdas hidráulicas, sendo definida pela seguinte expressão:

$$hl = fcm(v) - fcj(q,s) - ph(u), \quad (2.2)$$

em que:

- $fcm(v)$  função cota de montante (m), a qual depende do volume armazenado no reservatório,  $v$  ( $hm^3$ );  
 $fcj(q,s)$  função cota de jusante (m), a qual depende da vazão total turbinada na usina,  $q$ , e do vertimento,  $s$ , ambos em ( $m^3/s$ ). Por sua vez,  $q$  é composta pela soma das vazões unidades turbinadas nas unidades;  
 $ph(u)$  função que representa as perdas hidráulicas na unidade (m).

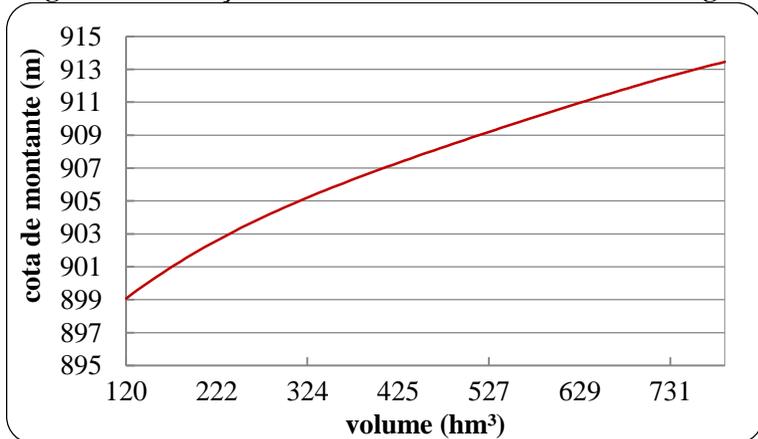
No caso Brasileiro, a modelagem utiliza, tanto a Função Cota de Montante (FCM), quanto para a Função Cota de Jusante (FCJ), polinômios que podem ser de até quarto grau, conforme mostrado na seqüência. Desta forma, a cota de montante é expressa por:

$$fcm(v) = HM_0 + HM_1 \cdot v + HM_2 \cdot v^2 + HM_3 \cdot v^3 + HM_4 \cdot v^4, \quad (2.3)$$

em que  $HM_0, \dots, HM_4$  são os coeficientes do polinômio que é particular de cada usina.

Cada usina tem comportamento peculiar FCM, dado que os reservatórios têm características construtivas distintas. Entretanto, no geral a FCM se comporta basicamente como mostra a Figura 2.1, ou seja, a cota de montante (medida em relação ao nível do mar) é uma função estritamente crescente com relação ao volume armazenado.

**Figura 2.1 – Função cota de montante da UHE de Camargos.**



Uma representação adequada da FCM deve ser considerada no médio prazo, pois em reservatórios de grande regularização a variação do volume ao longo do horizonte é bastante significativa. Para exemplificar, a Tabela 2.1 ilustra os dados oficiais de níveis de armazenamento de 2015 para a UHE de Marimbondo. E os valores da FCM para os seis primeiros meses do ano.

**Tabela 2.1 – Valores de volume armazenado (Fonte: ONS).**

Usina de Marimbondo						
Mês	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.

<b>V. Útil (%)</b>	11,57	23,57	40,86	53,86	60,59	63,64
<b>FMC (m)</b>	430,55	433,97	437,79	440,13	441,23	441,71

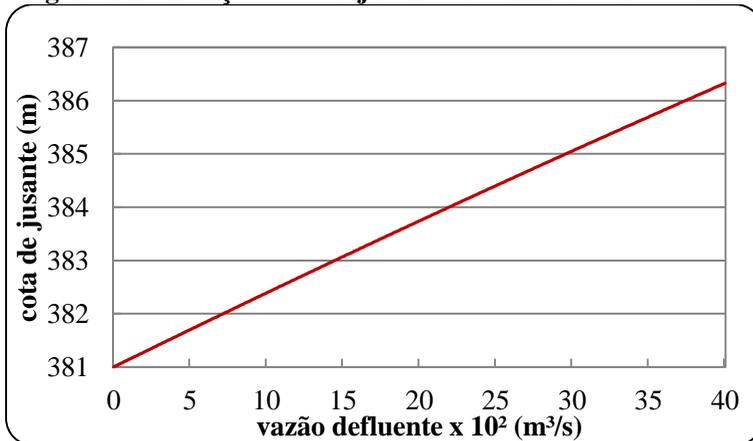
Nota-se que o volume tem grande variação de um mês para o outro, chegando a duplicar de janeiro para fevereiro; desta forma, a cota montante varia e tem impacto direto na produção de energia deste tipo de usina hidrelétrica. É importante mencionar também que, devido à pouca capacidade de armazenamento, algumas usinas são consideradas como fio’ da água no horizonte de médio prazo. Nestes casos, a FCM é considerada constante.

Por sua vez, no caso Brasileiro, FCJ é matematicamente expressa por:

$$fcj(q, s) = HJ_0 + HJ_1 \cdot (q + s) + HJ_2 \cdot (q + s)^2 + HJ_3 \cdot (q + s)^3 + HJ_4 \cdot (q + s)^4, \tag{2.4}$$

em que  $HJ_0, \dots, HJ_4$  são os coeficientes da FCJ, particular a cada usina. Ilustrativamente, a Figura 2.2 ilustra o comportamento da FCJ associada com a UHE de Salto Caxias.

**Figura 2.2 – Função cota de jusante da UHE de Salto Caxias.**



Também por motivos construtivos, a FCJ tem características particulares para cada UHE pois depende de como a vazão defluente no canal de fuga afeta essa cota. Por exemplo, em alguns casos, o vertimento não influencia (2.4). Em outros, existem usinas que possuem mais de uma FCJ, pois além das variáveis  $q$  e  $s$ , podem depender também do volume

do reservatório de jusante. Assim, no Brasil adotou-se ter várias FCJ, sendo que cada uma considera um determinado volume da usina de jusante. Este tipo de representação acontece nas UHEs de Emborcação e São Simão, com 5 e 3 FCJ respectivamente; no entanto, neste trabalho usinas com estas características serão consideradas com apenas uma FCJ.

O último termo na equação (2.2) diz respeito as perdas hidráulicas. Para estudos de planejamento energético utiliza-se uma função que é dada pelo quadrado da vazão turbinada multiplicado por uma constante característica do conduto forçado, PR é a constante de perda hidráulica da unidade ( $s^2/m^2$ ). Portanto, matematicamente a perda hidráulica é dada por:

$$ph(u) = PR \cdot u^2, \quad (2.5)$$

Com base nas equações (2.2)-(2.5) mostradas anteriormente, a queda líquida é representada por uma função polinomial de até quarta ordem conforme:

$$\begin{aligned} hl = & HM_0 + HM_1 \cdot v + HM_2 \cdot v^2 + HM_3 \cdot v^3 + HM_4 \cdot v^4 - \\ & HJ_0 - HJ_1 \cdot (q + s) - HJ_2 \cdot (q + s)^2 - HJ_3 \cdot (q + s)^3 - \\ & HJ_4 \cdot (q + s)^4 - PR \cdot u^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Rendimento Hidráulico da Unidade

Conforme (2.1), outro importante aspecto que define a quantidade de potência produzida por uma unidade é o rendimento hidráulico, o qual é usualmente fornecido pelo fabricante da turbina por meio de um conjunto de pontos do tipo  $(u, hl, \eta)$ . Esses pontos são obtidos em testes de modelo reduzido quando a turbina está em sua fase inicial de projeto. Fisicamente, toda turbina hidráulica apresenta um ponto de máximo rendimento que é alcançado em uma dada vazão e queda líquida. Qualquer outra combinação destes dois parâmetros fornece um rendimento menor, sendo por isso que, quando ajustada uma função para representar todos os pontos  $(u, hl, \eta)$ , tem-se uma representação gráfica parecida como uma curva colina. Em geral, obtém-se uma aproximação razoável do rendimento por meio de um polinômio de segunda ordem, conforme (DINIZ; ESTEVES; SAGASTIZABAL, 2007).

Em estudos de planejamento de operação de médio e curto prazos costuma-se considerar o rendimento hidráulico constante (DINIZ;

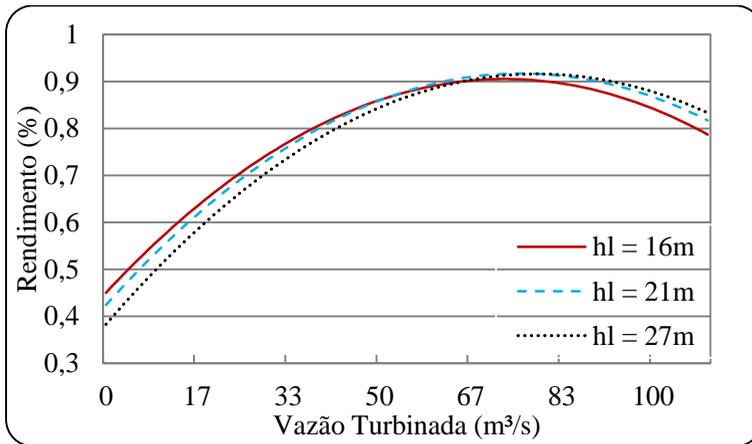
MACEIRA, 2008). Entretanto, embora a proposta de FPH deste trabalho seja no horizonte de médio prazo, deseja-se representar o rendimento de forma mais realista possível. Neste contexto, é necessário levar as duas variáveis em consideração que influenciam diretamente no rendimento, conforme a expressão quadrática a seguir:

$$\eta(u, hl) = R_0 + R_1 \cdot u + R_2 \cdot u^2 + R_3 \cdot hl + R_4 \cdot hl^2 + R_5 \cdot u \cdot hl, \quad (2.7)$$

em que, são  $R_0, \dots, R_5$  os coeficientes da função acima.

Para esboçar ilustrativamente (2.7), a Figura 2.3 mostra o rendimento de uma unidade geradora da UHE de Camargos em função da vazão turbinada, considerando alguns valores fixos de queda líquida.

**Figura 2.3 – Rendimento de uma turbina geradora da UHE de Camargos em função de  $hl$ .**



Por fim, diante do exposto, pretende-se modelar o rendimento de forma mais precisa evitando a representação por um valor constante, conforme comumente é utilizado em modelos de médio prazo.

## 2.2 Modelo de Otimização para Agregar a FPH de uma Usina Hidrelétrica

Com base na FPH por unidade detalhada anteriormente, esta seção visa construir uma FPH para a usina como se a mesma possuísse apenas uma unidade. Para tanto, deve-se fazer com que a FPH não dependa das vazões turbinadas por cada unidade. Para atingir tal objetivo, este trabalho

propõe essa eliminação com base na solução de vários problemas de programação não linear inteira mista para cada usina.

Basicamente, cada problema, considera um determinado ponto de operação  $(v, q, s)$  e obtém a potência máxima que a UHE pode atingir. Nota-se que, dependendo do ponto operativo, diferentes valores de vazão turbinada em cada unidade podem ser usados, os quais resultam em valores de potência diferentes. O valor ótimo (máximo) é então obtido por enumeração de todas as combinações de unidades geradoras que conseguem atender as restrições associadas com  $(v, q, s)$ .

Neste ponto, é importante lembrar que as UHEs, no problema de médio prazo, são classificadas em centrais a fio d' água e de regularização. Matematicamente, isso é equivalente a dizer que os pontos de operação de interesse não dependem de  $v$ , no caso das UHEs sem regularização. Além disso, sendo fio d' água ou de regularização, a FPH de uma UHE ainda pode não ser dependente de  $s$ . Esses diferentes tipos de modelagem são explicitados a seguir, conjuntamente com o modelo agregado proposto.

Importante destacar que, neste trabalho, é considerado que todas as usinas que não dependem da vazão vertida possuem FCJ constante, uma vez que, pelos dados oficiais, algumas usinas com esta característica possuem FCJ constante e outras não.

### 2.2.1 Usinas Fio D'água

A usina deste tipo tem capacidade de regularização muito pequena e, em geral, dispõe somente da vazão natural do curso d' água como recurso para geração. Algumas dessas usinas podem usar o reservatório para armazenar pouca água fora dos horários de pico para posteriormente fazer o uso quando necessário no mesmo dia (DOS REIS, 2003). Além do fato de ser fio d' água, a UHE pode ser classificada neste trabalho quanto a dependência da vazão vertida.

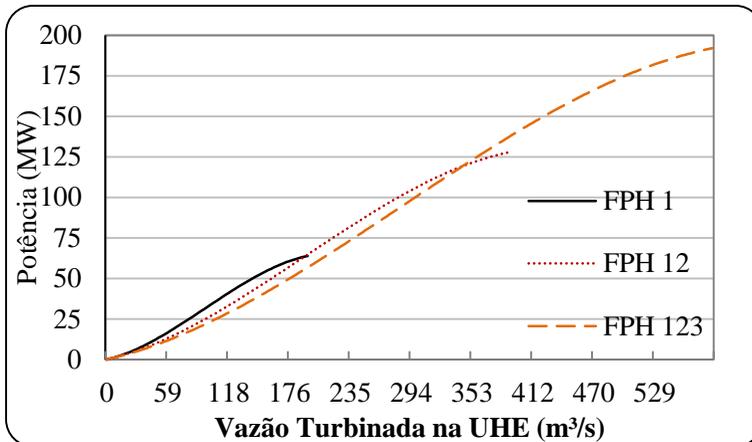
#### 2.2.1.1 Tipo 1 – FPH sem Influência da Vazão Vertida

A FPH das unidades deste tipo de UHE dependem apenas da vazão turbinada. A UHE de Funil, localizada no Rio Grande, é um exemplo de uma usina fio d' água que não tem a produção influenciada pela vazão vertida. Na verdade, de acordo com os dados oficiais utilizados em estudos de curto e médio prazos pelo Operador Nacional do Sistema (NOS), as cotas de montante e de jusante são modeladas por meio de valores constantes. Isso faz com que a  $i$ -ésima unidade desta UHE, tal que  $i = 1, 2$  e  $3$ , tenha o seguinte modelo de FPH:

$$\begin{aligned}
 p_i = G \cdot [ & R_{0i} + R_{1i} \cdot u_i + R_{2i} \cdot u_i^2 + R_{3i} \cdot (HM_0 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2) + \\
 & R_{4i} \cdot (HM_0 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2)^2 + \\
 & R_{5i} \cdot u_i \cdot (HM_0 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2)] \cdot (HM_0 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2) \cdot u_i
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

De acordo com os dados da UHE de Funil colocados no Apêndice A, com 1, 2 e 3 unidades ligadas é possível obter as funções mostradas na Figura 2.4 com os nomes FPH 1, FPH 12 e FPH 123, respectivamente.

**Figura 2.4 – Produção da UHE de Funil em função do número de unidades utilizado.**



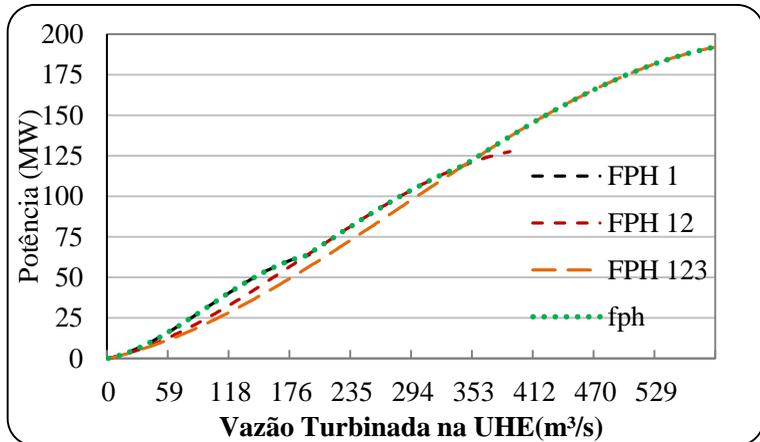
Inicialmente é importante citar que a UHE de Funil possui todas as unidades idênticas, sendo este então o caso mais simples de se construir uma FPH associada a uma unidade agregada.

Para obter a FPH 1 basta discretizar o valor de  $u$  em (2.8), desde zero<sup>1</sup> até o valor máximo nominal da unidade (195 m<sup>3</sup>/s), pois neste caso a vazão da UHE é a mesma que na unidade (i.e.,  $q = u$ ). Por outro lado, para as demais FPHs, a vazão na usina é dada pela soma das vazões individuais e, portanto, deve-se ter uma regra de como fazer a alocação individual das vazões.

<sup>1</sup> Destaca-se que, devido à presença de zonas proibidas de operação, na prática nem todo limite de vazões pertence ao conjunto viável do problema. Contudo, dado que o interesse diz respeito com decisões mensais e desconsideração das zonas trata-se, portanto, de uma aproximação pertinente.

Dado que se tem unidades idênticas, a alocação ótima é dada na escolha da maior potência produzida entre as possíveis combinações das unidades ligadas para dado ponto de vazão turbinada. Ademais, por meio das condições de otimalidade, prova-se que para as combinações que envolvem mais que uma unidade ligada a potência máxima extraída de tal combinação consiste em dividir equitativamente a vazão na usina entre as unidades em operação; portanto, desta forma então obtém-se as FPHs 12 e 123, destacadas na Figura 2.4. Focando ainda nesta figura, o que se deseja então é construir uma função do tipo  $p(q)$ , tal que  $0 \leq q \leq 585 \text{ m}^3/\text{s}$ , em vez de três funções  $p(u)$ , conforme (2.8). Neste caso, a FPH resultante, isto é,  $p(q)$  é dado pela envoltória superior de todas a FPHs, conforme mostra Figura 2.5.

**Figura 2.5 – FPH sendo a envoltória superior das combinações.**

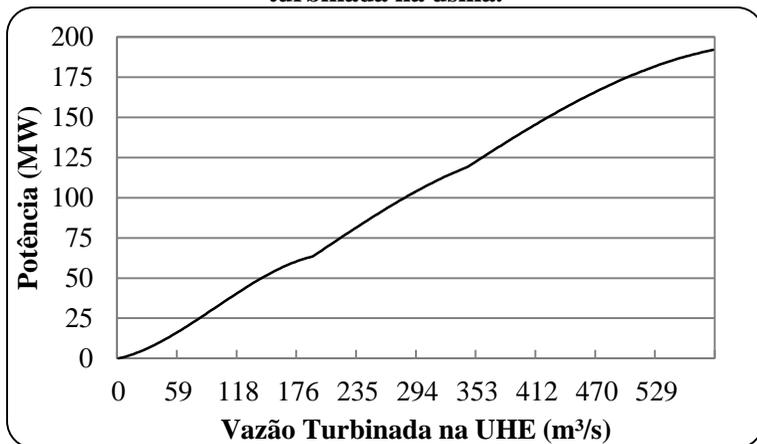


Observa-se que para alguns pontos de vazão turbinada na usina, pode-se obter diferentes níveis de potência em função do número de unidades operando. Por exemplo, para valores de  $q \leq 195$ , a potência máxima é alcançada operando a UHE com apenas uma unidade geradora ligada. Considerando que  $nk$  é o número de pontos discretizados entre os limites da vazão turbinada, uma maneira genérica de se determinar essa envoltória consiste em resolver, para diversos valores de  $q^k$  entre 0 e  $585 \text{ m}^3/\text{s}$ , o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \max \quad & FPH(q^k) = \sum_{i=1}^3 p_i \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^3 u_i = q^k \\ & p_i - G \cdot [R_{0i} + R_{1i} \cdot u_i + R_{2i} \cdot u_i^2 + R_{3i} \cdot (HM_0 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2) + \\ & R_{4i} \cdot (HM_0 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2)^2 + \\ & R_{5i} \cdot u_i \cdot (HM_0 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2)] \cdot (HM_0 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2) \cdot u_i = 0 \\ & 0 \leq u_i \leq 195 \cdot z_i \\ & z_i \in \{0,1\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A Figura 2.6 mostra a FPH de Funil calculada com base no modelo de otimização (2.9), considerando 200 pontos de vazão turbinada na UHE, equitativamente distantes no intervalo de interesse.

**Figura 2.6 – Potência da UHE de Funil Grande em função da vazão turbinada na usina.**

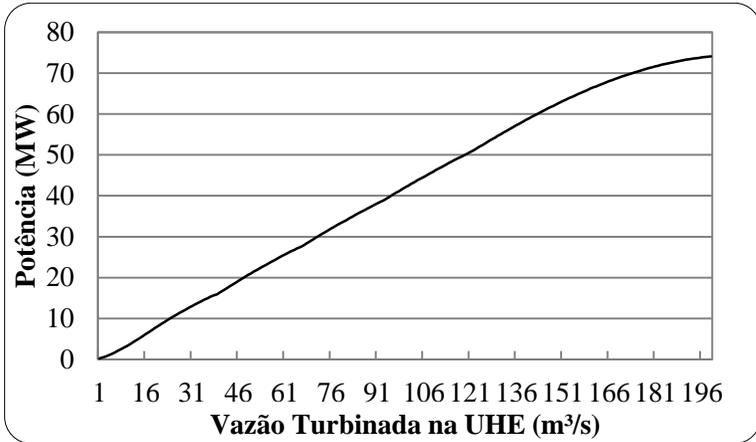


Com base nas características da UHE de Funil, isto é, unidades idênticas, o problema de otimização mostrado anteriormente pode ser resolvido através da combinação das unidades ligadas. Por outro lado, quando a usina não possui tal característica, as combinações que envolvem mais de uma unidade ligada, o despacho ótimo não obedece a divisão em partes iguais da vazão turbinada total, fazendo necessário recorrer então para uma solução numérica de cada problema não linear contínuo associado com (2.9).

A UHE de Sá Carvalho, localizada no estado de Minas Gerais, possui quatro unidades, sendo que apenas duas são idênticas. Os dados

desta UHE podem ser obtidos no Apêndice A, sendo que assim como a UHE de Funil, cada unidade desta UHE depende também somente de  $u$ . Utilizando (2.9) pode-se obter um conjunto de pontos que serve para construir a FPH( $q$ ) observada na Figura 2.7.

**Figura 2.7 – FPH Agregada de Sá Carvalho.**



### 2.2.1.2 Tipo 2 – Com Influência da Vazão Vertida

Esta classe de UHE tem importância significativa, pois é nela que se encontram aproximadamente 55% de todas as usinas do SIN. Em sua grande maioria são usinas de médio porte, como por exemplo UHE de Salto Caxias e Salto Osório; contudo, a UHE de Jirau, uma das maiores usinas do SIN, também se esquadra neste tipo. A FPH de uma unidade  $i$  deste tipo é matematicamente descrita por:

$$p_i = G \cdot [R_{0i} + R_{1i} \cdot u_i + R_{2i} \cdot u_i^2 + R_{3i} \cdot hl_i + R_{4i} \cdot hl_i^2 + R_{5i} \cdot u_i \cdot hl_i] \cdot hl_i \cdot u_i, \quad (2.10)$$

em que:

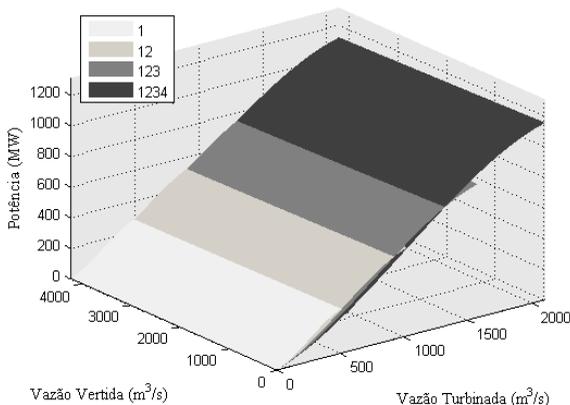
$$hl_i = HM_0 - HJ_0 - HJ_1 \cdot (q + s) - HJ_2 \cdot (q + s)^2 - HJ_3 \cdot (q + s)^3 - HJ_4 \cdot (q + s)^4 - PR_i \cdot u_i^2.$$

As quatro unidades da UHE de Salto Caxias, as quais são idênticas e com vazão turbinada máxima de 525 (m³/s), possuem FPH igual a (2.10). Considere que  $nm$  é o número de pontos discretizados entre os limites da vazão vertida, neste caso, para encontrar a FPH agregada consideram-se vários pontos operativos ( $q^k$ ,  $s^m$ ) e, para cada um deles,

calcula-se o valor da potência associado com cada uma das possíveis combinações das unidades ligadas.

Com base nos dados apresentados no Apêndice A, é possível obter um conjunto de potências máximas no plano  $(q^k, s^m)$ . A Figura 2.8 mostra quatro superfícies que remetem a 1, 2, 3 ou 4 unidades ligadas.

**Figura 2.8 – Potência ótima da UHE de Salto Caxias em função do número de unidades em operação.**



Observa-se que o objetivo neste caso é encontrar uma  $FPH(q,s)$  tal que  $q \leq 2100$  (m<sup>3</sup>/s) e  $s \leq 4000$  (m<sup>3</sup>/s). Desta forma, o modelo de otimização que fornece os pontos ótimos da FPH em questão é dado por:

$$\max FPH_{km}(q^k, s^m) = \sum_{i=1}^4 p_i$$

$$\text{s.a: } \sum_{i=1}^4 u_i = q^k$$

$$p_i - G \cdot [R_{0i} + R_{1i} \cdot u_i + R_{2i} \cdot u_i^2 + R_{3i} \cdot hl_i + R_{4i} \cdot hl_i^2 + R_{5i} \cdot u_i \cdot hl_i] \cdot hl_i \cdot u_i = 0 \tag{2.11}$$

$$hl_i - HM_0 + HJ_0 + HJ_1 \cdot (q^k + s^m) + HJ_2 \cdot (q^k + s^m)^2 + HJ_3 \cdot (q^k + s^m)^3 + HJ_4 \cdot (q^k + s^m)^4 + PR_i \cdot u_i^2 = 0$$

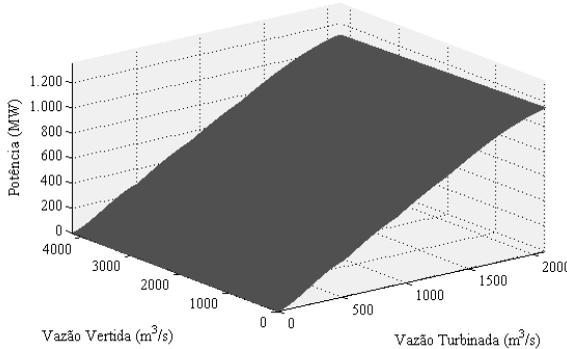
$$0 \leq u_i \leq 525 \cdot z_i$$

$$z_i \in \{0,1\}.$$

Utilizando uma matriz de discretização com 200 pontos em cada direção (i.e.,  $k=1,200$  e  $m=1,200$ ) e os demais dados no Apêndice A, o

resultado do problema de otimização (2.11) é uma matriz de valores de potência a qual pode ser usada para representar a figura mostrada a seguir.

**Figura 2.9 – FPH Agregada da UHE de Salto Caxias.**



## 2.2.2 Usinas com Capacidade de Regularização

As usinas com capacidade de regularização têm um reservatório de tamanho suficiente para acumular água em épocas de cheia e usar em épocas de estiagem. Estas construções geralmente têm grande capacidade de geração e possuem vazão maior que a mínima natural. Dentro deste tipo de UHE, este trabalho também divide a apresentação da FPH agregada em função da dependência da vazão vertida.

### 2.2.2.1 Tipo 3 – Não dependentes da Vazão Vertida

A UHE de Camargos, localizada no rio grande, no estado de Minas Gerais, possui unidades geradoras cuja queda líquida independe da vazão vertida. Essa UHE tem capacidade de armazenamento útil de 672 hm<sup>3</sup>, duas unidades idênticas com produção máxima de 46 MW. Com base nisso, a FPH da *i*-ésima unidade pode ser descrita pela Equação (2.12).

$$\begin{aligned}
 p_i &= G \cdot [R_{0i} + R_{1i} \cdot u_i + R_{2i} \cdot u_i^2 + R_{3i} \cdot hl_i + R_{4i} \cdot hl_i^2 + \\
 &\quad R_{5i} \cdot u_i \cdot hl_i] \cdot hl_i \cdot u_i, \\
 hl_i &= HM_0 + HM_1 \cdot v + HM_2 \cdot v^2 + HM_3 \cdot v^3 + \\
 &\quad HM_4 \cdot v^4 - HJ_0 - PR_i \cdot u_i^2.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

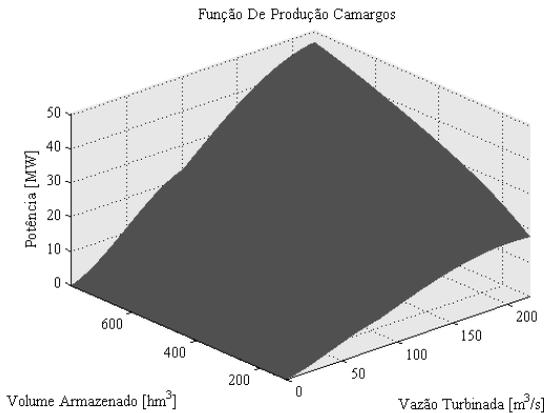
Observa-se que a queda líquida é dependente do volume apenas, uma vez que, segundo os dados oficiais, a FCJ é modelada por um valor constante HJ<sub>0</sub>.

