

William Casagrande Candiotta

**CRÍTICA DA RAZÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DO
OBJETO DA GEOMETRIA**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do Grau de Doutor em Educação.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Patricia Laura Torriglia

Coorientador: Prof. Dr. Ademir Damazio

Florianópolis
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Casagrande Candiotto, William

Crítica da razão matemática : uma análise do objeto da Geometria / William Casagrande Candiotto ; orientadora, Patricia Laura Torriglia ; coorientador, Ademir Damazio. - Florianópolis, SC, 2016.

194 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências da Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação.

Inclui referências

1. Educação. 2. Geometria. 3. Matemática. 4. Realidade física. 5. Ontologia crítica. I. Torriglia, Patricia Laura . II. Damazio, Ademir . III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação. IV. Título.

William Casagrande Candiotto

CRÍTICA DA RAZÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DO OBJETO DA GEOMETRIA

Esta tese foi julgada adequada para obtenção do título de Doutor em Educação e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 29 de março de 2016.

Prof^ª. Dr^ª. Ione Ribeiro Valle - Coordenadora do Curso
Banca Examinadora:

Prof^ª. Dr^ª. Patrícia Laura Torriglia – Orientadora
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Dr. Ademir Damazio – Coorientador
Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC)

Prof^ª. Dr^ª. Josélia Euzébio da Rosa – Examinadora
Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL)

Prof. Dr. José Roberto Boettger Giardinetto – Examinador
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Prof^ª. Dr^ª. Margareth Feiten Cisne – Examinadora
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof^ª. Dr^ª. Maria Isabel Batista Serrão – Examinadora
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof. Dr. Vidalcir Ortigara – Examinador
Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC)

Prof^ª. Dr^ª. Astrid Baecker Avila – Suplente
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Prof^ª. Dr^ª. Márcia Regina Goulart da Silva Stemmer – Suplente
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

A todos aqueles que contribuem para a
superação do estado atual das coisas...

AGRADECIMENTOS

Agradecer é um ato de reconhecer no outro a sua importância e necessidade para o homem se constituir homem. Apontar perspectivas de um mundo melhor e caminhos sem impô-los é um desafio, ensinar a compreender o mundo de uma forma revolucionária e crítica é um desafio ainda maior. Abraçar o outro, acolhê-lo com um cuidado fraternal, tudo isso é mostrar ao outro o que é ser (verbo) um ser (substantivo) humano nobre.

Essa experiência eu vivi com Ademir e Patricia. Dois humanos, dois professores, dois revolucionários. Presentes, solidários, incentivadores, comprometidos e, acima de tudo, necessários. A eles dedico a mais profunda admiração.

Estendo meus agradecimentos:

Aos amigos Iuri, Juliana, Elaine e Soraya, companheiros de jornada, pelo empenho na construção de um mundo melhor;

Aos companheiros do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural. Grupo no qual completo dez anos de convivência, aprendizado e contribuição;

Aos companheiros do Grupo de Estudos e Pesquisa em Ontologia Crítica (GEPOC). Pessoas que me receberam da forma mais acolhedora que alguém poderia receber quem acaba de chegar do interior e que nunca havia vivido em uma “cidade grande”;

Aos membros da banca de qualificação: Prof^ª. Dr^ª. Maria Isabel Batista Serrão, Prof. Dr. Vidalcir Ortigara e Prof. Dr. José Roberto Boettger Giardinetto, pelas preciosas análises do texto;

Aos membros da banca de defesa pela atenção e disponibilidade contribuir para nosso processo de formação: Prof^ª. Dr^ª. Josélia Euzébio da Rosa, Prof. Dr. José Roberto Boettger Giardinetto, Prof^ª. Dr^ª. Margareth Feiten Cisne, Prof^ª. Dr^ª. Maria Isabel Batista Serrão e Prof. Dr. Vidalcir Ortigara; e aos suplentes: Prof^ª. Dr^ª. Astrid Baecker Avila e Prof^ª. Dr^ª. Márcia Regina Goulart da Silva Stemmer;

Aos companheiros da turma 2012 do Curso de Doutorado em Educação;

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFSC;

Ao pessoal da secretaria do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFSC;

Ao Raúl Ibáñez Torres e à Universidad del País Vasco, por me receber como estudante no Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro concedido com bolsas nas modalidades Demanda Social e Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior.

Falo daquilo que não querem ouvir
Ouço aquilo que não quero falar
De tanto viver
Vivi
De tanto falar
Calei
De tanto ensinar
Desaprendi
Agora é tarde
É cedo
É mais ou menos tempo de querer
De querer vida
Não dessa que aí está
Mas daquela que aí quase esteve
Avante camaradas!
O mundo precisa mais de mim, de ti
De nós.

William Casagrande Candiotta, 2016.

RESUMO

A presente investigação, na modalidade teórica, teve como objetivo compreender a gênese, os nexos e a estrutura do objeto da Geometria, a fim de contribuir para o avanço das discussões acerca dessa temática. A partir de preocupações com a compreensão da relação entre a Matemática e a realidade material, surgiu a necessidade de entender a natureza do conhecimento geométrico e sua respectiva relação com a realidade física. A pergunta norteadora da pesquisa se traduz no seguinte questionamento: *O objeto da Geometria é uma forma a priori da sensibilidade humana ou é inerente à realidade física?* A referência inicial é a definição, pela literatura, de que o objeto da Geometria é as formas espaciais e as relações dos corpos físicos, abstraindo-se as demais propriedades. Defendemos a tese de que o objeto da Geometria se constitui como um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade humana. Para tanto, a análise requereu aprofundamentos referentes a quatro pontos que se pressupõem essenciais: (1) considerações onto-metodológicas; (2) discussão sobre matéria e consciência; (3) estudo da relação entre a Matemática e a realidade material; e (4) aprofundamento sobre o ser da Geometria. No processo de análise, demonstra-se, com base na dialética materialista, que a Geometria é a expressão ideal do movimento real da matéria, das leis físicas que regem tal movimento. Seu objeto se constitui no processo de abstração necessário à compreensão dessa realidade, uma vez que ele se encontra na mediação entre a realidade física e as formas de reflexo, ou seja, encontra-se na práxis do conhecimento.

Palavras-chave: Matemática. Geometria. Realidade física. Ontologia crítica.

ABSTRACT

This theoretical research aims to understand the genesis, the connections and the structure of the object of geometry in order to contribute to the progress of discussions on this theme. From concerns about the understanding of the relationship between mathematics and material reality, came the need to understand the nature of geometric knowledge and its relationship to physical reality. The research question is: *The object of geometry is an a priori form of human sensibility or is inherent in the physical reality?* The initial reference is the definition, in the literature, that the object of geometry is the spatial forms and relations of physical bodies, abstracting from other properties. We defend the thesis that the object of geometry is constituted as a reflection and not a constituent part of physical reality or *a priori* form of human sensibility. For this purpose, the analysis required insights regarding the four points which require essential: (1) onto-methodological considerations; (2) discussion about matter and consciousness; (3) study of the relationship between mathematics and physical reality; (4) deepening about being of Geometry. In the process of analysis, it is demonstrated, on the basis of dialectical materialism, that geometry is the ideal expression of the real movement of matter, the physical laws that govern such movement. Its object is the abstraction process need to understand this reality, since it is the mediation between physical reality and forms of reflection, that is, lies in the practice of knowledge.

Keywords: Mathematics. Geometry. Physical reality. Critical ontology.

RESUMEN

El presente estudio es una investigación teórica cuyo objetivo fue comprender la génesis, los nexos y la estructura del objeto de la Geometría, con la finalidad de contribuir para el avance de las discusiones en esa área. A partir de las preocupaciones con la comprensión de la relación entre Matemática y la realidad material, surgió la necesidad de entender la naturaleza del conocimiento geométrico y su respectiva relación con la realidad física. La pregunta orientadora de esta investigación es la siguiente: *el objeto de la geometría es una forma a priori de la sensibilidad humana o es inherente a la realidad física?* La referencia inicial es la definición, realizada por la literatura, de que el objeto de la geometría son las formas espaciales y las relaciones de los cuerpos físicos, abstrayendo las demás propiedades. Defendemos la tesis de que el objeto de la Geometría se constituye como un reflejo y no como una parte constitutiva de la realidad física o una forma a priori de la sensibilidad humana. Para tal fin, el análisis en este estudio doctoral demandó profundizar cuatro puntos que se consideran esenciales: (1) consideraciones onto-metodológicas; (2) discusión sobre la materia y la consciencia; (3) estudio sobre la relación entre Matemática y la realidad material; (4) profundización sobre el *ser* de la Geometría. En el proceso analítico se demuestra, con base en la dialéctica materialista, que la Geometría es la expresión ideal del movimiento real de la materia, de las leyes físicas que rigen el movimiento. Su objeto se constituye en el proceso de abstracción necesario para comprender esa realidad, una vez que él se encuentra en la mediación entre la realidad física y las formas de reflejo, es decir, se encuentra en la praxis del conocimiento.

Palabras claves: Matemática. Geometría. Realidad física. Ontología crítica.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A. n. e. – Antes de nossa era.

GEPOC – Grupo de Estudos e Pesquisa em Ontologia Crítica.

GPEMAHC – Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural.

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina.

UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense.

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO.....	21
2. CONTEXTO DA CONSTRUÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA E CONSIDERAÇÕES ONTO-METODOLÓGICAS.....	25
3. MATÉRIA E CONSCIÊNCIA.....	59
3.1 CONCEPÇÃO MATERIALISTA DE MATÉRIA	59
3.2 FORMAS FUNDAMENTAIS DE EXISTÊNCIA DA MATÉRIA: MOVIMENTO, TEMPO E ESPAÇO.....	69
3.3 UMA PROPRIEDADE UNIVERSAL DA MATÉRIA: O REFLEXO	79
3.4 UMA PROPRIEDADE PARTICULAR DA MATÉRIA: A CONSCIÊNCIA	88
4. RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A REALIDADE MATERIAL.....	99
4.1 TRAÇOS CARACTERÍSTICOS DA MATEMÁTICA: ELEMENTOS DAS CONCEPÇÕES IDEALISTAS E MATERIALISTAS.....	99
4.2 A ABSTRAÇÃO.....	113
4.3 A PRECISÃO, O RIGOR LÓGICO E O IRREFUTÁVEL CARÁTER DE SUAS CONCLUSÕES.....	120
4.4 O AMPLO CAMPO DE APLICAÇÕES	125
5. O SER DA GEOMETRIA	129
5.1 CRÍTICA À CRÍTICA DE LUKÁCS A EINSTEIN: ELEMENTOS DE ANÁLISE DO OBJETO DA GEOMETRIA.	129
5.2 GÊNESE E DESENVOLVIMENTO DO OBJETO DA GEOMETRIA.....	138
5.3 AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E A TEORIA DA RELATIVIDADE.....	174
6. EM SÍNTESE	183
REFERÊNCIAS	191

1. APRESENTAÇÃO

O texto apresentado tem como centralidade a discussão sobre o objeto da Geometria com uma base filosófica sobre a sua materialidade e as respectivas relações com a realidade física. O pressuposto é de que o desenvolvimento científico da Matemática e, em especial da Geometria, constitui-se em uma relação importante entre a filosofia e a ciência, na dinâmica da produção do conhecimento da realidade material.

A partir de preocupações com a relação entre a Matemática e a realidade física, surgiu a necessidade de compreender a especificidade dessa relação no que diz respeito à natureza do conhecimento geométrico. Tomamos como argumento a declaração de Aleksandrov (1991a) de que o objeto da Geometria é as formas espaciais e as relações entre os corpos físicos, considerados abstratamente. Tal objeto, pela premissa por nós adotada, é concebido por três matrizes filosóficas opostas: o materialismo mecanicista, o idealismo e o materialismo dialético. Esta última concepção sobre o objeto da Geometria fundamenta a defesa da tese de que o objeto da Geometria é um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade humana. Assim, combatemos as duas primeiras concepções com base na concepção dialético-materialista, que considera tal objeto na relação entre a realidade física e as suas formas de reflexo. Tal combate se expressa em uma compreensão de formação humana e, portanto, constitui um posicionamento dialético materialista sobre as concepções de mundo, homem e sociedade.

A investigação desse objeto de estudo e da tese citada se explicita no presente texto, composto de quatro capítulos: no primeiro trazemos as considerações onto-metodológicas, no qual destacamos o método de análise do objeto da pesquisa; o segundo capítulo versa sobre matéria e consciência; o terceiro trata da relação entre a Matemática e a realidade material; e o último é dedicado ao ser da Geometria.

Nas considerações onto-metodológicas, apresentamos o contexto da construção do objeto de pesquisa, qual seja: o objeto da Geometria. Por sua vez, o consideramos com base na dialética materialista. Inicialmente, destacamos duas concepções de compreensão do objeto da Geometria: materialista mecanicista e idealista. Nesse contexto, desenhamos o objeto da Geometria no seu contexto histórico e buscamos compreender sua categoria central ontológica: a medida, ou seja, as relações métricas estabelecidas entre as grandezas. A análise dialético-materialista do objeto da Geometria perpassa a compreensão

da relação entre a realidade física e a suas formas de reflexo consciente. Essa relação se desenvolve no movimento dialético da realidade material e tem seus respectivos reflexos na consciência. É nesse sentido que construímos nosso objeto de pesquisa e, ao final desse capítulo, chegamos à tese que aqui defendemos.

O terceiro capítulo aborda as duas categorias que compõem a questão fundamental da filosofia: a matéria e a consciência. Para tal, discutimos a concepção materialista de matéria, a partir da definição clássica de Lenin e as interpretações de quatro autores: Cheptulin (1982), Ovtchinnikov (1955), Konstantinov (1965) e Afanasiev (1963). Na sequência, tratamos das formas fundamentais de existência da matéria: o movimento, o tempo e o espaço. Nesse sentido, aventamos sobre as esferas ontológicas do ser social, ou seja, sobre as formas fundamentais do movimento da matéria, quais sejam: inorgânica (movimento mecânico, físico e químico), orgânica (movimento biológico: vegetal e animal) e ser social (movimento social). Também, realizamos a discussão sobre as categorias tempo e espaço com base na dialética materialista. Além disso, discutimos a categoria consciência, com destaque para duas propriedades da matéria: o reflexo como uma propriedade universal e a própria consciência como uma propriedade particular. Diante disso, a discussão sobre a categoria reflexo estabelece os limites daquilo que é próprio da realidade física e daquilo que é reflexo subjetivo dessa realidade. Portanto, negamos a existência desse objeto como inerente à realidade física e como forma a priori da sensibilidade humana.

Na quarta parte, apresentamos os traços característicos da Matemática com base nos elementos das concepções idealistas e materialistas, bem como a relação entre a Matemática e a realidade material. Na sequência do texto, tratamos especificamente desses traços, quais sejam: (1) a abstração; (2) a precisão, o rigor lógico e o irrefutável caráter de suas conclusões; e (3) o amplo campo de aplicações. Além disso, trazemos os elementos que possibilitam a compreensão da relação entre as abstrações geométricas, com base nas abstrações matemáticas e a realidade física.

No quinto capítulo, desenvolvemos a especificidade do objeto da Geometria que fundamenta a tese em questão, isto é, de que tal objeto é um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física, tampouco uma forma a priori da sensibilidade. Iniciamos com uma reflexão sobre

a crítica de Lukács ao experimento ideal de Einstein¹, em que analisamos a relação entre a Geometria e a Física, bem como entre seus objetos, a fim de compreender a relação entre o reflexo geométrico e a realidade física. Em seguida, tratamos da gênese e desenvolvimento do objeto da Geometria e, para tal, discutimos como ocorreu esse processo ao longo de sua história, que transitou entre as concepções idealista e materialista mecanicista.

Por fim, esboçamos a interrelação das Geometrias não-euclidianas com a teoria da relatividade, para compreender as suas influências no desenvolvimento da Física e como esta corroborou sua veracidade e contribuiu para revolucionar as concepções geométricas, reinantes por cerca vinte séculos.

¹ Albert Einstein (1879 – 1955) foi um físico teórico alemão que desenvolveu a teoria da relatividade geral em 1915.

2. CONTEXTO DA CONSTRUÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA E CONSIDERAÇÕES ONTO-METODOLÓGICAS

A construção do objeto de pesquisa tem sua gênese em nossas experiências nos processos educacionais formais, bem como nas pesquisas e estudos, anteriormente desenvolvidos, no Programa de Iniciação Científica e pesquisa de mestrado. Também decorreu dos aprofundamentos teóricos, consequência de nossa participação nos grupos de pesquisa GPMAHC² e GEPOC³.

O GPMAHC tem como preocupação básica o estudo do processo de formação e apropriação de conceitos matemáticos em contextos intra e extra-escolares, com fundamentos na Teoria Histórico-Cultural elaborada por Vygotski e seus continuadores. Atualmente, o objeto de investigação está centrado nas atividades de estudo e de ensino. Para tanto, toma como referência a proposta de Davýdov, seus colaboradores e continuadores. Isso remete o grupo, teoricamente, ao estudo dos precursores da Psicologia Histórico-Cultural: Vygotski, Leontiev, Rubinstein, Galperin. Essas leituras, necessariamente, conduzem à sua matriz filosófica, o materialismo histórico e dialético, cuja referência de leitura no grupo é Marx, Engels, Rosental e Straks, Kosik, Kopnin, Cheptulin, Lukács e outros.

O GEPOC se propõe a estudar, pesquisar e debater questões e problemas da educação, tendo como base uma abordagem marxista, em especial as perspectivas teóricas lucacsianas e histórico-cultural. O grupo pretende, também, contribuir nas discussões sobre as diferentes vertentes do pensamento educacional, em especial o debate em relação ao ceticismo epistemológico e relativismo ontológico pós-modernos, nos diversos âmbitos da educação. Com o intuito de maximizar o debate nas áreas que se articulam à pesquisa educacional interessa uma constante interlocução com a Filosofia, a História, a Sociologia, a Psicologia, entre outras. Essa articulação visa uma apreensão mais profunda do fenômeno educacional.

² O Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural é vinculado à Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC) e tem como líder o Prof. Dr. Ademir Damazio.

³ O Grupo de Estudos e Pesquisas em Ontologia Crítica é vinculado à Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e que tem como líder a Prof^a. Dr^a. Patricia Laura Torriaglia.

Com base nas discussões realizadas nos referidos grupos e no aprofundamento teórico a partir da literatura, nosso pressuposto é o de que existem três matrizes filosóficas com compreensões opostas sobre do objeto da Geometria: o materialismo mecanicista, o idealismo e o materialismo dialético. As duas primeiras confluem, por uma via de mão dupla, a um ponto, qual seja, a dicotomização do objeto da Geometria. A última concepção fundamenta a defesa da tese de que o objeto da Geometria é um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade humana. Assim, combatemos as duas primeiras concepções com base na concepção dialético-materialista que considera tal objeto na relação entre a realidade física e as suas formas de reflexo.

A primeira, a materialista mecanicista, se expressa na representação do objeto da Geometria nas experiências imediatas dos indivíduos. Por consequência, a possibilidade de uma abstração mais elevada é cerceada nessas condições, pois não estimula uma reflexão, por exemplo, de qual a geometria expressa a formação do universo. Questionamentos desse tipo exigem abstrações e certo distanciamento das experiências mais imediatas dos indivíduos, que não têm existência em-si separada da realidade física. Podemos observar referências de figuras geométricas – quadrado e círculo, por exemplo – como elementos da realidade física, sem a distinção clara entre as relações dimensionais, exceto aquela entre geometria plana e espacial, como apenas conteúdo de uma disciplina curricular. Curiosamente não se faz uma interconexão com a Física para compreender as relações geométricas de dimensionalidade e sua articulação com o tempo. Essa vinculação espaço-temporal estudada na Física é importante para entender a geometria da realidade física.

A segunda perspectiva, a idealista, toma o objeto da Geometria como uma abstração pura e independente da realidade física. Nesse sentido, coloca o objeto da Geometria num patamar de universalidade, independente dessa realidade, que se apresenta como representante físico desse objeto abstrato universal. É comum considerar uma forma geométrica em sua pura abstração e procurar seu representante na realidade física. No entanto, os corpos materiais não permitem uma perfeita corroboração com a forma abstrata e se tornam uma cópia imperfeita da abstração pura. Esse movimento de pensamento é similar ao do pensamento mecanicista, pois ambos seguem uma via de mão dupla. Nesse sentido, há uma dicotomização do processo de conhecimento da realidade material, uma vez que um prioriza a

abstração pura e o outro considera premente o reflexo mecânico de uma geometria inerente à realidade física.

Pretendemos, nesse estudo, uma reflexão crítica sobre essas duas perspectivas, com vistas a uma fundamentação da constituição do objeto da Geometria como uma relação, na práxis, entre a realidade física e a capacidade humana de reflexo consciente dessa realidade. No entanto, cabe esclarecer que não analisaremos com base nos processos educacionais formais de ensino de Geometria, tampouco pretendemos a elaboração de uma proposta de um sistema de ensino dessa ciência. O objetivo é compreender a gênese, os nexos e a estrutura do objeto da Geometria e, desse modo, contribuir para o avanço das discussões acerca dessa temática.

Nesse sentido, recorreremos a Lukács (2012, p. 312), ao tratar do método de Marx – Crítica da economia política –, quando afirma que o ponto de partida “[...] deve ser uma categoria objetivamente central no plano ontológico”. O autor analisa o caráter ontológico do método marxiano no estudo do valor, que se estende para a investigação de qualquer outro objeto. Marx, ao descrever a gênese do valor, segundo Lukács (2012, p. 312-313), elucida o duplo caráter de seu método: “essa gênese não é nem uma dedução lógica do conceito de valor, nem uma descrição indutiva das fases históricas singulares do desenvolvimento que o levou a adquirir a forma social pura”. Essa constatação de Lukács evidencia a dialética das categorias lógico e histórico no método de Marx e, por sua vez, demonstra a prioridade ontológica do histórico em relação ao lógico, sem qualquer hierarquização categorial. “Essa posição central da categoria do valor é um fato ontológico e não, por exemplo, um ‘axioma’ que sirva de ponto de partida para deduções puramente teóricas ou mesmo lógicas” (LUKÁCS, 2012, p. 313).

Nesse contexto metodológico, cabe perguntar: qual categoria ontológica central do objeto da Geometria deve ser o ponto de partida da investigação? Nosso pressuposto é o de que a análise do objeto dessa indagação deve perfazer o caminho indicado por Lukács (2012). Ou seja, não constituir uma gênese lógico-dedutiva e, tampouco, apresentar uma descrição factual das fases históricas singulares do desenvolvimento do objeto da Geometria.

Ríbnikov (1987, p. 447) alerta-nos ao afirmar que:

Los axiomas de la geometría, como en general los axiomas matemáticos, no son verdades apriorísticas eternas. El criterio de su veracidad yace en la práctica; en cada etapa del desarrollo

histórico de las matemáticas se aclara su relatividad. El gran papel del método axiomático no puede cubrir el origen real de los axiomas, no puede servir de base para sus valoraciones idealistas. Según la justa expresión de F. Engels, “... la deducción de las magnitudes matemáticas una de otras, al parecer apriorísticas, demuestra no su procedencia apriorística, sino sólo su interrelación racional”.

O autor fala da natureza objetiva do conhecimento matemático e seu desenvolvimento ao longo da história da humanidade, bem como a sua relação entre as estruturas lógicas e os processos históricos de produção desse conhecimento. A análise do processo histórico ajuda na compreensão do desenvolvimento do objeto da Geometria e apresenta evidências a respeito da sua categoria ontológica central.

No ano 500 a. n. e.⁴, Heródoto⁵, ao escrever sobre a origem da Geometria, cita o exemplo dos tributos a serem pagos pelos donos de terras de acordo com o seu tamanho na região do rio Nilo, por volta de 2000 a. n. e. Caraça (1951, p. 32, grifos do autor) assim descreve a passagem de Heródoto:

Heródoto – *o pai da História* – historiador grego que viveu no século V antes de Cristo, ao fazer a história dos Egípcios no livro II (Euterpe) das suas *Histórias*, refere-se deste modo às origens da Geometria: *Disseram-me que este rei (Sesóstris⁶) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só*

⁴ Ao invés de utilizarmos as expressões “antes de Cristo”, utilizaremos a abreviação “a. n. e.” para nos referirmos a “antes de nossa era”.

⁵ Heródoto de Halicarnaso (484 a. n. e. – 425 a. n. e.) foi um geógrafo e historiador grego.

⁶ Sesóstris I (século XX a. n. e.) foi o segundo faraó da XII dinastia egípcia.

fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos.

Essa referência à origem da Geometria também aparece em Boyer (1974) na epígrafe do segundo capítulo, em que o autor trata da história da Matemática no Egito. Nessa citação é possível localizar um momento importante no desenvolvimento da Geometria e sua relação com a propriedade privada: “As relações do indivíduo para com o Estado, com base na propriedade, impuseram cedo (Sesóstris viveu provavelmente há perto de 4.000 anos) a necessidade da expressão numérica da medição [...]” (CARAÇA, 1951, p. 32). Como está exposto, esse trecho de Heródoto reforça a ideia corrente de que a Geometria nasceu às margens do Nilo, pela necessidade emergente de medições das terras. Porém, esse é um momento singular do desenvolvimento da Geometria e não especificamente a sua gênese, como veremos na sequência.

Ainda sobre o desenvolvimento da Geometria ligado às medições de terras, Aleksandrov (1991a, p. 39) cita um escrito de Eudemo de Rodas⁷:

Sobre esta cuestión escribió el sabio griego Eudemo de Rodas⁸ lo siguiente: “La geometría fue descubierta por los egipcios como resultado de las medidas de sus tierras, y estas medidas eran necesarias debido a las inundaciones del Nilo, que constantemente borraban las fronteras”.

A Geometria, ligada normalmente às medições de terras, inclusive em sua etimologia (geo = terra e metria = medida), contribui na constituição de sua base genética. Porém, as medições de terras são uma especificidade do desenvolvimento dessa ciência, que revelam um elemento particular na satisfação das necessidades humanas: a propriedade privada. Tal vinculação se apresenta no contexto histórico do Egito Antigo, em que as relações comerciais e territoriais ganhavam força, ainda distante da propriedade privada na forma atual.

⁷ Eudemo de Rodas (350 a. n. e. – 290 a. n. e.) foi um filósofo, matemático e escritor grego.

⁸ Em espanhol, a grafia é Rodas.

A história mostra indícios de um desenvolvimento da gênese do conhecimento geométrico para além das medições exclusivas de terras. Segundo Struik (1989, p. 33-35):

Tornou-se também necessário medir o comprimento ou o volume de certos objetos. Os padrões eram grosseiros e, muitas vezes, provinham de partes do corpo humano, o que deu origem a unidade de medida como o dedo, o pé e a mão. Os nomes de “vara”, “braça” e “cúbito” recordam também este costume. Quando se construía casas, como, por exemplo, as dos agricultores indianos ou as casas de madeira dos habitantes da Europa central, estabeleciam-se regras para a construção ser feita segundo linhas retas e ângulos retos. A palavra “reta” relaciona-se com “esticar”, indicando operações com uma corda; a palavra “linha” relaciona-se com o “linho”, o que mostra uma certa ligação entre a tecelagem e as origens da geometria. Isto foi um dos modos pelos quais o interesse na medição se desenvolveu.

Nesse contexto, a medida aparece como a categoria central que caracteriza o objeto da Geometria. Naquele momento histórico, as medidas eram grosseiras e, por sua vez, não expressavam com precisão a relação entre as grandezas. Todavia, esboçavam uma relação aritmética e geométrica, que possibilitavam a elaboração de um conjunto de manifestações singulares para a satisfação de necessidades imediatas.

A manufatura dos objetos produzidos pelo homem começa a dar formas mais regulares aos objetos naturais. Suas construções, conforme cita Struik (1989), já seguem padrões de linhas e ângulos retos e evidenciam os princípios da arquitetura primitiva. Aleksandrov (1991a, p. 38) ilustra essa questão:

[...] En la naturaleza nuestros ojos raramente tropiezan con líneas auténticamente rectas, ni con triángulos o cuadrados perfectos, y es evidente que la principal razón por la cual el hombre logro gradualmente concebir estas figuras es la de que su observación de la naturaleza era activa, en el sentido de que para satisfacer sus necesidades

práticas manufacturava objetos cada vez más regulares en su forma.

Essas necessidades, surgidas no decurso da história da humanidade, eram as mais variadas e abriram uma gama de possibilidades de desenvolvimento do conhecimento geométrico. Assim, a adaptação ativa do homem em relação à natureza possibilitou um aperfeiçoamento cada vez mais ampliado dos meios de subsistência, bem como o conseqüente e necessário conhecimento, deles decorrentes. A Geometria – inicialmente como um conjunto de manifestações singulares – ganha, aos poucos, contornos mais abstratos e começa a se constituir como ciência, com objeto e método próprio. Nesse sentido, Aleksandrov (1991a, p. 39) expõe mais exemplos:

Uno de los textos egipcios más antiguos es anterior al año 1700 a. C.; se trata de un manual de instrucción para “secretarios” (funcionarios reales), escrito por un tal de Ahmes⁹, y contiene una colección de problemas sobre cálculo de capacidades de contenedores y almanaces, de áreas de porciones de tierra, de dimensiones de terraplenes, etc.

Struik (1989, p. 35) acrescenta:

O homem neolítico também revelou um agudo sentido para os padrões geométricos. A cozedura e a pintura de cerâmica, o entrelaçamento de juncos, a tecelagem de cestos e têxteis e, mais tarde, o fabrico de metais conduziram à noção de plano e a relações espaciais. As formas da dança devem ter desempenhado um papel importante. A ornamentação neolítica refulgia com a manifestação da congruência, da simetria e da semelhança.

Nesse período ainda não existia uma sistematização do conhecimento geométrico. Até o século V a. n. e., a Geometria se desenvolveu com a compreensão de um conjunto de regras isoladas para

⁹ Escriba que copiou um papiro conhecido atualmente como Papiro Rhind. O papiro tem esse nome, pois foi comprado no Egito em 1858 por Henry Rhind. O papiro encontra-se atualmente no Museu Britânico, em Londres.

satisfazer necessidades diárias dos homens, “al igual que la aritmética en aquel tiempo, la geometría era fundamentalmente una colección de reglas deducidas de la experiencia” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 39-40). Somente por volta do século V a. n. e. surgem as primeiras sistematizações teóricas. As medidas adquirem maior precisão, o que indica uma sistematização mais abstrata do objeto da Geometria.

Mais tarde, no século III a. n. e., surge a pioneira e ímpar sistematização de Euclides¹⁰, que perdurará intocável até meados do século XIX, quando a Geometria sofre uma revolução teórica com a culminação do desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas, iniciada antes de Bolyai¹¹, Gauss¹², Lobachevski¹³ e Riemann¹⁴. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 40):

Es bien sabido que las exposiciones sistemáticas de la geometría aparecieron en Grecia ya en el siglo V a. C., pero no se han conservado por la razón obvia de que todas fueron suplantadas por los “Elementos” de Euclides (siglo III a. C.). En este trabajo, la geometría se presentó como un sistema tan bien construido que sus fundamentos no sufrieron ninguna alteración esencial hasta llegar a N. I. Lobachevski, más de dos mil años después.

¹⁰ Euclides de Alexandria (330 a. n. e. – 260 a. n. e.) foi um dos mais importantes matemáticos da história, escritor do texto *Elementos*, que influenciou a Matemática por cerca de vinte séculos.

¹¹ János Bolyai* (1802 – 1860) foi um matemático húngaro conhecido por seus trabalhos relacionados à Geometria não-euclidiana.

*Seu pai, Farkas Bolyai, (1775 – 1856) também se dedicou à Geometria, porém o destaque para o desenvolvimento de uma Geometria não-euclidiana é de János.

¹² Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) foi um matemático alemão, talvez o primeiro a desenvolver consequentemente uma Geometria não-euclidiana.

¹³ Nikolai Ivanovich Lobachevski (1792 – 1856) foi um matemático russo que levou mais a fundo o desenvolvimento de uma Geometria não-euclidiana.

¹⁴ Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) foi um matemático alemão que se destacou com contribuições expressivas em Análise e Geometria diferencial. A partir de Bolyai, Gauss, Lobachevski e Riemann, a ciência experimentou uma revolução, sobretudo com o desenvolvimento da teoria da relatividade no início do século XX.

A sistematização de Euclides coloca o conhecimento geométrico num patamar de ciência lógico-dedutiva e independente da realidade física. Ou seja, em pouco tempo o conhecimento geométrico passa de um conjunto de manifestações singulares, utilizadas na resolução de problemas imediatos, para uma ciência cuja importância é sua coerência lógica, mesmo contrariando a realidade física. Inclusive, tal Geometria foi a base da filosofia kantiana. Essa contradição – entre a estrutura lógica da Geometria de Euclides e a realidade física – não podia ser compreendida naquele momento histórico, pois o desenvolvimento tecnológico e as bases científicas e filosóficas não estavam suficientemente desenvolvidos.

Naquele novo momento histórico em que se encontrava o desenvolvimento da ciência, em particular da Matemática, já era possível discernir com mais clareza o objeto da Geometria e sua relação com as outras áreas da Matemática e outras ciências, por exemplo, a Física. A relação com esta última e entre seus respectivos objetos, aponta elementos de compreensão do conhecimento geométrico, em especial a métrica da extensão das formações materiais particulares. Por sua vez, estabelece as relações entre os corpos físicos e as formas geométricas, “[...] pero un cuerpo geométrico no es sino un cuerpo real considerado unicamente desde el punto de vista de su forma espacial y haciendo abstracción de todas sus otras propiedades [...]” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 41).

Nessa direção, segundo Ovtchinnikov (1955, p. 249):

A análise das formas espaciais constitui o conteúdo da geometria, que considera as relações espaciais entre as coisas, abstraindo-se das próprias coisas. A geometria, como ciência que estuda as relações espaciais das coisas do mundo exterior, resulta de um prolongado trabalho de abstração do pensamento humano.

A análise das formas espaciais e da relação entre os corpos físicos, considerados abstratamente, constitui o objeto da Geometria. Porém, a Geometria se refere inclusive à abstração da extensão espacial, ou seja, a abstração do espaço: “Una figura geométrica es un concepto todavía más general, puesto que en este caso es posible abstraer también la extensión espacial; así una superficie tiene sólo dos dimensiones, una línea sólo una dimensión, y un punto ninguna” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 41).

A título de exemplificação, recorremos a alguns questionamentos referentes aos conceitos elementares da Geometria. Partimos de uma indagação: O quadrado existe na realidade física? Um leigo responderia prontamente que sim e poderia exemplificar com um azulejo, uma folha de papel etc. Alguém um pouco mais avisado ou um matemático responderia que não, pois o quadrado, por se tratar de uma forma de duas dimensões, não teria existência na realidade física, e os exemplos citados são tridimensionais. Diante dessas duas possíveis respostas, há uma pergunta que precede a primeira: O que é o quadrado? Se recorrermos às construções matemáticas, definimo-lo como um paralelogramo, ou seja, quadrilátero convexo que possui dois pares de retas paralelas, todos os ângulos internos retos, as suas diagonais congruentes e perpendiculares entre si e os seus lados congruentes. O polígono é uma representação e, para tal, se utilizam recursos físicos. Então, a própria representação também é tridimensional. O ponto se torna um círculo pequeno e a reta um retângulo muito estreito (ou outras figuras, isso depende do instrumento utilizado na marcação). Mesmo assim, a própria representação que se torna um círculo ou um retângulo, por sua vez, também não é bidimensional, pois está expressa, em última instância, tridimensionalmente. A representação feita por meio digital ou apenas em pensamento, mesmo não sendo física, estabelece uma dimensionalidade expressa tridimensionalmente. Nesse caso, o que está em evidência é a representação do conceito geométrico. No entanto, o que nos interessa nessa discussão é a diferença entre o conceito geométrico e os objetos físicos, ou seja, entre o objeto da Geometria e a realidade física, entre o conceito e o ser refletido.

Para tal discussão, é necessária a compreensão, como veremos no terceiro capítulo, dos processos de reflexo consciente e, também, da categoria matéria, bem como suas formas fundamentais de existência, quais sejam: o movimento, o tempo e o espaço. Aleksandrov (1991b) expressa essa relação dialética entre o conceito e o ser refletido, a relação entre o universal e o singular:

[...] una línea recta no existe por sí misma, sino solamente como una cuerda tensa, o como la arista de una regla, o como un rayo de luz. Una línea recta, “una línea como ésta”, es una abstracción que refleja la propiedad común de esas líneas materiales del mismo modo que, por ejemplo, la “casa en sí misma” es una abstracción que refleja las propiedades comunes de todas las

casas; la “casa en sí misma” no existe fuera o independientemente de las diversas casas reales. (ALEKSANDROV, 1991b, p. 217).

O autor não afirma que a linha é um reflexo mecânico da realidade física, direto à consciência. Ao contrário, ele estabelece uma relação do conhecimento geométrico com a realidade física, o primeiro como um reflexo da segunda. Ou seja, as relações entre os corpos singulares, suas propriedades particulares e sua universalidade em forma de conceitos.

Similarmente ao exemplo anterior, Lukács (2012, p. 65) afirma:

Uma linha, [...] tem apenas uma dimensão, uma superfície, duas etc.. Isso é algo que não pode existir na realidade física objetiva; no espelhamento é efetuada uma abstração razoável, e sua razoabilidade revela-se precisamente no fato de que prescinde por completo de qualidades e relações reais e objetivas das coisas reais.

Assim, o quadrado é um paralelogramo..., como definimos antes, ou a região delimitada por esses segmentos de retas? Se esta última opção for verdadeira, que região é essa que não possui dimensionalidade e, por sua vez, prescindindo de sua espacialidade física, é entendida como algo constitutivo da realidade física? Tais questionamentos compõem uma reflexão teórica necessária à compreensão do objeto da Geometria, exemplificado com o quadrado, mas que podem ser estendidos aos seus outros conceitos, bem como à Matemática em geral.

Diante do exposto até o momento, entendemos que uma análise ontológica exige um estudo da gênese do objeto da Geometria, bem como do seu desenvolvimento histórico. “La práctica nos enseña que todo el orden lógico de cualquier ciencia, su estructura, interrelación e incluso la existencia de ramas independientes no constituyen algo inmutable. Ellas son fruto del desarrollo histórico” (RÍBNIKOV, 1987, p. 18).

Os nexos conceituais¹⁵ também são elementos norteadores nesse processo de análise e no estabelecimento da inter-relação com outros ramos da Matemática e com as demais ciências. A compreensão da

¹⁵ No que diz respeito aos nexos conceituais da Álgebra, por exemplo, encontramos referência em Panossian (2014).

estrutura do conhecimento geométrico refina seu objeto e amplia seu campo de aplicações. Dessa forma, compreender a gênese, os nexos e a estrutura do objeto da Geometria torna-se importante para desenvolver o conhecimento de sua função no entendimento da realidade e sua necessária transformação.

Uma abordagem lógico-histórica do conhecimento geométrico contribui para uma análise que afasta as concepções idealistas deformadoras da compreensão de seu objeto, bem como define o lugar da Geometria como ciência e amplia seu desenvolvimento. Como diz Ríbnikov (1987, p. 18), “el mismo desarrollo lógico de las ideas sobre una ciencia no es otra cosa que el reflejo del proceso histórico en forma consecuyente, abstracta y teórica”. Essas duas categorias, o lógico e o histórico, como uma unidade dialética, estabelecem os vínculos metodológicos necessários para perscrutar o objeto de pesquisa.

Lukács (2012) fala sobre os procedimentos – histórico (método histórico) e o abstrativo-sistematizante (método lógico) – e destaca o dualismo entre eles no tratamento usual da economia política burguesa. Segundo o autor, “tão só uma ininterrupta e vigilante crítica ontológica de tudo o que é reconhecido como fato ou conexão, como processo ou lei, é que pode reconstruir no pensamento a verdadeira inteligibilidade dos fenômenos” (LUKÁCS, 2012, p. 306).

Em *O capital*, Marx (2011) faz uso do método lógico de análise. Segundo Rosental e Straks (1958, p. 347):

Por método lógico de investigación, el marxismo entiende el estudio de los fenómenos en su estado más “puro”, en forma generalizada, a diferencia del método histórico, que refleja la trayectoria histórica de los fenómenos y acontecimientos en todas sus manifestaciones concretas. [...] Pero, al mismo tiempo, no se les puede contraponer absolutamente el uno al otro, pues, como señala Engels, en esencia el método lógico es “el método histórico mismo, pero liberado éste de su forma histórica...”.

O método lógico, utilizado por Marx (2011), não é uma contraposição ao método histórico, mas um viés metodológico de seu objetivo: analisar o capital na forma geral, sem descrever sua singularidade em um determinado país. Ao contrário da concepção idealista, o autor não exclui a crítica ontológica, ao utilizar o método

lógico. Isso porque sua compreensão da realidade – natural e social – implica a análise das bases ontológicas de sua gênese e da processualidade de seu desenvolvimento.

É na perspectiva da dialética entre o lógico e o histórico que se fundamenta o desenvolvimento do objeto da Geometria, pois engendram as possibilidades de conhecimento da realidade física. Um exemplo clássico é a demonstração, feita por Lobachevski no século XIX, da possibilidade de uma Geometria não-euclidiana, que propõe as novas ideias e sua relação com a realidade. Preliminarmente, a demonstração lógica se mostrou sem contradições, porém sem um modelo na realidade física, o que acarretou descrédito à sua teoria. Vê-se que a lógica geométrica se adiantou às necessidades práticas da vida humana e, ao mesmo tempo, surgiu delas, pois o momento histórico vivido no século XIX estabelecia as condições objetivas para seu desenvolvimento: “Lobachevski prudentemente la llamó ‘imaginaria’, ya que no encontró un modelo real para ella. Pero vio claramente su posibilidad lógica” (ALEKSANDROV, 1991b, p. 129). Mais tarde, sem essa pretensão inicial, sua Geometria não-euclidiana se corroborou na realidade física, ou seja, “esta brillante idea de Lobachevski ha sido completamente corroborada por una nueva rama de la física, la teoría de la relatividad” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 129).

Esse movimento histórico do desenvolvimento lógico do objeto da Geometria e suas respectivas conexões indissociáveis com a Física resultam em algumas indagações: qual a relação entre o objeto da Geometria e o da Física, bem como entre elas propriamente dito? As formas espaciais e as relações entre os corpos físicos integram o objeto da Física, como também da astronomia, da cristalografia etc., porém tornam-se objeto da Geometria quando são considerados abstratamente e destituídos de todas as outras propriedades.

Assim, qual a relação entre o objeto da Geometria e a própria realidade física? Tal vinculação integra nosso tema de pesquisa, qual seja: a constituição do objeto da Geometria no processo de abstração necessário à compreensão dessa realidade. Para tanto, adotamos o pressuposto de que esse objeto se encontra na mediação entre a realidade física e as formas de reflexo, ou seja, na práxis humana do conhecimento. Tal mediação também ocorre entre suas respectivas ciências, a Geometria e a Física (esta discussão é apresentada no quinto capítulo). Nesse caso, sem a práxis humana não existe o objeto da Geometria e, tampouco, a respectiva ciência. A Física também não existe sem a práxis humana, porém seu objeto, ao contrário do objeto da Geometria, existe independentemente da práxis humana, pois compõe a

própria realidade física. Diante do exposto, a pergunta norteadora da pesquisa se traduz no seguinte questionamento: *o objeto da Geometria é uma forma a priori da sensibilidade humana ou é inerente à realidade física?*

Para iniciar a compreensão, temos como referência a definição, anunciada anteriormente, do objeto da Geometria como sendo “las formas espaciales, y las relaciones de los cuerpos reales, eliminando de ellos las restantes propiedades, y considerándolos desde un punto de vista puramente abstracto” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 41). Admitimos, também, que este objeto deve ser continuamente aprofundado para que não se cristalice e se torne um obstáculo para o desenvolvimento posterior da Geometria. Para tal aprofundamento, faz-se necessária a compreensão das bases onto-metodológicas das categorias que compõe a análise de nosso objeto de pesquisa.

