Suppondo em primeiro logar um producto de dous factores *a* e *b*, demonstremos que

$$lg.\ ab = lg.\ a + lg.\ b$$

Consideremos as duas progressões

$$\div\!\!\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : \text{etc.}$$
$$\div\ 0.\ \ r.\ \ 2r.\ \ 3r.\ \ 4r.\ \ 5r.\ \ \text{etc.}$$

Em geral os numeros *a* e *b* não são termos da progressão por quociente, mas se inserirmos entre todos os termos consecutivos d'esta progressão um grande numero de meios proporcionaes, entre esses termos encontraremos os numeros *a* e *b*, e quando não appareçam esses numeros existirão outros que poderão ser considerados como iguaes a elles, e a progressão por quociente tomará a seguinte fórma :

$$\div 1 : c : c' : \dots : q : d : d' : \dots : q^2 : a : a' ; \dots : q^3 : b : b' : \dots : q^4 : e : e' : \dots : x$$

Inserindo-se tambem entre todos os termos consecutivos da progressão por differença o mesmo numero de meios differenciaes, os termos d'essa progressão serão os logarithmos dos termos correspondentes na progressão por quociente, e essa progressão tomará a fórma

$$\div\ o.\ lgc.\ lgc' \dots r.lgd..\ lgd' \dots 2r.lga.lga' ..\ .3r.lgb.lgb' \dots 4r.lge.lge' \dots ..lgx$$

Suppondo na progressão por quociente um termo *x*, tão distante de *b*, quanto *a* dista de 1 ; na progressão por differença, o termo lgx será tão distante do termo lgb, quanto o termo lga dista de 0, e teremos (260 e 265).

$$1 : a : : b : x$$
$$0.\ lga : lgb.lgx$$

Applicando á proporção e á equidifferença as propriedades fundamentaes respectivas, teremos

$$x = ab$$

$$lgx = lga + lgb$$

substituindo na ultima igualdade *x* pelo seu valor *ab*, resulta

$$lg.\ ab = lg.\ a + lg.\ b$$

Facilmente se demonstra a propriedade para um producto de um numero qualquer de factores.

Com effeito

$$lg.\ abc = lg.\ ab.\ c = lg.\ ab + lg.\ c = lg.\ a + lg.\ b + lg.\ c.$$

$$lg.\ abcd = lg.\ abc.\ d = lg.\ abc + lg.\ d = lg.\ a + lg.\ b + lg.\ c + lg.\ d.$$

$$lg.\ abcde = lg.\ abcd.\ e = lg.\ abcd + lg.\ e = lg.\ a + lg.\ b + lg.\ c + lg.\ d + lg.\ e,$$ e assim por diante.

SEGUNDA PROPRIEDADE

271. *O logarithmo de um quociente é igual ao logarithmo do dividendo menos o logarithmo do divisor.*

Demonstremos que : $lg \frac{a}{b} = lg.\ a - lg.\ b$

Representando por *q* o quociente da divisão de *a* por *b*, temos

$$\frac{a}{b} = q$$

Sendo o dividendo igual ao divisor multiplicado pelo quociente, vem

$$a = bq$$

Se *a* e *bq* são iguaes, os seus logarithmos considerados no mesmo systema tambem são, e por isso

$$lg.\ a = lg.\ bq$$

ou

$$lg.\ a = lg.\ b + lg.\ q.$$

Subtrahindo de ambos os membros da ultima igualdade lg. b, acha-se

$$lg.\ q = lg.\ a - lg.\ b$$

substituindo *q* pelo seu valor $\frac{a}{b}$, resulta

$$lg. \frac{a}{b} = lg.\ a - lg.\ b$$

TERCEIRA PROPRIEDADE

272. *O logarithmo de uma potencia qualquer de um numero é igual ao expoente multiplicado pelo logarithmo do numero.*

Demonstremos que lg. $a^m = m$. lg. a.
Com effeito :

$$\lg. a^m = \lg (a.\,a.\,a \ldots\ldots\ldots a) = \lg.\,a + \lg.\,a + \lg.\,a + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \lg.\,a = m.\,\lg.\,a.$$

QUARTA PROPRIEDADE

273. *O logarithmo da raiz de qualquer gráo de um numero é igual ao logarithmo do numero dividido pelo indice da raiz.*

Demonstremos que $\lg.\sqrt[m]{a} = \dfrac{\lg.\,a}{m}$

Representando por *b* a raiz do gráo *m* de *a*, temos

$$\sqrt[m]{a} = b$$

Elevando ambos os membros da igualdade á potencia *m*, vem

$$a = b^m$$

sendo as duas quantidades *a* e b^m iguaes, os seus logarithmos tomados no mesmo systema tambem são, e por isso

$$\lg.\,a = \lg.\,b^m$$

ou

$$\lg.\,a = m\,\lg.\,b$$

dividindo ambos os membros da ultima igualdade por *m*, acha-se

$$\lg.\,b = \frac{\lg.\,a}{m}$$

substituindo, na ultima igualdade, *b* pelo seu valor $\sqrt[m]{a}$, resulta

$$\lg.\sqrt[m]{a} = \frac{\lg.\,a}{m}$$

As quatro propriedades demonstradas servem para abreviar o calculo. A primeira reduz a multiplicação de dous ou mais numeros á addição de seus logarithmos ; a segunda reduz a divisão de um numero

por outro á subtracção de seus logarithmos ; a terceira reduz a formação de uma potencia qualquer de um numero á multiplicação do expoente pelo logarithmo d'esse numero ; e, finalmente, a quarta reduz a extracção da raiz de qualquer gráo de um numero á divisão do logarithmo do numero pelo indice da raiz.

Systema decimal

274. Entre os diversos systemas de logarithmos, em numero infinito, foi adoptado o decimal, isto é, o que tem para base o numero 10.

Nesse systema as progressões são :

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \text{etc.}$$
$$\div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ \text{etc.}$$

Os logarithmos nesse systema são denominados *logarithmos ordinarios* ou de *Briggs*.

Além das propriedades demonstradas têm os logarithmos no systema decimal as propriedades seguintes :

1ª *O logarithmo de uma potencia qualquer de 10, é igual ao expoente d'essa potencia.*

Com effeito : $\lg.\,10^m = m.\,\lg.\,10 = m \times 1 = m$.

2ª *Os logarithmos das diversas potencias de 10 são numeros inteiros ; os logarithmos dos outros numeros são numeros incommensuraveis ; a parte que fica á esquerda da virgula chama-se caracteristica, e a parte que fica á direita da virgula chama-se mantissa.*

3ª *A caracteristica do logarithmo de um numero consta de tantas unidades quantos forem os algarismos do numero menos um.*

Representando por A um numero de *n* algarismos, maior que 10^{n-1} teremos :

$$10^{n-1} < A < 10^n$$

e portanto

$$\lg\,10^{n-1} < \lg A. < \lg.\,10^n$$

ou

$$n-1 < \lg.\,A < n$$

O logarithmo de A tem por consequencia $n-1$ unidades na caracteristica.

4ª Conhecendo-se o logarithmo de um numero, para ter o de um outro 10, 100, 1000, etc., vezes maior ou menor, basta sommar ou subtrahir á caracteristica uma, duas, tres, etc., unidades.

Sendo a o numero do qual se conhece o logarithmo, teremos:

$$\begin{aligned} \lg.(a \times 10) &= \lg. a + \lg. 10 = \lg. a + 1 \\ \lg.(a \times 100) &= \lg. a + \lg. 100 = \lg. a + 2 \\ \lg.(a \times 1000) &= \lg. a + \lg. 1000 = \lg. a + 3 \\ \text{etc.,} &\quad \text{etc.,} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\lg.\frac{a}{10} = \lg. a - \lg. 10 = \lg. a - 1$$

$$\lg.\frac{a}{100} = \lg. a - \lg. 100 = \lg. a - 2$$

$$\lg.\frac{a}{1000} = \lg. a - \lg. 1000 = \lg. a - 3$$

etc., etc., etc.

Logarithmos das fracções

275. Consideradas as duas progressões do systema decimal prolongadas indefinidamente.

$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots\ldots\ldots\ldots : \infty$$
$$\div 0 : 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \infty$$

Sendo cada termo da progressão por quociente igual ao precedente multiplicado por 10, se dividirmos um termo qualquer d'essa progressão por esse numero, teremos o termo precedente, e a progressão por quociente prolongada indefinidamente para a esquerda, tomará a fórma

$$\frac{1}{\infty} : \ldots\ldots : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots : \infty$$

Na progressão por differença sendo cada termo igual ao precedente mais um, segue-se que conhecido um termo qualquer, para ter o precedente, é necessario subtrahir a unidade do termo conhecido.

Tratando-se, pois, de continuar a progressão por differença para a esquerda, será necessario subtrahir de 0 successivamente 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., e não sendo possivel effectuar essas subtracções, devemos indical-as do seguinte modo 0—1, 0—2, 0—3, 0—4, etc., e assim se formam os termos —1, —2, —3, —4, etc., e a progressão tomará a fórma

$$-\infty \ldots\ldots\ldots\ldots -3.\ -2.\ -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots\ldots \infty$$

Parece, pelo que fica estabelecido, não terem logarithmos as fracções proprias, mas, se considerarmos os termos —1, —2, —3, —4, etc., da progressão por differença como resultados d'essas subtracções, persistindo sempre a definição de logarithmos, concluiremos que

Os logarithmos das fracções proprias são sempre negativos.

Taboas de logarithmos

Na organisação de uma taboa de logarithmos é sufficiente que ella tenha os logarithmos dos numeros inteiros, porque por meio d'elles se obtem os logarithmos das fracções.

É de facil intuição, que, sendo conhecidos os logarithmos dos numeros primos, facilmente se obtem os logarithmos dos outros numeros inteiros, porque ou esses numeros são productos de factores primos differentes, e os seus logarithmos se obtem por meio da primeira propriedade, ou são productos de factores primos iguaes e os seus logarithmos se obtem por meio da terceira propriedade.

Vejamos como é possivel construir uma taboa de logarithmos por meio das duas progressões:

$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : \ldots\ldots\ldots$$
$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots$$

Se inserirmos entre todos os termos consecutivos da progressão por quociente um grande numero de meios proporcionaes, o mesmo entre cada dous termos consecutivos, encontraremos entre esses termos os numeros 2, 3, 4, 5....9; 11, 12, 13, 14, 15....99; 101, 102, 103, 104, 105.....999; etc., ou outros que possam ser considerados como iguaes aos que faltarem.

Inserindo-se tambem entre todos os termos consecutivos da progressão por differença o mesmo numero de meios differenciaes, os termos d'essa progressão serão os logarithmos dos termos correspondentes da progressão por quociente.

Escolhendo dos termos da progressão por quociente os que representarem os numeros inteiros, e dos termos da progressão por differença os que forem correspondentes aos primeiros, organisar-se-á a taboa de logarithmos, dispondo em uma columna a serie natural dos numeros inteiros e em outra os seus logarithmos, de modo que os termos que se corresponderem nas duas progressões se achem no mesmo alinhamento.

A taboa de logarithmos de Callet contém a parte decimal dos logarithmos dos numeros inteiros desde 1 até 108000, obtendo-se por meio d'elles e approximadamente os logarithmos dos numeros inteiros maiores que 108000. Quanto á caracteristica de cada logarithmo é ella determinada pela simples inspecção do numero, conforme se viu no n. 247.

O estudo do uso da taboa de Callet, consiste na resolução dos dous problemas seguintes :

1.º *Dado um numero qualquer inteiro ou fraccionario, achar o seu logarithmo.*

2.º *Dado um logarithmo qualquer, achar o numero correspondente.*

1.º PROBLEMA

O primeiro problema comprehende seis casos :

1.º *O numero dado é inteiro e menor que 1200.*

2.º *O numero dado é inteiro, tem quatro algarismos e é maior que 1200.*

3.º *O numero dado é inteiro e tem cinco algarismos.*

4.º *O numero dado é inteiro e tem mais de cinco algarismos.*

5.º *O numero dado é uma fracção ordinaria.*

6.º *O numero dado é uma fracção decimal.*

1.º CASO. — Neste caso o numero dado é encontrado na 1.ª chiliade e na columna N; o numero que se achar á sua direita e no mesmo alinhamento, será o seu logarithmo.

