Trataremos sómente da formação dos quadrados e cubos dos numeros, e da extracção das raizes dos gráos correspondentes.

Formação dos quadrados dos numeros

194. Quadrado de um numero é o producto de dous factores iguaes a esse numero.

D'esta definição segue-se, que o quadrado de um numero qualquer, inteiro ou fraccionario, se obtem multiplicando esse numero por si mesmo.

O conhecimento da taboada de multiplicação é sufficiente para, sem effectuar calculo algum, conhecermos os quadrados dos nove primeiros numeros inteiros. Esses quadrados são :

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Os quadrados dos numeros formados pela unidade seguida de zeros se obtêm dobrando o numero de zeros que acompanharem a unidade. Assim, os quadrados dos numeros 10, 100, 1000, 10000, etc., são 100, 10000, 1000000, 100000000, etc.

195. *Se um numero inteiro fôr composto de dezenas e unidades, o seu quadrado consta de tres partes, a saber : quadrado das dezenas, dobro do producto das dezenas pelas unidades e quadrado das unidades.*

Representando por a as dezenas de um numero e por b as unidades, a+b será o numero, e o seu quadrado se obtem multiplicando a+b por a+b

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab+ \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

O resultado demonstra a proposição.

196. *O quadrado de um producto de dous ou mais factores se obtem elevando cada um dos factores ao quadrado.*

Com effeito:

$(5\times6\times7)^2=5\times6\times7\times5\times6\times7=5\times5\times6\times6\times7\times7=5^2\times6^2\times7^2$

197. *Para elevar ao quadrado um numero inteiro qualquer seguido de zeros, basta elevar o numero ao quadrado, prescindindo dos zeros, e escrever á direita do resultado o dobro do numero de zeros.*

Assim, sendo $347000=347\times1000$, segue-se que

$347000^2=347^2\times1000^2=120409\times1000000=120409000000$

198. *O quadrado de qualquer potencia de um numero se acha dobrando o expoente.*

Com effeito, $(a^m)^2=a^m\times a^m=a^{2m}$

199. *Para que um numero inteiro seja quadrado de um outro, é necessario que ambos tenham os mesmos factores primos, e que o expoente de cada factor no primeiro seja o dobro do expoente do mesmo factor no segundo.*

Supponhamos $a=b^2$

Os numeros a e b são compostos dos mesmos factores primos, porque se assim não fosse, dividindo ambos os membros da igualdade por um factor primo, sómente de um d'esses numeros teriamos um numero inteiro igual a um numero fraccionario, o que não é possivel.

Representando por m, n e p esses factores primos, por x, y e z os seus expoentes em a, e por x' y' e z' os seus expoentes em b, teremos

$$m^x\times n^y\times p^z=(m^{x'}\times n^{y'}\times p^{z'})^2=m^{2x'}\times n^{2y'}\times p^{2z'}$$

e portanto: $x=2x'$, $y=2y'$, $z=2z'$.

200. *A differença dos quadrados de dous numeros inteiros consecutivos é igual ao dobro do menor augmentado de uma unidade.*

Sendo $a+1$ e a os dous numeros, seus quadrados são : a^2+2a+1 e a^2 ; e a differença dos quadrados é $a^2+2a+1-a^2$ ou $2a+1$, resultado que demonstra a proposição.

201. Não sendo possivel á primeira vista conhecer se um numero inteiro é quadrado, podemos no entretanto saber algumas vezes se não é quadrado, por meio dos seguintes caracteres :

1º *O numero par não divisivel por 4 não é quadrado.*

Porque sendo 2n a formula geral dos numeros pares, elevando $2n$ ao quadrado acha-se $4n^2$, formula geral dos numeros pares que são quadrados, e como todos elles são divisiveis por 4, segue-se que os numeros pares que não satisfizerem a esta condição não serão quadrados.

2º *O numero impar que diminuido de uma unidade não deixar um resto divisivel por 4 não é quadrado.*

Porque sendo $2n + 1$ a formula geral dos numeros impares, elevando $2n + 1$ ao quadrado, acha-se $4n^2 + 4n + 1$, formula geral dos numeros impares que são quadrados, e como todos elles sendo diminuidos de uma unidade deixam um resto, $4n^2 + 4n$, divisivel por 4, segue-se que o numero impar que não satisfizer a esta condição não é quadrado.