Da mesma forma que na seção anterior, a FPH para a UHE de Camargos pode ser obtida utilizando os dados apresentado no Apêndice A, e considere que  $n_j$  é número de pontos discretizados do volume armazenado, com isso, executando o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & FPH_{kj}(q^k, v^j) = \sum_{i=1}^2 p_i \\
 \text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^2 u_i = q^k \\
 & p_i - G \cdot [R_{0i} + R_{1i} \cdot u_i + R_{2i} \cdot u_i^2 + R_{3i} \cdot hl_i + R_{4i} \cdot hl_i^2 + \\
 & R_{5i} \cdot u_i \cdot hl_i] \cdot hl_i \cdot u_i = 0 \\
 & hl_i - HM_0 - HM_1 \cdot v^j - HM_2 \cdot (v^j)^2 - HM_3 \cdot (v^j)^3 - \\
 & HM_4 \cdot (v^j)^4 + HJ_0 + PR_i \cdot u_i^2 \\
 & 0 \leq u_i \leq 110 \cdot z_i \\
 & z_i \in \{0,1\}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

A Figura 2.10 apresenta FPH agregada de Camargos em que são utilizados 200 pontos operativos ( $q^k, v^j$ ).

**Figura 2.10 – FPH agregada da UHE de Camargos.**



Este tipo de usina compreende cerca de 5% das usinas do SIN. Além da UHE de Camargos, outras UHEs com FPH desta natureza são Porto Estrela, Santa Branca, estas localizadas na Região Sudeste, bem como a UHE de Governador Pedro Viriato Parigot de Souza construída no estado do Paraná.

### 2.2.2.2 Tipo 4 – Dependentes da Vazão Vertida

As FPHs das unidades desta classe de UHEs dependem de todas as variáveis de estado e controle descritas na Seção 2.1. No tocante ao SIN, geralmente este tipo de empreendimento representa reservatórios do sistema com alta capacidade de regularização e também com elevada geração de energia, como por exemplo as UHEs de Furnas e de Ilha Solteira. Também correspondem a cerca de 43% de todas as usinas do SIN.

Matematicamente, a produção de potência pela  $i$ -ésima unidade obedece a seguinte expressão:

$$p_i = G \cdot [R_{0i} + R_{1i} \cdot u_i + R_{2i} \cdot u_i^2 + R_{3i} \cdot hl_i + R_{4i} \cdot hl_i^2 + R_{5i} \cdot u_i \cdot hl_i] \cdot hl_i \cdot u_i,$$

em que :

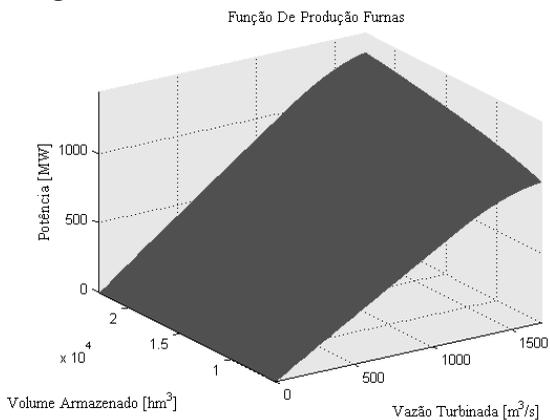
$$hl = HM_0 + HM_1 \cdot v + HM_2 \cdot v^2 + HM_3 \cdot v^3 + HM_4 \cdot v^4 - HJ_0 - HJ_1 \cdot (q + s) - HJ_2 \cdot (q + s)^2 - HJ_3 \cdot (q + s)^3 - HJ_4 \cdot (q + s)^4 - PR_i \cdot u_i^2. \quad (2.14)$$

Considerando a UHE de Furnas, a qual possui dois conjuntos geradores com 6 e 2 unidades respectivamente, com produção total máxima de 1.312 MW, o modelo de otimização utilizado para a construção de uma FPH equivalente para essa usina é dado por:

$$\begin{aligned}
\max \quad & FPH(q^k, v^j, s^m) = \sum_{i=1}^6 p_{i1} + \sum_{i=1}^2 p_{i2} \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^6 u_{i1} + \sum_{i=1}^2 u_{i2} = q^k \\
& p_{i1} - G \cdot [R_{0i1} + R_{1i1} \cdot u_{i1} + R_{2i1} \cdot u_{i1}^2 + R_{3i1} \cdot hl_{i1} + \\
& R_{4i1} \cdot hl_{i1}^2 + R_{5i1} \cdot u_{i1} \cdot hl_{i1}] \cdot hl_{i1} \cdot u_{i1} = 0, \\
& p_{i2} - G \cdot [R_{0i2} + R_{1i2} \cdot u_{i2} + R_{2i2} \cdot u_{i2}^2 + R_{3i2} \cdot hl_{i2} + \\
& R_{4i2} \cdot hl_{i2}^2 + R_{5i2} \cdot u_{i2} \cdot hl_{i2}] \cdot hl_{i2} \cdot u_{i2} = 0, \\
& hl_{i1} - HM_0 - HM_1 \cdot v^j - HM_2 \cdot (v^j)^2 - HM_3 \cdot (v^j)^3 - \\
& HM_4 \cdot (v^j)^4 + HJ_0 + HJ_1 \cdot (q^k + s^m) + HJ_2 \cdot (q^k + s^m)^2 + \\
& HJ_3 \cdot (q^k + s^m)^3 + HJ_4 \cdot (q^k + s^m)^4 + PR_i \cdot u_{i1}^2 = 0, \\
& hl_{i2} - HM_0 - HM_1 \cdot v^j - HM_2 \cdot (v^j)^2 - HM_3 \cdot (v^j)^3 - \\
& HM_4 \cdot (v^j)^4 + HJ_0 + HJ_1 \cdot (q^k + s^m) + HJ_2 \cdot (q^k + s^m)^2 + \\
& HJ_3 \cdot (q^k + s^m)^3 + HJ_4 \cdot (q^k + s^m)^4 + PR_i \cdot u_{i2}^2 = 0, \\
& 0 \leq u_{i1} \leq 211 \cdot z_{i1}, 0 \leq u_{i2} \leq 213 \cdot z_{i2} \\
& z_{i1} \in \{0,1\}; z_{i2} \in \{0,1\}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

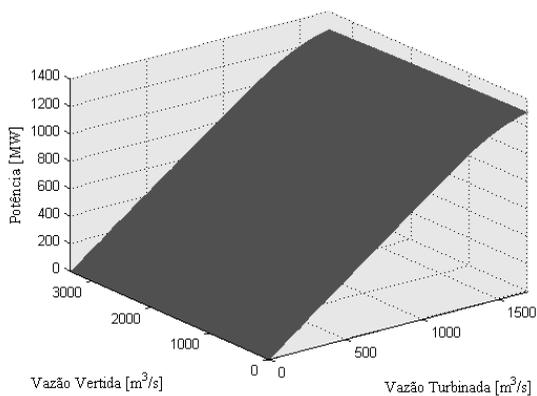
Para a obtenção da FPH agregada é necessário discretizar a região viável em  $k \cdot j \cdot m$  pontos. Considerando 200 pontos em cada dimensão, divididos igualmente dentro dos respectivos limites das variáveis, obtém-se então uma matriz tridimensional com os valores da potência otimizada para cada valor discretizado. A FPH da UHE de Marimbondo, a qual considerada o vertimento nulo, é vista na Figura 2.11.

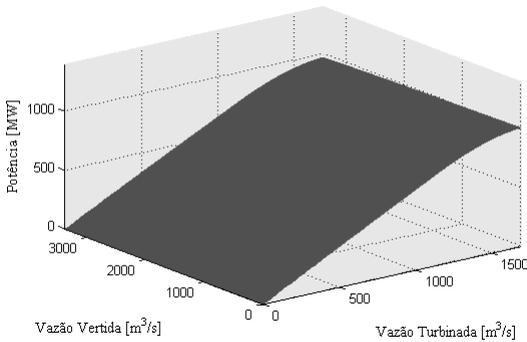
**Figura 2.11 – FPH de Furnas com  $s = 0$  ( $m^3/s$ ).**



Afim de mostrar a influência do vertimento na UHE de Marimbondo, as figuras mostradas a seguir consideram dois valores de volumes constante nas respectivas FPH agregadas.

**Figura 2.12 – FPH de Furnas com  $v = 22950$   $hm^3$ .**



**Figura 2.13 – FPH de Furnas com  $v = 5733 \text{ hm}^3$ .**

Para finalizar, vale ressaltar que este trabalho está interessado em construir um modelo linear ou linear por partes para ser utilizado no problema de médio prazo. Nesse sentido, deve-se então realizar uma outra etapa a qual é dada pela construção de tais modelos com base no conjunto de dados oriundos da resolução dos problemas não linear inteiro mistos apresentados neste capítulo. Esse é, portanto, o principal objetivo do próximo capítulo.

### 3 REPRESENTAÇÃO LINEAR DA FUNÇÃO DE PRODUÇÃO HIDRELÉTRICA

Um dos principais algoritmos utilizados para resolver o Problema de PMOP é a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) (PEREIRA; PINTO, 1991). Neste algoritmo, a ideia principal baseia-se na construção de uma aproximação do custo futuro esperado de um determinado estágio de tempo através de funções lineares por partes. Contudo, para que as propriedades de convergência da PDDE sejam asseguradas, é necessário que todas as equações envolvidas no PMOP formem um conjunto convexo.

Conforme apresentado no Capítulo 2, a Função de Produção Hidrelétrica (FPH) não é convexa e, conseqüentemente, para resolver o problema de PMOP com a PDDE é necessário encontrar maneiras adequadas de aproximar a FPH por meio de um modelo que mantenha a convexidade do problema. Neste capítulo são apresentadas duas formas de realizar essa aproximação. A primeira visa representar a FPH agregada apresentada no capítulo anterior utilizando um modelo linear por partes, em que a FPH depende de  $q$ , e também pode depender do volume armazenado<sup>2</sup> e da vazão vertida<sup>3</sup>. Por outro lado, a segunda forma é baseada no cálculo de um valor de produtividade constante, em que a FPH depende linearmente apenas da vazão turbinada total  $q$ . Assim como no capítulo anterior, exemplos numéricos baseados em UHEs do SIN são utilizados para auxiliar na descrição dos procedimentos propostos para as duas formas de linearizações.

#### 3.1 Representação Linear por Partes da FPH

Conforme visto anteriormente, a FPH agregada é caracterizada como uma função não convexa. Neste caso, deve-se construir uma função côncava, pois esta, em geral, representa melhor as características físicas da geração hidrelétrica quando comparada com uma função convexa. Neste sentido, este trabalho faz uso da metodologia do *Convex Hull* (CH) para construir uma envoltória superior da FPH, dada por uma função côncava linear por partes. A metodologia do CH é bastante utilizada neste tipo de problema pois é possível construir, de maneira eficiente, aproximações lineares por parte de funções com uma, duas ou três

---

<sup>2</sup> Exceto usinas fio d'água.

<sup>3</sup> Exceto usinas em que a vazão vertida não influencia no canal de fuga.

variáveis, abrangendo assim usinas de todos os tipos abordadas no Capítulo 2.

Para tornar mais didática a apresentação das etapas referentes ao uso do CH, será utilizado um exemplo numérico referente a FPH agregada da UHE Furnas, pois a mesma possui dependência de todas as variáveis  $(v, q, s)$ . Os dados utilizados podem ser encontrados no Apêndice B.

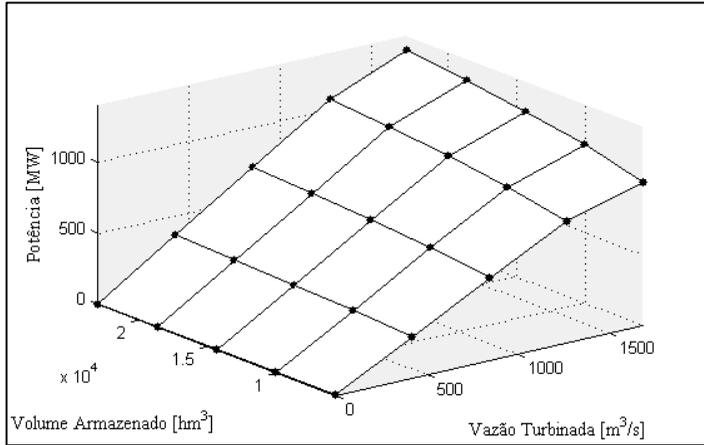
### 3.1.1 Etapa 1 - Cálculo da Grade de Pontos

A primeira etapa consiste em definir a FPH agregada para a UHE, em vez de representar a função para cada unidade geradora da usina. Conforme visto, isso está apresentado no capítulo anterior, mais especificamente esta primeira etapa corresponde aos passos mostrados na Seção 2.2.2.2. Como resultado do modelo (2.15), inicialmente selecionam-se os pontos com  $s^m = 0^4$ , isto é, escolhe-se uma quantidade de pontos igualmente espaçados de  $v^j$  e  $q^k$ , formando uma grade de pontos com número total NG. Para exemplificar, considere uma grade de pontos  $(k = j = 1, \dots, 5)$ , isto é,  $ng = 25$ , para a UHE Furnas a qual está mostrada na Figura 3.1. Note-se que as linhas que unem os pontos são apenas ilustrativas, pois na verdade nesta etapa só estão disponíveis os pontos.

---

<sup>4</sup> Dado que o vertimento, em geral, é nulo e o mesmo possui um efeito mais comportado sobre as não linearidades de uma FPH, a estratégia adotada para as usinas como Furnas consiste em inicialmente aplicar o *Convex Hull* em tornos das variáveis mais importantes, i.e.,  $v$  e  $q$ , para depois ajustar o vertimento, conforme detalhado na sequência.

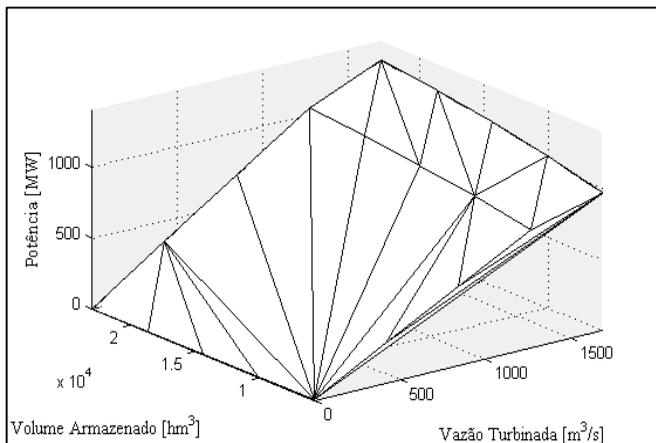
**Figura 3.1 – Conjunto de pontos da FPH Furnas Agregada, considerando vertimento nulo.**



### 3.1.2 Etapa 2 - Convexificação da FPH

Em geral, uma FPH dada pela interligação dos pontos mostrados na Figura 3.1 não é côncava. Para torná-la desta natureza, inicialmente utiliza-se a grade de pontos calculada na etapa um que representa a FPH não linear como dado de entrada para um algoritmo associado com a metodologia de CH, o qual retorna os planos mostrados na Figura 3.2.

**Figura 3.2 – Envoltória obtida pelos planos escolhidos pelo algoritmo do *Convex Hull*.**



Matematicamente, os planos escolhidos pelo CH podem ser dados por:

$$p^e + PH_{0e} + PH_{1e} \cdot q + PH_{2e} \cdot v = 0, \quad e = 1, \dots, ne. \quad (3.1)$$

Em que:

$PH_{0e}, PH_{1e}, PH_{2e}$  coeficientes dos planos obtidos no CH;

$ne$  número de planos obtidos no CH.

No entanto, nota-se que o algoritmo fornece planos que contornam os pontos inferiormente, os quais devem ser eliminados para a construção da FPH desejada. Assim nesta etapa deve ser feita uma seleção dos planos que contornam a superfície superior da FPH, conforme o algoritmo de seleção abaixo. Considere que  $Z$  seja o conjunto de planos selecionados e  $nz$ , portanto, o número de planos selecionados.

### Algoritmo 3.1

1. Fazer  $e = 1, \dots, nz$ 
  - Fazer  $g = 1, \dots, ng$
  - Calcule  $p(v^g, q^g)$  e  $p^e(v^g, q^g)$ ;
  - Fim
  - Se  $\forall g p^e(v^g, q^g) \geq p(v^g, q^g)$
  - O plano  $e \in Z$ ;
  - $NZ = NZ + 1$ ;
  - Fim
- Fim

Depois de executado o Algoritmo 3.1, a nova representação matemática é:

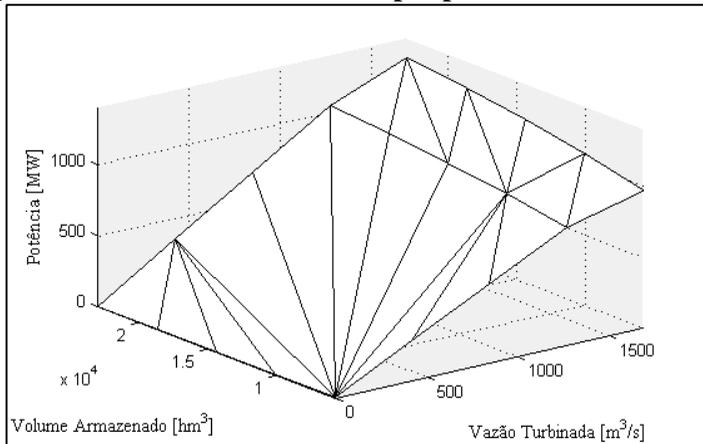
$$p^z + PH_{0z} + PH_{1z} \cdot q + PH_{2z} \cdot v = 0, \quad z = 1, \dots, NZ. \quad (3.2)$$

Em que:

$PH_{0z}, PH_{1z}, PH_{2z}$  coeficientes dos planos obtidos no Algoritmo 3.1.

A Figura 3.3 mostra os planos selecionados resultantes da aplicação do Algoritmo 3.1. Conforme pode ser visto, tem-se como resultado final um modelo côncavo linear por partes da FPH.

**Figura 3.3 – Modelo côncavo linear por partes da FPH de Furnas.**



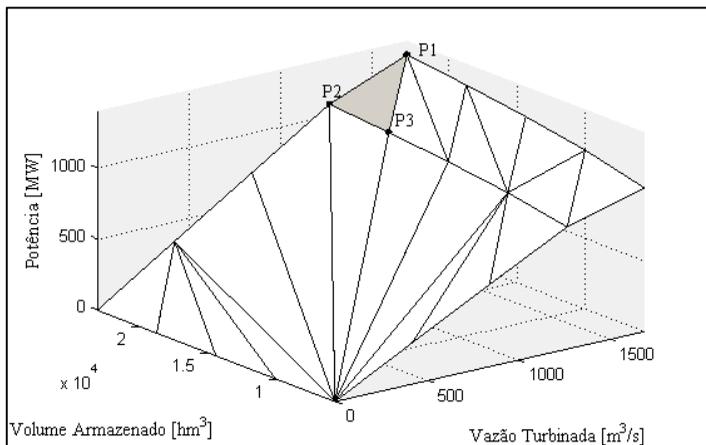
Deve-se notar que o modelo da Figura 3.3 foi gerado em função apenas de  $q$  e  $v$ . Portanto, o próximo passo consiste em considerar o efeito do vertimento, conforme descrito a seguir.

### 3.1.3 Etapa 3 - Inclusão da Vazão Vertida

Dado que cada plano selecionado na etapa dois admite apenas um coeficiente em  $s$ , a escolha deste coeficiente é feita aplicando-se uma aproximação linear secante na FPH não linear na dimensão de  $s$ , em cada ponto extremo ao respectivo plano selecionado na etapa dois. Uma vez que, para cada ponto extremo  $c$  ao plano existe um distinto coeficiente angular, chamado de  $PH_{3z, Pc}$ , tal que,  $c=1, \dots, 3$ , com isso, deve-se escolher o menor entre eles para ser o coeficiente da vazão vertida do plano em questão. De maneira mais detalhada, o valor de  $PH_3$  é calculado por um modelo de otimização irrestrito, que visa minimizar o desvio médio quadrático entre a FPH não linear e sua respectiva aproximação.

Para detalhar esse procedimento, considere a Figura 3.4, a qual mostra a envoltória côncava calculada na Etapa 2. Nota-se que é destacado uma aproximação linear, cujos pontos extremos ( $q$ ;  $v$ ;  $p^e$ ) da mesma são dados por  $P1 = (1692; 22950; 1301)$ ,  $P2 = (1269; 22950; 1250)$  e  $P3 = (1269; 18646; 1039)$ .

**Figura 3.4 – FPH aproximada com destaque em um plano.**



Na Figura 3.4, considere P2 o qual está associado com  $s = 0$ . A partir disso, gera-se um vetor de valores<sup>5</sup> potência da UHE, considerando os valores  $q$  e  $v$  fixos de P2, com base em uma discretização em  $s$ , de 0 até  $S^{\max}$ <sup>6</sup>. A seguir, o próximo passo consiste em obter o valor do coeficiente angular ( $PH_3$ ) que melhor se ajusta com os pontos deste vetor. Isso é feito aplicando-se um método de mínimos quadrados discreto semelhante a exposta em (3.3). Considere o plano  $z$  destacado e P2 o pontos extremo do mesmo plano  $z$ , dado que os pontos  $(q,v)$  são fixos, podemos obter um coeficiente  $PH_{3z,P2}$  para o ponto P2.

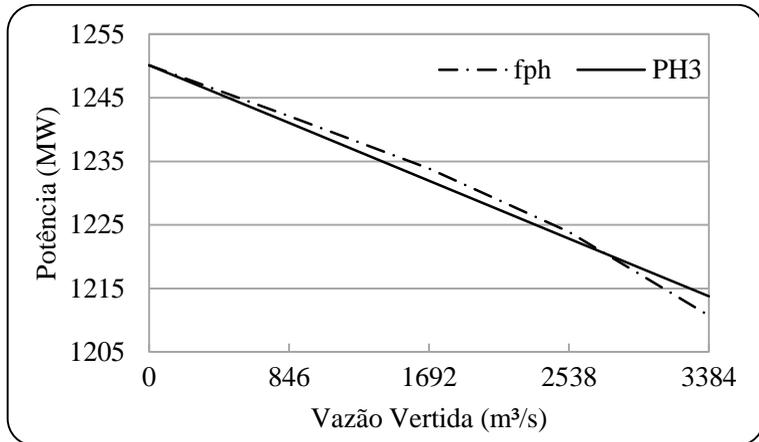
$$PH_{3z,P2} = \min \frac{1}{5} \sum_{s=0}^5 (p(q, v, s^s) - (p^e(q, v) - PH_{3z,P2} \cdot s^s))^2 \quad (3.3)$$

O resultado final deste procedimento, está mostrado na Figura 3.5.

<sup>5</sup> Para todas as usinas foi considerado um vetor de 5 valores entre os limites da vazão vertida, isto é,  $nm=5$ .

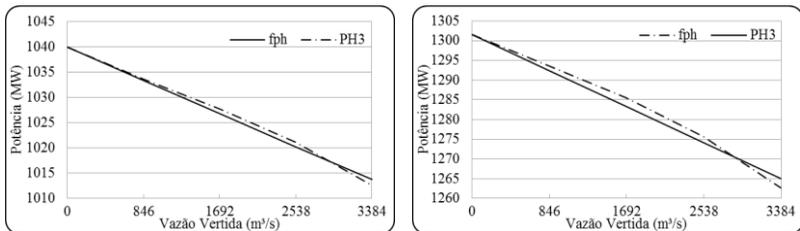
<sup>6</sup> A vazão vertida máxima para todas as usinas foi considera com sendo duas vezes o valor da vazão turbinada máxima da mesma. Salvo para poucas exceções as quais obtiveram FPH não condizente com um comportamento comum, por isso, tiveram os limites máximos de S tiveram que ser ajustados.

**Figura 3.5 – Cálculo do  $PH_{3z,P2}$  associado com o vertimento para o ponto P2.**



O mesmo procedimento utilizado para P2 deve ser adotado para os pontos P1 e P3. Conseqüentemente, são obtidos mais dois valores de  $PH_{3z}$ , conforme mostra a Figura 3.6.

**Figura 3.6 – Coeficientes  $PH_{3z,P1}$  e  $PH_{3z,P3}$  referentes aos pontos P1 e P3.**



Devido as razões detalhadas em (DINIZ; MACEIRA, 2008), o valor de  $PH_{3z}$  que deve ser escolhido para compor o plano associado com P1, P2 e P3 é aquele com o menor valor, isto é, o mais negativo. No exemplo utilizado referente a UHE Furnas, o menor valor é -0,0109 obtido com o ponto P2. De posse desse  $PH_{3z}$ , o hiperplano que contém o plano com os pontos P1, P2 e P3 é dado por:

$$p^z - 0,5289 \cdot q - 0,0088 \cdot v + 0,0109 \cdot s \leq 204,56 \quad (3.4)$$

Nota-se pela Figura 3.4 que se tem um total de 20 planos, isto é, deve-se fazer 20 vezes as etapas descritas para encontrar todos os

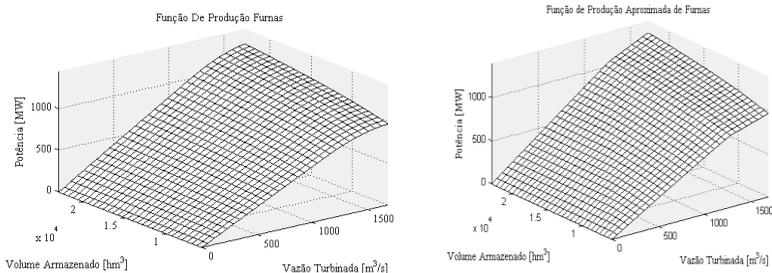
coeficientes referentes ao vertimento. Para o exemplo ilustrativo, a Tabela 3.1 mostra os coeficientes para a FPH côncava linear por partes da UHE de Furnas.

**Tabela 3.1 – Tabela dos coeficientes dos hiperplanos que definem a aproximação linear por partes da FPH de Furnas.**

$z$	$PH_0$	$PH_1$	$PH_2$	$PH_3$
1	0,00140	0,8549	0,0000	-0,0000
2	-88,6317	0,6866	0,0155	-0,0071
3	-75,0850	0,6947	0,0131	-0,0139
4	-60,7192	0,7117	0,0106	-0,0139
5	-0,8426	0,8489	0,0001	-0,0112
6	-2,1920	0,8441	0,0004	-0,0111
7	-50,4705	0,7298	0,0088	-0,0145
8	-93,3492	0,6799	0,0168	-0,0071
9	-87,8529	0,6605	0,0187	-0,0071
10	222,4397	0,4160	0,0187	-0,0071
11	264,6601	0,3561	0,0246	-0,0025
12	0,0015	0,8549	0,0000	-0,0112
13	208,0023	0,4716	0,0131	-0,0139
14	235,0895	0,4160	0,0174	-0,0071
15	225,8928	0,4485	0,0142	-0,0075
16	194,3188	0,5107	0,0106	-0,0139
17	209,6723	0,4835	0,0119	-0,0139
18	0,0016	0,8549	0,0000	-0,0113
19	0,0017	0,8549	0,0090	-0,0113
20	204,5675	0,5289	0,0088	-0,0109

De posse dos valores mostrados na Tabela 3.1, é possível ilustrar a FPH não linear calculada pelo modelo de otimização proposto no capítulo anterior e a aproximação linear por partes resultante. Estas duas FPHs estão expostas na Figura 3.7, respectivamente.

**Figura 3.7 – Dois modelos da FPH de Furnas.**



Além do caso com três variáveis mostrado até aqui, destaca-se que existem usinas em que a FPH depende apenas de duas variáveis. Por exemplo, as usinas em que o vertedouro não influencia no nível de jusante, a FPH depende apenas da vazão turbinada e do volume armazenado. Há também usinas a fio d'água, em que a FPH não depende do volume armazenado. Por fim, existe ainda usinas em que a FPH depende apenas da vazão turbinada. Em todos esses casos, isto é, quando a FPH tem uma ou duas variáveis, a função linear por partes é obtida por meio dos passos apresentados nas etapas 1 e 2, apenas.

### 3.1.4 Análise da Precisão da Aproximação Linear por Partes

Embora as FPHs apresentadas na Figura 3.7 se assemelhem visualmente, é necessário quantificar o nível de precisão que a FPH linear por partes possui em relação ao modelo não linear original. Este tipo de análise é importante para verificar se os pontos escolhidos estão adequados, dentro de um limite de precisão preestabelecido. Neste trabalho, a fim de medir essa precisão, é usado o valor do erro médio quadrático, o qual é matematicamente escrito a seguir.

$$EMQ = \frac{\sqrt{\sum_{f=1}^{NF} (FPH_f - FPHa_f)^2}}{\sqrt{NF}}, \quad (3.5)$$

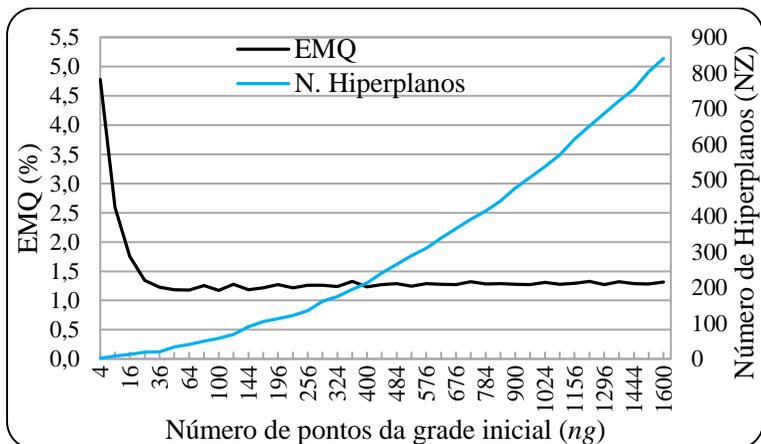
em que:

- EMQ erro médio quadrático de uma dada usina (MW);
- $f$  índice associado ao pontos utilizados na discretização da grade de pontos para o cálculo EMQ, tal que  $f=1, nf$ ;
- $FPH_f$  valor da FPH não linear original avaliada no ponto operativo  $f$  (MW);
- $FPHa_f$  valor da FPH linear por partes avaliada no ponto operativo  $f$  (MW).