Exemplo :

lg. 143=2, 15533604
lg. 1037=3, 01577876
lg. 1112=3, 04610479

2.º CASO — O numero dado é encontrado na taboa seguinte á 1.ª Chiliade, e o seu logarithmo deve ser encontrado á sua direita e no mesmo alinhamento.

Se á direita do numero dado forem encontrados sómente os quatro ultimos algarismos do logarithmo, deve-se procurar os tres primeiros um pouco acima e no espaço em branco.

lg. 3581=3,5540043
lg. 4728=3,6746775
lg. 6935=3,8410465
lg. 9632=3,9837165

3.º CASO. — Procura-se o logarithmo do numero formado pelos quatro primeiros algarismos, considera-se d'esse logarithmo sómente os tres primeiros algarismos, e procura-se os quatro ultimos na columna representada pelo ultimo algarismo do numero dado, e no mesmo alinhamento em que se achar esse numero.

lg. 39997=4,6010274
lg. 49695=4,6963127
lg. 65298=4,8148999
lg. 96456=4,9843292

4.º CASO. — Separam-se os cinco primeiros algarismos e procura-se o logarithmo do numero representado por elles, multiplica-se a parte separada para a direita pela differença tabular mais proxima, e somma-se a parte inteira do producto com o logarithmo achado.

O calculo dispõe-se assim : seja pedido lg. 65364794 :

		0.79
65364......	8153386	67 diff. tab
79×67	52	553
		474
lg. 6536479	=6,8153438	52,93

Seja, para segundo exemplo, pedido o lg. 8948676 :

		49 diff. tab.
89486.......	9517551	0,76
76×49.	37	2 94
		34 3
lg. 8948676	=6,9517588	37,24

Póde-se tambem vêr na differença tabular mais proxima os numeros correspondentes aos algarismos separados para a direita, sommar esses numeros e o resultado reunir com o logarithmo achado.

Applicando aos exemplos acima, o calculo dispõe-se assim :

$$\begin{array}{rcr} 65364.. & & 8153386 \\ 7. & & 47 \\ ..9 & & 60 \\ \hline \text{lg. } 6536479 & = & 6{,}8153439 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 89486.. & & 9517551 \\ 7. & & 34 \\ ..6 & & 29 \\ \hline \text{lg. } 8948676 & = & 6{,}9517588 \end{array}$$

5.º Caso.—Procura-se o logarithmo do numerador e o do denominador, subtrahe-se o primeiro do segundo, e dá-se ao resultado o signal menos.

Trata-se de demonstrar que $\text{lg. } \frac{a}{b} = -(\text{lg. } b - \text{lg. } a)$

Com effeito :

$$\text{lg. } \frac{a}{b} = \text{lg.}\left(1 \div \frac{b}{a}\right) = \text{lg. } 1 - \text{lg. } \frac{b}{a} = 0 -$$
$$-(\text{lg. } b - \text{lg. } a) = -(\text{lg. } b - \text{lg. } a).$$

Exemplo :

$$\text{lg. } \frac{47635}{389426} = -(\text{lg. } 389426 - \text{lg. } 47635) = -(5{,}5904250 - 4{,}6779262)$$
$$= -0{,}9124988$$

6º Caso.—Procura-se o logarithmo do numero dado prescindindo da virgula, subtrahe-se esse logarithmo de um numero inteiro formado de tantas unidades quantos forem os algarismos da parte fraccionaria do numero dado e dá-se ao resultado o signal menos.

Trata-se de demonstrar que

$$\text{lg. } 0{,}004718 = -(6 - \text{lg. } 4718)$$

Com effeito :

$$\text{lg. } 0{,}004718 = \text{lg. } \frac{4718}{1000000} = -(\text{lg. } 1000000 - \text{lg. } 4718) = -(6 - \text{lg. } 4718)$$

SEGUNDO PROBLEMA

O segundo problema comprehende seis casos:

1º *O logarithmo dado é encontrado na 1ª Chiliade.*

2º *O logarithmo dado é encontrado na 2ª taboa e na columna 0.*

3º *Os tres primeiros algarismos do logarithmo dado são encontrados na columna 0 e os outros quatro em uma das outras columnas.*

4º *O logarithmo dado não é encontrado nas taboas.*

5º *O logarithmo dado é negativo e pede-se a fracção ordinaria correspondente.*

6º *O logarithmo dado é negativo e pede-se a fracção decimal correspondente.*

1º Caso.—O numero pedido é encontrado na columna N e no mesmo alinhamento em que se acha o logarithmo dado.

$$\begin{aligned} 0{,}95424251 &= \text{lg. } 9 \\ 1{,}92941893 &= \text{lg. } 85 \\ 2{,}74741181 &= \text{lg. } 559 \\ 3{,}06707086 &= \text{lg. } 1167 \end{aligned}$$

2º Caso.— Procuram-se os tres primeiros algarismos do logarithmo dado entre os numeros isolados que estão na columna 0 da 2ª taboa, procurando depois os quatro ultimos algarismos no mesmo alinhamento ou um pouco abaixo, entre os numeros de quatro algarismos que estão na mesma columna ; o numero que se acha na columna N, correspondente aos quatro ultimos algarismos, será o numero pedido.

$$\begin{aligned} 3{,}2960067 &= \text{lg. } 1977 \\ 3{,}6150026 &= \text{lg. } 4121 \\ 3{,}9136019 &= \text{lg. } 8196 \\ 3{,}9888264 &= \text{lg. } 9746 \end{aligned}$$

3º Caso.— Os quatro ultimos algarismos, não sendo encontrados na columna 0, procuram-se em uma das outras columnas e no mesmo alinhamento do proximamente menor; o algarismo, que corresponder á columna em que se acharem os quatro ultimos algarismos, escreve-se á direita do numero que estiver na columna N e no mesmo alinhamento; o resultado será o numero pedido.

$$4,6830191 = \text{lg. } 48308$$
$$4,7350378 = \text{lg. } 54455$$
$$4,7970011 = \text{lg. } 62806$$
$$4,8026848 = \text{lg. } 63487$$

4º Caso.— Não sendo encontrado nas taboas o logarithmo dado, procura-se o proximamente maior e o proximamente menor, assim como tambem o numero correspondente ao proximamente menor; subtrahe-se o proximamente menor do logarithmo dado e do proximamente maior, divide-se a primeira differença pela segunda, escrevem-se os tres primeiros algarismos do quociente á direita do numero correspondente ao proximamente menor, e separam-se no resultado, para a esquerda, tantos algarismos mais um quantas forem as unidades da caracteristica.

Achar o numero correspondente ao logarithmo: 2,4674325.

O logarithmo proximamente maior é 2,4674453.

O logarithmo proximamente menor é 2,4674305.

O numero correspondente ao logarithmo proximamente menor é 29338.

A differença entre o logarithmo dado e o proximamente menor é 20, e a differença entre os logarithmos proximamente maior e menor é 148; sendo o quociente da divisão do primeiro resultado pelo segundo igual a 0,135, o numero pedido será 293,38135.

Este processo funda-se no principio: *A differença entre dous numeros é proporcional á differença entre os seus logarithmos, achando-se os dous numeros muito proximos um do outro,*

Com effeito

$$1 : x - 29338 :: 148 : 20$$

d'onde

$$x - 29338 = \frac{20}{148}$$

ou

$$x = 29338 + \frac{20}{148}$$

ou ainda

$$x = 29338135$$

ou, finalmente, attendendo á caracteristica

$$x = 293,38135$$

5º Caso.—Procura-se o numero correspondente ao logarithmo dado, prescindindo do signal e por elle se divide a unidade.

Demonstremos que:

$$-4,58077783 = \text{lg.} \frac{1}{38706}$$

Com effeito

$$-4,5877783 = 0 - 4,5877783 = \text{lg. } 1 - \text{lg. } 38706 = \text{lg.} \frac{1}{38706}$$

6º Caso.—Subtrahe-se o logarithmo dado de um numero inteiro que lhe seja superior, procura-se o numero correspondente ao resto e separam-se nesse numero, para a direita, tantos algarismos quantas forem as unidades do numero inteiro do qual subtrahimos o logarithmo dado.

Exemplo: Achar o numero correspondente ao logarithmo —1.4067139.

Subtrahindo o logarithmo dado do numero 2, acha-se 0,5932861; procurando nas taboas o numero correspondente a esse resto, acha-se 3,92; mudando a virgula para a esquerda dous algarismos, teremos o numero pedido 0,0392.

Com effeito:

$$-1,4067139 = 0 - 1,4067139$$

Sommando ao minuendo 0 o numero 2, teremos

$$0,5932861 = 2 - 1,4067139$$

E como o resto ou o logarithmo dado fica augmentado de duas unidades, o numero correspondente fica 100 vezes maior; por isso é necessario tornal-o 100 vezes menor, o que se consegue mudando a virgula para a esquerda dous algarismos.

Applicação dos logarithmos

1ª APPLICAÇÃO

Achar por logarithmos o valor de n na fórmula $l=ar^{n-1}$.

$$\text{lg. } l = \text{lg. } ar^{n-1}$$

ou $$\text{lg. } l = \text{lg. } a + \text{lg. } r^{n-1}$$

ou $$\text{lg. } l = \text{lg. } a + (n-1) \text{ lg. } r$$

ou $$\text{lg. } l = \text{lg. } a + n \text{ lg. } r - \text{lg. } r$$

ou $$\text{lg. } l + \text{lg. } r - \text{lg. } a = n \text{ lg. } r$$

d'onde $$n = \frac{\text{lg. } l + \text{lg. } r - \text{lg. } a}{\text{lg. } r}$$

2ª APPLICAÇÃO

Achar o 12º termo da progressão

$$\div 2 : \frac{7}{3} : \frac{49}{18} : \frac{343}{108} : \ldots\ldots\ldots$$

Chamando l o 12º termo da progressão cuja razão é $\frac{7}{6}$, teremos pela formula $l = ar^{n-1}$

$$l = 2 \times \left(\frac{7}{6}\right)^{11}$$

ou $$\text{lg. } l = \text{lg. } 2 + 11 (\text{lg. } 7 - \text{lg. } 6) =$$

$$= 0{,}30103000 + 11 (0{,}84509804 - 0{,}77815125)$$

ou $$\text{lg. } l = 0{,}30103000 + 11 \times 0{,}06694679$$

ou $$\text{lg. } l = 0{,}30103000 + 0{,}73641469$$

ou $$\text{lg. } l = 1{,}03744469$$

ou $$l = 10{,}9005$$

Complementos logarithmicos

276. Algumas vezes os calculos numericos dependem de addições e subtracções de logarithmos. Estas duas operações podem reduzir-se a uma addição, empregando os *complementos logarithmicos*.

Complemento de um logarithmo é a differença entre o numero 10 e esse logarithmo.

O complemento de um logarithmo se obtem subtraindo de 9 as unidades representadas pelos diversos algarismos do logarithmo, exceptuando as representadas pelo ultimo algarismo significativo da direita, que se subtraem de 10.

Designando o complemento de um logarithmo por Cl, temos:

Cl. lg. 32199=Cl. 4,5078424=10−4,5078424=5,4921576.

Suppondo que se tenha de effectuar sobre os logarithmos L, L', L'' e L''' o seguinte calculo

$$L - L' + L'' - L'''$$

evidentemente

$$L - L' + L'' - L''' = L + (10 - L') + L'' + (10 - L''') - 20 = L + \text{Cl. } L' + $$
$$+ L'' + \text{Cl. } L''' - 20$$

Do resultado podemos estabelecer a seguinte

REGRA.—*Sommam-se os logarithmos additivos e os complementos dos logarithmos subtractivos, e da somma subtrahem-se tantas dezenas quantos complementos se tomarem.*

REGRA DE JUROS COMPOSTOS

277. *A regra de juros compostos tem por fim determinar o rendimento produzido por uma quantia no fim de um certo tempo, quando o juro vencido por essa quantia na unidade de tempo, é accumulado ao capital para com elle render um novo juro.*

Representando por c o capital primitivo, por i a taxa de juros e por t o tempo, trata-se de achar a somma do capital e juros accumulados, isto é, de conhecer no fim de t annos qual a somma do capital e juros de juros.

A quantia *c* no fim do segundo anno rende $\frac{ci}{100}$; reunindo esse rendimento ao capital primitivo, fica elle transformado em

$$(1)\quad c+\frac{ci}{100}=c\left(1+\frac{i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)=c'$$

representando por *c'* a somma do capital e juros accumulados no fim do primeiro anno.