3.º *O numero inteiro que terminar por algum dos algarismos 2, 3, 7 e 8 não é quadrado.*

Porque, seja qual fôr o numero que se considere, elle deve terminar por um dos dez algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e o seu quadrado deve terminar por 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, e nunca por 2, 3, 7 ou 8.

4.º *O numero que terminar por numero impar de zeros não é quadrado.*

Porque o numero terminando por zeros só póde ser quadrado de outro terminando tambem por zeros; mas já vimos que um numero terminando por zeros o seu quadrado deveria terminar pelo dobro do numero de zeros.

5.º *O numero que terminar pelo algarismo 5, não é quadrado, se o algarismo das dezenas fôr differente de 2.*

Porque, seja qual fôr o numero terminado pelo algarismo 5, elle só póde ser quadrado de um outro numero terminado tambem por 5. Considerando, pois, um numero qualquer terminado por 5, e chamando a as dezenas d'esse numero, elle é representado por $a + 5$.

Elevando ao quadrado esse numero, temos :

$$(a + 5)^2 = a^2 + 10\,a + 25$$

As duas primeiras partes terminando por dous zeros, a somma das tres partes não póde deixar de terminar por 25.

6.º *O numero inteiro divisivel por um numero primo não é quadrado se não fôr divisivel pelo quadrado d'esse numero primo.*

Porque, se o numero primo n dividir o quadrado de um numero, deve tambem dividir esse numero, e sendo esse numero divisivel pelo factor primo n, o seu quadrado não póde deixar de ter em sua composição o quadrado d'esse mesmo numero primo. (199)

202. O quadrado de uma fracção ordinaria se obtem, segundo a definição, multiplicando essa fracção por si mesma, e como o producto de uma fracção por outra se acha multiplicando os numeradores e os denominadores, e dividindo o primeiro producto pelo segundo, segue-se que : *o quadrado de uma fracção ordinaria se obtem elevando o numerador ao quadrado e tambem o denominador, dividindo depois o primeiro resultado pelo segundo.*

Se os termos de uma fracção ordinaria forem numeros primos entre si, os seus quadrados serão tambem numeros primos entre si, e d'ahi segue-se que : *o quadrado de uma fracção irreductivel é tambem uma fracção irreductivel.*

203. O producto de um numero decimal por outro, devendo ter na parte fraccionaria tantos algarismos quantos tiverem as partes fraccionarias dos dous factores, segue-se que : *o quadrado de um numero decimal tem sempre na parte fraccionaria o dobro do numero de algarismos que tiver nessa parte o numero dado.*

Raizes quadradas dos numeros

204. *Raiz quadrada de um numero é o numero que elevado ao quadrado produz o numero dado.*

No estudo das raizes quadradas dos numeros, consideraremos duas partes : Na primeira trataremos das raizes quadradas dos numeros inteiros ; e na segunda, das raizes quadradas dos numeros fraccionarios.

Raizes quadradas dos numeros inteiros

205. O conhecimento da taboada de multiplicação é sufficiente para conhecermos as raizes quadradas dos numeros inteiros, que, sendo quadrados, tiverem um ou dous algarismos. Esses numeros são :

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81$$

as suas raizes quadradas são :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

Tratemos, pois, de estabelecer o processo para determinar as raizes quadradas dos numeros inteiros, que, sendo quadrados, tiverem mais de dous algarismos.

Considere-se em primeiro logar um numero de tres ou quatro algarismos, e seja esse numero 1225.

12.25	35
9	65
32.5	
32.5	
0	

O numero 1225 sendo maior que 100, a sua raiz quadrada, maior que o numero 10, consta de dezenas e unidades; portanto o quadrado, isto é, o numero dado compõe-se de tres partes, a saber: *o quadrado das dezenas, o dobro do producto das dezenas pelas unidades e o quadrado das unidades.* (195)

Separando no numero dado a parte que contém o *quadrado das dezenas da raiz*, extraindo a raiz quadrada d'essa parte, teremos as dezenas da raiz.

O quadrado das dezenas dará pelo menos centenas, pois $10^2=100$. Portanto no numero dado esse quadrado não se achará nas duas primeiras ordens do numero dado, pelo que separamos com um ponto os seus dous primeiros algarismos da direita.

O maior quadrado contido em 12 centenas é 9 centenas, cuja raiz é 3 dezenas. Subtrahindo o quadrado das dezenas das 12 centenas do numero dado, as 3 centenas que restam, reservas das outras duas partes de que se compõe esse numero, reunidas com as 25 unidades do mesmo numero, dão um resultado necessariamente composto das duas partes: *dobro do producto das dezenas pelas unidades e quadrado das unidades.*

Separando d'esse resultado a parte que contém o *dobro do producto das dezenas pelas unidades*, dividindo essa parte pelo dobro das dezenas, o quociente representará as unidades da raiz.