O caráter estável de determinado objeto obstaculiza sua compreensão, pois não revela de imediato sua gênese e seu processo de desenvolvimento. Lukács (2012, p. 294) destaca o “problema ontológico da diferença, oposição e da conexão entre fenômeno e essência”. Segundo ele, “na vida cotidiana, os fenômenos frequentemente ocultam a essência do seu próprio ser em lugar de iluminá-la” (LUKÁCS, 2012, p. 294). Para Marx (2011), toda a ciência seria supérflua se a forma fenomênica e a essência das coisas coincidissem diretamente. Este enunciado de Marx (2011), segundo Lukács (2012, p. 295):

Em si e para si [...] vale em sentido ontológico geral, ou seja, refere-se tanto à natureza quanto a sociedade. Todavia, [...] a relação entre fenômeno e essência no ser social, por causa de sua indissolúvel relação com a práxis, revela traços novos, novas determinações. Cito aqui apenas um exemplo: parte importante dessa relação é que, em todo processo – relativamente – acabado, o resultado faz desaparecer, de imediato, o processo de sua própria gênese. Em inúmeros casos, as problematizações científicas nascem quando o pensamento abandona a ideia do caráter acabado imediato, aparentemente definido, do produto, e o torna visível apenas em sua processualidade – não perceptível imediatamente no nível fenomênico.

Lukács (2012) enfatiza a importância desta constatação filosófica de Marx (2011) para a ontologia do ser social, pois ela cumpre “a função

de crítica ontológica a algumas falsas representações, ou seja, tem por meta despertar a consciência científica no intuito de restaurar no pensamento a realidade autêntica, existente em si” (LUKÁCS, 2012, p. 295). Abandonar o caráter estático da compreensão corrente do objeto da Geometria constituiu parte de nosso processo de problematização, além de modificar o patamar das perguntas.

Na mesma direção, Davýdov (1982, p. 346) afirma:

Hemos de tener en cuenta que la esencia de una cosa puede ser revelada sólo al examinar el proceso de su desarrollo. Existe sólo en el tránsito a los fenómenos. En este plano está aceptado caracterizar lo esencial como mediatizado e intrínseco, como base de los fenómenos, y a éstos, como la expresión directa y externa de la esencia.

O autor faz essa afirmação no âmbito do seu estudo sobre a ascensão do abstrato ao concreto no processo de conhecimento. Ele trata da questão da redução do concreto ao abstrato e da ascensão do abstrato ao concreto no desenvolvimento do pensamento teórico. Por sua vez, destaca que “aunque ambos procesos (‘reducción’ y ‘ascensión’) se hallan unidos, el proceso rector y que expresa la naturaleza del pensamiento teórico es la **ascensión**” (DAVÝDOV, 1982, p. 338, grifo do autor).

Nesse contexto, o processo de investigação de um determinado objeto pressupõe, para o conhecimento científico da realidade, o desenvolvimento do pensamento teórico, que tem como tarefa elaborar “en forma de concepto los datos de la contemplación y la representación y reproducir así en todas sus facetas el sistema de conexiones internas que engendran la entidad concreta dada y revelar su esencia” (DAVÝDOV, 1982, p. 332).

No entanto, ressaltamos que o pensamento teórico é um poderoso instrumento de transformação natural e social, porém não é capaz, por si só, de transformar a realidade. A determinação continua sendo a prática objetiva, as relações sociais de produção da vida humana, contemporaneamente, as relações sociais de produção do tipo capitalista. Segundo Rosental e Straks (1958, p. 324):

Los creadores de esa concepción [a nova concepção de mundo desenvolvida pelos criadores do marxismo] no consideraban a teoría, el conocimiento teórico, como una fuerza que se

bastase a sí misma, sino como un poderoso instrumento de actividade práctica, transformación de la naturaleza y de la sociedad.

Destacamos essa questão, pois o desenvolvimento do pensamento teórico é imprescindível, porém insuficiente para que a humanidade supere problemas como, por exemplo, o estranhamento¹⁶. A humanidade desenvolveu – e está desenvolvendo cada vez mais amplamente – o conceito teórico dos objetos naturais e, também, daqueles produzidos em sua atividade. No entanto, o acesso a esse alto grau de desenvolvimento a cada ser humano, na sociedade contemporânea, é limitado. Mas, o fato de a maioria das pessoas não terem acesso à oportunidade de formação do pensamento teórico não cerceia por completo a objetivação do conhecimento científico que lhe é peculiar. Ressaltamos também que o desenvolvimento do pensamento teórico garante e, ao mesmo tempo, não garante as transformações para a humanidade. Por exemplo, mesmo que a maioria da população não compreenda teoricamente o conceito de árvore, madeira ou celulose, isso não impede que a humanidade fabrique instrumentos provenientes desses materiais com o mais alto nível de desenvolvimento tecnológico. Ao mesmo tempo, por mais que as pessoas compreendam teoricamente o conceito de capital, não é garantia de superação das relações de exploração que ele produz, bem como do seu estranhamento.

Ao tratar do desenvolvimento do pensamento teórico na perspectiva da dialética materialista, Davýdov (1982) evidencia as categorias lógico e histórico, a qual nos referimos anteriormente, bem como as categorias abstrato e concreto, universal, particular e singular. Nesse sentido, Kopnin (1978, p. 84-85), ao analisar a lógica formal e a lógica dialética, afirma:

Para o marxismo, o lógico (movimento do pensamento) é o reflexo do histórico (movimento dos fenômenos da realidade objetiva). Para representar a dialética objetiva de modo pleno e profundo, as formas de pensamento devem, por si mesmas, ser dialéticas – móveis, flexíveis, inter-

¹⁶ Há diferença entre as categorias alienação (Entäußerung) e estranhamento (Entfremdung). Para uma compreensão das referidas categorias, conferir Lukács (2013), em especial o quarto capítulo que trata especificamente do estranhamento.

relacionadas. [...] A lógica dialética toma por base da solução desse problema [a relação entre as formas de pensamento na lógica formal e na lógica dialética] o princípio da unidade entre o abstrato e o concreto no pensamento teórico-científico. Esse princípio ocupa lugar especial na lógica dialética; nele se baseia a construção de todo o sistema da lógica dialética: o desenvolvimento dos juízos, conceitos, deduções, teorias científicas e hipóteses não é senão um processo de ascensão do abstrato ao concreto. [...] Por último, a lógica dialética analisa a estrutura das formas de pensamento, dando ênfase principal à dialética da inter-relação entre singular, particular e universal nessas formas enquanto reflexo das relações do mundo objetivo.

O movimento do objeto, bem como do conhecimento desse objeto, expressa-se dialeticamente no seu desenvolvimento objetivo e subjetivo. Um avança sobre o outro em cada momento histórico, às vezes andam juntos, criam caminhos contrários, retrocedem e constituem a dialética do movimento da realidade. Há momentos em que as necessidades objetivas conduzem o homem a produzir sua satisfação, que requer conhecimento, seja na prática imediata ou em estudos aplicados. Porém, há momentos em que o conhecimento avança além das necessidades imediatas e o homem o produz sem um maior interesse de aplicação, mas por interesse do próprio conhecimento. As Geometrias não-euclidianas são um exemplo desse movimento, como veremos adiante.

Rosental e Straks (1958) também descrevem tais categorias e suas relações com o processo de conhecimento da realidade e desenvolvimento do pensamento teórico. Da mesma forma, apresentamo-las no movimento do objeto da Geometria, como forma de expressão do método dialético de análise da realidade, que envolve tanto o desenvolvimento histórico (objetivo) como o lógico (subjetivo). Nesse processo, o homem parte da realidade material, direta ou indiretamente, faz o movimento de redução do concreto ao abstrato e a posterior ascensão do abstrato ao concreto. Tais vinculações se estabelecem na materialidade das relações entre singular, particular e universal.

Segundo Rosental e Straks (1958, 325), por histórico:

Hay que entender la realidad objetiva, que existe independientemente de la consciencia, del sujeto cognoscente; la realidad que se desarrolla históricamente y se halla en un estado de cambio constante. La categoría de lo histórico refleja el carácter histórico y mutable del mundo objetivo.

Corroborando essa afirmação, vale reafirmar que Kopnin (1978, p. 183) entende por histórico “o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo”. Ele reflete o caráter primário, a base genética, o movimento da materialidade, ou seja, a esfera ontológica. O caráter secundário é o lógico, a forma de conhecimento da realidade, a esfera epistemológica: “Lo ‘lógico’ es una forma del conocimiento, el reflejo de la realidad, la copia intelectual o imagen de ella; es, asimismo, una determinada forma del movimiento del pensamiento hacia el objeto” (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 325).

A necessidade imperativa do conhecimento da realidade material é um impulso fundamental do movimento do pensamento em direção ao objeto. Ser, estar e se movimentar no tempo e no espaço é um processo ineliminável de todo ser, sobretudo quando a referência é o humano, uma vez que este último é o único que conhece a realidade circundante e sabe da existência do mundo e de si mesmo.

Uma das ciências que estabelece essas conexões espaço-temporais é a Geometria, cuja especificidade está na análise das formas espaciais e das relações entre os corpos físicos. O movimento histórico das transformações materiais do mundo cria, estabelece e muda constantemente as legalidades dessa estrutura. Ou seja, modifica continuamente a geometria da realidade física. A consciência, que é peculiar ao ser humano, é o que possibilita estabelecer as legalidades do movimento dessa transformação, bem como a lógica de sua historicidade, abstraída em forma de conceitos, juízos e deduções. A legalidade está na objetividade do movimento material, é inerente ao seu processo, porém, somente pode ser abstraída e compreendida no próprio ato do conhecimento da realidade.

O conhecimento da realidade material possibilita ao ser humano agir e transformá-la, no entanto, é o movimento histórico que determina o lógico, não o contrário. “O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade”. Assim, “o lógico é o reflexo do histórico em forma

teórica, [...] é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações” (KOPNIN, 1978, p. 183).

Lukács (2012, p. 313), ao analisar o valor como categoria ontológica central da produção social, afirma que “seria apressado considerar que existe um paralelismo absoluto, sem exceções, entre desenvolvimento histórico (ontológico) e desenvolvimento teórico, entre sucessão e derivação das categorias econômicas em geral”. Essa constatação permite a diferenciação de uma postura dialético-materialista em relação às idealistas que entendem o processo de conhecimento como o criador da realidade.

Pense-se, por exemplo, em cerca de quase dois mil anos em que os livros de Euclides imperaram com a explicação da geometria do mundo, contrariando a própria realidade. Tal contradição, constatada hoje, não era sequer percebida naquele momento histórico. Mesmo com tal contradição, essa Geometria foi efetiva na vida dos homens, pois permitiu que eles constituíssem seu mundo e, aos poucos, ela foi sendo superada, por incorporação, como um caso singular de Geometrias mais gerais. A geometria do espaço já era não-euclidiana na época de Euclides e antes mesmo de seus estudos, porém, o desenvolvimento lógico de conhecimento da realidade física se dá muito tardiamente na história dos homens e da própria matéria. A prioridade ontológica do histórico em relação ao lógico o é também temporal.

Mesmo quando o desenvolvimento lógico avança em relação ao histórico, trata-se de algo relativo, pois o conhecimento avança tendo como critério de verdade a si próprio. Quando mais tarde esse desenvolvimento se confirma na realidade material, como foi o caso das Geometrias não-euclidianas, isso mostra a capacidade humana de abstração, de movimento de pensamento sem relação direta com a materialidade. Essa capacidade só existe no ser humano e só existe como abstração, de outro modo é impossível separar do histórico sua própria lógica de movimento. Quando esse conhecimento não se confirma na realidade material, ela expressa um descaminho do pensamento, uma falsa representação dessa realidade, que pode ser efetiva e guiar a vida dos homens. Pense-se nas representações religiosas e na Geometria euclidiana, exemplos de esferas diferentes da vida, porém com similitudes idealistas bem acentuadas. Concepções idealistas, que consideram o objeto da Geometria a priori, produzem falsas representações da realidade como, por exemplo, considerar que o mundo foi criado por um ser superior com sua própria geometria (no quarto capítulo, apresentamos os traços característicos da Matemática com base nas concepções materialistas e idealistas de seu objeto).

Nesse sentido, vale o alerta de Marx (2003), segundo o qual:

[...] Hegel caiu na ilusão de conceber o real como resultado do pensamento, que se concentra em si mesmo, se aprofunda em si mesmo e se movimenta por si mesmo, enquanto o método que consiste em elevar-se do abstrato ao concreto é para o pensamento precisamente a maneira de se apropriar do concreto, de o reproduzir como concreto espiritual. Mas este não é de modo nenhum o processo da gênese do próprio concreto. (MARX, 2003, p. 248).

A construção lógica do pensamento que se processa na ascensão do abstrato ao concreto é exclusiva à consciência. Kopnin (1978, p. 156) corrobora a citação de Marx (2003) ao afirmar que “enquanto o concreto é para Hegel o resultado da atividade do pensamento, para a lógica dialética marxista o método de ascensão do abstrato ao concreto é apenas um meio através do qual o pensamento assimila o concreto, o reproduz intelectualmente, mas nunca o cria”.

Rosental e Straks (1958, p. 331) caracterizam essas categorias no processo de conhecimento da realidade e sua relação dialética:

De la unidad de lo histórico y lo lógico se deduce también la interdependencia entre ambas categorías en el proceso del conocimiento de la realidad efectiva. Si lo lógico se halla en unidad con lo histórico, el curso lógico del conocimiento debe reflejar el curso histórico que sigue estudiado en su desarrollo.

Esse curso lógico prescinde das casualidades, dos elementos que comprometem a essência do objeto analisado. Assim, essa relação entre ambas as categorias não é amorfa, o lógico não é um reflexo mecânico do histórico, não se reduz à reprodução de todos os detalhes do objeto, dos seus avanços e retrocessos: “El reflejo lógico del proceso histórico, para descubrir el hilo conductor del desarrollo, prescinde de estos zigzags y retrocesos temporales, que se apartan de la tendencia general del movimiento” (ROSENTAL; STRAKS, 1958, p. 325). É a análise dessa dinâmica do desenvolvimento histórico que o pensamento dialético organiza de forma corrigida, como conhecimento sistematizado, a compreensão de determinado objeto. De acordo com

Rosental e Straks (1958, p. 341), “Engels llamaba reflejo ‘corregido’ al reflejo lógico del desarrollo histórico; con ello, quería decir que este reflejo no sigue pasivamente el curso histórico del desarrollo de los fenómenos, sino que esclarece a necesidad de este desarrollo, captando lo más importante y esencial de él”.

O movimento dialético dessas categorias, no processo de conhecimento, possibilita a compreensão da realidade em seus nexos, relações internas e gênese. Assim, estabelece uma vinculação com outras categorias e potencializa essa compreensão. Isso porque o lógico “reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 186). No processo de conhecimento de um objeto, a análise dialética do lógico e histórico faz parte do desenvolvimento do pensamento teórico, que pressupõe o movimento de ascensão do abstrato ao concreto.

A ascensão do abstrato ao concreto é um processo **do** pensamento na análise da realidade concreta, “[...] é um movimento que atua nos conceitos, no elemento da abstração. A ascensão do abstrato ao concreto não é uma passagem de um plano (sensível) para outro plano (racional): é um movimento **no** pensamento e **do** pensamento” (KOSIK, 1976, p. 30, grifos nosso). Assim, o pressuposto é o de que o conhecimento do objeto da Geometria não é um reflexo mecânico do plano sensível ao racional, tampouco é um movimento do pensamento puro em direção à própria realidade. Quando o autor fala em “movimento **no** e **do** pensamento”, quer frisar o caráter de processualidade que acontece no conhecimento da realidade material e não nela própria.

Marx (2003, p. 247-248), em seu texto “Método da economia política”, ao exemplificar o estudo de um determinado país desde o ponto de vista da economia política, afirma:

Se começássemos pela população teríamos uma visão caótica do todo, e através de uma determinação mais precisa, através de uma análise, chegaríamos a conceitos cada vez mais simples; do concreto figurado passaríamos a abstrações cada vez mais delicadas até atingirmos as determinações mais simples. Partindo daqui, seria necessário caminhar em sentido contrário até chegar finalmente de novo à população, que não seria, desta vez, a representação caótica de um todo, mas uma rica totalidade de determinações e de relações numerosas. [...] O concreto é concreto por ser a síntese de muitas determinações, logo,

unidade da diversidade. É por isso que ele é para o pensamento um processo de síntese, um resultado, e não um ponto de partida, apesar de ser o verdadeiro ponto de partida e, portanto, igualmente o ponto de partida da observação imediata e da representação.

O concreto atinge esse nível, porque é síntese de múltiplas determinações, ou seja, é independente do processo de conhecimento, está dado no seu próprio processo de constituição. Esse processo não é o mesmo que se dá na consciência ao conhecer a realidade material, pois é um reflexo do seu movimento. Por isso, Marx (2003) afirma que o concreto é um processo de síntese, um resultado e não o ponto de partida, ele é a própria realidade material. Quando o autor afirma, na sequência, que o concreto é também o ponto de partida, ele refere-se ao concreto que é realidade material de onde partem os reflexos na consciência.

Outro processo é o conhecimento dessa realidade material, em que nossas sensações e percepções partem dela, inevitavelmente. O concreto como síntese de múltiplas determinações é próprio a essa realidade. Em outros termos, constitui um relativo concreto caótico que caminha para um relativo concreto pensado.

Explicamos: a realidade existe como síntese de múltiplas determinações, não como elementos abstratos do processo de conhecimento. O movimento de reflexo como forma de conhecimento é próprio ao indivíduo, é uma atividade do pensamento. Assim, as primeiras sensações e percepções do indivíduo, em relação ao objeto, representam um relativo concreto caótico apenas no pensamento, pois na realidade material, o concreto continua síntese de múltiplas determinações. Na sequência (e esse movimento não ocorre linearmente, é um processo dialético e envolve mútuas relações intrínsecas), surgem as abstrações que são próprias à consciência, não existem fora dela. Elas promovem a possibilidade de o indivíduo elaborar um conhecimento mais profundo e aproximado da essência desse objeto. Quando alcança esse patamar, dizemos que ele chegou ao nível de relativo concreto pensado.

Assim, o concreto ponto de partida do conhecimento é qualitativa e quantitativamente diferente do ponto de chegada. Em contrapartida, o concreto como síntese de múltiplas determinações, ou seja, a própria realidade material, é o mesmo no transcurso do processo de

conhecimento. Claro está que é o mesmo nos limites de seu movimento ineliminável que constitui a matéria.

Mas por que nos reportamos à relatividade dos concretos caótico e pensado? Referimo-nos a esses termos porque não há uma linha divisória fixa do conhecimento que estabeleça os limites entre o desconhecido e o completamente conhecido. O processo de conhecimento é infinito, assim como matéria em movimento, traduz a dialética entre o concreto e o abstrato e persistirá enquanto existir o ser humano em constante busca de conhecer a realidade material.

Se partíssemos da forma espacial na realidade física – parafraseando Marx (2003) – na análise do objeto da Geometria, teríamos uma visão caótica do todo. Porém, se o referencial inicial é a forma geométrica pura, sem a relação métrica entre as grandezas físicas, teríamos um pseudo-conhecimento geométrico. No entanto, no primeiro caso teríamos um concreto imediato, que possibilitaria uma análise mais precisa dessas formas e as relações entre os corpos materiais. A partir daí, podemos determinar as abstrações necessárias que estabelecem as relações entre as formas singulares, suas propriedades particulares e aquilo que os une universalmente, o conceito geométrico. O concreto ponto de chegada **do** pensamento é qualitativamente superior, pois possui uma rica totalidade de determinações na compreensão do conhecimento geométrico. Sua superioridade, em relação ao concreto ponto de partida, está apenas **no próprio** pensamento, pois a coisa em-si é a síntese de seu próprio processo de constituição, é concreto independentemente do ser cognoscente. Essa relação dialética entre concreto e abstrato é elemento basilar na resolução da questão fundamental da filosofia, a relação entre o ser e a consciência. Esta e o conhecimento da realidade também são concretos, entretanto, compõem a realidade material em forma de reflexo. Intervém também o abstrato que, por sua vez, não existe fora da consciência. Ou seja, o concreto possui prioridade ontológica em relação ao abstrato.

De acordo com Davýdov (1982, p. 332):

Hacer abstracción quiere decir hallar dichas propiedades generales y desglosarlas mentalmente de las demás. Luego puede operarse sólo con las propiedades abstraídas sin la representación plena del objeto en la integridad de sus propiedades. Está claro que el contenido de esa abstracción no existe en la realidad. En ésta el atributo no puede separarse el objeto mismo como portador (esto es posible “sólo en la abstracción”).

Com base nas palavras de Davýdov (1982), podemos afirmar que, para Marx (2003), a produção em geral é uma abstração, pois não pode existir sem suas singularidades. As abstrações refletem os aspectos essenciais próprios de cada objeto singular. O objeto da Geometria é concreto por expressar uma síntese de múltiplas determinações. Contudo, existe apenas como reflexo subjetivo, isto é, não é constitutivo da realidade física. Ao tratar das formas espaciais abstratamente, tal objeto elimina as outras propriedades do espaço e dos corpos físicos. As outras propriedades compõem o objeto de ciências como a Física, por exemplo. A geometria das relações espaciais de nosso mundo é uma objetividade material dada na constituição das próprias coisas materiais. No entanto, de modo que o conhecimento geométrico não é outra coisa senão uma abstração, que só existe quando alienamos as formas espaciais de todas as outras propriedades da matéria. O conteúdo dessa abstração não existe na realidade física, pois é um movimento **no** e **do** pensamento. Na realidade física, é impossível separar as formas das coisas físicas, tampouco das relações existentes entre elas.

Nesse sentido, ao compreender a lei geral de determinado objeto, o pensamento cria um concreto pensado mais concreto do que se recorresse somente à sua manifestação imediata: “Al destacar el carácter dialéctico de lo concreto, Engels anunció la siguiente tesis: [...] ‘La ley general del cambio de forma del movimiento es mucho más concreta que cada ejemplo ‘concreto’ suelto del mismo’” (DAVÝDOV, 1982, p. 352-353). Ou seja, o estabelecimento da categoria central ontológica – a métrica – do objeto da Geometria cria as condições de sua compreensão a um nível superior e não reduz esse conhecimento às representações imediatas das formas físicas.

Com base em Marx (2003), Kosik (1976) descreve o método de ascensão do abstrato ao concreto no processo de conhecimento da realidade. Segundo ele:

O caminho entre a “caótica representação do todo” e “rica totalidade da multiplicidade das determinações e das relações” coincide com a compreensão da realidade. O todo não é imediatamente cognoscível para o homem, embora lhe seja dado imediatamente em forma sensível, isto é, na representação, na opinião e na experiência. Portanto, o todo é imediatamente acessível ao homem, mas é um todo caótico e

obsuro. Para que possa conhecer e compreender este todo, possa torná-lo claro e explicá-lo o homem tem de fazer um *détour*: o concreto se torna compreensível através da mediação do abstrato, o todo através da mediação da parte. (KOSIK, 1976, p. 30, grifo do autor).

Esse movimento da “caótica representação do todo” à “rica totalidade da multiplicidade das determinações e das relações”, tanto nas palavras de Kosik (1976) como nas de Marx (2003), expressa o movimento de ascensão do abstrato ao concreto e, também na composição desse processo, a redução do concreto ao abstrato, nas palavras de Davýdov (1982). Segundo este autor, “el movimiento hacia lo concreto, como finalidad principal, determina los procedimientos de la actividad mental, dentro de los cuales la ‘reducción’ interviene sólo como elemento subordinado e como medio para el logro de la mencionada finalidad” (DAVÝDOV, 1982, p. 338).

Kopnin (1978) caracteriza a redução como processo de análise e a ascensão como síntese, “na formação dos conceitos cabe enorme papel à *análise* enquanto movimento que parte do concreto, dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também à *síntese* enquanto movimento do abstrato a um novo concreto, que é o conjunto das definições abstratas” (KOPNIN, 1978, p. 191, grifos do autor). O processo teórico de redução do concreto ao abstrato e de ascensão do abstrato ao concreto não acontece linearmente. Não é, pois, composto por uma ordem hierárquica e cronológica de abstrações que surgem apenas no momento de análise, “algunas definiciones abstractas, cuyas síntesis proporciona ‘lo concreto en el pensamiento’, se forman pues en el transcurso mismo de la ascensión de lo abstracto a lo concreto” (DAVÝDOV, 1982, p. 338).

A compreensão da realidade material se desenvolve cada vez mais de acordo com o avanço da produção de conhecimento do objeto de estudo. Em conformidade com Marx (2003), Rosental e Straks (1958, p. 320) expressam o processo de conhecimento:

La ciencia se eleva de la sensación y de la percepción, que dan un conocimiento sensible-concreto del objeto a las determinaciones abstractas, en que se reflejan los aspectos esenciales del objeto. El conocimiento, sobre la base de las abstracciones, vuelve de nuevo a lo concreto, pero ya como una síntesis de innumerables determinaciones, de la multiplicidad

y diversidad de los objetos. Pero el conocimiento no se detiene en lo concreto y prosigue hacia adelante. Al analizarlo de nuevo, podemos obtener abstracciones aun más elevadas, que al ser sintetizadas nos darán un conocimiento más profundo y multilateral, es decir, más concreto, del objeto, y así sucesivamente. El conocimiento, por tanto, es por su propia esencia un proceso infinito.

Os autores reafirmam o processo de ascensão do abstrato ao concreto com o intuito de mostrar o caráter infinito e aproximativo do conhecimento da realidade material. A abstração constitui uma mediação e, portanto, é um meio, não o fim desse processo. O objeto da Geometria é essencialmente abstrato e, dessa forma, é um meio de conhecimento das relações espaciais da realidade física. As abstrações geométricas, como dito antes, não podem ser cristalizadas em axiomas independentes da realidade mesma ou regê-la, mas compreendidas no processo categorial descrito neste capítulo. As abstrações necessárias à análise desse objeto se caracterizam pelo movimento lógico-histórico, bem como pela dialética entre as categorias do universal, particular e singular.

Essas categorias analíticas refletem o mundo objetivo e são importantes para a análise da realidade. “O movimento do singular ao universal e vice-versa é sempre mediatizado pelo particular; é um membro intermediário real, tanto na realidade objetiva quanto no pensamento que a reflete de um modo aproximativamente adequado” (LUKÁCS, 1970, p. 103). Assim, elas compõem o movimento do pensamento porque constituem a realidade material refletida na consciência. Portanto, não são apenas categorias analíticas, mas da própria realidade material.

Rosental e Straks (1958, p. 257, grifos dos autores) apresentam suas compreensões sobre as categorias singular e universal:

Lo *singular* es un fenómeno u objeto determinados, un proceso o hecho que se da en la naturaleza y en la sociedad. Lo singular recibe con frecuencia en las obras filosóficas el nombre de individual. También se denomina singular o individual al concepto de un hecho o acontecimiento real único, es decir, al pensamiento que abarca este hecho singular. En la

naturaleza, lo singular se halla representado, por ejemplo, por un determinado planeta, por cierta planta o por un animal dado. Y en la historia de la sociedad lo singular es un acontecimiento concreto, por ejemplo una determinada batalla o una revolución en un país dado.

Por *universal* se entiende la comunidad que existe objetivamente de rasgos, propiedades y caracteres de los objetos y fenómenos singulares de la realidad objetiva, o también la similitud de las relaciones y nexos entre ellos. Universal es lo que se repite a través de lo múltiple, lo diverso y lo individual. También se denomina universal o general al grupo o clase de objetos, caracterizados por poseer notas comunes a todos ellos. Lo universal se refleja en el conocimiento bajo la forma de los conceptos generales, de los juicios universales y de las leyes de la ciencia.

Existe uma relação dialética entre singular e universal, condição para que ambos se objetivem em conceitos, que se dá na realidade material e expressa a dinâmica de transformação da matéria em seu movimento absoluto e repouso relativo. Quando objetos singulares sofrem mudanças quantitativas que superam os limites do seu ser, ou seja, culminam com mudanças qualitativas, suas singularidades produzem novas universalidades que, por sua vez, também se renovam. Esse é um movimento incessante da realidade material, que se reflete na consciência em forma de conceitos, juízos e deduções. Segundo Kopnin (1978, p. 205), “enquanto forma especial de juízo, o conceito não reflete apenas o universal, mas o universal em relação com o singular”. O singular e o universal refletem-se no conceito e caracterizam dinâmicas específicas na formação do pensamento. Continua o autor, “o singular existe antes de tudo na gênese do próprio conceito. Para formar um conceito, é necessário estudar uma infinidade de fenômenos, acontecimentos, coisas singulares” (KOPNIN, 1978, p. 205). A gênese do conhecimento parte do singular e ascende à universalidade pela mediação das particularidades, porém esse é o movimento do pensamento. Na realidade material, a unidade das categorias é inseparável e, portanto, tal separação só acontece nas abstrações.

Nesse sentido, Lukács (1970, p. 100-101) afirma:

O singular não existe senão em sua relação com o universal. O universal só existe no singular, através do singular. Todo singular é (de um modo ou de outro) universal. Todo universal é (partícula ou aspecto, ou essência) do singular. Todo universal abarca apenas de modo aproximado todos os objetos singulares. Todo singular faz parte incompletamente do universal etc.

A mediação entre universalidade e singularidade se expressa pela categoria da particularidade – campo de mediações –, importante ao analisar o movimento do objeto. Essas categorias refletem a dialética do movimento da realidade material que, no pensamento, traduz o seu próprio conhecimento. O objeto da Geometria, enquanto uma abstração, não é senão um reflexo desse movimento, expresso em conceitos, que refletem as propriedades das relações espaciais abstratamente, alienadas das outras propriedades da matéria. Portanto, a Geometria reflete apenas uma parte da realidade e não pode ser considerada como a chave última de decifração das relações espaciais, como acontece com o neopositivismo, ao tentar elevar a Matemática ao patamar de ciência-chave da compreensão da realidade material.

Nesse sentido, podemos traçar alguns elementos que respondam a questão anteriormente colocada. É possível afirmar que o quadrado é um reflexo de propriedades específicas de determinados objetos, que são distintas de outros objetos – na sua singularidade, o objeto não revela o conceito de quadrado –, bem como a comparação e redução de uma figura a outra: “la propia equiparación ‘se efectúa no mediante el cotejo de las propiedades de las figuras, sino a través *del movimiento, del cambio y de la transformación* de una figura en otra” (DAVÝDOV, 1982, p. 344, grifo do autor). O que faz um quadrado ser um quadrado e um círculo ser um círculo perpassa essas conexões. Assim, as propriedades específicas de determinado objeto – que possibilitam sua comparação e redução – caracterizam a particularidade que medeia a relação entre sua singularidade e a universalidade do conceito geométrico.

Reafirmamos que o elo de mediação entre a singularidade e a universalidade é a particularidade. Rosental e Straks (1958, p. 257-258, grifo dos autores) assim definem essa categoria:

Se denomina *particular* a un grupo de objetos, fenómenos o hechos que, siendo generales,

forman parte al mismo tiempo de otro grupo más general; dentro de este grupo, lo particular se presenta como singular o individual, es decir, como parte de un todo más amplio. Lo particular comprende un conjunto de objetos, que en una relación se presenta como universal y en otra como individual o singular. El árbol es universal en cuanto comprende una enorme cantidad de árboles singulares, individuales, es decir, de plantas foliáceas y coníferas. Pero este árbol universal forma parte, como singular o individual, del conjunto de plantas al que pertenecen, además de los árboles, las hierbas, arbustos, hongos, etc. Ello quiere decir que el árbol es universal en un sentido y singular en otro; la existencia simultánea de estas dos cualidades es lo que convierte en “particular”.

Na imediatividade da vida cotidiana, o homem não evidencia a mediação da particularidade na relação do singular com o universal, bem como não percebe a distinção entre essas três categorias. No entanto, estas relações estão presentes. A particularidade, “com relação ao singular, representa uma universalidade relativa, e, com relação ao universal, uma singularidade relativa” (LUKÁCS, 1970, p. 107).

As formas geométricas não se encontram prontas e soltas no mundo a espera do ser humano para conhecê-las. Ao contrário, é na própria práxis que o homem produz as generalizações fruto da experiência prática. A generalização de propriedades específicas de objetos singulares, mediadas por elas mesmas, torna universais os conceitos geométricos. Uma forma física singular que representa uma circunferência torna-se conceito universal na medida em que se compara com outras formas com propriedades semelhantes. Em contrapartida, o universal do referido conceito geométrico só existe na objetivação dessas singularidades. Davýdov (1982) lembra o exemplo de Lenin sobre o desenvolvimento da trigonometria e afirma:

Las nuevas propiedades del triángulo fueron descubiertas gracias a que empezó a estudiarse no de por sí mismo, sino en *relación* con el círculo. Todo triángulo puede dividirse en dos triángulos rectángulos cada uno de los cuales cabe considerar como perteneciente a un cierto círculo. (DAVÝDOV, 1982, p. 365-366, grifo do autor).

Desse modo, a propriedade de redução de uma figura a outra se torna elemento fundamental no desenvolvimento do conhecimento geométrico. “Y en virtud de ello los lados y los ángulos obtienen interrelaciones totalmente distintas [...]. Esto es un procedimiento dialéctico, un modo de pensamiento dialéctico” (DAVÝDOV, 1982, p. 366).

O pensamento dialético tem a função de analisar as mediações entre a singularidade e a universalidade, a tensão entre ambas. Segundo Lukács (1970, p. 102):

Sem esta tensão dos pólos, constantemente em ato, sem a constante conversão dialética recíproca das determinações e dos membros intermediários que têm função mediadora, sem esta união dos próprios pólos, tão rica de contradições, não pode existir uma autêntica e verdadeira aproximação à compreensão adequada da realidade, nenhuma ação guiada corretamente pela teoria.

O autor faz uma crítica à supressão da categoria particularidade na imediaticidade de vida cotidiana, bem como a mistificação da universalidade feita por Hegel¹⁷. Para Lukács (1970, p. 95):

A universalidade, sobretudo, não é jamais um ponto de chegada autônomo do pensamento. Marx [...] fala de dois caminhos que o conhecimento humano deve percorrer: [...] da realidade concreta dos fenômenos singulares às mais altas abstrações, e destas novamente a realidade concreta, a qual – com a ajuda das abstrações – pode agora ser compreendida de um modo cada vez mais aproximativamente exato.

Vale reafirmar que essa dupla passagem se refere ao duplo movimento no pensamento: redução do concreto ao abstrato e ascensão do abstrato ao concreto (MARX, 2003; DAVÝDOV, 1982). Lukács (1970) destaca o caráter aproximativo da ciência, bem como o processo de transformação da universalidade em particularidade, e vice-versa, com o desenvolvimento do conhecimento da realidade. As categorias da

¹⁷ Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770 – 1831) foi um filósofo alemão.

universalidade, particularidade e singularidade expressam o movimento da realidade material e, por conseguinte, aquele referente ao pensamento, que se expressa em juízos, conceitos e deduções.

Kopnin (1978) descreve a divisão, feita por Engels (1979): juízos da singularidade, da particularidade e da universalidade. Segundo Engels (1979), Hegel agrupa os julgamentos da seguinte forma:

1. Julgamento de existência, a forma mais simples do julgamento, em que se considera, afirmativa ou negativamente, a propriedade geral de um determinado objeto (julgamento positivo: a rosa é vermelha; negativo: a rosa não é azul; infinito: a rosa não é um camelo); 2. Julgamento determinativo, em que se atribui ao sujeito uma determinação de relação; julgamento singular: este homem é mortal; particular: alguns, muitos homens são mortais; universal: todos os homens são mortais ou: o homem é mortal; 3. Julgamento de necessidade, em que se atribui ao sujeito uma certeza substancial; julgamento categórico: a rosa é uma planta; julgamento hipotético: quando o sol sai, é dia; alternativo: a lepidossirene, ou é um peixe, ou é um anfíbio; 4. Julgamento de conceito em que, a respeito do sujeito, se considera em que medida corresponde a sua natureza geral ou, como diz Hegel, a seu conceito; julgamento assertivo: esta casa é má; problemático: quando uma casa é construída desta ou daquela maneira, é boa; apodíctico: a casa construída de tal ou qual maneira, é boa. (ENGELS, 1979, p. 182).

O autor classifica o primeiro como julgamento singular, o segundo não consta no texto, o terceiro como julgamento particular e o quarto como julgamento geral. Ele adverte que essa classificação é lícita e necessária. Segundo Kopnin (1978, p. 202), “tomando como ponto de partida tudo o que de positivo havia na classificação hegeliana dos juízos, submetendo-a a uma radical reelaboração materialista, Engels (1979) definiu as fases principais do desenvolvimento do juízo”. Mais a frente, Engels (1979, p. 183) cita o exemplo do atrito que gera calor: o juízo, “o atrito é uma fonte de calor”, é um julgamento de existência – da singularidade; o juízo, “todo movimento mecânico é capaz de converter-se em calor por meio do atrito”, é universal determinativo – da particularidade; por fim, o juízo, “tôda forma de movimento, sob

condições determinadas em cada caso, pode e é compelida a transformar-se, direta ou indiretamente, em qualquer outra forma de movimento”, é um julgamento de conceito e apodíctico – da universalidade.

Os juízos, bem como as deduções e os conceitos, segundo Kopnin (1978, p. 193), são formas de pensamento e “diversos pela função que exercem no movimento do pensamento”. Para o autor, eles servem para fixar dado movimento do pensamento e o conceito sintetiza todo o conhecimento anterior dado em juízos. A dedução “[...] é uma forma de movimento do pensamento de uns juízos e conceitos a outros, traduz o processo de obtenção de novos resultados no pensamento” (KOPNIN, 1978, p. 193). A diferença entre eles “nos modos de expressão do conhecimento verdadeiro condiciona igualmente a diferença de conexão entre o singular e o universal que neles se manifesta, fato para o qual Hegel atentou corretamente” (KOPNIN, 1978, p. 193). O conceito é a forma sintética de pensamento, portanto, é mais complexo que o juízo e a dedução. “El *concepto* interviene aquí como forma de la actividad mental mediante la cual se reproduce el objeto idealizado y el sistema de sus conexiones, que reflejan en su unidad *la generalidad y la esencia* del movimiento del objeto material” (DAVÝDOV, 1982, p. 300, grifos do autor).

Enfatizamos que essa análise dialética da realidade material constitui as bases do desenvolvimento do pensamento teórico. Segundo Davýdov (1982, p. 332), “como contenido del pensamiento teórico sirve el ser, mediatizado, reflejado y esencial”. Ele afirma o caráter ontológico do conhecimento e completa: “dicho pensamiento constituye una idealización del aspecto fundamental de la actividad práctica-objetiva, a saber, de la reproducción en ella de las formas generales de las cosas, de su medida y de sus leyes” (DAVÝDOV, 1982, p. 332).

O autor desenvolve sua análise sobre o pensamento teórico e o caracteriza no processo do conhecimento. Tal forma de pensamento tem como conteúdo “el dominio de los fenómenos objetivamente interrelacionados y que constituyen un sistema integral. Sin él y al margen del mismo estos fenómenos pueden ser solamente objetos de la observación empírica” (DAVÝDOV, 1982, p. 306).

É nesse âmbito que explicitamos e defendemos a seguinte tese: o objeto da Geometria se constitui como um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade humana. Em outros termos: o objeto da Geometria se constitui nas relações entre as formas espaciais da realidade física e o agir humano

ao conhecer e sistematizar essa realidade em forma de conhecimento. As formas espaciais e suas relações entre os corpos físicos são constitutivas da realidade física, enquanto o objeto da Geometria constitui o aspecto abstrato, em forma de pensamento, dessas formas e relações. Em contrapartida, essa abstração não é inerente à consciência, não está dada a priori na sensibilidade. O reconhecimento das formas espaciais do mundo se dá na própria práxis do homem em seu movimento de ser e estar no mundo.

Para dar prosseguimento a análise da tese que defendemos, iniciamos a discussão tratando das categorias matéria e consciência, que são a base da relação dialética que constitui o objeto da Geometria.

3. MATÉRIA E CONSCIÊNCIA

O presente capítulo trata das duas categorias que integram a questão fundamental da filosofia, a matéria e a consciência. Iniciamos com a concepção materialista de matéria, bem como suas formas fundamentais de existência e, posteriormente, discutimos a categoria reflexo como uma propriedade universal da matéria e a consciência como uma propriedade particular da matéria.

3.1 CONCEPÇÃO MATERIALISTA DE MATÉRIA

A questão fundamental da filosofia, a relação entre a matéria e a consciência, é a pedra angular das concepções de mundo, homem e sociedade. No âmbito dessa questão, a categoria matéria é central nas discussões sobre a origem de tudo o que existe, isto é, do ser, seja a realidade física ou a consciência. Segundo Cheptulin (1982, p. 62), “o conceito de matéria encontra-se em todos os sistemas filosóficos, com as mais diversas acepções”.

Para Ovtchinnikov (1955, p. 10), “uma concepção do mundo é um sistema de idéias sobre o mundo em seu todo, são os princípios básicos segundo os quais os homens abordam e explicam a realidade que os cerca e pelos quais se orientam em sua atividade prática”.

Sendo assim, uma concepção de mundo atravessa, pois, todas as ciências e seus objetos, constitui seus métodos e direciona seus resultados. Por consequência, científica e filosoficamente apresenta soluções diferentes para os problemas postos pelo homem, sendo um deles a questão fundamental da filosofia e seus desdobramentos nas ciências.

A solução materialista é diametralmente oposta à solução idealista. Segundo Ovtchinnikov (1955, p. 216):

A questão básica da filosofia, em torno da qual se trava luta intransigente entre o materialismo e o idealismo, é a questão da relação mútua entre o ser e o pensamento, a matéria e a consciência. A justa solução materialista da questão básica da filosofia, solução que afirma a materialidade do mundo e a objetividade das leis de seu desenvolvimento, é demonstrada por toda a marcha do desenvolvimento da filosofia e das ciências naturais.

Essa questão ontológica se apresenta na teoria do conhecimento no que diz respeito à cognoscibilidade e à unidade do mundo. “Los principios fundamentales de la concepción materialista dialéctica del mundo consisten en reconocer la objetividad del mundo circundante y la aptitud del entendimiento humano para conocer ese mundo” (AFANASIEV, 1963, p. 63). Para o materialismo marxista, a unidade do mundo está em sua materialidade e, assim, o que se torna “[...] importante condição para um método realmente científico de abordar o estudo das leis da natureza e o estudo das leis da vida social” (OVTCHINNIKOV, 1955, p. 229).

Em relação à materialidade do mundo e a objetividade das formas de existência da matéria, Ovtchinnikov (1955, p. 216) afirma:

A primeira característica do materialismo filosófico marxista considera a questão da unidade do mundo, generaliza a doutrina marxista-leninista da matéria, afirma a objetividade das formas de existência da matéria – movimento, espaço e tempo; considera a conexão mútua e a interdependência entre os fenômenos como leis do desenvolvimento da matéria em movimento, inerentes ao próprio mundo material, independentemente de nossa consciência.

A definição da categoria matéria está na esfera da questão fundamental da filosofia e recebe as mais diversas acepções, a destacar as variações idealistas e materialistas. Como dito anteriormente, “os idealistas têm em comum tanto a negação da existência da matéria, como a negação de sua objetividade” (CHEPTULIN, 1982, p. 62). Porém, o marxismo concebe a matéria de forma diametralmente oposta:

O marxismo concebe por matéria, enquanto realidade objetiva existente independentemente da consciência e refletindo-se nela, o mundo exterior, a realidade objetiva, qualidade do todo, como o conjunto de todas as formas do ser objetivo, com todas suas propriedades características, com todas as relações que lhe são próprias. (CHEPTULIN, 1982, p. 70).