A quantia *c'* no fim do segundo anno rende $\frac{c'i}{100}$; reunindo esse rendimento ao capital *c'*, fica elle transformado em

$$(2)\quad c'+\frac{c'i}{100}=c'\left(1+\frac{i}{100}\right)=c'\left(\frac{100+i}{100}\right)=c''$$

chamando *c''* a somma do capital e juros accumulados no fim do segundo anno.

A quantia *c''* no fim do terceiro anno rende $\frac{c''i}{100}$; reunindo esse rendimento ao capital *c''*, fica elle transformado em

$$(3)\quad c''+\frac{c''i}{100}=c''\left(1+\frac{i}{100}\right)=c''\left(\frac{100+i}{100}\right)$$

e assim por diante.

Substituindo nas igualdades (2 e 3) em logar de *c'* e *c''* os seus valores, temos

$$c+\frac{ci}{100}=c\left(1+\frac{i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)$$

$$c'+\frac{c'i}{100}=c'\left(1+\frac{i}{100}\right)=c'\left(\frac{100+i}{100}\right)=$$

$$=c\left(\frac{100+i}{100}\right)\left(\frac{100+i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^2$$

$$c''+\frac{c''i}{100}=c''\left(1+\frac{i}{100}\right)=c''\left(\frac{100+i}{100}\right)=$$

$$=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^2\left(\frac{100+i}{100}\right)=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^3$$

Se no fim do primeiro anno a somma do capital e juros accumulados é $c\left(\frac{100+i}{100}\right)$; se no fim do segundo anno a somma do capital e

juros accumulados é $c\left(\frac{100+i}{100}\right)^2$; se no fim do terceiro anno a somma do capital e juros accumulados é $c\left(\frac{100+i}{100}\right)^3$; no fim de *t* annos a somma do capital e juros accumulados será, chamando C essa somma,

$$C=c\left(\frac{100+i}{100}\right)^t$$

Applicando os logarithmos á fórmula achada, para tornal-a de facil applicação, acha-se

$$lg.\ C=lg.\ c+lg.\left(\frac{100+i}{100}\right)^t$$

ou

$$lg.\ C=lg.\ c+t.\ lg.\frac{100+i}{100}$$

Da ultima fórmula podemos facilmente deduzir outras tres, para calcular nas questões de juros compostos o capital primitivo, o tempo e a taxa de juros.

Essas fórmulas são :

$$lg.\ c=lg.\ C-t.\ lg.\frac{100+i}{100}$$

$$t=\frac{lg.\ C-lg.\ c}{lg.\frac{100+i}{100}}$$

$$lg.\frac{100+i}{100}=\frac{lg.\ C-lg.\ c}{t}$$

As quatro fórmulas achadas resolvem as quatro questões seguintes:

1ª *Determinar a somma do capital e juros accumulados, conhecendo o capital primitivo, a taxa e o tempo.*

2ª *Determinar o capital primitivo, conhecendo a somma do capital e juros accumulados, a taxa e o tempo.*

3ª *Determinar o tempo, conhecendo a somma do capital e juros accumulados, o capital primitivo e a taxa.*

4ª *Determinar a taxa, conhecendo a somma do capital e juros accumulados, o capital primitivo e o tempo.*

As applicações d'estas fórmulas não offerecem difficuldade alguma, conhecendo-se o *uso das taboas de logarithmos*, e para exemplo consideremos a seguinte questão :

Determinar a taxa a que se deve empregar a juros compostos o capital 600$000 para produzir 1:512$150 no fim de 21 annos.

Substituindo na fórmula $\lg.\frac{100+i}{100}=\frac{\lg.C-\lg.c}{t}$, em logar de C, de c e de t os seus valores, acha-se

$$\lg.\frac{100+i}{100}=\frac{\lg.1512150-\lg.600000}{21}$$

procurando os logarithmos dos numeros 1512150 e 600000 temos

$$\lg.\frac{100+i}{100}=\frac{6{,}1795948-5{,}7781513}{21}$$

effectuando a subtracção indicada no numerador, vem

$$\lg.\frac{100+i}{100}=\frac{0{,}4014435}{21}$$

effectuando a divisão indicada no segundo membro, acha-se

$$\lg.\frac{100+i}{100}=0{,}0191163$$

procurando o numero correspondente ao logarithmo 0,0191163, resulta

$$\frac{100+i}{100}=1{,}0450$$

ou

$$100+i=104{,}50$$

ou

$$i=104{,}50-100$$

ou, finalmente

$$i=4{,}5$$

A taxa é portanto 4,5.

CAPITALISAÇÃO

279. *Toda a questão de capitalisação tem por fim formar um capital qualquer, por meio de prestações iguaes, feitas annualmente, accumulando-se a essas annuidades os seus juros compostos correspondentes.*

Sejam c a prestação annual, i a taxa de juros e t o numero de annos.

A quantia c posta a render juros compostos no principio do primeiro anno, produzirá no fim de t annos :

$$c\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$$

No principio do segundo anno é posta a render juros compostos a quantia c durante $t-1$ annos, transformando-se no fim d'esse tempo em

$$c\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-1}$$

No principio do terceiro anno é posta a render juros compostos a quantia c durante $t-2$ annos, produzindo no fim d'esse tempo

$$c\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-2}$$

e assim successivamente, dando a quantia c, posta a render juros no principio do ultimo anno, o capital accumulado.

$$c\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

Sommando os resultados obtidos, teremos o capital accumulado no fim de t annos. Chamando A esse capital, acha-se

$$A=c\left(1+\frac{i}{100}\right)^t+c\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-1}+c\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-2}+\ldots\ldots+$$
$$+c\left(1+\frac{i}{100}\right)^2+c\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

Escrevendo os termos do segundo membro em ordem inversa e pondo o factor commum $c\left(1+\frac{i}{100}\right)$ em evidencia, temos

$$A=c\left(1+\frac{i}{100}\right)\left[1+1+\frac{i}{100}+\left(1+\frac{i}{100}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-1}\right]$$

Ora, contendo o segundo parenthesis a somma dos termos de uma progressão por quociente crescente cuja razão é $1+\frac{i}{100}$, e sendo a somma dos termos de uma progressão por quociente crescente igual ao quociente da divisão do excesso do producto do ultimo termo pela razão sobre o primeiro termo e o excesso da razão sobre a unidade, teremos

$$A=c\left(1+\frac{i}{100}\right)\times\frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^t-1}{\frac{i}{100}}=$$

$$=\frac{c\left(1+\frac{i}{100}\right)\left[\left(1+\frac{i}{100}\right)^t-1\right]}{\frac{i}{100}} \qquad (1)$$

Fazendo $\frac{i}{100}=r$, temos

$$A=\frac{c\left(1+r\right)\left[\left(1+r\right)^t-1\right]}{r}$$

Suppondo $(1+r)^t=m$, acha-se

$$A=\frac{c\,(1+r)\,(m-1)}{r}$$

Applicando os logarithmos, resulta

$$lg.\ A=lg.\ c+lg.\ (1+r)+lg.\ (m-1)-lg.\ r \qquad (2)$$

Da ultima fórmula deduz-se

$$lg.\ c=lg.\ A-lg.\ (1+r)-lg.\ (m-1)+lg.\ r \qquad (3)$$

A fórmula 1, contendo as quatro quantidades A, c, i e t, e podendo-se sempre determinar o valor de uma d'essas quantidades, sendo conhecidas as outras tres, resolve as quatro questões seguintes:

1ª Determinar o valor de A, conhecendo-se c, i e t.
2ª Determinar o valor de c, conhecendo-se A, i e t.
3ª Determinar o valor de t, conhecendo-se A, c e i.
4ª Determinar o valor de i, conhecendo-se A, c e t.

D'essas quatro questões as mais importantes são as tres primeiras, devendo-se considerar a segunda como principal.

As fórmulas 2 e 3 resolvem as duas primeiras questões.

REGRA DE ANNUIDADES

280. *Esta regra tem por fim amortizar, no fim de um certo numero de annos, uma divida que vence juros compostos, por meio de prestações iguaes, feitas annualmente.*

Representando por D a divida a amortizar, por i a taxa de juros, por t o numero de annos e por a a annuidade, no fim do primeiro anno a divida será:

$$D+\frac{Di}{100}=D\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

transformando-se depois de paga a primeira annuidade em

$$D'=D\left(1+\frac{i}{100}\right)-a$$

chamando D' a divida, depois de paga a primeira annuidade.

A divida D' no fim do segundo anno transforma-se em

$$D'+\frac{D'i}{100}=D'\left(1+\frac{i}{100}\right)$$

e, depois de feita a annuidade correspondente ao segundo anno, será

$$D''=D'\left(1+\frac{i}{100}\right)-a$$

chamando D'' a divida, depois de paga a segunda annuidade.

Substituindo na ultima igualdade em logar de D' o seu valor, temos

$$D'' = \left[D\left(1+\frac{i}{100}\right) - a \right]\left(1+\frac{i}{100}\right) - a$$

ou

$$D'' = D\left(1+\frac{i}{100}\right)^2 - a\left(1+\frac{i}{100}\right) - a$$

Por um raciocinio semelhante se conhecerá ser o valor da divida, depois de paga a terceira annuidade :

$$D\left(1+\frac{i}{100}\right)^3 - a\left(1+\frac{i}{100}\right)^2 - a\left(1+\frac{i}{100}\right) - a$$

No fim de t annos, depois de paga a ultima annuidade, a divida será

$$D\left(1+\frac{i}{100}\right)^t - a\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-1} -$$

$$- a\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-2} - \ldots\ldots - a\left(1+\frac{i}{100}\right) - a = 0$$

e como depois de paga a ultima annuidade a divida deve extinguir-se, teremos

$$D\left(1+\frac{i}{100}\right)^t - a\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-1} -$$

$$- a\left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-2} - \ldots\ldots - a\left(1+\frac{i}{100}\right) - a = 0$$

ou ainda

$$D\left(1+\frac{i}{100}\right)^t -$$

$$- a\left[1 + 1 + \frac{i}{100} + \left(1+\frac{i}{100}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{i}{100}\right)^{t-1}\right] = 0$$

Contendo, porém, o segundo parenthesis a somma dos termos de uma progressão por quociente crescente, temos

$$D\left[1+\frac{i}{100}\right]^t - a \times \frac{\left(1+\frac{i}{100}\right)^t - 1}{\frac{i}{100}} = 0$$

D'esta igualdade facilmente se deduz

$$a = \frac{\frac{Di}{100}\left(1+\frac{i}{100}\right)^t}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^t - 1}$$

Suppondo $\frac{i}{100} = r$, acha-se

$$a = \frac{Dr.\ (1+r)^t}{(1+r)^t - 1}.$$

Applicando os logarithmos, resulta

$$lg.\ a = lg.\ D + lg.\ r + t.\ lg.\ (1+r) - lg.\ (1+r)^t - 1.$$

FIM

EXERCICIOS E PROBLEMAS

sobre as diversas theorias expostas nesta arithmetica

Numeração

1.— Dizer a ordem e a classe de cada um dos algarismos dos seguintes numeros :

1º) 4325   *2º*) 256798   *3º*) 408343721325.

R.— 1º)......................									4	3	2	5
2º)......................							2	5	6	7	9	8
3º)......................	4	0	8	3	4	3	7	2	1	3	2	5
	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
	4ª classe			3ª classe			2ª classe			1ª classe		

2.— Qual é o valor absoluto, qual é o valor relativo de cada um dos algarismos do numero 67202 ?

	Valor absoluto —	Valor relativo
R.—Algarismo 6....................	6...	6 dezenas de milhar
» 7...................	7...	7 unidades de milhar
» 2...................	2...	2 centenas
» 0...................	0...	0 dezenas
» 2...................	2...	2 unidades

3.— De quantos algarismos se compõe cada classe de um numero qualquer ?—Qual é a excepção?

R.— De tres algarismos, significativos ou não. A excepção é a ultima classe á esquerda do numero, que póde conter dous ou mesmo um só algarismo.

4.— Como se escreve um numero de 9 algarismos, em que faltam a primeira ordem da terceira classe, a terceira e a primeira da segunda classe, e a segunda da primeira classe?

R.— Preenchendo com zeros as ordens que faltam.

5.— De quantas classes se compõem os numeros comprehendidos entre 325 e 65453823300?