Observa-se que a quantidade de planos de uma determinada FPHa é consequência do número de pontos da grade de entrada ( $ng$ ); conseqüentemente, refletindo diretamente no EMQ, por isso, é possível estabelecer uma relação entre essas três grandezas. A Figura 3.8, relativa a UHE de Furnas, mostra o comportamento do EMQ e o total de hiperplanos utilizado na construção da FPHa em função do número de

pontos da grade de entrada NG, em que NG tem valor até 1600. Para traçar esta relação, cada ponto da Figura (3.8) é referente a um  $ng$  igualmente espaçado entre as dimensões de  $q$  e  $v$ .

**Figura 3.8 – EMQ e número de hiperplanos em função do número de pontos utilizado.**



A Figura 3.8 mostra que houve uma estabilização do erro médio quadrático em aproximadamente 1,3 %. Esse valor é alcançado por volta de uma grade de 900 pontos (30 em  $q$  e  $v$ , igualmente espaços em seus respectivos domínios), retornando, por meio do Algoritmo 3.1, 478 hiperplanos. De acordo com este caso, pode-se notar que por volta de 25 pontos aproximadamente o EMQ quase se estabiliza, utilizando menos de 50 hiperplanos. Além disso, os resultados mostram que o menor erro não é alcançado com 1600 pontos. Na verdade, o menor EMQ é de 1,1731% alcançado com uma grade de 100 pontos e 58 hiperplanos. Este comportamento mostra que a maneira como é feita a discretização pode afetar o erro, pois depende da característica da FPH em questão.

### 3.1.5 Heurística para a Busca dos Planos Ótimos

No problema do PMOP, uma das principais preocupações está relacionada ao tempo computacional em que o modelo concentra na obtenção de uma política operativa. Para obter uma política operativa, a PDDE decompõe o problema do PMOP em um número que usualmente pode ultrapassar dezenas de milhares de modelos de programação linear (PL) por iteração. No tocante ao caso Brasileiro, dependendo do caso, bem como do nível de precisão desejado na PDDE, um processo iterativo pode facilmente requerer a resolução de mais de um milhão de problemas

de PL. Neste cenário, é notório que quanto maior o tamanho de cada PL, mais onerosa será a solução do problema de PMOP.

Neste sentido, esta seção mostra uma heurística para encontrar uma grade de pontos de tamanho tal que forneça um EMQ baixo, quando comparada com aquele tipo de discretização do CH igualmente espaçada em  $q$  e  $s$ . Como resultado, tem-se esperado um número baixo de planos associado. A heurística é apresentada sob forma do Algoritmo 3.2, a seguir. A ideia geral tem como base em percorrer a maior quantidade de combinações possíveis para um número de discretizações em  $q$  ( $nk$ ) e  $v$  ( $nj$ ). Uma observação pertinente neste momento é que, existe diferença entre a grade inicial de pontos ( $ng$ ) e a grade de pontos para o cálculo do EMQ ( $nf$ ), esta última é fixa com tamanho de 12500 pontos (50 pontos em  $q$  e  $v$  e cinco em  $s$ ).

### Algoritmo 3.2

1. Escolhe-se uma quantidade de pontos nas dimensões ( $q,v$ ) chamados de  $nk$  e  $nj$  respectivamente.
2. Escolhe-se  $nf$
3. Fazer  $k=2,\dots, nk$   
Fazer  $j=2,\dots, nj$

Etapa 1 - Cálculo da Grade de Pontos;

Executar Etapa 2 - Convexificação da FPH;

Executar Etapa 3 - Inclusão da Vazão Vertida;

Calcular EMQ para  $f=1,\dots,nf$ ;

Armazenar EMQ e  $nz$  para os respectivos  $k$  e  $j$ ;

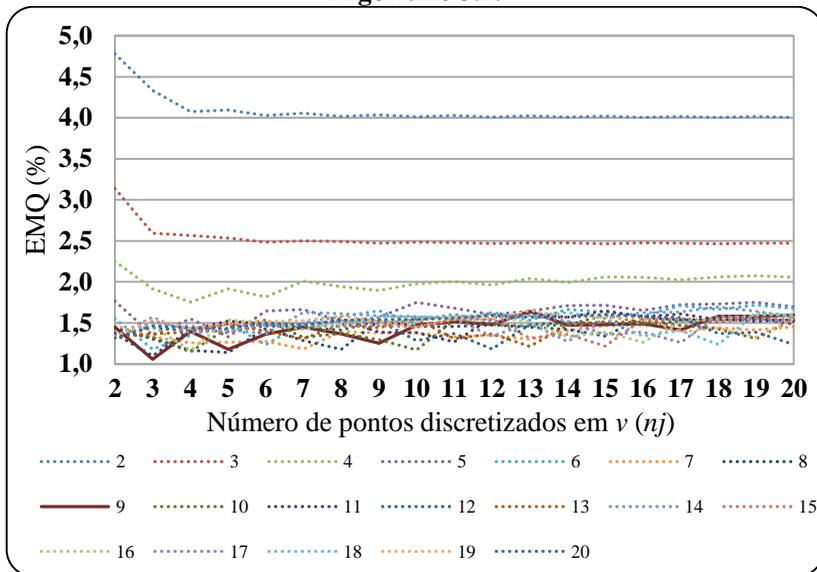
Fim

Fim

4. Depois de executado  $(nk-1) \times (nj-1)$  vezes o ponto 3, a quantidade de planos ótimo e da grade de pontos está ligada ao valor do mínimo global do vetor a qual estão armazenados os valores de EMQ.

Para demonstrar os resultados da aplicação da heurística pela busca dos planos ótimos, novamente é feito uso da UHE Furnas. Com base no Algoritmo 3.2, assume-se uma grade (NG) máxima de 400 pontos com  $nk = 20$ ,  $nj = 20$ , isto é, 20 discretizações em  $q$  e  $v$  e mais cinco em  $s$ . Com isso, a Figura 3.9 mostra os resultados de todas as combinações calculadas, a legenda da figura remete-se aos pontos discretizados em  $q$  ( $nk$ ).

**Figura 3.9 – EMQ associado com a heurística proposta no Algoritmo 3.2.**



Inicialmente é importante observar que, para um mesmo  $NQ$ , o EMQ é praticamente constante quando se variam os valores de  $NV$ . Isso se dá porque a FPH é bem-comportada matematicamente com relação ao volume, isto é, a aproximação linear na direção  $v$ , para um dado valor de vazão fixada, representa uma boa aproximação.

Observa-se também que para  $nk = 4$ , o EMQ ainda fica acima dos 2% em alguns pontos; porém, a partir de  $nk = 5$ , esse erro cai para valores entre 1 e 2%. Com base na Figura 3.9, o menor valor do EMQ é de 1,05%, obtido com 18 planos ( $nk = 9$  e  $nj = 3$ ).

### 3.2 Representação da FPH por Produtibilidade Constante

A aproximação mais simples para a representação linear da FPH de uma UHE é aquela denominada de produtividade constante, em que se calcula um coeficiente que representa a taxa de variação de potência (MW) por vazão turbinada total ( $m^3/s$ ). Neste tipo de modelagem, a queda líquida e o rendimento são considerados constantes. O produto entre queda, rendimento e a constante  $G$  apresentada no capítulo anterior, definem a produtividade da UHE.

A vantagem dessa modelagem reside na sua simplicidade, uma vez que no modelo de otimização basta incluir a mesma diretamente nas

equações de atendimento à demanda e, portanto, o modelo fica com a menor dimensão possível para uma representação a usinas individualizadas. Por outro lado, devido a eliminação do efeito da queda na produção, esse modelo representa uma aproximação otimista, particularmente para usinas que possuem grandes variações na queda (ou pessimista, dependendo do ponto de operação). A próxima seção detalha o modelo com produtividade constante. É importante citar que os desenvolvimentos realizados no Capítulo 2 não são utilizados na construção desse tipo modelo, conforme justificativas mostradas a seguir.

### 3.2.1 Cálculo da Produtibilidade

Baseado em (2.1), é possível construir a FPH de uma UHE por meio da seguinte expressão:

$$p = G \cdot \eta(q, hl) \cdot hl \cdot q. \quad (3.6)$$

Note-se que, embora a mesma notação do capítulo anterior tenha sido mantida,  $p$ ,  $\eta(\cdot)$  e  $hl$ , representam potência, rendimento e queda líquida equivalente da UHE, respectivamente, em vez da unidade geradora, conforme detalhado em (2.1).

Desta forma, partindo-se de (3.6), é possível definir um coeficiente constante, denominado de produtividade da UHE, que engloba  $G$ ,  $hl$  e  $\eta(\cdot)$ , calculado da seguinte maneira:

$$\rho = G \cdot H \cdot (HM - HJ - HP), \quad (3.7)$$

em que:

- $\rho$  produtividade da UHE [MW/(m<sup>3</sup>/s)];
- $G$  valor constante igual a 0,00981 (MW/(m<sup>3</sup>/s).m);
- $H$  valor fixo do rendimento equivalente na UHE;
- $HM$  valor fixo da cota de montante equivalente (m);
- $HJ$  valor fixo da cota de jusante (m);
- $HP$  valor fixo da perda hidráulica equivalente na UHE (m);

Com base em (3.7) é possível concluir que existem várias possibilidades para definir  $\rho$  pois é necessário escolher diversos pontos operativos que devem ser mantidos constantes na construção do modelo. Uma maneira bem simples, baseada nos dados oficiais disponíveis para o

problema do POMP no caso Brasileiro, é adotada neste trabalho para chegar no seguinte modelo de FPH:

$$p(q) = \rho \cdot q. \tag{3.8}$$

Iniciando pela cota de montante, o valor de HM em (3.6) é calculado através da seguinte integral, a qual define a queda média de montante quando o reservatório tem seu volume útil variado de 0 a 100 %, i.e., do volume mínimo,  $V^{\min}$ , até o volume máximo,  $V^{\max}$ :

$$HM = \frac{1}{V^{\max} - V^{\min}} \int_{V^{\min}}^{V^{\max}} (HM_0 + HM_1 \cdot v + HM_2 \cdot v^2 + HM_3 \cdot v^3 + HM_4 \cdot v^4) dv \tag{3.9}$$

Nota-se que para usinas a fio d’água o valor (3.9) é obtido diretamente dos dados cadastrais. Por sua vez, os demais dados mostrados em (3.7) tem os valores médios previamente calculados no cadastro de dados das usinas do SIN.

Por exemplo, HJ é dado pelo valor médio do canal de fuga. Por outro lado, HP é o coeficiente de perda hidráulica fornecido em percentual da queda bruta ou diretamente em metros. Por último, o produto G·H, conhecido como produtividade específica, em (MW/(m³/s)/m), também está disponível no cadastro oficial das usinas do SIN.

Novamente a UHE Furnas é utilizada como exemplo numérico para mostrar o processo de cálculo da produtividade. O primeiro passo consiste em resolver a integral (3.9), cujos coeficientes e limites de volumes utilizados estão no Apêndice B. Com isso, o resultado desta integral está mostrado na primeira coluna da Tabela 3.2. Adicionalmente, na mesma tabela, estão colocados os demais termos que compõe (3.7).

**Tabela 3.2 – Resultados associados com a UHE Furnas.**

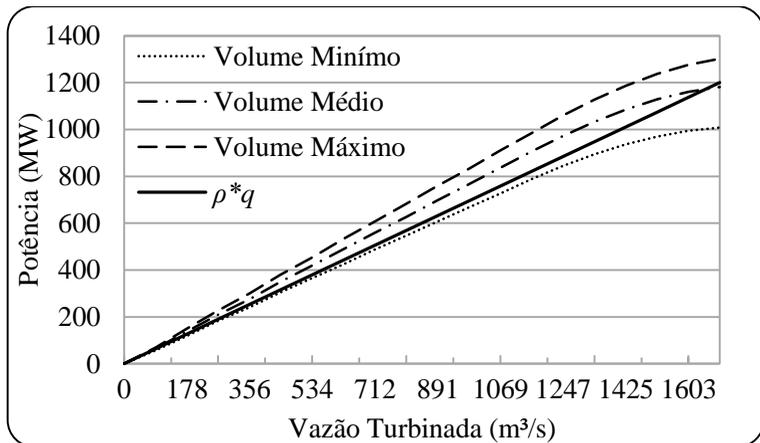
HM (m)	HJ (m)	HP (m)	G·H [MW/(m³/s)/m]
760,36	672,90	5,23	0,008633

Com base nos resultados da Tabela 3.2, o modelo da FPH considerando a produtividade constante para a usina de Furnas é dado por:

$$p(q) = 0,709877 \cdot q. \tag{3.10}$$

A Figura 3.10 apresenta a FPH (3.10), juntamente com as funções obtidas por meio da técnica de agregação detalhada no capítulo anterior. Note-se que as demais funções unidimensionais são obtidas considerando os pontos  $(V^{\min}, 0)$ ,  $(V^{\text{med}}, 0)$  e  $(V^{\max}, 0)$ , cujos valores nulos nestes pontos representam valores de vazão vertida.

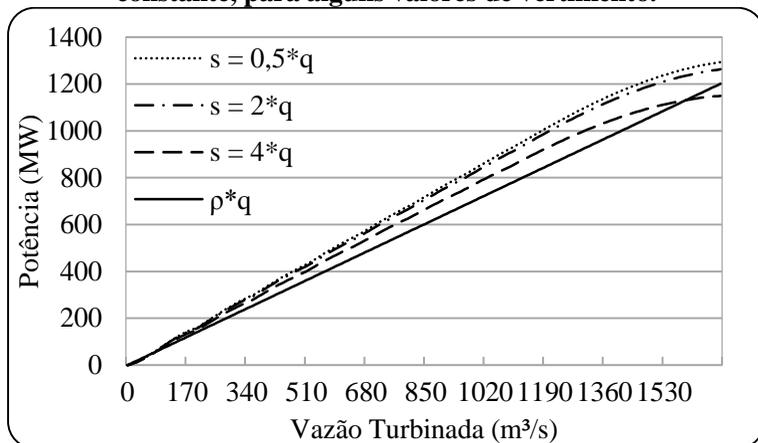
**Figura 3.10 – FPH não linear e com produtibilidade constante – UHE Furnas.**



Nota-se que, para o caso da UHE de Furnas, o modelo a produtibilidade constante possui menores desvios em relação a curva da FPH agregada que considera o volume mínimo fixo.

Como a UHE de Furnas depende também da vazão vertida, Figura 3.11 mostra o impacto do vertimento considerando volume armazenado máximo na função de produção, e da mesma forma que a figura anterior, é mostrado o modelo a produtibilidade constante como forma de comparação. Os pontos operativos adotados na figura são  $(V^{\max}, 0,5 \cdot q^{\max})$ ,  $(V^{\max}, 2 \cdot q^{\max})$  e  $(V^{\max}, 4 \cdot q^{\max})$ .

**Figura 3.11 – FPH não linear com volume máximo e produtividade constante, para alguns valores de vertimento.**



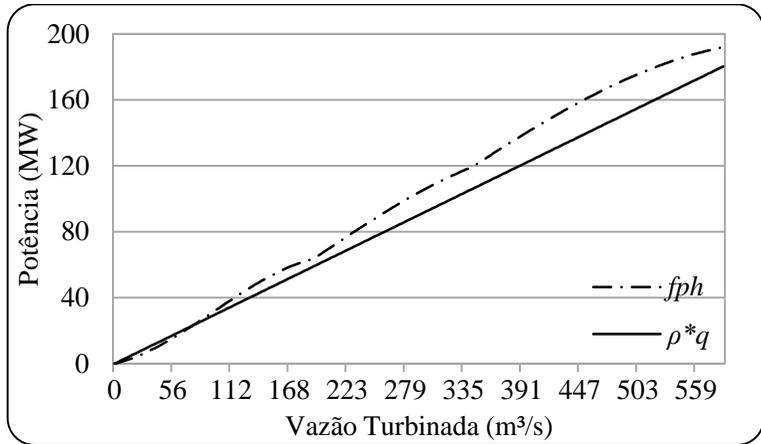
Com isso, para o caso da UHE de Furnas, o modelo da produtividade constante se assemelha mais com a FPH agregada considerando um vertimento quatro vezes maior que a vazão turbinada máxima total da usina.

Para ilustrar um caso em que o volume armazenado não interfere na FPH, considere a UHE de Funil, previamente apresentada no Capítulo 2. Também utilizando os dados mostrados no Apêndice B, pode-se obter o seguinte modelo de FPH com produtividade constante:

$$p(q) = 0,308132 \cdot q. \quad (3.11)$$

A Figura 3.12 ilustra a FPH mostrada em (3.11), juntamente com a função obtida por meio da técnica de agregação detalhada no capítulo anterior.

**Figura 3.12 – FPH e Produtibilidade constante de Funil.**





## 4 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DE MÉDIO PRAZO VIA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA

Este capítulo visa mostrar, por meio de exemplos numéricos reduzidos, como as propostas de modelagem da Função de Produção Hidrelétrica (FPH) podem ser analisadas em termos de qualidade de solução, no contexto do problema do Planejamento da Operação de Médio Prazo (POMP). Para tanto, é utilizado um sistema hidrotérmico fictício em que uma Usina Hidrelétrica (UHE) e duas termelétricas para atender uma demanda de 50 MWm<sup>7</sup> ao longo de cinco meses. A maneira pela qual as usinas devem atender essa demanda é determinada pela solução de um problema de otimização estocástica multiestágio via Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE).

No exemplo numérico, a UHE tem valores operativos de armazenamento (hm<sup>3</sup>) e de vazão turbinada (m<sup>3</sup>/s) dados pelos intervalos [120 – 792] e [0 – 220], respectivamente. Em termos de FPH, a UHE pode ser representada por um modelo com produtibilidade constante ou por meio de uma FPH côncava linear por partes. O valor da produtibilidade adotado no primeiro modelo é de 0,178 MWm/(m<sup>3</sup>/s). Por sua vez, a Tabela 4.1 apresenta os coeficientes do modelo linear por partes, ressaltando-se que a potência ( $p$ ) depende do volume ( $v$ ) e da vazão turbinada ( $q$ ), isto é, cada aproximação linear é dada pela expressão  $p + PH_0 + PH_1 \cdot q + PH_2 \cdot v \leq 0$ .

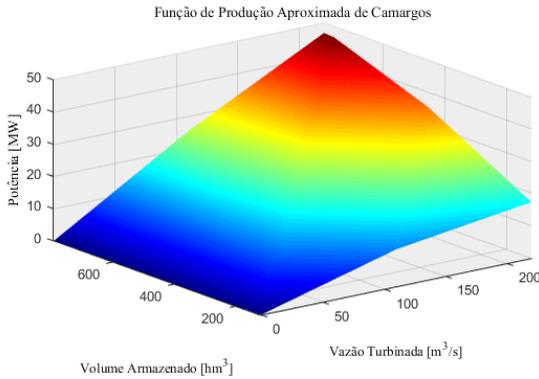
**Tabela 4.1 – Coeficientes do modelo linear por partes da FPH.**

Restrição	PH <sub>0</sub>	PH <sub>1</sub>	PH <sub>2</sub>
1	0,0000	0,2313	0,0000
2	-4,4513	0,1049	0,0371
3	-0,6936	0,1960	0,0058
4	-0,8100	0,0534	0,0539

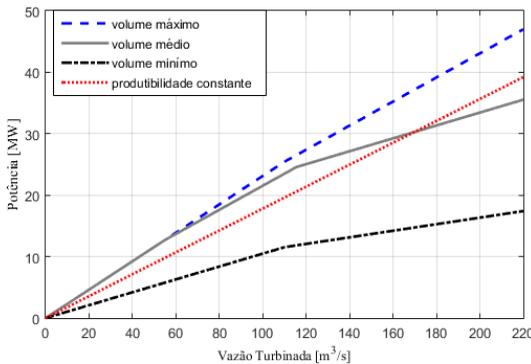
A Figura 4.1 apresenta o modelo linear por partes, sendo que a Figura 4.2 engloba a FPH com produtibilidade constante e o modelo linear por partes com três valores de volumes fixos.

<sup>7</sup> A sigla MWm significa MWmédios em um período de tempo.

**Figura 4.1 – Modelo linear por partes da FPH.**



**Figura 4.2 – Modelo linear por partes da FPH com três valores fixos de  $v$  e modelo de FPH com produtividade constante.**

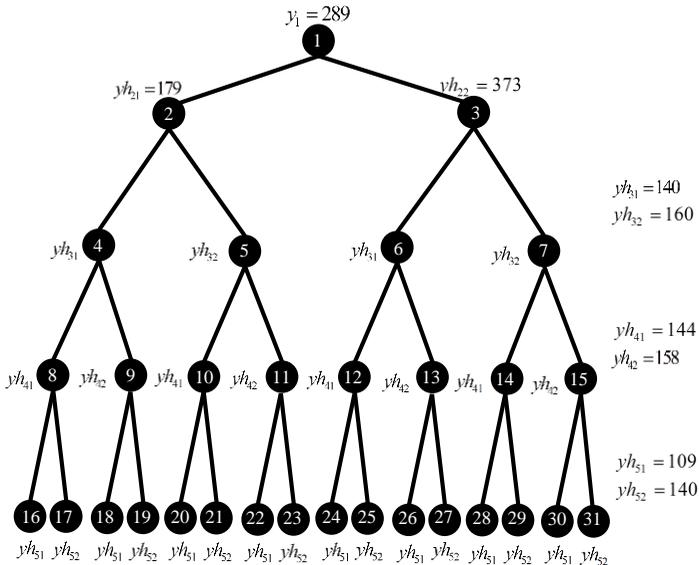


Por outro lado, as duas termelétricas do sistema,  $T_1$  e  $T_2$ , são representadas no problema pelos custos variáveis unitários (CVUs) e pelas faixas operativas de geração. Assim, considera-se que  $T_1$  possui um CVU de 30 R\$/MWh e intervalo de geração de  $[0 - 5]$  MWh. Por sua vez,  $T_2$  tem CVU de 60 R\$/MWh e limites dados por  $[0 - 8]$  MWh. Adicionalmente, representa-se também o déficit de energia por meio de uma termelétrica fictícia  $T_3$  com CVU de 500 R\$/MWh e capacidade de geração igual a demanda total do sistema.

Além dos dados referentes as características operativas das usinas e do reservatório, faz-se necessário também apresentar como as aflúncias incrementais são representadas neste exemplo. Neste contexto, como

usualmente é feito no problema do PMOP<sup>8</sup>, é escolhida uma árvore de cenários com duas realizações por mês, conforme mostra a Figura 4.3. Dado que se tem um total de cinco meses no horizonte de planejamento, e considerando conhecida a afluência no primeiro mês, a árvore possui um total de 16 cenários. É importante citar ainda que não está sendo considerado dependência temporal no modelo de afluência.

**Figura 4.3 – Árvore de cenários em que  $y_{tr}$  é a afluência do mês  $t$  ( $m^3/s$ ) e realização  $r$ . Ainda,  $y_1$  é a afluência do mês 1.**



O tipo de árvore que é utilizado neste trabalho, e mostrado na Figura 4.3, é aquele conhecido como de árvore de amostras comuns (SALVENDY, 2001), ou seja, todos os nós de um determinado mês possuem o mesmo conjunto de nós descendentes. Pelas razões expostas em (INFANGER; MORTON, 1996) e (DE MATOS, 2012), este tipo de arranjo das variáveis aleatórias é necessário para requisitos de garantia de convergência do algoritmo da PDDE.

<sup>8</sup> Isto é, se representa o processo estocástico por meio de uma árvore de cenários referente a evolução no tempo das variáveis aleatórias.

#### 4.1 Solução do Problema do PMOP com FPH Representada por Produtibilidade Constante

No contexto de solução do problema do POMP, a PDDE utiliza uma estratégia de decomposição temporal, em combinação com amostragem da árvore de cenários, para encontrar uma solução que minimiza o custo presente (do primeiro mês) mais o valor esperado do custo futuro (associado com os cenários a partir do segundo mês). O algoritmo da PDDE mostrado na sequência leva em consideração uma estratégia específica de amostragem ao longo do processo iterativo; portanto, existem outras possibilidades as quais podem ser vistas em (DE MATOS; FINARDI, 2012).

Considerando que o volume inicial do reservatório é de 456 hm<sup>3</sup>, bem como o modelo da FPH é dado por  $0,178 \cdot q$ , para o exemplo a seguir, considere a constante 2,592 utilizada na conversão de vazão mensal para volume, com isso, a PDDE inicia seu processo iterativo resolvendo o seguinte problema de Programação Linear (PL) referente ao primeiro mês:

$$z_1 = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.1)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.2)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 456 + 2,592 \cdot 289 \quad (4.3)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.4)$$

$$s \geq 0, \alpha \geq 0.$$

No problema acima tem-se que:

$z_1$	custo ótimo esperado (R\$),
$pt_i$	potência da $i$ -ésima termelétrica (MWm),
$v$	volume armazenado na UHE ao final do mês (hm <sup>3</sup> ),
$q$	vazão turbinada na UHE durante o mês (m <sup>3</sup> /s),
$s$	vazão vertida na UHE durante o mês (m <sup>3</sup> /s),
$\alpha$	custo futuro esperado do mês 2 até o mês 5 (R\$). Esse valor vai ser aproximado ao longo do processo iterativo por meio de uma função linear por partes, denominada de Função de Custo Futuro (FCF).

A Tabela 4.2 apresenta os resultados primais associados com a solução do PL. O custo é  $z_1 = \text{R\$ } 496,88$ .

**Tabela 4.2 – Variáveis primais ótimas do PL de primeiro mês.**

$v$	$q$	$s$	$pt_1$	$pt_2$	$pt_3$	$\alpha$
120	220	198,62	5	5,78	0	0

Na sequência, o algoritmo da PDDE deve escolher um cenário de afluência apresentado na Figura 4.3 para resolver a sequência de problemas de PLs. Esse cenário é escolhido aleatoriamente a cada iteração; neste ponto, as afluências escolhidas são dadas pelos valores dos nós 3, 7, 15 e 30 da Figura 4.3. Com relação aos equacionamentos, é importante notar que o volume final de um determinado mês  $v$  é considerado como volume inicial (conhecido) do mês seguinte.

A seguir estão apresentados todos os problemas do mês 2 até o último mês, com os respectivos resultados primais associados. Observa-se que, por simplicidade, as variáveis primais possuem a mesma notação para cada mês.

$$z_2 = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.5)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.6)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 373 \quad (4.7)$$

$$120 \leq v \leq 792, \quad 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, \quad 0 \leq pt_2 \leq 8, \quad 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.8)$$

$$s \geq 0, \quad \alpha \geq 0.$$

A Tabela 4.3 apresenta os resultados primais associados com a solução do PL. O custo encontrado é  $z_2 = \text{R\$ } 496,88$ .

**Tabela 4.3 – Variáveis primais do PL de segundo mês.**

$v$	$q$	$s$	$pt_1$	$pt_2$	$pt_3$	$\alpha$
120	220	153	5	5,78	0	0

$$z_3 = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.9)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.10)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 160 \quad (4.11)$$

$$120 \leq v \leq 792, \quad 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, \quad 0 \leq pt_2 \leq 8, \quad 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.12)$$

$$s \geq 0, \quad \alpha \geq 0.$$

A Tabela 4.4 apresenta os resultados primais associados com a solução do PL. O custo encontrado é  $z_3 = \text{R\$ } 4.868,71$ .

**Tabela 4.4 – Variáveis primais do PL de terceiro mês.**

$v$	$q$	$s$	$pt_1$	$pt_2$	$pt_3$	$\alpha$
120	160	0	5	8	8,47	0

$$z_4 = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.13)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.14)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 158 \quad (4.15)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.16)$$

$$s \geq 0, \alpha \geq 0.$$

A Tabela 4.5 apresenta os resultados primais associados com a solução do PL. O custo encontrado é  $z_4 = \text{R\$ } 5.046,98$ .

**Tabela 4.5 – Variáveis primais do PL de quarto mês.**

$v$	$q$	$s$	$pt_1$	$pt_2$	$pt_3$	$\alpha$
120	158	0	5	8	8,83	0

$$z_5 = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.17)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.18)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 109 \quad (4.19)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.20)$$

$$s \geq 0, \alpha \geq 0.$$

A Tabela 4.6 apresenta os resultados primais associados com a solução do PL. O custo encontrado é  $z_5 = \text{R\$ } 9.414,50$ . Adicionalmente, o multiplicador de Lagrange associado com a restrição de balanço hidráulico é  $-34,38 \text{ R\$/hm}^3$ . Essa informação será importante mais adiante.

**Tabela 4.6 – Variáveis primais do PL de quinto mês.**

$v$	$q$	$s$	$pt_1$	$pt_2$	$pt_3$	$\alpha$
120	109	0	5	8	17,56	0

Na PDDE, esta etapa de resolver os problemas de PL de maneira desacoplada no tempo do primeiro até o último mês, com as informações das FCFs até então disponíveis, é denominada de Recursão Progressiva

(RP). Ao final desta etapa estão disponíveis informações que servem como critério de parada para o algoritmo. Conforme pode ser visto em (FINARDI; DECKER, 2013), o valor de  $z_1$  é um limite inferior para o valor ótimo do problema. Como este exemplo faz uso de um cenário de afluências por iteração na etapa da RP, o critério de parada é dado pela estabilização do valor de  $z_1$  ao longo das iterações. As principais razões para este tipo de critério podem ser vistas (SHAPIRO, 2011);(HOMEM-DE-MELLO; DE MATOS; FINARDI, 2011).

Portanto, considerando a estabilização de  $z_1$  faz-se necessário realizar mais que uma RP. Contudo, antes de realizar uma segunda RP é fundamental melhorar a aproximação das FCF que foi utilizada nos meses 1 a 4. Nesse sentido, no âmbito da PDDE, deve-se então realizar uma outra etapa, denominada de Recursão Regressiva (RR), a qual é exemplificada numericamente a partir de agora.

