UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROFMAT.

Ana Maria Mrás

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E UMA FÓRMULA PARA O SEU TERMO GERAL

Florianópolis

2016

Ana Maria Mrás

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E UMA FÓRMULA PARA O SEU TERMO GERAL

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em rede nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Profa. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Mrás, Ana Maria
Sequência de Fibonacci e a fórmula para o seu termo geral / Ana Maria Mrás ; orientadora, Profa. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari - Florianópolis, SC, 2016.
61 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Sequência de Fibonacci . 3. Sequências definidas recursivamente. 4. Álgebra matricial. I. Mortari, Profa. Dra. Alda Dayana Mattos. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática. III. Título.

Ana Maria Mrás

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E UMA FÓRMULA PARA O SEU TERMO GERAL

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional de Matemática em rede nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial .

Florianópolis, 16 de fevereiro 2016.

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Coordenador

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Orientador

Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos
Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por todas as bençãos concedidas.

A todos os colegas da turma Profmat-2014, que contribuíram de inúmeras formas para a concretização destes estudos, e de forma especial aqueles que mais do que colegas se tornaram verdadeiros amigos tornando as longas horas de estudos mais leves e divertidas.

Ao Gustavo, filho de nossa querida colega Lisie, por estar presente em nossos dias de estudos neste último semestre nos brindando com a alegria que só uma criança pode trazer, e por nos presentear com seu sorriso encantador.

Deixo meu profundo agradecimento a professora Alda Dayana Mattos Mortari, por ter aceito me orientar durante este trabalho, por sua paciência e dedicação, e ainda por ser um exemplo de professora, o qual levarei como referencial para a minha vida profissional.

A todos os professores que estiveram presente nestes dois anos transmitindo seus conhecimentos, em especial aos professores: Eliezer Batista, Fernando de Lacerda Mortari e Gilles Gonçalves de Castro.

Aos professores que compõem a banca examinadora: Elisa Regina dos Santos, Gilles Gonçalves de Castro e Maria Inez Cardoso Gonçalves pela sua disposição em avaliar este trabalho.

Ao meu querido esposo, Saúl Ovalle Perez, por ser companheiro, carinhoso, sempre estar ao meu lado vibrando a cada conquista alcançada, e por entender a minha ausência e meus momentos de angústias nas inúmeras horas de estudos nestes dois anos.

Aos meu familiares, que mesmo de longe, sempre torcem e acreditam no potencial dos meus sonhos.

A CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

RESUMO

Neste trabalho mostraremos como encontrar uma fórmula para o termo geral da sequência de Fibonacci. Esta fórmula será encontrada de duas maneiras distintas, inicialmente utilizando a teoria de sequências definidas recursivamente e em seguida utilizando como método resultados de álgebra matricial.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Sequências definidas recursivamente. Álgebra matricial.

ABSTRACT

In this work we show how to find a formula for the general term of the Fibonacci sequence. This formula will be obtained in two distinct ways, initially using the theory of recursively defined sequences and after that using results of matrix algebra.
Keywords: Fibonacci sequence. Recursively defined sequences. Matrix algebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11
1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI 13
1.1 SEQUÊNCIAS DEFINIDAS RECURSIVAMENTE 15
1.1.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem 15
1.1.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem 17
1.2 RESOLUÇÃO DE $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$ PARA $N \geq 3$ 20
2 REESTUDANDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI VIA ÁLGEBRA MATRICIAL 25
2.1 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES 28
2.1.1 Autovalores e autovetores 28
2.1.2 Diagonalização de matrizes 33
2.2 POTÊNCIAS DE MATRIZES 41
3 SIMPLIFICAÇÃO DE $\boldsymbol{U_{N+1} = A^N.U_1}$ 45
CONCLUSÃO 57
REFERÊNCIAS 59

INTRODUÇÃO

O matemático Leonardo Pisano nasceu na Itália em 1175, na cidade de Pisa e ficou conhecido como Leonardo Fibonacci. Fibonacci não era o seu sobrenome, mas se originou do diminutivo de "Fillious Bonacci", que significava "filho de Bonacci"por causa de seu pai Guiliermo Bonacci. Uma de suas mais notáveis contribuições à matemática foi a descoberta de uma sequência de números naturais que teve origem num problema proposto a partir da reprodução de coelhos.

Esta sequência ficou conhecida como *sequência de Fibonacci*, na qual dados os dois primeiros termos iguais a 1, a partir do segundo termo cada termo seguinte é obtido pela soma dos dois termos anteriores a este. Esta sequência, além de suas propriedades e relações entre seus próprios termos dentro da sequência, se apresenta em diversas outras situações como no crescimento de determinadas plantas e na óptica de raios de luz como pode ser consultado em (ZAHN, 2011) e (LIVIO, 2006).

Sabemos então que a partir do segundo termo para obtermos o termo seguinte devemos somar os dois termos anteriores a este, mas esta não é uma forma prática se quisermos descobrir qualquer termo da sequência, pois por exemplo se quisermos saber qual é o termo que se encontra na posição n da sequência, com n relativamente grande, precisaríamos encontrar todos os $(n-1)$ termos anteriores a este. A saber, neste trabalho quando nos referirmos à variável n, estaremos sempre nos referindo a um número natural não nulo.

Desta forma buscamos neste trabalho mostrar como encontrar uma fórmula que nos permita calcular qualquer termo da sequência de Fibonacci, dependendo apenas da variável n de sua posição não precisando conhecer todos os outros termos que antecedem este. Esta fórmula será encontrada de duas maneiras distintas, primeiramente utilizando a teoria de sequências definidas recursivamente e em seguida utilizaremos resultados de álgebra matricial. O trabalho será estruturado como segue.

No primeiro capítulo apresentaremos o problema que deu origem a sequência de Fibonacci, bem como sua definição percebendo que a relação entre seus termos é representada por uma equação de recorrência que denota uma sequência definida recursivamente. Serão definidas e exemplificadas sequências definidas recursivamente de primeira e segunda ordem, à qual utilizaremos para encontrar a fórmula desejada. Neste capítulo foram utilizadas como base para estudos as referências: (LIMA et al., 2006), (ZAHN, 2011) e (LIVIO, 2006) .

No segundo capítulo reestudaremos a sequência se Fibonacci, porém agora utilizando métodos de álgebra matricial, o leitor precisa ter o conhecimento das operações básicas e escalonamento de matrizes, resolução de sistemas lineares, as demais definições e resultados necessários serão apresentados neste trabalho. Para chegarmos à fórmula que buscamos utilizando álgebra matricial precisaremos estudar a diagonalização de matrizes, a qual será desenvolvida após o estudo de autovalores e autovetores, e ao final deste capítulo estudaremos o cálculo de potências de matrizes. Neste capítulo foram utilizadas como base para estudos as referências: (LAY, 2007), (STEINBRUCH; WINTERLE, 2008) e (STRANG, 2009).

Por fim, no terceiro capítulo utilizaremos os resultados obtidos no capítulo dois, para então de fato encontramos efetivamente uma fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci utilizando como método os resultados de álgebra matricial.

1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci tem origem no seguinte problema proposto pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci: colocamos em um cercado fechado um casal de coelhos filhotes, sabendo que estes somente se reproduzem após o segundo mês de vida e a partir de então, cada mês um casal adulto reproduz um novo casal de filhotes que será fértil a partir do segundo mês; queremos saber quantos casais de coelhos teremos após doze meses.