R.—De uma, duas, tres ou quatro classes.

6.— Qual é a ordem, qual é a classe das unidades mais elevádas de um numero composto de treze algarismos?

R.— A classe é a de trilhões e a ordem a de unidades.

7.— Que mudança se opera no numero 3253 quando se intercala um zero entre os algarismos 5 e 2?

R.— A parte á direita do zero intercalado não muda; a parte á esquerda fica valendo dez vezes mais.

8.— Qual é o algarismo commum a todos os systemas de numeração?

R.— É o zero.

9.— Quaes são os algarismos usados no systema de base 6; no de base 7; no de base 8; em geral, no de base *n*?

R.— No systema de base 6: 0, 1, 2, 3, 4, 5
» » » » 7: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
» » » » 8: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
» » » » n: 0, 1, 2, 3......... n — 1

10.— Escrever no systema binario o numero 7, dado no systema decimal.—O mesmo para o numero 9.

R.— $7_{10} = 111_2$; — $9_{10} = 1001_2$.

11.— Passar para o systema de base 7 o numero 256, escripto no systema decimal.

R.— $256_{10} = 514_7$

12.— Passar para o systema decimal o numero 3525, escripto no systema de base 6.

R.— $3525_6 = 845_{10}$

13.—Passar o numero 432, escripto no systema de base 7, para o systema de base 2.

R.—$432_7 = 219_{10}$.

Addição e subtracção

1.—Effectuar as seguintes addições e tirar a prova:

*1.*ª)	3425+4732+831+2003.	R.—*1.*ª)	10991. 1010.
*2.*ª)	4057+309+8792.	R.—*2.*ª)	13158. 1110.
*3.*ª)	25783+403274+327	R.—*3.*ª)	429384. 001110.

2.—Uma locomotiva pesa 28000 kilos e o seu tender 9500, carrega 8000 kilos d'agua e 1700 de carvão, comboia 3 vagões pesando respectivamente 7500 kilos, 9200 e 6800. Qual é o peso que supporta uma ponte na passagem d'esse trem?

R.—70700 kilos.

3.—Uma pessoa despende annualmente 2:400$000 em alimentação, 850$000 em vestuario, 3:200$000 em aluguel de casa, 5:060$000 em outras despezas, restando-lhe 5:395$500. Quanto por anno ganha essa pessoa?

R.—16:905$500.

4.—Effectuar as seguintes subtracções e tirar a prova:

*1.*ª)	103427—89435.	R.—13992.
*2.*ª)	100001—34927.	R.—65074.
*3.*ª)	47297600—3040075.	R.—44257525.

5.—Um negociante vende por 653$720 suas mercadorias e lucra 125$380. Por quanto as comprára?

R.—528$340.

6.—O para-raio foi descoberto ha 150 annos; em 1827 quantos annos contava essa descoberta?

R.—74 annos.

7.—Tres pessoas nasceram respectivamente em 1832, 1837 e em 1843. Achar a idade de cada uma em 1903 e a differença de suas idades.

R:—1ª pessoa, 77 annos.
2ª » 66 »
3ª » 60 »

8.—Qual é a differença entre a somma de 2583 com 4905 e a differença entre 9421 e 2892 ?

R.—959.

9.—Dois jogadores possuiam: o primeiro 3:958$000 e o segundo 1:563$000; o primeiro perdeu 1:365$000 e o segundo ganhou 1:165$000. Qual dos dois ficou com mais dinheiro e com quanto mais ?

R.—O segundo ficou com mais 135$000.

10.—Em um armazem de viveres ha 425 kilos de farinha, 387 de assucar, 273 de batatas, 127 de café, 380 de arroz; no primeiro dia venderam-se 122 kilos de farinha, 290 de assucar, 150 de batatas, 36 de café e 157 de arroz; no segundo dia venderam-se de cada uma d'essas mercadorias respectivamente 150, 90, 111, 54 e 132 kilos; no terceiro dia 127, 7, 8, 37 e 90. Quanto restava no armazem depois d'essas vendas ?

R.—26 kilos de farinha, 0 de assucar, 4 de batatas, 0 de café, 1 de arroz.

Multiplicação

1.—Achar um numero 53 vezes maior do que 3243; e outro 100 vezes maior.

R.—3243×53. — 324300.

2.—Effectuar o mais abreviadamente possivel os seguintes productos indicados:

1º) 200302×4002; *2º)* 45000×200; *3º)* 64403×303.
R.—801608604 9000000 19514109

3.—Para fabricar-se uma tonelada de polvora precisa-se de 250 libras de carvão; quantas libras serão necessarias para fabricar 435 toneladas ?

R.—108750.

4.—Um paiz tem uma população de 550 habitantes por kilometro quadrado e uma superficie total de 15.000.000 de kilometros quadrados; qual é a sua população total?

R.—8250000000.

5.—Uma folha de papel foi cortada em 4 tiras; quantas tiras se póde obter com 6 e meia folhas?

R.—26 tiras.

6.—Quantas columnas contém um numero do *Jornal do Commercio* de 16 paginas, em que cada pagina conta 9 columnas ?

R. 144 columnas.

7.—Um pobre possuia 500 réis e recebeu uma esmola de 300 réis, e depois outra de 5 vezes o que então possuia; qual o valor da ultima esmola?

R.—4$000.

8.—Qual será a despesa e quantos dormentes são necessarios para assentar 1000 metros de via ferrea, empregando 2 dormentes por metro corrente e custando 2$500 cada um ?

R.—Despesa: 5:000$000. — Numero de dormentes: 2000.

9.—Em um pomar ha 250 laranjeiras, que dão em média 30 laranjas cada uma. Achar o numero total de laranjas produzidas e a importancia que darão, se forem vendidas a 25 réis cada uma.

R.—7500 laranjas. Importancia: 187$500.

10.—Um cesto com 30 duzias de ovos foi vendido a 400 rs. a duzia, pagando-se pelo total 13$500. Qual foi o erro commettido ?

R.—1$500.

11.—Comprei papel á razão de 500 rs. o caderno; da primeira vez comprei 133 cadernos e da segunda 297. Gastei mais na primeira ou na segunda compra, e quanto ?

R.—Gastei da segunda vez mais 82$000.

12.—Um fazendeiro comprou 45 alqueires de terra a 375$000 o alqueire, e os vendeu por 15:000$000. Perdeu ou ganhou nesse negocio, e quanto ?

R.—Perdeu 1:875$000.

13.—Que trajecto percorreu uma locomotiva, cuja roda motriz deu 3002 voltas, sabendo-se que a circumferencia da roda é de 2^m ?

R.—6004 metros.

14.—Um navio tem uma marcha de 236 milhas em 24 horas ; em 13 dias quantas milhas mais anda elle que em 7 dias ?

R.—Anda mais 1416 milhas.

15.—Que quantidade d'agua entra durante 24 horas em um reservatorio alimentado por tres canaes que fornecem respectivamente 20 litros, 15 litros e 10 litros por minuto, sabendo-se que ao mesmo tempo elle perde 16 litros por minuto ?

R.—41760 litros.

16.—A somma de 3 numeros é 800, o menor d'elles é 125 e o maior 435. Achar o producto dos tres.

R.—13050000.

17.—Em uma empreitada trabalham 35 operarios, dos quaes 5 ganham por dia 9$000, 15 ganham por dia 6$500, 8 ganham 5$000 e 7, 3$500. Qual é a despesa total d'estes salarios durante 15 dias ?

R.—3:105$000.

18.—150 operarios trabalham em uma obra durante 3 mezes, ganhando salarios differentes, a saber, 25 carpinteiros a 8$500 por dia, 25 canteiros a 10$000, 50 pedreiros a 8$200, 30 trabalhadores de enxada a 4$000 e 20 serventes a 3$000. Qual é o custo total da mão de obra ?

R.—94:725$000.

19.—Uma pessoa compra 15 kilos de carne a 700 réis e paga 15$000 que devia ao vendedor. Dá-lhe uma nota de 50$000; quanto deve receber de troco ?

R.—24$500.

Divisão

1.— Que alteração soffre o quociente da divisão de **525** por 25 nos seguintes casos :

1º— Quando se multiplica 525 por 5

R.— Fica 5 vezes maior.

2º— Quando se divide 525 por 5

R.— Fica 5 vezes menor.

3º— Quando se multiplica 25 por 5

R.— Fica 5 vezes menor.

4º— Quando se divide 25 por 5

R.— Fica 5 vezes maior.

5º— Quando se multiplicam 25 e 525 por 5

R.— Não se altera.

6º— Quando se dividem 25 e 525 por 5

R.— Não se altera.

7º— Quando se multiplica 525 por 5 e se divide 25 por 5

R.— Fica 25 vezes maior.

8º— Quando se divide 525 por 5 e se multiplica 25 por 5

R.— Fica 25 vezes menor.

2.— Effectuar as seguintes divisões :

1ª) 1050000 ÷ 250   2ª) 46800005 ÷ 1907

R.— *1ª*) 4200   R.— *2ª*) $24541 \frac{318}{1907}$

3.— Comprou-se lenha á razão de 16$000 o stereo e pagou-se 64$000 ; quantos stereos se compraram ?

R.— 4.

4.— Quantos toros de madeira se póde tirar de um tronco de 18^m, devendo cada toro medir 6 metros ?

R.— 3.

5.— Estando o kilo de carne a 900 réis, quantos kilos se póde comprar com 36$000 ?

R.— 40.

6.— Um viajante caminha 24^{km} em 6 horas ; que tempo gastará para caminhar 32^{km} ?

R.— 8.

7.— Um livro contém 95.337 palavras, sendo em média 297 palavras por pagina. Quantas paginas tem o livro ?

R.— 321.

8.— O som percorre 28.220 metros em 83 segundos ; quantos metros percorre em 1 segundo ?

R.— 340.

9.— A distancia da terra ao sol é de 147.500.000 kilometros, e a luz gasta 1 segundo para percorrer 300.300 kilometros. Quanto tempo leva a luz para chegar á terra?

R.— 491 segundos = 8 minutos e 11 segundos.

10.— A roda motriz de uma locomotiva mede 5^m de circumferencia e as rodas pequenas 2^m; quantas voltas dá cada uma em um trajecto de 5620^m?

R.— 1124 ; 2810.

11.— Um vendedor de jornaes ganha um vintem em cada exemplar que vende a 100 réis e arrecada uma importancia de 10$000; quantos exemplares vendeu e quanto ganhou?

R.— 100 ; 2$000.

12.— Quantas horas ha em 1440 minutos?

R.— 24.

13.— Uma torneira fornece 33 litros d'agua em 3 minutos a um tanque, cuja capacidade é de 2563 litros. Em quanto tempo ella encherá o tanque?

R.— 3 horas e 53 minutos.

14.— Em uma linha ferrea ha dois comboios trafegando na mesma direcção, distantes 20^{km} um do outro; o comboio de traz caminha 40^{km} por hora e o da frente 30^{km}. No fim de quanto tempo se encontrarão?

R.— 2 horas.

15.— Um proprietario vendeu 2 casas, uma por 23:329$000 e outra por 8:975$000. Com o lucro d'esse negocio comprou dois sitios, um por 3:798$000 e o outro por 6:970$000. Quanto despendeu em tudo e quanto ganhou em relação á despesa?

R.— 10:768$000; ganhou tres vezes mais.

16.— Que é que vale mais, 456^{ks} de algodão a 4$000 o kilo ou 260 metros de sêda a 10$000 o metro?

R.— A seda vale mais 776$000.

17.— Um fazendeiro comprou 2 fazendas, uma de 117 alqueires a 340$000 o alqueire, outra de 207 alqueires a 170$000 o alqueire; deu em pagamento 5 cavallos do valor de 216$000 cada um e 17 rezes de 32$000 cada uma, o restante pagou em dinheiro; quanto dinheiro deu?

R.— 73:346$000.

18.— 9 toneladas de carvão custam o mesmo que 12 toneladas de aço a 30$000 a tonelada. Com 600$000, quantas toneladas de carvão se poderá comprar?

R.— 15.

19.— Dois negociantes fizeram uma sociedade com o capital de 29:280$000, dos quaes 21:960$000 por parte do primeiro. Quantas vezes maior é a sua entrada, comparada com a do segundo?

R.— 3.

20.— Quantos operarios são necessarios para fazer uma obra em 84 dias, sabendo-se que 49 operarios poderiam fazel-a em 96?