No âmbito da PDDE, uma forma de se obter uma aproximação da FCF é dado por (GEOFFRION, 1972), a qual é baseada inicialmente no seguinte equacionamento, considerando especificamente a FCF do mês 4:

$$\begin{aligned}
 \min_{v_0} \quad & \alpha \\
 \text{s.a:} \quad & \alpha \geq \min_{p_{t_1}, v, q, s} \mathcal{L} = 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 - \\
 & \pi \cdot (v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s - v_0 - 2,592 \cdot 109) \\
 \text{s.a:} \quad & 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \\
 & 120 \leq v \leq 792, \quad 0 \leq q \leq 220 \\
 & 0 \leq pt_1 \leq 5, \quad 0 \leq pt_2 \leq 8, \quad 0 \leq pt_3 \leq 50 \\
 & s \geq 0, \quad \alpha \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Em que:

- $\mathcal{L}$  função Lagrangiana de (4.17)-(4.20) do quinto mês para cálculo da FCF do quarto mês considerando a dualização da restrição de balanço hidráulico. Note que  $\alpha$  é função do volume final deixado no reservatório no mês anterior, aqui renomeado para  $v_0$ ;
- $\pi$  multiplicador de Lagrange da restrição de balanço hidráulico (R\$/hm<sup>3</sup>);
- $v_0$  volume final referente ao mês 4. Entende-se com base na estrutura do PL acima que  $v_0$  é a única variável que interfere no valor de  $\alpha$ .

O Problema (4.21) pode ser rearranjado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l}
 \min_{v_0, \alpha \geq 0} \alpha \\
 \text{s.a: } \alpha \geq +\pi \cdot v_0 + \\
 \left( \begin{array}{l}
 \min_{pt_1, q, s, v} \mathcal{L} = 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 - \\
 \pi \cdot (v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s - 2,592 \cdot 109) \\
 \text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 - 50 = 0 \\
 120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220, 0 \leq pt_1 \leq 5, \\
 0 \leq pt_2 \leq 8, \quad 0 \leq pt_3 \leq 50, s \geq 0.
 \end{array} \right) \quad (4.22)
 \end{array}$$

Uma vez que qualquer problema de PL é convexo, sabe-se que a solução do problema em parênteses de (4.22) é igual a solução do problema primal (4.17)–(4.20). Portanto, é possível calcular o valor ótimo da função objetivo do problema de minimização em (4.22) e reescrever este mesmo problema da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l}
 \min_{v_0, \alpha \geq 0} \alpha \\
 \text{s.a: } \alpha \geq +\pi \cdot v_0 + 30pt_1^* + 60pt_2^* + 500pt_3^* \\
 \quad -\pi \cdot (v^* + 2,592 \cdot q^* + 2,592 \cdot s^* - 2,592 \cdot 109)
 \end{array} \quad (4.23)$$

Acima os valores com asterisco representam a solução ótima primal. Contudo, pode-se ver que a função Lagrangiana de (4.21) tem valor ótimo igual ao PL (4.17) – (4.20) quando  $v_0 = 120 \text{ hm}^3$  e  $\pi = -34,38 \text{ R\$/hm}^3$  ou seja:

$$\begin{array}{l}
 z_5^* = 30pt_1^* + 60pt_2^* + 500pt_3^* - \\
 34,38 \cdot (v^* + 2,592 \cdot q^* + 2,592 \cdot s^* - 120 - 2,592 \cdot 109)
 \end{array} \quad (4.24)$$

Com isso, com base em (4.23) e (4.24), e colocando-se as variáveis do lado esquerdo, a aproximação linear para a FCF do quarto mês e afluência referente ao nó 30 fica da seguinte:

$$(4.25)$$

$$\begin{aligned} & \min \alpha \\ \text{s.a: } & \alpha + 34,38 \cdot v_0 \geq z_5^* - (120 \cdot -34,38) \\ \text{i.e:} & \\ & \min \alpha \\ \text{s.a: } & \alpha + 34,38 \cdot v_0 \geq 13.540,10 \end{aligned}$$

Nota-se que, como se tem mais de uma afluência no mês 5, então o mesmo procedimento para o cálculo da aproximação linear anterior deve ser feito para o nó 31. Para tanto, é necessário inicialmente resolver o seguinte problema de PL:

$$z_{5,31} = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.26)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 120 \quad (4.27)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 140 \quad (4.28)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.29)$$

$$s \geq 0, \alpha \geq 0.$$

Acima,  $z_{5,31}$  é o custo do mês 5 associado com a realização de afluência do nó 31. Abaixo os valores da função objetivo e do multiplicador de Lagrange associado com a restrição de balanço hidráulico.

**Tabela 4.7 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{5,31}$ ).**

$z_{5,31}$	$\pi_{5,31}$
6.651,37	-34,38

Fazendo os mesmos passos apresentados anteriormente, e de posse dos dados presentes na Tabela 4.8, é possível que a aproximação linear para a FCF do quarto mês e afluência referente ao nó 31 fica:

$$\begin{aligned} & \min \alpha \\ \text{s.a: } & \alpha + 34,38 \cdot v_0 \geq z_{5,31}^* - (120 \cdot -34,38) \\ \text{i.e:} & \\ & \min \alpha \\ \text{s.a: } & \alpha + 34,38 \cdot v_0 \geq 10.776,97 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Finalizadas as aproximações referentes aos nós 30 e 31, deve-se então fazer o mesmo tipo de procedimento para construir uma melhor aproximação para a FCF do mês 3. Para isso, deve-se resolver os dois

problemas de PL referentes as afluências dos nós 14 e 15, incluindo as informações referentes a FCF do mês 4. Neste ponto, tem-se basicamente duas possibilidades. A primeira delas consiste em incluir as duas restrições através dos problemas (4.25) e (4.30) nos subproblemas dos nós 14 e 15. Essa é uma estratégia denominada de *multi-cut*. Outra possibilidade é fazer um corte esperado, ou seja, aquele dado por uma ponderação das probabilidades das afluências. Essa é a estratégia adotada neste trabalho e, dado que todas as afluências em cada estágio da árvore são equiprováveis, a FCF que será utilizada nos problemas do quarto mês é dada por:

$$\alpha + 0,5 \cdot (34,38 + 34,38) \cdot v_0 \geq 0,5 \cdot (9.414,50 + 6.651,37) + 0,5 \cdot (34,38 + 34,38) \cdot 120 \quad (4.31)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v_0 \geq 12.159,47$$

Depois de calculada a aproximação da FCF em (4.31), inclui-se a mesma nos dois problemas de PLs do mês 4. Novamente, mostram-se os valores dos custos e dos multiplicadores de Lagrange de interesse em cada problema. Nota-se que para o mês 4 se deve considerar as afluências associadas com os nós 14 e 15, pois ambos são nós descendentes do nó 7 que foi escolhido na primeira RP. Portanto, os PL's calculados<sup>9</sup> para o mês 4 são:

$$z_{4,14} = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.32)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.33)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 144 \quad (4.34)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v \geq 12159,47 \quad (4.35)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.36)$$

$$s \geq 0, \alpha \geq 0.$$

Acima,  $z_{4,14}$  é o custo do mês 4 associado com a realização de afluência do nó 14.

**Tabela 4.8 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{4,14}$ ).**

$z_{4,14}$	$\pi_{4,14}$
14.252,28	-34,38

<sup>9</sup> Agora, na inclusão da FCF no mês anterior (4),  $v_0$  torna-se o volume final  $v$ .

$$z_{4,15} = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.37)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.38)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 158 \quad (4.39)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v \geq 12159,47 \quad (4.40)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220, s \geq 0 \quad (4.41)$$

$$0 \leq pt_1 \leq 10, 0 \leq pt_2 \leq 30, 0 \leq pt_3 \leq 120.$$

Acima,  $z_{4,15}$  é o custo o do mês 4 associado com a realização de afluência do nó 15.

**Tabela 4.9 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{4,15}$ ).**

$z_{4,15}$	$\pi_{4,15}$
13.004,42	-34,38

Como base nos resultados apresentados a FCF que deve ser incluída no terceiro mês é dada por:

$$\alpha - 0,5 \cdot (\pi_{4,14} + \pi_{4,15}) \cdot v \geq 0,5 \cdot (z_{4,14} + z_{4,15}) - 0,5 \cdot (\pi_{4,14} + \pi_{4,15}) \cdot 120 \quad (4.42)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v \geq 17.754,88$$

Depois de calculada a aproximação da FCF (4.42), semelhantemente de como foi incluído para o mês 4, inclui-se, portanto a restrição (4.42) mesma nos dois problemas de PLs do mês 3, conforme detalhado a seguir. Para o mês 3 as afluências utilizadas são as associadas com os nós 6 e 7, pois ambos são nós descendentes do nó 3 que foi escolhido na primeira RP. Portanto, os valores dos custos e dos multiplicadores de Lagrange bem como cada problema de interesse são mostrados a seguir:

$$z_{3,6} = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.43)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.44)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 140 \quad (4.45)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v \geq 17754,88 \quad (4.46)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.47)$$

$$s \geq 0, \alpha \geq 0.$$

Acima,  $z_{3,6}$  é o custo do mês 4 associado com a realização de afluência do nó 6.

**Tabela 4.10 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{3,6}$ ).**

$z_{3,6}$	$\pi_{3,6}$
18.368,96	-34,38

$$z_{3,7} = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.48)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.49)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 160 \quad (4.50)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v \geq 17754,88 \quad (4.51)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220, s \geq 0 \quad (4.52)$$

$$0 \leq pt_1 \leq 10, 0 \leq pt_2 \leq 30, 0 \leq pt_3 \leq 120.$$

Acima,  $z_{3,7}$  é o custo do mês 3 associado com a realização de afluência do nó 7.

**Tabela 4.11 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{3,7}$ ).**

$z_{3,7}$	$\pi_{3,7}$
20151,62	-34,38

Como base nos resultados apresentados a FCF que deve ser incluída no terceiro mês é dada por:

$$\alpha - 0,5 \cdot (\pi_{5,6} + \pi_{5,7}) \cdot v \geq 0,5 \cdot (z_{5,6} + z_{5,7}) - 0,5 \cdot (\pi_{5,6} + \pi_{5,7}) \cdot 120 \quad (4.53)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v \geq 23.493,06$$

Abaixo o problema de PL referente ao segundo mês e realização de afluência associada com o nó 2, cujo custo ótimo associado é dado por  $z_{2,2}$ .

$$z_{2,2} = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.54)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.55)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 179 \quad (4.56)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v \geq 23.386,82 \quad (4.57)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50 \quad (4.58)$$

$$s \geq 0, \alpha \geq 0.$$

**Tabela 4.12 – Custo ótimo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{2,2}$ ).**

$z_{2,2}$	$\pi_{2,2}$
22.254,44	-34,38

Abaixo o problema de PL referente ao segundo mês e realização de afluência associada com o nó 3, cujo custo ótimo associado é dado por  $z_{2,3}$ .

$$z_{2,3} = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.59)$$

$$\text{s.a: } 0,178 \cdot q + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.60)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 120 + 2,592 \cdot 373 \quad (4.61)$$

$$\alpha + 34,38 \cdot v \geq 23386,82 \quad (4.62)$$

$$120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220, s \geq 0 \quad (4.63)$$

$$0 \leq pt_1 \leq 10, 0 \leq pt_2 \leq 30, 0 \leq pt_3 \leq 120.$$

**Tabela 4.13 – Custo e multiplicador de Lagrange ( $\pi_{2,3}$ ).**

$z_{2,3}$	$\pi_{2,3}$
5.101,24	-34,06

Como base nos resultados apresentados a FCF que deve ser incluída no primeiro mês é dada por:

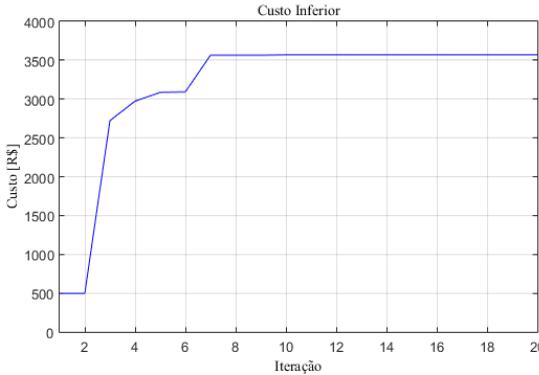
$$\alpha - 0,5 \cdot (\pi_{2,2} + \pi_{2,3}) \cdot v \geq 0,5 \cdot (z_{2,2} + z_{2,3}) - 0,5 \cdot (\pi_{2,2} + \pi_{2,3}) \cdot 120 \quad (4.64)$$

$$\alpha + 34,22 \cdot v \geq 17.784,98$$

Uma vez construída a aproximação para a FCF associada com o primeiro mês (4.64), o algoritmo da PDDE continua seu processo iterativo por meio de uma nova RP. Conforme mostrado anteriormente, nesta nova RP sorteia-se um cenário de afluência apresentado na Figura 4.3 para resolver a sequência de problemas de PLs. Além do cenário diferente, a partir da segunda RP deve-se sempre incluir nos problemas de PL de cada mês a aproximação linear por partes construídas até a última RR.

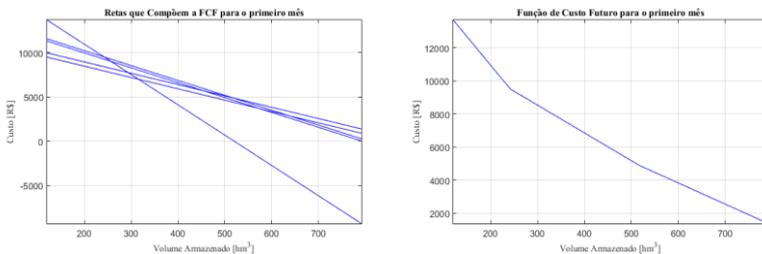
A Figura 4.4 mostra a evolução do limite inferior da PDDE ao longo de 20 iterações. Conforme pode ser notado, a partir da oitava iteração se observa uma estabilização do custo total esperado no valor de R\$ 3.570,74.

**Figura 4.4 – Custo inferior para o valor ótimo ao longo das 20 iterações.**



Por outro lado, é possível observar na Figura 4.5 as aproximações lineares que representam a FCF obtidas para o primeiro mês. A figura da esquerda mostra todas as funções lineares construídas ao longo das iterações. Por outro lado, a figura da direita representa o valor máximo do custo para cada estado de volume final.

**Figura 4.5 – FCF do primeiro mês.**



A Tabela 4.14 apresenta a expressão matemática para as aproximações lineares dominantes do primeiro mês do horizonte de planejamento.

**Tabela 4.14 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 1.**

Iteração	Coefficiente Angular ( $\pi$ )	Coefficiente Linear (b)
1	34,2	17.785,0
3	16,8	13.568,7

13

12,8

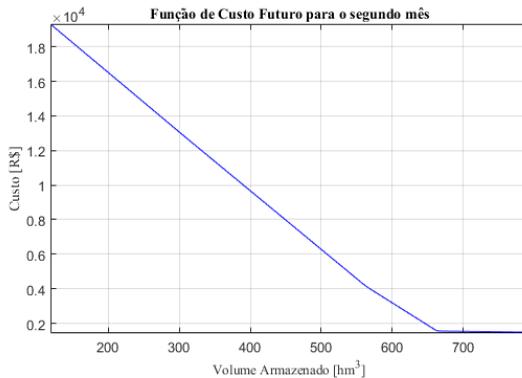
11.498,2

A Tabela 4.15 mostra as expressões das retas dominantes do segundo mês, e logo em seguida a Figura 4.6 mostra o comportamento da mesma ao longo dos estados de volume final.

**Tabela 4.15 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 2.**

Iteração	Coefficiente Angular ( $\pi$ )	Coefficiente Linear (b)
1	34,4	23.386,8
2	33,9	23.236,2
9	0,5	1887,7
13	25,8	18679,5

**Figura 4.6 – Aproximações lineares dominantes para o mês 2.**



A Tabela 4.16 e a Tabela 4.17 mostram as expressões matemáticas das aproximações dominantes para o terceiro e quarto mês, respectivamente. Por outro lado, na esquerda a Figura 4.7 mostra o comportamento do custo em função do volume final para as aproximações dominantes do terceiro mês, e no gráfico da direita, é mostrado a variação do custo em função do volume final, porém para o quarto mês.

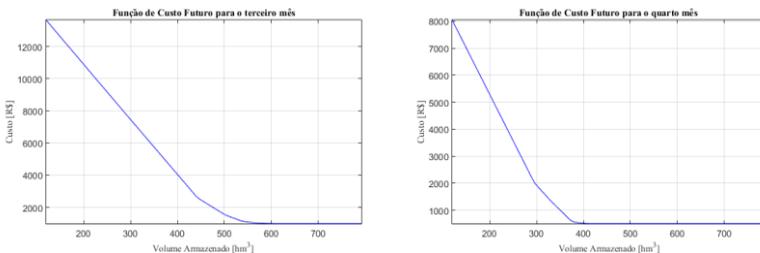
**Tabela 4.16 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 3.**

Iteração	Coefficiente Angular ( $\pi$ )	Coefficiente Linear (b)
2	34,2	17714,7
3	17,0	10079,7
5	34,1	17668,7
6	0,0	989,1
7	10,6	6828,1
8	3,1	2784,1
12	1,0	1607,1

**Tabela 4.17 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 4.**

iteração	Coefficiente Angular ( $\pi$ )	Coefficiente Linear (b)
1	34,4	12159,5
4	19,3	7694,4
6	0,0	496,9
13	17,2	7019,0
15	2,1	1338,1

**Figura 4.7 – Aproximações dominantes da FCF do terceiro mês a esquerda, e quarto mês, a direita.**



#### 4.2 Solução do Problema do PMOP com FPH linear por partes

Quando se deseja incluir a FPH linear por partes no problema, é necessário representar no problema de PL de cada mês mais variáveis e

restrições. Nesse sentido, no tocante a modelagem, as principais mudanças são observadas nas restrições de atendimento à demanda; por sua vez, são incluídas restrições de volume médio, porque, considera-se uma aproximação mais exata considerar a potência das hidrelétricas em função do volume médio ao invés do volume final, e ainda restrições de desigualdade referentes aos hiperplanos da FPH.

Considerando os mesmos dados anteriores, para o exemplo a seguir a PDDE inicia seu processo iterativo resolvendo o seguinte problema de PL referente ao primeiro mês:

$$z_1 = \min 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 + \alpha \quad (4.65)$$

$$\text{s.a: } ph + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \quad (4.66)$$

$$v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s = 456 + 2,592 \cdot 298 \quad (4.67)$$

$$vm - 0,5 \cdot v = 0,5 \cdot 456, \quad (4.68)$$

$$-ph + 0,231280 \cdot q \geq 0$$

$$-ph + 0,0370940 \cdot vm + 0,104890 \cdot q \geq 4,4513 \quad (4.69)$$

$$-ph + 0,0057805 \cdot vm + 0,195960 \cdot q \geq 0,6937$$

$$-ph + 0,0539520 \cdot vm + 0,053397 \cdot q \geq 0,8100$$

$$120 \leq vm \leq 792, 120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220$$

$$0 \leq pt_1 \leq 5, 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50, 0 \leq ph \leq 46, \quad (4.70)$$

$$s \geq 0, \alpha \geq 0.$$

em que:

$ph$  geração da hidrelétrica (MWm),

$vm$  volume médio do reservatório no mês (hm<sup>3</sup>).

A Tabela 4.18 apresenta os resultados primais associados com a solução do PL. O custo encontrado é  $z_1 = 518,61$ .

**Tabela 4.18 – Variáveis primais do PL de primeiro mês.**

$vm$	$v$	$q$	$s$	$ph$	$pt_1$	$pt_2$	$pt_3$	$\alpha$
545,42	634,84	220	0	38,85	5	6,14	0	0

O restante do procedimento iterativo da PDDE, isto é, as etapas da RP, da RR, bem como o critério de parada, são idênticas aquelas apresentadas na seção anterior. Contudo, é importante mostrar como deve ser a construção da FCF durante a etapa da RR, dado que o volume final do mês  $t - 1$  é um dado de entrada nas equações de balanço hidráulico e

também nas restrições de volume médio. Assim como feito na seção anterior, considerando especificamente a obtenção para a FCF do mês 4, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 & \min_{v_0, \alpha \geq 0} \alpha \\
 \text{s.a: } & \alpha \geq \min_{ph, pt_1, v, q, s} \mathcal{L} = 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 \\
 & \quad - \gamma \cdot (vm - 0,5 \cdot v - 0,5 \cdot v_0) \\
 & \quad - \pi \cdot (v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s - v_0 - 2,592 \cdot 109) \\
 \text{s.a: } & ph + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \\
 & \quad - ph + 0,231280 \cdot q \geq 0 \\
 & \quad - ph + 0,0370940 \cdot vm + 0,104890 \cdot q \geq 4,4513 \\
 & \quad - ph + 0,0057805 \cdot vm + 0,195960 \cdot q \geq 0,6937 \\
 & \quad - ph + 0,0539520 \cdot vm + 0,053397 \cdot q \geq 0,8100 \\
 & \quad 120 \leq v \leq 792, \quad 0 \leq q \leq 220, \quad 0 \leq pt_1 \leq 5, \\
 & \quad 0 \leq pt_2 \leq 8, \quad 0 \leq pt_3 \leq 50, \quad s \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Em que:

- $\mathcal{L}$  função Lagrangiana do problema do mês 5 e nó 30, considerando a dualização das restrições de volume médio e de balanço hidráulico;
- $\gamma$  multiplicador de Lagrange da restrição de volume médio (R\$/hm<sup>3</sup>);

O Problema (4.71) pode ser rearranjado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \min_{v_0, \alpha \geq 0} \alpha \\
 & \text{s.a: } \alpha \geq +\pi \cdot v_0 + 0.5\gamma \cdot v_0 + \\
 & \left( \begin{array}{l}
 \min_{ph, pt_1, q, s, v} \mathcal{L} = 30pt_1 + 60pt_2 + 500pt_3 - \\
 \gamma \cdot (vm - 0,5 \cdot v) - \\
 \pi \cdot (v + 2,592 \cdot q + 2,592 \cdot s - 2,592 \cdot 109) \\
 \text{s.a: } ph + pt_1 + pt_2 + pt_3 = 50 \\
 - ph + 0,231280 \cdot q \geq 0 \\
 - ph + 0,0370940 \cdot vm + 0,104890 \cdot q \geq 4,4513 \\
 - ph + 0,0057805 \cdot vm + 0,195960 \cdot q \geq 0,6937 \\
 - ph + 0,0539520 \cdot vm + 0,053397 \cdot q \geq 0,8100 \\
 120 \leq v \leq 792, 0 \leq q \leq 220, 0 \leq pt_1 \leq 5, \\
 0 \leq pt_2 \leq 8, 0 \leq pt_3 \leq 50, s \geq 0.
 \end{array} \right) \quad (4.72)
 \end{aligned}$$

De posse da solução ótima do problema do mês 5 e nó 30, reescreve-se (4.72) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & \min_{v_0, \alpha \geq 0} \alpha \\
 & \text{s.a: } \alpha \geq (0.5\gamma + \pi) \cdot v_0 + 30p_{t_1}^* + 60p_{t_2}^* + 500p_{t_3}^* \\
 & \quad - \pi \cdot (v^* + 2,592 \cdot q^* + 2,592 \cdot s^* - 2,592 \cdot 109) \\
 & \quad - \gamma \cdot (vm^* - 0,5 \cdot v^*)
 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Atentando-se para os mesmos passos apresentados na seção anterior, e colocando as variáveis do lado esquerdo, a aproximação linear para a FCF do quarto mês e afluência referente ao nó 30 fica:

$$\begin{aligned}
 & \min \alpha \\
 & \text{s.a: } \alpha - (\pi + 0,5 \cdot \gamma) \cdot v_0 \geq - (\pi + 0,5 \cdot \gamma) \cdot v^* + z_{s,30}^*
 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Acima  $v^*$  torna-se o volume final encontrado no problema de PL referente ao nó antecessor do nó 30 na primeira RP.

Por fim, conforme mostrado na seção anterior, deve-se obter um corte esperado, ou seja, aquele dado por uma ponderação das probabilidades das afluências referentes aos nós 30 e 31. Analogamente ao apresentado para a FPH com produtibilidade constante, a FCF que é utilizada nos problemas do quarto mês é dada por:

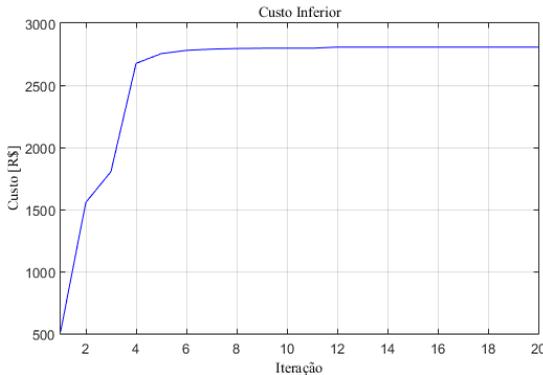
$$\alpha - \left[ \left( \frac{\pi_{5,30} + \pi_{5,31}}{2} \right) + 0,5 \cdot \left( \frac{\gamma_{5,30} + \gamma_{5,31}}{2} \right) \right] \cdot v_0 \geq - \tag{4.75}$$

$$\left[ \left( \frac{\pi_{5,30} + \pi_{5,31}}{2} \right) + 0,5 \cdot \left( \frac{\gamma_{5,30} + \gamma_{5,31}}{2} \right) \right] \cdot v^* + \left( \frac{z_{5,30}^* + z_{5,31}^*}{2} \right)$$

Os índices dos multiplicadores e dos custos (4.75) ilustram que os mesmos são provenientes do problema de PL do quinto mês e nó 30 (5,30) e nó 31 (5,31).

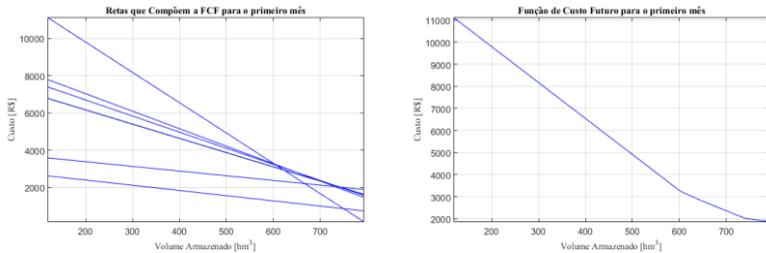
Uma vez detalhado a construção da FCF, pode-se apresentar alguns resultados da aplicação da PDDE para este modelo com FPH linear por partes. Nessa direção, a Figura 4.8 mostra a evolução do custo esperado de operação ao longo das iterações. Pode-se notar que a partir da décima primeira iteração se observa a estabilização de  $z_1$  em R\$ 2.807,53.

**Figura 4.8 – Custo inferior para o valor ótimo ao longo das 20 iterações.**



A Figura 4.9 (esquerda) mostra as funções obtidas ao longo das iterações. Por outro lado, na mesma figura tem-se a FCF com apenas as restrições dominantes.

**Figura 4.9 – Aproximações que compõem a FCF e a FCF resultante, do mês 1.**



A Tabela 4.19 apresenta a expressão matemática para as aproximações lineares dominantes do primeiro mês do horizonte de planejamento.

**Tabela 4.19 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 1.**

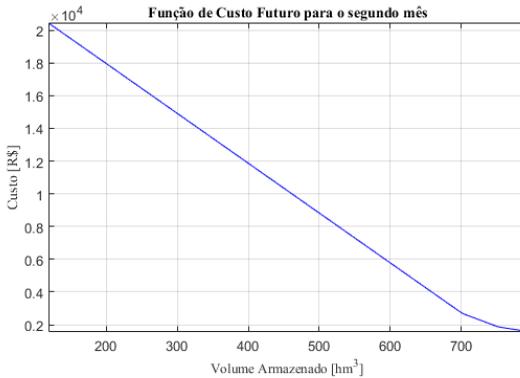
Iteração	Coeficiente Angular ( $\pi$ )	Coeficiente Linear (b)
2	16,3	13051,6
3	2,5	3878,0
4	9,4	8904,7
8	7,6	7691,8
11	8,6	8422,0

A Tabela 4.20 mostra as expressões das retas dominantes do segundo mês, e logo em seguida a Figura 4.10 mostra o comportamento da mesma ao longo dos estados de volume final

**Tabela 4.20 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 2.**

iteração	Coeficiente Angular ( $\pi$ )	Coeficiente Linear (b)
2	30,4	24044,2
5	14,3	12636,2
6	6,6	6820,5
8	4,9	5480,7
11	16,2	14043,0

**Figura 4.10 – Aproximações dominantes para o segundo mês.**



A Tabela 4.21 e a Tabela 4.22, mostram as expressões matemáticas dos cortes dominantes para o terceiro e quarto meses, respectivamente. Por outro lado, na esquerda a Figura 4.11 mostra o comportamento do custo em função do volume final para as retas dominantes do terceiro mês, e no gráfico da direita, é mostrado o mesmo comportamento do custo em função do volume final, porém para o quarto mês.

**Tabela 4.21 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 3.**

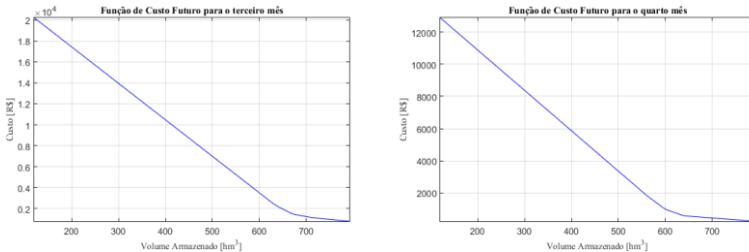
Iteração	Coeficiente Angular ( $\pi$ )	Coeficiente Linear (b)
1	34,8	24400,8
2	28,5	20388,2
6	7,9	6765,0
7	4,7	4484,8
8	4,3	4180,6
11	22,3	16472,8

**Tabela 4.22 – Coeficientes da expressão matemática dos cortes dominantes para o mês 4.**

Iteração	Coeficiente Angular ( $\pi$ )	Coeficiente Linear (b)
1	29,8	15899,0

3	4,5	2008,0
4	22,5	14071,7
6	10,7	7224,6

**Figura 4.11 – Aproximações dominantes da FCF do terceiro mês a esquerda, e quarto mês, a direita.**



### 4.3 Análise Comparativa entre as Modelagens da FPH

Conforme mostrado na Figura 4.2, dependendo do valor da vazão e da queda na UHE, os dois modelos de FPH apresentam distintos valores de potência. Consequentemente, é importante dispor de uma metodologia, além da comparação direta dos custos de operação obtidas na otimização via PDDE, para realizar uma análise comparativa detalhada dos modelos no problema do PMOP.