A matéria possui a propriedade de existir independentemente da consciência. Porém, essa não pode ser a característica principal que a

defina, uma vez que, contrariamente, a consciência como uma forma especial de reflexo, não é eterna.

A referência ao fato de que a matéria existe fora da consciência do homem mostra incontestavelmente o que representa a matéria, mas apenas o que ela representa com relação à consciência. Mas sua relação com a consciência só pode existir quando a consciência existe e esta não é eterna, ela aparece somente em condições muito precisas e existe apenas enquanto são reunidas essas condições favoráveis. A matéria, por sua vez, existe eternamente. Ela existe antes do aparecimento da consciência, existe em sua presença e existirá depois de seu desaparecimento, se isto acontecer. É por isso que, quando definimos a matéria, não temos o direito de limitar-nos ao estabelecimento de sua relação com a consciência. Indicando sua relação com a consciência, devemos igualmente salientar os traços que a caracterizam enquanto tal, fora da consciência. A diferenciação da matéria dessa ou daquela de suas propriedades é precisamente a característica que permite o esclarecimento do que representa a matéria, fora da consciência, nela mesma. (CHEPTULIN, 1982, p. 72).

A objetividade da matéria existe tanto independentemente da consciência cognoscente quanto da sua propriedade de uma formação material particular altamente desenvolvida – o cérebro humano –, que é um tipo especial da propriedade universal da matéria, o reflexo.

Nesse sentido, a matéria não é uma massa homogênea apenas com propriedades universais, ela existe sob as formações materiais particulares que, por sua vez, possuem peculiaridades. Segundo Cheptulin (1982, p. 73-74):

Sendo uma realidade objetiva, a matéria existe não sob o aspecto de uma massa homogênea, mas representa um todo desmembrado, do qual todas as partes, encontrando-se em correlação universal, estão em um certo isolamento e, em decorrência disso, manifestam-se como formações materiais autônomas. Às formações materiais estão ligados os conceitos como o “corpo”, a “coisa”, o

“fenômeno” (no sentido de coisa). [...] Cada formação material particular não é eterna. Sua existência tem um começo e um fim. Ela aparece, existe um certo tempo e depois desaparece, transforma-se em uma outra formação material. Nenhuma formação material é ilimitada, mas, pelo contrário, ocupa um lugar determinado e limitado no espaço. É apenas o mundo em sua totalidade que é eterno e infinito.

Na mesma linha de pensamento de Cheptulin (1982), Konstantinov (1965, p. 124) afirma:

La materia no es algo uniforme, dotado siempre de la misma cualidad, sino que existe bajo la forma de cuerpos y objetos infinitamente diversos, que se distinguen cualitativa y cuantitativamente entre sí. Dichos cuerpos se agrupan con arreglo a sus propiedades afines, dando origen a lo que llamamos formas diversas de la materia. Las diversas formas materiales se distinguen por su grado mayor o menor de complejidad y de ellas se ocupan diferentes ciencias: física, química, biología, etc.

Os autores alertam para não se identificar a matéria como sendo suas propriedades. Por exemplo, não se deve considerar o movimento, o tempo e o espaço como sendo a própria matéria, pois são suas formas fundamentais de existência, partes constitutivas da realidade objetiva, mas não são a matéria em si. Eles mostram que não há matéria pura fora de suas relações, concatenações, propriedades universais e particulares, objetos concretos, ou seja, não existe matéria isolada do movimento objetivo do mundo.

Nesse tocante, a definição clássica de Lenin (1979, p. 134) diz que a matéria é “una categoría filosófica para designar la realidad objetiva, dada al hombre en sus sensaciones, calcada, fotografiada y reflejada por nuestras sensaciones y existente independientemente de ellas”.

Essa afirmação é feita ao evidenciar a compreensão materialista da verdade objetiva. Ele faz tal discussão e polemiza com Bogdánov¹⁸. Diz Lenin (1979, p. 127):

La negación de la verdad objetiva por Bogdánov es agnosticismo y subjetivismo. Lo absurdo de esta negación resalta con evidencia aunque sólo sea el ejemplo precipitado de una verdad de las Ciencias Naturales. Estas no permiten dudar que su afirmación de la existencia de la Tierra antes de la humanidad sea una verdad. Desde el punto de vista de la teoría materialista del conocimiento, esto es plenamente compatible: la existencia de lo reflejado, independiente de lo que lo refleja (la independencia del mundo exterior con respecto a la conciencia), es la premisa fundamental del materialismo.

Como é possível perceber na citação anterior, Lenin (1979) combate as concepções agnósticas e subjetivistas da realidade objetiva e evidencia a concepção de mundo materialista. Ele afirma que, para Bogdánov, “[...] el criterio de la verdad objetiva [...] no existe; la verdad es una forma ideológica, una forma organizadora de la experiencia humana [...]” (LENIN, 1979, p. 126). Sendo assim, não existe verdade objetiva, pois, uma vez que sua determinação é a experiência humana, a objetividade não pode existir independente da humanidade. No raciocínio de Bogdánov, segundo Lenin (1979, p. 127), “si la verdad es una forma de la experiencia humana, no puede haber verdad independiente de la humanidad, no puede haber verdad objetiva”. As ciências naturais têm demonstrado a verdade objetiva de que o mundo existia antes dos homens e continuará existindo após seu desaparecimento, caso isso ocorra.

Lenin (1979), em sua discussão, também inclui a categoria matéria como sendo uma necessidade de resgate para compreender a objetividade do mundo, pois, para os idealistas, as ciências modernas têm demonstrado seu desaparecimento. O que eles chamam de “desaparecimento da matéria” é a sua transformação, ou seja, a mudança de forma produzida por seu incessante movimento no tempo e no

¹⁸ Bogdánov é o pseudônimo de Alexandr Alexándrovich Malinovski (1873 – 1928). Malinovski foi um filósofo, sociólogo, economista e médico russo.

espaço. A transformação, por exemplo, de massa em energia não é a prova do desaparecimento da matéria, ao contrário, é a prova da sua capacidade de mudança e aquisição de formas variadas. A famosa fórmula $E = MC^2$ (energia é igual à massa multiplicada pela velocidade da luz elevada ao quadrado) é uma evidência simples de que massa e energia são formas de uma mesma coisa, a matéria. Considerar massa como sinônimo de matéria, observar sua transformação em energia e concluir o desaparecimento da matéria é uma postura de concepções idealistas que não interpretam corretamente o desenvolvimento da Física.

Surge aí a pergunta de Lenin (1979, p. 133): “¿la realidad objetiva es o no dada al hombre, cuando ve lo rojo, siente lo duro, etc.?”. Segundo o autor, se não for dada ao homem, cai-se no agnosticismo e subjetivismo: “Si es dada, se precisa un concepto filosófico para esta realidad objetiva, [...] este concepto es precisamente el de *materia*” (LENIN, 1979, p. 133-134, grifo do autor).

O conceito de matéria apresentado por Lenin, citado acima, é clássico e aparece em vários autores que tratam dessa categoria, dos quais podemos citar Afanasiev (1963), Cheptulin (1982), Konstantinov (1965) e Ovtchinnikov (1955). Os quatro autores confluem em suas análises em relação a essa categoria e fundamentam a concepção marxista da questão fundamental da filosofia.

Afanasiev (1963, p. 63) analisa a definição de Lenin (1979) da seguinte maneira:

Es difícil sobreestimar la importancia de la definición leninista de la materia. Al generalizar la experiencia multiseccular de la humanidad, pertrecha a los hombres con una comprensión acertada del mundo circundante, les enseña, tanto en la cognición, a partir de la propia realidad, de las condiciones materiales objetivas, y a no partir de las ideas subjetivas, propias de uno mismo. Al afirmar la cognoscibilidad del mundo, ofrece al entendimiento humano perspectivas ilimitadas, despierta el pensamiento, ayuda al hombre a penetrar en los profundos enigmas de ese mundo. La definición leninista de la materia refleja la contradicción radical existente entre el materialismo dialéctico, por un lado, y el idealismo y el agnosticismo, por otro. Tiene asimismo profundo sentido ateísta; socava en sus

raíces la invención religiosa de un dios creador de la realidad. Efectivamente, si la materia es primaria y eterna, no se puede crear ni destruir: Es la causa interna final de todo lo existente. En el mundo en el que la materia es la causa primaria y el origen de todo, no queda lugar ni para Dios ni para fuerzas sobrenaturales algunas.

O autor reforça, nessa citação, a concepção materialista da origem e desenvolvimento da consciência, sua base material, ao contrário de todo tipo de concepção idealista. Afanasiev (1963) dá um destaque à questão da cognoscibilidade do mundo, que é fundamental na teoria do conhecimento da dialética materialista. Por fim, destaca o sentido ateu dessa definição de Lenin (1979), pois apresenta a causa primeira de toda a formação desse mundo, desde a natureza inorgânica até o pensamento, como sendo a matéria em movimento.

Cheptulin (1982) apresenta uma análise da definição de Lenin (1979) em relação ao seu ponto de ataque, qual seja, a luta contra as definições idealistas e materialistas pré-marxistas que deturpam a categoria matéria.

Na realidade, a tese segundo a qual a matéria representa uma realidade, distingue a concepção marxista da matéria da concepção de Platão e da de Aristóteles¹⁹, entre outras que consideravam que a matéria não possui existência real, mas apenas uma existência possível, que ela não representa um ser real, mas apenas um não-ser. O relevo dado ao fato de que a matéria é uma realidade objetiva, existente fora e independentemente da consciência, distingue a idéia marxista da matéria das concepções idealistas. Em seguida, a tese segundo a qual a matéria não é uma realidade objetiva concreta qualquer, mas uma realidade objetiva em geral, distingue a concepção marxista da matéria, da concepção que tinham sobre ela os materialistas da Grécia antiga que identificavam a matéria com qualquer fenômeno qualitativamente determinado (a água, o ar, o fogo), ou ainda com um grupo de fenômenos (p. ex. a terra, a água, o ar e o fogo);

¹⁹ Aristóteles (384 a. n. e. – 322 a. n. e.) foi um filósofo grego.

essa tese distingue-a ainda da tese que tinha o materialismo mecânico pré-marxista que identificava a matéria com a substância. Enfim, a idéia segundo a qual a matéria é uma realidade objetiva, dada ao homem por suas sensações, diferencia a concepção marxista da matéria da concepção que têm sobre isso alguns agnósticos e, em particular, Kant²⁰, que reconhecia a existência da matéria, mas considerava que ela é inacessível aos nossos órgãos sensitivos, que é uma “coisa em si” incognoscível. (CHEPTULIN, 1982, p. 68).

O autor faz cinco apontamentos em relação ao conceito de matéria e reforça o combate às concepções idealistas dessa categoria. Em relação à matéria, ele afirma: a sua existência real e não apenas uma possível; a sua realidade objetiva, existente fora e independente da consciência; a sua constituição, não como uma formação material particular, mas como uma realidade objetiva em geral; a sua não constituição como substância, pois a própria Física já tem mostrado que a substância é um dos seus elementos constituintes e não ela própria; e, por fim, a sua cognoscibilidade, ao contrário dos agnósticos, como Kant.

Apresentamos também a posição de Konstantinov (1965, p. 114, grifos do autor) na análise da definição de matéria dada por Lenin (1979):

En esta definición se expresa a la esencia de la concepción materialista del mundo por oposición al idealismo y también al agnosticismo. [...] El contenido fundamental de la definición dada por Lenin consiste en *deslindar* sustancialmente el mundo exterior, las cosas todas que en él existen, de la realidad circundante, de una parte, y de otra, las sensaciones. Lo primero no es igual a lo segundo ni se reduce a ello. Lo objetivo no es lo que aparece como estable en las sensaciones, ni tampoco lo que estás ofrecen de común en diferentes hombres, como suponen los idealistas

²⁰ Immanuel Kant (1724 – 1804) foi um filósofo alemão, considerado por muitos como o principal filósofo da época moderna. Autor de *Crítica da Razão Pura* em que toma como base de sua filosofia a Geometria euclidiana, considerada como uma forma a priori da sensibilidade humana.

objetivos, sino lo que existen *fuera* de ellas. Para estos filósofos, establecer una delimitación clara y precisa entre la realidad objetiva y las sensaciones constituye un “desdoblamiento del mundo”, un “dualismo”, un abandono de la concepción monista del universo. Pero esta acusación carece de fundamento, pues la definición transcrita, aunque delimita con nitidez y vigor la materia y las sensaciones, no postula en absoluto el que la materia y las sensaciones sean dos “principios” totalmente independientes, o dos “sustancias” que sirvan de fundamento a dos clases de fenómenos o mundos separados por un abismo infranqueable. Las sensaciones no son una “sustancia” autónoma, independiente y opuesta a materia, sino la copia o fotografía de ella; es decir, un reflejo de la materia. Este reflejo se da en la materia y en virtud de ella.

O autor evidencia elementos importantes da definição leniniana de matéria ao falar de sua solução materialista da questão fundamental da filosofia, em contraposição as posições idealistas. Konstantinov (1965) a apresenta como fonte objetiva de nosso conhecimento e como o materialismo marxista se destaca de outras formas precedentes de compreensão dessa categoria. Afirma também que a objetividade do mundo não está na estabilidade das nossas sensações e no caráter comum das sensações de cada indivíduo, mas se encontra fora das sensações.

Para as concepções idealistas, existe uma dualidade entre o ser e a consciência, entre a objetividade do mundo e nossas sensações, porém o materialismo dialético estabelece as bases para a compreensão do monismo materialista. Ou seja, a realidade é apenas uma e se desdobra em suas várias propriedades. Na interpretação de Konstantinov (1965), as sensações não são autônomas e independentes da realidade material, mas o seu reflexo. Nesse contexto, nossos sentidos captam uma pequena parte dessas propriedades, como, por exemplo, a três dimensões espaciais. A indistinção entre as características essenciais e secundárias da matéria e, especialmente, sobre as dimensões acarreta problemas gnosiológicos.

Vejamos o exemplo de um trecho de Randall (2011, p. 111-112, grifo nosso):

Por fascinante y notable que sea la teoría de cuerdas²¹, sus propiedades desconcertantes, como las dimensiones extras, enturbian su conexión con el universo visible. ¿Qué es lo que distingue esas dimensiones extras de las visibles? ¿Por qué no son todas iguales? El descubrir el cómo y el **porqué la naturaleza oculta** esas dimensiones extras de la teoría de cuerdas sería un logro fenomenal, que haría que mereciera la pena investigar todas las posibles maneras en las que esto puede ocurrir.

A autora discute o problema das dimensões extras da realidade física e faz observações acerca da teoria de cordas e suas possíveis consequências em caso de se verificar sua legitimidade. Randall (2011) fala de dimensões visíveis e não visíveis e pergunta o que as distingue. Nesse caso, implica em uma questão gnosiológica, isto é, está na esfera do ser cognoscente e sua estrutura biológica que permite aos órgãos dos sentidos captar, à sua maneira, a realidade física. A distinção fundamental das dimensões espaciais pode não estar em sua própria constituição, mas na forma que o ser humano as capta, por meio da sensibilidade que lhe é inerente.

Ao contrário do que diz a autora, não cremos que a natureza oculte tais dimensões extras (caso existam), pois o mundo é uma totalidade que não separa a essência e o fenômeno, o movimento e a matéria. Esse processo de abstração se dá apenas na consciência, que é uma consequência necessária do atual estágio de organização da matéria em forma mecânica, física, química, biológica e social. Parece-nos, nesse caso, que a questão central é as limitações de nossa constituição biológica cerebral em captar, por meio dos órgãos dos sentidos, essa possível realidade multidimensional.

Por fim, Ovtchinnikov (1955, p. 226) reforça, na definição de Lenin (1979), a matéria como realidade objetiva: “Definindo a matéria como realidade objetiva que nos é dada nas sensações, Lênin tem com alvo todas as variedades de idealismo que, de uma forma ou de outra, negam a existência da realidade objetiva, da matéria, ou negam possibilidade de seu conhecimento”.

²¹ A teoria de cordas propõe que o universo seja constituído de nove dimensões espaciais e uma temporal. Trata-se de uma teoria ainda não verificada na realidade física, portanto, suas hipóteses permanecem em aberto.

O autor destaca o combate de Lenin (1979) ao idealismo de todos os matizes, bem como algumas de suas características, quais sejam: a negação da matéria, de sua existência objetiva, bem como da sua cognoscibilidade; também a concepção de que a unidade do mundo está na ideia, seja ela subjetivista ou absoluta.

Vale reafirmar que todas essas questões dizem respeito aos elementos do método dialético-materialista de análise da realidade e, especificamente, da categoria matéria. Para compreender a constituição da matéria, é premente o entendimento das suas formas fundamentais de existência, quais sejam: o movimento, o tempo e o espaço, que serão centralidades nas discussões da próxima seção.

3.2 FORMAS FUNDAMENTAIS DE EXISTÊNCIA DA MATÉRIA: MOVIMENTO, TEMPO E ESPAÇO

Uma vez colocada a base dialético-materialista da categoria matéria, discorreremos sobre suas formas fundamentais de existência: o movimento, o tempo e o espaço. Elas possuem as peculiaridades de ser objetivas e indissociáveis da categoria matéria. Também apresentam como característica comum a associação com a compreensão da geometria da realidade física.

Ovtchinnikov (1955, p. 245) explica que “o movimento, o espaço e o tempo, como formas fundamentais de existência da matéria, encontram-se em unidade orgânica indissolúvel, condicionada pela unidade do mundo material”. A unidade do mundo está, pois, em sua materialidade e, por sua vez, há uma indissolubilidade entre movimento, tempo e espaço. O reconhecimento dessas categorias como realidade objetiva é um fundamento da concepção materialista de mundo e do combate de todo tipo de idealismo. Segundo Lenin (1979, p. 182):

Al reconocer la existencia de la realidad objetiva, o sea, de la materia en movimiento, independiente de nuestra conciencia, el materialismo está obligado ineludiblemente a reconocer también la realidad objetiva del tiempo e del espacio, a diferencia, ante todo, del kantismo, que en esta cuestión se sitúa en el campo del idealismo, tomando el espacio y el tiempo no por una realidad objetiva, sino por formas de la contemplación humana.

Segundo o autor, Kant considera o tempo e o espaço como formas a priori da sensibilidade humana como contemplação da realidade material. Portanto, não se constituem no movimento da matéria, mas da sensibilidade humana dados de forma a priori. A gênese da categoria movimento é deslocada da matéria para a consciência subjetiva ou a ideia absoluta.

A matéria, que se manifesta em formações materiais particulares, possui como propriedade universal, entre outras, o movimento. Essas formações materiais aparecem e desaparecem, transformam-se em outras qualitativamente distintas e, assim, expressam a propriedade do movimento da matéria. “Sendo eterno como a matéria, o movimento absoluto assim como o repouso relativo condicionam a existência eterna da matéria, mediante as formações materiais particulares, encerradas no espaço e no tempo” (CHEPTULIN, 1982, p. 157). Desse modo, a matéria existe sob a forma de movimento absoluto no contínuo transformar-se de um ser em outro, estes existem como formações materiais particulares de acordo com o repouso relativo.

O repouso relativo é uma forma de ser do movimento, exprime uma singularidade de sua universalidade: “El movimiento es absoluto por su propia naturaleza y relativo por su modo concreto de manifestarse” (KONSTANTINOV, 1965, p. 134). O modo concreto de manifestação do movimento é as formações materiais particulares e se refere a tudo o que existe materialmente, às coisas. Tal existência ocorre num determinado tempo, em um dado espaço e logo se transforma em outras coisas no movimento incessante da matéria. O período em que o ser não sofre mudanças quantitativas, superadoras dos limites que levam às mudanças qualitativas, refere-se ao modo concreto de manifestação do movimento, isto é, as formações materiais particulares.

Esse repouso relativo que garante a manifestação concreta do movimento, portanto, não é estático, isso significa que durante o desenvolvimento do ser em repouso relativo, está em processo o movimento absoluto da matéria. Segundo Trochin (1955, p. 107):

A dialética materialista não admite o repouso absoluto, a estabilidade absoluta, mas não nega, no desenvolvimento, o repouso relativo, a estabilidade relativa. O repouso relativo ou equilíbrio temporário é também movimento e desenvolvimento, mas que se verifica dentro dos limites de determinada forma de movimento da matéria – de determinada espécie orgânica, de

determinada formação social, digamos – até que se dê a passagem a um novo estado qualitativo, até que seja ultrapassada a medida, até que se forme nova espécie orgânica ou novo regime social.

Quando o movimento absoluto provoca a superação dos limites impostos pela formação material em repouso relativo, surge um ser de outra ordem. Como diz o autor, até que se forme uma nova espécie ou um novo regime social. Além disso, acrescentamos, até que surja uma nova geometria do mundo. Quando falamos em movimento absoluto e repouso relativo, não os limitamos a sua forma mecânica, ou seja, ao deslocamento no espaço. Em vez disso, referimo-nos às diversas formas de movimento da matéria, à mecânica, física, química, orgânica e social.

Segundo Konstantinov (1965, 127):

El reposo relativo no solo se manifiesta cuando un cuerpo conserva su posición con relación a otros o cuando en algunos objetos materiales no se da una forma concreta del movimiento. Una de las manifestaciones más importantes de este reposo relativo es la estabilidad de los procesos, es decir, la conservación del movimiento inherente a los cuerpos, la relativa permanencia de las formas del movimiento existentes en determinadas condiciones.

Sem o repouso relativo não há a possibilidade de conservação das propriedades singulares que fazem com que um ser seja o que é e não um outro. Ele se expressa de diferentes maneiras e nas diversas formas de movimento da matéria. Portanto, as manifestações das propriedades de cada ser serão diferentes de acordo com cada tipo de movimento. “Del mismo modo que la materia es inagotable, lo es también la diversidad y riqueza de sus formas de movimiento y de sus propiedades” (KONSTANTINOV, 1965, p. 126). Isso significa que as diversas formas de movimento são indissociáveis e desempenham um papel importante no processo de complexificação da matéria.

Ovtchinnikov (1955, p. 240) assinala que o movimento da matéria:

[...] tem as formas mais variadas: o simples deslocamento no espaço, os diferentes fenômenos físicos, as transformações químicas, os processos

inerentes aos organismos vivos, o movimento que caracteriza os fenômenos sociais. [...] As diferentes ciências estudam as diferentes formas de movimento da matéria. A mecânica estuda a forma mais simples do movimento da matéria, a forma mecânica, ocupa-se do estudo do deslocamento dos corpos no espaço. A forma física do movimento da matéria é constituída pelo movimento atômico-molecular, pelos processos magnéticos, pelo movimento intra-atômico e intranuclear, etc. A forma química do movimento da matéria inclui os processos de combinação e de dissociação dos átomos e moléculas e as leis da estruturação das mais diferentes combinações orgânicas e inorgânicas. A vida orgânica, objeto de pesquisa das ciências biológicas, distingue-se por uma diversidade ainda maior de forma.

As diferentes formas de movimento que compõem o processo de complexificação da matéria definem as esferas ontológicas do ser (LUKÁCS, 2010, 2012, 2013). Na esfera inorgânica, temos o movimento mecânico, físico e químico; na orgânica, o movimento orgânico (vegetal e animal); e, na social, o movimento social da matéria. Está última é objeto de estudo das ciências sociais.

Cada forma de movimento é superior à outra e incorpora as inferiores na sua constituição e desenvolvimento. Assim, a forma biológica não pode existir sem as formas física, química e mecânica. Entretanto, a compreensão da forma biológica de movimento não pode ser reduzida à compreensão das outras formas. Segundo Konstantinov (1965, p. 129):

Uno de los rasgos fundamentales de la concepción dialéctico-materialista del movimiento de la materia estriba en que, a diferencia del materialismo mecanicista, reconoce que cada forma particular del movimiento tiene rasgos cualitativos específicos y es irreducible a otras formas más simples.

A forma social do movimento da matéria é a mais complexa e está constituída sobre a base de todas as demais. Porém, reforçamos o argumento de que não é possível explicar a forma superior reduzindo-a

as inferiores. Explicar as relações sociais, por exemplo, por meio das propriedades biológicas é incorrer no chamado “darwinismo social”.

É justamente com o materialismo dialético que são superadas as concepções idealistas que negam o movimento e a sua objetividade, bem como a objetividade do tempo e do espaço. Segundo Cheptulin (1982, p. 162, grifo do autor), “uma definição científica do movimento foi dada, pela primeira vez, pelos fundadores do materialismo dialético e, em particular, por Engels que escreveu que: ‘o movimento, aplicado à matéria, é a *modificação em geral*’”. Nesse sentido, “compreende tôdas as transformações e processos que se produzem no Universo desde as simples mudanças de lugar até a elaboração do pensamento” (ENGELS, 1979, p. 41). Cheptulin (1982) e Engels (1979) contemplam as formas mecânicas, física, química, orgânica e social do movimento da matéria.

O movimento contínuo condiciona a relação entre todas as formações materiais particulares e constitui a indissolúvel ligação entre o espaço e o tempo. Por sua vez, ele determina o movimento do pensamento, ou seja, “[...] o ideal não é mais do que o material transposto para a cabeça do ser humano e por ela interpretado” (MARX, 2011, p. 28). Nesse sentido, a Geometria, sendo uma ciência das propriedades do espaço, constitui-se na esfera das formações materiais particulares em movimento, no âmbito do repouso relativo, e não da matéria como uma massa homogênea imóvel.

Assim, o objeto da Geometria é a expressão ideal do movimento real da matéria, das leis físicas que regem tal movimento. A forma espacial, sendo propriedade da matéria, possui uma objetividade independente da consciência, enquanto o objeto da Geometria possui uma objetividade intermediada pela subjetividade. Nossa compreensão se difere da concepção materialista mecanicista que considera o objeto da Geometria como inerente à matéria e da concepção idealista que o concebe como uma forma a priori da sensibilidade. O conhecimento geométrico é a subjetivação das relações espaciais objetivadas e, dialeticamente, torna-se uma subjetividade objetivada em forma de conhecimento. O objeto da Geometria é as propriedades do espaço que, por sua vez, “está integrado por las propiedades de los cuerpos reales, sus relaciones materiales y formas” (ALEKSANDROV, 1991b, p. 217).

No entanto, as concepções idealistas não compreendem o espaço e o tempo como objetivos e atribuem a essas categorias um viés subjetivista ou os consideram como um atributo da ideia absoluta. Destarte, se o espaço é uma forma a priori da sensibilidade humana, então não existe objetivamente na realidade física. Dessa forma, a geometria não tem sua origem nessa realidade, mas na própria

sensibilidade humana, o que se torna, também, uma forma a priori da sensibilidade. Combater essas concepções de tempo e espaço é combater essas concepções de geometria. Se o tempo é uma forma a priori da sensibilidade, então não há desenvolvimento, portanto, a geometria do mundo é estática, não se modifica com as transformações da matéria.

Entretanto, esses raciocínios não refletem a realidade do tempo e do espaço, tampouco da matéria em movimento. Segundo Lenin (1979, p. 186, grifos do autor):

Si las sensaciones de tiempo y espacio pueden dar al hombre una orientación biológicamente adecuada, es exclusivamente a condición de que estas sensaciones reflejen la *realidad objetiva* fuera del hombre: el hombre no habría podido adaptarse biológicamente al medio, si sus sensaciones no le hubiesen dado una idea de él *objetivamente acertada*. La doctrina sobre el espacio y el tiempo está indisolublemente ligada a la repuesta a la cuestión fundamental de la gnoseología: nuestras sensaciones ¿son imágenes de los cuerpos y la cosas, o los cuerpos son complejos de nuestras sensaciones?

O autor, ao discutir as categorias tempo e espaço, também combate as concepções idealistas de Mach²², Dühring²³, entre outros. Para tanto, Lenin (1979) fundamenta a concepção dialético-materialista dessas categorias. Nesse sentido, apresentamos algumas definições de autores materialistas sobre o espaço: (1) “A extensão das formações materiais particulares e a relação entre cada uma delas com as outras formações materiais que a rodeiam é o espaço” (CHEPTULIN, 1982, p. 181); (2) “La propiedad universal de los cuerpos materiales de poseer extensión, ocupar un lugar determinado y estar situados de cierta manera entre otros objetos del mundo, refleja precisamente el concepto filosófico del *espacio*” (AFANASIEV, 1963, p. 77, grifo do autor); e (3) o espaço é forma de ser da matéria que caracteriza a extensão dos objetos materiais (OVTCHINNIKOV, 1955, p. 245).

²² Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach (1838 – 1916) foi um físico e filósofo austríaco.

²³ Karl Eugen Dühring (1833 – 1921) foi um filósofo e economista alemão.

Essas formas de compreensão nos aproximam de uma concepção materialista do objeto da Geometria, uma vez que essa ciência possui o movimento da própria matéria em movimento. A abstração do conhecimento geométrico expressa em ideias tanto o movimento material da realidade objetiva como permite a compreensão do seu desenvolvimento.

As novas teorias de Geometrias não-euclidianas, desenvolvidas no século XIX, revolucionaram as concepções geométricas, matemáticas, filosóficas e físicas da compreensão da realidade material. Isso porque contribuíram na fundamentação da ligação indissolúvel da matéria com o movimento, o tempo e o espaço, bem como a dependência mútua entre cada uma dessas categorias.

Segundo Konstantinov (1965, p. 144, grifo do autor):

La creación de la geometría no euclidiana puso al desnudo la íntima vinculación del espacio y del tiempo con la materia, así como el condicionamiento de las propiedades espaciales por las de la materia, con lo cual se asestó un sensible golpe a las concepciones idealistas del espacio. Partiendo de que la geometría de Euclides, creada ya en la antigua Grecia, había permanecido invariable a lo largo de muchos siglos, Kant estableció que el espacio era inherente a nuestra consciencia, una forma *a priori* de la sensibilidad (independiente de la experiencia), con la que el sujeto cognoscente “ordena” la disposición de los fenómenos. Para Kant, la geometría permanecía invariable precisamente porque el espacio pertenece a la conciencia del sujeto, no a los fenómenos que están fuera de él. Pero todas esas concepciones apriorísticas de Kant quedaron refutadas al demostrar Lobachevski que la geometría euclidiana no era la única posible y que, de acuerdo con la condiciones materiales, en el espacio rigen principios de geometrías absolutamente distintas.

Na mesma direção, Ovtchinnikov (1955) afirma:

A grande descoberta de Lobatchevski desferiu tremendo golpe no apriorismo de Kant. Os

conceitos básicos da geometria de Euclides, existente há mais de dois mil anos, adquiriram a aparência de verdades absolutas, independentes da experiência, da prática. Desenvolvendo sua doutrina subjetiva e idealista do espaço e do tempo como formas *a priori* da sensibilidade, Kant referia-se ao "caráter absoluto", à estabilidade dos axiomas geométricos. A criação da geometria não-euclidiana demonstrou, de maneira convincente, que as formas espaciais são formas inerentes às próprias coisas, e não à razão humana. As novas ideias sobre o espaço, da geometria não-euclidiana, significam uma aproximação ainda mais completa de nossos conhecimentos em relação à verdade absoluta. (OVTCHINNIKOV, 1955, p. 251-252, grifo do autor).

Essas novas concepções de espaço dadas pelo materialismo dialético e confirmada pelos novos desenvolvimentos da Geometria e da Física, nos séculos XIX e XX, deram um golpe nas concepções idealistas da matéria, por consequência nas concepções de espaço e tempo.

Desse modo, observamos um avanço na compreensão da materialidade do mundo e, por consequência, dos elementos que o compõe. A categoria tempo era considerada absoluta até então e estava corroborada pela Física clássica de Newton e pela Geometria de Euclides. Em contrapartida, podemos observar algumas de suas definições, dadas por autores materialistas, que superaram essas concepções idealistas e absolutistas: (1) a nova concepção caracteriza o tempo como a “duração da existência das formações materiais e a relação de cada uma delas com as formações anteriores e posteriores” (CHEPTULIN, 1982, p. 181); (2) “La propiedad universal de los procesos materiales de transcurrir uno trás otro con determinada continuidad, tener duración y desarrollarse por etapas y fases refleja precisamente el concepto filosófico de *tiempo*” (AFANASIEV, 1963, p. 77, grifo do autor); e (3) “O tempo é forma de ser da matéria que caracteriza a sucessão dos processos materiais” (OVTCHINNIKOV, 1955, p. 246).

Mais uma vez, essas concepções materialistas da categoria tempo expressam um combate a todo tipo de idealismo. A constituição espaço-temporal da matéria em movimento se transforma constantemente e, por

consequência, transforma a dialética do movimento do conhecimento geométrico, que se constitui como expressão desse movimento da extensão das formações materiais particulares e a duração de sua existência. Com isso, surgem novas lógicas geométricas para expressar idealmente a realidade material, a partir das transformações de uma forma de movimento em outra.

Conforme Konstantinov (1965):

Si no tenemos en cuenta la conexión mutua entre el espacio y el tiempo y la de uno y otro con la materia en movimiento, no podremos comprender la esencia de los innumerables fenómenos físicos relacionados con los movimientos, cuyas velocidades pueden compararse con la de la luz, ni tampoco los procesos relacionados con las altas energías; asimismo, no podremos concebir los movimientos de los cuerpos que se hallan en campos gravitacionales intensos. La tesis de que el espacio y el tiempo se hallan ligados a la materia y de que uno y otro están vinculados entre sí, se ha convertido en una de las ideas básicas de la física actual. Puesto que la materia, al desarrollarse, engendra nuevas formas con las leyes peculiares inherentes a ellas, en la naturaleza surgen también nuevas relaciones espaciales y temporales que corresponden a dichas formas. Así, por ejemplo, con la aparición de los organismos surgieron las relaciones espaciales que se caracterizan por nuevos tipos especiales de simetría que no se encuentran en la naturaleza inorgánica. Por consiguiente, *el espacio y el tiempo, como la materia misma, se hallan sujetos a la gran ley universal de todo lo existente: la ley del desarrollo.* (KONSTANTINOV, 1965, p. 145, grifos do autor).

Com a complexificação da matéria em movimento, existente indissolúvelmente no tempo e no espaço, complexificam-se também as relações temporais e espaciais. Se existisse um conhecimento geométrico há alguns bilhões de anos, as relações espaciais seriam diferentes das de hoje que, certamente, serão diferentes daqui outros milhões ou bilhões de anos.

Outro aspecto importante é o nível de conhecimento geométrico que dispomos em nosso limitado espaço de observação e atuação. Quando pensamos nas escalas, macro e microscópicas, temos ainda um limite bastante restrito. Isso nos indica a hipótese de que a geometria que conhecemos não dá conta da compreensão de toda a realidade material, não só por sua limitação teórica, mas também porque não existe uma Geometria universal, ou seja, cada relação espacial é determinada pela formação material correspondente.

Segundo Ovtchinnikov (1955, p. 246):

Todo objeto material possui suas relações espaciais. O sistema solar tem suas relações espaciais específicas, o cristal outras, o átomo outras. No sistema solar, por exemplo, os planetas se movimentam em elipses, num de cujos focos encontra-se o sol. Essas curvas geométricas caracterizam as relações espaciais específicas dos corpos do sistema solar. Nos cristais, os átomos estão dispostos numa ordem espacial perfeitamente definida, característica do cristal considerado. A variedade na disposição espacial dos átomos na rede cristalina exerce influência sobre suas propriedades físicas. No átomo, os elétrons, movendo-se segundo leis particulares estudadas pela mecânica dos quanta, constituem uma nuvem eletrônica no espaço que circunda o núcleo do átomo. Assim, a essência do espaço é revelada pelo estudo de determinadas formas de movimento dos objetos materiais.

Esses exemplos evidenciam a infinidade de possibilidades geométricas que constituem a matéria em movimento. Isso se dá pelas formas que ela adquire em seu processo de desenvolvimento, que é uma categoria caracterizadora da grande lei universal de todo o existente, como afirma Konstantinov (1965). A essência das relações espaciais é compreendida tanto pelo estudo do desenvolvimento da matéria como das formas de movimento que determinam a esfera ontológica de cada ser. Com isso, o ser humano estabelece a lógica geométrica da realidade física e avança em sua compreensão do mundo, uma vez que este se transforma continuamente.

As formas fundamentais de existência da matéria transformam-se por meio do reflexo inerente à matéria. A complexificação das formas

de movimento alcançou um patamar que levou o reflexo próprio à matéria a se transformar em reflexo subjetivo, consciente. Isso se deu por meio do surgimento da forma de movimento mais desenvolvida, a forma social, como veremos nas duas seções a seguir.

3.3 UMA PROPRIEDADE UNIVERSAL DA MATÉRIA: O REFLEXO

A discussão sobre a categoria reflexo está inserida no contexto da discussão referente à matéria que o possui como propriedade universal no seu processo de desenvolvimento, desde sua forma mais elementar até a altamente organizada. Para além do desenvolvimento das formas de reflexo objetivas da matéria, verificamos as formas subjetivas, em especial, a consciência. Nesse viés, a categoria reflexo é um elemento importante na discussão sobre as formas de existência da matéria e como ela configura a geometria da realidade física.

Nosso pressuposto de que o reflexo é uma propriedade universal da matéria, torna-se indicativo de uma direção para o entendimento do movimento da formação da realidade material, bem como da relação entre a matéria e a consciência. Por isso, apresentamos algumas compreensões em relação a esta categoria, assim como seus desdobramentos no desenvolvimento da matéria.

Para Cheptulin (1982, p. 78):

O reflexo representa a faculdade de uma formação material reagir de uma maneira determinada, sob a influência de uma outra formação material, e, através das modificações correspondentes de certas propriedades ou estados, a faculdade de representar ou de reproduzir as particularidades desta outra formação material.

Na citação, o autor não fala em consciência ao definir a categoria reflexo, pois enfatiza-a como propriedade universal da matéria. No entanto, em outro espaço de sua obra, Cheptulin (1982) trata da consciência como uma propriedade particular da matéria, ou seja, como um tipo especial de reflexo: subjetivo ou consciente.

Lenin (1979, p. 127), por sua vez, explica que “la existencia de lo reflejado, independiente de lo que lo refleja (la independencia del mundo exterior con respecto a la conciencia) es la premisa fundamental del materialismo”. Esse pressuposto é uma condição imprescindível na

solução dialético-materialista da questão fundamental da filosofia. Como dito anteriormente, o mundo objetivo existe independente da existência dos sujeitos, da consciência que, em seu processo de refletir, procura capturar o existente.

Nesse sentido, Rubinstein (1963) também discute a categoria reflexo como uma propriedade universal da matéria e a distingue de suas formas. Assim, a mais altamente organizada forma do reflexo é a consciência, possível apenas pela sua base material, o cérebro humano. Segundo o autor:

El reflejo como propiedad general de la materia aparece en la forma más altamente organizada de esta última – la corteza cerebral – bajo el aspecto de actividad refleja de la cual son producto la *sensibilidad* y los fenómenos psíquicos. El reflejo en su sentido amplio – como propiedad general de la materia – adquiere el sentido especial, específico, que posee en lo tocante a los fenómenos psíquicos. (RUBINSTEIN, 1963, p. 11, grifo do autor).

Essa forma de reflexo, a mais alta forma existente na natureza, possui sua base na realidade material e encerra, em si, também as mais primitivas: o reflexo mecânico, físico, químico e orgânico. Na natureza inorgânica, o reflexo apresenta-se de modo diferente em relação à sua forma social. As formações materiais refletem-se umas nas outras e de diferentes formas, conforme seu grau de desenvolvimento. Isso gera níveis cada vez mais elevados de reflexo e de movimento da matéria. Cada forma de movimento gera uma nova forma de reflexo que, dialeticamente, cria novos movimentos.

Rubinstein (1963, p. 10) afirma:

En la naturaleza muerta el reflejo se presenta como reacción externa (física, química), como respuesta del cuerpo a la acción que sobre él incide. En la naturaleza inorgánica, las reacciones externas coinciden con las transformaciones que sufre el estado interior de los cuerpos sobre los que recae una acción externa.

As reações externas coincidem com as transformações que sofre o estado interior dos corpos, porque eles se transformam e se

reproduzem sem a necessidade de trocar substâncias vitais à sua existência. No caso dos vegetais e animais, há a necessidade de reações com substâncias que sirvam de alimentos a essa forma de vida, que garantam a existência da esfera orgânica. Segundo Engels (1979, p. 156, grifos do autor):

A mecânica, física (aliás calor etc.) esgota-se a cada ato de reação. A reação química altera a composição do corpo reagente e só se renova se fornecermos uma nova quantidade do mesmo. Somente o corpo *orgânico* reage *independentemente*, de certo que dentro de sua esfera de força [...] e supõe-se uma provisão de alimento; mas essa provisão de alimento só eficaz depois de ter sido assimilada e não imediatamente, como nas etapas inferiores; de sorte que o corpo orgânico tem, nesse caso, um poder de reação independente, devendo a nova reação ser por êle *realizada*.

A matéria se complexifica por meio de seu inerente movimento e dos seus reflexos, que se expressam de diferentes formas e, também, se complexificam.

Nesse sentido, Cheptulin (1982, p. 83) afirma:

A forma de reprodução das particularidades dos objetos agindo sobre ela, em uma formação material, é determinada pela sua natureza. É por isso que as formações materiais qualitativamente diferentes refletem as mesmas ações sob uma forma diferente. Assim como a matéria, em sua diversidade qualitativa é infinita, há também, uma variedade enumerável de formas de reflexo. A modificação das formas do reflexo são particularmente observadas na passagem da matéria de um grau qualitativo de seu desenvolvimento a outro.

Segundo o autor, as formações materiais qualitativamente distintas refletem as mesmas ações sob uma forma diferente, isto é, seus reflexos dependem de seu estado interior e da complexidade de seu desenvolvimento. A reação ao fogo, por exemplo, exercida por uma pedra difere em relação a de um vegetal, de um animal ou de um homem. Não somente a reação das transformações produzidas pelo fogo

e contato com esses corpos, mas também a reação de defesa estabelecida pelos organismos vivos. Essa infinidade de reflexos é fruto do movimento das diferentes formações materiais existentes. De acordo com Cheptulin (1982), no movimento de complexificação da matéria e da passagem de um grau qualitativo a outro é que possibilita a observação das diferentes formas de reflexo e suas modificações.

Os reflexos expressam-se na forma do movimento da matéria e nas interações entre as formações materiais particulares, porém não se pode considerá-los o reflexo como sinônimo de interação. Para Cheptulin (1982, p. 81-82):

O reflexo está ligado à interação, representa um resultado desta última, mas não é idêntico a ela. A interação representa a influência recíproca de formações materiais ligadas entre si, que provocam certas mudanças nas propriedades, nos estados etc. de cada uma delas. O reflexo é apenas um dos momentos da correlação de formações materiais que se encontram em interação, isto é, a propriedade de cada formação material de reproduzir, nas mudanças surgidas nela mesma, em decorrência da interação, certas particularidades de outras formações materiais agindo sobre ela. Logo, o reflexo não é a interação de um objeto sobre um outro, nem as mudanças que se produzem no decorrer desta, mas sim a faculdade de reproduzir nessas mudanças esses ou aqueles traços ou aspectos do objeto agente.

O movimento da matéria promove inevitavelmente a interação entre as formações materiais particulares e suas conseqüentes transformações causadas por essa interação. As transformações ocorridas em certas formações materiais particulares em decorrência da interação não representa o reflexo, mas apenas o movimento de sua própria transformação. O reflexo é justamente a propriedade de reprodução, por parte dessas formações materiais, das particularidades da formação material agente. Estas dependem do estado interior da formação material em que age a primeira, que também é uma relação bilateral. Falamos em bilateralidade somente na abstração necessária à compreensão desse processo. Porém, compreendemos que as relações que ocorrem na realidade material são multilaterais, isto é, produzem e

reproduzem, concomitantemente, reflexos de todas as ordens e com inúmeras formações materiais que agem umas sobre as outras.