Vamos analisar o que ocorrerá nos primeiros doze meses:

- No primeiro mês teremos apenas o casal inicial de coelhos, sendo assim 1 casal;

- No segundo mês teremos ainda somente o primeiro casal de coelhos que será adulto no mês seguinte, sendo assim 1 casal;

- No terceiro mês teremos um casal adulto que gera um casal de filhotes, sendo assim 2 casais;

- No quarto mês teremos um casal adulto que gera um casal de filhotes, e um casal que ainda é jovem, sendo assim 3 casais;

- No quinto mês temos dois casais adultos, que geram dois casais de filhotes, e um casal que ainda é jovem, sendo assim 5 casais;

- No sexto mês temos três casais de adultos, que geram três casais de filhotes, e dois casais ainda jovens, sendo assim 8 casais;

- No sétimo mês temos cinco casais de adultos, que geram cinco casais de filhotes, e mais três casais que ainda são jovens, logo são 13 casais;

- No oitavo mês temos oito casais de adultos, que geram oito casais de filhotes, e mais cinco casais ainda jovens, sendo assim 21 casais;

- No nono mês temos treze casais adultos, que geram treze casais de filhotes, e mais oito casais ainda jovens, sendo assim 34 casais;

- No décimo mês temos vinte e um casais adultos, que geram vinte e um casais de filhotes, e mais treze casais ainda jovens, sendo assim 55 casais;

- No décimo primeiro mês temos trinta e quatro casais adultos, que geram trinta e quatro casais de filhotes, e mais vinte e um casais ainda jovens, sendo assim 89 casais;
- No décimo segundo mês teremos cinquenta e cinco casais adultos, que geram cinquenta e cinco casais de filhotes, e mais trinta e quatro casais ainda jovens, sendo assim 144 casais.

O que resulta num total de 144 casais de coelhos em doze meses.

Assim, à medida que os meses passam a quantidade de coelhos em cada mês vai formando a seguinte sequência de números:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 \text{ e } 144.$$

Observamos que a partir do segundo mês, a quantidade de casais de coelhos no mês seguinte é o resultado da soma dos dois meses anteriores. Esse problema foi a motivação para que Fibonacci definisse a sequência de Fibonacci como segue.

Definição 1.1. *A* sequência de Fibonacci *é uma sequência de números naturais na qual os dois primeiros termos são iguais a 1 e cada termo a partir do segundo é obtido pela soma dos dois termos anteriores.*

Denotaremos por F_i, com $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$, o termo que se encontra na posição i da sequência de Fibonacci.

Assim temos,

$$\begin{aligned}
F_1 &= 1\ ; \\
F_2 &= 1\ ; \\
F_3 = F_2 + F_1 &= 1 + 1 = 2\ ; \\
F_4 = F_3 + F_2 &= 2 + 1 = 3\ ; \\
F_5 = F_4 + F_3 &= 3 + 2 = 5\ ; \\
F_6 = F_5 + F_4 &= 5 + 3 = 8\ ; \\
&\vdots \\
F_n = F_{n-1} + F_{n-2} &\text{ para } n \geq 3.
\end{aligned}$$

Encontramos aqui uma fórmula na qual para encontrarmos um termo qualquer desta sequência, sempre dependemos dos dois termos anteriores a este. Porém, com o estudo de sequências definidas recursivamente podemos encontrar uma forma mais eficiente de calcular qualquer termo independente dos termos anteriores, dependendo apenas da variável da posição em que se encontra o termo. Para isto, faremos na seção seguinte um estudo sobre sequências definidas recursivamente.

1.1 SEQUÊNCIAS DEFINIDAS RECURSIVAMENTE

Dizemos que uma sequência é *definida recursivamente* quando podemos calcular qualquer um de seus termos utilizando termos anteriores imediatos. Expressaremos neste trabalho os métodos de resoluções de recorrências que dependem de um ou de dois termos anteriores, já que estamos interessados em estudar a sequência de Fibonacci que é uma sequência deste tipo.

1.1.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Neste momento estudaremos alguns tipos de sequências definidas recursivamente, mas primeiro faremos uma definição formal do que é uma sequência.

Definição 1.2. *Seja X um conjunto não vazio qualquer, uma* sequência *no conjunto X é uma função*

$$f : \mathbb{N}^* \to X.$$

Dado um número natural não nulo n denotamos a sua imagem $f(n)$ por x_n, ou seja, $x_n := f(n)$.

Normalmente quando nos referimos a uma sequência não nos referimos diretamente a função, mas sim aos elementos de sua imagem e, desta forma dizemos que uma sequência em X é uma lista de elementos de X que é denotada por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, em que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in X$. Além disso, x_n é denominado *termo geral* da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Neste capítulo estudaremos apenas sequências em que $X = \mathbb{N}^*$.

Quando uma sequência numérica é definida recursivamente, temos uma sequência de números na qual podemos escrever cada termo em função de termos anteriores, esta relação entre os termos é expressa por uma equação à qual chamamos de *equação de recorrência.* Assim, se conhecemos a equação de recorrência de uma sequência e determinados termos somos capazes de calcular todos os termos desta sequência usando esta equação.

Resolver uma equação de recorrência significa encontrar a partir de uma equação, que depende de termos anteriores, uma nova fórmula para calcular qualquer termo desta sequência dependendo apenas da variável da posição, ou seja, para determinar um elemento da sequência é preciso conhecer apenas a sua posição e não mais todos os termos anteriores a ele.

Uma *solução* de uma equação de recorrência é uma sequência cujo termo geral é expresso por uma fórmula que depende da variável n, na qual n indica a posição do termo na sequência.

Uma equação de recorrência, com coeficiente constante, de uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ é dita de *primeira ordem* quando o termo x_{n+1} é expresso em função de x_n, e uma equação de recorrência com coeficiente constante é *linear* quando expressa uma função de primeiro grau na variável x_n, ou seja, é da forma $x_{n+1} = px_n + f(n)$, com $p \in \mathbb{R}^*$ e f uma função que depende da variável n.

Por exemplo, $x_{n+1} = 2\ x_n - n^2$ é uma equação de recorrência, com coeficiente constante, linear de primeira ordem, enquanto que $x_{n+1} = (x_n)^2$ é uma equação de recorrência, com coeficiente constante, de primeira ordem não linear. Mas, nem sempre a recorrência possui coeficiente constante, como por exemplo a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, que pode ser encontrada na referência (LIMA et al., 2006).

Uma equação do tipo $x_{n+1} = p\ x_n$, com $p\ \in \mathbb{R}^*$, é dita uma equação de recorrência, com coeficiente constante, linear de primeira ordem *homogênea*, por não possuir termo independente de x_n. Observe que se $p = 0$, então a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ é a sequência cujos elementos são todos iguais a zero. Porém, há também as equações de recorrência, com coeficiente constante, linear de primeira ordem *não homogêneas* que são da forma $x_{n+1} = p\ x_n + f(n)$ em que f é uma função que depende da variável n, as quais não abordaremos neste trabalho, mas podem ser encontradas na referência (LIMA et al., 2006).

Resolveremos a seguir uma equação de recorrência, com coeficiente constante, homogênea de primeira ordem . Seja $x_{n+1} = 5x_n$ para todo $n\ \in \mathbb{N}^*$, então:

$$x_2 = 5x_1\ ;$$

$$x_3 = 5x_2\ ;$$

$$x_4 = 5x_3\ ;$$

$$x_5 = 5x_4\ ;$$

$$\cdots$$

$$x_n = 5x_{n-1}\ .$$

Multiplicando todas as equações obtemos

$$x_2\ x_3\ x_4\ \ldots\ x_{n-1}\ x_n = 5x_1\ 5x_2\ 5x_3\ 5x_4\ \ldots\ 5x_{n-1}.$$

Se $x_1 = 0$, todos os termos da sequência serão iguais a zero, se $x_1 \neq 0$, note que para todo $i \in \mathbb{N}^*$, $x_i \neq 0$, então da igualdade acima obtemos $x_n = x_1\ 5^{n-1}$ que é o termo geral na sequência.

Logo, a solução geral é $x_n = x_1\ 5^{n-1}$ que admite infinitas soluções, pois não foi definido o valor de x_1. Se fosse definido o valor de $x_1 = 2$, por exemplo, a solução seria $x_n = 2\ 5^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e deste modo a sequência obtida seria $2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$.