R.— 56.

Divisibilidade

1.— Decompôr em dois factores primos as seguintes potencias de 10 : 100000, 10 000 000, 10 000 000 000.

R.—

$$100000 = 10^5 = 2^5 \times 5^5$$
$$10000000 = 10^7 = 2^7 \times 5^7$$
$$10000000000 = 10^{10} = 2^{10} \times 5^{10}$$

2.— Determinar o resto da divisão de 54327 successivamente por 10, por 100, por 1000 e por 10000.

R.—

Por	10........	7
»	100........	27
»	1000........	327
»	10000........	4327

3.— Quaes são os restos da divisão de 429327 por 2, por 5, por 4, por 25, por 8, por 125?

R. — Por 2.... 1.— Por 5.... 2.— Por 4.... 3.
— Por 25.... 2.— Por 8.... 7.— Por 125.... 77.

4.— Qual é o resto da divisão de 3025472 por 11?

R.— 10.

5.— Applicar aos seguintes numeros os differentes caracteres de divisibilidade.

1º)	83 644	R.— É divisivel por			2, 4, 11
2º)	749 250	»	»	»	2, 3, 5, 9, 25
3º)	85 481	»	»	»	11
4º)	107 811 000	»	»	»	2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 25, 125
5º)	421 574 607	»	»	»	3, 9
6º)	2 958 012 249	»	»	»	3
7º)	3 601 539	»	»	»	3, 9
8º)	25 501 301	Não tem divisor.			

Maior divisor commum

1.— Achar pelo processo da divisão o maior divisor commum aos numeros:

1°) 374 e 2295   *2°)* 1086 e 905   *3°)* 6870 e 8473

R.—1°)..17;   2°)..... 181;   3°)....... 229.

2.— Achar pelo mesmo processo o maior divisor commum entre os numeros:

1°) 837, 1134 e 1347   *2°)* 805, 1311 e 1978.

R.— 1°).............3   2°)............... 23

3.— Um serrador precisa cortar duas arvores em taboas de igual comprimento, e, para aproveitar toda a madeira, quer dar-lhes o maior comprimento possivel; as arvores medem respectivamente 288 palmos e 420 palmos. Que comprimento deve dar ás taboas?

R.— 12 palmos.

4.— Um negociante quer acondicionar no menor numero possivel de pacotes, todos iguaes, duas partidas de café, uma de 210 kilos, outra de 216. Quantos kilos de café deverá conter cada pacote? Quantos pacotes terá obtido?

R.— Cada pacote contém 6 kilos.— A primeira partida contém 35 pacotes e a segunda, 36.

5.— Em uma encadernação ha dous massos de folhas de papel em branco, do mesmo formato e qualidade, um de 748 folhas e outro de 4590, com os quaes se quer fazer cadernos do maior numero possivel de folhas e todos do mesmo numero de folhas, de modo a não sobrar papel algum. Quantos cadernos poder-se-á obter e qual o numero de folhas de cada caderno?

R.—157 cadernos iguaes, de 34 folhas cada um.

6.—Tem-se de construir duas linhas telegraphicas, a primeira com 16030^m de extensão e a segunda com 68700^m; devem-se collocar os postes todos a igual distancia um dos outros e empregar o menor numero possivel de postes. Que afastamento se deve dar aos postes nas duas linhas? Qual o numero de postes a empregar na primeira linha e qual o da segunda?

R.—Afastamento, 229^m.

Postes da primeira linha 70.

» » segunda » 300.

Numeros primos

1.—Reconhecer entre os seguintes numeros aquelles que são primos: 1694; 2203; 3833; 4393.

R.—2203 e 3833 são primos.—1694 e 4393 não são.

2.—Achar todos os numeros primos comprehendidos entre 127 e 199; entre 1811 e 1847.

R.—Entre 127 e 199 são primos os numeros: 127, 131 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

Entre 1811 e 1847 são primos os numeros: 1811, 1823, 1831

3.—Decompôr em seus factores primos os seguintes numeros: 1617; 3150; 2002; 1635.

R.—$1617 = 3 \times 7^2 \times 11$;

$3150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$;

$2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$;

$1635 = 3 \times 5 \times 109$.

4.—Achar todos os divisores dos seguintes numeros: 42; 39; 324; 539.

R.—Os divisores de 42 são: 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

Os de 39 são: 3, 13, 39.

Os de 324 são: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 324.

Os de 539 são: 7, 11, 49, 77, 539.

5.—Um official commandando 50 praças deseja dispol-as em fileiras iguaes; de quantas maneiras poderá fazel-o, quantas fileiras obterá em cada disposição e quantos soldados ha em cada uma das disposições obtidas?

R.—1ª.— 2 fileiras de 25 soldados.

2ª.— 5 » » 10 »

3ª.—10 » » 5 »

4ª.—25 » » 2 »

5ª.—50 » » 1 »

6.—Compôr o menor multiplo commum aos numeros 24 e 36; 54 e 216; 135 e 410.

R.—72; 216; 11070.

7.—Compôr o menor multiplo commum aos numeros 13, 24 e 36; 16, 42, 56 e 70.

R.—936 ; 1680.

8.—Qual é a menor quantia que se póde trocar em notas de $500, de 2$000 e de 5$000 ?

R.—10$000.

9.—Qual é a menor quantia que se póde trocar em moedas de nickel ou de cobre e quantas moedas se póde obter de $400, de $200, de $100, de $40 e de $20 ?

R.—$800.—Póde-se trocar por 2 moedas de $400, ou por 4 de $200, ou por 8 de $100, ou por 20 de $40, ou por 40 de $20.

10.—Um fabricante de vinhos tem de apromptar duas partidas iguaes para exportação, a primeira composta de pipas da capacidade de 250 litros, a segunda de pipas de 325 litros cada uma ; precisa saber quantos litros de vinho deve fabricar para esse fim e quantas pipas terá cada partida.

R. — 6500 litros. A partida de 325 lit. dará 10 pipas ; a de 250 lit. dará 13 pipas.

11.—De que somma minima deve dispôr um capitalista para comprar ou acções de uma companhia a 200$000 ou apolices a 790$000 cada uma.

R.— 15:800$000.

12.—Compôr o maior divisor commum aos seguintes numeros :

1°)	27, 36, 54	R.— 18
2°)	88, 154, 252	2
3°)	72, 288, 360	72

Fracções ordinarias

1.—Dividindo uma folha de papel em tiras iguaes, de que depende a grandeza de cada tira ?

R. — Do numero de partes em que se divide a folha.

2.—Trocando uma nota de 5$000 em nickeis de 100 reis, de que depende a importancia das esmolas que dér ?

R. — Do numero de nickeis que dér em cada esmola.

3.—Um herdeiro possue $\frac{4}{5}$ de uma fazenda, e outro $\frac{7}{9}$; qual dos dois tem mais ?

R. — O primeiro.

4.—Gastam-se 12 horas para se ir do Rio a S. Paulo em estrada de ferro ; — que parte do trajecto se faz em 1 hora, em 5 horas, em 7 horas ?

R. — $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{12}$ do trajecto.

5.—Com 3 copos d'agua encho a quinta parte de uma talha ; quantos copos d'agua conterá a talha cheia ?

R. — 15 copos.

6.—Quantos dias conta a sexta parte do mez ?

R. — 5 dias.

7.—Que fracção do anno é um mez e meio ?

R. — $\frac{1}{8}$

8.—Reduzir 9 á expressão de quintos.

R. — $\frac{45}{5}$

Reduzir 11 á expressão de quinze avos.

R. — $\frac{165}{15}$

Reduzir 27 á expressão de terços.

R. — $\frac{81}{3}$

9.—Uma barrica de assucar pesa 180 kilos ; quanto pesarão : 1º.—meia barrica ; 2º.—tres meios ; 3º.—quatro quintos?

R. — 90 kilos ; 270 k. ; 144 kilos.

10. Uma padaria gasta $\frac{2}{3}$ de uma tonelada de carvão por dia ; quanto gasta trabalhando $\frac{5}{7}$ do dia ?

R. — $\frac{10}{21}$

11.—Sete pedreiros edificam $\frac{7}{9}$ de uma parede em um dia ; quanto faz um só pedreiro em 3 dias ?

R. — $\frac{1}{3}$

12.—Caminhando 6 kilometros por hora, quanto se anda em 8 vezes menos tempo?

R. $\frac{6}{8}$ de 6 kilometros ou 750 metros.

13.—Que fracção do litro é um calice de vinho, sabendo-se que 12 calices valem $\frac{3}{5}$ do litro?

R. $\frac{1}{20}$ do litro ou 50 grammas.

14.—Para ladrilhar os $\frac{5}{6}$ de um pateo empregaram-se 125 ladrilhos; quantos ladrilhos são necessarios para toda a superficie?

R.—150 ladrilhos.

15.—Deu-se a uma criança a quinta parte de um bolo, e a outra a vigesima; qual das duas ganhou mais e quanto mais?

R.—A primeira ganhou 4 vezes mais.

16.—Um fazendeiro vendeu uma fazenda de 1500 alqueires de terra, que era $\frac{2}{5}$ de todas as suas terras; quantos alqueires de terra possuia antes da venda?

R.—3750.

17.—Um negociante ganhou 235$000 com a venda de $\frac{5}{7}$ de sua mercadoria; quanto ganhará vendendo todo o resto d'ellas?

R.—94$000.

18.—Que preço deverei pagar por $6\frac{1}{2}$ resmas de papel do qual comprei e paguei anteriormente $3\frac{1}{4}$ resmas por 42$000?

R.—84$000.

19.—Uma pessoa recebeu 75$000, e gastou $2\frac{1}{3}$ d'essa importancia; com quanto ficou?

R.—Além dos 75$000, recebidos, gastou mais 100$000.

20.—Um dado de madeira pesa $3\frac{1}{8}$ kilos e um outro igual feito de pedra pesa 22 kilos e meio. Quantas vezes mais leve é a madeira?

R.— $7\frac{1}{5}$

21.—Um bicycletista caminha $18\frac{1}{3}$ da raia nos dez primeiros minutos, nos dez seguintes $7\frac{2}{27}$ e depois mais $4\frac{5}{9}$? Quanto andou ao todo?

R.—$29\frac{26}{27}$ da raia.

22.—Uma pessoa despende em uma compra $\frac{1}{7}$ da importancia que levava, gasta mais $\frac{1}{3}$ em pagamentos e $\frac{1}{9}$ em despesas diversas; que parte lhe resta do que tinha antes?

R. $\frac{26}{63}$

23.—Tem-se de dividir uma certa somma entre tres pobres, devendo o primeiro ganhar $\frac{1}{5}$ do total, o segundo $\frac{1}{3}$ do total e o terceiro o restante. Com que parte ficou este?—Com quanto mais que o primeiro ficou o segundo? — Quanto mais do que o segundo ganhou o terceiro?—Sendo 30$000 o total a distribuir, quanto recebeu cada um?

R. $\frac{7}{15}$ do total. $1\frac{2}{5}$ mais do que o primeiro. $1\frac{6}{15}$ mais do que o segundo. O primeiro ganhou 6$000; o segundo, 10$000; o terceiro, 14$000.

24.—Quantas garrafas de vinagre posso encher com 13 litros e meio, sabendo que cada garrafa póde conter 1 litro e um oitavo?

R. — 12 garrafas.

25.—Com quantos homens se póde fazer um serviço que 15 crianças fazem, suppondo que 3 crianças fazem o trabalho de 2 homens?

R. — 10 homens.

26.—Em duas escolas ha 465 estudantes ao todo; o numero de alumnos de uma é uma vez e meia o numero de alumnos da outra; quantos alumnos ha em cada escola?

R. — 186 e 279.

27.—Uma pessoa pergunta a outra em que dia do mez está; esta responde-lhe: do dia primeiro até hoje decorreu a quinta parte do que falta para chegarmos ao dia 30. Qual era a data?

R. — Dia 5.

28.—Comprei $\frac{5}{6}$ de um stereo de lenha á razão de 12$000 o stereo; tendo queimado $\frac{2}{3}$, quanto vale em dinheiro o que ainda me resta?

R. — 2$000.

29.—Quantos rôlos de barbante se póde obter com 120 metros, devendo cada rôlo medir $\frac{3}{8}$ de 10 metros; quantos metros ha em cada rôlo?