O dobro do producto das dezenas pelas unidades dará pelo menos dezenas, portanto essa parte não se achará nas unidades do numero dado. Separemos, pois, para a direita o algarismo 5 das unidades, e as 32 dezenas conterão o dobro do producto das dezenas pelas unidades da raiz. Então dividindo 32 por 6, que é o dobro das 3 dezenas da raiz, o quociente 5 será as unidades da raiz.

Podendo as 32 dezenas, além do dobro do producto das dezenas pelas unidades, conter reservas do quadrado das unidades, é necessario verificar, se com effeito 5 é o algarismo das unidades da raiz, o que se consegue elevando 35 ao quadrado, devendo achar-se para resultado o numero dado; ou multiplicando 5 por 6 dezenas ou 60 e depois por si mesmo, e sommando os dous productos parciaes; o resultado, subtraído de 325, não deve deixar resto algum, por ser 325 um numero composto d'essas duas partes.

Considere-se presentemente um numero de cinco ou seis algarismos. Seja o numero 106276,

10.62.76	326
9	62
16.2	646
124	
387.6	
3876	
0	

O numero 106276 sendo maior que 100, a sua raiz quadrada, maior que o numero 10, consta de dezenas e unidades; e o numero dado compõe-se de tres partes, a saber: *quadrado das dezenas, dobro do producto das dezenas pelas unidades e quadrado das unidades.*

Separando d'esse numero a primeira parte, o que se consegue prescindindo dos dous algarismos da direita e extraindo a raiz quadrada de 1062 centenas, acharemos as 32 dezenas da raiz.

Ao resto 38 centenas reunindo as 76 unidades do numero dado, teremos o numero 3876, que se compõe das outras duas partes: *dobro do producto das dezenas pelas unidades e quadrado das unidades.*

Separando do resto o *dobro do producto das dezenas pelas unidades*, o que se consegue prescindindo do ultimo algarismo da direita e dividindo as 387 dezenas pelas 64 dezenas, dobro das dezenas, teremos as unidades da raiz.

O raciocinio sendo o mesmo, seja qual fôr o numero de algarismos do numero dado, podemos estabelecer a seguinte

REGRA.—*Divide-se o numero em classes de dous algarismos da direita para a esquerda. Extrae-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na primeira classe á esquerda, e subtrae-se esse maior quadrado da classe considerada.*

Á direita do resto escreve-se a classe seguinte, separa-se o ultimo algarismo da direita e divide-se a parte á esquerda pelo dobro da raiz achada. O quociente escreve-se á direita da raiz e á direita do dobro da raiz. Este ultimo numero assim formado multiplica-se pelo quociente e subtrahe-se o producto do numero que serviu de dividendo, seguido do algarismo separado.

Á direita do segundo resto escreve-se a classe seguinte, separa-se o ultimo algarismo da direita, e divide-se a parte á esquerda pelo dobro da raiz achada; o quociente escreve-se á direita da raiz e á direita do dobro da raiz. Este ultimo numero assim formado multiplica-se pelo quociente, e o producto subtrae-se do numero que serviu de dividendo, seguido do algarismo separado.

Á direita do terceiro resto escreve-se a classe seguinte, e assim se continúa até ter considerado todas as classes do numero dado.

Escrevendo á direita de um dos restos a classe seguinte e separando-se o ultimo algarismo á direita, se a parte á esquerda fôr menor que o dobro da raiz achada, escreve-se um zero á direita d'essa raiz achada, e considera-se a classe seguinte.

Póde acontecer que se escreva na raiz um algarismo menor do que deve ser. Á simples inspecção do resto se conhece o erro.

Supponhamos que se trate de extrair a raiz quadrada do numero 576. Achado o algarismo 2 das dezenas da raiz e subtraindo o quadrado das dezenas do numero dado, o algarismo das unidades se obtem dividindo 17 por 4. Escrevendo na raiz o algarismo 3, multiplicando depois 43 por 3 e subtraindo o producto de 176, acharemos o resto 47; e como esse resto é igual ao dobro de 23 augmentado de uma unidade, concluiremos que o algarismo 3 é fraco.