1.1.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Uma equação de recorrência é dita de *segunda ordem* quando o termo x_{n+1} depende dos dois termos anteriores imediatos. Resolver uma equação de recorrência de segunda ordem significa determinar uma nova fórmula que dependa somente da variável da posição de um termo desta sequência, a partir da equação de recorrência inicial, de modo que cada termo da sequência, com excessão de dois termos, é determinado através desta nova fórmula.

Assim como nas equações de recorrência de primeira ordem temos que uma *solução* de uma equação de recorrência de segunda ordem é uma sequência cujo termo geral é expresso por uma fórmula que depende da variável n, na qual n indica a posição do termo na sequência.

Uma equação de recorrência de segunda ordem, com coeficientes constantes, é *linear* quando expressa uma função de primeiro grau nas variáveis x_{n+1} e x_n, ou seja é da forma $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + f(n)$, com $p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ e f uma função que depende da variável n.

As recorrências lineares de segunda ordem, com coeficientes constantes, são classificadas em homogêneas e não homogêneas. Uma *recorrência linear de segunda ordem homogênea*, com coeficientes constantes, é da forma $x_{n+2} + p\ x_{n+1} + q\ x_n = 0$, com $p, q \in \mathbb{R}$ e $q \neq 0$, pois caso contrário recairíamos numa recorrência linear de primeira ordem.

Dada uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, temos associada a ela uma *equação característica* de segundo grau da forma $r^2 + p\ r + q = 0$, de modo que as raízes desta equação determinarão as soluções da recorrência linear de segunda ordem homogênea como descreveremos a seguir.

Sejam r_1 e r_2 as raízes reais da equação característica, então qualquer sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, com $a_n = C_1\ (r_1)^n + C_2\ (r_2)^n$ é solução da recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ independente das constantes C_1 e C_2.

De fato, substituindo $a_n = C_1\ (r_1)^n + C_2\ (r_2)^n$ no lado esquerdo da recorrência $x_{n+2} + p\ x_{n+1} + q\ x_n = 0$ temos,

$$C_1\ (r_1)^{n+2} + C_2\ (r_2)^{n+2} + p\ (C_1\ (r_1)^{n+1} + C_2\ (r_2)^{n+1}) + q\ (C_1\ (r_1)^n + C_2\ (r_2)^n)$$

$$= \left[C_1\ (r_1)^{n+2} + p\ C_1\ (r_1)^{n+1} + q\ C_1\ (r_1)^n\right]$$

$$+ \left[C_2\ (r_2)^{n+2} + p\ C_2\ (r_2)^{n+1} + q\ C_2\ (r_2)^n\right]$$

$$= \left[C_1\ (r_1)^n\ (\ (r_1)^2 + p\ r_1 + q)\right] + \left[C_2\ (r_2)^n\ (\ (r_2)^2 + p\ r_2 + q)\right]$$

$$= C_1\ (r_1)^n\ 0 + C_2\ (r_2)^n\ 0 = 0\ .$$

Assim, temos que

$$a_n = C_1\ (r_1)^n + C_2\ (r_2)^n$$

é solução da equação linear de recorrência de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, e C_1 e C_2 são constantes reais quaisquer.

Se as raízes da equação característica são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da equação de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma

$$x_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n,$$

com C_1 e C_2 constantes reais quaisquer, como é demonstrado na referência (LIMA et al., 2006).

Caso tenhamos $r_1 = r_2 = r$, qualquer sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, em que $a_n = C_1\ r^n + C_2\ n\ r^n$, é solução da recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, $x_{n+2} + p\ x_{n+1} + q\ x_n = 0$. De fato, observe que se $r_1 = r_2 = r$, então a equação característica da equação de recorrência será $r^2 + p\ r + q = 0$, que tem apenas uma raiz real, a saber,

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{p}{2},$$

e substituindo $a_n = C_1\ r^n + C_2\ n\ r^n$ na equação de recorrência $x_{n+2} + p\ x_{n+1} + q\ x_n = 0$ obtemos:

$$C_1\ r^{n+2} + C_2\ (n+2)\ r^{n+2} + p[C_1\ r^{n+1} + C_2\ (n+1)r^{n+1}] + q(C_1\ r^n + C_2\ n\ r^n)$$

$$= [C_1\ r^{n+2} + p\ C_1\ r^{n+1} + q\ C_1\ r^n] + [C_2\ (n+2)\ r^{n+2} + p\ C_2\ (n+1)\ r^{n+1} + q\ C_2\ n\ r^n]$$

$$= C_1\ r^n (r^2 + p\ r + q) + [C_2\ n\ r^{n+2} + 2\ C_2\ r^{n+2} + p\ C_2\ n\ r^{n+1} + p\ C_2\ r^{n+1} + q\ C_2\ n\ r^n]$$

$$= C_1\ r^n\ 0 + [C_2\ n\ r^{n+2} + p\ C_2\ n\ r^{n+1} + q\ C_2\ n\ r^n] + [2\ C_2\ r^{n+2} + p\ C_2\ r^{n+1}]$$

$$= C_2\ n\ r^n [r^2 + p\ r + q] + C_2\ r^{n+1} [2\ r + p]$$

$$= C_2\ n\ r^n\ 0 + C_2\ r^{n+1} \left[2\ \left(-\frac{p}{2}\right) + p\right] = C_2\ r^{n+1}\ 0 = 0.$$

Logo, temos que

$$a_n = C_1\ r^n + C_2\ n\ r^n$$

é solução da equação de recorrência de segunda ordem, com coeficientes constantes, homogênea com raízes iguais, e C_1 e C_2 são constantes reais quaisquer.

Se as raízes da equação característica são $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da equação de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma

$$x_n = C_1\ r^n + C_2\ n\ r^n,$$

com C_1 e C_2 constantes reais quaisquer, como é demonstrado na referência (LIMA et al., 2006).

Além disso, quando possuímos dois termos da sequência, podemos encontrar os valores de C_1 e C_2 que são determinados pelos valores dos termos conhecidos.

Por exemplo, seja a equação de recorrência, com coeficientes constantes, $x_{n+2} + 5\ x_{n+1} + 6\ x_n = 0$, com $x_1 = 3$ e $x_2 = -6$.

A recorrência apresenta a equação característica $r^2 + 5\ r + 6 = 0$, que possui como raízes $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$. Logo a solução desta equação de recorrência é da forma

$$x_n = C_1\ (-2)^n + C_2\ (-3)^n.$$

Como temos os valores de x_1 e x_2 podemos substituir nas equações para encontrar os valores de C_1 e C_2. Logo,

$$\begin{cases} C_1\ (-2)^1 + C_2\ (-3)^1 & = & 3 \\ C_1\ (-2)^2 + C_2\ (-3)^2 & = & -6 \end{cases}.$$

Então,

$$\begin{cases} -2\ C_1 - 3\ C_2 & = & 3 \\ 4\ C_1 + 9\ C_2 & = & -6 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por 2 obtemos

$$\begin{cases} -4\ C_1 - 6\ C_2 &= \quad 6 \\ \ \ 4\ C_1 + 9\ C_2 &= \ -6 \end{cases}$$

e somando as duas equações obtemos $3C_2 = 0$, ou seja, $C_2 = 0$. Assim, como $C_2 = 0$ encontramos

$$-2C_1 - 3C_2 = 3 \Rightarrow -2C_1 = 3 \ \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2},$$

resultando na seguinte solução

$$x_n = -\frac{3}{2}\ (-2)^n + 0\ (-3)^n = -\frac{3}{2}\ (-2)^n.$$

Temos ainda as equações lineares de segunda ordem, com coeficientes constantes, não homogêneas que são da forma $x_{n+2} + p\ x_{n+1} + q\ x_n = f(n)$, com $p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ e f é uma função que depende da variável n, às quais o método de resolução não será abordado neste trabalho, mas poderá ser consultado na referência (LIMA et al., 2006).