R. — $8\frac{8}{15}$ de 10 metros.

30.—O numero 6 é os $\frac{3}{5}$ de que numero?

R. — 10.

Fracções decimaes

1.—Em uma praça de guerra consome-se por diversas vezes 0,43 das munições em deposito, depois mais 0,05, em seguida 0,325, finalmente 0,095. Quanto resta então?

R. — 0,1.

2.—Effectuar as seguintes operações:

1ª)	$3,05 \times 0,037$	R. —	0,11285
2ª)	$0,0005 \times 325,04$		0,162520
3ª)	$5000 \times 0,0073$		36,5000
4ª)	$640 \div 1,6$		400.
5ª)	$723,6 \div 1440$		0,5025
6ª)	$125,37 \div 15,23$		8,2317

3.—Effectuar as seguintes divisões com approximação de millesimos:

1ª)	$14914,2790 \div 3267743,1$	R. —	0,004
2ª)	$88216,38 \div 0,02514$		3509004,773

4.—Dizer, sem effectuar a divisão, se é finito ou infinito o numero de algarismos que se obtem na parte decimal das fracções decimaes equivalentes ás seguintes fracções ordinarias:

$$\frac{7}{30} \qquad \frac{6}{8} \qquad \frac{4}{7} \qquad \frac{15}{27}$$

R. — $\frac{6}{8}$ dá uma dizima finita; as outras dão dizimas infinitas.

5.—De uma barrica de farinha de trigo tira-se 0,65 para fabricar pão; quanto sobra?

R. — 0,35.

6.—Um côpo cheio d'agua pesa 200 grammas, o mesmo copo cheio de mercurio pesa 2718 grammas; quantas vezes o mercurio pesa mais que a agua?

R.—13,59.

7.—Quer-se cercar um terreno de fórma rectangular que mede $395^m,25$ por 357^m. Quantos rôlos de arame serão necessarios, sabendo-se que cada rôlo tem $20^m,57$ e que a cêrca tem 4 ordens de fios de arame?

R. — 292,56.

8.—A distancia de Paris a Berlim é de 1308 kilometros; quantas milhas ha nessa distancia, sabendo-se que 1 kilometro é igual a 0,6214 da milha?

R. — 812,7912 kilometros.

9.—A circumferencia do equador terrestre mede 25000 milhas; 24 horas é o tempo de uma rotação da terra. Achar o numero de milhas que um habitante do equador descreve por hora, em virtude da rotação da terra.

R. — 1041,66.

10.—A circumferencia rectificada vale 3,1416 vezes o diametro; achar o comprimento de caminho percorrido por uma bicycletta, cuja roda tem de diametro 0,5 do metro, sabendo que ella deu 3000 voltas nesse percurso.

R. — $4712^m,40$.

11.—Um hoteleiro faz uma despesa mensal de 480$000 em caixas de cerveja, que compra a 9$600 cada uma, contendo cada caixa 19,2 litros; cada hospede consome em média 1,6 litros por dia. Quer saber quantos hospedes estiveram no hotel nesse mez e quanto gastou em cerveja com cada um.

R. — 20 hospedes — 24$000.

12.—Tendo-se pesos iguaes de milho e de arroz, do primeiro póde-se aproveitar 0,862 para fabricar farinha e do segundo apenas 0,625; quantos saccos de arroz são necessarios para produzir uma quantidade de farinha correspondente a 1000 litros de farinha de milho? Cada sacco contém 60 litros.

R. $\dfrac{\frac{625}{862}\times 100}{60} = 12,08$ saccos.

Dizimas periodicas

1.—Converter em fracção ordinaria irreductivel as seguintes dizimas periodicas simples e compostas :

1ª) 0,4545 R. $\frac{5}{11}$

2ª) 3,738738 R. $3\frac{82}{111}$

3ª) 5,981981 R. $5\frac{109}{111}$

4ª) 0,16565 R. $\frac{82}{495}$

5ª) 0,0123636 R. $\frac{72}{1375}$

6ª) 8,020833 R. $8\frac{1}{48}$

2.—Quaes d'estas fracções produzem dizima periodica simples $\frac{7}{30}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{15}{27}$

R.—$\frac{7}{30}$ produz dizima periodica composta; $\frac{4}{7}$ e $\frac{15}{27}$ dão dizima periodica simples ; $\frac{3}{4}$ produz dizima finita.

Systema metrico

1.—Avaliar successivamente em hectometros, decametros, decimetros, centimetros, millimetros, kilometros e myriametros um comprimento igual a 5425^m.

R. — 5425 metros=54,25 hectometros=542,5 decametros=54250 decimetros=542500 centimetros=5425000 millimetros=5,425 kilometros=0,5425 myriametros.

2.—Converter em metros 42732 millimetros ; 255 centimetros.

R. — 42732 millimetros=42,732 metros.
255 centimetros=2,55 metros.

3.—Sommar os seguintes comprimentos e exprimir o resultado em metros : 292^{mm}, 425^{cm}, 3963^{mm}, 8^{dm}, 23^{km}.

R. —230093,05

4.—Effectuar as seguintes operações :

$4230^{cm} - 22^{mm}$	R. — 4227,8 centimetros
$43 \times 0^{km},0302$	1,2986 kilometros.
$497000^{mm} \div 0,032$	15531250 millimetros.

5.—Caminhando 5^{km} por hora, quanto tempo se gasta para caminhar 25^m ?

R. — $\frac{1}{200}$ da hora.

6.—Quantos passos foram dados em um trajecto de $2^{km},820$, valendo cada passo 80 centimetros ?

R. — 282000 passos.

7.—Preciso comprar 15^m de arame a $500 o metro, mas a quantia disponivel é apenas 6$350 ; quantos metros poderei comprar com esse dinheiro e quanto me falta para comprar os 15 ?

R. — 12^m.70.—1$150.

8.— Uma fazenda custa 1$600 o metro, quanto devo pagar por 1^m,60 ?

R.— 2$560.

9.— Quanto me deve restituir um negociante, a quem comprei 25^m,80 de fita por 38$700 e que enganou-se medindo apenas 24^m,95 ?

R.— 1$275.

10.— Quantos hectometros quadrados mede um terreno de 2679^{m2} ? — Quantos decametros quadrados ? — Quantos kilometros quadrados ? — Quantos decimetros quadrados ? — Quantos centimetros quadrados ?

R.— 2679 metros quadrados =0,2679 hectometros quadrados= =26,79 decametros quadrados = 0,002679 kilometros quadrados = =267900 decimetros quadrados = 26790000 centimetros quadrados.

11.— Avaliar em hectares a superficie de um terreno rectangular de 325 metros de frente por 630 de fundo.— Quanto vale em ares ? — E em centiares ?

R.— 325×630 = 204750 metros quadrados=20,4750 hectares = 2047,50 ares = 204750 centiares.

12.— De quantas taboas se precisa para forrar um tecto de 4^m,50 por 4^m,25, sabendo-se que cada taboa mede 6^m por 0^m,25, de maneira que as taboas não sejam emendadas ?

R.— 17 taboas.

13.— Quanto custará a forração de uma parede de $35^{m},70$ por $7^{m},50$, sabendo-se que cada peça de papel de 20^{m} por $0^{m},75$ custa 1$500?

R.— 26$775.

14.— Por que preço pagou-se o metro quadrado de um terreno de 52 hectares que custou 1:300$000 ?

R.— 2,5 réis.

15.— Um pilar de alvenaria pesa 3250 kilos e assenta sobre uma base de $0^{m},50$ por $0^{m},50$. Que peso supporta cada centimetro quadrado do terreno?

R.— $1^{k},3$.

16.— Quantos metros cubicos ha em 3257 decimetros cubicos? — Quantos centimetros cubicos?

R.— 3257 decimetros cubicos = 3,257 metros cubicos = 3257000 centimetros cubicos.

17.— Quantos decimetros cubicos ha em $32^{m3},395$? — Quantos centimetros cubicos?

R.— $3^{m3},395 = 3395^{dcm3} = 3395000^{cm3}$.

18.— Quantos decimetros cubicos ha em 3250034 centimetros cubicos? — Quantos metros cubicos?

R.— $3250034^{cm3} = 3250^{dcm3},034 = 3^{m3},250034$.

19.— Qual é em metros cubicos o volume de uma lage de pedra de $3^{m},25$ de comprimento, por 23^{dm} de largura e 17^{cm} de espessura?

R.— $1^{m3},270750$.

20.— Quantos stereos de madeira se póde arrumar em um armazem de 26^{m} de comprimento por $15^{m},35$ de largura e $4^{m},50$ de altura, devendo-se deixar uma passagem de 80^{cm} de largura? — Quantos decastereos? — Quantos decistereos?

R.— $1702^{st},35$ = 170,35 decastereos = 17023,5 decistereos.

21.— Em um terreno de 30^{m} de fundo por 8^{m} de frente deve-se construir um alojamento de 1200^{m3} de capacidade; qual será a altura a dar-lhe?

R.— 5 metros.

22.— Fechou-se um terreno de 25^{m} de fundo por $5^{m},75$ de frente com um muro de tijolos de $2^{m},25$ de altura e 11^{cm} de espessura, reservando-se uma porta de $1^{m},20$ de largura por $2^{m},80$ de altura. Deseja-se saber quantos tijolos se empregaram, sabendo-se que cada metro cubico

precisa de 450 tijolos, que cada tijolo mede 22^{cm} por 11^{cm}, por 7^{cm}; e o preço do milheiro sendo 50$000, qual a despeza?

R.— 6683 approximadamente.— 334$150.

23.— Converter $425^{litros},06$ em decalitros, em hectolitros, em myrialitros, em decilitros, em centilitros e em millilitros.

R.— $425^{litros},06$ = 42,506 decalitros = 4,2506 hectolitros = = 0,042506 myrialitros = 4250,6 decilitros = 42506 centilitros = = 425060 millilitros.

24.— Converter $0^{m3},025$; $3^{m3},032$; $1^{m3},034003$ em litros e em hectolitros.

R.— $0^{m3},025$ = 25 litros = 0,25 hectolitros. $3^{m3},032$ = 3032 litros = 30,32 hectolitros. $1^{m3},034003$ = 1034,003 litros = 10,34003 hectolitros.

25.— Converter em decimetros cubicos $9^{hectol.},650$.

R.— $9^{hectol.},650$ = 965 decimetros cubicos.

26.— Quantos calices de licôr póde dar uma garrafa de $1^{l},5$, se cada calice tem a capacidade de 40^{cm3}?

R.— 37 calices e meio.

27.— Um negociante comprou 12 pipas de aguardente, de 250^{l} cada uma, pagando-as á razão de 40$000 o hectolitro; vendendo a retalho por 500 réis o litro, quanto ganhou em cada litro e quanto ganhou no total?

R.— 100 réis.— 300$000.

28.— Quantos saccos de 120 litros são necessarios para acondicionar 60 hectolitros de farinha?

R.— 50.

29.— Qual o peso de um litro e de um metro cubico de agua distillada a 4° acima de zero?

R.— 1 kilo.— 1000 kilos = 1 tonelada.

30.— Quantos grammos ha em $1^{k},350$, em $31^{k},020$, em $0^{k},0352$?

R.— $1^{k},350 = 1350^{gr.}$; $31^{k},020 = 31020^{gr.}$; $0^{k},0352 = 35^{gr},2$.

31.— Ao preço de 85$000 a tonelada, quanto custarão 650 kilos de carvão de pedra?

R.— 55$250.

32.— Qual é a capacidade de um frasco que, vasio, pesa $32^{gr},5$; e cheio d'agua pura, $1^{k},065$?

R.— 1032,5 centimetros cubicos.

33.— Um barril da capacidade de 40 litros pesa $20^{k},5$ cheio de azeite, vasio pesa $3^{k},9$; qual é o peso de um litro de azeite?

R. — 415 grammos.

34.—Quantas milhas, quantos kilometros ha em 355 leguas?

R. — 355 leguas=1065 milhas=$1972,^{km}220$.

35.—Quantas braças quadradas, quantos metros quadrados ha em 345 leguas quadradas?

R. — 345 leguas quadradas=345×9 milhas quadradas=345×9×$708543\frac{1}{16}$ braças quadradas=345×3086413,8025 metros quadrados.

36.—Quantas canadas, quantos litros ha em 105,5 alqueires?

R. — 105,5 alqueires=105,5×36,27 litros=105,5×36,27×2,662 canadas.

37.—Quantas onças, quantos grammos ha em 2 arrobas?