Rubinstein (1963), ao fazer referência ao reflexo como propriedade de todo ser, expressa sua compreensão sobre as ações e reações entre as formações materiais particulares. Segundo o autor:

Esta propiedad, común a todo lo existente, se expresa en el hecho de que en todos los objetos se dejan sentir las acciones externas a que se hallan sometidos. Las acciones externas condicionan también la propia naturaleza interna de los fenómenos y parece como si se fueran sedimentando y conservándose en ella. A eso se debe que en cada fenómeno se encuentren “representados”, reflejados, todos los objetos que actúen sobre él. Se hallan “representados” por medio de su influjo. En cierto sentido, cada fenómeno es “espejo y eco del universo”. Al mismo tiempo, el resultado de una acción u otra sobre un fenómeno, cualquiera que sea, está condicionado por la naturaleza interior de este último. La naturaleza interior de los fenómenos constituye el “prisma” a través del cual unos objetos y fenómenos se reflejan en otros. (RUBINSTEIN, 1963, p. 8, grifo do autor).

A conservação dos reflexos, ou seja, das particularidades das formações materiais agentes no refletor, é parte constitutiva de sua dinâmica de existência. Assim, a existência de um corpo ou fenômeno é a expressão do desenvolvimento de todo o universo, com suas propriedades universais e particulares. A natureza interior de cada ser é, concomitantemente, produtor dessa dinâmica. Trata-se, pois, da condição essencial para os diferentes tipos de reflexo que, por sua vez, depende não somente do refletido, mas também da natureza interna do refletor.

Rubinstein (1963) expressa uma compreensão um pouco diferente de Cheptulin (1982) em relação ao reflexo. Nesse sentido, ambos tratam essa categoria com base na dialética materialista e tal diferença não acarreta compreensões conflitantes.

Todos los fenómenos del mundo están *relacionados* entre sí. Toda *acción* sobre algo es interacción; toda modificación de un fenómeno se refleja en los demás y ella misma constituye una

respuesta al cambio que han sufrido otros fenómenos que inciden sobre él. Ahora bien, toda acción externa sobre un cuerpo, sobre un fenómeno, queda como refractada por las propiedades internas de dichos cuerpo o fenómeno. Toda *acción recíproca* constituye, en este sentido, el *reflejo* de unos fenómenos por parte de otros. (RUBINSTEIN, 1963, p. 8, grifos do autor).

Segundo Rubinstein (1963), toda ação constitui a interação e a sua recíproca constitui o reflexo de alguns fenômenos por parte de outros. Para Cheptulin (1982), uma ação não caracteriza uma interação, que é constituída pelas mudanças causadas no refletor. Para constituir um reflexo, não basta uma ação recíproca, como afirma Rubinstein (1963), é necessária a reprodução das particularidades do refletido, por parte do refletor. De acordo com Cheptulin (1982, p. 19), “o reflexo está ligado não apenas a ação de uma formação material sobre a outra, mas também à sua interação, em decorrência da qual cada formação material particular é, ao mesmo tempo, refletora e refletida”. Isso significa que a reprodução dessas particularidades acontece em ambos, refletido e refletor, cada qual sendo um e outro ao mesmo tempo no processo de constituição do reflexo.

Assim, não é possível falar em ação que não seja recíproca, como diferencia Rubinstein (1963), ou seja, assim é por princípio. Cheptulin (1982) afirma que o reflexo está ligado à interação, porém não o reduz a ela, ao contrário, estabelece os limites onde ele ocorre.

Cheptulin (1982) não faz essa redução, bem como não reduz o reflexo ao movimento inerente à matéria:

Nesse plano, a identificação do reflexo com o movimento, com as mudanças sobrevindas na formação material em decorrência de outras formações materiais que ela sofre, não tem fundamento. O reflexo não é simplesmente a modificação do objeto sob a ação de fatores exteriores e interiores, mas uma representação particular, nessas modificações, das particularidades dos fatores agentes. A modificação do objeto em decorrência de interações exteriores ou interiores representa não

o reflexo, mas o movimento. (CHEPTULIN, 1982, 82).

Não se justifica a identificação do reflexo com o movimento, pois este ao ocorrer em todas as esferas do ser não imprime, indiscriminadamente, em certos corpos ou fenômenos, as suas particularidades como agente. Ou seja, o conjunto da reprodução das particularidades de um corpo ou fenômeno expressa o reflexo no conjunto mais amplo das transformações e, estas últimas, constituem o movimento.

A diferença de compreensão sobre a categoria reflexo, entre Cheptulin (1982) e Rubinstein (1963), não vai além desse plano da relação entre as ações recíprocas. Rubinstein (1963) estabelece tal relação e destaca o princípio do determinismo na concepção dialético-materialista:

Si la acción recíproca de los objetos, de los fenómenos, de los procesos respondiera al principio del determinismo en su concepción mecanicista, no se debería hablar de la acción recíproca de todos los fenómenos del mundo como de un reflejo. Hablar del reflejo como de una propiedad general del mundo material significa afirmar que tan sólo el determinismo en su concepción materialista dialéctica responde a las interrelaciones que efectivamente se dan entre todo cuanto sucede en el mundo. En esto radica el sentido – simple, exacto y riguroso – del término “reflejo” como propiedad general de todo el mundo de la materia. [...] Esta amplia concepción del reflejo como propiedad común a toda la materia no puede significar, ni significa, que quepa atribuir conciencia a toda la materia proyectando los fenómenos psíquicos a las bases del mundo material. (RUBINSTEIN, 1963, p. 9).

O autor faz a crítica ao princípio do determinismo em sua concepção mecanicista, como simples ações unilaterais dos corpos ou fenômenos. Porém, expressa novamente sua compreensão de reflexo como ação recíproca dos objetos, fenômenos e processos. Rubinstein (1963) evidencia tal princípio na concepção dialético-materialista para expressar o fundamento da unidade do mundo: a materialidade. Isso se faz necessário para colocar as bases da categoria totalidade, ou seja, os

fundamentos de todas as interrelações e interdependências das formações materiais ou fenômenos existentes na realidade objetiva.

Rubinstein (1963) chama a atenção para a redução desse princípio à consideração da consciência como um atributo de toda matéria. Segundo o autor, o reflexo, nessa concepção mais ampla, como propriedade universal da matéria, não outorga concluir que os fenômenos psíquicos são propriedades inerentes a realidade material. Eles, e também a consciência, possuem suas bases nessa realidade ao longo de um intrincado processo de complexificação do movimento, interação e reflexo constituintes da matéria.

Numa crítica a Pearson²⁴, Lenin (1979) também expressa a necessidade de não se atribuir consciência a toda matéria e afirma o reflexo como uma propriedade universal da matéria.

Repitiendo todos los argumentos de Berkeley²⁵, Pearson declara que la materia no es nada. Pero cuando se trata de las relaciones del cerebro y el pensamiento, declara resuelto: “De la voluntad y la conciencia, asociadas a un mecanismo material, no podemos inferir nada que se parezca a la voluntad y la conciencia sin dicho mecanismo”. Pearson hasta formula una tesis, como resumen de la parte correspondiente de sus investigaciones: “La conciencia no tiene sentido alguno al margen de un sistema nervioso análogo al nuestro; es ilógico afirmar que toda la materia es consciente” (*pero es lógico suponer que toda la materia posee una propiedad esencialmente parecida a la sensación, la propiedad de reflejar*); “y más aún que la conciencia o la voluntad puedan existir fuera de la materia”. (LENIN, 1979, p. 94-95, grifo nosso).

Nessa citação, Lenin (1979) critica a compreensão de Pearson sobre a matéria e destaca seu posicionamento idealista subjetivista. Segundo o autor (1979), Pearson nega a existência da matéria, assim como Berkeley, mas ao mesmo tempo, estabelece a impossibilidade de existência da consciência sem matéria.

²⁴ Carlos Pearson (1857 – 1936) foi um matemático, biólogo e filósofo inglês.

²⁵ Jorge Berkeley (1685 – 1753) foi um filósofo inglês e bispo da igreja anglicana.

¡La confusión de Pearson es tremenda! La materia no es otra cosa que grupos de percepciones de los sentidos: tal es su premisa, tal es su filosofía. O sea, la sensación y el pensamiento son lo primario; la materia, lo secundario. Pero no, la conciencia sin materia no existe, y ni siquiera, según parece, sin sistema nervioso! Es decir, la conciencia y la sensación son lo secundario.

Nessa confusão teórica, Pearson expressa algo coerente, diz que é ilógico afirmar que toda matéria é consciente e que a consciência ou a vontade possam existir fora da matéria.

Nesse tocante, Lenin (1979) completa: mas é lógico supor que toda matéria possui uma propriedade essencialmente parecida à sensação, a propriedade de refletir. O reflexo é essencialmente parecido com a sensação, porque ela é um produto do desenvolvimento da matéria até seu mais alto grau, o cérebro humano.

Sendo assim, o reflexo é necessariamente uma propriedade universal do ser. Segundo Rubinstein (1963, p. 8):

Si la materia no poseyera la propiedad a que nos referimos, tendría razón el determinismo mecanicista al afirmar que el efecto de una acción depende tan sólo de las causas externas que actúan en calidad de impulso. Según esta teoría, las causas en su condición de impulso externo, las acciones externas, pasan a través del objeto sobre el que inciden sin modificarse, sin reflejarse en él.

Assim, se as ações externas passassem pelos objetos sem modificá-los, sem reproduzir suas particularidades e refletir-se neles, o desenvolvimento não seria possível e, portanto, não haveria movimento. Mais ainda, se o reflexo fosse somente a própria consciência como propriedade particular da matéria, teríamos a mesma conclusão.

Reafirmamos que a expressão do reflexo da materialidade não é a consciência. Esta é apenas uma forma particular de reflexo que caracteriza a matéria altamente organizada. Se a consciência fosse apenas a expressão objetiva do reflexo da matéria, ele não existiria antes da consciência. Se isso procedesse, ele deixaria de ser uma propriedade universal da matéria, constituiria uma propriedade particular, existente apenas na matéria altamente organizada. Portanto, não possibilitaria a

reprodução das particularidades de uma formação material que age sobre outra, ou seja, tornar-se-ia um movimento unilateral, negaria a interação e, por consequência, o próprio reflexo.

Diante do exposto, a discussão sobre a categoria reflexo estabelece os limites daquilo que é próprio da realidade física e do que é reflexo subjetivo dessa realidade. O objeto da Geometria é um reflexo da realidade física e, portanto, só existe na relação entre ela e a consciência. Com base nisso, negamos a existência desse objeto como inerente à realidade física e, também, como forma a priori da sensibilidade humana. Na seção a seguir, discutiremos a constituição da categoria consciência como um tipo especial de reflexo.

3.4 UMA PROPRIEDADE PARTICULAR DA MATÉRIA: A CONSCIÊNCIA

A consciência é a expressão ideal da realidade material, ou seja, é uma objetivação em forma de subjetividade. O movimento da consciência é dialético, porque assim também é a realidade material. Do mesmo modo, ela é uma das formas de movimento da matéria: social. “Destacando a ligação do ideal como o material e a dependência do primeiro com relação ao segundo, Marx salientou que: ‘(...) O movimento do pensamento é apenas a reflexão do movimento real, transportado e transposto para o cérebro do homem’” (CHEPTULIN, 1982, p. 94). Esse movimento que constitui a consciência tem em sua base a realidade material.

Para a dialética materialista, o ser das coisas determina a consciência, não o contrário, ou seja, o ser – aquilo que a coisa é – estabelece a possibilidade de representação e conceituação do existente. O processo de conhecimento da realidade pressupõe a abstração das legalidades do objeto para que se possa reconstruí-lo na consciência. O reflexo do objeto na consciência não o cria na realidade, como decorrência, surge uma nova objetivação, além de o próprio ser: o seu conceito. São dois tipos de objetivações: o ser e seu conceito. “Há duas realidades: a realidade objetiva que existe fora e independentemente da consciência e a realidade subjetiva engendrada pela primeira, da qual é reflexo” (CHEPTULIN, 1982, p. 95). Essa distinção é apenas no plano gnosiológico, pois ontologicamente a realidade constitui uma unidade indivisível.

No entanto, há uma diferença entre as objetivações de objetos físicos e de objetos intelectuais. Por exemplo, se ocorresse a extinção da

humanidade, implicaria necessariamente no desaparecimento do conceito de árvore. Esta, porém, permaneceria e, mesmo que ela se transformasse, continuaria a existência da sua materialidade física sob outra formação material particular (por isso, a realidade é independente de eu existir ou não). Para continuar a exemplificação, pensemos em um objeto produzido pela atividade humana: o estranhamento. Nesse caso, extingue-se tanto o estranhamento quanto o seu conceito, pois, apesar de ser independente de cada indivíduo consciente, não existe independente da humanidade. O conhecimento – produção intelectual – possui uma objetividade que é intermediada pela subjetividade, mas a matéria possui uma objetividade que independe dessa intermediação. Para a dialética materialista, a objetividade do conhecimento somente pode existir como criação humana a partir da realidade material.

Segundo Rubinstein (1963, p. 253, grifos do autor), “la conciencia presupone siempre una *actitud cognoscitiva respecto a un objeto* que se encuentra *fuera* de la propia conciencia”. O elemento cognitivo é característica apenas do reflexo em seu mais alto grau de complexificação, a consciência. Esta pressupõe a superação, por incorporação, de todas as outras formas de reflexos objetivos e se constitui como nova forma, como reflexo subjetivo. Porém, o elemento cognitivo é o limiar da constituição da consciência, pois “o reflexo da realidade é uma propriedade fundamental da consciência, que condiciona a possibilidade de existência de suas outras propriedades” (CHEPTULIN, 1982, p. 106).

Esse reflexo é expresso em imagens dos objetos e relações materiais que compõem a base da possibilidade do conhecimento. Conforme Cheptulin (1982, p. 100), “o saber é um modo ou uma forma de existência da consciência que não existe nele mesmo, mas na medida em que chegamos, por meio dele, à tomada de consciência (intelecção, compreensão) de um estado de coisas dado”. O conhecimento (nesse contexto, o autor fala em “saber” como sinônimo de conhecimento) da realidade material, o reconhecimento da existência de si e daquilo que o rodeia, é peculiar ao ser humano, ao seu nível de desenvolvimento da consciência. Ele, forma de existência da consciência, se dá na medida em que o homem atua socialmente na realidade ambiente. Nesse processo, cria-se não apenas a si mesmo, mas uma série de outros elementos que compõem a consciência.

Segundo Cheptulin (1982):

Ainda que a consciência manifeste-se como saber, ela está longe de lhe ser idêntica. A consciência

existe não apenas sob a forma de conhecimentos, mas igualmente sob a forma de emoções, sentimentos, vontade etc. [...] A consciência é formada unicamente pela rede de informações que entram no processo concreto do pensamento do sujeito e a partir dos quais elabora-se sua compreensão da situação. Em outros termos, a consciência não é todo o saber, mas somente aquele do qual o homem utiliza-se a cada momento dado, que nasce de seu cérebro, quando da compreensão dessa ou daquela situação concreta. (CHEPTULIN, 1982, p. 99).

As emoções, sentimentos, vontade etc. produzidos nas relações do homem com o mundo e com os outros homens complexificam o processo de conhecimento da realidade natural e humana. Essa relação com a realidade material é limitada pelo nível de desenvolvimento da consciência, bem como pelo processo produtivo da vida humana. Assim, a consciência é tão extensa quanto o processo concreto do pensamento do homem, ou seja, a consciência não expressa todo o conhecimento da realidade material e, portanto, não é absoluta em seu desenvolvimento, ao contrário, é expansível aos limites do desenvolvimento da realidade.

Cheptulin (1982, p. 99), na citação anterior, diz que a consciência é o saber “[...] do qual o homem utiliza-se a cada momento dado, que nasce de seu cérebro, quando da compreensão dessa ou daquela situação concreta”. Porém, o autor frisa em todo o texto a base material do nascimento desse conhecimento no cérebro humano. Quando ele afirma que o conhecimento nasce do cérebro, refere-se ao único lugar onde esse processo se faz possível, desde que relacionado com a realidade material.

O conhecimento humano só é possível porque existe a possibilidade de sua objetivação que ocorre pela produção e mediação da linguagem. Segundo Rubinstein (1963, p. 254):

El origen de la conciencia como forma específicamente humana de reflejar la realidad, se halla indisolublemente vinculado a la lengua: la lengua es condición necesaria para que surja la conciencia. Adquirir conciencia de una cosa significa reflejar la realidad objetiva por medio de significados generalizados que se han objetivado en la palabra y se han elaborado socialmente.

Sem a linguagem não é possível a existência da consciência e, por sua vez, a atividade criadora especificamente humana. É ela que possibilita a materialização do conhecimento humano e se torna elemento fundamental nesse traço distintivo da consciência, qual seja: constituir-se como reflexo consciente, superior às outras formas de reflexo da matéria. Para Cheptulin (1982, p. 105-106):

Essa particularidade reside no fato de que a consciência é o reflexo consciente da realidade, a compreensão pelo sujeito, de seu ser e de seu relacionamento, com o que o rodeia; que ela está ligada à fixação do objetivo e à atividade, tendo em vista realizar os objetivos e, ao mesmo tempo, transformar a realidade; ou, em outros termos, essa particularidade reside no fato de que a consciência é um aspecto e uma condição necessários da atividade criadora.

A consciência é uma forma nova e superior de reflexo, isto é, subjetivo, diferentemente dos outros tipos objetivos como: mecânico, físico, químico e orgânico. A atividade criadora constitui-se nas mesmas relações materiais dos reflexos objetivos, porém com um grau qualitativo superior de transformação consciente da realidade. Esse grau qualitativo superior é o conhecimento do processo de produção e reprodução dos reflexos, suas consequências e, por sua vez, a possibilidade de prever os acontecimentos por meio da produção de generalizações, juízos, conceitos etc.

Como dito anteriormente, a consciência é uma propriedade particular da matéria altamente organizada e, ainda assim, em uma organização biológica específica. A existência dessa organização da matéria não garante a formação da consciência, pois tem de entrar nas relações estabelecidas pelo reflexo consciente as possibilidades sociais, como, por exemplo, a linguagem.

Segundo Cheptulin (1982, p. 90):

O fato de que a consciência seja um aspecto da forma social do movimento da matéria, um “produto social”, é frequentemente deixado de lado pelos autores que estudam o problema da consciência. [...] Não há dúvida de que a consciência está ligada a certos processos que se desenvolvem no cérebro, mas esses processos não

têm condições para engendrar a consciência. Para que ela apareça, o ser possuidor de um cérebro deve necessariamente estar incluído em um sistema de relações sociais e agir em comum com outros homens; ou, em outros termos, deve viver uma vida humana, social.

Nesse sentido, as condições biológicas do reflexo, próprio à matéria, são apenas a condição inicial do processo de produção da consciência. A forma viva, biologicamente organizada, do movimento da matéria ainda não garante a superioridade necessária para produzi-la. Sua produção ocorre quando, sobre a base de todas as outras formas de movimento, a matéria desenvolve a mais superior forma de seu movimento: a social. Assim, completa Cheptulin (1982, p. 91):

É por isso que não podemos admitir a afirmação de que a consciência é uma função, um produto, uma manifestação ou uma propriedade de interações fisiológicas, isto é, uma forma biológica do movimento da matéria. Ela é uma propriedade, um produto, um resultado de interações sociais, uma forma social do movimento da matéria, que encerra em si, sob uma forma anulada, todas as outras formas anteriores do movimento, notadamente as forma física, química e biológica.

Evidentemente, essa relação do movimento social da matéria que possibilita o surgimento da consciência, não surge especificamente de funções puramente fisiológicas, como também não é uma produção ideal independente da materialidade. Essa independência se refere tanto à materialidade do cérebro e da complexa formação biológica do homem como também aos objetos do conhecimento. Ou seja, a consciência não existe alheia à realidade ambiente da qual faz parte e reflete em forma subjetiva. Conforme Cheptulin (1982, p. 108):

A consciência não pode criar, não pode produzir nada de novo sem refletir a realidade, sem apoiar-se em suas propriedades e ligações necessárias refletidas nas leis de sua transformação e de seu desenvolvimento, porque tudo o que é novo, que aparece na realidade objetiva, graças ao homem, em decorrência da atividade criadora de sua

consciência, deve submeter-se a leis objetivas, existentes fora e independentemente da consciência. Além disso, toda verdadeira criação é o reflexo e a realização na consciência e na realidade de possibilidades reais.

A atividade criadora só é possível por meio do reflexo subjetivo da materialidade do mundo e suas relações objetivas. O desenvolvimento do conhecimento geométrico, por exemplo, traça o caminho da análise das formações materiais e sua constante transformação. Esse conhecimento não é um jogo especulativo da consciência, com uma estrutura intrínseca e uma forma a priori da sensibilidade humana. As relações métricas do espaço estão dadas na materialidade do mundo. Porém, somente a consciência pode refleti-las em forma de conhecimento e estabelecer abstratamente os nexos e as estruturas dos seus movimentos. Nesse caso, o objeto da geometria não é constituinte da realidade física, pois ele é a imagem dessa realidade. Em contrapartida, essas imagens não são elementos autônomos, que existem ao lado dos objetos físicos, elas se referem a esses objetos, compõem sua constituição e entram no fluxo de seu movimento reflexivo. Segundo Belov (1955, p. 286), “[...] o conteúdo material da consciência não se encontra na própria consciência, mas fora dela – no mundo exterior que é refletido pela consciência. Assim, a consciência não tem outro conteúdo senão o mundo que está fora dela, independente dela e que ela reflete”.

Desse modo, o conteúdo do objeto da geometria não está na consciência, mas fora dela, está na realidade física. Sua existência enquanto tal está nas relações conscientes estabelecidas pelo reflexo subjetivo que produz a consciência. Belov (1955, p. 286) completa: “[...] a representação do objeto e o próprio objeto não são dois objetos igualmente reais. A representação do objeto é apenas a imagem mental do objeto real, não é material, mas ideal. O conteúdo objetivo do pensamento não está no próprio pensamento, mas fora dêle”.

Rubinstein (1963, p. 28) também explica a relação do objeto com a consciência que o reflete:

La imagen no es una cosa ideal, existente al lado del objeto, sino la imagen del objeto. [...] La imagen lo es siempre de algo que se encuentra fuera de ella. El concepto mismo de imagen presupone relación hacia algo reflejado por ella. La sensación, la percepción, etc., llegan a ser

imagen sólo en virtud de su relación con el objeto del que son imagen. La imagen, por ende, no constituye un algo ideal existente en el mundo interior de la conciencia de modo semejante a como un objeto real existe en el mundo de la materia; tampoco es, el objeto, una imagen exteriorizada. La imagen como tal se constituye por la relación cognoscitiva de una impresión sensorial respecto a la realidad que se halla fuera de dicha imagen y que no queda reducida al contenido de la imagen.

A relação gnosiológica não está alheia ao objeto material refletido pela consciência. Ou seja, não existe uma imagem que seja alheia a qualquer objeto material e se constitua em imagem puramente ideal. Ela não existe como forma pura, é uma imagem de um objeto e só existe na relação cognitiva. Uma vez que não existe essa relação, a consciência que possa refletir esse objeto, a imagem ideal não existirá. Os reflexos objetivos, próprios a toda matéria, são independentes da consciência e se realizam nas formas mecânica, física, química e biológica. Porém, os reflexos subjetivos dependem das relações cognitivas, do desenvolvimento da sensação, percepção, e só existem enquanto tiver a consciência. “Nuestras sensaciones, nuestra conciencia son sólo la *imagen* del mundo exterior, y se entiende por si solo que el reflejo no puede existir sin lo reflejado, mientras que lo reflejado existe independientemente de lo reflectante” (LENIN, 1979, p. 70, grifo do autor). A citação de Lenin (1979) estabelece limites materialistas à teoria do reflexo e destaca a não existência do reflexo sem o refletido.

Segundo Gaidukov (1955, p. 353), “a sensação, sendo subjetiva pela sua forma, é objetiva pelo seu conteúdo originário”. Isso significa que a sensação e a percepção são funções do cérebro, da organização biológica do homem, mas seu conteúdo não é determinado pelo sistema nervoso, mas pelas relações sociais estabelecidas concretamente na realidade material.

No que diz respeito ao exemplo anteriormente citado, o conteúdo do objeto da Geometria se encontra nas relações espaciais da realidade física. Entretanto, esse objeto não existe sem as relações cognoscitivas. A organização da geometria da realidade física estabelece-se nos próprios objetos físicos desse mundo e suas relações entre si. Entretanto, a imagem de tais conexões somente se constitui na consciência que os reflete.

O objeto da geometria não pode existir na realidade física porque é, em sua essência, uma abstração. Contudo, ele somente é uma abstração, pois seu conteúdo originário é material, compõe a realidade física do mundo. É, portanto, ideal, que não encerra em si os traços do objeto material, tampouco do sistema nervoso, constitui-se na relação entre os primeiros que são refletidos pelos segundos.

A idealidade da consciência, segundo Cheptulin (1982, p. 93-94):

Exprime-se no fato de que suas imagens constitutivas não possuem nem as propriedades dos objetos da realidade refletidos nela, nem as propriedades dos processos nervosos a partir dos quais nasceram. Elas não encerram nem um grão de substância, característica da realidade refletida e do cérebro. São, além disso, privadas de peso, de características espaciais e de outras propriedades físicas. Distinguindo-se fundamentalmente do material, o ideal lhe é organicamente ligado. Ele aparece e existe unicamente no material – no cérebro do homem – e é um produto da interação do homem com a realidade ambiente, por um lado, e do homem com outros homens, por outro lado. Seu conteúdo é determinado por essa realidade, a qual representa o reflexo.

A necessidade das relações do homem com a realidade ambiente é imprescindível para que surja e se desenvolva a consciência, pois não pode existir reflexo alheio à base material. Ou seja, não pode existir reflexo puro. Porém, como dito antes, isso é apenas o princípio, uma vez que o desenvolvimento do reflexo que se transforma em consciência não se efetiva sem a linguagem. Portanto, não existe sem a relação do homem com outros homens. A possibilidade de construção da consciência e da linguagem se efetiva apenas nas relações sociais estabelecidas e está diretamente ligada ao nível de desenvolvimento ao qual se encontra dada civilização, em determinada época.

Para Cheptulin (1982, p. 104):

A consciência representa um reflexo consciente ideal por sua natureza, associado à compreensão, pelo sujeito, do que é refletido, reflexo que antecipa a realidade, representa de forma subjetiva o resultado de sua transformação e de seu

desenvolvimento, e, a partir disso, torna possível a fixação do objetivo e a criação.

Rubinstein (1963, p. 6, grifo do autor) afirma:

No hay por qué hablar [...] de la imagen de la sensación o de la percepción como de un objeto que existe al margen de toda realidad material en el mundo ideal de la conciencia, de modo semejante a como los objetos existen en el mundo de los objetos materiales. Las sensaciones, las percepciones, etc., de por sí, constituyen la *imagen del objeto*. Su contenido gnoseológico no existe sin estar relacionado con el objeto.

É justamente essa imagem do objeto, e não ele em si, que é construído pela consciência no processo reflexivo. O conteúdo gnosiológico está sempre relacionado ao objeto do qual se origina e possibilita ao homem antecipar idealmente a realidade, representar de forma subjetiva a sua transformação e seu desenvolvimento. A partir disso, segundo Cheptulin (1982), torna-se possível fixar objetivos e exercer a atividade criadora.

Rubinstein (1963, p. 31, grifos do autor) ratifica sua compreensão sobre a relação entre o objeto e a consciência ao afirmar que “[...] la imagen del objeto es una *forma de reflejo de la existencia de las cosas*; es una forma ideal, es decir, reflejado en el sujeto, en su cerebro. Esto significa que *la imagen del objeto no es el objeto mismo, ni es tampoco el signo del objeto, sino su reflejo*”.

Como dito antes, o reflexo tem como base a realidade material, porém, as condições internas do refletor também determinam o seu movimento. Assim, o reflexo subjetivo que se constitui como consciência se complexifica também com determinações dela própria e das relações estabelecidas pelo sujeito cognoscente.

Segundo Cheptulin (1982, p. 98):

Existindo sob a forma de imagens ideais surgidas no cérebro do homem em decorrência da interação com a realidade que a rodeia, a consciência representa um reflexo subjetivo da realidade. A subjetividade da consciência exprime-se no fato de que ela existe como mundo interior, espiritual do homem-sujeito e da sociedade humana, que

reflete o mundo exterior, a realidade objetiva. Mas, tudo o que constitui o mundo interior do sujeito, tudo o que entra na esfera de sua consciência, não depende dele. No mundo subjetivo do homem há aspectos e momentos que são condicionados pela realidade objetiva, que correspondem a ela e que não dependem nem do homem-sujeito, nem da humanidade. Esses aspectos e esses momentos representam igualmente o objetivo no subjetivo e constituem uma forma particular da existência do mundo exterior no mundo interior do sujeito. A consciência, sendo assim o reflexo subjetivo da realidade objetiva, representa a unidade do subjetivo e do objetivo, a unidade do que depende do sujeito, do estado de seu sistema nervoso, de sua experiência individual, de sua situação social, de suas condições de vida etc. e do que não depende dele, mas que é condicionado pela realidade ambiente e a reflete.

O autor relaciona os aspectos que dependem do sujeito (estado de seu sistema nervoso, de sua experiência individual, de sua participação e de suas condições de vida) com os independentes, para estabelecer as determinações desses estados e da realidade ambiente. Essa unidade encerra esses estados do sujeito também nas condições e relações que existem na realidade objetiva.

A unidade dialética da relação entre objeto e consciência constitui um núcleo indissociável no desenvolvimento do reflexo subjetivo como forma especial de reflexo da realidade material. Ela compõe o surgimento e o desenvolvimento da consciência e estabelece o nível de desenvolvimento do conhecimento dessa realidade.

A compreensão das relações entre ser e consciência permite estabelecer os limites e possibilidades de complexificação do conhecimento, como também das bases materialistas desse processo. A teoria do reflexo, com fundamentos dialético-materialistas, segundo defendemos, delimita o objeto da Geometria como reflexo da realidade física e não como uma parte constitutiva dessa realidade, tampouco uma forma a priori da sensibilidade.

Para compreender essa relação entre a realidade material e o conhecimento matemático, mais especificamente o conhecimento geométrico, seguimos com o quarto capítulo que trata dos traços

característicos da matemática com base nas concepções idealistas e materialistas dessa ciência.

4. RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A REALIDADE MATERIAL

Neste capítulo apresentamos os traços característicos da Matemática com base nos seus elementos, vistos por duas concepções: idealista e materialistas. Na sequência tratamos especificamente desses traços, quais sejam: (1) a abstração; (2) a precisão, o rigor lógico e o irrefutável caráter de suas conclusões; e (3) o amplo campo de aplicações.

4.1 TRAÇOS CARACTERÍSTICOS DA MATEMÁTICA: ELEMENTOS DAS CONCEPÇÕES IDEALISTAS E MATERIALISTAS

Nosso pressuposto é que o conhecimento matemático tem um lugar importante na formação humana. Afinal, desde o homem mais primitivo até seu atual estágio de desenvolvimento, suas relações quantitativas e espaciais se constituíram em condições indispensáveis à compreensão da realidade. Pode-se observar, na história da Matemática, que o movimento de seu surgimento desde muito cedo, ocorre concomitante ao desenvolvimento da linguagem. O ser humano surgiu em um mundo com forma, movimento e tempo constituintes da matéria. Dessa maneira, sua adaptação ativa o impeliu à produção dos conhecimentos necessários, imediatos ou mediatos, para ser e estar nesse mundo. Um deles é o matemático que, inicialmente, se constituía como um conjunto de regras prosaicas para satisfação de necessidades imediatas e, posteriormente, desenvolveu-se como uma ciência.

A relação entre a matemática e a realidade material se expressa na relação entre a consciência e o ser. Anteriormente falamos de nosso pressuposto sobre duas perspectivas sobre o objeto da Geometria, uma idealista e outra materialista mecanicista. Ambas são equivalentes tanto para a compreensão da Geometria como para a Matemática em geral.

A formalização dessa ciência proporcionou o enrijecimento de sua base e estrutura, sobretudo fundamentado nos axiomas formais que a tornou uma “ciência exata”, em certa medida formada pelo pensamento puro. No entanto, pressupomos que não se pode pensar em uma ciência exata quando analisamos com zelo, por exemplo, os números racionais, o cálculo infinitesimal, os números irracionais, a estatística, a probabilidade etc.

Engels (1979) apresenta uma compreensão sobre o desenvolvimento da Matemática, sua determinação histórica, bem como seu movimento conceitual:

Matemática – Nada parece descansar em bases mais estáveis do que a diferença entre as quatro operações, elementos fundamentais de toda a matemática. E, no entanto, já de início se manifesta a multiplicação como sendo uma soma abreviada; e a divisão, como uma subtração abreviada de um número determinado de grandezas numéricas iguais; e num certo caso – quando o divisor é fracionário – a divisão é efetuada multiplicando-se o dividendo pelo divisor invertido. Mas no cálculo algébrico se vai muito mais longe. Cada subtração $(a - b)$, pode ser representado como uma soma $(-b + a)$; cada divisão $\frac{a}{b}$ pode transformar-se em um produto $a \times \frac{1}{b}$. No cálculo com potências, vai-se ainda mais longe. Todas as diferenças rígidas entre as espécies de cálculo desaparecem, tudo pode ser representado sob a forma oposta. Uma potência pode ser transformada em uma raiz $x^2 = \sqrt{x^4}$; uma raiz, como potência $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. A unidade, dividida por uma potência ou raiz, pode ser representada como potência do denominador ($\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$). A multiplicação ou divisão de uma grandeza, pode ser convertida na soma ou subtração de seus expoentes. Cada número pode ser concebido e representado, como sendo a potência de qualquer outro número (logaritmos, $y = a^x$). E essa transformação de uma expressão em sua oposta, não é uma brincadeira ociosa: é uma das mais poderosas alavancas da ciência matemática, sem a qual hoje em dia dificilmente se pode realizar um cálculo mais complicado. Se eliminássemos da matemática apenas as potências negativas e fracionárias, até onde poderíamos chegar? (ENGELS, 1979, p. 156).

O autor cita alguns exemplos de elementos matemáticos básicos e evidencia as suas potencialidades abstratas. A pergunta final da citação é

difícil – quiçá impossível – de responder, pois a concatenação dos conceitos matemáticos alcançou e alcançará patamares elevados de abstração e, por conseguinte, de interpretação da realidade material. Ainda que todos os ramos da Matemática – Álgebra, Geometria, Aritmética etc. – possuam objetos de conhecimento específicos, eles interagem mutuamente nas suas próprias formações conceituais e, por sua vez, dependendo do método, assumem sentidos diferentes. Esse movimento dos conceitos, como expressa Engels (1979), possibilita um dinamismo dos próprios conceitos, sobretudo da interpretação da realidade na sua própria dinâmica. Isso possibilita a compreensão do movimento dialético objetivo e amplia o campo de atuação do homem na transformação da realidade.

Do mesmo modo, o acentuado caráter mecanicista na compreensão do conhecimento matemático e seu caráter puramente abstrato são expressões de concepções da Matemática, que são manifestações de um método no tratamento do conhecimento matemático e implicam a compreensão do seu objeto. “Este objeto lo constituyen, según la definición de F. Engels, las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real” (RÍBNIKOV, 1987, p. 9).

Tanto uma concepção materialista mecanicista quanto uma idealista tratam o conhecimento matemático como absoluto e alheio ao desenvolvimento histórico. O conhecimento geométrico, por exemplo, traz uma perspectiva utilitarista em uma concepção materialista mecanicista e, por sua vez, na concepção idealista apresenta uma transcendência em relação a realidade material. “Viendo la extrema abstracción y fuerza lógica de los resultados matemáticos, los idealistas imaginan que la matemática brota del pensamiento puro” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 23).

Para uma concepção idealista, a Matemática existe independentemente da realidade objetiva. Seus conceitos possuem gênese no pensamento puro e se desenvolvem no próprio processo de constituição das ideias. O pensamento puro cria conceitos derivados de outros, sem a necessária ligação com a realidade material, pois é a ideia matemática que produz sua própria significação. Essa concepção pode ter fundamento no entendimento de que os objetos da Matemática “no representan directamente la realidad dada. Ellos son fruto de la abstracción” (RÍBNIKOV, 1987, p. 11). Porém, essas abstrações se constituem como uma forma de movimento da matéria, a social, que se expressa subjetivamente na consciência.

Segundo Aleksandrov (1991a, p. 11), “esta cualidad de las matemáticas dio lugar, ya en la antigüedad, a nociones idealistas sobre su independencia respecto del mundo material”. Não somente na antiguidade, mas ao longo de toda história da humanidade se expressaram concepções idealistas sobre seu objeto, sobretudo quando se desenvolviam conceitos matemáticos sem aplicações imediatas na prática social dos homens. Também, quando seus conceitos representavam uma contradição, com a realidade material, que é expressa em paradoxos. Estes podem ser aparentes, na medida em que não expressam uma contradição entre os conceitos e a realidade, mas entre os novos conceitos e os limites do conhecimento da realidade, num determinado momento histórico.

Defensores ferozes dessa perspectiva idealista, como o bispo Berkeley, frequentemente deram o tom da crítica ao materialismo, com base nas contradições que surgem no desenvolvimento de novas teorias matemáticas. Entretanto, encontramos opositores – que consideramos mais lúcidos e com argumentos menos ferozes –, porém com as mesmas ideias idealistas com base nas dificuldades encontradas nesses conceitos.

Segundo Gerdes (2008 p. 39-40):

Em vez de ridiculizar determinadas dificuldades ao tratar o ‘infinitamente pequeno’ ou o ‘infinitamente grande’, tal como Berkeley o fez, o padre italiano Guido Grandi (1671 – 1742) utilizava-se de uma maneira inteligente. Assim, existia um paradoxo ao calcular a soma da seguinte série infinita:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \dots?$$

Aplicando cegamente as regras para somas finitas, obtém-se por um lado:

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= \\ = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots &= \\ = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots &= \\ = 0, & \end{aligned}$$

e por outro lado:

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= \\ = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots &= \\ = 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - \dots &= \\ = 1. & \end{aligned}$$

Deste modo temos, segundo Grandi, $0 = 1$, o que para o padre demonstra a possibilidade de deus ter criado o mundo ($=1$) a partir do nada ($= 0$)!

Ainda que usada de uma forma inteligente, o padre italiano utiliza-se das dificuldades dos conceitos matemáticos ao tratar o conceito de infinito para provar suas crenças teológicas. Para a dialética materialista, essa contradição não anula o poder da matemática na compreensão da realidade, ao contrário, potencializa a compreensão desses conceitos em relação à realidade material. Com tal clareza, Marx (1983) fez uma análise sistemática do cálculo diferencial para compreender os conceitos de infinitamente grande e infinitamente pequeno. Segundo Gerdes (2008, p. 40), “sabendo destes ‘abusos idealistas’, Karl Marx viu-se obrigado a aprofundar a sua análise do cálculo diferencial ‘místico’ de Leibniz²⁶ e Newton²⁷ para poder chegar a uma fundamentação materialista do cálculo infinitesimal”.

A fundamentação materialista de Marx (1983) não anula as contradições, mas aponta uma crítica à visão idealista de precisão matemática sem movimento. O autor mostra, segundo Gerdes (2008), que, com o crescimento indefinido de uma série numérica, essa tendência ao infinito pode contribuir para uma visão idealista da Matemática. Desse modo, para Gerdes (2008, p. 38, grifo do autor), “devido a este tratamento contraditório e misterioso das ‘grandezas infinitamente pequenas’, Marx chama, na sua análise histórica, *místico* ao cálculo diferencial de Newton e Leibniz, caracterizando assim a ‘doença infantil do cálculo infinitesimal”.

O cálculo de Newton e Leibniz, segundo essa caracterização de Marx (1983), apresenta elementos da ausência do nascimento e desenvolvimento desses conceitos, bem como das explicações da natureza de suas propriedades específicas. Nas palavras de Gerdes (2008, p. 41-42, grifos do autor):

Resumindo, podemos dizer que Marx achava místico o cálculo diferencial de Newton e Leibniz por eles terem introduzido *metafisicamente* os diferenciais dx e dy , quer dizer, as grandezas infinitamente pequenas, sem ter clarificado o seu

²⁶ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) foi um filósofo e matemático alemão.

²⁷ Isaac Newton (1643 – 1727) foi um físico, filósofo e matemático inglês.

nascimento, e desenvolvimento, nem ter analisado a natureza das suas propriedades específicas.

Nessa análise de Marx (1983) sobre o cálculo diferencial, aparecem questionamentos sobre a lógica interna da matemática em concatenação com a realidade material. Um exemplo analisado é o paradoxo “Aquiles e a tartaruga”, um dos quatro paradoxos de Zenão de Eléia²⁸, o da dicotomia. Segundo esse paradoxo, Aquiles é colocado em um ponto e uma tartaruga é colocada a uma dada distância a sua frente. A pergunta é: Aquiles pode alcançar a tartaruga? Bem, fisicamente sim, ele alcança a tartaruga. Porém, alguns matemáticos idealistas fazem desse paradoxo uma abstração pura e mistificam a matemática a tal ponto que fundamentam a sua teoria de que o movimento não existe. Segundo Gerdes (2008, p. 80, grifos do autor):

A distância entre Aquiles e a tartaruga, inicialmente $|A_0T_0|$, depois $|A_1T_1|$, $|A_2T_2|$, $|A_3T_3|$, $|A_4T_4|$, etc., ficará cada vez mais pequena, tendendo para zero. Mas a distância tornar-se-á uma vez igual a zero? Para os matemáticos e filósofos, que, ao utilizarem as definições de limite de Cauchy²⁹-Weierstrass³⁰, deixam em aberto se o acontecimento $\Delta x = 0$ vai ter lugar ou não. Para estes matemáticos e filósofos parece, neste exemplo, ser apenas uma questão da nossa *vontade* se Aquiles apanha a tartaruga ou não. É este voluntarismo escondido que Marx implicitamente critica: Aquiles é na realidade capaz de ultrapassar a tartaruga, a distância entre os dois será uma vez *igual* a zero, pois isso o limite será alcançado. [...] Podemos verificar que Marx exigiu a máxima clareza de pensamento ao interpretar o aparelho formal dos símbolos (neste exemplo, Δx tende apenas para 0 ou torna-se igual a 0), salientando como *materialista*, que a matemática só pode ser significante e relevante, quando reflectir processos do mundo real.

²⁸ Zenão de Eléia (490 a. n. e. – 430 a. n. e.) foi um filósofo pré-socrático da escola eleática.

²⁹ Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) foi um matemático francês.

³⁰ Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 – 1897) foi um matemático alemão.

Assim, a exigência é por uma clarificação da relação entre os conceitos matemáticos e o movimento da realidade material. O distanciamento das abstrações matemáticas em relação à realidade material é necessário. Porém, a cristalização dessas abstrações ao não percorrer o caminho de volta, transforma a matemática em uma ciência que independe da realidade material, isto é, em uma ciência do pensamento puro. Por isso, Gerdes (2008) enfatiza que, para Marx (1983), a Matemática só é significativa e relevante quando reflete os processos da realidade material: “O raciocínio de Marx implica, ao mesmo tempo, uma crítica ao ‘formalismo’ e ao ‘empirismo’ na interpretação da matemática” (GERDES, 2008p. 80-81).