1.2 RESOLUÇÃO DE $F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$ PARA $N \geq 3$

Voltando a sequência de Fibonacci a nossa equação de recorrência é da forma $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$, na qual cada termo a partir do segundo depende dos dois termos anteriores, ou seja, temos uma equação de recorrência, com coeficientes constantes, de segunda ordem homogênea, a qual é equivalente a seguinte equação de recorrência:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ para } n \geq 1\ .$$

Então,

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0\ \text{, com } F_1 = F_2 = 1\ .$$

Como vimos na Subseção 1.1.2 essa equação de recorrência tem como solução

$$F_n = C_1\ (r_1)^n + C_2\ (r_2)^n,$$

sendo r_1 e r_2 as raízes da equação característica e C_1 e C_2 a princípio são constantes reais quaisquer. Porém, como possuímos os termos iniciais da recorrência, vamos encontrar as constantes C_1 e C_2 que estão determinadas por estes termos.

Para a equação de recorrência $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, teremos a seguinte equação característica:

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

cujas raízes são dadas por

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (1.1)$$

Observe que o valor de uma destas raízes é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, este número irracional é conhecido como *razão áurea* ou *número de ouro* e denotado por

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887... \ .$$

Este número tem uma relação com a sequência de Fibonacci, observe segundo a tabela a seguir o que ocorre quando dividimos cada termo da sequência de Fibonacci pelo seu termo antecessor na sequência.

n	F_n	F_{n+1}	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$
1	1	1	$1/1 = 1$
2	1	2	$2/1 = 2$
3	2	3	$3/2 = 1,5$
4	3	5	$5/3 = 1,666666...$
5	5	8	$8/5 = 1,6$
6	8	13	$13/8 = 1,625$
7	13	21	$21/13 = 1,615384...$
8	21	34	$34/21 = 1,619047...$
9	34	55	$55/34 = 1,617647...$
10	55	89	$89/55 = 1,618181...$
11	89	144	$144/89 = 1,617977...$
12	144	233	$233/144 = 1,618055...$

Tabela 1: Aproximação do número de ouro pela divisão de termos sucessivos na sequêcia de Fibonacci.

Assim, calculando o quociente

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \text{para} \quad n \geq 1,$$

à medida que n cresce os resultados se aproximam cada vez mais do *número de ouro* φ. Esse número é muito conhecido por suas aparições em diversas áreas como na matemática, nas artes e na natureza como pode ser encontrado em (LIVIO, 2006) e (ZAHN, 2011).

Voltando à equação (1.1), temos $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ resultando na seguinte solução geral:

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Agora vamos substituir os valores de F_1 e F_2 para descobrir os valores das constantes C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} F_1 = C_1\ (r_1)^1 + C_2\ (r_2)^1 \\ F_2 = C_1\ (r_1)^2 + C_2\ (r_2)^2 \end{cases}.$$

Então,

$$\begin{cases} C_1\ r_1 + C_2\ r_2 & = & 1 \\ C_1\ (r_1)^2 + C_2\ (r_2)^2 & = & 1 \end{cases}.$$

Isolando C_1 na primeira equação e como temos $r_1 \neq 0$, substituindo na segunda encontramos:

$$C_1\ r_1 = 1 - C_2\ r_2 \ \Rightarrow\ C_1 = \frac{1 - C_2\ r_2}{r_1}.$$

Logo,

$$\begin{array}{rrcl} & \left(\dfrac{1 - C_2\ r_2}{r_1}\right)(r_1)^2 + C_2\ (r_2)^2 & = & 1 \\ \Rightarrow & (1 - C_2\ r_2)r_1 + C_2\ (r_2)^2 & = & 1 \\ \Rightarrow & r_1 - C_2\ r_1\ r_2 + C_2\ (r_2)^2 & = & 1 \\ \Rightarrow & C_2[(r_2)^2 - r_1\ r_2] & = & 1 - r_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad C_2 \quad = \quad \frac{1-r_1}{(r_2)^2 - r_1\ r_2},$$

já que temos $\left[(r_2)^2 - r_1\ r_2\right] \neq 0$, pois $r_1 \neq r_2$ e $r_2 \neq 0$.

Agora substituindo os valores de r_1 e r_2 encontramos o valor de C_2:

$$
\begin{aligned}
C_2 \quad &= \quad \frac{1 - \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]} \\
&= \quad \frac{\dfrac{2-1-\sqrt{5}}{2}}{\left(\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\dfrac{1-5}{4}\right)} = \frac{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}{\left[\dfrac{2(3-\sqrt{5})}{4}\right] - \left(-\dfrac{4}{4}\right)} \\
&= \quad \frac{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}{\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)+1} = \frac{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{3-\sqrt{5}+2}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \\
&= \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right) = \frac{5-5\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{25-5} \\
&= \quad -\frac{4\sqrt{5}}{20} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ .
\end{aligned}
$$

Logo, temos que $C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Substituindo o valor de C_2 na primeira equação encontraremos o valor de C_1:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1 - C_2\ r_2}{r_1} = \frac{1 - \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Assim, encontramos $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e a solução para a equação de recorrência é:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Esta fórmula nos permite calcular o termo que se encontra na *n-ésima* posição da sequência de Fibonacci e é mais eficiente do que a equação de recorrência anterior que tínhamos, pois nos permite calcular qualquer termo da sequência de Fibonacci conhecendo apenas a sua posição, não precisando para isto calcular todos os termos anteriores ao termo que queremos encontrar.

2 REESTUDANDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI VIA ÁLGEBRA MATRICIAL

No capítulo anterior estudamos uma forma de encontrar a fórmula do termo geral que nos permite calcular qualquer termo da sequência de Fibonacci e para chegarmos nesta fórmula utilizamos técnicas de sequências definidas recursivamente. Neste capítulo, queremos reestudar o problema de encontrar a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci porém agora utilizando como método resultados de álgebra matricial.

Vimos que na sequência de Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ a partir do segundo termo cada termo seguinte é a soma dos dois termos anteriores a este, assim chegando a equação,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Desta equação podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} F_{n+1} + F_n & = & F_{n+2} \\ F_{n+1} & = & F_{n+1} \end{cases}.$$

Este sistema pode ser escrito como um produto matricial da seguinte forma,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Assim temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

e escrevendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $u_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ obtemos

$$A.u_n = u_{n+1}. \tag{2.1}$$

Desta forma, temos uma nova sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ que está associada à equação de recorrência de primeira ordem dada pela equação (2.1), pois cada termo seguinte depende do valor encontrado no termo anterior. Ainda podemos observar que partimos da equação de recorrência de segunda ordem associada à sequência de Fibonacci, na qual cada termo é um número natural, e encontramos uma nova sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, na qual cada termo é uma matriz coluna cujas entradas são valores que são termos da sequência de Fibonacci.

Logo, de $u_{n+1} = A.u_n$ teremos:

$$n = 1 \;\Rightarrow\; u_2 = A.u_1;$$

$$n = 2 \;\Rightarrow\; u_3 = A.u_2 = A.A.u_1 = A^2.u_1;$$
$$n = 3 \;\Rightarrow\; u_4 = A.u_3 = A.A^2.u_1 = A^3.u_1;$$
$$n = 4 \;\Rightarrow\; u_5 = A.u_4 = A.A^3.u_1 = A^4.u_1;$$
$$\vdots$$
$$n \;\Rightarrow\; u_{n+1} = A.u_n = A.A^{n-1}.u_1 = A^n.u_1.$$

Faremos uma demonstração formal deste resultado utilizando o princípio da indução matemática.