Com effeito, $576 = 23^2 + 47$, e como $24^2 = (23 + 1)^2 = 23^2 + 2 \times 23 + 1$, sendo $47 = 2 \times 23 + 1$, segue-se que 576 é o quadrado do numero 24. O algarismo das unidades é 4 e não 3.

Se o resto fosse maior que o dobro da raiz augmentado de uma unidade, o algarismo das unidades seria ainda menor do que devia ser. O resto deve, pois, ser sempre menor que o dobro da raiz augmentado de uma unidade.

206. Os numeros inteiros não têm todos para raizes quadradas numeros inteiros.

As raizes quadradas d'esses numeros não podem ser fracções proprias, porque as fracções proprias só podem ser raizes quadradas de outras fracções ainda menores, nem numeros mixtos ou fracções improprias.

Com effeito, se a fracção impropria $\frac{a}{b}$ fosse raiz quadrada exacta do numero inteiro N, elevando essa fracção ao quadrado, teriamos

$$\frac{a^2}{b^2} = N$$

A fracção impropria $\frac{a}{b}$ podendo ser sempre considerada irreductivel, os seus termos a e b serão numeros primos entre si, e os seus quadrados a^2 e b^2 serão tambem numeros primos entre si (92); o primeiro membro da igualdade é essencialmente fraccionario, e, como o segundo membro é inteiro, a igualdade é impossivel; e por consequencia a fracção impropria $\frac{a}{b}$ não póde ser raiz quadrada exacta do numero inteiro N.

Esses numeros têm para raizes quadradas numeros incommensuraveis, que se obtem com a approximação que se quizer.

Para achar as raizes quadradas d'esses numeros, sem erro de uma unidade, basta achar as raizes dos maiores quadrados contidos nelles. Assim, a raiz quadrada do numero 7248965

7.24.89.65	2692
4	46
32.4	529
276	5382
488.9	
4761	
1286.5	
10764	
2101	

é 2692, sem erro de uma unidade.

Vejamos como se obtem a raiz quadrada de um numero qualquer A, sem erro de $\frac{1}{n}$ de uma unidade de qualquer ordem.

Evidentemente $A = \frac{A \times n^2}{n^2}$

Supponho effectuado o producto $A \times n^2$, e representando par a a raiz quadrada do maior quadrado contido nelle, teremos

$$a^2 < A \times n^2 < (a+1)^2$$

Dividindo esses tres numeros por n^2, resulta

$$\frac{a^2}{n^2} < \frac{A \times n^2}{n^2} < \frac{(a+1)^2}{n^2}$$

ou ainda

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{a+1}{n}\right)^2$$

O numero dado A acha-se, pois, comprehendido entre os quadrados dos numeros $\frac{a}{n}$ e $\frac{a+1}{n}$, numeros cuja differença é $\frac{1}{n}$.

O numero $\frac{a}{n}$ é a raiz quadrada do numero dado por falta, e $\frac{a+1}{n}$ é a raiz quadrada do mesmo numero por excesso. Podemos, pois, estabelecer a seguinte

REGRA.—*Se a fracção que indicar o erro tiver para numerador a unidade, sendo o denominador um numero qualquer, multiplica-se o numero inteiro pelo quadrado do denominador, extrae-se a raiz quadrada do producto, e divide-se essa raiz quadrada pelo denominador.*

Se a fracção que indicar o erro tiver para termos numeros quaesquer, se fôr, por exemplo, $\frac{m}{p}$, *multiplica-se o numero inteiro pelo quadrado da fracção que indica o erro invertida, extrae-se a raiz quadrada do producto, e divide-se o resultado pela mesma fracção invertida.*

Facilmente se reconhece ser esse o meio para obter a raiz quadrada, nessa ultima hypothese, notando-se que $\frac{m}{p} = \frac{1}{\frac{p}{m}}$

Não se tendo feito hypothese alguma sobre a natureza do numero A, estas regras são applicaveis tambem ás fracções, como veremos depois.

1° EXEMPLO : Achar a raiz quadrada de 28, sem erro de $\frac{1}{7}$

$$\sqrt{28} = \frac{\sqrt{28 \times 7^2}}{7} = \frac{\sqrt{28 \times 49}}{7} = \frac{\sqrt{1372}}{7} = \frac{37}{7},$$ sem errro de $\frac{1}{7}$

2° EXEMPLO : Achar a raiz quadrada de 37, sem erro de $\frac{1}{100}$

$$\sqrt{37} = \frac{\sqrt{37 \times 100^2}}{100} = \frac{\sqrt{370000}}{100} = \frac{608}{100} = 6{,}08,$$ sem erro de $\frac{1}{100}$

3° EXEMPLO : Achar a raiz quadrada de 7, sem erro de $\frac{3}{5}$

$$\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2}}{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{7 \times \frac{25}{9}}}{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{\frac{175}{9}}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{13}{5}$$

sem erro de $\frac{3}{5}$.