Essa crítica perpassa a análise histórica do objeto da matemática, pois o movimento histórico revela os momentos em que as abstrações se desenvolvem com base na estrutura lógica interna da própria matemática. Somente em um momento mais avançado de desenvolvimento das ciências é que essas abstrações se efetivam como relações surgidas na realidade material. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 35, grifo do autor), “la historia de los conceptos de la aritmética muestra cuán equivocado es el punto de vista idealista de que surgen de ‘pensamiento puro’, de la ‘intuición innata’, de la ‘contemplación de formas a priori’, o algo similar”. O autor cita a aritmética, porém tem a mesma compreensão em relação às outras áreas da matemática.

Na mesma direção, Ríbnikov (1987, p. 11) compreende o surgimento das abstrações matemáticas na dinâmica da prática social humana:

Lo abstracto del objeto de las matemáticas sólo ensombrece el surgimiento (frecuentemente complejo, multigradual, mediado) de todos los conceptos de la matemática a partir de la realidad material, pero en ningún caso lo suprime. La historia muestra que las reservas de las relaciones cuantitativas y formas espaciales estudiadas por las matemáticas, constantemente se engruesan en relación indisoluble con las exigencias de la técnica y las ciencias naturales, completando cada vez más el rico contenido de la definición general de las matemáticas.

A supressão do surgimento da matemática a partir da realidade material esconde seu desenvolvimento lógico-histórico. Os processos

complexos, multigraduais e os mediados pelas relações sociais de cada época são desconsiderados e sobra apenas a lógica de um pensamento matemático puro. Diante disso, surgem algumas perguntas, tais como: se a matemática brota do pensamento puro, de uma sensibilidade a priori, por que seus conceitos não se apresentam a homem universalmente? Ou seja, por que surgem singular e parcialmente em cada época? Se os conceitos matemáticos são verdades apriorísticas, como explicar seu crescente desenvolvimento? Tais perguntas carregam em si nosso pressuposto de negação das perspectivas idealistas e suas compreensões do objeto da matemática. Elas são respondidas, por Ribnikov (1987), na segunda metade da citação anterior, ao afirmar a ampliação constante da relação indissolúvel entre o aumento do conhecimento matemático e as exigências de outras ciências.

A área da matemática pura contribui significativamente para fundamentar a perspectiva idealista do objeto da matemática. Isso passa pelas demonstrações matemáticas de suas grandezas em um patamar puramente teórico. Segundo Engels (1976, p. 34-35, grifos do autor):

A aparente demonstração das grandezas matemáticas não prova tampouco sua origem apriorística, mas apenas sua concatenação racional. Para se poder chegar à idéia da **forma** de um cilindro, pela rotação de um retângulo em torno a um de seus lados, foi necessário investigar-se, na realidade, apesar de ser forma bastante rudimentar, toda uma série de retângulos e cilindros. As matemáticas, assim como todas as outras ciências, surgiram das **necessidades** dos homens, da necessidade de medir terras e volumes, do cálculo do tempo e da mecânica. Mas, como acontece em todos os campos do pensamento humano, ao chegar a uma determinada fase de desenvolvimento, as leis abstraídas do mundo real se vêm separadas desse mundo real do qual nasceram, consideradas como se fôssem alguma coisa aparte, como se fôssem leis vindas de fora e às quais o mundo se deveria ajustar.

Engels (1976) expressa claramente a supressão da origem material e histórica ocorrida nas ciências, em especial na matemática, e coloca os marcos idealistas. Dessa forma, esses supostos conceitos

puramente abstratos devem encontrar na realidade o seu correspondente material. Na crítica a Dühring, Engels (1976, p. 34, grifos do autor) afirma:

Nas matemáticas puras pode, segundo êle, mover-se livremente a inteligência, com as “suas criações e imaginações próprias”; os conceitos de números e de figura são o “seu objetivo suficiente e a sua própria obra”, razão pela qual as matemáticas puras têm “uma validade independente da experiência **concreta** e do conteúdo real do mundo”. É indubitavelmente certo que os conceitos das matemáticas puras regem independentemente da experiência **concreta** de qualquer indivíduo, ainda que essa virtude não pertença exclusivamente às matemáticas, o que é fato comum comprovado por todas as ciências, e, mais ainda, a todos os fatos em geral, cientificados ou não.

Engels (1976) faz a crítica à compreensão idealista de Dühring sobre a matemática e destaca a autonomia relativa das abstrações matemáticas em relação à realidade física. Porém, segundo ele, essa autonomia é relativa porque é apenas um momento do processo de conhecimento, uma vez que o objeto da Matemática não é uma constituição própria da realidade física. Ele existe na mediação entre a consciência e tal realidade. Assim, Engels (1976, p. 34, grifos do autor) completa:

O que não é certo é que as matemáticas puras são entendidas pela inteligência apenas com as suas próprias criações e imaginações. De onde são tirados os conceitos de número e figura, senão do mundo real? Os dez dedos pelos quais se aprende a contar e, por conseguinte, a executar a primeira operação aritmética, nada têm de uma livre criação do espírito. E, para contar, não só fazem falta os objetos contáveis, como também a capacidade de prescindir, à vista desses objetos, de todas as suas qualidades, com exceção da do número, capacidade que é fruto de um longo desenvolvimento histórico, empírico. E o mesmo que acontece com o conceito de número, acontece também com o da figura, que é tomado

exclusivamente no mundo exterior e não surge no cérebro de ninguém por obra da pura especulação. Tiveram que existir objetos que apresentassem uma forma, e cujas formas pudessem ser comparadas entre si, para que pudesse surgir o conceito de figura. As matemáticas puras versam sobre as formas no espaço e as relações quantitativas do mundo exterior, e, portanto, de uma matéria bastante real. O fato de essa matéria se nos apresentar sob forma sumamente abstrata, apenas superficialmente, pode nos fazer crer que não têm sua origem no mundo exterior. O que acontece é que, para poder investigar essas formas e relações em toda a sua pureza, é necessário desligá-las completamente de seu conteúdo, deixando-o de lado como indiferente, para assim chegarmos aos pontos sem dimensões, às linhas sem largura e espessura, aos **a**, aos **b**, aos **x** e aos **y**, às constantes e às variáveis; e por fim, depois de percorrer todos esses caminhos, chegarmos às criações verdadeiramente livres da inteligência, isto é, às grandezas imaginárias.

Desse modo, Engels (1976) evidencia algo essencial do objeto da Matemática, qual seja, a necessária abstração de todas as características dos objetos físicos, exceto suas relações quantitativas e espaciais. Esse traço característico do objeto da Matemática é a porta de entrada das elucubrações das perspectivas idealistas, da destruição da origem da Matemática a partir da realidade material. Nesse sentido:

Se quisermos progredir um pouco, não teremos outro remédio senão introduzir nas verdades, fenômenos reais, relações e formas plásticas, tomadas da realidade. As idéias de linha, de superfície, de ângulo, de quadrado, de quadrilátero, de esfera, etc., etc., são todas idéias derivadas da realidade, e apenas quem professa um ideologia inteiramente ingênua pode crer nos matemáticos quando estes dizem que a primeira linha se originou do movimento de um ponto no espaço, a primeira superfície do movimento de uma linha, o primeiro corpo, do movimento de uma superfície, e assim sucessivamente. Até a própria linguagem se revolta contra semelhante

tese. Uma figura matemática de três dimensões chama-se corpo e, em latim, **corpus solidum**, que significa a mesma coisa que corpo tangível, nome, como vemos, que não pode ter nascido de um ato, intelectual e livre, da imaginação pura, mas da realidade concreta. (ENGELS, 1976, p. 35-36, grifo do autor).

Para o autor, avançar na compreensão e desenvolvimento da Matemática pressupõe atravessar as verdades lógicas dessa ciência com os fenômenos reais, com as relações e forma plásticas da realidade física. Quando esse procedimento é marginalizado, adquire força a concepção idealista da Matemática e a fundamentação do surgimento de seus conceitos a partir daqueles já existentes sem a necessidade de demonstração, ou seja, fundamenta-se os axiomas apriorísticos. As abstrações matemáticas são reflexos corrigidos da realidade, que nos fornece apenas “formas brutas”, sem lapidação intelectual. Isso significa que jamais encontramos na natureza formas perfeitas, ou seja, formas regulares próprias ao processo de abstração.

Lukács (2012, p. 64-65) afirma:

De nenhuma lógica do mundo poder-se-ia obter a proposição de que a circunferência do círculo é igual a $2\pi r$. Por outro lado, tais proposições não precisam ser corroboradas na realidade física. Ao contrário, a geometria espelha uma realidade reduzida à pura espacialidade e, portanto, homogeneizada, investigando nesse meio homogêneo as conexões legais de configurações puramente espaciais. Essa homogeneização verifica-se já no fato de que as dimensões do espaço adquirem desse modo um puro ser-para-si que, na realidade física das coisas, por princípio não poderiam ter.

O autor evidencia a relação entre o reflexo e a própria forma existente na realidade física. Assim, em nenhuma forma circular de objetos da natureza poderá encontrar-se as medidas $2\pi r$, uma vez que ela só existe na abstração do conceito de circunferência. Obviamente, as aproximações sucessivas são feitas para satisfazer as necessidades em cada situação concreta. Anteriormente, falamos sobre o cálculo infinitesimal analisado por Marx (1983) e do paradoxo “Aquiles e a tartaruga”, que, por sua vez, nos deparamos novamente com a questão

do alcance ou não do limite matemático do cálculo. Naquele caso, perguntávamos se Aquiles alcançaria a tartaruga e, agora, questionamos se atingiríamos a medida $2\pi r$. Da mesma forma que no exemplo do paradoxo, respondemos afirmativamente tal possibilidade. Porém, dentro dos limites da realidade material e com as devidas abstrações corrigidas.

A homogeneização, citada por Lukács (2012), é característica da abstração, particularmente da Matemática, pois lida com relações quantitativas e espaciais em forma conceitual. Tal característica provém da realidade material e para ela retorna, na prática social humana, mas se estrutura conceitualmente de forma relativamente autônoma.

No domínio da relação da Matemática com a realidade material, encontramos o caminho para uma correta compreensão materialista dessa ciência. Para tanto, é imprescindível saber distinguir as diferentes perspectivas de compreensão da ciência Matemática, como afirma Ríbnikov (1987, p. 19):

Es necesario saber diferenciar, por ejemplo, entre las diversas formas de negación de las leyes objetivas del desarrollo de la ciencia en general, entre ellas las matemáticas, su orientación idealista y reaccionaria, comprender los métodos de descrédito de las tendencias científicas progresistas y de las actividades de los científicos progresistas.

Essa compreensão nem sempre é clara e muitos estudiosos professam compreensões idealistas ou materialistas sem ao menos saber disso, “fazem isto sem o saber” (MARX, 2011, p. 96). No exemplo do desenvolvimento do cálculo diferencial, surgido das necessidades da prática social humana – ou seja, do desenvolvimento da produção da vida dos homens, expressa pelas novas tecnologias, pela produção industrial etc. –, surgem estudiosos que aproveitam os momentos de fragilidade intelectual da humanidade e fundamentam suas concepções idealistas, mesmo que a realidade material a contrarie. Segundo Gerdes (2008, p. 39, grifo do autor):

Aqui é de referir ao facto de que muitos destes matemáticos que aceitaram o cálculo diferencial, eram ateus e interpretavam, duma forma espontaneamente materialista, a matemática como ciência que descreve as propriedades de grandezas

reais³¹, que existem **fora** da consciência humana. Os mesmos ligaram os conceitos de ‘infinitamente pequeno’ e ‘infinitamente grande’ ao reconhecimento duma substância material e da sua divisibilidade ilimitada. Assim, compreende-se que Berkeley tenha adaptado uma atitude negativa em relação ao cálculo diferencial, com o propósito de refutar o ateísmo e o materialismo.

Portanto, não é uma mera discussão sobre a ligação da Matemática com a realidade, é uma fundamentação da concepção de mundo, homem e sociedade. Fundamentos matemáticos materialistas provocam fundamentos materialistas às outras relações sociais vividas pelo homem, sejam elas educação, política e economia, bem como com a natureza ou com a produção dos meios de subsistência etc.

Nesse movimento do desenvolvimento das várias áreas do cálculo, “influenciada por el análisis, con conceptos de variable, función y limite, toda la matemática quedó impregnada de la idea de movimiento y cambio, es decir, de dialéctica” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 75). No entanto, mesmo uma interpretação materialista não basta, é necessário compreender a dialética desse movimento. Segundo Gerdes (2008, p. 42, grifos do autor):

Alguns cientistas explicaram os infinitesimais ou grandezas infinitamente pequenas como a existência dialéctica de contrários – ao mesmo tempo igual a zero e diferente de 0. Janovskaja³² chama *pseudo-marxistas* a estes cientistas, porque eles se esqueceram do facto de que o materialismo dialéctico não reconhece uma *contradição estática* ($= 0$ e $\neq 0$), mas apenas uma *contradição ligada a um movimento*.

³¹ Nesse caso, as grandezas reais se referem aos objetos da realidade físicas e não ao conjunto dos números reais.

³² Sofia Janovskaja (1896 – 1966) foi responsável pelos trabalhos de ordenação, separação e decifração dos manuscritos matemáticos de Karl Marx, com a equipe composta pelos estudiosos soviéticos A. S. Rywkin, K. A. Rybnikov (1913 – 2004), entre outros. Também contou com o apoio e conselho de A. Kolmogorov (1903 – 1987) e I. Petrovski (1901 – 1973) (GERDES, 2008).

Uma das formas fundamentais de existência da matéria é o movimento, que está na natureza, na sociedade e no pensamento. Portanto, não pode ser sucumbido na análise da realidade material e das relações humanas. Caso isso ocorra, teremos um viés metafísico de sua concepção materialista. Segundo Gerdes (2008, p. 27), “[...] a matemática das grandezas variáveis representa o reflexo matemático dum problema de fundo: o domínio de movimentos”.

Esse movimento da realidade e do objeto da Matemática é o que proporciona o avanço das teorias matemáticas e seu desenvolvimento lógico-histórico. Ou seja, os conceitos matemáticos avançam e retrocedem, ampliam e reduzem suas aplicações, proporcionam o surgimento de novas teorias e a refutação de outras. Enfim, “todos ellos muestran que las matemáticas surgieron de la actividad productiva de los hombres y que los nuevos conceptos y métodos, en lo fundamental se formulaban bajo la influencia de las ciencias naturales exactas” (RÍBNIKOV, 1987, p. 12).

Nesse contexto, o conhecimento matemático se desenvolveu para satisfazer as necessidades humanas, do contrário não existiria. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 17), a Matemática tem como traços peculiares a abstração, a precisão, o rigor lógico, o irrefutável caráter de suas conclusões e o amplo campo de aplicações. De todo modo, esses traços não violam sua processualidade histórica e sua complexificação no processo de desenvolvimento da humanidade.

A não compreensão da especificidade do caráter abstrato da Matemática leva a deformações idealistas do objeto da Matemática. “Una correcta comprensión materialista del objeto de las matemáticas y el conocimiento de su historia es una condición necesaria para la comprensión cabal del lugar de esta ciencia en la actividad productiva y social de los hombres” (RÍBNIKOV, 1987, p. 11-12).

Para aclarar a natureza da Matemática, Aleksandrov (1991a, p. 23) coloca algumas indagações:

¿Qué reflejan estos conceptos matemáticos abstractos? En otras palabras, ¿cuál es el verdadero objeto de la matemática?

¿Por qué los resultados abstractos de la matemática parecen tan convincentes, y sus conceptos iniciales tan obvios? En otras palabras, ¿sobre qué cimientos reposan los métodos matemáticos?

¿Por qué, a pesar de toda su abstracción, encuentra la matemática tan amplias aplicaciones y no se queda simplemente en un juego fútil de abstracciones? En otras palabras, ¿cómo se explica el significado de la matemática?

Finalmente, ¿qué fuerzas llevan a nuevos desarrollos de la matemática, permitiendo unir la abstracción con la amplitud de sus aplicaciones? ¿Cuál es la base para su continuo crecimiento?

Tais perguntas são importantes para uma análise crítica do objeto da Matemática. A intenção não é responder cada uma dessas perguntas, mas pensá-las no processo de análise do objeto de pesquisa. O autor questiona as relações das abstrações do objeto da Matemática com as aplicações práticas, isto é, questiona a relação do reflexo matemático com a realidade física. Só assim, é possível o estabelecimento de critérios de verdade sobre o conhecimento matemático. A seguir, discutiremos os traços peculiares da Matemática caracterizados por Aleksandrov (1991a).

4.2 A ABSTRAÇÃO

Ao tratar da questão do silogismo “A” é igual a “A”, Trotsky (1939)³³ evidencia que essa igualdade só existe no plano ideal, na realidade ela é uma “igualdade desigual”, ou seja, é igual dentro dos limites de aproximação e tolerância. O autor coloca uma possível objeção a sua interpretação dialética dessa igualdade, qual seja, a de que “A” é igual a “A” em determinado momento. Ele então pergunta: “como devemos realmente conceber o termo ‘momento’?”. Sua resposta é apresentada com outra indagação:

Se é um intervalo de tempo infinitesimal, então um libra de açúcar [exemplo citado da igualdade de uma libra de açúcar em relação à outra] está sujeita a transformações inevitáveis durante o transcurso deste “momento”. Ou é o “momento” uma abstração puramente matemática, um tempo zero? (TROTSKY, 1939).

³³ O texto não possui paginação, pois está publicado no corpo do site da Revista eletrônica *Iskra: Revista de teoria e política marxista*.

A compreensão do autor expressa a diferença entre a abstração matemática e as próprias coisas representadas. Além disso, coloca os limites de aproximação do conhecimento matemático com a realidade. Quando ele pergunta se o momento é uma abstração puramente matemática, questiona as concepções idealistas da categoria tempo, expressadas, por exemplo, por Poincaré³⁴. Este “apresentou igualmente um ponto de vista subjetivo do tempo e do espaço. Segundo ele, o tempo e o espaço são apenas conceitos elaborados pelo homem, para sua comodidade” (CHEPTULIN, 1982, p. 182). No questionamento de Trotsky (1939) aparece a questão do “tempo zero” subjacente à categoria infinito, das aproximações infinitas que tendem, nesse caso, a zero. Marx (1983) trata dessas concepções nos seus manuscritos matemáticos, em que critica as posições que negam o movimento³⁵. A categoria movimento aparece com diferentes compreensões em diversos autores, desde aqueles que negam sua existência até outros que a consideram como forma fundamental de existência da matéria.

Os paradoxos de Zenão de Eléia são dirigidos, segundo Boyer (1974), contra a compreensão pitagórica de espaço e de tempo. São quatro os paradoxos de Zenão, transmitidos a nós por Aristóteles e outros, que causaram maiores dificuldades: da dicotomia, de Aquiles, da flecha e do estádio (BOYER, 1974, p. 55).

Eves (2004, p. 418, grifos do autor) exemplifica dois paradoxos de Zenão de Eléia que negam o movimento:

A dicotomia: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois, para percorrê-lo é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.

A flecha: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo

³⁴ Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) foi um matemático, físico e filósofo francês.

³⁵ Não é nosso objetivo aprofundar as questões tratadas por Marx em seus manuscritos matemáticos.

isso verdadeiro, em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move.

Conforme exemplo citado antes, Gerdes (2008, p. 81) afirma que: Com o paradoxo ‘Aquiles e a tartaruga’ e outros, Zeno³⁶ tentou mostrar que o movimento é impossível sob a hipótese da divisibilidade infinita do espaço e do tempo. Esta hipótese, tão importante e necessária na construção da matemática (por exemplo, na construção do conjunto dos números reais), é uma abstracção de tal ordem, que ela não pode ser justificada por experiências empíricas. O filósofo Ruzavin salienta: “A ideia da divisibilidade infinita de objectos e figuras é uma abstracção: ela simplifica e esquematiza processos reais e contradiz por isso a experiência”.

Essa citação se coaduna com o posicionamento de Trotsky (1939) nos seus questionamentos, que coloca os limites das abstrações matemáticas, as quais se atravessam na discussão sobre a existência do movimento, consideradas sem a necessária relação com a realidade material. Entretanto, Gerdes (2008) indica a necessidade de resolução da dependência a respeito da Matemática no âmbito das discussões da dialética materialista. Isso ocorre com base nos cadernos filosóficos de Lenin, em que ele exprime a questão de não se discutir se existe ou não o movimento, mas como se pode exprimi-lo em forma de conceitos. Segundo Gerdes (2008, p. 82-83, grifos do autor):

A análise de Marx é pertinente, viva e actual. Por esta razão é que o académico soviético B. W. Gnedenko aconselha aos filósofos e matemáticos, para ligarem o estudo dos desenvolvimentos mais recentes na matemática ao estudo da *Dialéctica da natureza* de Engels, dos *Cadernos filosóficos* de Lênine e dos *Manuscritos Matemáticos* de Marx, a fim de poderem: “Achar novos caminhos para a resolução de toda uma série de questões principais, que se encontram na fronteira entre a matemática e a filosofia”, tais como: a relação entre a matemática e a realidade material; o papel

³⁶ Gerdes (2008) escreve “Zeno” ao referir-se a “Zenão de Eléia”.

do método axiomático na matemática; o rigor na fundamentação da matemática; o conteúdo e o significado da simbólica matemática; o problema da infinibilidade (actual, potencial ou uma unidade das duas?); o que é uma verdade matemática?; a luta dos contrários: discreto e contínuo, concreto e abstracto, finito e infinito... .

No âmbito dessas questões, que se encontram na fronteira entre a Matemática e a Filosofia, a presente pesquisa tem se comprometido com o objetivo de aprofundar a compreensão da relação entre a Geometria e a realidade física. Isso requer a compreensão do que são as abstrações matemáticas e qual a sua função no processo de conhecimento da realidade. O movimento do conhecimento matemático é reflexo do movimento material. “A dialética do pensamento, tendo surgido da dialética da natureza, possui em consequência um caráter profundamente materialista” (TROTSKY, 1939). Cabe-nos compreender como esse movimento se traduz nos conceitos matemáticos e, particularmente, o que expressam aqueles mais abstratos.

Segundo Rosental e Straks (1958, p. 308-309):

En las matemáticas podemos distinguir tres grados de abstracciones. Primero: nacimiento del concepto de número (identificación de los objetos, prescindiendo de la infinita diversidad de sus cualidades individuales) y creación de los símbolos numéricos, es decir, las cifras. Segundo: paso de los números concretos al uso de letras como símbolos (paso de la aritmética al álgebra). Tercero: eliminación no sólo del contenido numérico de los símbolos, sino también del contenido cuantitativo concreto de las operaciones matemáticas; así, por ejemplo, la igualdad $a+b=b+a$ se presenta, entonces, no solamente como igualdad de magnitudes, sino también de vectores, de factores cuyo orden se altera, etc.

Esse movimento lógico-histórico das abstrações matemáticas se complexifica com o desenvolvimento de outras ciências, como a Física, e a corroboração delas na realidade material. O distanciamento que a Matemática promove em relação ao conteúdo numérico, mesmo sendo nele sua origem, mostra a potencialidade das abstrações dessa ciência no desenvolvimento da consciência. Ou seja, a Matemática promove graus

de abstração cada vez mais elevados e complexos, com sua estrutura lógica própria, porém proveniente das abstrações mais simples.

Segundo Aleksandrov (1991a, p. 18-19), as abstrações matemáticas se caracterizam por três traços:

En primer lugar, tratan fundamentalmente de las relaciones cuantitativas y formas espaciales, abstrayéndolas de todas las demás propiedades de los objetos. En segundo lugar, aparecen en una sucesión de grados de abstracción creciente, llegando mucho más lejos en esta dirección que la abstracción en las demás ciencias. [...] Finalmente, y esto es obvio, la matemática como tal se mueve casi por completo en el campo de los conceptos abstractos y sus interrelaciones. Mientras el científico de la naturaleza experimenta constantemente para demostrar sus aseveraciones, el matemático emplea sólo razonamientos y cálculos.

Esses três traços das suas abstrações não tornam a Matemática alheia à realidade física, ao contrário, evidenciam o seu potencial na interpretação da realidade. O fato de ser fruto da abstração não outorga o direito em se considerar a Matemática como pura abstração. Ao tratar da aritmética, por exemplo, Aleksandrov (1991a, p. 27) afirma que “el objeto de la aritmética son las relaciones entre números. Pero estas relaciones son las imágenes abstractas de las relaciones cuantitativas reales entre colecciones de objetos”. Com isso, o autor assinala a separação entre o conceito de número e a coleção representada, e completa: “así podemos decir que la aritmética es la ciencia de las relaciones cuantitativas reales consideradas abstractamente, esto es, simplemente como relaciones” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 27). Essa abstração matemática é a expressão ideal do próprio movimento material da realidade. Assim, a quantidade de objetos de uma coleção é uma propriedade da mesma, porém o número abstrato que representa as relações entre as várias coleções com a mesma quantidade de objetos é uma propriedade da abstração matemática.

Nas relações de produção, por exemplo, as abstrações matemáticas expressam as relações quantitativas entre valor de uso e valor de troca, que apresentam sua lógica quantitativa do tempo de trabalho socialmente necessário, abstraída da qualidade das mercadorias produzidas e dos trabalhos concretos particulares. Segundo Flores e Natiello (2006, p. 116, grifos dos autores):

El valor de cambio se establece de acuerdo a una *equivalencia lógica* entre términos basada en una *identidad numérica* oculta. Así, x metros de lienzo podrán ser cambiados por y alimentos. La relación entre x e y es lógica hasta que en el momento del cambio se transforma en una identidad numérica [$z=z$] en tanto x metros de lienzo son la expresión de z horas de trabajo social abstracto y en tanto y alimentos son también la expresión de z horas de trabajo social abstracto. La dialéctica materialista de Marx en *Das Kapital* reduce relaciones lógicas de equivalencia a relaciones numéricas creando de esta manera un “cálculo” (elemental) de las relaciones de intercambio económico.

Essa abstração, da mesma forma que aquelas da Matemática pura ou aplicada, se não for bem compreendida, mistifica as relações de produção do tipo capitalista. A equivalência do valor das mercadorias se dá pela relação entre elas e, ao mesmo tempo, não se dá por essa relação. É pela relação entre as mercadorias, enquanto veículos da objetividade do valor, que se estabelece a igualdade entre os diversos trabalhos concretos, homogeneizados em trabalho abstrato. Este só pode existir veiculado pelas mercadorias provenientes dos trabalhos concretos, ou seja, o valor de troca só pode existir pela mediação do valor de uso. Faz-se, assim, a abstração das relações qualitativas do trabalho e consideram-se apenas as relações quantitativas.

Nesse sentido, é possível afirmar que o tamanho de uma coleção é um atributo da realidade material e a quantidade matemática expressa em números e fórmulas é um reflexo dessa realidade e não sua parte constitutiva. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 25):

El número de objetos de una colección dada es una propiedad de la colección, pero el número en sí, el “número abstracto”, es una propiedad abstraída de la colección concreta y considerada simplemente en sí misma, al igual que “negrura” o “dureza”. Y lo mismo que la negrura es una propiedad común a todos los objetos del color del carbón, así el número “cinco” es la propiedad común a todas las colecciones que contienen objetos como dedos hay en una mano.

Com esse exemplo, o autor especifica uma definição mais elementar de número, ainda como simples comparação, como uma relação biunívoca, e considera que “la aritmética, [...] no surge del pensamiento puro, como pretenden los idealistas, sino que es reflejo de propiedades definidas de las cosas reales; surge de una larga experiencia práctica de muchas generaciones” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 27). Isso se torna, no movimento lógico-histórico, uma singularidade numérica, os números naturais, pois as relações entre grandezas (comensurabilidade e incomensurabilidade) expressarão uma relação universal, os números reais com todas as suas singularidades.

Ríbnikov (1987, p. 11) chama a atenção para os equívocos idealistas:

Lo abstracto del objeto de las matemáticas en ocasiones se percibe como elemento inicial e independiente de su contenido. En tales casos los elementos de los conjuntos que se investigan se representan en general como separados de los objetos del mundo real, y los sistemas de axiomas, definiciones e operaciones resultan introducidos arbitrariamente. Esto lleva a diferentes formas de equívocos idealistas, que influyen negativamente en el desarrollo de las matemáticas.

Essa deformação idealista do objeto da Matemática negligencia o caráter lógico-histórico do desenvolvimento dessa ciência. Assim, os conceitos matemáticos adquirem uma essência imutável e eterna, que se interpreta, em diferentes estágios do desenvolvimento do mundo, de distintas formas. O aspecto abstrato inicial e independente da realidade, do objeto da Matemática, caracteriza uma sua especificidade como ciência. Não se trata de uma abstração isoladora, mas de uma necessária separação da realidade material. Isso não poderia ser diferente, uma vez que se trata de um objeto refletido e em vez de ser constitutivo da própria realidade material. “En general, el concepto de figura geométrica es el resultado de la abstracción de todas las propiedades de un objeto exceptuadas su forma espacial y dimensiones” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 18). As relações geométricas caracterizam, pois, um reflexo das formas espaciais materiais, independente de todas as outras propriedades daquela formação material.

Portanto, a negação da existência da matéria, por parte dos idealistas, bem como da sua objetividade, leva, por conseguinte, à

rejeição da forma como uma propriedade da matéria e a afirmação de que a Geometria é uma criação puramente abstrata, independente da realidade física. Essa concepção conduz à absolutização do conhecimento matemático e cristaliza as características de precisão, rigor lógico e irrefutável caráter de suas conclusões.

4.3 A PRECISÃO, O RIGOR LÓGICO E O IRREFUTÁVEL CARÁTER DE SUAS CONCLUSÕES

A cristalização, anteriormente referida, coloca a Matemática numa posição de ciência exata, de imutabilidade, de absolutização de suas interpretações da realidade. A lógica formal cumpre um papel importante nessa classificação da Matemática. Segundo Trotsky (1939), “a dialética e a lógica formal guardam uma relação similar àquela existente entre a matemática complexa e a matemática elementar”. Conforme o exemplo citado anteriormente, o autor afirma que os silogismos da lógica aristotélica são superados pela lógica dialética, porém, não por exclusão e sim por incorporação, uma vez que “a dialética não exclui o silogismo, mas nos ensina a combiná-lo de modo a aproximá-lo da compreensão de uma realidade eternamente mutável” (TROTSKY, 1939).

Para o autor, o limite dos silogismos lógico-formais está em seus resultados, ou seja, possuem uma aproximação bastante restrita na interpretação da realidade. Quando se diz que “A” é igual a “A”, seu campo de aplicações e generalizações são elementares, “na realidade ‘A’ não é igual a ‘A’” (TROTSKY, 1939). A base dessa identidade é a abstração do conhecimento frente à realidade, que não possui uma rigorosa igualdade em seus elementos. Por isso, as interpretações podem perder-se em ilusões acerca da realidade. Segundo Trotsky (1939, grifos do autor):

O axioma “A é igual a A” parece ser, por um lado, a base de todo o nosso conhecimento e, por outro lado, a fonte de todos os erros do nosso conhecimento. Usar o axioma “A é igual a A” impunemente é possível apenas dentro de certos *limites*. Quando as mudanças quantitativas em A podem ser desprezadas em vista das tarefas à mão, podemos então presumir que “A é igual a A”. Esta é, por exemplo, a maneira em que o comprador e o vendedor consideram uma libra de açúcar. [...]

Mas mudanças quantitativas para além de certos limites *convertem-se em mudanças qualitativas*. Uma libra de açúcar submetida à ação da água ou do querosene deixa de ser uma libra de açúcar. [...] Fixar o momento exato, o ponto crítico em que a quantidade se transforma em qualidade, é uma das tarefas mais importantes e complexas de todas as esferas do conhecimento, inclusive da sociologia [reafirmamos a matemática nesse contexto].

Fica evidente nessa argumentação a necessidade da compreensão dialético-materialista para que tal silogismo estabeleça significados e contribua para a ação do homem ao se movimentar na construção de seu mundo. A Matemática cumpre aí um papel importante na compreensão da realidade e seu objeto não pode se confundir com a própria realidade representada.

Não confundir o objeto da Matemática, em particular o objeto da Geometria, pressupõe a compreensão de duas categorias: o abstrato e o concreto. Aleksandrov (1991a, p. 50-52), ao analisar o que ele chama de “conflito entre elementos contrastantes”, evidencia as referidas categorias e faz a distinção entre a realidade material e sua representação matemática. “En geometría consideramos formas y dimensiones de los cuerpos idealmente precisas, abstrayéndolas de la movilidad de los objetos concretos y de una cierta indefinibilidad de sus formas y dimensiones reales” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 50). O autor acrescenta:

Pero las formas geométricas idealmente precisas y los valores absolutamente precisos de las magnitudes no son sino abstracciones. Ningún objeto concreto tiene una forma absolutamente precisa ni ninguna magnitud concreto puede medirse con exactitud absoluta, puesto que ni siquiera *tiene* un valor perfectamente definido [...]. Siempre que se superan ciertos límites bien conocidos de la precisión cuantitativa, aparece un cambio cualitativo en la magnitud, y ésta, en general, pierde su sentido original. (ALEKSANDROV, 1991a, p. 51, grifo do autor).

O autor mostra a impossibilidade de precisão absoluta, pois a matéria está em constante transformação, em movimento, e, assim, o

conhecimento da mesma não pode ser estático. Isso não significa que nossos conhecimentos acerca da realidade material não a representam. A precisão absoluta não é possível, pois o ser humano não pode, de uma só vez e de imediato, entender todos os nexos e estruturas da realidade, haja vista a infinidade das coisas cognoscíveis e seu constante transformar-se em outras coisas. No entanto, desse raciocínio não se deve inferir que o conhecimento humano seja relativista, ou seja, que depende de cada indivíduo e de seu critério de verdade na compreensão da realidade.

O conhecimento é relativo, não relativista, pois sempre haverá novos nexos e estruturas da matéria em movimento para que o ser humano possa conhecer e estabelecer novas relações. “O problema é que as correntes teóricas hoje predominantes deduzem do relativismo epistemológico o relativismo ontológico. Em outros termos, do caráter transitório e relativo de nossos conhecimentos deduzem que eles não podem ser objetivos” (DUAYER, 2012, p. 21). O conhecimento é objetivo, porém não se pode deduzir uma forma mecanicista do reflexo a partir da realidade material. Para Aleksandrov (1991a), na citação anterior, os conceitos matemáticos não são simples reflexos mecânicos da realidade imediata, mas a transcende.

Cheptulin (1982, p. 114), ao tratar da consciência como reflexo da realidade material, apresenta três argumentos sobre a impossibilidade da precisão absoluta do conhecimento:

Primeiramente, o conhecimento humano nunca atingirá o ponto de desenvolvimento em que tudo será inteiramente conhecido, em que o mundo inteiro será refletido na consciência dos homens; isso é impossível, porque a realidade refletida não é estática, mas transforma-se e desenvolve-se continuamente. Em segundo lugar, nenhum desenvolvimento do conhecimento pode conduzir à transformação da consciência de um homem em consciência universal, porque as possibilidades de um indivíduo são sempre limitadas e ele não está em condições de possuir todos os conhecimentos dos quais dispõe a humanidade. Em terceiro lugar, o acréscimo dos conhecimentos dos homens não apenas não elimina sua atividade, mas a reforça pelo fato de que sua possibilidade criativa e seu campo de atividade alargam-se.

Esses posicionamentos de Aleksandrov (1991a), Duayer (2012) e Cheptulin (1982), novamente, expressam uma crítica ao idealismo e ao materialismo mecanicista, bem como reforçam a posição dialético-materialista do conhecimento da realidade material, em particular em relação ao conhecimento matemático e geométrico dessa realidade.

Smogorzhevski (1978), ao tratar da Geometria de Euclides e de Lobachevski, também comunga a ideia da não absolutização do conhecimento matemático, mais especificamente, referente ao conhecimento geométrico. Segundo o autor:

La cuestión referente a la estructura del espacio real, como ya señalábamos, pertenece a la competencia de la física y no puede ser resuelta con las fuerzas de la geometría pura. Su particularidad consiste, entre otras cosas, en que ninguna geometría refleja las relaciones de extensión con exactitud absoluta; así, por ejemplo, debido a la estructura molecular de la materia, no existen cuerpos accesibles a la apreciación de sus dimensiones que posean las propiedades geométricas de la esfera ideal. Precisamente por esto, la aplicación de reglas geométricas a la solución de problemas concretos conduce inevitablemente a resultados aproximados. De tal modo, nuestra noción respecto a la estructura geométrica del espacio real se reduce de hecho a la convicción científicamente basada de que una geometría determinada describe mejor que otras las relaciones reales de la extensión. (SMOGORZHEVSKI, 1978, p. 22).

Tal consideração do autor é parte da explicação sobre a indagação feita em seu texto, qual seja: “¿cuál de las dos geometrías es la verdadera, la de Euclides o la de Lobachevski?” (SMOGORZHEVSKI, 1978, p. 22). Ele evidencia que tanto uma quanto a outra cumpre seu papel como conhecimento. Todavia, a Geometria de Euclides possui uma amplitude de aplicações mais restrita em relação à de Lobachevski, haja vista que esta última supera, por incorporação, como um caso singular, a Geometria de Euclides.

A absolutização do conhecimento matemático ganha força também pela sua necessária sistematização lógica que, por vezes, perpassa muito tempo até ser superada por teorias mais complexas. Em alguns casos, tais sistematizações adquirem um caráter idealista, como,

por exemplo, os mais de dois mil anos que se passaram desde a escrita dos *Elementos*³⁷, de Euclides (século III a. n. e.), até o desenvolvimento da Geometria de Lobachevski (século XIX). Segundo Smogorzhevski (1978, p. 23):

Antes de Lobachevski, durante el transcurso de muchos siglos, reinaba en la geometría el punto de vista idealista que remontaba a Platón, el filósofo de la Grecia antigua atribuyendo a los axiomas del sistema euclidiano un carácter absoluto éste negaba su procedencia experimental. Lobachevski rompió categóricamente con este punto de vista y retornó la geometría a las posiciones del materialismo.

Esse mesmo pensamento se expressa em Aleksandrov (1991a, p. 78), ao afirmar que:

Euclides, y todos los matemáticos que vivieron en los dos mil años siguientes, consideraron sin duda sus “Elementos” como el límite práctico del rigor lógico. Pero desde el punto de vista contemporáneo los fundamentos euclidianos de la geometría parecen bastante superficiales. Este ejemplo histórico nos demuestra que no debemos dejarnos seducir por la idea de que la matemática contemporánea posee un rigor “absoluto”. Una ciencia que no está todavía muerta y momificada no es, ni puede ser de forma alguna, perfecta.

Assim, o rigor matemático se desenvolve no movimento da própria realidade, “pero el rigor de la matemática no es absoluto; está en proceso de continuo desarrollo” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 19-20). O autor conclui:

En último término la vitalidad de la matemática se debe al hecho de que, a pesar de su abstracción, sus conceptos y resultados tienen su origen, [...], en el mundo real y encuentran muchas y diversas aplicaciones en otras ciencias, en ingeniería y en

³⁷ *Os Elementos*, de Euclides, é um tratado matemático e geométrico composto por treze livros.

todos los aspectos prácticos de la vida diaria; reconocer esto es el requisito previo más importante para entender la matemática. (ALEKSANDROV, 1991a, p. 20).

Tais aplicações do conhecimento matemático se tornam mais complexas e úteis aos homens quando se tem a compreensão de seus limites e a diferenciação entre suas abstrações e o próprio objeto refletido. Passemos agora ao último traço característico da Matemática, seu amplo campo de aplicações.

4.4 O AMPLO CAMPO DE APLICAÇÕES

O amplo campo de aplicações é outro traço peculiar da Matemática, que pode levar a uma compreensão de mera aplicabilidade ou de inerência de seu objeto à realidade física. Um exemplo disso pode ser a Geometria, que, via de regra, é compreendida simplesmente como o ramo da Matemática que trata das formas, concebidas em detrimento de suas relações conceituais, de seu reflexo na consciência. Essa compreensão admite a Geometria como constitutiva da própria realidade física e não uma elaboração teórica no movimento da produção material da vida humana.

Como afirmado em vários momentos, o conhecimento matemático surge das necessidades práticas da vida humana e, ao satisfazê-las, o homem produz necessidades de ordem superior. “Estas necesidades prácticas y el pensamiento abstracto que surgió de ellas ejercieron unos sobre otros una constante interacción” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 37). No entanto, a produção do conhecimento matemático se complexifica além de sua imediaticidade prática, “la reflexión abstracta a menudo vá más lejos que las necesidades inmediatas de un problema práctico” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 37). Essa característica da Matemática, de avançar em suas abstrações para além das necessidades imediatas, é uma alavanca de seu desenvolvimento, uma vez que não se limita à solução de problemas práticos. Porém, uma vez que a realidade material confirme ou refute essas abstrações, faz-se necessário reformulá-las para descartar, caso seja refutada, ou aprimorar, caso seja confirmada. Por exemplo, “el concepto de números tan grandes como un millón o un billón surgió sobre la base de los cálculos prácticos, pero apareció antes que la necesidad práctica de hacer uso de ellos” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 37).

O autor cita ainda o exemplo da Geometria que “tuvo su origen en las actividades prácticas y en los problemas de la vida cotidiana” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 39). Entretanto, não somente nas medições de terras, mas também em outros problemas que envolviam a aritmética, haja vista que “la geometría no se distinguía en general de la aritmética” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 40). Nesse contexto, apresenta-se a premissa de que todo conhecimento – matemático ou outro – surge da vida cotidiana, entendendo esta como a vida dos homens na sua constante reprodução. Contudo, as elaborações e compreensões do processo de complexificação da realidade material incorporam patamares do conhecimento que ampliam intensiva e extensivamente a vida cotidiana. Essa compreensão se realiza por meio do pensamento que também tem dimensões que a diferenciam e a ampliam.

As elaborações matemáticas mais primitivas se caracterizam pela imediaticidade da aparência física das coisas. A base dessa imediaticidade se encontra nas generalizações empíricas. Ou seja, que surge por consequência de uma série de observações empíricas que criam uma regularidade aparente, na qual criam generalizações que, geralmente, não correspondem à realidade do fenômeno em questão ou, na melhor das hipóteses, expressam algum caso singular do mesmo. Quando se considera que qualquer forma de quatro lados iguais é um quadrado, se expressa uma singularidade desse objeto. Sendo assim, impossibilita a compreensão, por exemplo, que todo quadrado é também um retângulo e um losango, mas, que a recíproca não é verdadeira. As formas físicas dos objetos induzem a uma generalização empírica, em detrimento da generalização teórica. Esta última não se limita às observações aparentes dos fenômenos, mas os consideram desde o movimento de seu desenvolvimento histórico e lógico. A generalização empírica das formas, em detrimento dos conceitos teóricos da Geometria, contribui, por exemplo, para as manipulações estatística, gráfica e numérica.

Não somente a compreensão da Matemática como inerente a realidade física, mas também a constante aplicabilidade imediatista que fazemos com seus conceitos, contribui para a apreensão mecanicista dessa ciência. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 20):

En primer lugar hacemos constate uso, en la industria y en la vida social y privada, de los más variados conceptos y resultados de la matemática sin pensar en ello; por ejemplo, empleamos la

aritmética para calcular nuestros gastos o la geometría para calcular la superficie de un apartamento. Naturalmente, las reglas a emplear son muy sencillas, pero deberíamos recordar que en algún período de la antigüedad representaron los logros matemáticos más avanzados de la época.