Proposição 2.1. *Seja* $u_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$, *com*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{então} \quad u_{n+1} = A^n.u_1 \;.$$

Demonstração. i) Para $n = 1$ temos que $u_{n+1} = u_{1+1} = u_2 = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}$. Ainda, $u_1 = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e calculando $A.u_1$ encontramos:

$$A.u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Logo temos que $u_2 = A.u_1$ e o resultado é válido para $n = 1$.

ii) Suponhamos que o resultado é válido para n, ou seja, $u_n = A^{n-1}.u_1$ e queremos mostrar que vale para $(n+1)$, isto é, teremos $u_{n+1} = A^n.u_1$. Mas, como temos que $u_{n+1} = Au_n$, então $u_{n+1} = A.u_n = A.(A^{n-1}.u_1)$, pela hipótese de indução.

Assim, $u_{n+1} = (A.A^{n-1}).u_1 = A^n.u_1$. E portanto, o resultado é válido para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

$\blacksquare$

Note que como $u_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$, temos que

$$u_1 = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, como a matriz A é conhecida e conhecemos também os valores de u_1 para encontrarmos u_{n+1}, que nos fornece os termos F_{n+2} e F_{n+1} da sequência de Fibonacci, basta sabermos cacular A^n e teremos então,

$$u_{n+1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, agora nosso estudo será de como calcular as potências da matriz A, para assim encontrarmos A^n e com isto determinarmos qualquer termo da sequência de Fibonacci. Porém, o cálculo de A^n, sem utilizar nenhuma técnica é tão demorado quanto calcular os n primeiros termos da sequência de Fibonacci pela definição. Mas, há um tipo especial de matrizes que são fáceis de se calcular as potências, essas são as matrizes diagonais.

Definição 2.1. *Seja $A = \{a_{ij}\}$ uma matriz de ordem n, dizemos que a matriz A é uma matriz* diagonal *quando temos os elementos $a_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$.*

Para calcular as potências de uma matriz diagonal basta calcular as potências de cada elemento da diagonal principal. Este resultado é válido para toda matriz diagonal de ordem n, e faremos a demonstração para $n = 2$ utilizando indução matemática.

Proposição 2.2. *Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ uma matriz diagonal de ordem 2, então $A^n = \begin{pmatrix} (a_{11})^n & 0 \\ 0 & (a_{22})^n \end{pmatrix}$.*

Demonstração. i) Para $n = 1$ temos que $A^1 = A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ por hipótese.

ii) Suponhamos que o resultado é válido para n e queremos mostrar que também é válido para $(n + 1)$.

Temos então que $A^n = \begin{pmatrix} (a_{11})^n & 0 \\ 0 & (a_{22})^n \end{pmatrix}$, e assim

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n.A &= \begin{pmatrix} (a_{11})^n & 0 \\ 0 & (a_{22})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11})^n.a_{11} + 0.0 & (a_{11})^n.0 + 0.a_{22} \\ 0.a_{11} + (a_{22})^n.0 & 0.0 + (a_{22})^n.a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11})^{n+1} & 0 \\ 0 & (a_{22})^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo temos que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} (a_{11})^{n+1} & 0 \\ 0 & (a_{22})^{n+1} \end{pmatrix}$$

e o resultado é verdadeiro para todo n natural não nulo.

$\blacksquare$

No entanto, nossa matriz A em questão não é uma matriz diagonal, mas veremos que há uma outra classe de matrizes que apesar de não serem diagonais para fins de cálculo de produtos se comportam de forma semelhante, que são as matrizes diagonalizáveis como estudaremos na próxima seção.

2.1 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Para estudarmos a diagonalização de matrizes precisamos primeiro definir os conceitos de autovalores e autovetores associados a uma matriz, que veremos na próxima subseção.

2.1.1 Autovalores e autovetores

Para fins de estudo neste trabalho utilizaremos a seguinte definição para um vetor.

Definição 2.2. *Um vetor v com n entradas reais, é uma matriz coluna de ordem $n \times 1$, ou seja,*

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Em nosso texto, às vezes nos referiremos a um vetor v com n entradas reais simplesmente por vetor. Além disso, quando nos referimos ao vetor nulo, queremos indicar o vetor que possui todas as entradas iguais a zero, e utilizaremos a notação $0_{n\times 1}$ para indicar tal vetor.

Seja A uma matriz de ordem n, v um vetor de n coordenadas com entradas reais, e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Queremos resolver a seguinte equação $A\ v = \lambda\ v$, na qual temos como incógnitas λ e v. Seja então,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

queremos então calcular v e λ tais que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Definição 2.3. *Os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação $Av = \lambda v$, com v diferente do vetor nulo, são denominados* autovalores *da matriz A, e os vetores v não nulos, associados a cada autovalor de A são denominados* autovetores *da matriz A.*

Observe que se

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

então v sempre seria solução de $A\ v = \lambda\ v$ independente de A e de λ. O objetivo é encontrar soluções para v, tais que v não seja o vetor nulo.

Vamos reescrever a equação $A\,v = \lambda\,v$ como $A\,v = \lambda\,I_n v$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n, e assim temos $A\,v - \lambda\,I_n\,v = 0_{n\times 1}$. Colocando o vetor v em evidência no lado esquerdo da última igualdade encontramos $(A - \lambda\,I_n)\,v = 0_{n\times 1}$, ou seja , o que queremos resolver é

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

que na verdade é um sistema linear homogêneo.

A seguir citaremos parte do *Teorema Fundamental das Matrizes Inversíveis*, que não será demonstrado, mas pode ser consultado na referência (LAY, 2007), Teorema 8 na página 111 e Teorema 4 na página 175.

Teorema 2.1. *Sejam A uma matriz de ordem n e x um vetor com n entradas reais, então as seguintes informações são equivalentes:*

- *A matriz A é uma matriz inversível;*
- *A equação $Ax = 0_{n\times 1}$ admite apenas a solução trivial;*
- *O determinante da matriz A é diferente a zero.*

Observe que se $det(A-\lambda\,I_n) \neq 0$, a matriz $(A-\lambda\,I_n)$ é inversível e teremos uma única solução, que neste caso como o sistema linear é homogêneo será o vetor nulo, porém esta solução não nos interessa. E assim como queremos v diferente do vetor nulo, devemos ter

$$det(A - \lambda\,I_n) = 0.$$

Como

$$(A - \lambda\,I_n) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix},$$

calculando $det(A - \lambda\,I_n)$ encontramos um polinômio de grau n em função da variável λ, que é denominado *polinômio característico da matriz A*, como pode ser consultado na referência (STRANG, 2009).

Note que os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ que são as raízes do polinômio característico são os autovalores da matriz A, e os vetores v que satisfazem $(A - \lambda\ I_n)\ v = 0_{n\times 1}$, associados a cada λ que é autovalor de A, são os autovetores da matriz A.

Por exemplo, seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

queremos encontrar os autovalores e autovetores associados à matriz A. Para isto temos que encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e v diferente do vetor nulo, tais que $A\ v = \lambda\ v$.

Para resolvermos $A\ v = \lambda\ v$ reescrevemos $A\ v = \lambda\ I_3\ v$ e assim temos $A\ v - \lambda\ I_3\ v = 0_{3\times 1}$, e colocando o vetor v em evidência no lado esquerdo da igualdade obtemos $(A - \lambda\ I_3)\ v = 0_{3\times 1}$.

Para encontrar os autovalores de A vamos utilizar o polinômio característico fazendo $det(A - \lambda\ I_3) = 0$. Logo,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 2(1-\lambda) = 0.$$

E assim,

$$(1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda) - 2] = 0$$
$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0.$$

Como temos um produto de dois termos resultando em zero devemos ter um dos dois termos iguais a zero, podemos observar no primeiro termo que $\lambda_1 = 1$ é uma das raízes da equação. Vamos agora encontrar as raízes do segundo termo que é $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-(-5)\ \pm\ \sqrt{(-5)^2 - 4.1.4}}{2.1} \\ &= \frac{5\ \pm\ \sqrt{25-16}}{2} \\ &= \frac{5\ \pm\ \sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{5\ \pm\ 3}{2}. \end{aligned}$$

Logo, as raízes são $\lambda_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$ e $\lambda_3 = \dfrac{5-3}{2} = 1$. Como $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ o polinômio característico tem então como raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$.