Neste contexto, deve-se lembrar que as FCFs obtidas na otimização representam um importante resultado do problema do PMOP pois, através da simulação das mesmas, além de serem usadas para manter a coordenação da cadeia de modelos, estabelecendo condições de fronteira com o problema de curto prazo, as mesmas são utilizadas para realizar uma análise de diversos parâmetros operativos de crucial importância para a operação energética. Dentre estes, pode-se destacar o comportamento futuro do déficit de energia, da evolução do armazenamento do sistema, dos custos marginais, montantes de geração termelétrica, entre outros. A simulações da FCF é baseadas em otimização, por meio da realização de RP em vários cenários hidrológicos.

Neste sentido, este trabalho faz uso de um simulador baseado em otimização, para analisar alguns parâmetros tais como custos de operação, produção de energia, níveis do reservatório, entre outros. Tal simulador recebe como dados de entrada as FCFs obtidas na PDDE. Ressalta-se que

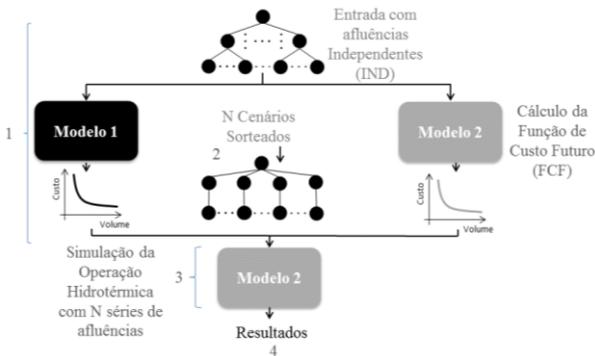
existem diversas maneiras de se realizar a simulação. A proposta neste trabalho, consiste em realizar um grande número de RPs considerando a mesma árvore de cenários utilizada na otimização. De modo mais específico, tem-se as seguintes etapas:

**Algoritmo 4.1**

1. Utilizando uma árvore de cenário, armazenam-se as FCFs de cada mês, calculadas via PDDE para cada um dos modelos<sup>10</sup> existentes, formando um conjunto de aproximações, da mesma forma como mostradas nas Figuras (4.5)-(4.7) e Figuras (4.9)-(4.11);
2. Sorteiam  $N$  cenários de afluições da árvore usada na PDDE;
3. Inclui-se as FCFs armazenada no Passo 1, e com cada cenário  $n$  do Passo 2, realiza-se a simulação através de uma série de Recursões Progressivas, em que o problema de PL de cada mês é formulado com o modelo<sup>11</sup> de FPH linear por partes;
4. Obtém-se valores de custo total, gerações, custos marginais, armazenamentos, entre outros;

A Figura 4.12 mostra um desenho esquemático com as etapas do Algoritmo 4.1 enumeradas.

**Figura 4.12 – Diagrama Esquemático Associado com o Algoritmo 4.1.**



<sup>10</sup> O modelo de otimização com FPH com produtividade constante e com FPH linear por partes.

<sup>11</sup> Na simulação costuma-se utilizar na construção das RPs o modelo mais detalhado, neste caso, com FPH linear por partes.

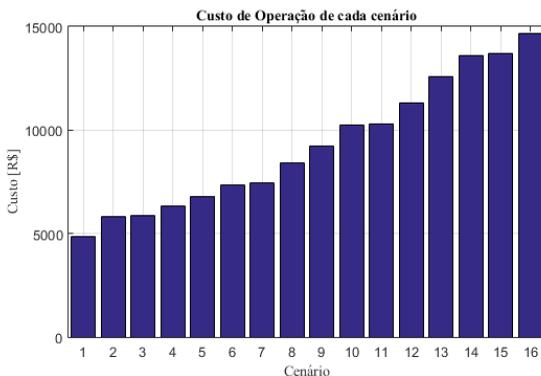
Portanto, cada conjunto de FCF simulada proverá um custo médio de operação, e este valor é comparado como forma de qualificar a FCF calculada via PDDE, uma vez que, o objetivo aqui é avaliar a modelagem da função de produção.

Note que, quando no Passo 3 considera a simulação da FCF do modelo FPH com produtividade constante, a estratégia consiste em medir, de certa forma, a diferença de custo entre as FCFs simplificadas com aquelas obtidas com a modelagem de referência, ou seja, a linear por partes.

Para ilustrar a aplicação do Algoritmo 4.1, a seguir são mostrados alguns resultados referentes aos dois exemplos numéricos das seções anteriores. Dado que a árvore de cenários utilizada nos exemplos é pequena, os resultados a seguir consideram que todos os 16 cenários são utilizados no Passo 1 do algoritmo; portanto, na simulação é possível realizar 16 RPs para este caso.

Considerando as FCFs dos meses 1 a 4 obtidas na PDDE com modelo de FPH a produtividade constante, a Figura 4.13 ilustra o custo total de operação (custo de geração termelétrica no horizonte) para cada um dos 16 cenários da árvore da Figura 4.3.

**Figura 4.13 – Custo de operação de cada cenário da árvore mostrada na Figura 4.3.**

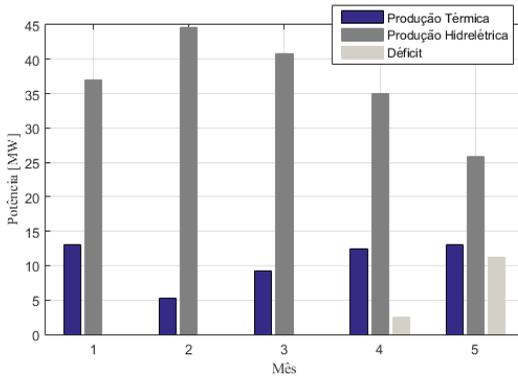


A média do custo de operação total é R\$ 9.281,95. Ressalta-se que o valor encontrado com na simulação do modelo FPH linear por partes é R\$ 2.281,95. Portanto, essa diferença fornece uma medida da qualidade das FCFs obtidas via PDDE utilizando modelo com produtividade constante.

Outras informações podem ser exploradas como, por exemplo, a de geração hidro e termelétrica em cada mês, conforme mostra a Figura

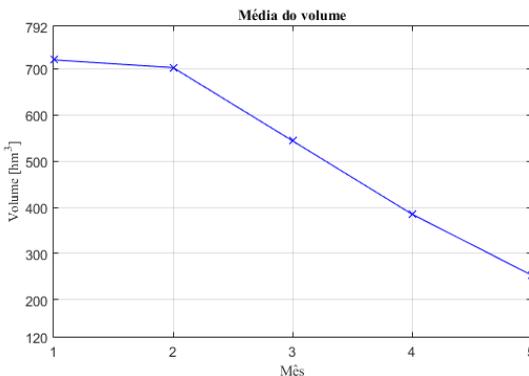
4.14. Observa-se que nos dois últimos meses ocorreu déficit no atendimento a demanda.

**Figura 4.14 – Produção térmica, hidrelétrica e do déficit, variáveis que compõem o atendimento a demanda.**



Outro parâmetro interessante de se observar é a média do volume armazenado em cada mês do horizonte, conforme dado pela Figura 4.15. Percebe-se que em nenhum mês o volume atingiu seus limites máximo (792 hm<sup>3</sup>) e mínimo (120 hm<sup>3</sup>); contudo, a decisão tomada pela política, neste caso, é sempre de esvaziamento do reservatório ao longo do horizonte.

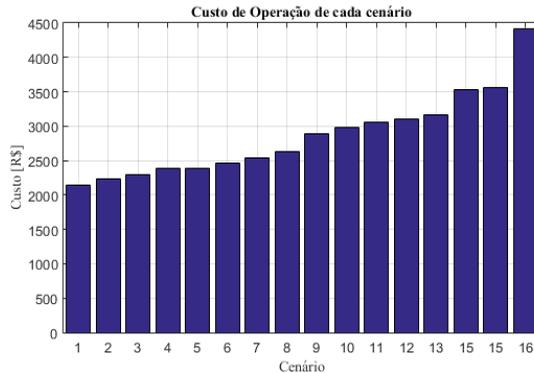
**Figura 4.15 – Média do volume armazenado ao longo do horizonte de planejamento.**



A próxima análise consiste em realizar as mesmas etapas do Algoritmo 4.1, utilizando no Passo 2 as FCFs obtidas na otimização do modelo com FPH linear por partes. Para tanto, ilustrativamente considere

a Figura 4.16 que mostra o custo total de operação para cada um dos 16 cenários.

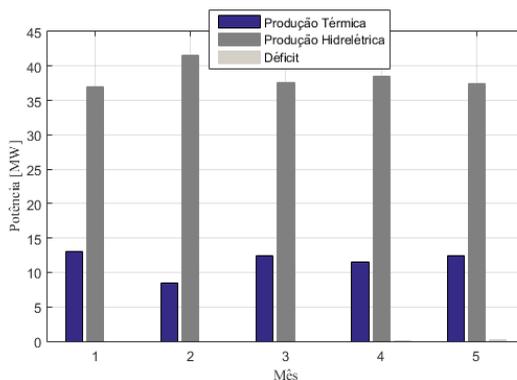
**Figura 4.16 – Custo de operação de cada cenário da árvore mostrada na Figura 4.3.**



O valor do custo de operação esperado é de R\$ 2.863,94, ou seja, muito próximo do limite inferior de R\$ 2.807,53 obtido na otimização via PDDE. Tal resultado é esperado dado que as FCFs obtidas foram obtidas com o mesmo modelo de FPH usado na simulação.

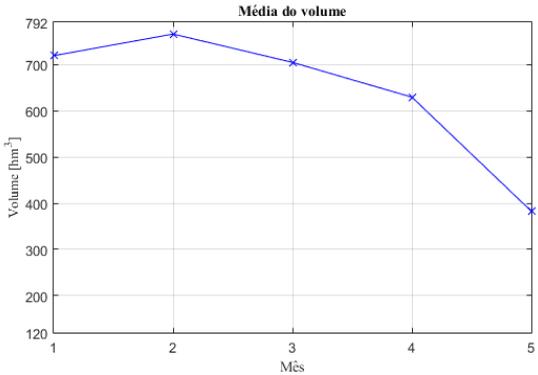
As médias das gerações e déficit estão na Figura 4.17, em que se observa que não ocorre déficit no atendimento a demanda, bem como uma diferença bastante considerável no perfil de despacho das usinas, principalmente no último mês de planejamento.

**Figura 4.17 – Produção térmica, hidrelétrica e do déficit, variáveis que compõem o atendimento a demanda.**



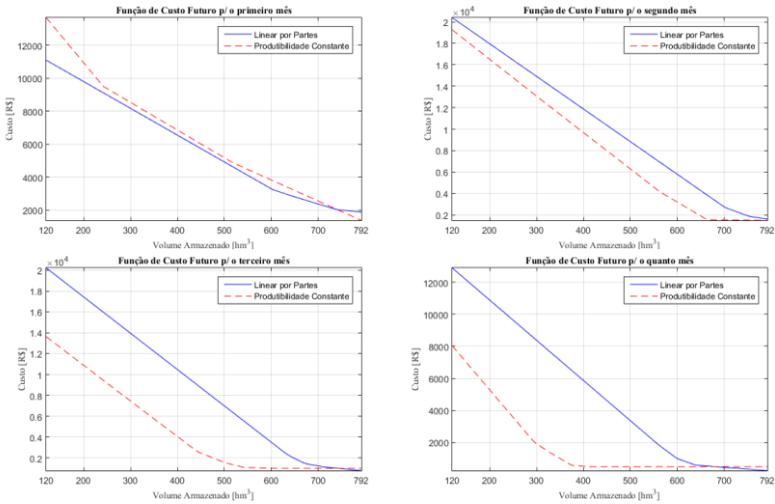
A Figura 4.15 mostra a evolução da média do armazenamento ao longo dos meses. Observa-se que o modelo mais detalhado é mais conservador, no sentido de que armazena mais água em especial no segundo mês, dispondo de mais água para utilizar no final do horizonte.

**Figura 4.18 – Volume armazenado ao longo do horizonte de planejamento.**



Nota-se que este comportamento menos otimista do volume armazenado está relacionado com as aproximações das FCFs calculadas pelos diferentes modelos, ilustrativamente, a Figura 4.19 compara as FCFs de cada mês, e, como pode ser observado, a política calculada no segundo, terceiro e quarto meses para o modelo linear por partes são mais caras, isto é, para um mesmo ponto operativo de volume armazenado o custo é mais elevado.

**Figura 4.19 – Comparativo entre FCF's de cada mês.**



A título de comparação, apresentam-se a seguir mais duas análises que consideram diferentes valores de volumes iniciais do reservatório. A primeira tem como volume inicial 120 hm<sup>3</sup>, isto é, o volume mínimo. Por sua vez, a segunda considerada o volume inicial igual ao valor máximo. Para cada cenário de volume inicial obtém-se as FCFs via PDDE para a mesma árvore de cenários usada até então.

Os custos esperados destas duas condições operativas estão colocados na Tabela 4.23 e Tabela 4.24, respectivamente.

**Tabela 4.23 – Limite inferior do custo esperado da otimização e custo médio de simulação com volume inicial do reservatório igual a 120 hm<sup>3</sup>.**

	Otimização	Simulação
<b>Produtibilidade Constante</b>	R\$ 9.110,17	R\$ 20.528,67
<b>Linear por Partes</b>	R\$ 13.019,64	R\$ 13.119,39

**Tabela 4.24 – Limite inferior do custo esperado da otimização e custo médio de simulação com volume inicial do reservatório igual a 792 hm<sup>3</sup>.**

	Otimização	Simulação
--	------------	-----------

<b>Produtibilidade Constante</b>	R\$ 2.583,94	R\$ 7.884,90
<b>Linear por Partes</b>	R\$ 2.024,30	R\$ 2.073,19

Este tipo de análise, com base no Algoritmo 4.1, é amplamente utilizada para problemas de maior porte mostrados no próximo capítulo. Uma outra investigação também é apresentada com o apoio do Algoritmo 4.1, a qual no Passo 2 faz uso de cenários que não pertencem a árvore em que a otimização é realizada. Maiores detalhes dessa segunda opção são descritos no Capítulo 5, a seguir.

## 5 RESULTADOS

Este capítulo tem o objetivo de apresentar os resultados obtidos acerca dos estudos realizados neste trabalho, utilizando as metodologias propostas nos capítulos anteriores. Os resultados estão organizados em três blocos, de modo que seja possível fazer um paralelo com a ordem apresentada no trabalho. Neste sentido, inicialmente apresenta-se a análise de erro detalhada nos capítulos 2 e 3, referente a uma série de usinas do Sistema Interligado Nacional (SIN). Na sequência, com base no Capítulo 4, é realizada a análise das duas representações da função de produção hidroelétrica (FPH) na solução do problema do Planejamento de Médio Prazo da Operação (PMOP) via Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE). Finalmente, são detalhadas três heurísticas com o intuito de diminuir o tempo computacional associado com a solução do problema do PMOP quando a FPH é representada por meio da função linear por partes. Em termos gerais, a ideia básica consiste em manter o número de aproximações lineares como função de alguma medida de “importância” na usina com relação ao SIN.

Todos os estudos foram realizados em um computador com a seguinte configuração: processador Intel core *i7*, 3,40 GHz, 4,00 GB de RAM, e com sistema operacional Windows 7. No estudo referente a análise do erro foi utilizado o *software* Matlab®. Por sua vez, na implementação do modelo do POMP foi utilizado a linguagem de programação C++, sendo que a rotina de Programação Linear (PL) é o Gurobi 5.6.

### 5.1 Análise de Erro da FPH

Conforme discutido no Capítulo 2, as usinas hidrelétricas (UHEs) são classificadas conforme a dependência das variáveis  $v$ ,  $q$  e  $s$  da seguinte maneira:

- **Tipo 1:** fio d’água, que depende de  $q$ ;
- **Tipo 2:** fio d’água, que depende de  $q$  e  $s$ ;
- **Tipo 3:** reservatório, que depende de  $v$  e  $q$ ;
- **Tipo 4:** reservatório, depende de  $v$ ,  $q$  e  $s$ .

Para a análise de erro, este trabalho utiliza um grande número de UHEs que pertencem ao SIN. Neste sentido, a Tabela 5.1 mostra a

quantidade de UHEs por subsistema de acordo com a classificação citada. Nota-se que para a análise proposta consideram-se 134 usinas<sup>12</sup> do SIN.

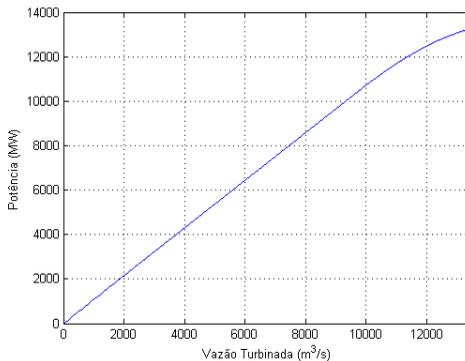
**Tabela 5.1 – Tipos de UHEs por subsistema utilizados para a análise de erro.**

Subsistema	Total de UHEs	Tipo			
		1	2	3	4
Sudeste	91	7	47	3	34
Sul	29	0	17	1	11
Nordeste	7	2	1	1	3
Norte	7	0	3	0	4

Dado o elevado número de usinas, inicialmente é apresentada de forma detalhada uma UHE de cada tipo acima, escolhendo-se aquelas com maior potência instalada.

Procedendo-se desta maneira, para as usinas do Tipo 1, a usina com maior capacidade instalada é a UHE de Itaipu, cujo modelo não linear da FPH é ilustrativamente mostrado na Figura 5.1.

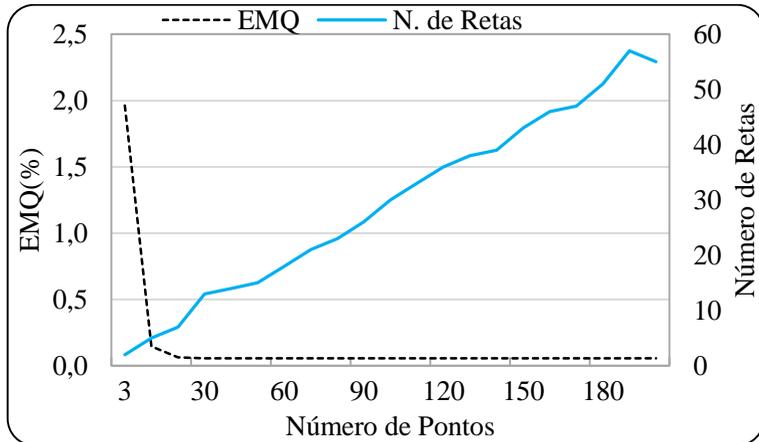
**Figura 5.1 – FPH da UHE de Itaipu.**



Por sua vez, a Figura 5.2 apresenta o erro médio quadrático (EMQ) e o número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizado no algoritmo do *Convex Hull* (CH), conforme detalhes apresentados no Capítulo 3.

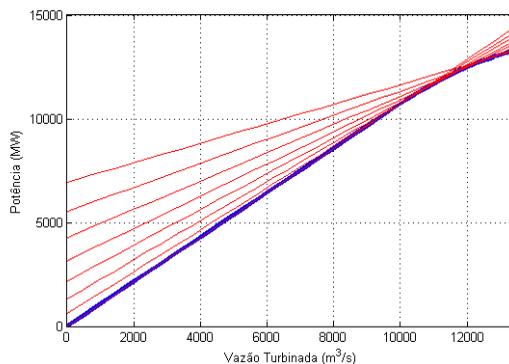
<sup>12</sup> O SIN possui 149 usinas em operação; portanto, o número de usinas utilizado neste trabalho corresponde a aproximadamente 90% do SIN.

**Figura 5.2 – EMQ e número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizados no algoritmo do CH.**



Conforme pode ser visto na Figura 5.2, um EMQ abaixo de 1% é obtido com um baixo número de pontos no CH e, conseqüentemente, tem-se poucas aproximações lineares. Por sua vez, com aproximadamente 20 pontos e algo próximo de cinco aproximações lineares o EMQ atinge valores na ordem de 0,1%, o que pode ser considerando suficientemente preciso para uma aproximação da FPH não linear original. Particularmente para o caso de Itaipu, o menor valor do EMQ é de 0,049 %, obtido com 29 pontos e oito aproximações lineares, como ilustrado na Figura 5.3.

**Figura 5.3 – FPH ótima da UHE de Itaipu.**



Conforme esperado, as usinas do Tipo 1 possuem um EMQ baixo em relação com os outros tipos de UHE, pois são funções

unidimensionais. A Tabela 5.2 apresenta um resumo com os resultados obtidos pela análise do erro para as UHEs do Tipo 1.

**Tabela 5.2 – Análise de erro das usinas do Tipo 1.**

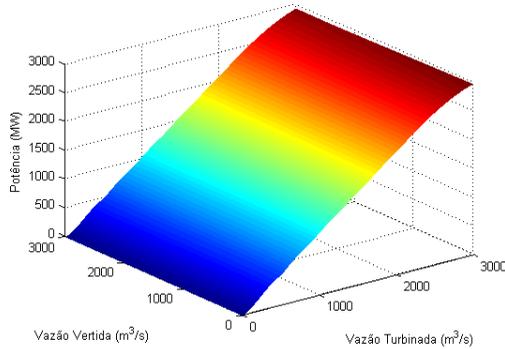
<b>UHE</b>	<b>Menor EMQ (%) / Aproximações Lineares</b>	<b>Aproximações Lineares com EMQ de 2%</b>
Itaipu	0,05 / 8	4
Comp Pax Mox	3,28 / 3	3
H. Borden	0,04 / 11	4
Itapebi	0,93 / 2	2
Funil	1,01 / 3	2
Fontes	0,79 / 8	5
Sobragi	0,79 / 4	3
Sá Carvalho	0,31 / 11	4
Guilman-Amor	0,51 / 7	5

Nota-se, pela a Tabela 5.2, que as usinas do Tipo 1, as UHE's de Sá Carvalho e Henry Borden possuem os maiores números de aproximações. Tal fato justifica-se, pois, estas usinas tem três unidades geradoras diferentes, fazendo com que a FPH possua não linearidades “mais acentuadas” em relação as demais. Contudo, a usina que apresenta maior EMQ é a comp pax mox, a qual é uma aproximação utilizada para representar as usinas de Paulo Afonso e Moxotó em apenas uma, e devido as não concavidades o erro desta aproximação é alto.

Em média o EMQ é de aproximadamente 0,85 % para as usinas do Tipo 1. Outro fato a se destacar é que 32 aproximações lineares são necessárias ao considerar um EMQ de 2%; portanto, uma vez que o número ótimo de aproximações é 56, conclui-se que se obtém uma considerável diminuição na quantidade de aproximações (i.e., aproximadamente 45 %).

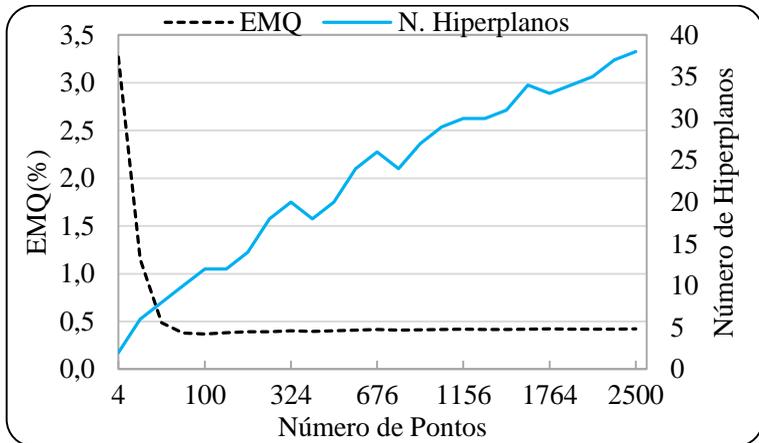
Para as usinas do Tipo 2, a UHE de Xingó possui a maior capacidade instalada e, portanto, é utilizada para apresentar a análise. A FPH conforme proposta no Capítulo 2, pode ser observada na Figura 5.4

**Figura 5.4 – FPH da UHE de Xingó.**



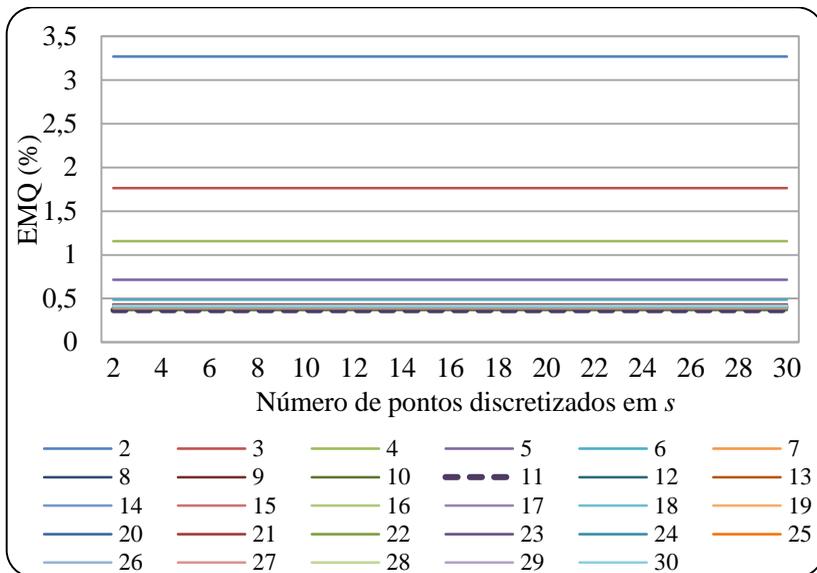
Por sua vez, a Figura 5.5 mostra que com uma grade de 100 pontos o EMQ fica praticamente estabilizado em 0,47%; desta forma, ao aumentar o número da grade inicial de pontos não há uma diminuição significativa no EMQ.

**Figura 5.5 – EMQ e número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizados no algoritmo do CH.**

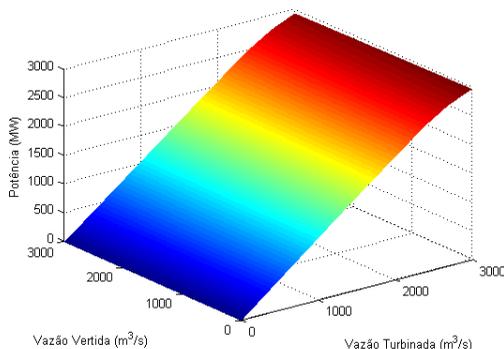


Por sua vez, a Figura 5.6 mostra as possibilidades percorridas ao aplicar a heurística comentada no Capítulo 3 de modo a obter o menor valor do EMQ. A legenda da Figura 5.6 remete-se aos pontos discretizados em  $q$ .

**Figura 5.6 – EMQ associado com a FPH da UHE de Xingó.**



Conforme pode ser visto na Figura 5.6, para um número fixo de pontos em  $q$  (parte inferior da figura) e variar os pontos em  $s$ , praticamente não ocorre mudança no valor do EMQ. Isto ocorre devido ao fato que esta UHE tem comportamento quase linear em  $s$ ; por isso, a discretização de dois pontos (um no limite superior e outro no inferior) em  $s$  é suficiente para garantir uma boa aproximação. Assim, conforme mostra a Figura 5.6, são necessários 11 pontos discretizados igualmente em  $q$  e apenas dois em  $s$  para alcançar o menor valor do EMQ igual a 0,36%. Um total de 14 planos está associado a esse valor de erro. Ilustrativamente, a aproximação associada pode ser vista na Figura 5.7.

**Figura 5.7 – FPH aproximada ótima da UHE de Xingó.**

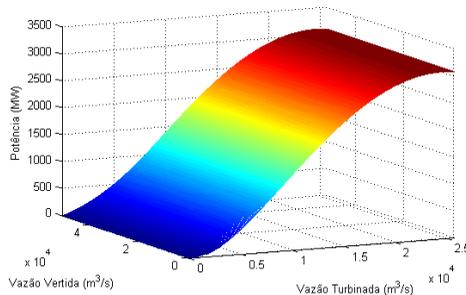
As usinas do Tipo 2 possuem um EMQ maior em relação as UHE do Tipo 1, pois tratam-se de funções bidimensionais. A Tabela 5.3 apresenta um resumo com os resultados obtidos pela análise do erro para as dez UHEs do Tipo 2 com maior capacidade instalada. Os resultados associados com as demais UHEs dessa natureza estão no Apêndice C.

**Tabela 5.3 – Análise de erro das usinas do Tipo 2.**

UHE	Menor EMQ (%) / Aproximações Lineares	Aproximações Lineares com EMQ de 2%
Xingó	0,36 / 14	4
Santo Antônio*	4,38 / 6	6
Jirau	0,52 / 23	15
Estreito	0,33 / 11	5
Salto Caxias	0,55 / 11	6
Salto Osorio*	2,49 / 3	3
Ita	0,42 / 10	5
Estreito Toc	1,29 / 8	6
Lajeado	0,86 / 9	7

**\*UHEs com EMQ maior que 2%.**

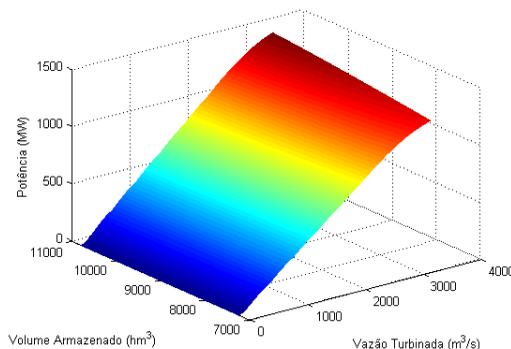
Note-se que a heurística baseada neste trabalho não conseguiu obter um EMQ inferior a 4 % para a UHE Santo Antônio, cuja FPH é mostrada na figura abaixo.