Essas aplicações merecem uma análise de sua gênese e da complexificação que adquire o conhecimento matemático no curso do desenvolvimento histórico da humanidade. Em determinadas épocas, essas simples aplicações que fazemos hoje era o ápice da ciência e despendeu muito tempo para ser desenvolvido. O pressuposto é que a análise histórica da Matemática possibilita a compreensão da sua complexificação no curso do desenvolvimento das forças produtivas e cujas necessidades também delinea. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 20), “la tecnología moderna sería imposible sin la matemática. No hay probablemente un sólo proceso técnico que pueda realizarse sin cálculos más o menos complicados”, pois os processos produtivos estão cada vez mais automatizados, “y la matemática juega un papel muy importante en lo desarrollo de nuevas ramas de la tecnología” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 20).

As necessidades surgidas na vida dos homens exigem o conhecimento matemático da realidade material, o mais aprofundado possível, da mesma forma que ele, em sua relativa autonomia, avança em seus sistemas de fórmulas, teoremas etc. Atinge, pois, um nível de complexidade que, às vezes, num primeiro momento, não tem aplicabilidade ou não tem relação imediata com a realidade material. Assim como as ciências da natureza (Física, Astronomia, Mecânica etc.) não poderiam ter se desenvolvido sem a Matemática, esta se desenvolveu – e se desenvolve – a partir das necessidades dessas ciências. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 23), “en las ciencias exactas y en los problemas más complicados de la tecnología encuentran aplicación incluso aquellas teorías que nacen de la matemática misma”. Por exemplo, a teoria de grupos que nasceu das abstrações, do conjunto de propriedades operativas.

Outro exemplo é a Geometria não-euclidiana de Lobachevski, que, num primeiro momento, não possuía relação com a realidade material e, assim, a nomeou de Geometria Imaginária. Lobachevski não se importou em divulgar suas produções, mesmo sendo ignorado por parte dos matemáticos de sua época. Porém, morreu antes de a

comunidade científica matemática reconhecer a autenticidade de suas teorias. Gauss, por exemplo, contemporaneamente produziu ideias semelhantes e, ao contrário de Lobachevski, não as divulgou com receio da ridicularização no meio científico e filosófico. Entretanto, as ideias de Lobachevski, após sua morte, “fueron el fundamento para un nuevo desarrollo de la geometría, con la aparición de teorías de espacios no-euclídeos” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 22). Essas novas teorias proporcionaram grandes avanços científicos não somente na Matemática, mas também na Física e, conseqüentemente, no desenvolvimento tecnológico. “Estas mismas ideas fueran la base de la teoría general de la relatividad, en la cual el aparato matemático consiste en una cierta forma de geometría no-euclídea de un espacio de cuatro dimensiones” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 22).

Esse movimento das aplicações matemáticas à satisfação das necessidades práticas da vida humana se conjuga dialeticamente com a produção de conhecimento matemático puro, que não necessita imediatamente de aplicações práticas. De todo modo, a Matemática não é absolutamente pura, como uma abstração idealista, mas é reflexo da realidade objetiva, do movimento da matéria. Após essa caracterização dos traços peculiares da Matemática, desenvolvemos o último capítulo que trata especificamente do objeto da Geometria.

5. O SER DA GEOMETRIA

Neste capítulo é desenvolvida a especificidade do objeto da Geometria que fundamenta a tese em questão, isto é, a tese de que tal objeto é um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física, tampouco uma forma a priori da sensibilidade. Iniciamos com uma crítica à crítica de Lukács ao experimento ideal de Einstein³⁸. Em seguida, tratamos da gênese e desenvolvimento do objeto da Geometria e, por fim, temos um esboço da relação entre as Geometrias não-euclidianas e a teoria da relatividade.

5.1 CRÍTICA À CRÍTICA DE LUKÁCS A EINSTEIN: ELEMENTOS DE ANÁLISE DO OBJETO DA GEOMETRIA

No que diz respeito às relações entre a Geometria, como uma forma de reflexo, e a realidade material, Lukács (2012, p. 45-74) faz uma crítica ao método positivista e neopositivista da compreensão da realidade fundada no elemento matemático e ao que ele chama de “unilateralidade da visão exclusivamente gnosiológico-teórica e lógica sobre a realidade” (LUKÁCS, 2012, p. 61). A tendência a esta unilateralidade derivou um esforço do neopositivismo “em eliminar toda distinção entre a própria efetividade e suas representações nas diversas formas de espelhamento” (LUKÁCS, 2012, p. 61).

Na crítica de Lukács (2012) às concessões filosóficas à teoria da manipulação do neopositivismo feitas por estudiosos célebres, ele exemplifica com o experimento ideal de Einstein e Infeld (2008) sobre seres bi e tridimensionais para mostrar a relação entre a geometria e a teoria da relatividade. O autor esclarece que não se trata de uma crítica à teoria, mas à compreensão de Einstein e Infeld (2008) de que a geometria é uma parte constitutiva da realidade física.

Lukács (2012) cita um trecho do livro *A evolução da física*, de autoria de Albert Einstein e Leopold Infeld (2008), da seção “geometria e experiência”, que reproduzimos aqui diretamente do original:

Começamos pela descrição de um mundo no qual vivem apenas criaturas bidimensionais, e não tridimensionais como o nosso. O cinema nos acostumou com criaturas bidimensionais

³⁸ Albert Einstein (1879 – 1955) foi um físico teórico alemão que desenvolveu a teoria da relatividade geral em 1915.

representado em uma tela bidimensional. Imaginemos agora que essas *figuras-sombra*, isto é, os atores na tela, realmente existem, que têm o poder do pensamento, que podem criar sua própria ciência, e que, para elas, uma tela bidimensional representa o espaço geométrico. Essas criaturas são incapazes de imaginar, de um modo *concreto*, um espaço tridimensional, do mesmo modo como somos incapazes de imaginar um mundo *de quatro dimensões*. Podem desviar uma linha reta; sabem o que é um círculo, mas são incapazes de construir uma esfera, pois isso significaria abandonar a sua tela bidimensional. Estamos em situação semelhante. Estamos capacitados a desviar e curvar linhas e superfícies, mas dificilmente podemos imaginar um espaço tridimensional desviado e curvado. (EINSTEIN; INFELD, 2008, p. 186-187, grifos nosso).

Nesse trecho aparece o termo “*figuras-sombra*”, que, na citação de Lukács (2012), é traduzido como “*vultos espectrais*”; onde aparece o termo “*concreto*”, em Lukács (2012) aparece “*plástico*”; e, por fim, para o termo “*quatro dimensões*”, Lukács (2012) fala em “*quadridimensional*”. Parece-nos que tais diferenças de termos, nesse trecho, não alteram a essência da ideia expressada.

Para Lukács (2012), o experimento ideal não trata de problemas concretos da física, pois não existem seres bidimensionais que pensem e atuem num mundo bidimensional e possam, dali, ser retirados, levados a outro tridimensional para aperceber-se da terceira dimensão.

Na sequência, Einstein e Infeld (2008) intensificam o exemplo e colocam os seres bidimensionais nas mesmas condições em que nos encontramos durante o desenvolvimento do conhecimento geométrico e físico da realidade física. Chega a dizer que se as *figuras-sombras* deixassem de ser conservadoras, naquela situação, começariam a admitir que o espaço é não-euclidiano. O exemplo trata apenas de uma situação hipotética que beira a absurdidade quanto à adaptabilidade da metáfora ao nosso espaço físico de seres tridimensionais. O exemplo traz o cinema como recurso da metáfora, mas esquece de que a reprodução em tela, bem como numa pintura, corresponde à realidade tridimensional refletida bidimensionalmente.

Cheptulin (1982, p. 187) cita um exemplo semelhante a esse usado por Einstein e Infeld (2008):

O professor Zelner³⁹, espiritualista, chegou a recorrer ao seguinte raciocínio: admitamos que existam seres com duas dimensões, que só podem deslocar-se da esquerda para a direita, para frente e para trás, mas não de baixo para cima. Eles seriam parecidos com um peixe chato, por exemplo, o linguado, colocado em um aquário chato, e privado da possibilidade de se deslocar para o alto e para baixo. Esses seres viventes não sabem nada da terceira dimensão espacial que nós conhecemos, já que somos seres de três dimensões. É por isso que, para chegar ao centro do círculo, esses seres podem deslocar-se no sentido do raio e, assim, eles cortarão forçosamente a circunferência. Quanto a nós, podemos chegar ao centro do círculo de outra maneira, seguindo a terceira dimensão, isto é, aproximando-nos do alto para baixo e de baixo para o alto.

A ideia acima é semelhante ao exemplo de Einstein e Infeld (2008). Contudo, também expressa uma abstração absurda que não corresponde à realidade física das coisas, inclusive pelo simples fato de que não existem peixes e aquários chatos, além de que não existem peixes que saibam geometrizar. Segundo Cheptulin (1982), a metáfora de Zöllner trata-se de um esforço para a demonstração de que estamos em posição semelhante em relação à quarta dimensão, na qual não podemos alcançar o centro de uma esfera, por exemplo, sem tocar sua superfície, mas seria possível para seres quadridimensionais. Este exemplo, diferente em partes do de Einstein e Infeld (2008), refere-se a uma metáfora que apela às questões sobrenaturais que não compreendemos e nem explicamos com base em nosso espaço tridimensional. “Esses raciocínios mostram o quanto a quarta dimensão é necessária a certos filósofos para fundamentar a existência de Deus e de todo o misticismo” (CHEPTULIN, 1982, p. 187). Trata-se também de um exemplo pautado na concepção idealista da realidade material.

³⁹ Johann Karl Friedrich Zöllner* (1834 – 1882) foi um astrônomo e físico alemão.

* Mantivemos a grafia “Zelner” de Cheptulin ao se referir a “Johann Karl Friedrich Zöllner”.

No caso do exemplo analisado por Lukács (2012), entendemos que o referido físico queria mostrar como é difícil imaginar um espaço não-euclidiano, em vez de necessariamente evidenciar um espaço físico de quatro dimensões, haja vista que a teoria da relatividade o explica ao superar o tempo e o espaço absolutos, independentes da matéria, ou seja, um espaço de três coordenadas espaciais e uma temporal. “La proposición más esencial y básica de la teoría de la relatividad es la siguiente: el espacio es completamente inseparable del tiempo, y ambos forman una única forma de existencia de la materia, la variedad tetradimensional del espacio-tiempo” (ALEKSANDROV, 1991b, p. 223).

Na sequência da crítica, Lukács (2012, p. 63-64) afirma:

Poder-se-ia alegar o seguinte: ainda que tudo que dissemos contra o experimento ideal de Einstein seja correto, isso não afeta a essência de seu argumento, qual seja, que a geometria constitui uma parte da física. Por conseguinte, a geometria não é um espelhamento da realidade, abstraído de forma brilhante e, por isso, infinitamente fecundo para a ciência, e cuja aplicação crítica à física promoveu de modo extraordinário e ainda hoje promove esta ciência, mas, ao contrário, seus objetos são tão reais e corpóreos quanto os da própria física.

Continuando, Lukács (2012, p. 64) coloca a indagação puramente filosófica: “A geometria é um espelhamento da realidade ou os seus objetos e respectivas conexões são partes constitutivas reais da realidade física, como a dureza, o peso etc.?” Essa questão suscita a pergunta norteadora de nossa tese e coloca as questões referentes ao objeto da Geometria.

Não nos parece que o experimento ideal de Einstein e Infeld (2008) tenha a intenção de afirmar a constituição física dos objetos da Geometria, tampouco que ela não é um reflexo da realidade física. Os autores têm a intenção de mostrar que o nosso espaço é não-euclidiano, nisso consiste a essência de seu experimento. No trecho acima, Lukács (2012) fala que a essência do argumento de Einstein e Infeld (2008) é “que a geometria constitui uma parte da física” e nisso não vemos problemas, pois a Geometria não pode ser separada da Física, ou seja, é constitutiva da Física. Esta é também um reflexo da própria realidade física das coisas.

Segundo Aleksandrov (1991b, p. 221), “la geometría como ciencia de las propiedades del espacio está relacionada con la física, depende de ella y solamente puede ser separada de ésta en la abstracción y en ciertos contextos”. A pretensão de Lukács (2012) é, segundo nosso entendimento, mostrar que o objeto da Geometria não constitui uma parte da realidade física mesma. Porém, como foi expresso por ele na análise específica do experimento de Einstein e Infeld (2008), leva ao entendimento de que esse objeto é independente da Física como ciência. Isso porque não distingue claramente as propriedades do espaço e o reflexo da ciência geométrica, bem como a matéria e o reflexo da ciência física.

Aleksandrov (1991, p. 221-222) assim expressa essa questão:

La dependencia de la geometría respecto a la física, o en otras palabras, la dependencia de las propiedades del espacio respecto a la materia, fue claramente señalada por Lobachevski, quien previó la posibilidad de un cambio en las leyes de la geometría en relación con los nuevos descubrimientos físicos.

Essa questão da relação da Física com a Geometria acarreta confusões de toda ordem, sobretudo ao se tratar do objeto da Geometria, pois não é uma questão puramente matemática, mas também de ordem filosófica. Por exemplo, “en la época de Demócrito⁴⁰, las figuras geométricas no estaban todavía separadas de las reales tanto como ahora” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 45), e isso tinha consequências na concepção de Geometria. Posto que “Demócrito considerava los cuerpos reales como compostos de átomos, nada más natural que también contemplara las figuras geométricas bajo este mismo ángulo” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 45).

Após colocar a questão supracitada, Lukács (2012) cita a sequência dos argumentos de Einstein e Infeld (2008). Transcrevemos o trecho dos autores direto do original, bem como a frase imediatamente anterior, que convida o leitor a voltar ao mundo das criaturas tridimensionais:

Que se quer dizer com a declaração de que o nosso espaço tridimensional é euclidiano? O significado é que todas as declarações lógicas

⁴⁰ Demócrito de Abdera (460 a. n. e – 370 a. n. e) foi um filósofo pré-socrático.

provas da geometria euclidiana podem ser também confirmadas pela *experiência real*. Podemos, com a ajuda de corpos rígidos ou de raios de luz, construir objetos *correspondentes* aos objetos idealizados da geometria euclidiana. A aresta de uma régua ou um raio de luz corresponde à *linha*; a soma dos ângulos internos de um triângulo construído com *hastes delgadas* é 180 graus; a razão dos raios de dois círculos com um centro comum, construídos de *arames finos flexíveis*, é igual à de suas circunferências. Assim interpretada, a geometria euclidiana se torna um capítulo da Física, embora muito simples. Mas podemos imaginar que foram descobertas discrepâncias, como, por exemplo, a de que a soma dos ângulos internos de um triângulo grande, construído de hastes, que por muitas razões tinham de ser consideradas rígidas, não é 180 graus. (EINSTEIN; INFELD, 2008, p. 188, grifos nosso).

No trecho citado aparece o termo “experiência real” que, na citação de Lukács (2012), é traduzido como “experimento prático”; onde aparece o termo “correspondentes”, ele escreve “que se assemelham”; para o termo “linha”, fala em “reta”; onde aparece “hastes delgadas”, Lukács (2012) traz “hastes delgadas e rígidas”; e, por fim; onde aparece “arames finos flexíveis”, Lukács (2012) escreve “fio delgado e não flexível”. No que se refere ao último termo, no livro de Einstein e Infeld (2008), na versão em inglês, aparece “*thin unbendable wire*” e nas versões italiana e alemã do livro de Lukács (2012) aparecem os termos “*filisottili indeformabili*” e “*dünnem nicht biegsamem Draht*”, respectivamente. Isso indica que o correto seja “fio fino e não flexível”. Apesar da importância do “erro” de tradução, esse detalhe não confunde a discussão que procedemos aqui.

Lukács (2012, p. 64) afirma que, com essa declaração, Einstein e Infeld (2008) consideram “a geometria euclideana uma hipótese, um modelo para o conhecimento dos fenômenos físicos”. Entendemos que Einstein e Infeld (2008) não considerariam a Geometria euclidiana como um modelo para o conhecimento dos fenômenos físicos, porque a realidade física, de acordo com a teoria da relatividade, é não-euclidiana. Nosso espaço é euclidiano apenas no que se refere às pequenas dimensões, de certo modo até no âmbito do globo terrestre,

porém com muitas restrições. A teoria da relatividade dá um duro golpe na teoria kantiana do tempo e espaço ao provar que nosso espaço real é não-euclidiano. Portanto, supera “la doctrina de que la Geometría Euclidiana es inherente a la naturaleza del mundo físico” (ALMIRA; RAMOS, 2004, p. 91). Se isso procede, como podem Einstein e Infeld (2008), como afirma Lukács (2012), sustentar que os objetos da geometria são constitutivos da própria realidade física? Einstein e Infeld (2008) afirmam que nossa percepção imediata considera apenas o espaço da Geometria euclidiana e nos custa visualizar um espaço não-euclidiano. Assim, a Geometria de Euclides torna-se um caso singular da Geometria de Lobachevski e de Riemann. Por consequência, um caso singular de conhecimento dos fenômenos físicos. Por isso, Einstein e Infeld (2008) dizem que a Geometria euclidiana torna-se um capítulo simples da Física. Logo na sequência do trecho, eles dizem:

Como já estamos acostumados com a ideia de *representação concreta* dos objetos da geometria euclidiana por corpos rígidos, provavelmente buscaríamos alguma força física para causa desse inesperado mau procedimento de nossas hastes. (EINSTEIN; INFELD, 1966, p. 188-189, grifo nosso).

Ou seja, eles evidenciam a necessidade que a humanidade teve, na época do desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas, de procurar problemas na própria realidade física que afetavam nossa convicção na Geometria de Euclides.

A crítica que procedemos aqui não é à totalidade da crítica de Lukács (2012) a Einstein e Infeld (2008), pois comungamos com aquilo que diz respeito à crítica às concepções que consideram a Geometria como parte constitutiva da realidade física e da absurdidade do exemplo de Einstein e Infeld (2008). Porém, não vemos em momento algum, nas passagens de Einstein e Infeld (2008), o argumento da constituição física do objeto da Geometria.

Na sequência da crítica, ao tratar da necessária homogeneização no reflexo geométrico da realidade heterogênea e do correto reflexo da condição quantitativa da Matemática, Lukács (2012, p. 65) escreve:

Essa homogeneização razoável no espelhamento geométrico permite, portanto, um alto grau de matematização das relações espaciais assim descobertas, uma racionalização expressa em

termos matemáticos de conexões puramente espaciais, que jamais poderiam ter sido obtidas por meio da simples observação etc. das próprias coisas. E ao falar aqui de matematizar, devemos acrescentar de imediato que também a matemática, obviamente, baseia-se no correto espelhamento da condição quantitativa das coisas e das relações na realidade. Quando falamos, para nos limitarmos aqui ao mais elementar, de quarenta pessoas ou de cinquenta árvores, os nossos pensamentos espelham o puramente quantitativo dos objetos, o número de exemplares presentes em tal grupo de objetos, prescindindo de qualquer outro caráter qualitativo. Em nosso exemplo, este último está presente sob a forma de um resto abstrato, na medida em que falamos de pessoas e árvores. Se desejamos prosseguir desse ponto até a mais simples das operações matemáticas, a adição, devemos eliminar também esse resto qualitativo, ou então substituí-lo por uma abstração que suprima ainda mais as qualidades. Podemos dizer, então, que quarenta seres vivos somados com cinquenta seres vivos perfazem noventa seres vivos. O desenvolvimento da matemática confirmou brilhantemente a correção e a fecundidade dessa abstração homogeneizante e ajudou a desvendar nexos quantitativos da realidade de extrema complexidade, coisa que não teria sido possível por vias diretas. Desse modo, repetimos, sobre a base do espelhamento abstrativo-homogeneizante foi possível também a matematização das relações espaciais puras, geometricamente espelhadas.

A abstração homogeneizante é uma necessidade no conhecimento matemático, porém não pode prescindir, na análise de um fenômeno físico, das demais propriedades do objeto analisado. Tal homogeneidade matemática não pode ser absolutizada e encarada “como a chave última e definitiva de decifração dos fenômenos” (LUKÁCS, 2012, p. 50), como ocorre com o neopositivismo. Poderíamos prosseguir no exemplo de Lukács (2012) e abstrair todas as propriedades qualitativas, de modo que restaria apenas a relação quantitativa “quarenta mais cinquenta é igual a noventa”.

Essa análise de Lukács (2012) do conhecimento geométrico e matemático expressa uma compreensão dialético-materialista da realidade, sobretudo da espacialidade e das relações quantitativas. Assim, ele sustenta o desenvolvimento do pensamento teórico-matemático que contribua a uma formação humana plenamente desenvolvida. A formação de tal pensamento se torna possível por meio do método dialético-materialista de compreensão da realidade que, por sua vez, possibilita as transformações da atual forma de produzir a vida humana em sociedade.

Ao fim de sua análise do experimento de Einstein e Infeld (2008) e da compreensão do objeto da Geometria e da Matemática, Lukács (2012, p. 65-66) adverte com justeza:

Todos esses triunfos da abstração razoável não alteram em nada o fato ontológico fundamental de que tanto a geometria quanto a matemática constituem espelhamentos, e não partes, nem "elementos" etc. da realidade física. Por espelharem momentos importantes e fundamentais, puras relações espaciais e puras relações quantitativas respectivamente, a geometria e a matemática são excelentes instrumentos para conhecer toda a realidade cuja essência consiste de relações espaciais ou quantitativas. Mas a despeito de todos esses brilhantes resultados não se deve esquecer a singela verdade de que espelhamentos desse tipo podem espelhar somente determinados momentos da realidade, enquanto a realidade existente em si possui uma infinidade de outros componentes.

Essa advertência é importante para não incorrer-se nos mesmos erros do neopositivismo ao reduzir a realidade às descrições e interpretações puramente lógico-matemáticas. Os conhecimentos matemáticos e geométricos são reflexos do real e, portanto, sua coerência estrutural não pode se organizar por si própria, em uma abstração que independa do movimento da realidade material. Isso porque “a esta abstracción no debe elevársela a la categoría de absoluta mediante una sustitución de la propia realidad objetiva por conceptos abstractos” (ALEKSANDROV, 1991b, p. 218).

A crítica de Lukács (2012) ao experimento de Einstein e Infeld (2008) se torna pertinente à análise da relação entre a realidade física e o reflexo geométrico, uma vez que as geometrias não-euclidianas

constituíram uma base do desenvolvimento da teoria da relatividade. A análise concreta de um fenômeno passa pelo correto reflexo de seus momentos. Lukács (2012) esclarece que suas considerações não pretendem uma crítica à teoria física de Einstein e Infeld (2008), “sustentam apenas que seu experimento ideal não agrega nenhuma prova filosófica em favor da tese de que a geometria é um ‘capítulo da física’” (LUKÁCS, 2012, p. 66). E finaliza, “parece-nos, muito antes, que, nesse particular, o importante físico fez uma concessão filosófica à teoria da manipulação do neopositivismo” (LUKÁCS, 2012, p. 66). Concordamos que tal experimento não agrega prova filosófica a esta questão. Porém, como dito anteriormente, não vemos nos argumentos de Einstein e Infeld (2008) a intenção de provar que o objeto da Geometria é constitutivo da realidade física, ou seja, provar a indistinção entre o reflexo e a própria realidade física.

Como afirma Lukács (2012), em sua crítica, a não diferenciação entre o reflexo e a própria realidade física caracteriza uma concepção idealista ou materialista mecanicista do desenvolvimento da matéria em movimento. Podemos observar esse movimento da compreensão do objeto da Geometria ao longo da história, que variou entre aqueles que concebem esse objeto como inerente a realidade física e aqueles que o entendem como uma forma a priori da sensibilidade humana. Uma variante idealista concebe o objeto da Geometria como uma produção da ideia absoluta.

No entanto, contrariamente a todas essas concepções, o materialismo dialético concebe o objeto da Geometria em sua relação entre a realidade física e as formas de reflexo do ser humano em seu processo de conhecimento. Na sequência, veremos como essas concepções se apresentaram ao longo do desenvolvimento do objeto da Geometria.

5.2 GÊNESE E DESENVOLVIMENTO DO OBJETO DA GEOMETRIA

O conhecimento geométrico, de acordo com os capítulos anteriores, possui pelo menos três concepções acerca de seu objeto. A primeira é materialista mecanicista, que concebe o objeto da Geometria como inerente a realidade física e a segunda concepção é a idealista, que reconhece seu objeto como uma forma a priori da sensibilidade. Conforme nossa tese, ambas não correspondem à realidade dos fatos. A terceira concepção é a dialético-materialista, que concebe o objeto da

Geometria na relação entre a realidade física e a consciência, uma vez que esse objeto se constitui nessa realidade e se reflete na consciência. Todas elas possuem suas respectivas compreensões da questão fundamental da filosofia, as relações entre a matéria e a consciência.

As mencionadas concepções podem estar atravessadas por pressupostos científicos, místicos, mitológicos etc., que podem indicar caminhos diferentes na sua teoria do conhecimento. Entretanto, partimos de pressupostos científicos para compreender o objeto da Matemática e, mais especificamente nessa tese, do objeto da Geometria. Segundo Ríbnikov (1987, p. 9-10, grifos do autor):

La composición de las matemáticas, como la de toda otra ciencia, es la siguiente: a) *HECHOS*, acumulados en el transcurso de su desarrollo; b) *HIPÓTESIS*, esto es, suposiciones científicas, basadas en los hechos, que se someten posteriormente a una verificación experimental; c) los resultados de la generalización del material real expresado, en este caso, por *TEORÍAS Y LEYES MATEMÁTICAS*; d) la *METODOLOGÍA* de la matemática, esto es la interpretación teórica general de las leyes y teorías matemáticas, las que caracterizan el enfoque general en el estudio del objeto de las matemáticas.

O autor expressa uma compreensão materialista dialética de ciência, sobretudo ao apontar os fatos acumulados no transcurso do desenvolvimento da produção da vida humana. Tais fatos acontecem no fluxo da história e respondem às necessidades de um determinado momento, bem como avançam e retrocedem nessas respostas, de acordo com sua eficácia. A ordem histórica dos fatos varia dialeticamente em cada época, ou seja, avança, retrocede, estagna. Enfim, ordena-se posteriormente na ordem lógica que o ser humano cria para compreender essa realidade material.

Nesse viés, entra o componente do conhecimento e o ser humano não passa impune, como um espectador do fluxo da história. Mesmo o homem primitivo já verificava as regularidades dos fatos acontecidos e formulava hipóteses, que se verificavam nas práticas de suas vidas ou se refutavam. Podemos dizer que aí já se encontrava o gérmen da ciência moderna, porém o homem elaborou muitos outros paradigmas e critérios de verdade ao longo da história. O resultado das observações dos fatos

fez o homem produzir leis e teorias que qualificassem suas ações na produção da vida e, para isso, produziu métodos para o desenvolvimento de tais ações, práticas e teorias.

Esse processo é válido para todas as ciências e, em particular, para a Matemática. No movimento da produção do conhecimento matemático, aparecem elaborações de diversas civilizações, uma vez que essa ciência possui sua origem nos tempos mais primitivos. Podemos dizer que a Matemática se confunde com o surgimento do homem. A Geometria como entendemos hoje, por exemplo, era assimilada pelo homem primitivo intuitivamente ao calcular a distância entre ele e a caça, ao construir suas moradias e até mesmo ao empregar elementos estéticos em seus desenhos para representar a realidade por meio de seu misticismo.

Com o tempo, a Geometria intuitiva ganhou elementos teóricos, mesmo que não sistematizados, e se tornou um conjunto de regras para a satisfação de necessidades imediatas. Nesse momento, a Geometria ainda estava diretamente ligada à realidade física, ou seja, não era compreendida como um possível conhecimento teórico desligado dos objetos físicos. Isso se dá, entre outros motivos, porque outras ciências também não tinham se desenvolvido suficientemente e suas necessidades ainda não impeliam a Matemática a se desenvolver. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 59-60):

Tal es la regla general. Las viejas teorías, al dar lugar a nuevos y profundos problemas, se superan a sí mismas y exigen nuevas formas e ideas para seguir progresando. Pero estas formas e ideas pueden necesitar nuevas condiciones históricas para su nacimiento. En las sociedades antiguas las condiciones necesarias para pasar a la matemática superior ni existían ni podían existir; las circunstancias adecuadas surgieron con el desarrollo de las ciencias naturales en los tiempos modernos, desarrollo que, en los siglos XVI y XVII, estuvo condicionado a su vez por las nuevas demandas que impuso la tecnología y las manufacturas, y que vino de la mano del nacimiento y desarrollo del capitalismo. Los griegos agotaron prácticamente todas las posibilidades de la matemática elemental, lo que explica el hecho de que el brillante progreso de la geometría se paraliza al comienzo de nuestra era y

fuese reemplazado por la trigonometría y el álgebra en los trabajos de Tolomeo⁴¹, Diofanto⁴² y otros.

O surgimento de novas necessidades, ao satisfazer outras, promove esse avanço da Matemática e, em especial, da Geometria. Porém, não se trata de descobrimentos isolados e sem relação com as condições de vida dos homens. Como afirma Aleksandrov (1991a), as condições para o avanço da Matemática superior nas sociedades antigas estavam limitadas, pois as ciências naturais não estavam suficientemente desenvolvidas. No entanto, apresentavam possibilidades lógicas do conhecimento, pois, por exemplo, os gregos produziram grandes sistematizações geométricas e não avançaram mais a partir daí. Foram cerca de dois mil anos até que as condições históricas permitissem e exigissem o desenvolvimento de uma Geometria superior. Esse processo de surgimento de uma nova Geometria alcançou seu limiar com Descartes⁴³, no século XVII, e culminou com matemáticos como Lobachevski, Gauss, Bolyai, entre outros, no século XIX.

O fluxo da história, determinado pela produção da vida humana, impele produções teóricas e materiais quando alcança dado amadurecimento, como afirma Aleksandrov (1991b, p. 131):

En el terreno científico sucede siempre que, una vez llegado el momento para ciertos resultados, éstos suelen ser obtenidos casi simultánea e independientemente por distintos investigadores. [...] Esto muestra que la ciencia se desarrolla inevitablemente mediante la solución de problemas para los que está madura, y no mediante descubrimientos accidentales y conjeturas. Así fue como el descubrimiento de la posibilidad de una geometría no euclidiana fue obra simultánea de varios géómetras [...].

Essa compreensão de Aleksandrov (1991b) evidencia o desenvolvimento histórico da humanidade que a impele a desenvolver os conhecimentos necessários ao avanço da ciência. Essa relação entre

⁴¹ Cláudio Ptolemeu (90 – 168) foi um cientista grego que viveu em Alexandria.

⁴² Diofanto de Alexandria (aproximadamente 200 – 284) foi um matemático grego.

⁴³ René Descartes (1596 – 1650) foi um filósofo, matemático e físico francês.

as necessidades práticas e o conhecimento produzido expressa a relação dialética entre as categorias lógico e histórico.

Vale lembrar que não é intenção dessa pesquisa uma exploração minuciosa das teorias geométricas em si, ou seja, não discutimos os espaços euclidianos, os espaços não-euclidianos, riemannianos etc. O objetivo é discutir as concepções do objeto da Geometria que surgem e se desenvolvem ao longo das “descobertas” de novas teorias geométricas.

Para localizar a Geometria na história, recorreremos à periodização feita por A. N. Kolmogórov⁴⁴, considerada por Ríbnikov (1987) em sua análise da história da Matemática. O autor classifica quatro períodos: Nascimento da Matemática, o período da Matemática elementar, o período de formação da Matemática das grandezas variáveis e o período da Matemática contemporânea.

Ríbnikov (1987, p. 16-17) descreve o primeiro período da seguinte maneira:

a) Nacimiento de las matemáticas. Este período se prolonga hasta los siglos VI-V antes de nuestra era, esto es, hasta el momento cuando las matemáticas se convierten en una ciencia independiente que tiene un objeto y métodos propios. El comienzo del período se pierde en la profundidad de la historia de la civilización primitiva. Es característica para este período la acumulación del material efectivo de las matemáticas en los límites de una ciencia general indivisible.

As preliminares elaborações matemáticas consistiam em um conjunto de regras isoladas para a solução de problemas imediatos. Além disso, outro aspecto importante é a indissolúvel ligação entre a Geometria e a Aritmética. Também é nesse período que se inicia a constituição de um sistema logicamente unificado dos conceitos matemáticos.

As regras matemáticas isoladas “no formaban todavía un sistema lógicamente unificado, pues ese carácter teórico que tiene hoy la matemática gracias a las demostraciones lógicas de sus teoremas, se

⁴⁴ Andrei Nikoláyevich Kolmogórov (1903 – 1987) foi um matemático soviético.

formó muy lentamente a medida que se fue acumulando material para ello” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 56-57). Isso significa que, na história da Matemática, são recentes as sistematizações teóricas que versam sobre seus conceitos abstratos sem relação direta com a matéria da qual são refletidos.

Segundo Struik (1989, p. 47-48):

As matemáticas orientais como uma ciência prática com o objectivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. A ênfase inicial foi dada naturalmente à aritmética prática e à medição. Porém, uma ciência cultivada durante séculos como um ofício especial e cuja tarefa não é apenas aplicar, mas também ensinar seus segredos, desenvolve tendências para a abstração. Gradualmente, ela virá a ser estudada por si própria. A aritmética transformou-se em álgebra, não só porque possibilitava melhores cálculos práticos, mas também porque era o resultado natural de uma ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos escribas. Pelas mesmas razões, a medição deu origem aos começos – mas não mais do que isso – da geometria teórica.

Vemos que a necessidade de ensinar às novas gerações as práticas da contagem e da medição impele o desenvolvimento de uma Matemática abstrata. Nesse período em que começam as suas sistematizações, desde o Egito antigo até a época grega, a Aritmética recebe um caráter algébrico e a Geometria começa a se desvincular da Aritmética e construir seus próprios métodos. Esse avanço da Geometria em relação à Aritmética se percebe, na Grécia, em que ela assume características eminentemente algébricas. Inicialmente, um conjunto de regras isoladas de medição de terras, de volumes de produção, de simetrias na arte e na arquitetura. Posteriormente, no Egito antigo, um primeiro passo à constituição da Geometria que caracteriza os primórdios dessa ciência.

Naquele momento, o conhecimento geométrico se confunde com o conhecimento humano mais primitivo. Mesmo assim, a Geometria aponta para uma sistematização teórica no período do Egito antigo, por volta de dois mil anos antes de nossa era. Nosso pressuposto é o de que

a base dessa necessidade está na emergente consolidação da propriedade privada, que requeria uma imprescindível ciência das medições de terras, do cálculo dos volumes das colheitas etc., para um refinamento dos processos produtivos. Assim, Aleksandrov (1991a, p. 39) afirma:

Sobre esta cuestión escribió el sábio griego Eudemo de Rodas lo siguiente: “La geometría fue descubierta por los egipcios como resultado de las medidas de sus tierras, y estas medidas eran necesarias debido a las inundaciones del Nilo, que constantemente borraban las fronteras. No hay nada notable en el hecho de que esta ciencia, al igual que las otras, haya surgido de las necesidades prácticas del hombre. Todo conocimiento que surge de circunstancias imperfectas tiende por sí mismo a perfeccionarse. Surge de las impresiones de los sentidos, pero gradualmente se convierte en objeto de nuestra contemplación y finalmente entra en el reino del intelecto”. Naturalmente, la medición de tierras no fue el único problema que llevó a los antiguos a la geometría. [...] Los egipcios y babilonios sabían determinar las áreas y los volúmenes más sencillos, conocían con considerable exactitud el cociente de la longitud de una circunferencia a su diámetro, y quizá incluso supieran calcular el área de la superficie de una esfera; en una palabra, poseían ya una cantidad respetable de conocimientos geométricos. Pero, por lo que hasta ahora sabemos, no estaban todavía en posesión de la geometría como ciencia teórica provistas de teoremas y demostraciones.

É correto afirmar que a Geometria surge das necessidades do homem e que o processo de sensação, percepção e representação tende ao aperfeiçoamento nas suas elaborações conceituais e, conseqüentemente, a um refinamento dos processos produtivos. Porém, é muito impreciso designar ao egípcios a “descoberta” da Geometria, como afirma Aleksandrov (1991a). Não apenas nas medições de terras, mas outros problemas sobre capacidades de estocagem etc., também formam o surgimento da Geometria. Repetimos, no Egito antigo começa o processo de sistematização, haja vista que a Geometria, mesmo como conhecimento intuitivo, já guiava o homem mais primitivo no tempo e

no espaço. Até esse momento, o referido conhecimento era eminentemente utilitário, mas isso não corresponde à totalidade dos fatos. Mesmo com a escassez do lazer e do tempo livre, o misticismo também proporcionou a possibilidade de elaborações geométricas. A atividade intelectual desligada das atividades práticas também teve lugar no Egito antigo e, mais fortemente no período grego.

Segundo Boyer (1974, p. 31):

Avaliações das civilizações pré-helênicas freqüentemente assinalam o fato de que não havia atividade intelectual claramente discernível de espécie caracteristicamente unificada comparável ao que mais tarde recebeu o nome de “matemática”; mas aqui também é fácil ser excessivamente dogmático. Pode ser verdade que a geometria ainda não se havia cristalizado a partir de uma matriz tosca de experiência espacial que incluía toda espécie de coisas que podiam ser medidas; mas é difícil não perceber na preocupação babilônica e egípcia com os números e suas aplicações muito próximo do que usualmente, em épocas posteriores, chamou-se álgebra. As culturas pré-helênicas também têm sido estigmatizadas como puramente utilitárias, com pouco ou nenhum interesse pela matemática por ela mesmo. Aqui, também, está envolvido um julgamento, mais do que uma prova indiscutível. Então, como agora, a vasta maioria da humanidade se preocupava com problemas imediatos de sobrevivência. O lazer era muito mais raro do que hoje, mas mesmo assim havia no Egito e na Babilônia problemas que têm as características de matemática de recreação. Se um problema pede a soma de gatos e medidas de trigo, ou de um comprimento e uma área, não se pode negar a quem o perpetrar ou um certo humor ou uma procura de abstração. Naturalmente muito de matemática pré-helênica era prática, mas certamente não toda. A verdade provavelmente jaz entre os extremos recentemente publicados por dois historiadores da matemática. Um deles afirma que a matemática babilônica se orientava unicamente a fins práticos; o outro defende ponto de vista diametralmente oposto,

que a matemática suméria não usada para a resolução de problemas da vida prática, mas somente para o prazer ou exultação do espírito. Um leitor prudente pode assumir com segurança que nenhuma dessas posições extremas pode ser sustentada impunemente.

O autor evidencia que as atividades intelectuais faziam parte de civilizações anteriores à grega, mesmo não sendo frequente essa caracterização. Surge aos poucos, e, mais tarde, consolida-se na Grécia o germen de uma necessária generalização, ainda que primitiva, que caracteriza o começo das abstrações puras em Geometria. Esse processo culmina, na época antiga, com a escrita dos *Elementos*, de Euclides. Boyer (1974) alerta para a prudência necessária ao caracterizar esse período como eminentemente composto por problemas práticos. Portanto, ainda não estava claramente definida a especificidade do objeto da Geometria, isto é, se era um elemento constituinte da própria realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade humana.

Uma concepção nessa direção era sustentada por Demócrito, filósofo que constituiu, segundo nossa interpretação, uma concepção materialista mecanicista sobre o objeto da Geometria. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 44-45):

Demócrito llegó incluso a sugerir la idea de que las figuras geométricas constan de átomos de una clase particular. Esta noción, que para nosotros parece bastante extraña, demostró ser muy útil en la determinación de áreas y volúmenes. Las áreas se calculaban como la suma de filas formadas por átomos, y los volúmenes, como suma de capas de átomos. [...] El lector familiarizado con el cálculo integral observará que este método constituye ya el prototipo de la determinación de áreas o volúmenes por lo métodos de cálculo integral. [...] En la época de Demócrito, las figuras geométricas no estaban todavía separadas de las reales tanto como ahora. Y puesto que Demócrito consideraba los cuerpos reales como compuestos de átomos, nada más natural que también contemplara las figuras geométricas bajo este mismo ángulo.

Demócrito expressa claramente a ideia de um objeto da Geometria como sendo constitutiva da realidade física. Sua filosofia

atomista, mesmo não correspondendo à realidade dos fatos, fez-se eficaz nos cálculos matemáticos e geométricos. Aleksandrov (1991a) cita o exemplo do cálculo integral para se determinar áreas e volumes com base nessa concepção e que gerou as discussões sobre as grandezas discretas e contínuas. O cálculo diferencial de Newton e Leibniz ainda contemplava as grandezas discretas, como uma soma infinita de grandezas infinitamente pequenas. A perspectiva atomista de Demócrito sobre a categoria matéria se estende à Geometria, concebida como constituída de átomos. Nesse entendimento, o objeto da Geometria é inerente à realidade física e o homem pode conhecê-lo a partir da manipulação da matéria e de seu movimento no tempo e no espaço. Essas duas categorias, por consequência, não entram necessariamente nesse contexto, elas ainda são consideradas independentes da matéria, são consideradas absolutas, ou seja, possuem uma existência própria, livres do movimento da matéria.

Aleksandrov (1991a), ao tratar das civilizações antigas, também exemplifica a questão da inseparabilidade dos conceitos matemáticos da própria realidade material. Segundo o autor:

Debemos concluir que los números eran directamente percibidos por ellos como una propiedad inseparable de una colección de objetos, una propiedad que ellos, sin embargo, no podían claramente distinguir. Hoy día estamos tan acostumbrados a contar que difícilmente podemos imaginar este estado de cosas, pero es posible entenderlo. A un nivel inmediatamente superior, el número aparece ya como una propiedad de una colección de objetos, aunque no se distingue todavía de la colección en cuanto “número abstracto”, en cuanto número no relacionado con objetos concretos. Esto es obvio si observamos los nombres que reciben algunos números entre ciertos pueblos: “mano” para cinco y “hombre completo” para veinte. (ALEKSANDROV, 1991a, p. 24-25).

Percebe-se que, nesse primeiro momento, o número é inseparável da realidade física e, num segundo estágio de desenvolvimento da humanidade, o conceito de número se torna uma propriedade de uma coleção e não pode ser pensado abstratamente separado dessa coleção. Os conceitos geométricos seguem a mesma direção, inclusive porque a

Aritmética e a Geometria caminhavam lado a lado, às vezes, quase indistintas. Como afirma Aleksandrov (1991a), a etimologia de alguns conceitos numéricos revela muita informação sobre sua gênese e desenvolvimento.

No entanto, existem divergências sobre tal gênese e desenvolvimento da Geometria, que se expressa nas duas concepções opostas em relação ao objeto da Geometria. Nas palavras de Boyer (1974, p. 4-5):

Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual do vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lares é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Podemos considerar as idéias de Heródoto e Aristóteles como representando duas teorias opostas quanto às origens da matemática, um acreditando que a origem fosse a necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e ritual. O fato dos geômetras egípcios serem as vezes chamados “estiradores de corda” (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a matemática, mas claro que ambos subestimam a idade do assunto. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência, são partes da geometria elementar.

Essas duas perspectivas, a idealista e a materialista mecanicista, possuem algo em comum: absolutizam o objeto da Geometria e dogmatizam a compreensão do homem sobre as relações espaciais e as relações entre os corpos físicos. Heródoto e Aristóteles possuem posições corretas e equivocadas ao mesmo tempo. São corretas porque expressam elementos históricos singulares da gênese da Geometria, e equivocadas porque fazem dessas singularidades uma relação universal do desenvolvimento do objeto da Geometria. Concordamos com Boyer (1974), ao afirmar que eles subestimaram a idade do surgimento da Geometria, mesmo que ainda não sistematizada.

Segundo Struik (1989, p. 29), “as pinturas em cavernas da França e da Espanha (com mais de 15000 anos) deviam ter algum significado ritual; matematicamente falando, revelam uma compreensão da descrição bidimensional dos objetos no espaço”. Essa compreensão das relações espaciais, em especial da representação bidimensional de objetos tridimensionais, revela uma grande capacidade do homem primitivo de geometrizar e, por sua vez, evidencia como as noções de Geometria nasceram com o próprio nascimento das civilizações humanas.