Portanto, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Agora para encontrar os autovetores vamos substituir os autovalores encontrados e resolver

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = 1$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que resulta no seguinte sistema linear

$$\begin{cases} y+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ 2y+2z &= 0 \end{cases},$$

no qual temos $y = -z$ e encontramos o seguinte conjunto solução

$$S = \{(x, -z, z); x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix} ; x, z \in \mathbb{R} \text{ com } x \neq 0 \text{ ou } z \neq 0 \right\}.$$

Para $\lambda_2 = 4$ temos

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que resulta no seguinte sistema linear

$$\begin{cases} -3x+y+z &= 0 \\ -2y+z &= 0 \\ 2y-z &= 0 \end{cases},$$

no qual temos $z = 2y$, e substituindo na primeira equação encontramos

$$-3x + y + 2y = 0 \;\Rightarrow\; -3x + 3y = 0 \;\Rightarrow\; x = y.$$

A solução desse sistema linear é da forma

$$S = \{(y, y, 2y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$ são

$$\left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Na próxima subseção definiremos o conceito de diagonalização de matrizes e estudaremos quando é possível diagonalizar uma matriz.

2.1.2 Diagonalização de matrizes

Neste momento faremos um estudo sobre diagonalização de matrizes, mas antes de estudarmos quando é possível diagonalizar uma matriz precisamos definir o que são matrizes semelhantes.

Definição 2.4. *Dadas duas matrizes A e B, ambas de ordem n, dizemos que a matriz A é* semelhante *a matriz B se existir uma matriz P inversível e de mesma ordem tal que $B = P^{-1}AP$.*

Com esta definição podemos então definir quando uma matriz é diagonalizável.

Definição 2.5. *Dada uma matriz A de ordem n, temos que A é uma matriz diagonalizável quando A é semelhante a uma matriz diagonal D, ou seja, existe uma matriz P inversível de ordem n tal que $D = P^{-1}AP$.*

Dizemos que a matriz P acima é uma matriz que *diagonaliza* a matriz A. Porém, nem sempre existe a matriz P que diagonaliza A e veremos a seguir um resultado que nos permite saber quando é possível encontrar e como determinar tal matriz P. Mas, antes precisamos definir alguns conceitos que são utilizados neste resultado.

Definição 2.6. *Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ vetores, dizemos que v é uma* combinação linear *dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tais que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

A partir desta definição podemos entender o que são vetores linearmente independentes(LI).

Definição 2.7. *Dado um conjunto de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, dizemos que tais vetores são* linearmente independentes (LI) *quando a única combinação linear destes vetores que resulta no vetor nulo é a combinação linear cujos escalares são todos iguais a zero, ou seja, se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_{n\times 1}$ então $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

Teorema 2.2. *Dada uma matriz A de ordem n temos que A é diagonalizável se, e somente se, A possui n autovetores linearmente independentes (LI).*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Temos que A é diagonalizável, então A é semelhante a uma matriz diagonal D, ou seja, existe uma matriz P inversível e de mesma ordem tal que $D = P^{-1}AP$. Multiplicando esta igualdade por P à esquerda encontramos

$$PD = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})AP = I_n AP = AP.$$

Logo, $PD = AP$.

Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ as colunas da matriz P, e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os elementos da diagonal principal de D.

De $AP = PD$ temos

$$A\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Assim temos,

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \ , Av_2 = \lambda_2 v_2, ..., Av_n = \lambda_n v_n,$$

o que nos mostra que os vetores colunas de P são autovetores da matriz A associados aos autovalores que são os elementos da diagonal principal de D. Assim, como os n vetores colunas da matriz P são autovetores de A e a matriz P é inversível temos pelo *Teorema Fundamental da Matrizes Inversíveis* (LAY, 2007), que seus vetores colunas são LI. Portanto, se a matriz A é diagonalizável então possui n autovetores LI.
($\Leftarrow$) Agora suponhamos que a matriz A tenha n autovetores LI, sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ os autovetores de A associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, respectivamente. Deste modo, temos que

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \ , Av_2 = \lambda_2 v_2, ..., Av_n = \lambda_n v_n$$

e então podemos escrever

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \dots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Denotemos por P a matriz de ordem n com os autovetores v_1, v_2, ..., v_n em coluna e D a matriz diagonal de ordem n, com os autovalores de A na diagonal principal e, desta forma, podemos escrever

$$AP = PD.$$

Como as colunas de P são vetores LI, pelo *Teorema Fundamental da Matrizes Inversíveis* (LAY, 2007), temos que P é uma matriz inversível, ou seja, existe P^{-1}. De $AP = PD$, multiplicando esta igualdade por P^{-1} à esquerda temos

$$P^{-1}AP = P^{-1}(PD) = (P^{-1}P)D = I_n D = D.$$

Logo temos que $D = P^{-1}AP$, ou seja, a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal D, e assim se a matriz A possui n autovetores

LI então A é diagonalizável.

■

Se $D = P^{-1}AP$, temos que a matriz P é uma matriz que diagonaliza a matriz A, e observe que os elementos da diagonal principal de D são os autovalores de A e os vetores coluna da matriz P são autovetores de A associados a tais autovalores.

Porém, a matriz P que a diagonaliza A não é única, pois quando temos os autovalores de A e escolhemos uma ordem para as colunas da matriz diagonal D, os autovetores da matriz P, ficam determinados por esta mesma ordem cada um associado a seu respectivo autovalor, assim conforme se muda a disposição dos autovalores na matriz D, também será mudada a disposição dos autovetores na matriz P.

O resultado do teorema a seguir pode ser útil quando procuramos encontrar a matriz P de autovetores que diagonaliza a matriz A.

Teorema 2.3. *Sejam A uma matriz de ordem n, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ com $k \leq n$ autovalores distintos de A e $v_1, v_2, ..., v_k$ os autovetores de A associados a tais autovalores respectivamente. Então temos que $v_1, v_2, ..., v_k$ é um conjunto de vetores LI.*

Faremos a demonstração deste teorema para $k = n = 2$, e o resultado no caso geral pode ser encontrado na referência (LAY, 2007).

Teorema 2.4. *Sejam A uma matriz de ordem 2, λ_1 e λ_2 autovalores distintos de A e v_1 , v_2 autovetores associados a tais autovalores respectivamente. Então temos que v_1 e v_2 são LI.*

Demonstração. Como λ_1 e λ_2 são autovalores distintos da matriz A, e v_1, v_2 são autovetores associados a tais autovalores respectivamente, temos que

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \text{ e } Av_2 = \lambda_2 v_2.$$

Sejam α_1 e α_2 escalares reais tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_{n\times 1}, \tag{2.2}$$

multiplicando esta igualdade por A teremos

$$A(\alpha_1 v_1) + A(\alpha_2 v_2) = A\ 0_{n\times 1}$$

ou seja,

$$\alpha_1(Av_1) + \alpha_2(Av_2) = 0_{n\times 1}$$

que podemos reescrever como

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 = 0_{n\times 1}. \tag{2.3}$$

Mutiplicando a equação (2.2) por λ_1 obtemos

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_1 v_2 = 0_{n\times 1} \tag{2.4}$$

e agora subtraindo da equação (2.4) a equação (2.3) encontramos

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 - \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_1 v_2 - \alpha_2\lambda_2 v_2 = 0_{n\times 1}$$

isto é,

$$0 + \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = 0_{n\times 1} \ .$$

Porém observe que como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_2 \neq 0_{n\times 1}$, pois é autovetor de A, então devemos ter $\alpha_2 = 0$. Agora, de $\alpha_2 = 0$ voltando na equação (2.2) temos que

$$\alpha_1 v_1 + 0v_2 = 0_{n\times 1} \ \Rightarrow \ \alpha_1 v_1 = 0_{n\times 1}$$

mas, como $v_1 \neq 0_{n\times 1}$ por ser autovetor de A, então temos que $\alpha_1 = 0$.
Portanto, como $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ os vetores v_1 e v_2 são LI.