**Figura 5.8 – FPH de Santo Antônio.**

Pela Figura 5.8, nota-se que a FPH no início da curva perde geração, pois, esta região da FPH geralmente é caracterizada pela baixa vazão turbinada, conseqüentemente baixo rendimento, o que acaba tornando esta FPH com não convexidades.

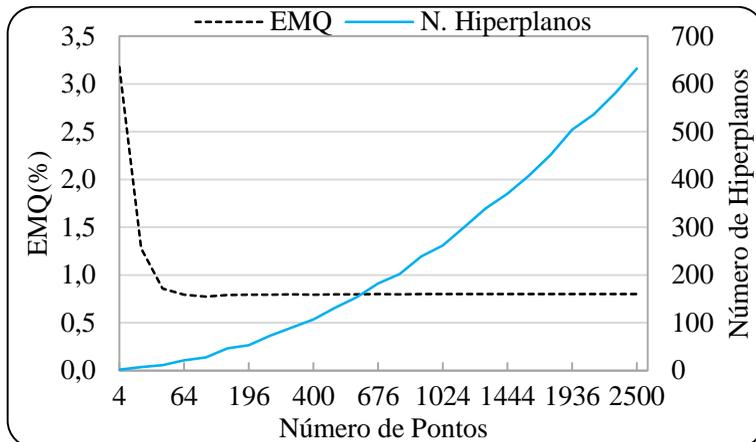
Ainda sobre as informações contidas na Tabela 5.3, a terceira coluna aponta que há uma redução significativa caso fosse admitido um erro de 2% no EMQ. Neste cenário, vale destacar a UHE de Xingó que obteve uma redução de 71% na quantidade de aproximações da FPH.

Dando seqüência a apresentação dos erros, a UHE Itaparica é a maior usina em potência instalada das usinas do Tipo 3. A Figura 5.9 ilustra a FPH conforme a estratégia discutida no Capítulo 2.

**Figura 5.9 – FPH da UHE de Itaparica.**

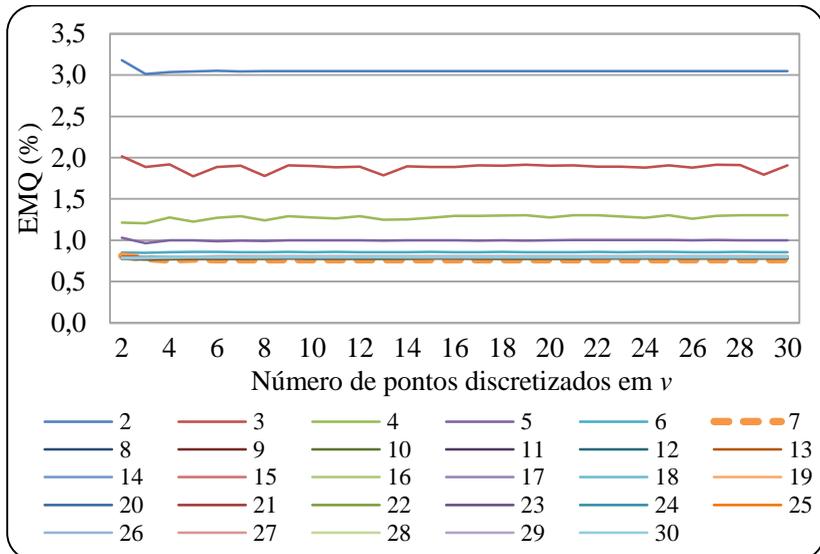
A Figura 5.10 mostra que com aproximadamente 64 pontos ocorre uma estabilização do EMQ em aproximadamente 0,75%.

**Figura 5.10 – EMQ e número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizados no algoritmo do CH.**



A Figura 5.11 detalha a heurística para buscar o número de hiperplanos ótimo. A legenda da Figura 5.11 remete-se aos pontos discretizados em  $q$ .

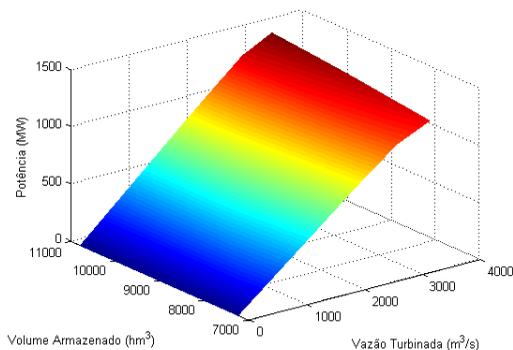
**Figura 5.11 – EMQ associado com a heurística - UHE Itaparica.**



Assim, observa-se que para um determinado número fixo de discretizações na dimensão de  $q$  há pouca variação no volume armazenado. Portanto, pode-se concluir que a vazão turbinada causa um

impacto maior nas não linearidades e desta maneira é necessário uma discretização maior da variável  $q$ . A melhor aproximação da FPH se dá com sete pontos em  $q$  e quatro em  $v$ , resultando em 10 hiperplanos conforme a Figura 5.12.

**Figura 5.12 – FPH aproximada da UHE Itaparica.**



A Tabela 5.4 abaixo apresenta um resumo com os resultados obtidos pela análise do erro para as UHEs do Tipo 3.

**Tabela 5.4 – Análise de erro das usinas do Tipo 3.**

UHE	Menor EMQ (%) / Aproximações Lineares	Aproximações Lineares com EMQ de 2%
Itapararica	0,75 / 10	6
Camargos*	3,42 / 21	21
Santa Branca*	2,58 / 35	17
Porto Estrela*	2,09 / 31	15
G. P. Souza	0,66 / 38	14

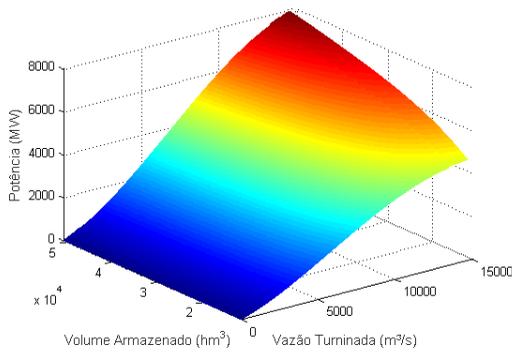
**\*UHE com EMQ maior que 2%.**

Segundo a Tabela 5.4, a média do EMQ é de 1,9 %, sendo que a usina com maior erro é a Camargos. Embora seja uma UHE de pequena capacidade instalada, o volume influencia de forma considerável em sua FPH, por isso, acaba que, as não concavidades desta FPH seja potencializada por suas características. Como a maioria das usinas deste tipo apresenta um número de planos elevado, há uma considerável diminuição dos mesmos se limitar o valor do erro em 2%. Neste caso,

destaca-se a UHE G.P. Souza que apresenta uma redução de 63% se comparado ao número ótimo de aproximações.

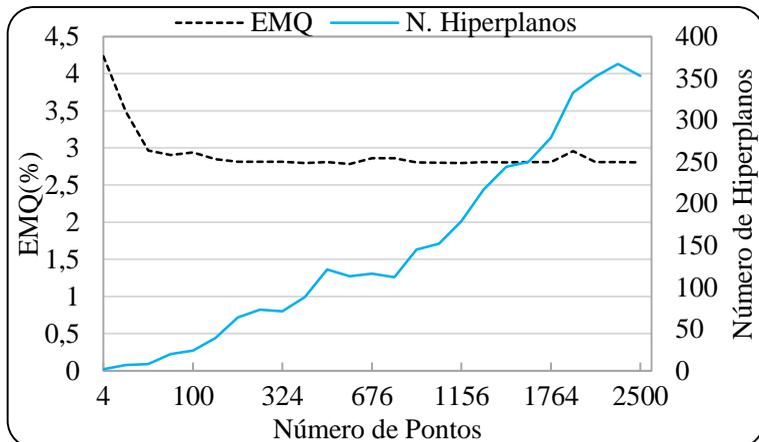
Finalmente, a UHE de Tucuruí é escolhida para representar as usinas do tipo 4, pois é uma central hidrelétrica de grande capacidade instalada. Abaixo, a Figura 5.13 mostra a FPH de Tucuruí segundo a estratégia proposta no Capítulo 2. Nota-se que, por se tratar de uma usina que depende de  $q$ ,  $v$  e  $s$ , a FPH considera vazão vertida nula.

**Figura 5.13 – FPH da UHE Tucuruí.**



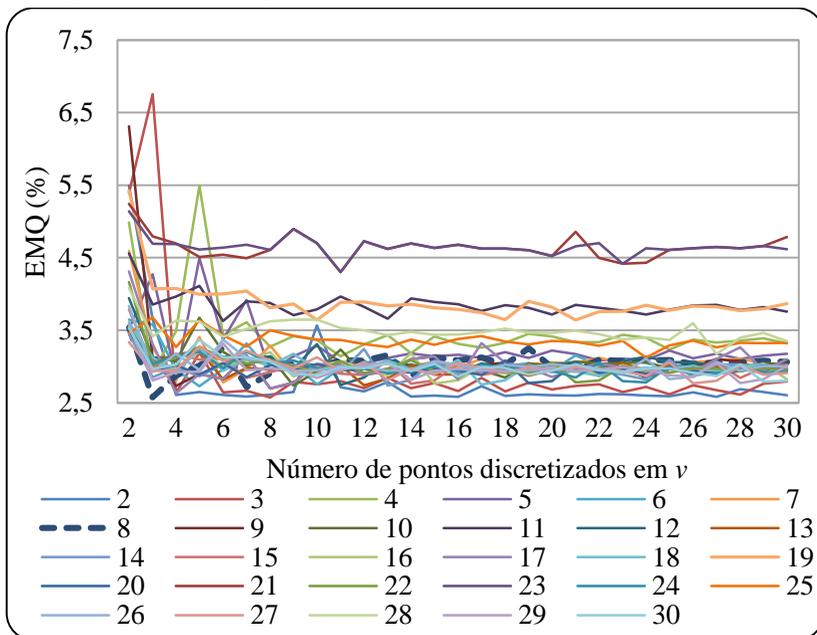
Naturalmente este tipo de usina tende a possuir o EMQ mais alto que as demais, pois é a única com FPH tridimensional. A Figura 5.14 mostra que com 169 pontos o EMQ estabiliza-se em aproximadamente 2,8 %.

**Figura 5.14 – EMQ e número de aproximações lineares em função do número de pontos utilizados no algoritmo do CH.**

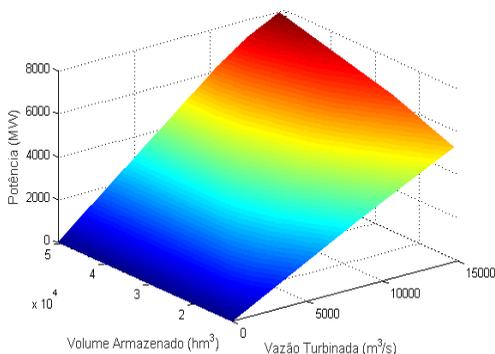


Por sua vez, a Figura 5.15 mostra os resultados da EMQ associados a heurística implementada para busca dos planos ótimos. Na legenda da Figura 5.15 estão colocados os pontos discretizados em  $q$ .

**Figura 5.15 – EMQ associado com a heurística - UHE Tucuruí.**



Para a UHE Tucuruí o número ótimo de hiperplanos é igual a sete, obtido com oito pontos discretizados em  $q$  e três em  $v$ . Ainda, o menor EMQ é igual a 2,57%. A aproximação tridimensional de Tucuruí pode ser observada na figura abaixo, em que se considera a vazão vertida nula.

**Figura 5.16 – FPH aproximada da UHE de Tucuruí.**

A Tabela 5.6 apresenta um resumo com os resultados obtidos pela análise do erro para as dez UHEs do Tipo 4 com maior capacidade instalada. Os resultados associados com as demais UHEs dessa natureza estão no Apêndice C.

**Tabela 5.5 – Análise de erro das usinas do Tipo 4.**

UHE	Menor EMQ (%) / Aproximações Lineares	Aproximações Lineares com EMQ de 2%
Tucuruí*	2,57 / 7	7
Ilha Solteira	1,83 / 6	3
São Simão	0,77 / 31	10
Itumbiara	1,30 / 36	11
Água Vermelha	1,23 / 29	12
Marimbondo	1,66 / 33	17
Furnas*	2,23 / 20	15
Salto Santiago	1,22 / 38	18
G. B. Munoz	1,46 / 65	20
Serra Mesa	1,62 / 64	25

**\*UHE com EMQ maior que 2%.**

Geralmente as UHEs do tipo 4 possuem um EMQ mais elevado na comparação com os outros tipos, e este valor maior está bastante ligado a inclusão do coeficiente da vazão vertida fora da CH.

Nota-se que, as usinas com maior EMQ da Tabela 5.5 são, Tucuruí e Furnas, este erro é maior, pois estas UHE's possuem uma quantidade

grande de máquinas, e conjuntos geradores diferentes, desta forma, aumenta-se os níveis de não convexidade da FPH. Na terceira coluna da mesma tabela, destaca-se, também, uma diminuição significativa no número de planos ao considerar um EMQ de 2%, esta diminuição fica algo em torno de 50% do total ótimo.

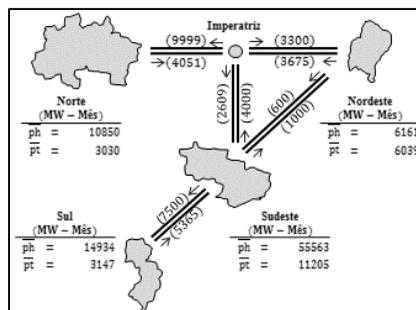
De maneira geral, com os resultados obtidos e detalhados no Apêndice C no tocante as 134 UHEs, destaca-se que, considerando o menor EMQ, foram encontradas 2.848 equações. Para se ter uma ideia, ao aplicar a PDDE para resolver o POMP, cada subproblema de PL terá 2.848 restrições apenas para representar a FPH para cada patamar de carga.

Por outro lado, ao fixar um erro ligeiramente acima do ótimo, como por exemplo aqueles expostos na Tabela 5.2, Tabela 5.3 e Tabela 5.4, pode-se obter uma diminuição considerável no número de equações. Neste caso em particular, o número total de aproximações da FPH fica algo em torno de 1.932, i.e., uma redução de aproximadamente 30%.

## 5.2 Análise Comparativa entre as Modelagens da FPH

Para realizar uma análise comparativa entre as duas modelagens da FPH, este trabalho faz uso de uma configuração hidrotérmica baseada no SIN. A Figura 5.17 mostra alguns aspectos da configuração utilizada, tais como limites máximos de geração hidrelétrica, termelétrica e intercâmbios de energia entre subsistemas.

**Figura 5.17 – Configuração hidrotérmica.**



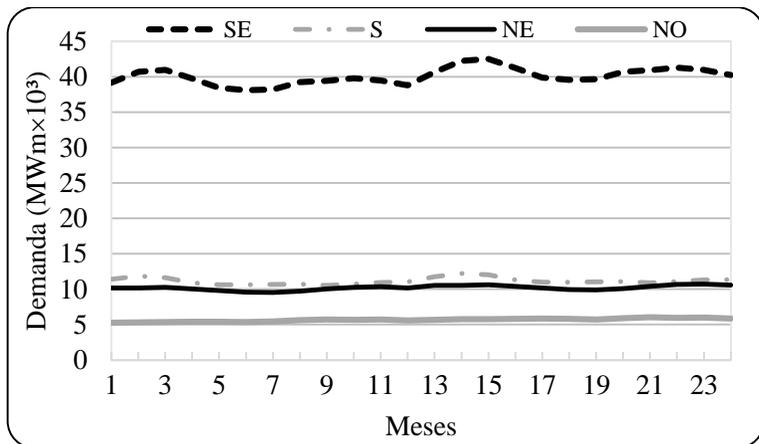
Os dados gerais acerca do sistema foram retirados do Deck de informações do modelo NEWAVE do mês de janeiro de 2014 (CCEE, 2014). Em termos recursos de geração são utilizadas 134 UHEs e 122 usinas termelétricas (UTES), como pode ser observado na Tabela 5.6.

**Tabela 5.6 – Recursos energéticos da configuração hidrotérmica.**

Subsistema	UHE	UTE
Sudeste	91	37
Sul	29	15
Nordeste	7	38
Norte	7	32

Todas as usinas estão em operação ao longo do horizonte de planejamento. Neste momento, é importante destacar que para calcular as aproximações linear por parte de cada UHE foi utilizada uma curva colina fictícia, cujo os coeficientes  $R_0, \dots, R_5$  da função (2.7), levam em consideração o engolimento máximo, a altura efetiva e a potência nominal da turbina da respectiva UHE.

Por sua vez, a demanda de energia, representada em três patamares, varia ao longo dos estágios, conforme mostrado na Figura 5.18. Nesta figura é possível ainda perceber que o horizonte de estudo é de 24 meses, ou seja, dois anos com discretização mensal.

**Figura 5.18 – Demanda ao longo dos meses.**

O custo do déficit é representado por uma função linear por partes, cujos valores incrementais são dados conforme a Tabela 5.7.

**Tabela 5.7 – Custo incremental de déficit (R\$/MWh) em função da profundidade do déficit.**

Faixas de não atendimento (% da demanda)			
0 - 5	5 - 10	10 - 20	20 - 100
1.364,4	2.943,5	6.151,7	6.989,9

No tocante ao critério de parada utilizado no algoritmo da PDDE, neste trabalho estabeleceu-se um limite de 750 iterações<sup>13</sup>. A taxa de atualização dos custos para valor presente é de 12% ao ano. Conforme visto no Capítulo 4, as vazões afluentes incrementais as UHEs representam as variáveis aleatórios do POMP. Além disso, é considerado que todos os reservatórios do sistema possuem 25% do volume útil como valor inicial. Outros dados de entrada podem ser encontrados no Apêndice C.

As principais características dos tipos de modelagem da PFH utilizadas do POMP são:

- **Modelo 1** – FPH com produtividade constante. Cada problema de PL associado com um subproblema da PDDE possui 1.306 variáveis e 303 restrições;
- **Modelo 2** – FPH linear por partes. Cada problema de PL possui 1.765 variáveis e 8.847 restrições.

A apresentação dos resultados numéricos segue o formato do Capítulo 4. Inicialmente são calculadas as Funções de Custo Futuro (FCFs) através da PDDE<sup>14</sup>. Subsequentemente, realiza-se uma simulação com base nessas FCFs em 2.000 cenários sorteados na árvore original (i.e., aquela que foi otimizada via PDDE).

Para investigar um grande número de casos operativos foram construídas 10 árvores de cenários: quatro com 20 realizações de afluência por estágio, quatro com 50 realizações e duas com 100. Dado que a PDDE utilizada neste trabalho faz uso de uma amostra de cenário

<sup>13</sup> Em geral, este foi o número de iterações em que o custo inferior da PDDE se estabilizou para os dois modelos considerando uma série de testes computacionais.

<sup>14</sup> O Apêndice D mostra como é feita a validação computacional do algoritmo da PDDE.

em cada Recursão Progressiva (RP)<sup>15</sup>, ao final das 750 iterações ter-se-ão 23 conjuntos de FCFs referentes ao final dos estágios 1 ao 23, em que cada conjunto possui 750 restrições lineares.

Diante do exposto, os principais resultados considerando as árvores com 20 realizações por estágio são observadas na Tabela 5.8.

**Tabela 5.8 – Otimização via PDDE com árvores de 20 realizações por estágio.**

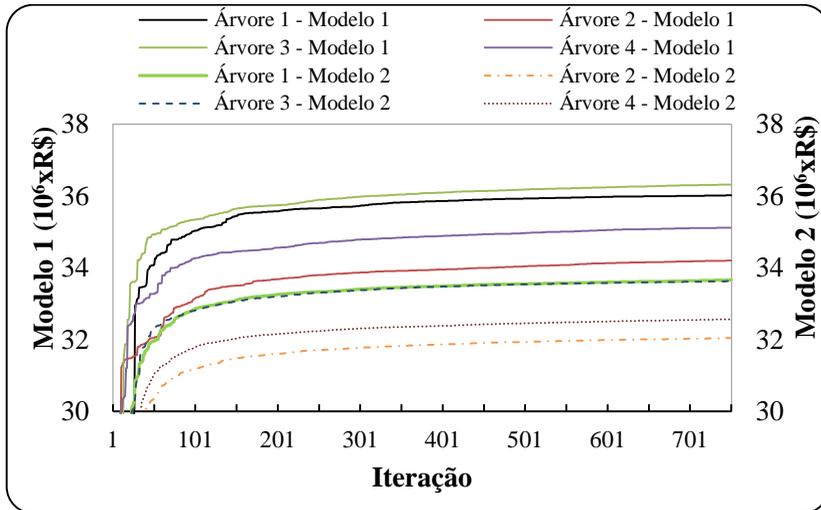
Árvore	Modelo	Custo Inferior (R\$ × 10 <sup>6</sup> )	Tempo (minutos)
1	1	36,021	24
	2	33,663	317
2	1	34,203	24
	2	32,043	319
3	1	36,318	25
	2	33,628	320
4	1	35,116	24
	2	32,567	318

Para verificar o impacto do volume inicial sobre o custo esperado de otimização, é feito outros dois casos além dos contidos na Tabela 5.8, alterando o volume inicial do sistema, os resultados estão colocados no Apêndice D.

A Figura 5.19 mostra a evolução do custo inferior ao longo das 750 iterações no tocante aos casos apresentados na Tabela 5.8.

<sup>15</sup> Nota-se que o total de cenários utilizado por cada RP seria igual a  $23^{20}$  ( $1,71 \cdot 10^{27}$ ),  $23^{50}$  ( $1,22 \cdot 10^{68}$ ) e  $23^{100}$  ( $1,49 \cdot 10^{136}$ ) para os casos com 20, 50 e 100 realizações, respectivamente.

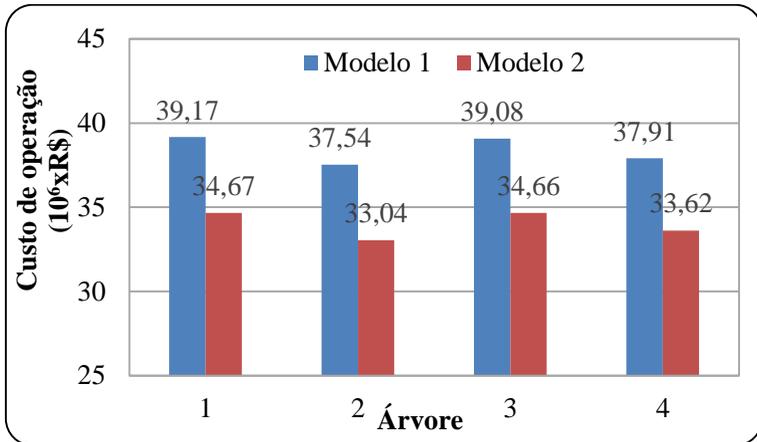
**Figura 5.19 – Comportamento do custo inferior – Casos com 20 realizações.**



Observa-se que a diferença do valor do custo inferior entre os dois modelos não vale a título de comparação, uma vez que, o custo dado na Figura (5.19) é apenas um limite inferior para o valor ótimo. Contudo, o custo computacional é um fator muito importante no cálculo da política, e conforme mostra a Tabela 5.8, o Modelo 1 é, em média, 14 vezes menos oneroso computacionalmente que o Modelo 2.

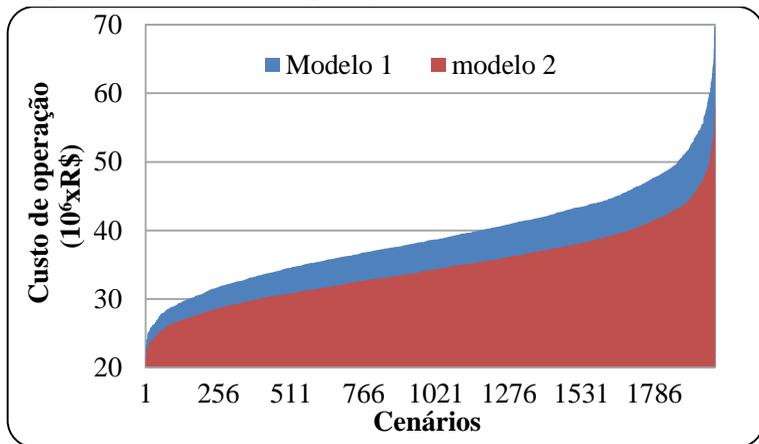
Agora, com base no Algoritmo 4.1, foi aplicada a simulação para cada uma das árvores mostradas na Tabela 5.8, e neste momento uma comparação de custos de operação é válida, pois indica o gasto operacional de cada política calculada. Os principais resultados no tocante ao custo total de operação estão na Figura 5.20.

**Figura 5.20 – Custo de operação esperado – Árvores com 20 realizações por estágio.**



Conforme mostra a Figura 5.20, nota-se que o custo esperado das 2.000 séries é, em média, 13% menor no Modelo 2 em comparação ao Modelo 1. Merece destaque ainda que a maior diferença está associada com as FCFs obtidas pela Árvore 2 (13,62%). A seguir, a Figura 5.21 apresenta a distribuição dos custos obtidos na simulação para ambos os modelos, no tocante a Árvore 1.

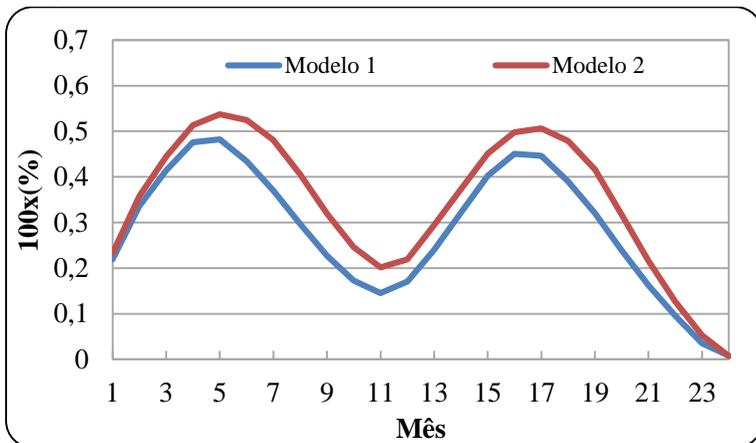
**Figura 5.21 – Custo de operação de cada cenário da Árvore 1.**



Além de menor custo, a política do modelo 2 fornece melhores aproveitamento dos recursos hídricos ao longo dos períodos, assim como

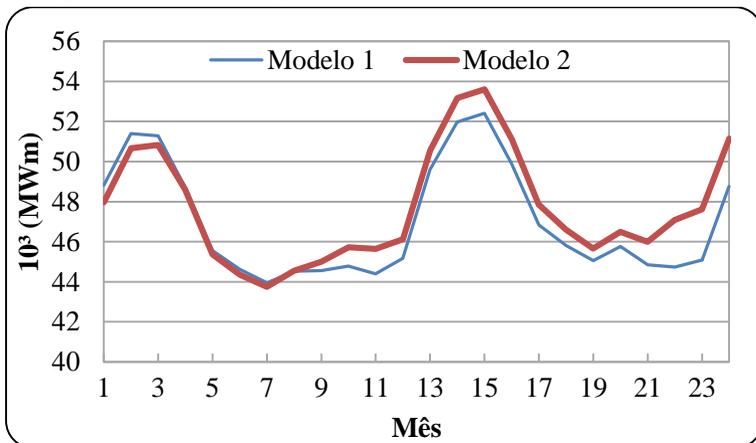
mostra Figura 5.22. Este fato implica em que com níveis dos reservatórios mais elevados, é possível um melhor gerenciamento dos recursos hídricos diminuindo a chance de déficit do sistema.

**Figura 5.22 – Volume útil médio total do sistema - Árvore 1.**



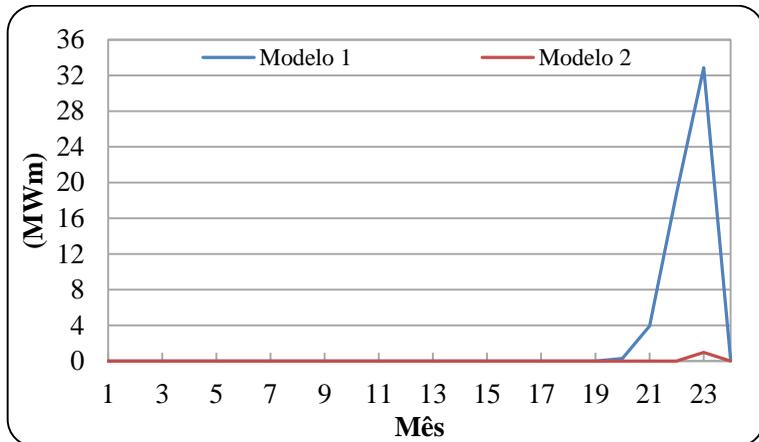
Na maioria dos períodos a produção hidrelétrica foi maior no Modelo 2, como pode ser observado pela Figura 5.23.

**Figura 5.23 – Produção hidrelétrica média total - Árvore 1**



Nos casos apresentados até então, o Modelo 1 calcula FCFs mais otimistas, isto é, consideram um futuro mais barato ao ponto de produzir mais geração hidráulica nos primeiros períodos que ocasionam um nível de déficit maior ao longo do tempo, conforme aponta a Figura 5.24.