R. — 2 arrobas=2×14685 grammos=2×32×2×8 onças.

Complexos

1.—Converter em unidades da infima especie os seguintes numeros:

1º)	25^{br}	8^{P}	4^{p}	9^{l}	R. — 24816^{l}.
2º)	5^{lg2}	$3^{milhas2}$			48 milhas quadradas.
3º)	2^{ton}	2^{arr}	15^{lb}		3535 libras.

2.—Converter em fracção ordinaria da unidade superior:

1250 libras; 3972 linhas

R. —1250 libras=$\frac{1250}{13\frac{1}{2}\times4\times32}$ toneladas; 3972 linhas=$\frac{3972}{10\times8\times12}$ braças.

3.—Quantos dias, horas, minutos e segundos de tempo ha em 7632092 segundos?

R. — 88 dias, 8 horas, 1 minuto, 32 segundos.

4. Quantos gráos, minutos e segundos de arco ha em 3967″, e em 596″?

R. — 3967=1° 6′ 7″.—596″=9′ 56″.

5.—Avaliar em gráos, minutos e segundos a 11ª parte da circumferencia.

R. — 32° 43′ $38\frac{2''}{11}$

6.—Um relogio que se atraza 2^{m}, 20^{s} por hora, é regulado ás 6^{h} da manhã de hoje; que horas marcará amanhã ás $10\frac{1}{2}$ horas da manhã?

R. — $9^{h}\ 23^{m}\ 57^{s}$.

7.—Quantos trilhos serão necessarios para construir uma milha de linha ferrea, medindo cada trilho 7^{m} de comprimento?

R. — 529,1.

8.—Em marcha accelerada póde um soldado dar 120 passos de 30 pollegadas cada um por minuto; quantos metros terá andado ao cabo de meia hora?

R. — 120 passos × 30 pollegadas × 30 minutos × 0,0253 = =$2732,^{m}40$.

Quadrados e raizes quadradas

1.—O numero 1296 póde ser quadrado de 36? — Responder sem effectuar a potenciação nem a radiciação.

R. — Póde.

2.—Extrahir a raiz quadrada dos seguintes numeros:

3637296; 3004001; 12250000.

R. — 1907 sem erro de uma unidade.
1732 » » » »
3500 exactamente.

3.—Extrahir a raiz quadrada dos numeros 7, 5, 11, com erro de menos de 0,0001

R.—2,6457; 2,2360; 3,3166.

4.—Extrahir a raiz quadrada das seguintes fracções decimaes:

3,5264 0,325 1,60797

R.—186; 5,7; 1,268, sem erro de uma unidade.

5.—Extrahir a raiz quadrada das seguintes fracções ordinarias:

$\frac{225}{442}$; $\frac{223}{256}$; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

R. $\frac{315}{442}$; $\frac{14}{16}$; $\sqrt{3}=1,7$

6.—Extrahir a raiz quarta de 81.

R.—3.

7.—Achar dois numeros consecutivos, sabendo que a differença entre os seus quadrados é 73.

R.—37 e 36.

Cubos e raizes cubicas

1.—Extrahir a raiz cubica dos seguintes numeros:

700227072 5725732069 9015012001

R.—888 exactamente.—1789 exactamente. — 2081, sem erro de uma unidade.

2.—Calcular $\sqrt[3]{31}$, sem erro de $\frac{1}{3}$, e $\sqrt[3]{47}$, sem erro de $\frac{2}{5}$

R. $\sqrt[3]{31}=3$, sem erro de $\frac{1}{3}$.— $5\frac{3}{5}$, sem erro de $\frac{2}{5}$.

3.—Calcular $\sqrt[3]{\frac{4725}{9327}}$

R.— $\sqrt[3]{\frac{4725\times 9327^2}{9327^3}}$.

4.—Calcular $\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$, sem erro de $\frac{1}{3}$.

R.— $\frac{4}{3}$ sem erro de $\frac{1}{3}$.

Equidifferenças e proporções

1.—Formar uma equidifferença com os numeros:

12 23 47 36.

R.—23.12:47.36.

2.— Formar uma equidifferença com as seguintes sommas indicadas: 3+9=4+8, e verificar todas as propriedades das equidifferenças.

R.—9.8:4.3.—11.8:6.3.—11.10:4.3 etc.

3.—Formar uma equidifferença continua com os numeros 5 e 11.

R.—x=8 ; 11.8:8.5.

4.—Formar uma proporção com os numeros 36, 3, 9, 12.

R.—36:12::9:3.

5.—Formar uma proporção com os seguintes productos indicados: 4×6=3×8.

R.—4:3::6:8.

6.— Achar o segundo termo de uma proporção entre os numeros 16, 24 e 64.

R.—x=6 ; 24:6::64:16.

7.—Armar uma proporção com os numeros 48 e 3.

R.—$x=\sqrt{48\times 3}=12$; 48:12::12:3.

8.—Verificar a seguinte igualdade:

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt{18}}$$

R.—3=3.

9.—Alternar, inverter e transpôr os termos da proporção:

5 : 15 :: 6 : 18

R.—Alternar:—5:6::15:18. Inverter:—15:5::18:6. Transpôr: 6:18::15:5.

10.—Dão-se quatro frascos de capacidade differente, que se quer determinar, sabendo-se que a do segundo tem mais 7 litros que a do primeiro; a do terceiro é tres vezes a do primeiro, e contém menos 11 litros que a do quarto, sendo esta o dobro da segunda.

R.—1.º frasco: 3 litros; 2.º: 10 litros; 3.º: 9 litros; 4.º: 20 litros.

Regras de tres

Resolver pelas proporções e pelo methodo da reducção á unidade as seguintes regras de tres:

1.—6 stereos de madeira custaram 24$000, quanto custarão 11?
R.—44$000.

2.—Um vehiculo caminhando 15 km. por hora, quanto caminha em 20 minutos?
R.—5 kilometros.

3.—Se uma torneira fornece 36^{l} d'agua, tendo um diametro de 2 centimetros quadrados, quantos litros fornecerá uma outra cujo diametro fôr de $1\frac{1}{2}$ centimetro quadrado?
R.—27 litros.

4.—Foram necessarias 5 carroças para transportar $12^{m3},5$ de aterro, quantas serão necessarias para transportar $37^{m3},5$?
R.—15 carroças.

5.—Com a velocidade de 36^{km} por hora um trem gasta 10 minutos para percorrer 6^{km}, quanto gastaria se a velocidade fosse de 72^{km} por hora?
R.—5 minutos.

6.—Um batalhão marchando 2 leguas por dia despende 12 dias para chegar a um acampamento a 24 leguas de distancia; quanto deve marchar por dia se quizer gastar sómente 4 dias?
R.—6 leguas.

7.—Quantos homens em 19 dias poderiam fazer uma obra que é feita por 209 em 10 dias?
R.—110 homens.

8.—A que distancia se póde remetter 36 toneladas de carvão, pagando o mesmo frete que por 54 toneladas a 144 kilometros?
R.—216 kilometros.

9.— Em uma engrenagem a roda maior tem 114 dentes e a menor 38; quantas voltas dá a segunda emquanto a primeira dá 5?
R.— 15 voltas.

10.— Preciso de 64 cadeiras para accommodar outras tantas pessoas, dispondo-as em fileiras de 16 cada uma; quantas pessoas terá cada fila, se o numero de filas fôr 8?
R.— 8 pessoas.

11.— O bronze é uma liga de uma parte de estanho para $5\frac{1}{2}$ de cobre; quantas toneladas se póde obter com 500 k. de estanho?
R.— $3^{ton},250$

12.— Em 28 dias, 12 operarios fizeram a metade de uma obra; quanto tempo será necessario para fazer a obra toda, se despedirmos 4 operarios?
R.— 84 dias.

13.— 4 operarios ganham juntos 144$000 em 12 dias; quanto ganharão 6 durante 10 dias?
R.—115$200.

14.— 4 homens pódem capinar 15 alqueires de terra em 5 dias, trabalhando 14 horas por dia; em quantos dias 7 homens, trabalhando 13 horas, poderão capinar $19\frac{1}{2}$ alqueires?
R.— 4 dias.

15.— Um estudante deve preparar-se para o exame em 8 mezes, recebendo 12 lições por mez, de $1\frac{1}{2}$ hora cada lição; tendo perdido algumas lições, deseja saber se em $4\frac{1}{3}$ mezes poderá vencer o mesmo estudo, recebendo 15 lições por mez, no maximo de 2 horas cada lição.
R.— Cada lição deve ser de $2^{h}\ 12^{m}\ 6^{s}$.

16.— Um negociante deitou agua em uma pipa de vinho de 180 litros, ao preço de 800 rs. o litro, e não póde mais vender esse vinho senão a 600 rs. o litro; que quantidade d'agua addicionára?
R.— 60 litros.

Regra de juros

1.— Qual é o juro da importancia de 7:525$000, á taxa de $6\frac{1}{2}$ % ao anno, em 2 annos e 4 mezes?
R.— 1:141$291.
— Em 12 dias?
R.— 16$304.

2.— Qual é o juro de 5:000$000 em 10 dias, a 8 % ao anno?
R.— 11$111.

3.— Um capitalista retira de uma empreza o capital de 250:000$000 que lhe rendia 9 °/₀ desde Janeiro até Outubro de um certo anno; e só quatro mezes depois póde empregal-o em outra empreza a 12 °/₀, ahi ficando até Dezembro d'esse anno. Qual dos dois negocios foi-lhe mais vantajoso?

R.—O primeiro negocio rendeu 18:750$000; o segundo, 25:000$000.

4.—O que é preferivel: emprestar 350:000$000 a **10 °/₀**, ou comprar predios que rendam annualmente 30:000$000?

R.—O emprestimo rende 35:000$000.

5.—Um capitalista dividiu seu capital de 96:000$000 em tres partes iguaes, que empregou em tres negocios, ás taxas de 5 °/₀ durante 2 annos, 6 °/₀ durante 1 anno e 4 mezes, e 10 °/₀ durante 9 mezes. Não seria melhor empregar toda a somma em um só negocio a 8 °/₀ durante 1 anno?

R.—O primeiro negocio rendeu 3:200$000; o segundo, 2:560$000; o terceiro, 2:400$000. O emprego de toda a somma renderia 7:680$000. Este seria menos vantajoso.

6.—Qual é a taxa do rendimento liquido de um predio do valor de 30:000$000, alugado por 280$000 mensaes e pagando 5 °/₀ de impostos, concertos, etc.?

R. $10 \frac{16}{25}$ °/₀.

7.—Durante quanto tempo é preciso deixar empregado um capital de 7:500$000 a 6 °/₀, para que dê uma renda igual á de 8:000$000 a 5 °/₀?

R.—10 mezes e 20 dias.

8.—Durante quanto tempo deve estar um capital empregado para que elle duplique, sendo a taxa de $8 \frac{1}{2}$ °/₀ ao anno?

R.—11 annos, 9 mezes e 3 dias.

9.—A que taxa se empregou um capital que durante 18 mezes cresceu da metade?

R.—$33 \frac{1}{3}$ °/₀.

10.—Quanto de juros deve pagar uma pessoa que tomou 2:300$000 a 6 °/₀ durante 15 dias, 1:700$000 a 8 °/₀ durante 2 mezes e 5:250$000 a 10 °/₀ durante 15 mezes?

R.—684$666.

Regra de desconto

1.—Calcular o valor actual de uma letra de 6:525$000, pagavel ao fim de 3 mezes, á taxa de 9 °/₀.

R.—6:136$919.

2.—Calcular o desconto racional e o commercial de uma letra de 5:500$000, pagavel em $2 \frac{1}{2}$ annos, á taxa de 6 °/₀; achar sua differença e o juro de desconto racional.

R.—d=717$391; D=825$000. Juro de $d = D - d = 107\$609$.

3.—Descontando uma obrigação de 800$000 em 3 de Junho, pagavel em 15 de Setembro a 6 °/₀, quanto se deve receber?

R.—786$627.

4.—A que taxa se descontou uma letra do valor nominal de 6:000$000, pagavel em 2 annos, pela qual se recebeu a importancia de 5:520$000?

R.— $4 \frac{8}{23}$ °/₀.

5.—Calcular o valor nominal de uma letra vencivel a 6 mezes a 7 °/₀, pela qual pagou-se 500$000, 15 dias antes do vencimento.