$\blacksquare$

Este teorema nos diz que autovetores associados a autovalores distintos são LI, faremos agora um exemplo mostrando como encontrar, utilizando autovalores e autovetores, uma matriz P que diagonaliza uma matriz A de ordem 2.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

queremos encontrar, se existir, uma matriz P que diagonaliza A. Como vimos no *Teorema 2.2* se a matriz A possuir 2 autovetores LI, teremos que A é diagonalizável. Vamos então encontrar os autovalores e autovetores da matriz A para verificar se esta condição é satisfeita.

Para encontrar os autovetores devemos resolver a equação $(A - \lambda I)v = 0_{n\times 1}$, para isto faremos $det(A - \lambda I) = 0$ para encontrar primeiro os autovalores de A. Utilizando o polinômio característico de A encontramos

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ (-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

As raízes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$, que são os autovalores da matriz A. Para encontrar os autovetores associados a cada autovalor devemos resolver $(A - \lambda I)v = 0_{n\times 1}$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = -1$ temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

então

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow\ x = -2y$$

que resulta no conjunto solução

$$S = \{(-2y, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

E assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -1$ são

$$\left\{\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R}^*\right\}.$$

Para $\lambda_2 = 2$ temos

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e assim

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -2x & + & 2y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow\ x = y$$

que resulta no conjunto solução

$$S = \{(y, y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 2$ são

$$\left\{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R}^*\right\}.$$

Como vimos no *Teorema 2.3* , autovetores associados a autovalores distintos são LI. Desta forma tomemos

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ respectivamente. Tais autovetores são LI, então seja

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e P será uma matriz que diagonaliza A.

Como as colunas da matriz P formam um conjunto de vetores LI, pelo *Teorema Fundamental da Matrizes Inversíveis* (LAY, 2007), temos que a matriz P é inversível, e vamos encontrar P^{-1} escalonando a matriz P juntamente com a matriz identidade de ordem 2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) l_1 \leftrightarrow l_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) 2l_1 + l_2 \rightarrow l_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \frac{1}{3}l_2 \rightarrow l_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) -l_2 + l_1 \rightarrow l_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right).$$

Desta forma temos que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

e vamos calcular $P^{-1}AP$ para verificar se chegamos a matriz diagonal D. Assim,

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D.
\end{aligned}
$$

Desta forma temos que a matriz A é diagonalizável e P é uma matriz que diagonaliza A.

Mas nem sempre a matriz em questão é diagonalizável, como veremos no próximo exemplo.

Seja

$$
B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},
$$

vamos verificar se esta matriz é diagonalizável, para que isto ocorra como a matriz B é de ordem 3, pelo *Teorema 2.2* a matriz B deve possuir 3 autovetores LI.

Assim, precisamos encontrar os autovetores de B, e para isto primeiro encontraremos os autovalores da matriz resolvendo a equação $det(B - \lambda I) = 0$. Utilizando o polinômio característico de B obtemos:

$$
\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda) = 0
$$

encontrando como raízes $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$, ou seja, a matriz B possui apenas um autovalor.

Para encontrar os autovetores associados a este autovalor resolvemos a equação $(B - \lambda I)v = 0_{n\times 1}$, ou seja, temos

$$
\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Para $\lambda_1 = 4$ teremos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que resulta no seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \\ x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \\ 0x & + & y & + & 0z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Logo temos $x = 0$, $y = 0$ e z é uma variável livre, e temos o seguinte conjunto solução

$$S = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}.$$

E assim os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 4$ são

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; z \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Como $\lambda_1 = 4$ é o único autovalor da matriz B, temos infinitos autovetores associados a ele, porém todos estes autovetores são múltiplos do autovetor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e desta forma não é possível encontrar 3 autovetores LI associados à matriz B, ou seja, a matriz B não é diagonalizável e portanto, neste caso não existe uma matriz P que diagonaliza a matriz B. Após o estudo de diagonalização de matrizes podemos voltar a estudar como calcular potências de matrizes, que veremos na próxima seção.

2.2 POTÊNCIAS DE MATRIZES

Nosso objetivo agora é calcularmos as potências de uma matriz diagonalizável, ou seja, queremos uma técnica para encontrarmos o valor de A^n, em que A é uma matriz diagonalizável.

Seja A uma matriz de ordem n diagonalizável, então A é semelhante a uma matriz diagonal D, isto é, existe uma matriz P de mesma ordem e inversível tal que

$$D = P^{-1}AP.$$

Multiplicando esta igualdade por P à esquerda em ambos os lados obtemos

$$PD = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})AP = I_nAP = AP,$$

então temos

$$PD = AP.$$

Agora multiplicando essa nova igualdade por P^{-1} à direita em ambos os lados encontramos

$$PDP^{-1} = APP^{-1} = A(PP^{-1}) = AI_n = A$$

logo,

$$A = PDP^{-1} \tag{2.5}$$

e estamos interessados em calcular as potências da matriz A. Vejamos o que ocorre quando calculamos potências de A utilizando a equação (2.5):

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PDI_nDP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainda,

$$\begin{aligned} A^3 = A^2A &= (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^2I_nDP^{-1} = PD^2DP^{-1} = PD^3P^{-1}. \end{aligned}$$

Desta forma intui-se que devemos ter

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

e mostraremos este fato utilizando indução matemática.

Proposição 2.3. *Seja A uma matriz diagonalizável, ou seja, A é semelhante a uma matriz diagonal D e podemos escrever $A = PDP^{-1}$, então $A^n = PD^nP^{-1}$.*

Demonstração. *i)* Para $n = 1$ temos que $A = PDP^{-1}$ por hipótese.
ii) Suponhamos que o resultado é válido n, ou seja, que $A^n = PD^nP^{-1}$

e queremos mostrar que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Mas, usando a hipótese de indução temos que

$$A^{n+1} = A^n A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1})$$

assim,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nI_nDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

e portanto, temos que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ e o resultado é verdadeiro para todo n natural não nulo.

■

Agora vamos utilizar o exemplo da seção anterior no qual já diagonalizamos a matriz A de ordem 2 para calcularmos A^5. Pelos cálculos realizados anteriormente temos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para calcularmos A^5, pela *Proposição 2.3* basta fazermos $A^5 = PD^5P^{-1}$, e para calcular D^5 utilizaremos o *Proposição 2.2.* Logo,

$$\begin{aligned} A^5 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]^5 \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 32 \\ -1 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 11 & 21 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calcular potências de matrizes desta forma é menos trabalhoso do que o cálculo de potências utilizando a definição do produto de matrizes, e quanto maior for o valor da potência n, maior é a diferença entre os dois métodos de cálculo.

Com o estudo de diagonalização de matrizes e potências A^n, podemos voltar a equação que tínhamos no início deste capítulo

$$u_{n+1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que nos permitirá calcular qualquer termo da sequência de Fibonacci. A resolução desta equação utilizando os resultados abordados até agora será estudada no próximo capítulo.

3 SIMPLIFICAÇÃO DE $U_{N+1} = A^N.U_1$

Nosso objetivo neste capítulo é desenvolver a igualdade

$$u_{n+1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

esta já nos fornece uma fórmula para encontrar o termo geral da sequência de Fibonacci, mas queremos simplificá-la de modo que não precisemos mais calcular as potências n da matriz A. Ou seja, queremos encontrar uma fórmula com a qual poderemos calcular qualquer termo na sequência de Fibonacci, dependendo apenas da variável n de sua posição na sequência.

Voltando a discussão iniciada no Capítulo 2 em que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

queremos verificar se A é uma matriz diagonalizável para, se assim o for, calcularmos A^n.