**Figura 5.24 – Déficit médio obtido na simulação com as FCFs obtidas pela otimização da Árvore 1.**



É sabido que a qualidade das FCFs obtidas via PDDE estão associadas com o número de realizações utilizadas em cada mês para a construção da árvore de cenários. Para analisar esse tipo de influência, a Tabela 5.9 mostra o desempenho computacional associado com mais quatro problemas de PMOP, nos quais são utilizados 50 valores de afluências incrementais por estágio de tempo.

**Tabela 5.9 – Otimização via PDDE com árvores de 50 realizações por estágio.**

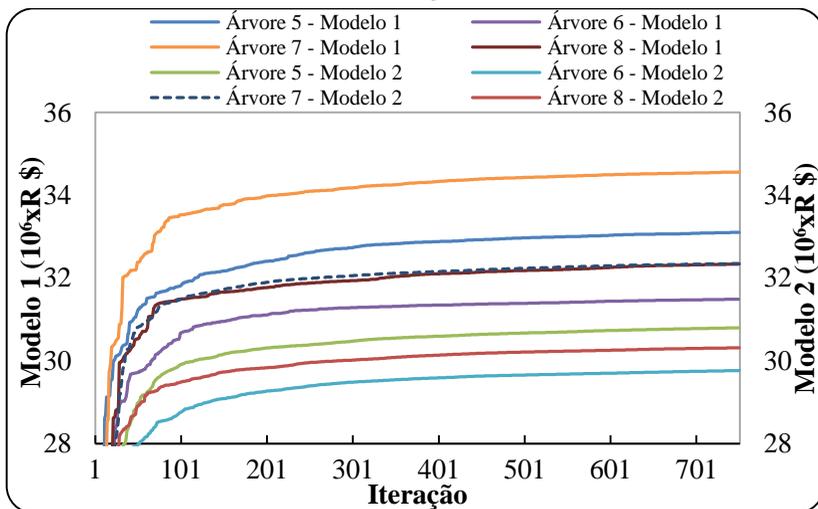
Árvore	Modelo	Custo Inferior (10 <sup>6</sup> xR\$)	Tempo (minutos)
5	1	33,104	60
	2	30,799	749
6	1	31,489	59
	2	29,768	746
7	1	34,562	62

	2	32,351	750
8	1	32,340	60
	2	30,317	748

O tempo computacional, o modelo 2 é cerca de 13 vezes mais oneroso que o Modelo 1. Embora ocorreu um aumento natural no tempo total de otimização ao comparar com os casos da Tabela (5.8), não houve alteração na relação tempo computacional total entre eles, pois a otimização é feita exatamente no mesmo modelo.

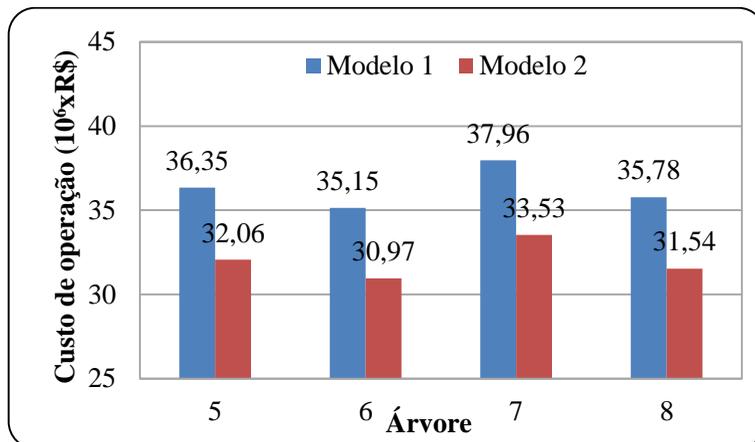
A Figura 5.25 mostra o comportamento do custo inferior dos casos com 50 realizações.

**Figura 5.25 – Comportamento do custo inferior – Casos com 50 realizações.**



Por sua vez, os principais resultados no tocante ao custo total de operação obtidos com uma simulação de 2.000 séries estão apresentados na Figura 5.26.

**Figura 5.26 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.**



Nota-se que, semelhantemente ao caso com 20 realizações, o Modelo 1 possui custo mais elevado em aproximadamente 13,3% ao comparar com o Modelo 2. Merece destaque a Árvore 6 que obteve a maior diferença de custo (13,48%).

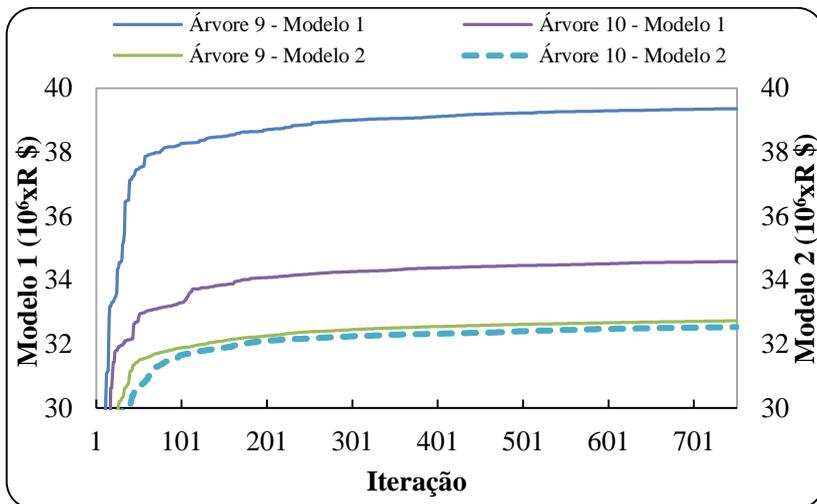
Por fim, apresentam-se os resultados referentes com duas árvores que possuem 100 realizações por estágio, como mostra a Tabela 5.10.

**Tabela 5.10 – Considerando 100 realizações por estágio.**

Árvore	Modelo	Custo Inferior ( $10^6 \times R\$$ )	Tempo (min)
9	1	34,986	104
	2	32,728	1477
10	1	34,582	105
	2	32,536	1480

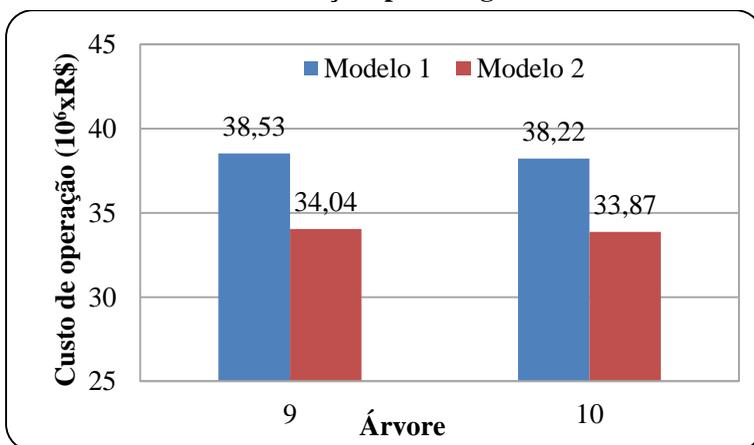
A Figura 5.27 mostra o comportamento do custo inferior ao longo das 750 iterações.

**Figura 5.27 – Comportamento do custo inferior – Casos com 100 realizações.**



Com base no que foi apresentado no Capítulo 4, foi aplicada a simulação para cada uma das árvores mostradas na Tabela 5.10. Os principais resultados no tocante ao custo total de operação são apresentados na Figura 5.28.

**Figura 5.28 – Custo de operação esperado – Árvores com 100 realizações por estágio.**



A Figura 5.28 mostra que ao aumentar o número para 100 as realizações por nó da Árvore de cenário, observa-se que as políticas das duas Árvores simuladas resultaram em um custo de operação esperado médio total de aproximadamente 13,16% e 12,83% maior para o Modelo 1.

### 5.3 Análise Comparativa de Heurísticas Aplicadas nas Modelagens da FPH

Analisando os resultados da seção anterior é possível afirmar que o Modelo 1 pode apresentar diferenças significativas em relação ao modelo mais preciso que é o Modelo 2. Contudo, o preço a pagar pela precisão do Modelo 2 é um tempo computacional muito mais oneroso. Portanto, com o intuito de diminuir o tempo computacional sem perder o compromisso com a precisão da representação da FPH, esta seção apresenta os resultados computacionais de outros modelos, conforme abaixo:

- **Modelo 3:** Utiliza FPH linear por partes na recursão progressiva e a FPH com produtividade constante na recursão regressiva no algoritmo da PDDE;
- **Modelo 4:** Utiliza a FPH linear por partes apenas na modelagem das 10 UHEs com os maiores reservatórios do sistema, conforme Tabela 5.11. As demais UHEs são representadas com modelo a produtividade constante;
- **Modelo 5:** Utiliza a FPH linear por partes nas 10 UHEs com maior potência instalada, conforme Tabela 5.11. As demais UHEs são representadas com modelo a produtividade constante.

A Tabela 5.11 mostra as usinas modeladas com FPH linear por partes nos modelos 4 e 5, bem como suas características nominais que fizeram parte do critério de seleção.

**Tabela 5.11 – Usinas utilizadas nos modelos 4 e 5.**

Modelo 4		Modelo 5	
Usina	V. Útil (hm <sup>3</sup> )	Usina	Potência (MW)
Serra Mesa	43.250	Itaipu	14.000
Tucuruí	38.982	Tucuruí	8.535

Sobradinho	28.669	Comp. Paf-Mox.	4.279
Furnas	17.217	Jirau	3.750
Emborcação	13.056	Ilha Solteira	3.444
Ilha Solteira	12.828	Xingó	3.162
Itumbiara	12.454	Santo Antônio	3.151
Nova Ponte	10.380	Itumbiara	2.280
Balbina	10.294	São Simão	1.710
Capivara	5.724	Gb. Muniz	1.676

A partir desses três novos modelos foram feitas as mesmas análises mostradas no Capítulo 4, isto é, cada modelo foi otimizado utilizando a PDDE com critério de parada de 750 iterações, sendo ao final, armazenada as respectivas FCFs. Em seguida, foi feito uma simulação com 2.000 cenários sorteados da mesma árvore em que foi otimizada, utilizando uma base comum para a simulação (Modelo 2).

Com isso, a Tabela 5.12 mostra os resultados da otimização dos três modelos os casos com 20 realizações por estágio.

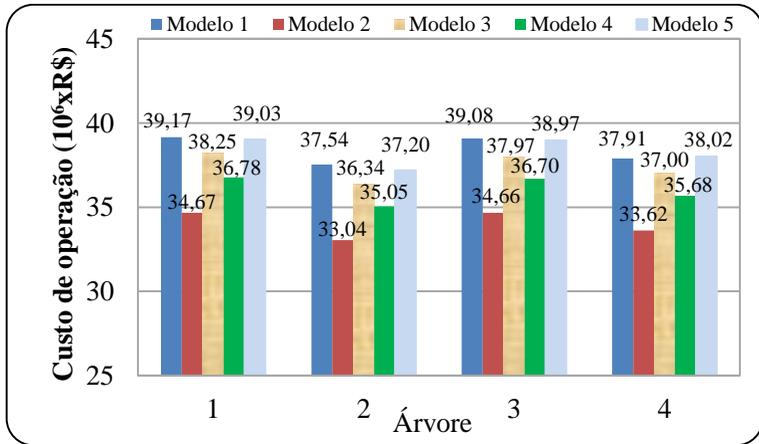
**Tabela 5.12 – Otimização via PDDE com árvores de 20 realizações por estágio.**

Árvore	Modelo	Custo Inferior $\times 10^6$ (R\$)	Tempo (minutos)
1	1	36,021	24
	2	33,663	317
	3	35,016	39
	4	38,270	59
	5	33,254	34
2	1	34,203	24
	2	32,043	319
	3	33,131	42
	4	36,507	46
	5	31,643	37
3	1	36,318	25
	2	33,628	320

	3	34,972	42
	4	38,448	45
	5	33,586	37
	1	35,116	24
	2	32,567	318
4	3	34,138	42
	4	37,259	45
	5	32,209	35

Com base no Algoritmo 4.1, foi aplicada a simulação para cada uma das Árvore mostradas na Tabela 5.12. Os principais resultados no tocante ao custo total de operação para as estão apresentados na Figura 5.29.

**Figura 5.29 – Custo de operação esperado – Árvore com 20 realizações por estágio.**



A Figura 5.29 mostra que, o Modelo 3 e o Modelo 5, em média, são 9,9% e 12,67% mais caros que o Modelo 2, respectivamente. Destaca-se o Modelo 4, que o custo superou o Modelo 2 em aproximadamente 6%, com um tempo computacional, em média, duas vezes e meia maior que o Modelo 1, que foi o Modelo menos oneroso. Nota-se também, que o Modelo 1 continuou com o custo mais elevado em quase todas as Árvore,

perdendo apenas, para o Modelo 5 na Árvore 4, além disso, nota-se uma semelhança grande em questão de cálculo da FCF nos Modelos 1 e 5.

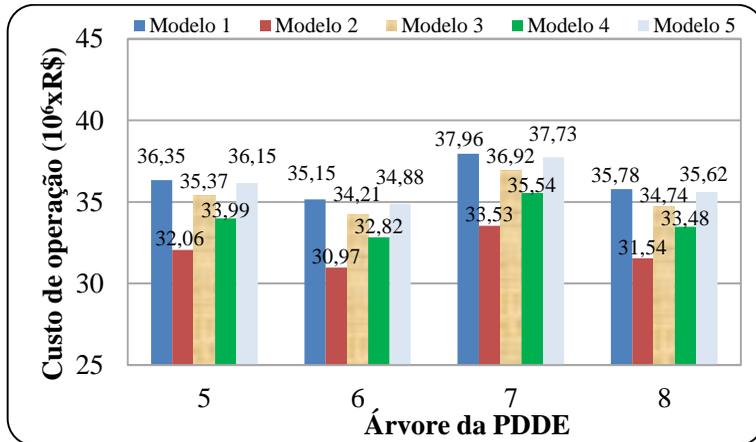
Continuando com as análises, a Tabela 5.13 apresenta o desempenho computacional obtido com a otimização via PDDE das Árvores 5 a 8, considerando os cinco modelos de FPH apresentados até aqui.

**Tabela 5.13 – Otimização via PDDE com árvores de 50 realizações por estágio.**

Árvore	Modelo	Custo Inferior (10 <sup>6</sup> xR\$)	Tempo (minutos)
5	1	33,104	60
	2	30,799	749
	3	32,065	66
	4	35,155	111
	5	30,395	81
6	1	31,489	59
	2	29,768	746
	3	30,561	67
	4	33,724	112
	5	29,103	83
7	1	34,562	62
	2	32,351	750
	3	33,377	66
	4	36,890	111
	5	31,966	82
8	1	32,340	60
	2	30,317	748
	3	31,331	68
	4	34,522	111
	5	29,846	81

A Figura 5.30 mostra as quatro Árvores para o custo de operação esperado obtido com as políticas considerando 50 realizações por nó.

**Figura 5.30 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.**



Ao adotar o Modelo 2 como base de comparação, a Figura 5.30 mostra que, o Modelo 5 foi o que obteve uma disparidade maior no custo, com aproximadamente 12,71% mais elevado em média. Seguido pelo Modelo 3, que apresentou um aumento de 10,26% em média. Novamente, destaca-se que o Modelo 4 é, em média, aproximadamente 6,04% mais dispendioso, em relação ao Modelo 2, contudo, com um ganho computacional em aproximadamente seis vezes e meia.

A Tabela 5.14 possui os resultados para as duas Árvores otimizadas via PDDE para 100 realizações por estágio.

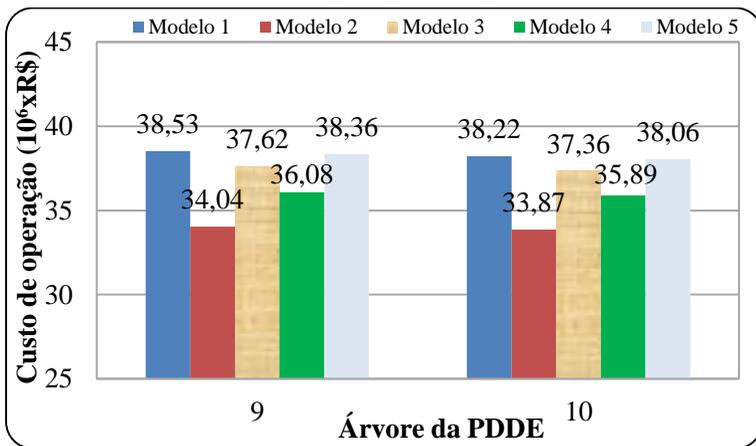
**Tabela 5.14 – Otimização via PDDE com árvores de 100 realizações por estágio.**

Árvore	Modelo	Custo Inferior (10 <sup>6</sup> xR\$)	Tempo (minutos)
9	1	34,986	104
	2	32,728	1477
	3	33,838	114
	4	37,184	213
	5	32,254	158
10	1	34,582	105
	2	32,536	1480

3	33,627	129
4	36,887	211
5	32,089	159

Na Figura 5.31 é mostrado o custo de operação esperado para as políticas calculadas com 100 realizações por estágio.

**Figura 5.31 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.**



A Figura 5.31 mostra que, dos Modelos propostos nesta seção, o Modelo 5 mais é o mais dispendioso em questão de custo se comparado com o Modelo 2, seguido pelo Modelo 3, e depois pelo Modelo 4, em média os custos são de 12,36%, 10,28% e 5,95% respectivamente. Nota-se uma semelhança muito grande no custo obtido pelas FCF do Modelo 1 e 5.

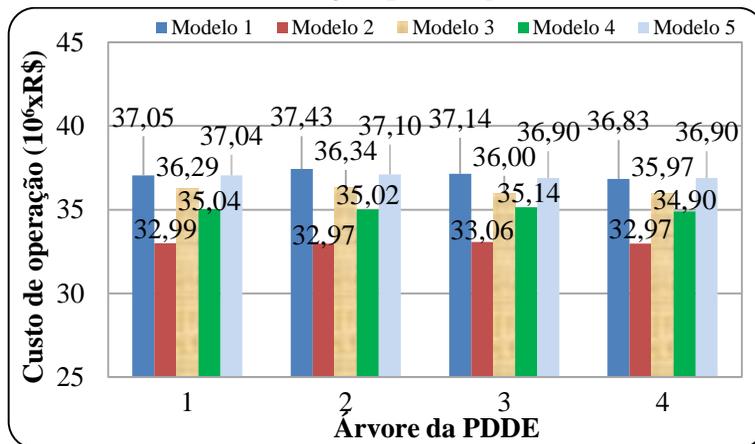
#### 5.4 Análise Comparativa das Modelagens da FPH via Simulação *Out-Sampled*

Ao final do Capítulo 4 foi abordado um outro tipo de análise, que também é apresentada com o apoio do Algoritmo 4.1, a qual no Passo 1 faz uso de cenários que não pertencem a árvore em que a otimização é realizada. Dado que as FCFs são as mesmas utilizadas nas seções

anteriores calculadas via PDDE, foi realizado um sorteio com 2000 cenários com uma Árvore diferente das 10 anteriores apresentadas.

Com essas novas afluições em mãos, os principais resultados dos custos de operação esperado ao simular as políticas obtidas com as Árvores com 20 realizações são mostradas na Figura 5.32.

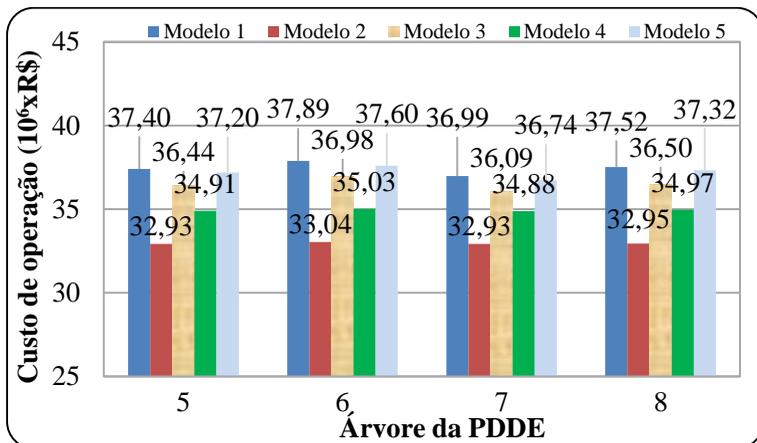
**Figura 5.32 – Custo de operação esperado – Árvores com 20 realizações por estágio.**



Destaca-se pela Figura 5.32, que o Modelo 4 ainda continua obtendo o menor custo em relação ao Modelo 2, em média, equivale a aproximadamente 6,14%. Ainda, observa-se uma semelhança muito grande entre os Modelos 1 e 5, ambos com custo, em média pouco maior que 12% em comparação com o Modelo Base.

A Figura 5.33 mostra o resultado dos custos de operação ao simular as FCF obtidas com as Árvores com 50 realizações.

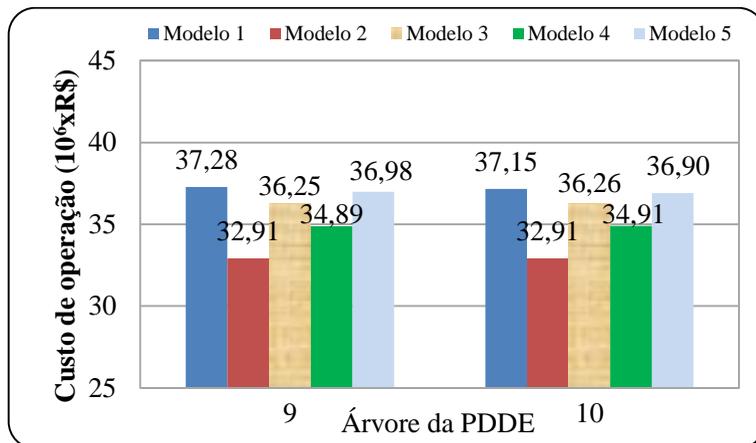
**Figura 5.33 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.**



De acordo com os dados da Figura 5.33, nota-se que o Modelo 1 é o que possui custo maior, obteve em média um custo de 13,60% mais elevado que o Modelo 2. Em seguida, pelo Modelo 5 e 3, com 12,90% e 10,73% mais elevado respectivamente. E por fim, destaca-se, novamente o Modelo 4 que obteve, em média, 6% custo mais elevado que o modelo mais detalhado.

A Figura 5.34 mostra o resultado dos custos de operação ao simular as FCF obtidas com as Árvores com 100 realizações.

**Figura 5.34 – Custo de operação esperado – Árvores com 50 realizações por estágio.**



Pela Figura 5.34, destaca-se o Modelo 4 por obter um custo mais elevado que o Modelo 2 em apenas 6,04%.



## 6 CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho foram mostradas duas formas de representar a função de produção (FPH) das usinas hidrelétricas (UHES) (com produtibilidade constante e com função linear por partes), para depois, serem aplicadas em um sistema de grande porte com o propósito de comparar tais estratégias de representação da FPH no âmbito do problema do planejamento da operação de médio prazo (POMP).

No tocante a concepção do modelo FPH linear por partes, as principais conclusões deste trabalho podem ser elencadas como se segue:

- O erro médio quadrático (EMQ) da FPH linear por partes é de aproximadamente 1,5%. Esse é um bom nível de precisão considerando as incertezas que estão associadas com o problema do POMP;
- Os maiores valores do EMQ referem-se as usinas com FPH tridimensional, alavancados principalmente pelo tratamento da variável da vazão vertida (fora do algoritmo do *Convex Hull*);
- Para as UHES do caso Brasileiro, não se necessita expandir de uma discretização que 900 (30 em cada dimensão), pois, uma discretização maior não diminui o EMQ;
- Ao se considerar um valor EMQ um pouco acima do menor valor, é possível diminuir o número de hiperplanos de forma considerável e com isso espera-se um esforço computacional mais reduzido na solução via PDDE;

Com respeito as implementações das FPHs em um modelo de POMP via PDDE é possível concluir que:

- O Modelo 2 é cerca de 14 vezes menos oneroso computacionalmente que o Modelo 1. Esta diferença deve-se a disparidade de tamanho, isto é, o Modelo 1 possui 25 vezes mais restrições e variáveis que o Modelo 2.
- Por outro lado, os resultados indicam que a diferença na análise com simulação essa diferença vai para 13 %;
- Conclui-se que, mesmo com os benefícios em termos de precisão nos custos trazidos pela FPH linear por partes, o tempo de 14 vezes maior é indesejável, que pode comprometer a viabilidade da implementação no problema do POMP;
- Destaca-se que Modelo 4, que utiliza as 10 maiores UHES representados pelo Modelo 1, conseguiu em média 6% maior

custo e redução de esforço computacional na ordem de 6,5 vezes em comparação com o modelo mais detalhado.

Com respeito as simulações das FCF's em 2000 cenários de uma Árvore fora da amostra original é possível concluir que:

- Os resultados obtidos indicam que não há uma variação notória ao comparar as amostras de 2000 cenários dentro da Árvore original, com as amostras fora da Árvore original, pois a variação no custo esperado é menor que 1% para a maioria dos casos.
- Destaca-se que, o Modelo 4 possui em média 6,08% custo mais elevado que o modelo 2.

### 6.1 Sugestões de Trabalhos Futuros

Abaixo, apresentam-se alguns tópicos os quais podem ser realizados em trabalhos futuros.

- Estudar formas de levar em consideração o tipo da turbina da UHE na modelagem do polinômio do rendimento na Função de Produção Hidrelétrica (PILLON TORRALBA FERNANDES et al., 2013), desta forma, chegando a aproximações mais próximas a realidade.
- Estudar formas de utilizar um algoritmo de *Convex Hull* de modo que inclua as 4 dimensões da FPH diretamente, isto é, sem a necessidade da aproximação da vazão vertida externamente á CH.
- Representar a FPH em função da vazão defluente e volume armazenado (DINIZ; SABÓIA, 2015). Justifica-se que, ocorreria vertimento apenas depois da vazão máxima das turbinas serem alcançadas, o que na prática é geralmente o que acontece, além de que, diminui o número de variáveis na implementação em algoritmos de PDDE.

Pode-se representar a FPH com o conceito de produtibilidade variável, isto é, variar esse parâmetro em função do nível do reservatório obtido no início de cada estágio. Entretanto, conforme mostra (SUANNO, 1995) tal consideração acrescenta não convexidades ao algoritmo da PDDE e, portanto, alguma estratégia para construir as FCFs deve ser alterada em relação ao caso convexo;

## 7 Apêndice A: Dados Gerais das UHE do Capítulo 2

Este apêndice tem como objetivo mostrar os dados utilizados para construir as funções de produção das usinas Funil, Salto Caxias, Camargos, Marimbondo e Sá Carvalho, todas citadas no Capítulo 2.

A Tabela 7.1 mostra quais os tipos de usinas em que se enquadram, quais variáveis elas dependem, potência instalada e por fim quantidade de unidades geradoras.

**Tabela 7.1 – Dados Gerais das Usinas**

Usinas	Descrição/Tipos	Caso	Potência (MW)	*	
Funil Grande	Fio D' Água	$Q$	1	180	1/3
Salto Caxias		$Q, S$	2	1240	1/4
Camargos	Reservatório	$Q, V$	3	46	1/2
Marimbondo		$Q, V, S$	4	1488	1/8

\* - Número de Conjunto-Gerador / Número total de Unidades

A Tabela 7.2 mostra os principais dados das unidades geradoras das UHE Funil e Sá Carvalho.

**Tabela 7.2 – Dados das unidades Geradoras UHE Funil e Sá Carvalho.**

Usinas	*	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3	
		Potência (MW)	$u^{max}$ (m <sup>3</sup> /s)	Potência (MW)	$u^{max}$ (m <sup>3</sup> /s)	Potência (MW)	$u^{max}$ (m <sup>3</sup> /s)
Funil Grande	1/2	23	110				
Sá. Carvalho	3/4	15	16	18	19	30	32

\* - Número de Conjunto-Gerador / Número total de Unidades

A Tabela 7.3 mostra os valores dos coeficientes dos polinômios de função de cota montante e jusante, para a UHE Funil e Sá Carvalho.

**Tabela 7.3 – FCM e FCJ.**

<b>Usinas</b>	<b>Funil</b>	<b>Sa. Carvalho</b>
<b>HM<sup>0</sup> (m)</b>	808,0	370,0
<b>HJ<sup>0</sup> (m)</b>	768,0	255,0

A Tabela 7.4 mostra os coeficientes associados aos polinômios de rendimento das UHE Funil e Sá Carvalho.

**Tabela 7.4 – Coeficientes de Rendimento**

<b>Usinas</b>	<b>Funil</b>		<b>Sa. Carvalho</b>	
<b>Grupo</b>	1	1	2	3
<b>R<sub>0</sub></b>	3,59E-01	3,59E-01	3,59E-01	3,59E-01
<b>R<sub>1</sub></b>	9,82E-03	6,65E-02	5,54E-02	3,32E-02
<b>R<sub>2</sub></b>	1,43E-02	3,24E-03	3,24E-03	3,24E-03
<b>R<sub>3</sub></b>	1,34E-04	2,06E-04	1,72E-04	1,03E-04
<b>R<sub>4</sub></b>	-8,56E-05	-3,92E-03	-2,72E-03	-9,81E-04
<b>R<sub>5</sub></b>	-4,88E-04	-2,51E-05	-2,51E-05	-2,51E-05
<b>PR</b>	2,21E-05	2,27E-02	1,61E-02	5,66E-03

A Tabela 7.5 mostra os dados associados aos coeficientes do polinômio de rendimento, coeficientes de perda nos dutos forçados, capacidade de armazenamento e potência por unidade geradora, das UHE Furnas, Salto Caxias e Camargos.