Raizes quadradas dos numeros fraccionarios

207. Trataremos em primeiro logar das raizes quadradas dos numeros decimaes.

O numero decimal sendo quadrado, o numero de algarismos da parte fraccionaria é sempre par, porque, como já vimos, o quadrado de um numero decimal tem sempre na parte fraccionaria o dobro do numero de algarismos que tiver a parte fraccionaria da raiz.

Seja a fracção 0,000064, da qual se quer extrair a raiz quadrada.

Se prescindirmos da virgula e extrairmos a raiz quadrada do resultado 64, acharemos 8 ; mas sendo 64 um milhão de vezes maior que a fracção dada, a raiz quadrada de 64 ou o numero 8 é mil vezes maior que a raiz pedida ; para termos, pois, essa raiz, devemos tornar mil vezes menor o numero 8, o que se consegue separando para a direita tres algarismos, e será 0,008 a raiz quadrada de 0,000064.

Pelo que se conclue a seguinte

REGRA.—*Prescinde-se da virgula, extrae-se a raiz quadrada do resultado e separa-se com uma virgula nessa raiz, para a direita, a metade do numero de algarismos da parte fraccionaria do numero dado.*

Se o numero decimal não fôr quadrado, a sua raiz se obtem com a approximação que se quizer, applicando o processo apresentado na approximação das raizes dos numeros inteiros. (206)

Seja o numero 48,56327, do qual se quer extrahir a raiz quadrada sem erro de $\frac{1}{100}$

Multiplicando o numero 48,56327 por 10000, quadrado de 100, teremos 485632,7.

Extraindo a raiz quadrada do maior quadrado contido no numero 485632, acha-se 696, e separando nessa raiz, para a direita, dous algarismos, teremos 6,96, raiz quadrada do numero dado, sem erro $\frac{1}{100}$.

Seja ainda o numero 0,42, do qual se quer a raiz quadrada sem erro de $\frac{1}{1000}$.

Multiplicando o numero 0,42 por 1000000, quadrado de 1000, resulta o numero 420000.

Extraindo a raiz quadrada do maior quadrado contido em 420000, acha-se 648, e a raiz pedida é 0,648.

208. Tratemos presentemente das raizes quadradas das fracções ordinarias.

A raiz quadrada de uma fracção ordinaria póde ser obtida convertendo a fracção ordinaria em decimal, e extraindo depois a raiz quadrada d'essa fracção decimal.

É, porém, conveniente estabelecer um methodo especial para obter a raiz quadrada de uma fracção ordinaria.

Do processo que estabelecemos para elevar uma fracção ordinaria ao quadrado se deduz o meio natural de se obter a raiz quadrada de uma fracção ordinaria. Esse meio consiste em *extrair a raiz quadrada do numerador e a do denominador, dividindo a primeira raiz pela segunda.*

A inconveniencia que ha em obter para resultado uma fracção que tenha para denominador um numero incommensuravel, o que acontece sempre que o denominador não fôr quadrado, força-nos a considerar na extracção das raizes quadradas das fracções ordinarias os dous casos seguintes:

1º CASO: *O denominador é quadrado.*

2º CASO: *O denominador não é quadrado.*

No primeiro caso, *extrae-se a raiz quadrada do numerador exacta ou approximadamente, e a exacta do denominador, dividindo depois a primeira raiz pela segunda.*

EXEMPLOS:

$$\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}}=\frac{5}{8}$$

$$\overline{\frac{7}{81}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{81}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

No segundo caso, *transforma-se a fracção em outra igual, tendo para denominador um numero que seja quadrado, o que se consegue, em geral, multiplicando ambos os termos da fracção pelo denominador e applicando o processo do primeiro caso.*

EXEMPLO:

$$\sqrt{\frac{4}{7}}=\sqrt{\frac{28}{49}}=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{28}}{7}$$

Sendo o quadrado de um numero inteiro o producto dos quadrados dos factores primos que entram na composição d'esse numero (199), segue-se que, no segundo caso, e na hypothese de ser o denominador um numero multiplo, póde-se, sem multiplicar os termos da fracção pelo denominador, effectuar a transformação multiplicando-os por um outro numero menor que esse denominador.