Para além das necessidades práticas imediatas que identificam a Geometria com a própria realidade física, encontramos no misticismo, nos rituais, no elemento estético etc., possíveis evidências das necessidades de sua criação. Conforme Boyer (1974, p. 5, grifo do autor):

A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes propõem a matemática de hoje. Gostaríamos de pensar que ao menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela sua satisfação de fazer matemática, não como auxílio prático à mensuração; mas há outras alternativas. Uma é que a geometria, como a contagem, tivesse origem em rituais primitivos. Os mais antigos resultados geométricos encontrados na Índia anteriores à grega foram o que se chamou os *Sulvasutras*, ou “regras da corda”. Tratava-se de relações simples que aparentemente se aplicavam à construção de templos e altares. Pensa-se usualmente que a motivação geométrica dos “estiradores de corda”

no Egito era mais prática do que a dos seus colegas na Índia; mas sugeriu-se que tanto a geometria da Índia como a egípcia podem provir de uma fonte comum – uma protogeometria relacionada com ritos primitivos mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia. Devemos ter em mente que a teoria da origem da geometria numa secularização de práticas rituais não está de modo nenhum provada. O desenvolvimento da geometria pode também ser estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. Podemos fazer conjeturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir, e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. (BOYER, 1974, p. 5, grifo do autor).

Assim, existem alternativas das mais diversas para a gênese e o desenvolvimento da Geometria, dentre as quais a medição de terras possui grande plausibilidade. A possibilidade de uma protogeometria mística nos rituais segue o mesmo caminho tanto da gênese da ciência, a partir da mitologia, quanto da filosofia, a partir da teologia, calcada em um idealismo primitivo. Ou seja, nos primórdios pode ter existido uma concepção idealista em que a geometria do mundo é regida por leis universais absolutas e que se dirige à materialidade do mundo por meio da contemplação. Sendo assim, cai por terra o pressuposto de que a Geometria primitiva era eminentemente materialista mecanicista. Boyer (1974) alerta para que não se confunda conjeturas com história. Acrescentamos que não é possível a delimitação dos marcos absolutos da gênese da Geometria, mas é possível a análise de como seu desenvolvimento, em cada época histórica, delineia as concepções sobre seu objeto.

No contexto do misticismo e das elaborações idealistas sobre a matemática, especialmente os dois ramos indissociáveis dessa ciência na antiguidade, a Geometria e a Aritmética, os pitagóricos cumpriram papel importante, como nos indica Boyer (1974, p. 39, grifo do autor):

Misticismo sobre números não é criação dos pitagóricos. O número sete, por exemplo, era objeto de especial respeito, presumivelmente por causa de sete estrelas errantes, ou planetas, das quais a semana derivou. Os pitagóricos não eram os únicos a imaginar que os números ímpares tinham atributos masculinos e femininos os pares – com a concomitante crença (não destituída de preconceito), encontrada ainda em Shakespeare⁴⁵, de que “há divindade nos números ímpares”. Muitas civilizações primitivas compartilharam vários aspectos de numerologia, mas os pitagóricos levaram o extremo a adoração dos números, baseando neles sua filosofia e modo de viver. O número um, diziam eles, é o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par, ou feminino, o número de opinião; três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto da unidade e diversidade; quatro é o número da justiça ou retribuição indicando o ajuste de contas; cinco é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros feminino e masculino; e seis é o número da criação. Cada número por sua vez tinha seus atributos peculiares. O mais sagrado era o dez ou o *tetractys*, pois representa o número do universo, inclusive a soma de todas as possíveis dimensões geométricas. Um ponto gera as dimensões, dois pontos determinam uma reta de dimensão um, três pontos não alinhados determinam um triângulo com área de dimensão dois, e quatro pontos não coplanares determinam um tetraedro com volume de dimensão três; a soma dos números que representam todas as dimensões é, portanto, o adorado número dez. É um tributo à abstração da matemática pitagórica que a veneração do número dez evidentemente não era ditada pela anatomia da mão ou pé humanos.

⁴⁵ William Shakespeare (1564 – 1616) foi um dramaturgo inglês.

Percebe-se a veneração dos números pelos pitagóricos e como sua visão idealista é fortemente constituída por suas características peculiares, que são delimitadas espaço-temporalmente, pois envolvem conceitos como masculino e feminino, casamento, justiça e concepção de universo. Vemos uma inversão ontológica nessa concepção de mundo dos pitagóricos, em que eles atribuem aos números uma divindade. Essa concepção numerológica se estende à Geometria, pois os pitagóricos estabelecem uma relação com as dimensões espaciais, bem como encontram o que eles chamam de número sagrado que rege a formação do universo, o número dez. Tanto em Geometria quanto em Aritmética, a base decimal não tem necessariamente sua origem na quantidade dos dedos das mãos humanas, segundo os pitagóricos. Ainda que a etimologia da palavra “dígito” tenha ligação direta com a palavra “dedo”, tais concepções idealistas apresentam forte evidência na gênese e desenvolvimento da matemática, em especial da Geometria.

Esse período que se inicia nos primórdios da humanidade e segue até os séculos VI ou V a. n. e, segundo a periodização indicada por Ríbnikov (1987), é marcado por duas concepções predominantes, a saber: uma idealista e outra materialista mecanicista. O fim desse período marca o desenvolvimento do conhecimento geométrico. Exemplo disso é a aparição, em particular, de “exposiciones sistemáticas de la geometría, como os ‘Elementos’ de Hipócrates de Quío⁴⁶” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 56), mesmo antes do maior tratado de Geometria de todos os tempos, os *Elementos*, de Euclides. Esse período marca também as bases do desenvolvimento posterior da ciência Matemática e dá início a sistematização lógica, a sua consolidação com um objeto próprio e a um predomínio da concepção idealista do objeto da Geometria.

O segundo período de desenvolvimento da Matemática é assim caracterizado por Ríbnikov (1987, p. 17):

b) El período de las matemáticas elementales se prolonga desde los siglos VI-V antes de nuestra era hasta el siglo XVI de nuestra era inclusive. En este período fueron obtenidos en el estudio de las magnitudes constantes. Una cierta representación sobre estos logros la pueden dar las matemáticas

⁴⁶ Hipócrates de Quío (470 a. n. e. – 410 a. n. e.) foi um matemático e astrônomo grego.

que se estudian actualmente en la escuela media. Este período culmina cuando los procesos y los movimientos se hacen objeto principal de los problemas matemáticos y comienza a desarrollarse la geometría analítica y el análisis infinitesimal. El concepto matemático elemental es discutible y en presente no existe una definición universal reconocida, sin embargo, la separación en el tiempo de tal período está completamente justificada. (RÍBNIKOV, 1987, p. 17).

O período da Matemática elementar pode dividir-se também “en dos partes, que se distinguen por su contenido básico: el del desarrollo de la geometría (hasta el siglo II d. C.) y el del predominio del álgebra (desde el siglo II al XVII)” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 57). Segundo Aleksandrov (1991a), ainda podemos dividir o período, dadas as circunstâncias históricas, em três partes: grega, oriental e Renascimento europeu. É justamente na época grega que a Geometria tem um grande desenvolvimento, com destaque aos eminentes geômetras da época, por exemplo, Euclides, Arquimedes⁴⁷ e Apolônio⁴⁸. “Arquímedes hizo uso del cálculo integral para el cálculo de áreas y volúmenes, y Apolonio utilizo la geometría analítica en sus investigaciones sobre secciones cónicas” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 59). A utilização, por Descartes (século XVII), de problemas colocados pelos gregos para desenvolver a Geometria Analítica⁴⁹ evidencia como a base do conhecimento geométrico posterior se deve à Geometria desenvolvida na Grécia Antiga.

A diferença entre a Geometria Analítica dos gregos e a de Descartes no século XVII é o não uso da linguagem simbólica, pelos primeiros. Essa falta de símbolos algébricos, que facilitam as operações geométricas, não foi obstáculo para seu desenvolvimento e posterior fundamentação das bases geométricas e algébricas necessárias ao avanço científico e tecnológico. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 70-71):

⁴⁷ Arquimedes de Siracusa (287 a. n. e. – 212 a. n. e.) foi um físico, astrônomo e matemático grego.

⁴⁸ Apolônio de Perga (262 a. n. e. – 190 a. n. e.) foi um matemático grego.

⁴⁹ No que diz respeito à Geometria Analítica, encontramos referência em Giardinetto (1991).

Entre los griegos las secciones cónicas eran objeto de un interés puramente matemático; pero en la época de Descartes tenían ya una importancia práctica para la astronomía, la mecánica y la tecnología. [...] Así, pues, el desarrollo precedente de la matemática preparó el camino para su método; y éste, por su parte, surgió de las insistentes demandas de la ciencia y la tecnología.

Vemos que o interesse no desenvolvimento da Geometria é determinado pelas necessidades de cada época. Na Grécia, fica evidente o interesse puramente matemático dos conceitos, ao contrário do que acontecia eminentemente no Egito. Com a queda da civilização grega e o passar dos séculos, as necessidades transformaram-se e cada vez mais foram delineadas por novas necessidades práticas. Porém, esse novo movimento adquiriu um patamar superior, sobretudo com a Física, a Astronomia, a Mecânica e as tecnologias modernas. Esse foi um período de grandes revoluções nessas áreas, em que a Matemática e a Geometria cumpriam papéis importantes nos seus desenvolvimentos. As concepções idealistas, por exemplo, como o Neopositivismo, atribuem à Matemática e à Geometria um papel de chave última de decifração da realidade material, como analisamos na seção “crítica à crítica de Lukács a Einstein”.

O terceiro período de classificação aqui adotado trata-se do desenvolvimento das grandezas variáveis. Segundo Ribnikov (1987, p. 17):

c) Período de formación de las matemáticas de magnitudes variables. El comienzo de este período está representado por la introducción de las magnitudes variables en la geometría analítica de Descartes y la creación del cálculo diferencial e integral en los trabajos de I. Newton y G. V. Leibniz. El final de este período se sitúa a mediados del siglo XIX cuando en las matemáticas ocurrieron los cambios que la llevaron a su estado actual. En el transcurso de este período impetuoso y rico en acontecimientos se formaron casi todas las disciplinas conocidas actualmente como los fundamentos clásicos de las matemáticas contemporáneas.

Nosso interesse de discussão com base na periodização apresentada por Ríbnikov (1987) se volta para o segundo e terceiro períodos, ou seja, dos séculos VI ou V a. n. e até o século XIX. Isso porque ocorre o transcurso da hegemonia dos *Elementos*, de Euclides, nas concepções de Geometria, em especial seu eminente caráter idealista.

Até o século III a. n. e, como dito antes, a Geometria era fundamentalmente um conjunto de regras práticas para resoluções de problemas imediatos, com suas exceções de caráter místico, estético etc. É na época grega que surge com maior intensidade a formação de sistematizações puramente matemáticas. O surgimento da grande obra de Euclides não se trata de um ato isolado de uma concepção idealista da Geometria, mas traz consigo a influência de concepções filosóficas como a platônica que, mais tarde, influenciaria fortemente a concepção kantiana das categorias tempo e espaço. Essa última se caracteriza como ponto central nas discussões acerca do objeto da Geometria, pois está indissolivelmente ligada às categorias matéria e movimento, segundo o materialismo dialético.

Euclides é uma figura enigmática e pouco se sabe sobre sua história de vida, mas sua obra lhe concedeu um lugar de grande interesse científico, ao ponto de tornar seu nome quase um sinônimo de sua obra, apesar de ter escrito outras obras. Conforme Struik (1989, p. 90, grifos do autor):

Euclides, sobre cuja vida nada é verdadeiramente conhecido, distinguiu-se durante a época do primeiro Ptolomeu⁵⁰ (306 – 283 a. C.)⁵¹, a quem se supõe ter observado que “não existe uma estrada real para a geometria”. Os seus textos mais famosos e mais avançados são os treze livros que constituem os *Elementos* [...], embora também lhe sejam atribuídos outros textos menores. Entre estes textos encontra-se o *Data* que contém o que chamaríamos aplicações da álgebra à geometria, sendo apresentados numa linguagem estritamente geométrica. Não sabemos quantos destes textos pertencem mesmo ao próprio Euclides e quantos são compilações; no entanto, revelam em muitas partes uma perspicácia surpreendente. São os

⁵⁰ Ptolomeu I (367 a. n. e. – 283 a. n. e.) foi um general Egípcio.

⁵¹ Esta data se refere ao período de seu governo.

primeiros textos inteiramente sobre matemática que foram conservados.

O texto que contém os treze livros sucumbiu todas as outras sistematizações sobre Geometria, não somente pela didaticidade, mas também pelo desenvolvimento de um método axiomático. Os *Elementos* são um tratado sobre Geometria e método, de modo que influenciou grandemente o pensamento científico ao longo de dois milênios. Eves (2004, p. 167-168, grifo do autor) destaca essa influência dos treze livros de Euclides:

Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

A influência no pensamento geométrico é indiscutível, haja vista que a Geometria sofreu uma revolução somente no século XIX com o desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas, surgidas a partir das acirradas tentativas de demonstrar o quinto postulado contido na obra de Euclides. Entretanto, observamos que sua influência chegou às concepções filosóficas idealistas, às geocêntricas defendidas pela igreja, bem como ao pensamento científico emergente ao longo desses dois milênios. De acordo com Struik (1989, p. 92-93), a intenção de Euclides ao escrever sua obra máxima, era “reunir num texto três grandes descobertas do seu passado recente: a teoria das proporções de Eudoxo⁵², a teoria dos irracionais de Teeteto⁵³ e a teoria dos cinco sólidos regulares, que ocupava um lugar importante na cosmologia de Platão⁵⁴”. Essas realizações eram conquistas da época grega, que, ao reuni-las, resultou num texto de treze livros com discussões para além da geometria plana, trata também da teoria dos números, dos incomensuráveis e da Geometria espacial. Boyer (1974, p. 77, grifo do autor) descreve o conteúdo dos *Elementos*:

⁵² Eudoxo (408 a. n. e. – 355 a. n. e.) foi um filósofo, matemático e astrônomo grego.

⁵³ Teeteto (414 a. n. e. – 369 a. n. e.) foi um matemático grego.

⁵⁴ Platão (427 a. n. e. – 347 a. n. e.) foi um filósofo grego.

Os *elementos* estão divididos em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Não há introdução ou preâmbulo, e o primeiro livro começa abruptamente com uma lista de vinte e três definições. A deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um conjunto prévio de elementos não-definidos em termos dos quais os outros sejam definidos. Assim, dizer como Euclides, que “um ponto é o que não tem parte”, ou que “uma reta é comprimento sem largura”, ou que “uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura” não é definir esses entes, pois uma definição deve ser expressa em termos coisas precedentes que são melhor conhecidas que as coisas definidas.

Claro está que essas deficiências lógicas dos *Elementos*, de Euclides, só puderam ser constatadas a partir do desenvolvimento da Geometria, mais profundamente com o surgimento das Geometrias não-euclidianas. Os conceitos de definição, axioma e postulado se alteraram, com o tempo, em relação ao original rigor do método axiomático. Eves (2004) indica as definições inadequadas de Euclides. Porém, vale lembrar que se trata de uma constatação recente na história da Geometria. Segundo o autor:

No desenvolvimento da geometria de Euclides os termos *ponto* e *reta*, por exemplo, poderiam muito bem ser incluídos no conjunto dos conceitos primitivos do discurso. De qualquer maneira, é fácil perceber que as definições de Euclides “Ponto é aquilo que não tem partes” e “Reta é um comprimento sem largura” envolvem círculos viciosos e, portanto, de um ponto de vista lógico, são lamentavelmente inadequadas. Uma das distinções entre a concepção grega e a concepção moderna de método axiomático reside na questão dos conceitos primitivos; para os gregos não havia uma lista de conceitos primitivos. Justifica-se esse procedimento pelo fato de que para os gregos a

geometria não era exatamente um estudo abstrato, mas uma tentativa de análise lógica do espaço físico idealizado. Para os gregos, pontos e retas eram idealizações de partículas muito pequenas e fios muito finos. É essa idealização que Euclides procurou expressar em algumas de suas definições iniciais. (EVES, 2004, p. 656, grifos do autor).

A definição de axiomática é distinta entre os gregos e a concepção moderna, o que resulta em um avanço da lógica matemática no que diz respeito à sistematização de seus conceitos. A concepção moderna não abala, necessariamente, a concepção idealista que pode pairar sobre tais conceitos. De acordo com Eves (2004), a Geometria grega não era um estudo puramente abstrato, mas uma análise lógica do espaço físico idealizado. Essa concepção pode se confundir com o materialismo mecanicista em que o objeto da Geometria se encontra na matéria, nas relações espaciais e se refletem idealmente de forma mecânica na consciência. Entretanto, as idealizações do espaço físico, feita pelos gregos, eram entendidas como próprias à consciência, ou seja, eram dadas a priori na sensibilidade humana.

A análise lógica do espaço físico idealizado permanecia independente dele próprio, pois era entendido como um representante material da ideia preexistente de forma independente. Por isso, retas e pontos eram idealizações de partículas muito pequenas e fios muito finos. Somente muito tempo depois da obra de Euclides, a Geometria começou a se constituir como um estudo abstrato. Tal abstração se constitui como um reflexo da realidade física na consciência e, por sua vez, foi desenvolvido consequentemente vinte séculos depois de Euclides pelos representantes das geometrias não-euclidianas e do materialismo dialético.

O método axiomático de Euclides parte das definições, apresenta cinco postulados e cinco noções comuns ou axiomas. Conforme Boyer (1974, p. 77-78, grifos do autor):

Postulados. Seja postulado o seguinte.

1. Traçar uma reta de qualquer ponto de qualquer ponto.
2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.

5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em ângulos são menores que dois ângulos retos.

Noções comuns

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte.

Interessa-nos no texto de Euclides o quinto postulado, pois causou a grande controvérsia histórica que percorreu cerca de dois milênios sem solução. Antes, esclareçamos a diferença entre postulados e axiomas. Boyer (1974, p. 77) explica:

Aristóteles tinha feito uma forte distinção entre axiomas (ou noções comuns), e postulados; as primeiras, ele dizia, devem ser convincentes por elas mesmas – verdades comuns a todos os estudos – mas os postulados são menos óbvios e não pressupõem o assentimento do estudante, pois dizem respeito somente ao assunto em discussão. Alguns autores posteriores distinguiram entre os dois tipos de pressuposições aplicando a palavra axioma somente a algo conhecido ou aceito como evidente, enquanto a palavra postulado se referia a alguma coisa a ser "requerida". Não sabemos se Euclides adotava qualquer dessas opiniões, nem mesmo se ele fazia distinção entre dois tipos de pressuposições. Os manuscritos preservados não estão de acordo aqui e em alguns casos as dez pressuposições aparecem juntas numa só categoria. Os matemáticos modernos não vêem diferença entre axioma e postulado.

Essas diferenças entre a concepção de Aristóteles e a dos matemáticos modernos sobre os postulados e os axiomas, bem como a

possível indistinção entre ambas no texto de Euclides, não afetam nossa discussão. O próprio quinto postulado é conhecido como “o axioma das paralelas” e carregou consigo o problema de sua não dedução a partir dos postulados anteriores. Pensava-se que isso era possível, porém quase todas as tentativas fracassaram. Struik (1989) expressa o quinto postulado com palavras diferentes de Boyer (1974), de acordo com o enunciado de Playfair⁵⁵, porém há equivalência entre ambas as escritas.

O quinto postulado do livro I (a relação entre “axiomas e postulados” não é muito clara em Euclides) é equivalente ao chamado “axioma das paralelas”, de acordo com o qual, por um ponto passa uma recta paralela a uma recta dada e uma só. As tentativas de reduzir este axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa da sensatez do ponto de vista de Euclides ao adoptá-lo com um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas. (STRUIK, 1989, p. 92).

Struik (1989) reforça a possível indistinção entre postulados e axiomas em Euclides e destaca que as tentativas de demonstração do quinto postulado, a partir dos demais, ou seja, de transformá-lo em um teorema, fracassaram. Isso promoveu, no século XIX, o desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas com base nas contestações feitas ao longo da história da Geometria. O apelo idealista da Geometria euclidiana perdurou todo esse tempo e influenciou a filosofia kantiana, sobretudo sua concepção de tempo e espaço.

Concepções idealistas semelhantes sobre a Geometria se expressaram em filósofos racionalistas como Spinoza⁵⁶, Descartes e Leibniz. Segundo Davis e Hersh (1989, p. 367):

A concepção de Platão da geometria era um elemento-chave em sua concepção do mundo. A geometria desempenhou um papel semelhante para os filósofos racionalistas, Spinoza, Descartes e Leibniz. Como Platão, os racionalistas consideravam a faculdade da Razão como um traço inato da mente humana, pelo qual as

⁵⁵ John Playfair (1748 – 1819) foi um matemático escocês.

⁵⁶ Baruch de Espinoza (1632 – 1677) foi um filósofo holandês.

verdades podiam ser percebidas a priori, independentemente da observação. Por exemplo, posso estar enganado em pensar que estou sentado à minha mesa compondo esta frase, e posso seguramente estar enganado em pensar que o sol se levantará amanhã, mas de nenhuma maneira posso estar enganado em meu conhecimento de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a um ângulo plano. (O exemplo favorito de uma afirmativa indubitavelmente verdadeira, para Spinoza, era este teorema de Euclides, que, incidentemente, prova-se falso em geometria não-euclidiana).

Nessa concepção, por ser a razão um traço inato à consciência, a experiência é desnecessária a compreensão do objeto da Geometria, ou seja, o homem possui a priori a geometria do mundo e, por isso, pode mover-se nele. O exemplo citado por Davis e Hersh (1989) expressa como a experiência é desnecessária para compreender a geometrias das relações espaciais, uma vez que seu objeto tem lugar a priori na consciência. Sendo assim, presume-se que a matéria e, por consequência, o tempo, o espaço e o movimento, não existem independentemente da consciência. Essa postura idealista deforma, segundo nossa compreensão, a realidade dos fatos. Ainda sobre o exemplo, a afirmação de que a soma dos ângulos de um triângulo resulta em dois ângulos retos, ou seja, 180° , é concebida, pelos citados idealistas, como expressão de compreensões da formação da realidade física e do mundo das ideias.

A força da Geometria euclidiana na formação das concepções filosóficas sobre a formação do universo alcançou patamares, tais quais se criou o chamado mito de Euclides. Mas, o que é o mito de Euclides?

É a crença de que os livros de Euclides contêm verdades sobre o universo, claras e indubitáveis. Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas, Euclides chega a conhecimento certo, objetivo e eterno. [...] Até o meio ou fim do século dezanove, o mito reinava sem desafios. Todos acreditavam nele. Foi o maior suporte da filosofia metafísica, isto é, da filosofia que procurava estabelecer certezas a priori sobre a natureza do universo. (DAVIS; HERSH, 1989, p. 366).

Vemos que o método axiomático de Euclides se tornou quase inquestionável, uma vez que se acreditou que partindo de supostas verdades evidentes e demonstrando rigorosamente a lógica de ideias geométricas puramente abstratas, se decifraria a realidade com conhecimentos absolutos e eternos. Porém, essa concepção perdeu força ao longo do século XIX, uma vez que surgiu outra Geometria que contrariava o sistema absoluto euclidiano e apresentava concepções de que se tratava de uma ciência experimental. Entretanto, segundo Eves (2004, p. 545):

Esse ponto de vista, de que a geometria, quando aplicada ao espaço, é uma ciência experimental, choca-se fortemente com a teoria do espaço de Emmanuel Kant (1724 – 1804), que denominava o pensamento filosófico à época da descoberta da geometria de Lobachevsky. A teoria kantiana sustentava que o espaço é uma estrutura já existente no espírito humano, e que os postulados da geometria euclidiana são juízos a priori impostos ao espírito humano, e que sem esses postulados não é possível nenhum raciocínio consistente sobre o espaço. Que este ponto de vista não é sustentável prova-o a criação da geometria de Lobachevsky. A teoria kantiana predominava tão amplamente naquele tempo que quem defendesse um ponto de vista contrário corria o risco de ser considerado meio maluco. Foi o desejo de evitar os protestos dos “beócios” que impediu Gauss de publicar seus pontos de vista sobre a geometria não-euclidiana.

Paradoxalmente, a filosofia kantiana teve influência no desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas, bem como na filosofia da Matemática, pois era uma concepção filosófica disseminada no meio científico. Assim, contrariar as verdades euclidianas era contrariar os pressupostos da filosofia kantiana do tempo e do espaço. Tão forte foi sua influência que Gauss não divulgou suas considerações acerca das novas Geometrias com receio de ser ridicularizado. Porém, elaborou-as matematicamente e abriu um caminho sem volta na história da Geometria, caminho que iniciou uma revolução nas concepções matemáticas, geométricas, físicas, filosóficas etc.

O mito de Euclides reinava e se constituiu um elemento central na filosofia kantiana. Conforme Davis e Hersh (1989, p. 370-371):

Para Kant, como para Platão, há somente uma geometria – a mesma que hoje chamamos de euclidiana, para distingui-la de muitos outros sistemas de conceitos que também são chamadas geometrias. As verdades da geometria e da aritmética se nos impõem pela maneira como funciona nossa mente. Isso explica por que são supostamente válidas para todos, independentemente da experiência. As intuições do tempo e do espaço, sobre as quais estão baseadas a aritmética e geometria, são objetivas no sentido de que são universalmente válidas para todas as mentes humanas. Não se afirma sua existência fora da mente humana; contudo o mito de Euclides permanece como um elemento central na filosofia kantiana.

A Geometria é compreendida como uma forma a priori da sensibilidade e que o homem não pode ser e estar nesse mundo sem essa característica. A objetividade do tempo e do espaço se encontra no fato de que são universalmente válidas para todas as consciências individuais. A filosofia kantiana foi a última barreira filosófica e a Geometria euclidiana foi a última barreira matemática para uma nova e revolucionária concepção sobre a formação da matéria, do tempo, do espaço e do movimento.

O quinto postulado de Euclides, elemento contraditório de sua obra, tido como absoluto e redentor da verdade da geometria do universo, foi a própria fonte criadora sua superação. Esse postulado, mesmo aceito como verdade de uma geometria da realidade física, foi questionado desde que foi escrito, inicialmente de forma tímida. Atravessou cerca de vinte séculos de críticas cada vez mais próximas de uma revolução matemática. Para Aleksandrov (1991a, p, 125, grifo do autor):

Así, la teoría de las rectas paralelas, basada en el Postulado V, se convirtió en objeto de comentarios y críticas en los trabajos de muchos geómetras desde los tiempos antiguos. El objeto principal de estas investigaciones fue suprimir el Quinto Postulado y deducirlo como teorema de

outras proposiciones básicas de la geometría. La tarea atrajo a muchos geómetras; el griego Proclo⁵⁷ [...], que escribió un comentario sobre Euclides; el persa Nasir ed Din et Tusi⁵⁸ (siglo XIII); el inglés Wallis⁵⁹ (1616 – 1703); el italiano Saccheri⁶⁰ (1667 – 1733); el filósofo y matemático alemán Lambert⁶¹ (1728 – 1777); el francés Legendre⁶² (1752 – 1833) y muchos otros; durante los dos milenios largos desde la aparición de los *Elementos* de Euclides, todos ellos se superaron en sutileza e ingenio geométrico para probar el Quinto Postulado.

A transformação do quinto postulado em um teorema, ou seja, demonstrá-lo a partir de proposições mais simples, foi um empreendimento que não logrou êxito. Somente entre os séculos XVII e XVIII surge uma possibilidade de prová-lo indiretamente, por redução ao absurdo. Para isso, tomou-se como princípio a ideia contrária ao quinto postulado, isto é, a afirmação de que por um ponto fora de uma reta seria possível traçar ao menos duas paralelas. Uma vez demonstrada essa assertiva e encontrada uma contradição, provar-se-ia indiretamente que não se tratava de um postulado, mas um teorema. Devemos essa tentativa ao italiano Saccheri. Conforme Aleksandrov (1991b, p. 126):

Saccheri y Lambert penetraron más profundamente que los demás en el problema. Saccheri fue el primero en dar una demostración del Postulado V por reducción al absurdo; es decir, tomó como punto de partida la aserción opuesta y, desarrollando las consecuencias, esperaba llegar a una contradicción. Cuando llegó, en sus inferencias, a resultados que le parecieron inimaginables, creyó haber resuelto el problema. Pero estaba equivocado, ya que una contradicción en las ideas intuitivas no tiene por qué ser una contradicción lógica. Después de todo, el

⁵⁷ Proclo Lício (412 – 485) foi um filósofo grego.

⁵⁸ Nasir ed Din et Tusi (1201 – 1274) foi um matemático persa.

⁵⁹ John Wallis (1616 – 1703) foi um matemático britânico.

⁶⁰ Giovanni Girolamo Saccheri (1667 – 1733) foi um matemático italiano.

⁶¹ Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) foi um matemático suíço.

⁶² Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) foi um matemático francês.

problema consistía en probar el postulado euclidiano sobre la base de otras proposiciones de la geometría, y no en convencerse a sí mismo una vez más de su verdad intuitiva. Intuitivamente, el postulado en sí es suficientemente convincente. Pero, repitámoslo, las conclusiones intuitivas y la necesidad lógica son dos cosas distintas.

O ponto de partida de Saccheri e, logo depois, de Lambert foi importante, mas não avançou na criação de uma nova Geometria. Eles perceberam que essa nova ideia não evidenciava uma contradição no quinto postulado euclidiano, porém ainda mantiveram a crença de seu caráter intuitivo. Entretanto, segundo Aleksandrov (1991b), uma contradição intuitiva não é sinônimo de uma contradição lógica, o que deixaria o quinto postulado sem a referida premissa, mesmo que intuitivamente.

As Geometrias não-euclidianas foram desenvolvidas quase concomitantemente por Lobachevski, Gauss e Bolyai, cada qual com sua peculiar importância. Gauss talvez tenha sido o primeiro (cronologicamente) e desenvolveu logicamente a nova Geometria que não apresentava contradições, como se supunha inicialmente. Segundo Struik (1989, p. 267):

Gauss foi o primeiro homem a acreditar na independência do postulado das paralelas, o que implicava que outras geometrias, baseadas numa outra escolha de axiomas, fossem logicamente possíveis. Gauss nunca publicou os seus pensamentos sobre o assunto. O primeiro a desafiar abertamente a autoridade de dois milênios e a construir uma geometria não euclidiana foi um russo. Nikolai Ivanovič Lobačevskii, e um húngaro, János Bolyai. O primeiro a publicar a sua ideia foi Lobačevskii, que era professor em Kazan e em 1826 deu lições sobre o axioma das paralelas de Euclides.

O fato de Gauss não ter publicado suas ideias contribuiu para que a nova Geometria ficasse conhecida com o nome de Lobachevski, que inicialmente a denominou de imaginária por não haver uma corroboração na realidade física. Era, ainda, logicamente coerente, sem contradições, mas, naquele momento histórico, poucos poderiam duvidar de que o mundo era regido pela Geometria euclidiana, ou seja,

uma Geometria existente a priori na sensibilidade humana, como admitia a filosofia kantiana.

Em meio a esse ambiente hostil às teorias materialistas, Gauss aponta uma possibilidade, sem se expor, conforme indica Struik (1989, p. 232, grifo do autor):

Gauss parece não ter estado disposto a aventurar-se publicamente em qualquer assunto controverso. Em cartas escreve sobre as vespas que voam perto dos seus ouvidos e dos “brados dos boécios” que se fariam ouvir se os segredos não fossem guardados. Gauss duvidou, para si próprio, da validade da doutrina kantiana então aceite, segundo a qual a concepção de espaço é euclidiana *a priori*; para ele, a verdadeira geometria do espaço era um facto físico para ser descoberto pela experimentação.

Afirmar que a Geometria necessita de uma comprovação física era considerado heresia e Gauss preferiu não correr o risco. Porém, Lobachevski teve um posicionamento mais enfático, com sua postura materialista. Mesmo não tendo vivido para ver a corroboração de suas teorias geométricas na realidade física, posicionou-se firmemente até sua morte em 1856. Segundo Ríbnikov (1987, p. 431):

La concepción del mundo de Lobachevski era materialista. En sus ideas sobre los conceptos fundamentales de las matemáticas, en particular de la geometría, subrayaba fuertemente su procedencia material, considerándolos como reflejo de relaciones existentes realmente entre los objetos del mundo real. Las abstracciones matemáticas no pueden originarse arbitrariamente, ellas surgen como resultado de la interrelación del hombre con el mundo material. El conocimiento científico tiene un objetivo único: estudio del mundo real. El criterio de verdad del conocimiento científico es según Lobachevski la práctica, la experiencia.

A concepção materialista de Lobachevski era dialética, pois concebia a Geometria nas relações entre a matéria e a consciência. Ou seja, corrobora nossa tese de que o objeto da Geometria não é inerente à

realidade física, tampouco uma forma a priori da sensibilidade. A inter-relação do homem com a realidade material promove o reflexo das formas físicas, próprias à matéria, em sua consciência. Ela não brota da própria consciência em um processo especulativo puramente abstrato. O critério de verdade do conhecimento geométrico é a própria realidade física, porém estabelecido mediante uma necessária generalização das propriedades dos respectivos objetos físicos que formam seus conceitos.

Os novos dados dos experimentos físicos proporcionam reelaborações das teorias geométricas existentes, bem como as suas hipóteses devem guiar a produção de novos caminhos decorrentes. Para Lobachevski, a Geometria não é composta meramente por um esquema lógico arbitrário, ele atribui à Geometria uma “interpretación materialista de los axiomas como proposiciones que constatan las propiedades geométricas fundamentales del espacio y que fueron concebidos por el hombre como resultado del experimento” (SMOGORZHEVSKI, 1978, p. 21).

Segundo Aleksandrov (1991b, p. 130):

[...] La verdad de los resultados de cualquier geometría lógicamente concebible, lo que atañe a sus aplicaciones al espacio real, sólo se puede verificar empíricamente. Una geometría lógicamente concebible debe ser desarrollada no sólo como un esquema lógico arbitrario, sino como una teoría que abra nuevos caminos y métodos para las teorías físicas.

Um dos êxitos de Lobachevski foi demonstrar a existência de outra Geometria logicamente concebível e praticamente existente, além do desenvolvimento das não-euclidianas. Essas novas concepções do conhecimento geométrico ampliam as dimensões e seu objeto, ou seja, abrem caminhos para conceber as relações e formas espaciais, como também todas as possíveis, logicamente concebíveis.

Uma característica importante que a diferencia das outras ciências que tem como objeto as formas espaciais e as relações entre os corpos reais, é seu alto nível de abstração. Aleksandrov (1991a, p. 41) afirma:

La geometría tiene, pues, como objeto las formas espaciales y las relaciones de los cuerpos reales, eliminando de ellos las restantes propiedades, y considerándolos desde un punto de vista puramente abstracto. Es justamente este alto nivel

de abstracción el que distingue la geometría de las otras ciencias que también se ocupan de las formas espaciales y las relaciones de los cuerpos. En astronomía, por ejemplo, se estudian las posiciones mutuas de ciertos cuerpos, pero estos cuerpos son los cuerpos celestes reales; en geodesia es la forma de la Tierra la que se estudia; en cristalografía, la forma de los cristales, etcétera. En todas estas otras ciencias, la forma y posición de los cuerpos concretos se estudian en función de otras propiedades suyas.

O objeto da Geometria possui a propriedade de ser uma abstração e não encerra qualquer propriedade física. Com isso, não estamos afirmando que a Geometria é independente da realidade física, mas tão somente que seu objeto não é físico. Em contrapartida, também não concebemos a Geometria como uma pura abstração que não seja reflexo da realidade física. Isso nos remete a pergunta central da tese: o objeto da Geometria é uma forma a priori da sensibilidade ou é inerente à realidade física?

Inicialmente, discutimos as categorias matéria e consciência para compreender o processo de constituição e desenvolvimento de uma forma especial de movimento, a forma social. Com isso, surgiu a consciência, um tipo especial de reflexo que tem como traço distintivo a possibilidade de conhecer a realidade material. É justamente aí que encontramos o caminho para compreender o objeto da Geometria, pois ele se encontra na mediação entre a realidade física e as suas formas de reflexo consciente.

A realidade física não produz, no movimento absoluto e no repouso relativo da matéria, um quadrado, um círculo, um cubo, uma senóide, um espaço projectivo etc. Esses elementos são produções da consciência na sua constituição como reflexo da realidade física. Esta possui as formas como sua propriedade e, portanto, é a base para a formação do objeto da Geometria. Elas se modificam no fluxo contínuo do movimento da matéria, mas não nele todo.

As formas desenvolvem-se a partir do movimento mecânico, físico, químico e orgânico da matéria. O último e mais desenvolvido tipo de movimento, o social, não produz diretamente a transformação das formas da matéria, pois não constitui uma realidade física. De todo modo, ele forma a consciência, transforma a realidade física indiretamente, ou seja, quando produz conhecimento que promova as

transformações da matéria para satisfazer as necessidades humanas, bem como o faz abstratamente as formas espaciais corrigidas como reflexo das formas brutas da realidade física. Mas essas transformações não ficam apenas na consciência, elas modificam efetivamente a realidade física, desde os objetos de sua corporalidade até o seu próprio corpo.

As relações geométricas aí estabelecidas mudam continuamente, mantêm uma regularidade durante certo tempo e logo formam novas relações. As formas espaciais e as conexões entre os corpos físicos estão dadas na realidade física, mas se transformam em objeto da Geometria quando são abstraídas e abandonadas as outras propriedades dos objetos físicos. A constituição do objeto da Geometria é dependente desses dois polos, a consciência e a realidade física, ou seja, não existe isoladamente em um deles e, tampouco, é uma propriedade de cada um. Esse objeto só existe no fluxo do movimento entre esses polos.

Para Kopnin (1978, p. 131-132), “assim como o redondo não existe independente dos corpos arredondados, mas, como forma pura, é destacada pela atividade representativa do homem, o ideal não existe fora da atividade material do homem, podendo ser desmembrado apenas como forma dessa atividade”.

O autor evidencia a necessária relação da representação com a realidade física e como o reflexo das formas físicas constitui o que ele chama de atividade representativa. Quando o homem começa reconhecer as formas como propriedade da matéria e a transformá-las e aperfeiçoá-las, ele percebe as possibilidades de abstração das formas consideradas em si mesmas. Há, portanto, uma passagem da ideia de que o objeto da Geometria é constitutivo da realidade física à ideia de que ele constitui uma abstração. Com isso, há um mútuo aperfeiçoamento: do trabalho e da sua capacidade de abstração da geometria da realidade física.

Somente com um enorme tempo de experiência prática e observação das regularidades físicas, o homem realizou esses aperfeiçoamentos. No atual estágio de desenvolvimento, elaboramos abstratamente os conceitos geométricos sem necessariamente ter que fazer todas as observações para chegar a uma generalização. De início, deparamo-nos com conceitos generalizados que nos permitem a compreensão das suas singularidades físicas.

A abstração geométrica torna-se um elemento essencial na constituição de seu objeto, isto é, o que lhe dá as suas características. Segundo Aleksandrov (1991a, p. 41-42):

Esta abstracción conduce necesariamente al método geométrico puramente teórico, pues como no es posible realizar experimentos con líneas rectas sin anchura con “formas puras”, la única posibilidad es hacer uso de razonamientos lógicos, derivando unas conclusiones de otras. Un teorema geométrico debe ser probado mediante razonamientos, pues de otro modo, al no operar con “formas puras”, no pertenece a la geometría. [...] Las propiedades de los conceptos geométricos, al igual que los conceptos mismos, han sido abstraídos del mundo que nos rodea. Fue preciso que los hombres dibujaran muchas líneas rectas antes de que llegaran a considerar como axioma que a través de dos puntos cualesquiera distintos es siempre posible dibujar una línea recta [...].

Não é possível realizar experimentos com o objeto da Geometria, exceto experimentos ideais como o de Einstein e Infeld (2008) tratado na seção anterior, pois ele constitui uma abstração. Essa forma de compreensão das coisas é um caminho frutífero para as concepções idealistas que absolutizam esse objeto em uma pura abstração. O fato de não ser possível fazer experimentos com o objeto da Geometria, como com qualquer outra abstração, não nega sua procedência na realidade física.

As abstrações geométricas desenvolvem-se mediante a análise de seus conceitos e a estruturação de demonstrações que não apresentem contradições lógicas. Ainda assim, essa característica não garante que seja uma explicação plausível da realidade física, pois requer a análise de outras ciências que, ao estudá-la, comprovam ou não as teorias geométricas, bem como se orientam por elas e, por sua vez, apresentam novos elementos para a elaboração de novas Geometrias. Assim, para fazer uma relação da geometria com a realidade física é necessária a compreensão dos significados físicos dos conceitos geométricos. Caso não haja tal constatação, a Geometria permanece um jogo lógico de conceitos puramente abstratos.

Como dito anteriormente, a Geometria primitiva estudava somente o espaço nos limites da Geometria euclidiana. Com o desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas, passou a estudar todos os espaços possíveis. Isso possibilitou um avanço em seus métodos e a ampliação da compreensão de seu objeto. Também,

propiciou o desenvolvimento de novos ramos específicos dentro da própria Geometria, com o estudo de novos espaços, como, por exemplo, “el espacio de Lobachevski, el espacio proyectivo, el euclídeo y otros espacios de distintas dimensiones, en particular el espacio de cuatro dimensiones, los espacios de Riemann, [...] los espacios topológicos, etc.” (ALEKSANDROV, 1991a, p. 81).

A compreensão da categoria espaço sofreu alterações, principalmente no que se refere à compreensão do espaço absoluto, existente sem matéria. A teoria da relatividade superou essa ideia e provou a necessária ligação entre espaço e matéria, bem como sua determinação temporal. Para Randall (2011, p. 40, grifos da autora), “la palabra *espacio* refiere [...] a la región en la que existe la materia y en la que tienen lugar los procesos físicos. *Un espacio de tal o cual dimensión* es un espacio que requiere tal o cual número de magnitudes para determinar un punto”.

A citação de Randall (2011) corrobora o que diz Aleksandrov (1991b, p. 217), ao afirmar que “la estructura del espacio es la regularidad común de una serie de relaciones de cuerpos materiales y fenómenos”. Essa compreensão não estava bem desenvolvida até o surgimento das Geometrias não-euclidianas e da teoria da relatividade. Em Newton, tempo e espaço eram considerados objetivos, porém absolutos e independentes da matéria. Porém, aos poucos se verificou que a Geometria é indissolúvelmente ligada à mecânica, aos processos físicos que constituem a realidade física.

Em última instância, a Geometria é uma ciência da natureza, tomada desde o ponto de vista abstrato. De todo modo, a Geometria euclidiana não foi suplantada, mas superada por incorporação. Nos domínios pequenos, ela é efetiva e reflete a realidade física em questão. Porém, não é universal como se pensava desde seu surgimento, trata-se de um caso singular de outras Geometrias que constituem o espaço físico.

A Geometria de Lobachevski também se revelou um caso singular com o desenvolvimento da Geometria de Riemann, nascida como síntese de três ideias, quais sejam: a possibilidade de uma Geometria diferente da desenvolvida por Euclides, o conceito de Geometria intrínseca a uma superfície e o conceito de espaços de n dimensões (ALEKSANDROV, 1991b, p. 202).

Assim, quando surge a indagação sobre qual Geometria é verdadeira, entendemos que é aquela que reflete as relações espaciais existentes na realidade física. É verdadeira aquela Geometria que

generaliza as singularidades de cada relação espacial e as corrobora a realidade física.