**Tabela 7.5 – Dados de Furnas, Salto Caxias e Camargos**

<b>Usinas</b>	<b>Furnas</b>		<b>Salto Caxias</b>	<b>Camargos</b>
<b>Grupo</b>	1	2	1	1
<b>R0</b>	3.59E-1	3.59E-1	3,59E-01	0,35873
<b>R1</b>	5.04E-3	5.00E-3	1,94E-03	0,009822
<b>R2</b>	3.90E-3	3.93E-3	5,37E-03	0,014283
<b>R3</b>	1.88E-5	1.88E-5	9,96E-06	0,000134
<b>R4</b>	-2.25E-5	-2.22E-5	-3,33E-06	-8,56E-05
<b>R5</b>	-3.65E-5	-3.70E-5	-6,91E-05	-0,00049

---

<b>PR</b>		2,18E-06	9,92E-05
<b>Vol máx</b>	5733		792
<b>Vol min</b>	22950		120
<b><math>u^{max}</math></b>	213/211	525	110



## 8 Apêndice B: Dados Gerais da Usinas de Furnas e Funil

A Tabela 8.1 mostra os principais dados nominais da UHE Furnas.

**Tabela 8.1 – Dados Gerais de Furnas.**

Vazão Turbinada (m <sup>3</sup> /s)			Volume (hm <sup>3</sup> )		(MW)
$q^{max}$	$u^1$	$u^2$	$v^{max}$	$v^{min}$	$PH$
1692	211	213	22950	5733	1312
vp (m)	1,09	<i>no</i>	2		hc (m)
hp (%)	5,98	<i>nu</i>	6	2	672,9
$pe$ (MW/m <sup>3</sup> /s/m)		0,008633			

A Tabela 8.2 mostra a produtividade especifica e altura efetiva da UHE Funil

**Tabela 8.2 – Dados de Funil.**

$pe$ (MW/m <sup>3</sup> /s/m)	$he$ (m)
0,008829	34,9

A Tabela 8.3 mostra os coeficientes das funções da cota montante, jusante e rendimento para a UHE Furnas.

**Tabela 8.3 - Coeficientes de FCM (hm), FCJ (hj) e Rendimento (ne) de Furnas.**

hm	7.35E+02	3.50E-03	-1.97E-07	6.92E-12	-9.77E-17	
hj	6.72E+02	1.02E-03	-1.80E-07	2.51E-11	0.00E+00	
ne <sup>1</sup>	3.59E-1	5.04E-3	3.90E-3	1.88E-5	-2.25E-5	-3.65E-5
ne <sup>2</sup>	3.59E-1	5.00E-3	3.93E-3	1.88E-5	-2.22E-5	-3.70E-5



## 9 Apêndice C: Planos ótimos e Dados Gerais acerca do Sistema.

Este apêndice tem o objetivo de expor os principais dados utilizados na implementação do algoritmo da PDDE.

A Tabela 9.1 a quantidade de planos que cada usina foi implementada na PDDE, bem como os respectivos erros ótimos. Mostra também quantos pontos foram necessários para alcançar tal aproximação e na última coluna, as produtibilidades utilizadas no Modelo da FPH com produtividade constante.

**Tabela 9.1 – EMQ x hiperplanos x n° de pontos e produtividade de todas as UHE do sistema.**

EMQ (%)	n° hiper planos ( $nz$ )	n° de pontos em			PH (MW)	UHE	$\rho$
		$v$	$q$	$s$			
3,42	21	24	3	0	46	CAMARGOS	0,18
2,03	2	0	2	2	52	ITUTINGA	0,22
1,01	3	0	10	0	180	FUNIL-GRANDE	0,31
2,23	20	14	3	5	1312	FURNAS	0,71
2,46	31	27	8	5	478	M. DE MORAES	0,30
0,33	11	0	11	11	1104	ESTREITO	0,54
0,63	12	0	11	11	424	JAGUARA	0,39
0,49	11	0	9	9	210	IGARAPAVA	0,14
0,62	8	0	8	8	380	VOLTA GRNDE	0,24
0,52	22	0	12	4	328	P. COLOMBIA	0,16
2,38	15	8	4	5	80,4	CACONDE	0,78
0,56	10	0	8	8	108,8	E. DA CUNHA	0,73
1,79	6	0	6	2	32	A.S.OLIVEIRA	0,18
1,61	33	9	8	5	1488	MARIMBONDO	0,47
1,23	29	4	20	5	1396,2	A. VERMELHA	0,46
2,12	13	5	7	5	52,6	BATALHA	0,33
6,22	13	2	25	5	212,6	SERRA FACAO	0,60
1,58	17	5	8	5	1192	EMBORCACAO	1,04

1,87	23	11	7	5	510	NOVA PONTE	0,94
0,72	71	7	39	5	408	MIRANDA	0,63
0,71	27	2	42	5	240	CAPIM BRANC1	0,52
0,84	12	0	11	11	210	CAPIM BRANC2	0,39
1,23	11	3	12	5	127	CORUMBA IV	0,61
1,68	9	3	6	5	375	CORUMBA I	0,58
1,31	36	8	12	5	2280	ITUMBIARA	0,64
1,65	6	0	7	7	658	CACH.DOURDA	0,26
0,78	31	8	13	5	1710	SAO SIMAO	0,57
2,63	33	8	12	5	140	BARRA BONITA	0,16
0,83	15	0	9	6	144	A.S. LIMA	0,19
0,97	12	0	11	11	131,4	IBITINGA	0,19
1,15	94	20	20	5	264	PROMISSAO	0,21
1,05	22	0	8	29	347,4	NAVANHANDA.	0,24
1,83	6	3	5	5	4251,5	I. SOLT.	0,36
0,74	13	0	7	7	1551,2	JUPIA	0,19
2,73	96	6	39	5	1540	P. PRIMAVERA	0,17
1,88	10	4	7	5	101	A.A. LAYDNER	0,29
1,50	6	0	8	8	80	PIRAJU	0,22
0,73	22	5	11	5	414	CHAVANTES	0,61
0,76	13	0	8	8	74	L.N. GARCEZ	0,13
0,81	12	0	11	11	72	CANOAS II	0,13
0,89	8	0	6	6	82,5	CANOAS I	0,15
2,50	39	20	4	5	617,5	CAPIVARA	0,36
0,62	15	0	9	9	554	TAQUARUCU	0,19
1,00	13	0	8	8	372	ROSANA	0,13
0,05	8	0	29	0	14000	ITAIPU	1,06
1,80	94	7	56	5	120	STA CLARA PR	0,80
0,65	9	0	9	9	120	FUNDAO	0,79
1,46	65	7	35	5	1676	G.B. MUNHOZ	1,03
0,54	46	7	24	5	1260	SEGREDO	1,04
1,22	38	8	14	5	1420	SLT.SANTIAGO	0,84
2,49	3	0	3	2	1078	SALTO OSORIO	0,60

0,56	11	0	11	11	1240	SALTO CAXIAS	0,59
0,99	6	0	6	6	350,1	BAIXO IGUACU	0,14
1,35	17	5	9	5	698,4	BARRA GRDE	1,38
1,57	24	6	12	5	135	SAO ROQUE	0,42
0,48	10	0	11	11	189	GARIBALDI	0,38
0,73	14	3	14	5	879,9	CAMPOS NOVOS	1,65
1,09	23	6	12	5	1140	MACHADINHO	0,91
0,42	10	0	9	9	1450	ITA	0,91
1,29	105	6	64	5	226	PASSO FUNDO	2,29
1,38	30	0	10	10	74	MONJOLINHO	0,55
0,73	71	4	63	5	120	QUEBRA QUEIX	1,08
0,86	9	0	11	11	129,9	CASTRO ALVES	0,82
1,28	5	0	8	2	130	MONTE CLARO	0,39
1,62	7	0	8	8	100	14 DE JULHO	0,30
1,76	10	0	11	11	51	SAO JOSE	0,18
1,53	7	0	6	6	77	PASSO S JOAO	0,24
0,61	8	0	8	8	855,2	FOZ CHAPECO	0,46
4,45	50	34	5	5	158	PASSO REAL	0,35
0,34	19	0	17	2	180	JACUI	0,78
0,58	10	0	10	10	500	ITAUBA	0,81
1,43	7	0	6	6	125	D. FRANCISCA	0,33
0,67	38	19	7	0	260	G.P. SOUZA	6,50
0,04	11	0	5	0	889	HENRY BORDN	5,65
2,35	20	7	8	5	27,6	JAGUARI	0,48
3,33	88	43	5	5	87	PARAIBUNA	0,68
2,58	35	37	3	0	56	SANTA BRANCA	0,33
1,51	23	7	9	5	222	FUNIL	0,51
1,30	6	0	6	6	50	PICADA	1,11
0,80	4	0	9	0	60	SOBRAGI	0,66
0,74	11	0	9	9	305,7	SIMPLICIO	0,99
1,78	7	0	8	8	187,1	ILHA POMBOS	0,26
0,79	8	0	15	0	132	FONTES	2,53
2,37	3	0	3	3	100	P. PASSOS	0,31

2,68	11	0	4	4	102	SALTO GRANDE	0,77
2,09	31	18	4	0	112	P. ESTRELA	0,42
0,11	14	0	8	8	140,1	CANDONGA	0,44
0,64	11	0	8	8	140	BAGUARI	0,16
1,04	103	6	62	5	330	AIMORES	0,24
0,86	11	0	8	8	198	MASCARENHAS	0,16
1,57	34	10	10	5	360	IRAPE	1,44
0,93	2	0	10	0	462	ITAPEBI	0,70
1,99	63	14	14	5	1050	SOBRADINHO	0,21
0,74	10	4	7	0	1500	ITAPARICA	0,43
3,29	3	0	7	0	4279,6	COMP PAF-MOX	1,02
0,36	14	0	11	2	3162	XINGO	1,06
1,37	111	6	65	5	160	P. CAVALO	0,92
2,31	28	25	5	5	237,4	B. ESPERANCA	0,37
0,52	7	0	13	0	140	GULMAN-AMOR	1,03
0,31	11	0	23	0	78	SA CARVALHO	0,94
4,49	2	0	2	2	118	JAURU	0,95
0,79	10	0	9	9	120	GUAPORE	1,41
2,21	11	5	5	5	96,4	CORUMBA III	0,36
0,16	30	0	10	7	219	CACH.CALDEIR	0,13
1,14	46	4	38	5	191,8	SALTO PILAO	1,84
1,40	14	0	7	14	55	ROSAL	1,68
1,46	6	0	8	8	93	SLT VERDINHO	0,37
0,97	9	0	7	7	44,1	OURINHOS	0,09
1,63	64	8	30	5	1275	SERRA MESA	0,96
0,90	9	0	6	6	450	CANA BRAVA	0,39
1,40	7	0	8	2	243,2	SAO SALVADOR	0,20
1,39	23	4	19	5	498,9	PEIXE ANGIC	0,24
0,87	9	0	6	6	902,5	LAJEADO	0,27
1,46	6	0	8	8	116	SALTO	0,44
1,29	8	0	5	5	1087,2	ESTREITO TOC	0,17
2,46	8	3	7	5	30	CURUA-UNA	0,15
2,58	7	3	8	5	8535	TUCURUI	0,50

0,79	26	9	8	5	73,5	RONDON II	0,55
3,34	4	3	3	5	250	BALBINA	0,20
0,86	33	4	23	5	210	MANSO	0,50
3,25	6	3	4	5	216,5	SAMUEL	0,24
2,97	15	4	23	5	78	COARCY NUNE	0,15
0,79	11	0	10	10	176,1	PONTE PEDRA	2,20
0,81	9	0	11	11	60	STA CLARA MG	0,46
0,47	6	0	4	4	252	FERREIRA GOM	0,15
0,52	23	0	8	13	3750	JIRAU	0,14
4,38	6	0	5	2	3151,2	STO ANTONIO	0,12
0,76	39	8	13	5	32,1	ESPORA	0,43
1,33	4	0	9	0	60,8	ITIQUIRA I	0,76
1,41	8	0	7	7	96,6	ITIQUIRA II	1,23
3,03	2	0	2	2	261	DARDANELOS	0,85
1,34	15	3	16	5	65	CACU	0,24
1,49	6	0	8	8	90	B. COQUEIROS	0,30
1,60	6	0	8	8	68,4	FOZ R. CLARO	0,23

A Tabela 9.2 mostra os principais dados das usinas térmicas do sistema.

**Tabela 9.2 – Dados das Unidades Térmicas do Sistema.**

n	Sub Sistema	(RS/MWh)	PH (MW)
1	1	23.29	640
2	1	19.59	1350
3	1	937	36
4	1	232.57	216
5	1	167.82	28
6	1	511.77	529
7	1	704.1	44
8	1	134.25	235
9	1	0.01	255
10	1	199.26	386
11	1	320.92	572

---

12	1	766.35	140
13	1	259.87	226
14	1	339.3	184
15	1	645.3	131
16	1	188.54	87
17	1	161.61	204
18	1	37.8	400
19	1	58.89	100
20	1	102.84	200
21	1	287.43	169
22	1	777.35	176
23	1	177.58	30
24	1	470.34	200
25	1	523.35	30
26	1	310.41	436
27	1	720.29	400
28	1	107.66	500
29	1	551.09	340
30	1	350.66	929
31	1	155.53	1036
32	1	127.49	350
33	1	1047.38	10
34	1	0.01	197
35	1	596.73	175
36	1	197.85	206
37	1	1020.88	54
38	2	724.87	66
39	2	304.42	485
40	2	60.25	350
41	2	674.64	167
42	2	180.65	72
43	2	373.45	20
44	2	222.06	100

---

45	2	168	132
46	2	167.48	262
47	2	138.13	363
48	2	780	24
49	2	115.9	126
50	2	115.9	320
51	2	248.31	20
52	2	719.99	640
53	3	646.65	13
54	3	646.65	11
55	3	742.73	31
56	3	646.65	11
57	3	732.99	347
58	3	732.99	347
59	3	844.25	152
60	3	844.25	150
61	3	596.74	169
62	3	646.65	13
63	3	646.65	15
64	3	646.65	13
65	3	646.65	15
66	3	258.85	138
67	3	111.28	327
68	3	672.11	149
69	3	672.11	149
70	3	646.65	15
71	3	646.65	15
72	3	579.66	168
73	3	646.65	13
74	3	646.65	13
75	3	112.34	720
76	3	120.22	365
77	3	1132.72	94

---

78	3	440.96	105
79	3	926.27	136
80	3	1021.71	53
81	3	1021.69	66
82	3	608.28	381
83	3	205.25	186
84	3	589.44	50
85	3	219.8	223
86	3	1132.72	143
87	3	592.16	171
88	3	592.16	171
89	3	70.16	533
90	3	287.83	368
91	4	302.19	221
92	4	926.82	31
93	4	0.01	85
94	4	654.63	19
95	4	611.14	19
96	4	622.6	18
97	4	1165.12	30
98	4	618.81	20
99	4	636.82	20
100	4	631.82	20
101	4	639.79	18
102	4	596.72	166
103	4	596.72	166
104	4	654.56	45
105	4	0.01	75
106	4	0.01	85
107	4	100.04	338
108	4	100.04	338
109	4	844.72	40
110	4	411.92	120

---

111	4	449.98	150
112	4	616.42	28
113	4	590.42	28
114	4	657.05	130
115	4	659.1	27
116	4	160.61	169
117	4	69	56
118	4	0.01	85
119	4	114.95	360
120	4	660.35	30
121	4	660.35	18
122	4	0.01	75

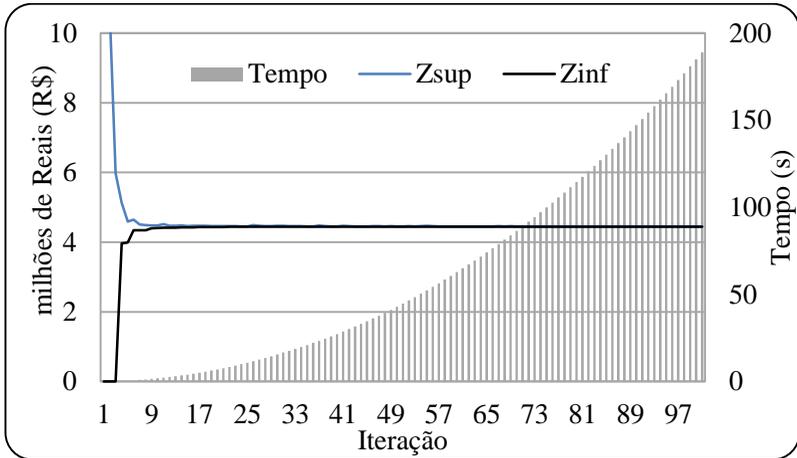
## 10 Apêndice D: Validação do Modelo de Otimização

Como validação dos modelos de otimização costuma-se resolver o PMOP de forma a se encontrarem seus respectivos pontos operativos ótimos. E com este objetivo, os Modelo 1 (produtibilidade constante) e 2 (linear por partes) foram resolvidos de forma a se obter os valores ótimos, desta forma, foi percorrido todos os cenários de uma árvore de cenários com o intuito de se obter a solução ótima, e para atingir tais objetivos, foram necessárias algumas considerações:

- Foi considerado um horizonte de planejamento de 10 meses, reduzindo assim, o esforço computacional demandado para problemas desta origem.
- A árvore de cenários utilizada na validação, foi calculada pelo modelo independente log normal e é composta por duas aberturas por nó, com um total de 512 cenários.
- Na teoria, o critério de convergência deste algoritmo é atingido quando o valor da diferença entre o custo inferior ( $Z_{inf}$ ) e custo superior ( $Z_{sup}$ ) torna-se nula.  $Z_{inf}$  é o valor da função objetivo do primeiro mês, já o  $Z_{sup}$  é dado pelo custo de operação ao longo dos 10 meses. No entanto, para este exemplo foi considerado como critério de parada 100 iterações, uma vez que, foi constatada uma proximidade do valor ótimo.

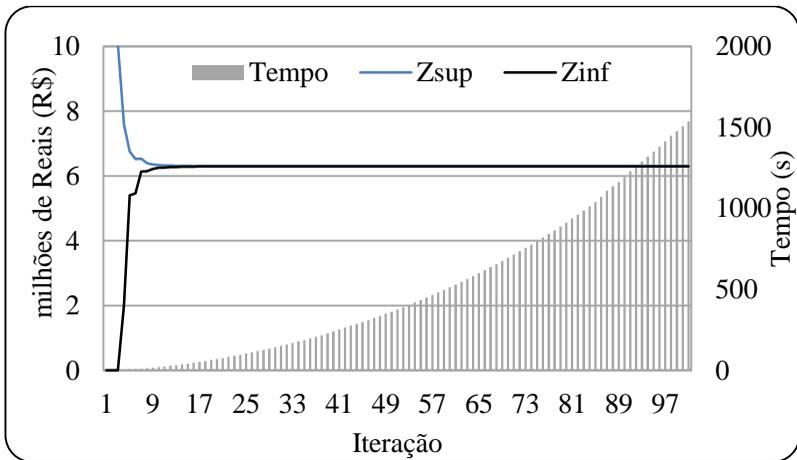
Desta forma, a Figura 10.1, mostra a evolução do  $Z_{inf}$  e  $Z_{sup}$  ao longo das 100 iterações bem como o tempo computacional de cada uma considerando o modelo 1. A diferença neste caso, entre o custo total esperado ( $Z_{inf}$ ) e o custo total de operação ( $Z_{sup}$ ) ao final de centésima iteração foi de 2417,814. O tempo total de execução foi de 189,03 minutos.

**Figura 10.1 – Convergência pelo tempo de cada iteração para o Modelo 1.**



Por outro lado, a Figura 10.2 mostra as 100 iterações para o modelo com FPH linear por partes, em que a diferença entre o Zinf e Zsup foi de 138,15 (R\$) no final das iterações, por outro lado, o tempo total foi de 1535,85 minutos.

**Figura 10.2 – Convergência pelo tempo de cada iteração para o Modelo 2.**





## 11 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREW, A. M. Another efficient algorithm for convex hulls in two dimensions. **Information Processing Letters**, v. 9, n. 5, p. 216–219, 16 dez. 1979.

ARVANITIDITS, N. V.; ROSING, J. Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power System. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-89, n. 2, p. 319–326, fev. 1970.

BAZARRA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**. 3. ed. Universidade de Michigan: Wiley, 2006. v. 1

CARVALHO, L. C. X. DE. **Planejamento de sistemas hidrotérmicos: uma análise comparativa entre as representações a usinas individualizadas e a reservatórios equivalentes de energia**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2002.

CARVALHO, M. F.; SOARES, S. An Efficient Hydrothermal Scheduling Algorithm. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 2, n. 3, p. 537–542, 1987.

CATALAO, J. P. S. et al. Scheduling of Head-Sensitive Cascaded Hydro Systems: A Nonlinear Approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 24, n. 1, p. 337–346, fev. 2009.

CCEE. **Conjunto de arquivos para cálculo do Newave**, 2015. Disponível em: <[http://www.ccee.org.br/portal/faces/aceso\\_rapido\\_header\\_publico\\_nao\\_logado/biblioteca\\_virtual](http://www.ccee.org.br/portal/faces/aceso_rapido_header_publico_nao_logado/biblioteca_virtual)>

CEPEL. **Modelo DECOMP - Manual de Referência - Versão 19.2**, Agosto 2013.

CEPEL. **Manual de Referência - Modelo NEWAVE**, [s.d.].

CUNHA, S. H. F.; PRADO, S.; DA COSTA, J. P. Modelagem da Produtividade Variável de Usinas Hidroelétricas com Base na Construção de Uma Função de Produção Energética. **XII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos**, 1997.

DE MATOS, V. L.; PHILPOTT, A. B.; FINARDI, E. C. Improving the performance of Stochastic Dual Dynamic Programming. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 290, p. 196–208, 15 dez. 2015.

DINIZ, A. L.; ESTEVES, P. P. I.; SAGASTIZABAL, C. A. **A Mathematical Model for the Efficiency Curves of Hydroelectric units**. IEEE Power Engineering Society General Meeting. **Anais...** In: IEEE POWER ENGINEERING SOCIETY GENERAL MEETING. jun. 2007. Acesso em: 22 out. 2015

DINIZ, A. L.; MACEIRA, M. E. P. A Four-Dimensional Model of Hydro Generation for the Short-Term Hydrothermal Dispatch Problem Considering Head and Spillage Effects. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 23, n. 3, p. 1298–1308, ago. 2008.

DINIZ, A. L.; SABÓIA, A. L. **Modelagem Agregada da Função de Produção Hidroelétrica no Planejamento da Operação de Sistemas Hidroelétricos**. In: XXIII SNPTEE - SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA. , 2015.

DINIZ, A. S. . et al. Modelagem da Função de Produção Energética das Usinas Hidroelétricas nos Modelos de Otimização do Planejamento a Curto Prazo e da Programação do Despacho de Sistemas Hidrotérmicos Interligados. **IX SEPOPE**, maio 2004a.

DINIZ, A. S. . et al. Modelagem da Função de Produção Energética das Usinas Hidroelétricas nos Modelos de Otimização do Planejamento a Curto Prazo e da Programação do Despacho de Sistemas Hidrotérmicos Interligados. **IX SEPOPE**, maio 2004b.

DOS REIS, L. B. **Geração de Energia Elétrica**. 1. ed. Barueri: Manole, 2003. v. 1

ENCINA, A. et al. Unit Commitment of Hydro Dominated Systems. **International Journal of Emerging Electric Power Systems**, v. 9, n. 4, 2008.

FINARDI, E. C. **Alocação de unidades geradoras hidrelétricas em sistemas hidrotérmicos utilizando relaxação lagrangeana e programação quadrática sequencial**. Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2003.

FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L. Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 21, n. 2, p. 835–844, maio 2006.

FINARDI, E. C.; DECKER, B. U. An Introductory Tutorial on Stochastic Programming Using a Long-term Hydrothermal Scheduling Problem. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 24, n. 3, 2013.

GEOFFRION, A. M. Generalized Benders decomposition. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 10, n. 4, p. 237–260, out. 1972.

GJELSVIK, A.; HAUGSTAD, A. Considering Head Variations in a Linear Model for Optimal Hydro Scheduling. **SINTEF Energy Research, Trondheim, Norway**, 2005.

GJELSVIK, A.; MO, B.; HAUGSTAD, A. Long- and Medium-term Operations Planning and Stochastic Modelling in Hydro-dominated Power Systems Based on Stochastic Dual Dynamic Programming. **SINTEF**, v. 1, n. 1, 2010.

GONÇALVES, R. E. C. et al. Comparing stochastic optimization methods to solve the medium-term operation planning problem. **Computational & Applied Mathematics**, v. 30, n. 2, p. 289–313, 2011.

GROSSMANN, I. E.; KRAVANJA, Z. Mixed-Integer Nonlinear Programming: A Survey of Algorithms and Applications. In: BIEGLER, L. T. et al. (Eds.). . **Large-Scale Optimization with Applications**. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications. [s.l.] Springer New York, 1997. p. 73–100.

HOMEM-DE-MELLO, T.; MATOS, V. L. DE; FINARDI, E. C. Sampling strategies and stopping criteria for stochastic dual dynamic programming: a case study in long-term hydrothermal scheduling. **Energy Systems**, v. 2, n. 1, p. 1–31, 22 jan. 2011.

INFANGER, G.; MORTON, D. P. Cut sharing for multistage stochastic linear programs with interstage dependency. **Mathematical Programming**, v. 75, n. 2, p. 241–256, nov. 1996.

KLIGERMAN, A. S.; FILHO, S. S. **Operação ótima de subsistemas hidrotérmicos interligados utilizando programação dinâmica estocástica dual**. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000046629>>. Acesso em: 16 jan. 2015.

LARROYD, P. V. **Comparação de políticas com aversão a risco para o planejamento da operação hidrotérmica de médio prazo**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2012.

MATOS, V. L. DE. **Análise comparativa entre as modelagens de reservatório equivalente de energia agregado por subsistema e por cascata no problema do planejamento anual da operação energética**. Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2008.

MATOS, V. L. DE. **Um modelo para o planejamento anual da operação energética considerando técnicas avançadas de otimização estocástica**. Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2012.

MATOS, V. L. DE; FINARDI, E. C. A computational study of a stochastic optimization model for long term hydrothermal scheduling. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 43, n. 1, p. 1443–1452, dez. 2012.

OLIVEIRA, G. G.; SOARES, S. A second order network flow algorithm for hydrothermal scheduling. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 10, n. 3, p. 1635–1641, ago. 1995.

PEREIRA, M. V. F. Optimal stochastic operations scheduling of large hydroelectric systems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 11, n. 3, p. 161–169, jul. 1989.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. **Mathematical Programming**, v. 52, n. 1-3, p. 359–375, maio 1991.

PILLON TORRALBA FERNANDES, J. et al. **A genetic algorithm solution for optimization of the power generation potential in hydroelectric plants**. 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). **Anais...** In: 2013 IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION (CEC). jun. 2013

P. -L. CARPENTIER, M. G. Long-term management of a hydroelectric multireservoir system under uncertainty using the progressive hedging algorithm: Optimization of multireservoir operation. **Water Resources Research**, v. 49, n. 5, 2013.

- QUINTERO, R. D. **Modelagem da função de produção de uma usina hidrelétrica com base nas características individuais das unidades geradoras.** Dissertação de Mestrado—Florianópolis, SC: UFSC, mar. 2013.
- RAMOS, T. P. **Modelo Individualizado de Usinas Hidroelétricas Baseado em Técnicas de Programação Não Linear Integrado com o Modelo de Decisão Estratégica.** Dissertação de Mestrado—Minas Gerais: Universidade Federal de Juiz de Fora, 28 mar. 2011.
- SALVENDY, G. **Handbook of Industrial Engineering: Technology and Operations Management.** 3. ed. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2001. v. 1
- SHAPIRO, A. Analysis of stochastic dual dynamic programming method. **European Journal of Operational Research**, v. 209, n. 1, p. 63–72, 2011.
- SILVA, L.; ZAMBON, R. **Nonlinearities in Reservoir Operation for Hydropower Production.** World Environmental and Water Resources Congress 2013. **Anais...** In: WORLD ENVIRONMENTAL AND WATER RESOURCES CONGRESS. Cincinnati, Ohio, USA: American Society of Civil Engineers, 2013 Disponível em: <<http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/9780784412947.239>>. Acesso em: 27 jan. 2015
- SIQUEIRA, T. G. et al. **Stochastic Dynamic Programming for Long Term Hydrothermal Scheduling Considering Different Streamflow Models.** International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2006. PMAPS 2006. **Anais...** In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON PROBABILISTIC METHODS APPLIED TO POWER SYSTEMS, 2006. PMAPS 2006. jun. 2006
- SOUZA THOMÉ, F. **Representação de não-Convexidades no Planejamento da Operação Hidrotérmica utilizando PDDE.** Tese de Doutorado—Rio de Janeiro: UFRJ, jun. 2013.
- SUANNO, C. M. **Operação Estocástica de Sistemas Hidrotérmicos com Representação da Produtibilidade Variável.** Dissertação de Mestrado—Rio de Janeiro: UFRJ, dez. 1995.
- TAKIGAWA, F. Y. K. **Desenvolvimento de um modelo computacional para o problema da programação diária da operação de sistemas hidrotérmicos.** Tese de Doutorado—Florianópolis, SC: Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2010.

TERRY, L. A. et al. Coordinating the Energy Generation of the Brazilian National Hydrothermal Electrical Generating System. **Interfaces**, v. 16, n. 1, p. 16–38, 1 jan. 1986.

WATCHORN, C. W. Inside Hydrothermal Coordination. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, v. PAS-86, n. 1, p. 106–117, jan. 1967.

ZAMBELLI, M. DE S. **Planejamento da operação energética do sistema interligado nacional baseado em modelo de controle preditivo**. Tese de Doutorado—[s.l: s.n.].

ZAMBON, R. C. et al. Optimization of Large-Scale Hydrothermal System Operation. **Journal of Water Resources Planning and Management**, v. 138, n. 2, p. 135–143, mar. 2012.