O numero pelo qual se deve multiplicar os dous termos da fracção se conhece, decompondo o denominador em factores primos e formando um producto dos factores que faltarem para que esse denominador seja quadrado.

Seja a fracção $\frac{7}{630}$, da qual se quer extrair a raiz quadrada.

O denominador $630=2\times3^2\times5\times7$ e como para elle ser quadrado faltam os factores primos 2, 5 e 7, o producto d'esses numeros ou 70 é o numero pelo qual devemos multiplicar os termos da fracção para que ella seja transformada em outra igual, tendo para denominador um quadrado.

Effectuando a multiplicação e extraindo depois a raiz quadrada, temos

$$\sqrt{\frac{7}{630}}=\sqrt{\frac{7\times70}{630\times70}}=\sqrt{\frac{490}{44100}}=\sqrt{\frac{490}{210^2}}=\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{210^2}}=\frac{\sqrt{490}}{210}$$

Formação dos cubos dos numeros

209. *Cubo de um numero é o producto de tres factores iguaes a esse numero.*

O cubo de um numero qualquer inteiro ou fraccionario se obtem multiplicando esse numero por si mesmo duas vezes.

Os cubos dos nove primeiros numeros inteiros são :

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729

210. *Os cubos dos numeros inteiros formados pela unidade seguida de zeros, se obtêm triplicando o numero de zeros que acompanharem a unidade.* Assim, os cubos dos ns. 10, 100, 1000, 10000, etc., são 1000, 1000000, 1000000000, 1000000000000, etc.

211. *Um numero inteiro, sendo composto de dezenas e unidades, o seu cubo consta de quatro partes, a saber : cubo das dezenas, triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades, triplo do producto das dezenas pelo quadrado das unidades e cubo das unidades.*

Representando por a as dezenas de um numero, e por b as unidades, $a+b$ será o numero ; o quadrado é $a^2+2ab+b^2$ e o cubo se obtem multiplicando o quadrado por $a+b$.

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ \underline{a \quad + b \qquad\qquad} \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \; + \\ \underline{\quad\; + \; a^2b + 2ab^2 + b^3} \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

O resultado demonstra a proposição.

212. *O cubo de um producto de dous ou mais factores, se obtem elevando cada um dos factores ao cubo.*

Com effeito

$$(5\times6\times7)^3 = 5\times6\times7\times5\times6\times7\times5\times6\times7 = 5\times5\times5\times$$
$$\times6\times6\times6\times7\times7\times7 = 5^3\times6^3\times7^3.$$

213. *Para elevar ao cubo um numero inteiro qualquer seguido de zeros, basta elevar ao cubo o numero, prescindindo dos zeros, e escrever á direita do resultado o triplo do numero de zeros.*

Assim, sendo $2300 = 23 \times 100$, segue-se que $2300^3 = 23^3 \times 100^3 = 12167 \times 1000000 = 12167000000$.

214. *O cubo de qualquer potencia de um numero se acha triplicando o expoente.*

Com effeito, $(a^m)^3 = a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$.

215. *Para que um numero seja cubo de outro, é necessario que ambos tenham os mesmos factores primos, e que o expoente de cada factor no primeiro seja o triplo do mesmo factor no segundo.*

Supponhamos $a = b^3$.

Os numeros a e b são compostos dos mesmos factores primos, porque se assim não fosse, dividindo ambos os membros da igualdade por um factor primo, sómente de um d'esses numeros teriamos um numero inteiro igual a um numero fraccionario, o que não é possivel.

Representando por m, n e p esses factores primos, por x, y e z os seus expoentes em a, e por x', y' e z' os expoentes em b, teremos $m^x \times n^y \times p^z = (m^{x'} \times n^{y'} \times p^{z'})^3 = m^{3x'} \times n^{3y'} \times p^{3z'}$; e portanto $x = 3x'$, $y = 3y'$ e $z = 3z'$.

216. *A differença dos cubos de dous numeros inteiros consecutivos é igual ao triplo do menor, mais o triplo do seu quadrado, mais um.*

Sendo $a+1$ e a os dous numeros, seus cubos são a^3+3a^2+3a+1 e a^3, e a differença dos cubos é $a^3+3a^2+3a+1-a^3$ ou $3a^2+3a+1$, resultado que demonstra a proposição.