Como apresentado anteriormente, o espaço é uma forma fundamental de existência da matéria, que compete a Geometria explicar o seu surgimento e desenvolvimento, desde que considere as formas e as relações entre os corpos físicos abstratamente, com eliminação das outras propriedades.

Essas conquistas científicas, em especial em relação ao objeto da Geometria, marcaram o período da história da matemática que vai do século III a. n. e. até o fim do século XIX, início do XX. Eles promoveram as grandes transformações que expomos até aqui. Essa compreensão sobre o objeto da Geometria foi enriquecida com maior intensidade nos últimos dois séculos.

Para finalizar, apresentamos o último período descrito por Ríbnikov (1987, p. 17):

d) Período de las matemáticas contemporáneas. Es evidente que el concepto de contemporaneidad en las matemáticas constantemente se desplaza. Probablemente entre el período de la creación de las matemáticas de magnitudes variables y la actualidad ya se puede señalar un nuevo período (o períodos). En los trabajos histórico-matemáticos esto aún no se ha hecho, aunque la necesidad de ello, según nuestra opinión, ya es imperiosa. En los siglos XIX y XX el volumen de las formas espaciales y relaciones cuantitativas, abarcadas por los métodos de las matemáticas han aumentado desmesuradamente. Han aparecido muchas teorías matemáticas nuevas, han aumentado en forma nunca vista las aplicaciones de las matemáticas. El contenido del objeto de las matemáticas se ha enriquecido en tal forma, que esto ha llevado a una reestructuración y cambio de la totalidad de sus problemas más importantes. (RÍBNIKOV, 1987, p. 17).

A Matemática moderna caracteriza-se, segundo Aleksandrov (1991a, p. 87-88), por quatro traços fundamentais. Em primeiro lugar, a extensão de seu objeto e seu amplo campo de aplicações, que ampliam as teorias e métodos matemáticos. Essa extensão se caracteriza por consequência das novas tarefas referentes ao estudo de todos os tipos

possíveis de relações quantitativas e formas espaciais. O segundo traço diz respeito à formação de conceitos gerais a um novo e refinado patamar de abstração. O terceiro traço é a preponderância do ponto de vista da teoria dos conjuntos. Por fim, o quarto traço é a análise profunda de seus fundamentos, da influência mútua de seus conceitos, da estrutura e dos métodos de demonstração matemática.

Uma característica importante desse período é que o objeto da Geometria passou a considerar não somente as relações espaciais dadas, mas todas as possíveis. Vale observar que não é nosso objetivo discutir pormenorizadamente esse período, mas apenas apresentá-lo como forma de visualização do contexto de surgimento da teoria física que deu um novo teor aos conceitos de espaço e tempo, sobre a base das Geometrias não-euclidianas.

Segundo Smogorzhevski (1978, p. 21):

El descubrimiento de las geometrías no euclidianas planteó ante la física un problema extraordinariamente complejo: aclarar si el espacio físico real es euclidiano, como antes pensaban, y si no lo es, a qué tipo de espacios no euclidianos pertenece⁶³. Para la solución de este problema se requiere una comprobación experimental de la justeza de los axiomas, estando claro que con el perfeccionamiento de los instrumentos de medición aumenta la seguridad de los datos experimentales obtenidos y aparece la posibilidad de penetrar en detalles que antes se escapaban de la atención de los investigadores.

A solução desse problema foi dada com a teoria da relatividade, em especial na superação do espaço e do tempo absolutos. Nas palavras de Minkowski⁶³, segundo Struik (1989, p. 329), “a partir desse momento, o espaço e o tempo cairão completamente nas sombras e apenas uma espécie de união entre os dois manterá a autonomia”. Essa é a união indissociável entre o espaço e o tempo que a teoria da relatividade considera na superação de suas concepções absolutistas.

O desenvolvimento das novas teorias físicas só corroborou as Geometrias não-euclidianas devido sua alta capacidade de abstração e suas teorias das possíveis propriedades do espaço físico. Com isso,

⁶³ Hermann Minkowski (1864 – 1909) foi um matemático alemão.

ampliou-se a compreensão das relações entre o objeto da Geometria e a realidade física. Ambas as ciências, Geometria e Física, completam-se mutuamente e formam uma unidade na compreensão da realidade material.

Segundo Aleksandrov (1991b, p. 130):

Una más profunda comprensión de los lazos entre las matemáticas y la realidad permite seleccionar, de entre las diversas posibilidades lógicas, aquellas que pueden tener más éxito en el estudio de la naturaleza. Si la geometría, después de Lobachevski, no hubiera desarrollado la doctrina matemática de las posibles propiedades del espacio, la física contemporánea no poseería los instrumentos matemáticos que permitieron formular y desarrollar la teoría de la relatividad.

O autor evidencia a necessária relação entre as abstrações geométricas e a realidade física para avançar no conhecimento da realidade material. Com essa compreensão, também afirma que o objeto da Geometria se constitui como uma abstração refletida a partir da realidade física. Ou seja, não é inerente aos objetos físicos, tampouco uma abstração pura. A teoria da relatividade e as Geometrias não-euclidianas foram a pedra angular da revolução física e matemática ocorrida nos séculos XIX e XX, como veremos na seção a seguir.

5.3 AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E A TEORIA DA RELATIVIDADE

A revolução física e matemática ocorrida nos séculos XIX e XX evidenciaram discussões acerca de temas como a quarta dimensão e algumas de suas concepções místicas, bem como sobre uma das categorias caracterizadoras do objeto da Geometria, o espaço. Com o surgimento dessas novas concepções físicas foi possível corroborar as proposições dialético-materialistas da indissociabilidade entre espaço e tempo, estas como formas fundamentais de existência da matéria, juntamente com o movimento.

A quarta dimensão despertou interesse ao longo da história e, antes do desenvolvimento das teorias físicas que atribuíram essa dimensão extra ao tempo, foi bastante difundida a ideia mística de seres que habitavam tal dimensão. Para essa concepção mística, nós vivemos

em um espaço tridimensional e não podemos “acessar” a dimensão extra. Tais concepções atravessaram a Filosofia, a Matemática, a Física, as ciências em geral, bem como tiveram influências nas artes.

Já estamos acostumados, há muito tempo, a lidar com espaços multidimensionais na matemática, até os de infinitas dimensões. Porém, se tratam de abstrações matemáticas, em especial de abstrações geométricas que refletem a realidade física e vão além para construir abstrações cada vez mais elevadas, que potencializem a compreensão da realidade material. Aqui aparecem também as concepções que absolutizam as abstrações geométricas. Temos as concepções que as consideram como independentes da realidade física e a que considera essas abstrações abusivas, por não refletirem a realidade física existente sobre a base da tridimensionalidade espacial. As primeiras são as concepções idealistas e a segunda é a concepção materialista mecanicista, como dito em seções anteriores.

Porém, contrária a essas concepções absolutistas, a dialética materialista considera essas abstrações, que caracterizam o objeto da Geometria, nas relações com a realidade física. Nesse sentido, Konstantinov (1965, p. 139) afirma:

En la física y en las matemáticas suele utilizarse el concepto de los llamados “espacios multidimensionales” o espacios que poseen cuatro, cinco, seis, etc., e incluso un número infinito de dimensiones. Dicho concepto ha resultado muy fecundo al abordar numerosos problemas científicos. Pero cabe preguntar: ¿no contradice eso la tesis de la tridimensionalidad del espacio? De ningún modo. El espacio efectivo, real, en el que existen todas las cosas y los hombres mismos, es el espacio ordinario de tres dimensiones; en cambio, el espacio multidimensional es una abstracción que incluye idealmente un conjunto mayor o menor de magnitudes que no expresan forzosamente la extensión, sino otras propiedades de los objetos estudiados.

O autor esclarece a natureza dessas dimensões extras das abstrações geométricas, isto é, dimensões que expressam outras grandezas para além das espaciais. Konstantinov (1965) afirma que o espaço ordinário é tridimensional e essa concepção vem sendo estudada

exaustivamente pela física moderna, porém esta ainda não comprovou outras dimensões espaciais. Há teorias que propõem espaços de até nove dimensões, como a teoria de cordas. Segundo Randall (2011, p. 63, grifos da autora):

Aunque no sepamos *por qué* las tres dimensiones del espacio resultan tan especiales, podemos, sin embargo, preguntarnos *cómo*, ¿Cómo es posible que pueda parecer que el universo tiene sólo tres dimensiones espaciales si el espacio-tiempo fundamental subyacente contiene más? [...] Si la teoría de cuerdas es la descripción correcta de la naturaleza, y hay nueve dimensiones espaciales (más una temporal), ¿qué ha pasado con las seis dimensiones espaciales que faltan? ¿Por qué no son visibles? ¿Producen algún impacto discernible en el mundo que vemos?

Ressaltamos que as teorias que propõem essas dimensões extras não estão comprovadas e nossa compreensão do espaço ainda está limitada ao espaço tridimensional (mais uma dimensão temporal). Se, porventura, o espaço possuir uma estrutura com mais dimensões, certamente chegaremos a conhecê-las a partir do avanço da Física e da Geometria. No entanto, tais possíveis dimensões não refutam o materialismo dialético, ao contrário, potencializam suas concepções sobre a matéria e a consciência. Isso ocorre porque a dialética materialista concebe a unidade do mundo em sua materialidade e, assim, o contínuo desenvolvimento da matéria e o consequente movimento da consciência na apreensão da realidade material. Nesse movimento, encontra-se o objeto da Geometria, pois ele é reflexo do desenvolvimento da realidade física no contínuo movimento da consciência para compreendê-la.

Nesse sentido, Aleksandrov (1991b, p. 175) afirma:

No existe [...] ningún misticismo en el concepto matemático de espacio multidimensional. No es más que un cierto concepto abstracto creado por los matemáticos con el propósito de describir en lenguaje geométrico aquellas cosas que no admiten una ilustración geométrica sencilla en el sentido usual. Este concepto abstracto tiene una base enteramente real, refleja la realidad y fue

creado por las demandas de la ciencia y no por un sueño ocioso de la imaginación.

Esses conceitos abstratos das multidimensões caracterizam o método geométrico de interpretação das grandezas em questão. Assim, podemos representar graficamente, por exemplo, o movimento de um corpo ao representar as três dimensões espaciais, o tempo, o peso, a velocidade etc., e atribuir-lhe n dimensões por meio do método geométrico.

Diante disso, há diferenças entre os conceitos geométricos abstratos de espaços n -dimensionais e as dimensões espaciais da realidade física. Nesta se expressam apenas três dimensões espaciais e uma temporal, de acordo com a Física moderna, o que constitui o contínuo quadridimensional. Essa nova concepção se iniciou, como dito antes, com o surgimento das Geometrias não-euclidianas e posteriormente com a teoria da relatividade, apesar de já conter seu gérmen na Física clássica. “Pero, como subraya Lenin, no se puede confundir la mutabilidad de los conceptos de espacio y tiempo ‘con la inmutabilidad del hecho de que el hombre y la naturaleza sólo existen en el tiempo y en el espacio;’ [...]” (KONSTANTINOV, 1965, p. 140). Essas duas formas fundamentais de existência da matéria se transformam continuamente e produzem novos reflexos geométricos na consciência. Com isso, não podemos defender uma Geometria absoluta alheia a essas transformações.

Um dos grandes êxitos da teoria da relatividade foi a superação do tempo absoluto da Física clássica. A princípio, não nos parece que o tempo possa influir na geometria da realidade física e isso ocorre porque, ao senso comum, custa-lhe a compreensão da ligação indissolúvel entre o espaço e o tempo. Outra dificuldade na qual nos deparamos é quanto à diferenciação entre tempo e sua medição, que são coisas diferentes. O primeiro é uma propriedade da realidade física e a segunda é uma criação humana na relação de reflexo na consciência.

Segundo Einstein e Infeld (2008, p. 242):

A sensação psicológica subjetiva de tempo nos permite ordenar as nossas impressões, declarar que um acontecimento precede outro. Mas ligar todo instante de tempo a um número, pelo uso de um relógio, considerar o tempo um contínuo unidimensional, já é uma invenção. Assim também os conceitos das geometrias euclidianas e

não euclidiana, e o nosso espaço compreendido como um contínuo tridimensional.

Um relógio pode ser atribuído a qualquer objeto material que possa medir certa regularidade na realidade física e, portanto, torna-se mais preciso tanto mais precisa for a tecnologia aplicada, como o relógio atômico, que é o mais avançado já criado pelo homem. Entretanto, a precisão absoluta é uma abstração da qual não se pode abusar. Ela se encontra no limite do movimento absoluto e do repouso relativo da matéria. Tais medições não são absolutas porque a matéria se transforma continuamente no espaço e no tempo, porém recortamos essas medições e conceitualizamos a realidade física no limite de nossas necessidades e possibilidades. Isso não significa um relativismo ontológico, tão somente um relativismo epistemológico.

Esse relativismo tem expressão também na teoria da relatividade, em que algumas medições dependem do observador. Segundo Einstein e Infeld (2008, p. 158):

O tempo é determinado por relógios, as coordenadas espaciais por réguas, e o resultado de sua determinação pode depender do comportamento desses relógios e réguas quando em movimento. Não há razão alguma para acreditarmos que se comportarão da maneira que gostaríamos. A observação mostra, indiretamente, por meio dos fenômenos do campo eletromagnético, que um relógio em movimento muda de ritmo e uma régua muda de comprimento, enquanto, com base nos fenômenos mecânicos, não pensamos que isso acontecesse.

Essas medições do tempo e do espaço dependem de objetos físicos e, portanto, a geometria da realidade física se caracteriza nesse processo de medição, possui a métrica como categoria ontológica central. Aí se encontra uma relatividade do objeto da Geometria, pois não pode ser um atributo da própria realidade física e tampouco uma forma a priori da sensibilidade humana. O senso comum, que não concebe a possibilidade de mudança do ritmo do tempo e das medidas de um corpo sob a influência do movimento, está fundado nos fenômenos mecânicos ordinários. Tais fenômenos são justamente a base do surgimento da Geometria euclidiana e caracteriza o desenvolvimento da Física na época de Euclides. Não foi possível outra Geometria

naquela época, porque não era possível outra compreensão da realidade física além dos limites da mecânica clássica, e vice-versa.

Nessa relação de medição de comprimentos de corpos físicos, que caracteriza a métrica da Geometria e as novas concepções físicas, Mañes (2001, p. 45, grifo do autor) afirma:

La longitud de un objeto no es un concepto absoluto, sino que depende del observador. Para medir un objeto en reposo basta con usar una regla. Para medir un objeto en movimiento, podemos anotar las posiciones de sus extremos, y la diferencia nos dará la longitud. Pero es evidente que si el objeto se mueve, hemos de tener cuidado de medir las posiciones de sus extremos *al mismo tiempo*. De lo contrario, la diferencia entre las posiciones tendrá poco que ver con la longitud del objeto. Pero, dado que la simultaneidad es un concepto relativo, se sigue que también lo será la longitud de un objeto.

A dependência em relação ao observador para se determinar o comprimento de um objeto não encerra, como afirmamos antes, um relativismo ontológico, mas um relativismo epistemológico. Essa medição, que é relativa ao observador, quando feita em movimento, requer a consideração da categoria tempo, mais especificamente a simultaneidade.

Para a teoria da relatividade, a simultaneidade é relativa, depende do observador interno ou externo ao fenômeno em questão e, assim, a métrica da geometria do espaço também é relativa ao observador. Essa relatividade passa pela esfera do reflexo objetivo da realidade material e sua relação com o reflexo subjetivo que ocorre na consciência em sua apreensão da realidade. Nessa relação se encontra o objeto da Geometria, constituído abstratamente.

O caráter abstrato do objeto da Geometria tem um papel importante na compreensão da realidade física, uma vez que possibilita à consciência ir além das experiências e necessidades imediatas. Segundo Aleksandrov (1991b, p. 227):

En la teoría de la relatividad, la geometría abstracta encuentra aplicación no sólo como aparato matemático; las ideas propias de un espacio abstracto proporcionan el medio para una

formulación más profunda de los fundamentos de esta teoría. Las posibilidades contempladas en la geometría abstracta se descubren en la realidad, y el pensamiento consigue con ello su triunfo más brillante. La geometría abstracta, nacida del estudio empírico de las relaciones espaciales y formas de los cuerpos, afronta ahora, en calidad de método matemático bien desarrollado, el estudio del espacio real. Tal es el camino general de la ciencia: a partir de lo que la experiencia proporciona directamente, pasa a generalizaciones y abstracciones, volviendo luego otra vez a la experiencia como instrumento para un conocimiento más profundo de la esencia de los fenómenos; y al proporcionar así la explicación de fenómenos conocidos y la predicción de otros nuevos, guía la actividad práctica de los investigadores y a su vez encuentra en ello su propia justificación y la fuente de su futuro desarrollo.

Vemos que a Geometria não se constitui apenas como uma ferramenta aplicada à Física, mas uma parte constituinte desta. A Geometria proporciona as abstrações matemáticas necessárias ao avanço da Física e possibilita as suas comprovações na realidade física. Esse caminho da Geometria, a partir da experiência até as mais refinadas abstrações e, posteriormente, seu retorno à realidade material para compreendê-la, é o caminho de toda ciência, como afirma Aleksandrov (1991b).

Um dos êxitos da relação entre as Geometrias não-euclidianas e a teoria da relatividade foi evidenciar a natureza física da métrica da Geometria, ou seja, o reflexo da realidade física na consciência, que se constitui em abstrações geométricas. Paty (2005, p. 647) assim descreve essa questão:

No caso particular de três dimensões, que correspondia, para Riemann, ao espaço concreto do mundo físico, são as propriedades dos corpos físicos contidos no espaço que determinam as propriedades métricas, ou dito de outro modo, a estrutura do espaço (seu caráter euclidiano ou "plano" ou, ao contrário, não-euclidiano e curvo). Riemann sublinhava principalmente que a questão

de saber como o espaço é nos domínios que escapam a nossa apreensão perceptual e a nossa experiência, aqueles domínios das dimensões "incomensuravelmente pequenas e incomensuravelmente grandes", era uma questão inteiramente aberta (Riemann, 1854).

As discussões sobre a geometria do espaço físico ganham, naquele momento, um elemento característico, qual seja, a observação do espaço em escala macro e microscópica. Como as três dimensões são propriedades da realidade física e determinam as propriedades métricas, a Geometria constitui-se como uma abstração dessas propriedades que variam continuamente com o movimento da matéria. Nesse viés, até onde nossas possibilidades científicas e tecnológicas permitem chegar atualmente, o espaço mostra-se constituído por três dimensões espaciais e uma temporal. Os avanços em Geometria e em Física têm proporcionado teorias que sugerem mais dimensões espaciais quando analisadas as referidas escalas.

Inicialmente, o grande impulso no desenvolvimento da teoria da relatividade foi a Geometria riemaniana, pois esta incorpora as Geometrias não-euclidianas e euclidiana como casos singulares. Conforme Paty (2005, p. 656):

A geometria riemaniana é a mais geral e engloba a geometria euclidiana bem como as várias geometrias não-euclidianas a título de casos particulares. [...] Chegou assim, pela pura especulação matemática, ao pensamento da "indissociabilidade da geometria e da física". É, portanto, a Riemann que Einstein remete, em última análise, essa indissociabilidade, à qual a teoria da relatividade geral dará, sessenta anos mais tarde, realidade, no sentido de que "geometria e teoria da gravitação se fundem em uma única entidade" (Einstein, 1926).

Essa indissociabilidade entre a Geometria e a Física foi uma proposição que Riemann elaborou matematicamente e que obteve, anos mais tarde, corroboração com a teoria da relatividade. A Geometria, sendo uma ciência matemática, constitui-se como um sistema lógico que independe das casualidades da realidade física, ela organiza logicamente seu desenvolvimento histórico e estabelece as abstrações que podem corresponder, ou não, a essas realidades.

Assim, as abstrações geométricas não são um reflexo mecânico da realidade física na consciência, inclusive porque os conceitos geométricos não representam exatamente tal realidade, apenas uma aproximação. Segundo Einstein (2005, p. 678):

Según la concepción más depurada de la naturaleza de los cuerpos sólidos y de la luz, no existen objetos naturales cuyas propiedades correspondan exactamente a los conceptos fundamentales de la geometría euclídea. El cuerpo sólido no es rígido, y el rayo de luz no representa con justeza la línea recta ni, más generalmente, una figura unidimensional. Conforme a la ciencia moderna, ninguna experiencia corresponde sólo y exclusivamente a la geometría, sino a la geometría unida a la mecánica, óptica etc. Pero como, por otra parte, la geometría debe preceder a la física, puesto que las leyes de la última no pueden ser expresadas sin el auxilio de la primera [...].

Segundo o autor, a natureza dos corpos sólidos não corresponde exatamente aos fundamentos da Geometria euclidiana. Isso é pertinente porque a Geometria euclidiana é um caso singular de Geometrias mais gerais e, por sua vez, estas também não representam de forma absoluta a realidade física, apenas uma aproximação, como dito antes.

As necessidades humanas delineiam a produção do conhecimento geométrico e físico da realidade física e estes se complementam na medida em que a Geometria se torna uma parte constituinte da Física. A Geometria precede a Física na compreensão da realidade, uma vez que seu objeto é uma abstração. Assim, a Física necessita dessa abstração geométrica para interpretar seu objeto.

A revolução causada pelo desenvolvimento das Geometrias não-euclidianas e pela teoria da relatividade nas concepções de tempo, espaço, movimento e matéria aprimorou o objeto da Geometria na medida em que delimitou sua procedência abstrata. Ou seja, colocou os limites de sua constituição na relação entre a realidade física e as formas de reflexo na consciência. Com isso, inferimos que o objeto da Geometria se constitui um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade humana, como defendemos ao longo desta tese.

6. EM SÍNTESE

Chegamos ao fim da pesquisa e ao início de novas possibilidades investigativas. As perguntas iniciais se tornaram mais complexas a partir da discussão filosófica que procedemos ao longo da tese. A análise do objeto da Geometria se fez fecunda na medida em que estabelecemos seu lugar no conhecimento matemático. Com base na dialética materialista, desenvolvemos a tese de que o objeto da Geometria é um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade humana. Para tal, foi imprescindível o processo de compreensão da base material de sua formação, bem como de sua constituição como reflexo da realidade física.

A relação entre a matéria e a consciência cria o reflexo que constitui o objeto da Geometria. Assim, uma análise histórica evidenciou duas concepções que predominaram na compreensão desse objeto e, posteriormente, o surgimento de um entendimento que contribuiu para a revolução geométrica ocorrida nos séculos XIX e XX.

Nossa análise se desenvolveu, no presente texto, de modo que resultou na composição de quatro capítulos: o contexto de construção do objeto de pesquisa e as considerações onto-metodológicas; matéria e consciência; a relação entre a Matemática e a realidade material e, por último, o ser da Geometria.

Nas considerações onto-metodológicas, desenvolvemos o contexto da construção do objeto de pesquisa. Partimos do pressuposto de que existe a concepção idealista, a materialista mecanicista e a dialético-materialista do objeto da Geometria. A última concepção fundamentou nossa análise.

A análise do desenvolvimento do objeto da Geometria evidenciou que as duas primeiras concepções atravessaram a sua história. Porém, somente no século XIX surgiram novas possibilidades de interpretação da relação entre o objeto da Geometria e a realidade física. Isso ocorre com o processo de formação da concepção dialético-materialista, das Geometrias não-euclidianas e da teoria da relatividade.

Nossa investigação pretendeu uma reflexão crítica referente às duas primeiras concepções, com vistas à fundamentação da constituição do objeto da Geometria. Este, segundo entendemos, constitui-se numa relação entre a realidade física e a capacidade humana de seu reflexo subjetivo.

Assim, nosso objetivo foi compreender a gênese, os nexos e a estrutura do objeto da Geometria e, com isso, não apenas contribuir para enriquecer seu entendimento, mas para trazer elementos que provoquem

novas reflexões nos processos de ensino dessa ciência. Não foi nosso objetivo estabelecer critérios ou diretrizes ao ensino, tampouco temos claro quais as possíveis implicações a partir desse estudo. Cabe, portanto, às investigações posteriores analisar se nosso estudo apresenta elementos que contribuam para uma melhor compreensão e elaboração de aspectos correspondentes ao ensino, que possibilite ao estudante a compreensão dos conceitos geométricos em seu mais alto nível de desenvolvimento.

Reafirmamos que nossa análise não se pautou nos sistemas de ensino de Geometria e nem foi pretensão a elaboração de algum deste. Contudo, a origem das preocupações com esse objeto se deu a partir das observações dos conceitos geométricos em situação de ensino, ou seja, pautadas no próprio campo de conhecimento.

Nosso pressuposto inicial de que a categoria ontológica central do objeto da Geometria é a métrica se corroborou na análise de sua gênese. Ela aparece constantemente nas relações estabelecidas desde a sua origem, nas medições de terras, nas confecções artesanais, na arquitetura e nos elementos estéticos da arte primitiva. Naquele momento, a Geometria e a Aritmética se confundiam, portanto, toda relação de medida expressava uma relação numérica. Ambas se caracterizavam como um conjunto de regras para a satisfação de necessidades imediatas.

A discussão a que procedemos teve como foco as relações entre o objeto da Geometria e a realidade física, ou seja, como ele se constitui. Essas relações integraram nosso tema de pesquisa, qual seja: a constituição do objeto da Geometria no processo de abstração necessário à compreensão dessa realidade. Para tanto, adotamos o pressuposto de que esse objeto se encontra na mediação entre a realidade física e as formas de reflexo, isto é, na práxis humana do conhecimento.

Para fundamentar essa discussão, desenvolvemos, na terceira parte, as categorias matéria e consciência. Tal discussão se justifica no contexto de análise das formas de reflexo subjetivo e objetivo que envolvem ambas as categorias. Assim, surgiu a pergunta norteadora da pesquisa, traduzida no seguinte questionamento: o objeto da Geometria é uma forma a priori da sensibilidade ou é inerente à realidade física?

Ao longo do texto, apresentamos elementos que demonstram uma negação da concepção idealista e da materialista mecanicista, pois entendemos que o objeto da Geometria se constitui na relação entre a realidade física e a consciência que a reflete. Essa compreensão possui fundamento na dialética materialista, ao contrário da concepção idealista

que o compreende como forma a priori da sensibilidade e da concepção materialista mecanicista que o concebe como inerente a realidade física.

Dessa forma, defendemos a mencionada tese que, em outros termos, afirma que o objeto da Geometria se constitui nas relações entre as formas espaciais da realidade física e o agir humano ao conhecer e sistematizar essa realidade em forma de conhecimento. As formas espaciais e suas relações entre os corpos físicos são constitutivas da realidade física, enquanto o objeto da Geometria constitui o aspecto abstrato, em forma de pensamento, dessas formas e relações. Em contrapartida, essa abstração não é inerente à consciência, não está dada a priori na sensibilidade.

Para discutir a questão fundamental da filosofia, partimos da definição clássica de Lenin (1979) sobre a matéria. Segundo o autor, ela é “una categoría filosófica para designar la realidad objetiva, dada al hombre en sus sensaciones, calcada, fotografiada y reflejada por nuestras sensaciones y existente independientemente de ellas” (LENIN, 1979, p. 134). Essa definição afirma a concepção materialista dialética da referida categoria e caracteriza a consciência como um reflexo subjetivo.

Na sequência, apresentamos a interpretação de Cheptulin (1982), Ovtchinnikov (1955), Konstantinov (1965) e Afanasiev (1963) sobre esta categoria. Os autores reforçam a definição de Lenin (1979) com suas compreensões, bem como ampliam o debate.

Em nossa análise, fez-se imprescindível compreender as formas fundamentais de existência da matéria: movimento, tempo e espaço. Essas três categorias podem ser concebidas com um viés idealista e absolutizar sua existência, independente da matéria. Também se pode negar a existência objetiva e considerá-las uma elaboração própria da consciência. A filosofia kantiana, por exemplo, considera o tempo e o espaço como formas *a priori* da sensibilidade, portanto, concebe a Geometria com o mesmo viés.

Apresentamos também as formas fundamentais de movimento da matéria, quais sejam: inorgânica (movimento mecânico, físico e químico), orgânica (movimento biológico: vegetal e animal) e ser social (movimento social), que compõem as esferas ontológicas do ser (LUKÁCS, 2010, 2012, 2013). Fez-se necessária essa discussão para compreender que o movimento absoluto e o repouso relativo da matéria determinam a geometria da realidade física. Suas formas de movimento se complexificam e estabelecem novas relações métricas e espaciais na infinidade de formações materiais particulares. No entanto, a mais elevada e complexa forma de movimento, a social, não promove

mudanças diretas nas relações espaciais. Elas são indiretas, pois dependem dos outros movimentos que atuam diretamente na realidade física.

Inerente à matéria, juntamente ao movimento, estão as categorias tempo e espaço. Conforme citado anteriormente, o espaço é “a extensão das formações materiais particulares e a relação entre cada uma delas com as outras formações materiais que a rodeiam [...]” (CHEPTULIN, 1982, p. 181). Essa definição atribui um significado dialético-materialista à categoria espaço, que compõe um elemento fundamental do objeto da Geometria. Na mesma direção, o tempo caracteriza-se pela “duração de existência das formações materiais particulares e a relação de cada uma delas com as formações anteriores e posteriores” (CHEPTULIN, 1982, p. 181). As três formas fundamentais de existência da matéria se transformam e se complexificam com o desenvolvimento do seu reflexo objetivo inerente, que produziu o reflexo subjetivo, dando origem à consciência.

Ao analisar a categoria reflexo, a caracterizamos como uma propriedade universal da matéria (CHEPTULIN, 1982; LENIN, 1979; RUBINSTEIN, 1963) e afirmamos que se caracteriza pela reprodução, por parte de uma formação material particular, de propriedades da formação material que age sobre a primeira. Portanto, toda forma de movimento encerra um tipo de reflexo objetivo.

A discussão sobre a categoria reflexo se fez necessária para estabelecer as relações entre aquilo que é próprio à realidade física e o que é peculiar à consciência. Com isso, podemos localizar o lugar do objeto da Geometria na relação do homem com a realidade material e, nessa direção, fundamentamos sua constituição como abstrações.

Com a complexificação dos reflexos objetivos, surgiu e se configurou a consciência. Para a dialética materialista, esta é a expressão ideal da realidade material, portanto, o objeto da Geometria se encontra na esfera ideal, nas relações de reflexo da realidade física na consciência.

Isso nos dá subsídios para entendermos que o conteúdo objetivo do objeto da Geometria não se encontra na consciência, mas na realidade física. Como afirmamos anteriormente, ele é a expressão ideal do movimento real da matéria, regido pelas leis físicas. A forma espacial, sendo propriedade da matéria, possui uma objetividade independente da consciência, enquanto o objeto da Geometria possui uma objetividade intermediada pela subjetividade. Trata-se, pois, de uma compreensão que se difere da concepção materialista mecanicista

que considera o objeto da Geometria como inerente à matéria, bem como da concepção idealista que o considera como uma forma a priori da sensibilidade. O conhecimento geométrico é a subjetivação das relações espaciais objetivadas e, dialeticamente, torna-se uma subjetividade objetivada em forma de conhecimento.

Como argumento para tal entendimento, na quarta parte evidenciamos três traços característicos da Matemática para compreender a sua relação com a realidade material. Novamente, trouxemos à tona a discussão dos elementos das suas concepções idealistas e materialistas. Expomos, pois, as bases para compreender a relação entre a realidade física e o objeto da Geometria, que é uma abstração das relações espaciais próprias à realidade física. Essa abstração não é independente, como concebe o idealismo, ao contrário, constitui um reflexo subjetivo.

Outros elementos caracterizadores da Matemática e, por consequência, da Geometria, são a precisão, o rigor lógico e o irrefutável caráter de suas conclusões. Eles não são absolutos e tem como critério de verdade a realidade material, dadas as aproximações necessárias e possíveis para satisfazer as necessidades humanas. A base das abstrações que compõe o objeto da Geometria, a matéria em movimento, transforma-se continuamente e estabelece novas formas espaciais e relações entre os corpos físicos. Desse modo, seu rigor lógico se constitui de acordo com a precisão que se alcança e, por consequência, delimita o irrefutável caráter de suas conclusões.

Essas características da Matemática e da Geometria, inclusive com seu método próprio, possibilitam um amplo campo de aplicações. Com a complexificação das abstrações geométricas, ampliam-se as possibilidades lógicas de suas aplicações em outras ciências. As inferências da Geometria pura são posteriormente comprovadas, ou não, pela Física. Dialeticamente, os avanços desta, na compreensão do espaço, produzem novos elementos para o desenvolvimento de outras teorias geométricas.

Por fim, no quinto capítulo desenvolvemos a especificidade do objeto da Geometria. Iniciamos com uma crítica à interpretação de Lukács (2012) de um experimento ideal de Einstein e Infeld (2008) que trata de seres bi e tridimensionais. Nessa crítica, Lukács (2012) afirma que, para eles, a Geometria é inerente à realidade física. Essa passagem de Lukács (2012) proporcionou-nos vários questionamentos, pois não nos parecia plausível que Einstein e Infeld (2008) afirmassem tal proposição, uma vez que a teoria da relatividade supera as ideias absolutas de tempo e espaço, bem como a sua concepção kantiana.

É justamente nosso estudo da referida crítica de Lukács (2012) que nos trouxe questionamentos e encontramos uma base para nosso problema de pesquisa. Se a crítica de Lukács (2012) procedesse, então, para Einstein e Infeld (2008) a Geometria seria inerente à matéria e refletiria mecanicamente na consciência. Porém, nossa crítica mostrou que eles não tinham, com o experimento ideal, a intenção de mostrar a inerência da Geometria à realidade física, mas apenas indicar que o espaço tem outras propriedades para além da Geometria não-euclidiana.

Em nossa crítica, afirmamos a concordância com Lukács (2012), porém contestamos parte de sua análise, por não distinguir claramente a Geometria da Física, bem como as propriedades do espaço tomadas abstratamente das propriedades da matéria.

Nossa exposição sobre a gênese e desenvolvimento do objeto da Geometria evidenciou fontes de sua origem para além das medições de terras, bem como as concepções, idealista e materialista mecanicista, que predominaram por um longo período de sua história. Para tanto, localizamos a Geometria na história com base na periodização de Kolmogorov, considerada por Ríbnikov (1987), qual seja: nascimento da Matemática; Matemática elementar; formação da Matemática das grandezas variáveis; e, por fim, Matemática contemporânea.

No primeiro período, a Geometria caracteriza-se como um conjunto de regras para satisfazer necessidades imediatas, bem como apresenta elementos estéticos e místicos. É nesse período que surgem as sistematizações geométricas que, mais tarde, serão sucumbidas pelos *Elementos*, de Euclides. O objeto da Geometria ainda era considerado uma abstração pura para alguns e, para outros, era inerente à realidade física. Essas duas concepções antagônicas também divergem em relação à sua origem.

No segundo período, a Geometria ganha características mais abstratas e seu objeto se distancia dos problemas imediatos. Surge a grande sistematização de Euclides, que perdurará por vários séculos. Nosso interesse voltou-se para o segundo e terceiro períodos, pois contemplam o caminho do surgimento das Geometrias não-euclidianas. O terceiro período é caracterizado pelas grandezas variáveis e deu surgimento à Geometria Analítica com Descartes e o Cálculo Diferencial com Newton e Leibniz.

O elemento central do desenvolvimento das Geometrias elementares até as superiores foi o quinto postulado de Euclides, que causou controvérsias ao longo de vinte séculos. Ele criou sua própria possibilidade de superação, desde Euclides, passando por Saccheri e

Lambert, até Gauss, Bolyai, Lobachevski e Riemann. Com esse percurso, o objeto da Geometria sofreu influências das concepções idealista e materialista mecanicista até alcançar uma nova concepção, a dialético-materialista. Por séculos, a Geometria permaneceu “estagnada” e, nos últimos duzentos anos, sofreu uma revolução que impactou seu objeto e outras áreas como a Física, a Filosofia, a arte etc.

Com Lobachevski, o objeto da Geometria adquiriu um viés materialista e foi corroborado fisicamente, mais tarde, com a teoria da relatividade. Tal Geometria se tornou um caso singular da Geometria de Riemann e, desse modo, indica-nos as grandes possibilidades de avanços indefinidos no desenvolvimento de novas teorias geométricas, que incorporam as anteriores como casos singulares. Essas possibilidades passam pelos estudos físicos e se renovam continuamente na infinidade de relações espaciais existentes, conhecidas e desconhecidas.

O último período é o da Matemática contemporânea, caracterizado pela extensão de seu objeto e o amplo campo de aplicações; a formação de conceitos gerais a patamares elevados de abstração; a preponderância da teoria dos conjuntos; além da análise profunda dos seus fundamentos. Com isso, a Geometria passa a considerar não somente as relações espaciais conhecidas, mas todas as possíveis.

Por fim, desenvolvemos um esboço da mútua relação entre as Geometrias não-euclidianas e a teoria da relatividade. Evidenciamos a relação de dependência entre a Física e a Geometria, bem como os avanços da primeira na superação do tempo e do espaço absolutos. Isso causou impacto nas concepções dessas categorias e, por consequência, atribuiu relatividade ao objeto da Geometria. Vale lembrar que falamos de um relativismo epistemológico, e não um relativismo ontológico.

Ao longo do texto, apresentamos as discussões sobre a categoria matéria para compreender seu desenvolvimento, desde as formas mais primitivas de sua existência, e como seu movimento absoluto produz as relações espaciais específicas. Também discutimos como esse movimento promoveu o surgimento da consciência como um reflexo subjetivo capaz de elaborar um conhecimento de todo o existente, ou seja, do ser. Nosso debate localiza o objeto da Geometria nas relações de abstrações produzidas pela consciência, com sua base na materialidade.

Portanto, a partir dessa compreensão e apresentadas as especificidades da Matemática, da Geometria e seu objeto, demonstramos a tese de que este é um reflexo e não uma parte constitutiva da realidade física ou uma forma a priori da sensibilidade.

Ao fim da pesquisa, respondemos algumas perguntas que a impulsionaram e deram origem a tese. Porém, chegamos a um ponto em que novas perguntas surgiram, que nos incomodaram e que inquietarão outros pesquisadores. Sendo assim, questionamos: qual o impacto na compreensão do objeto da Geometria causaria a comprovação, pela Física, das teorias que afirmam a existência de mais de três dimensões espaciais? Este entendimento sobre o objeto da Geometria se estende aos objetos dos outros campos de conhecimento específicos da Matemática? Quais as implicações de nossa compreensão sobre este objeto para o seu ensino nas escolas?

A intenção não foi esgotar o tema, tampouco responder todas essas perguntas, mas provocar o debate sobre o objeto da Geometria, com a finalidade de contribuir na sua compreensão e possibilitar uma interpretação mais próxima possível de sua complexa relação com a realidade física.

REFERÊNCIAS

AFANASIEV, V. G. **Fundamentos de los conocimientos filosóficos**. La Havana: Política, 1963.

ALEKSANDROV, A. D. Visión general de la matemática. In: ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza, 1991a. p. 17-89.

ALEKSANDROV, A. D. Geometrias no euclidianas. In: ALEKSANDROV, A. D. et al. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza, 1991b. p. 123-227.

ALMIRA, C. J. M. S.; RAMOS, P. R. Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica. **Boletín de la Asociación Matemática Venezolana**, Caracas, v. 11, n. 1, p. 85-101, 2004.

BELOV, P. T. O caráter primário da matéria e secundário da consciência. In: TCHERTKOV, V. P. et al. **Materialismo dialético**. Rio de Janeiro: Vitória, 1955. p. 269-336.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CHEPTULIN, A. **A dialética materialista**: categorias e leis da dialética. São Paulo: Alfa-Omega, 1982.

DAVIS, P.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DAVÝDOV, V.V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

DUAYER, M. Antirrealismo e absolutas crenças relativas. **Verinotio**, Belo Horizonte, n. 14, p. 16-27, 2012.

EINSTEIN, A. Geometria no euclídea y física. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 677-681, 2005.

EINSTEIN, A.; INFELD, L. **A evolução da física**. Rio de Janeiro: Zahar, 2008.

ENGELS, F. **Anti-Dühring**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

ENGELS, F. **A dialética da natureza**. São Paulo: Paz e Terra, 1979.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FLORES, F.; NATIELLO, M. La filosofía matemática de Karl Marx en los manuscritos de 1881. Un esbozo. **Revista Brasileira da História da Matemática**, Rio Claro, SP, v. 6, n. 12, p. 111-125, 2006.

GAIDUKOV, I. G. A cognoscibilidade do mundo e suas leis. In: TCHERTKOV, V. P. et al. **Materialismo dialético**. Rio de Janeiro: Vitória, 1955. p. 337-390.

GERDES, P. **Os manuscritos filosófico-matemáticos de Karl Marx sobre o cálculo diferencial**: uma introdução. Maputo: TLANU, 2008.

GIARDINETTO, J. R. B. **A Relação entre o Concreto e o Abstrato no ensino da Geometria Analítica a nível do 1º e 2º Graus**. 1991. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 1991.

KONSTANTINOV, F. V. **Fundamentos de la filosofía marxista**. Distrito Federal do México: Grijalbo, 1965.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K. **Dialética do Concreto**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

LENIN, V. I. **Materialismo y empiriocriticismo**: notas críticas sobre una filosofía reaccionaria. Moscú: Progreso, 1979.

LUKÁCS, G. **Introdução a uma estética marxista**: sôbre a particularidade como categoria da estética. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1970.

LUKÁCS, G. **Prolegômenos para uma ontologia do ser social**. São Paulo: Boitempo, 2010.

LUKÁCS, G. **Para uma ontologia do ser social I**. São Paulo: Boitempo, 2012.

LUKÁCS, G. **Para uma ontologia do ser social II**. São Paulo: Boitempo, 2013.

MAÑES, J. L. **Geometría del Espacio-Tiempo**. In: UN PASEO POR LA GEOMETRÍA, 2001, Bilbao. *Anais...* Bilbao: RSME, 2001. p. 37-54.

MARX, K. **Mathematical Manuscripts of Karl Marx**. London: New Park Publications, 1983.

MARX, K. **O capital**: crítica da economia política. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2011. v. 1.

MARX, K. **Contribuição à crítica da economia política**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

OVTCHINNIKOV, N. F. A materialidade do mundo e as leis de seu desenvolvimento. In: TCHERTKOV, V. P. et al. **Materialismo dialético**. Rio de Janeiro: Vitória, 1955. p. 215-267.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para a constituição do objeto de ensino da álgebra**. 2014. 317 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PATY, M. Introdução a três textos de Einstein sobre a geometria, a teoria física e a experiência. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 641-662, 2005.

RANDALL, L. **Universos ocultos**: un viaje a las dimensiones extras del cosmos. Barcelona: Acantilado, 2011.

RÍBNIKOV, K. **História de las matemáticas**. Moscú: Mir, 1987.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. **Categorías del materialismo dialéctico**. Distrito Federal do México: Grijalbo, 1958.

RUBINSTEIN, S. L. **El ser y la conciencia**: y el pensamiento y los caminos de su investigación. Distrito Federal do México: Grijalbo, 1963.

SMOGORZHEVSKI, A. S. **Acerca de la geometría de Lobachevski**. Moscú: Mir, 1978.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1989.

TROCHIN, D. M. O movimento e o desenvolvimento da natureza e da sociedade. In: TCHERTKOV, V. P. et al. **Materialismo dialéctico**. Rio de Janeiro: Vitória, 1955. p. 91-131.

TROTSKY, L. ABC da dialética materialista. Traduzido por Iuri Tonelo e André Augusto. **Revista Iskra**, 2013. Disponível em: <<https://revistaiskra.wordpress.com/especiais-iskra-trotsky-e-engels/especial-iskra-abc-da-dialetica-materialista/>>. Acesso em: 17 nov. 2013.