Para verificar se A é uma matriz diagonalizável devemos encontrar seus autovalores e autovetores, e como a matriz A tem ordem 2, se A possuir dois autovetores LI pelo *Teorema 2.2* ela será diagonalizável.

Para calcular os autovetores de A devemos resolver a equação $(A - \lambda I)v = 0_{2\times 1}$, para isto faremos $det(A - \lambda I) = 0$ para encontrar primeiro os autovalores de A. Utilizando o polinômio característico de A encontramos

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(0-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

No qual teremos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-(-1) \ \pm \ \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} \\ &= \frac{1 \ \pm \ \sqrt{1+4}}{2} \\ &= \frac{1 \ \pm \ \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

e encontramos assim como raízes $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ que são os autovalores de A.

Note que um dos autovalores da matriz A é o número de ouro, que como visto no primeiro capítulo está ligado à sequência de Fibonacci pela divisão de um termo da sequência pelo seu termo antecessor na sequência.

Para encontrar os autovetores de A devemos resolver a equação $(A - \lambda I)v = 0_{2\times 1}$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ teremos

$$\begin{pmatrix} 1-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2-1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que resulta no seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ x & + & \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

Multiplicando a segunda equação por $-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ obtemos

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & - & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)y & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & + & \left[\dfrac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{4}\right]y & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & + & \left(\dfrac{1-5}{4}\right)y & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x & - & y & = & 0 \end{cases}.$$

E assim temos, $y = -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x$ resultando no seguinte conjunto solução

$$S = \left\{\left(x, -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x\right); x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ são

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}^*\right\}.$$

Para $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ encontramos

$$\begin{pmatrix} 1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & 1 \\ 1 & -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2-1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e temos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ x & + & \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

Multiplicando a segunda equação por $-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & - & \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & + & \left[\dfrac{(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})}{4}\right]y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & + & \left(\dfrac{1-5}{4}\right)y & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & + & y & = & 0 \\ -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x & - & y & = & 0 \end{cases}.$$

Logo, $y = -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x$ resultando no seguinte conjunto solução

$$S = \left\{\left(x, -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x\right); x \in \mathbb{R}\right\}.$$

E portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ são

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}^*\right\}.$$

Pelo *Teorema 2.3*, autovetores associados a autovalores distintos são LI, tomemos então:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

autovetores associados a λ_1 e λ_2 respectivamente. Tais autovetores são LI, e assim, como a matriz A de ordem 2 possui dois autovetores LI, pelo *Teorema 2.2* temos que A é uma matriz diagonalizável.

Como estudamos no capítulo anterior, uma matriz P que diagonaliza A é uma matriz de ordem 2, cujas colunas são os autovetores de

A. Logo,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Precisamos encontrar P^{-1}, e teremos $D = P^{-1}AP$, em que D será a matriz diagonal com os autovalores de A na diagonal principal.

Vamos escalonar a matriz P juntamente com a matriz identidade de ordem 2 para encontrarmos P^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & -\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) l_1 + l_2 \to l_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{array}\right) \quad -\tfrac{1}{\sqrt{5}} l_2 \to l_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right) \quad -l_2 + l_1 \to l_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right).$$

Portanto, encontramos

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Agora temos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ e } \quad D = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

tal que $D = P^{-1}AP$ e pelos estudos realizados no capítulo anterior vimos que podemos reescrever como $A = PDP^{-1}$.

Queremos calcular A^n para resolver a equação (3.1), para isto pela *Proposição 2.3* devemos calcular $A^n = PD^nP^{-1}$, em que D^n é calculada utilizando a *Proposição 2.2*. Assim,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \right]^n \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(-\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right) & -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Vamos escrever cada coluna desta matriz produto separadamente:

$$C_1 = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ \\ -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{array} \right)$$

e

$$C_2 = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ \\ -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \end{array} \right).$$

Desta forma temos de $A^n = \left(\begin{array}{cc} | & | \\ C_1 & C_2 \\ | & | \end{array} \right)$. Ainda reagrupando C_1 e C_2 temos:

$$C_1 = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \end{array} \right)$$

e

$$C_2 = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \end{array} \right).$$

Queremos resolver

$$u_{n+1} = A^n \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{array} \right)$$

que nos permitirá encontrar os termos F_{n+2} e F_{n+1} da sequência de Finobacci. Calculando u_{n+1} encontraremos uma matriz de ordem 2×1, na qual o primeiro elemento será a soma dos primeiros elementos de C_1 e C_2, e o segundo elemento será a soma dos segundos elementos de C_1 e C_2. Encontraremos então,

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].
\end{aligned}$$

Resolveremos cada uma dessas equações separadamente e depois voltaremos a matriz resultante que buscamos u_{n+1}.

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right],
\end{aligned}$$

e agora calculando F_{n+1} encontraremos

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\
&- \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]\right] \\
&- \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\right] \\
&- && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\right] \\
&= && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&- && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&= && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{4}\right)\right] \\
&- && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5}{4}\right)\right] \\
&= && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{-2+2\sqrt{5}}{4}\right)-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{-2-2\sqrt{5}}{4}\right)\right] \\
&= && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\right] \\
&= && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&= && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \\
&= && \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].
\end{aligned}$$

Temos então que

$$u_{n+1}=\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] \end{pmatrix}.$$

Aqui podemos observar que o resultado obtido em F_{n+1} é o mesmo que em F_{n+2} para n igual a $n-1$:

$$
\begin{aligned}
F_{(n-1)+2} = F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{(n-1)+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{(n-1)+2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].
\end{aligned}
$$

Assim, a medida que vamos variando n, podemos determinar todos os outros termos da sequência, e tomando n como sendo $n-2$ na equação de F_{n+2} obtemos

$$
F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].
$$

Desta forma, utilizando como método resultados de álgebra matricial chegamos a uma fórmula que nos permite calcular qualquer termo da sequência da Fibonacci dependendo apenas da variável da posição n, não precisando conhecer os termos que antecedem o termo procurado na sequência. E observe que esta fórmula é a mesma que encontramos no primeiro capítulo deste trabalho utilizando como método a teoria de sequências definidas recursivamente.

CONCLUSÃO

Ao término deste trabalho observamos que os objetivos propostos foram alcançados, ou seja, conseguimos chegar a uma fórmula que nos permite calcular qualquer termo da sequência de Fibonacci dependendo apenas da variável n de sua posição, não mais precisando conhecer os termos anteriores a este. Esta fórmula foi obtida de duas formas, inicialmente utilizando a teoria de sequências definidas recursivamente, e em seguida utilizando como método a álgebra matricial baseada na teoria de autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes.

É importante observarmos que usando a teoria de sequências definidas recursivamente não construímos um método de resolução, mas sim aplicamos resultados que supomos verdadeiros e verificamos que tais resultados funcionam como resolução, enquanto que ao remodelar o mesmo problema utilizando a álgebra matricial permitimos ao leitor um outro olhar sobre a situação em questão, construindo um método de resolução inicialmente percebendo a reescrita da sequência como um sistema linear, em seguida como produto de matrizes, e utilizando então a teoria de autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes, chegamos mais naturalmente a fórmula desejada.

No desenvolver deste trabalho, em algumas situações as demonstrações foram feitas para a variável $n = 2$ que era o nosso objetivo em questão, mas vale lembrar que estas demonstrações podem ser realizadas na variável n. Ainda, cabe ressaltar que a teoria de autovalores e autovetores é muito mais ampla e geral do que a abordada neste trabalho, os resultados utilizados são uma pequena parcela das suas inúmeras aplicações e propriedades.

REFERÊNCIAS

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio. vol.2**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIVIO, M. **RAZÃO AUREA: A História de Fi, um número surpreendente**. Rio de Janeiro: Record, 2006.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 8. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 2008.

STRANG, G. **Álgebra linear e suas aplicações**. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 1. ed. Bagé - RS: Ciência Moderna, 2011.