217. Não sendo possivel á primeira vista saber se um numero inteiro é cubo, podemos no entretanto conhecer algumas vezes se não é cubo por meio dos seguintes caracteres :

1º *O numero par não divisivel por 8 não é cubo.*

Porque, sendo $2n$ a fórmula geral dos numeros pares, elevando $2n$ ao cubo, acha-se $8n^3$, fórmula geral dos numeros pares que são cubos, e como todos elles são divisiveis por 8, segue-se que os numeros pares que não satisfizerem a esta condição não serão cubos.

2º *O numero que terminar por zeros não é cubo, se o numero de zeros não fôr tres ou multiplo de tres.*

Porque um numero terminado por zeros só póde ser cubo de um outro terminado tambem por zeros, e já vimos que um numero terminando por zeros, o seu cubo terminava pelo triplo do numero de zeros.

3.º *O numero inteiro divisivel por um numero primo não é cubo, se não fôr divisivel pelo cubo d'esse numero primo.*

Porque, se um numero primo n dividir ao cubo de um numero, deve tambem dividir esse numero, e esse numero sendo divisivel pelo factor primo n, o seu cubo não póde deixar de ter em sua composição o cubo d'esse mesmo numero primo.

218. O cubo de uma fracção ordinaria se obtem, segundo a definição, multiplicando essa fracção por si mesma duas vezes, o que se reduz a *elevar ao cubo o numerador e o denominador tambem, dividindo depois o primeiro resultado pelo segundo.*

Sendo os termos de uma fracção ordinaria numeros primos entre si, os seus cubos são tambem numeros primos entre si, e portanto: *O cubo de uma fracção irreductivel é tambem uma fracção irreductivel.*

219. O producto de um numero decimal por outro, devendo ter na parte fraccionaria tantos algarismos quantos tiverem as partes fraccionarias dos dous factores, segue-se que: *o cubo de um numero decimal tem sempre na parte fraccionaria o triplo do numero de algarismos que tiver nessa parte o numero dado.*

Raizes cubicas dos numeros

220. *Raiz cubica de um numero é o numero que elevado ao cubo produz o numero dado.*

No estudo das raizes cubicas dos numeros, consideraremos duas partes: na primeira estudaremos as raizes cubicas dos numeros inteiros; e na segunda, as raizes cubicas dos numeros fraccionarios.

Raizes cubicas dos numeros inteiros

221. As raizes cubicas dos numeros inteiros que, sendo cubos, tiverem um, dous ou tres algarismos, se obtem mentalmente.

Assim, os numeros:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729

têm para raizes cubicas

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Tratemos, pois, de estabelecer o processo para determinar as raizes cubicas dos numeros inteiros, que, sendo cubos, tiverem mais de tres algarismos.

Consideremos em primeiro logar um numero de quatro, cinco ou seis algarismos, e seja esse numero 42875.

```
42.875 | 35        35
27     |---        35
       | 27       ----
-------            175
15 8.75            105
42 8.75           ----
-------           1225
      0             35
                  ----
                  6125
                  3675
                 -----
                 42875
```

O numero 42875 sendo maior que 1000, a sua raiz cubica é maior que 10, e sendo a raiz cubica d'esse numero maior que 10, consta de dezenas e unidades, e portanto o cubo, isto é, o numero dado, compõe-se de quatro partes, a saber: *cubo das dezenas, triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades, triplo do producto das dezenas pelo quadrado das unidades e cubo das unidades.* (211)

Separando do numero dado a parte que contém o *cubo das dezenas da raiz*, e extrahindo a raiz cubica d'essa parte, teremos as dezenas da raiz.

O cubo das dezenas da raiz dá pelo menos milhares, porque $10^3 = 1000$. Portanto o cubo das dezenas da raiz não se acha contido nas tres primeiras ordens do numero proposto. Então separamos para a direita os tres primeiros algarismos do numero dado.

O maior cubo contido em 42 milhares é 27 milhares, cuja raiz cubica é 3 dezenas. Subtrahindo o cubo das dezenas dos 42 milhares do numero dado, os 15 milhares que restam, reservas das outras tres partes de que se compõe esse numero, reunidos com as 875 unidades do mesmo numero, dão um resultado necessariamente composto das tres partes: *triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades, triplo do producto das dezenas pelo quadrado das unidades e cubo das unidades.*

Separando d'esse resultado a parte que contém o *triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades*, dividindo essa parte pelo triplo do quadrado das dezenas, o quociente será constituido pelas unidades da raiz.