R.—516$041.

Regra conjuncta

1.—905 litros de azeite pesam o mesmo que 1000 litros d'agua; 14 litros d'agua, o mesmo que 1 litro de mercurio; 5 litros de mercurio, o mesmo que 140 de alcool; quantos litros de alcool pesarão o mesmo que 905 litros de azeite?

R.—2000 litros de alcool.

2.—Um capitalista encontra na praça titulos de quatro companhias, com valores differentes, e encontra quem troque 25 acções da primeira por 30 da segunda, 2 da segunda por 3 da terceira, 3 d'esta por 5 da quarta. Quantos titulos d'esta ultima especie póde elle obter com 1000 acções da primeira?

R.—3000.

Regra de cambio

1.—Achar o valor de 1,£ estando o cambio a 27, a 13, a 12, a $7\frac{1}{2}$.

R.—A 27, 8$888; a 13, 18$461; a 12, 20$000; a $7\frac{1}{2}$ 32$000.

2.—Ao cambio de 8 quanto se deve dar para obter uma somma de 650 £ 15^s 9^p ?

R.—19:523$625.

3.—Com 25:325$000 quanto poderemos obter em moeda ingleza, ao cambio de 12 ?

R.—1266 £ 5^s.

4.—Ao cambio de $8\frac{3}{8}$ em quanto importam 325 £ 10^s 6^p ?

R.—9:328$477.

5.—Ao cambio de $13\frac{1}{4}$ quanto nos darão por 32:500$000?

R.—1794£ 5^s 5^d.

Regra de divisão proporcional e sociedade

1.—Dividir 12:000$000 em partes proporcionaes a

$$\frac{1}{2}, \quad a\ \frac{1}{3}, \quad a\ \frac{1}{4}\ e\ a\ \frac{1}{5}$$

R.—4:675$324; 3:116$883; 2:337$662; 1:870$129.

2.—Quatro pessoas perdem em um negocio 627$200, tendo entrado respectivamente com 4:000$000, 2:300$000, 1:900$000 e 1:600$000. Qual é o prejuizo de cada uma ?

R.—256$000; 147$200; 121$600; 102$400.

3.—Tenho a importancia de 350$000, que preciso trocar em notas de 2$000, de 1$000 e de $500, de modo a ficar com o mesmo numero de notas de cada especie. Que importancia devo receber em notas de 2$000, em notas de 1$000 e em notas de $500 ? —Qual o numero de notas de cada especie ?

R.—Em notas de 2$000: 200$000; em notas de 1$, 100$000; em notas de $500: 50$000. 100 notas de 2$; 100 notas de 1$; 100 notas de $500.

4.—Duas pessoas compraram uma peça de fazenda de 26^m por $850 o metro, pagando a primeira 11$000 pela sua parte e dando a outra o restante do custo da peça. Quanto pagou a segunda pessoa e com quantos metros ficou cada uma ?

R.—11$100.—$12^m$,941; 13^m,058.

5.—Duas pessoas fizeram uma sociedade por 2 annos; a primeira entrou com 2:500$000, e a segunda com 3:000$000; no fim de 9 mezes a primeira retirou 500$000 e a segunda entrou com mais 500$000; no fim de dous annos o lucro foi de 2:640$000. Qual é a parte de cada um n'esse lucro ?

R.—1:050$000; 1:590$000.

6.—Tres socios realizaram um lucro de 5:725$000; o primeiro entrára com 2:900$000 durante 11 mezes, o segundo com 1:780$000 durante $1\frac{1}{2}$ anno, e o terceiro com 780$000 durante 2 annos e 20 dias. Quanto toca a cada um ?

R.—2:195$570; 2:205$205; 1:324$225.

Progressões e Logarithmos

1.—Partindo do numero 6, formar uma progressão crescente e outra decrescente cuja razão seja $\frac{1}{3}$

R.—Crescente=: $6.\ 6\frac{1}{3}.\ 6\frac{2}{3}.\ 7.\ 6\frac{4}{3}.\ 6\frac{5}{8}.\ 8.....$

Decrescente=: $6.\ 5\frac{2}{3}.\ 5\frac{1}{3}.\ 5.\ 4\frac{2}{3}.\ 4\frac{1}{3}.\ 4.......$

2.—Com os extremos 2 e 8 de uma equidifferença continua, formar uma progressão por differença crescente ou decrescente.

R.—: 2. 5. 8.... ou : 8. 5. 2....

3.—Em um cofre vae-se diariamente depositando uma quantia que augmenta 20 réis por dia. Achar a quantia que deve ser lançada no fim de 15 dias, no fim de 20 dias, no fim de 30 dias.

R.—300 réis ; 400 réis ; 600 réis.

Achar a importancia total contida no cofre : 1°, no fim de 15 dias ; 2°, no fim de 20 dias ; 3°, no fim de 30 dias.

R.—2\$400 ; 4\$200 ; 9\$300.

4.—Achar o primeiro termo de uma progressão por differença cujo ultimo termo é 25, o numero de termos 4 e a razão 5.

R.—10.

5.—Determinar o numero de termos de uma progressão por differença cujo primeiro termo é 32, o ultimo e a razão 4.

R.—8.

6.—Inserir 4 meios differenciaes entre os termos 13 e 16 de uma progressão por differença.

$$\text{R.}-r=\frac{3}{8}. \quad \div 13.\frac{68}{5}.\frac{71}{5}.\frac{74}{5}.\frac{77}{5}.16.$$

7.—Da seguinte progressão por differença :

$$\div 5.8.11.14.17.20.23.26\ldots\ldots$$

tirar uma equidifferença cuja razão seja 6.

R.—$11+20=5+26$.·. $11 . 5 : 26 . 20$.

8.—Formar uma progressão por quociente crescente e outra decrescente cuja razão seja $\frac{1}{2}$ e o primeiro termo 1.

$$\text{R.—Decrescente}: ∺ 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\frac{1}{32}:\ldots.$$

$$\text{Crescente}: ∺ 1:2:4:8:16:32:\ldots$$

9.—Achar o sexto termo da progressão :

$$∺ 3:9:27:\ldots..$$

R.—729.

10.—Achar o primeiro termo de uma progressão por quociente cujo ultimo termo é 729, a razão 3, e o numero de termos 6.

R.—3.

11.—Inserir quatro meios proporcionaes entre os termos 27 e 71 de uma progressão por quociente.

$$\text{R:}\quad ∺ 27:27\sqrt[5]{\frac{71}{27}}:27\left(\sqrt[5]{\frac{71}{27}}\right)^2:27\left(\sqrt[5]{\frac{71}{27}}\right)^3:$$

$$:27\left(\sqrt[5]{\frac{71}{27}}\right)^4:71.$$

12.—Da seguinte progressão por quociente

$$∺ 3:12:48:192:\ldots..$$

tirar uma proporção cuja razão seja $\frac{1}{4}$.

R.—$12\times48=3\times192$.·. $3:12::48:192$.

13.—Achar o numero de antepassados de um individuo até a sexta ascendencia.

R.—126.

14.—Calcular por meio dos logarithmos a expressão :

$$x=\frac{25\times32\times47\times90}{42\times97\times38\times80}$$

R.—lgx=lg 25+lg 32+lg 47+lg 90—lg 42—lg 97—lg 38—lg 80=lg 25+lg 32+lg 47+lg 90—(lg 42+lg 97+lg 38+lg 80). $x=0,731$.

15.—Inserir quinze meios proporcionaes entre os numeros 5 e 6.

$$\text{R.}-r=\sqrt[16]{\frac{6}{5}}\ ;\ \lg r=\frac{\lg 6-\lg 5}{16}\ ;\ r=1,0114639.$$

16.—Achar por logarithmos o decimo segundo termo e a somma dos 12 primeiros termos da progressão :

$$∺ 2:\frac{7}{3}:\frac{49}{18}\ldots..$$

$$\text{R.}-l=2\left(\frac{7}{16}\right)^{11};\lg\left(\frac{7}{16}\right)^{11}=11\left(\lg 7-\lg 16\right);\left(\frac{7}{16}\right)^{11}=5,45022\ ;$$

$l=10,90044$.

$S=64,3028$.

17.—Avaliar por logarithmos as expressões :

$$1^{a})\quad x=\left(\frac{23}{59}\right)^{12}\qquad 2^{a})\quad y=\sqrt[7]{\frac{19}{43}}\qquad 3^{a})\quad z=\sqrt[11]{\left(\frac{3}{7}\right)^6}$$

R.—1ª) $\lg x=12\,(\lg 23-\lg 59)$; $x=\frac{5}{405938}$.

2ª) $\lg y=\frac{\lg 19-\lg 43}{7}$; $y=\frac{1}{3,2117}$.

3ª) $\lg z=\frac{6(\lg 3-\lg 7)}{11}$; $z=\frac{1}{2,0566}$.

Juros compostos—Capitalisação—Annuidades

1.—Determinar a somma do capital e juros accumulados durante 4 annos, á taxa de 6 %, de um capital de 5:000$000.

R.—6:312$385.

2.—Determinar o capital primitivo que tornou-se 15:000$000, a juros accumulados de 4 % durante 5 annos.

R.—12:328$903.

3.—Determinar o tempo durante o qual esteve empregado o capital primitivo de 25:000$000, a juros accumulados de 9 % ao anno, que se tornou 40:000$000.

R.—5 annos, 5 mezes, 12 dias.

4.—Determinar o valor de cada prestação a fazer para formar um capital de 100:000$000, no fim de 30 annos a 7 %.

R.—989$381.

5.—Determinar o valor do capital que se póde formar com prestações annuaes de 1:000$000 a 6%, no fim de 15 annos.

R.—24:615$821.

6.—No fim de que tempo, com prestações annuaes de 2:000$000, se póde formar um capital de 10:000$000 ?

R.—4 annos, 3 mezes, 7 dias.

7.—Applicar a fórmula das annuidades ao seguinte exemplo:

D=525:000$000. i=6 % t=20 annos.

R.—4:576$188.

FIM

INDICE

ELEMENTOS DE ARITHMETICA

N. 942 — Impresso na machina n. 12, nas Officinas Graphicas da Livraria Francisco Alves, em Maio de 1918

Extracto do Catalogo da Livraria Francisco Alves

Livro de Composição, por Olavo Bilac e M. Bomfim, cart. . . 4$000

Exercicios de Composição, Descripção e Cartas, por Alfredo Gomes, cart. . . . . 3$000

Thesouro Poetico Brasileiro, Collectanea das melhores poesias nacionaes, 1750-1900, por O. Duque Estrada, cart. 3$000

Exame de Admissão, para os Gymnasios. Promptuario das materias exigidas para o exame de admissão no Collegio Pedro II, por João Ribeiro e Raja Gabaglia, cart. . . 3$000

Factos da Lingua Portugueza, por Mario Barreto, cart. . . . . 4$000

Novissimos Estudos da Lingua Portugueza, por Mario Barreto, cart. . . . . 4$000

Novos Estudos da Lingua Portugueza, por Mario Barreto, cart. . . . . 4$000

Anthologia Nacional, ou collecção dos excerptos dos principaes escriptores da lingua portugueza, do 16º ao 19º seculo, por Fausto Barreto e Carlos de Laet, cart. . . . 4$000

Factos da Linguagem, por Heraclito Graça, cart. . . . . 4$000

Neologismos indispensaveis e barbarismos dispensaveis, por Castro Lopes, br. 3$; enc. . . . . 4$000

Origens dos Anexins, por Castro Lopes, br. 3$; enc. . . . . . . 4$000

Dicionario de Sinonimos. O mais completo até hoje publicado, por Rocha Pombo, enc. . . . . 6$000

Céu, Terra e Mar (Selecta), por Alberto de Oliveira, cart. 3$000

Proverbios Populares, por D. Alexina de Magalhães Pinto, cart. . . . . 2$000

Minha Terra e Minha Gente, por Afranio Peixoto, cart. . . . 2$500

Passatempo Infantil, por E. M. A., cart. . . . . 1$500

As Crianças e os Animaes, contos para crianças, por D. Suzana Cornaz, cart. . . . . 1$500

Novos Amigos, contos para crianças, por D. Suzana Cornaz, cart. . . . . 2$000

Cantigas das Creanças e do Povo (edição illustrada e com as musicas), por D. Alexina de Magalhães Pinto, cart. 4$000