O *triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades* dá pelo menos centenas.

Portanto, essa parte só poderá se achar nas 158 centenas do resto acima achado. Então separamos para a direita as ordens das unidades e das dezenas d'esse resto. Dividindo as 158 centenas por 27 (3 vezes o quadrado das 3 dezenas da raiz), o quociente 5 será constituido pelas unidades da raiz.

Podendo as 158 centenas, além do *triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades*, conter reservas das outras duas partes, é necessario verificar se com effeito 5 é o algarismo das unidades da raiz, o que se consegue elevando 35 ao cubo, e subtrahindo o resultado do numero dado ; nestas condições não deve haver resto algum.

Consideremos presentemente um numero inteiro de sete, oito ou nove algarismos.

Seja o numero 43614208.

```
43.614.208 | 352          35       352
27         |----          35       352
------     | 27          ---       ---
166.14     | 3675        175       704
428.75                  105      1760
--------                ----     1056
  7392.08               1225    ------
436142.08                 35    123904
---------               ----       352
        0               6125    ------
                       3675     247808
                       -----    619520
                       42875   371712
                               43614208
```

O numero dado sendo maior que 1000, a sua raiz cubica, maior que o numero 10, consta de dezenas e unidades, e o numero dado compõe-se de quatro partes, a saber : *cubo das dezenas, triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades, triplo do producto das dezenas pelo quadrado das unidades e cubo das unidades.*

Separando d'esse numero a primeira parte, o que se consegue prescindindo dos tres ultimos algarismos da direita, e extraindo a raiz cubica de 43614 milhares, acharemos as dezenas da raiz.

Ao resto 739 milhares reunindo as 208 unidades do numero dado, teremos o numero 739208, que se compõe das outras tres partes: *triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades, triplo do producto das dezenas pelo quadrado das unidades e cubo das unidades da raiz.*

Separando d'esse numero o *triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades*, o que se consegue prescindindo dos dous ultimos algarismos da direita, e dividindo as 7392 centenas pelas 3675 centenas, triplo do quadrado das dezenas, teremos as unidades da raiz.

A verificação do algarismo 2 das unidades da raiz se faz como no exemplo precedente.

O raciocinio sendo o mesmo, seja qual fôr o numero de algarismos do numero dado, podemos estabelecer a seguinte

REGRA.— *Divide-se o numero em classes de tres algarismos da direita para a esquerda. Extrahe-se a raiz cubica do maior cubo contido na primeira classe á esquerda, e subtrahe-se esse maior cubo da classe considerada.*

A' direita do resto escreve-se a classe seguinte, separam-se os dous ultimos algarismos da direita, divide-se a parte á esquerda pelo triplo do quadrado da raiz achada, e o quociente escreve-se á direita da raiz. Eleva-se a raiz achada ao cubo e o resultado subtrahe-se do numero formado pelas duas primeiras classes.

A' direita do segundo resto escreve-se a classe seguinte, separam-se os dous ultimos algarismos da direita, divide-se a parte á esquerda pelo triplo do quadrado da raiz achada, e o quociente escreve-se á direita da raiz. Eleva-se a raiz achada ao cubo, e o resultado subtrahe-se do numero formado pelas tres primeiras classes.

A' direita do terceiro resto escreve-se a classe seguinte, e assim se continúa até ter considerado todas as classes do numero dado.

Escrevendo á direita de um dos restos a classe seguinte, e separando-se os dous ultimos algarismos da direita, se a parte á esquerda fôr menor que o triplo do quadrado da raiz achada, escreve-se um zero á direita da raiz e considera-se a classe seguinte.

Póde acontecer que se escreva na raiz um algarismo maior ou menor do que deve ser; ha, porém, meio de conhecer o erro.

Se o algarismo fôr maior, elevando a raiz achada ao cubo, o resultado será maior que o numero dado. Se fôr menor, será menor ou igual a tres vezes o quadrado da raiz, mais tres vezes a mesma raiz mais um.

222. Os numeros inteiros não são todos cubos. As raizes d'esses numeros não podem ser fracções proprias, porque as fracções proprias só podem ser raizes cubicas de outras fracções menores, nem numeros mixtos ou fracções improprias.

Com effeito, se a fracção impropria $\frac{a}{b}$ fosse a raiz cubica exacta do numero inteiro N, elevando essa fracção ao cubo, teriamos:

$$\frac{a^3}{b^3}=N$$

A fracção impropria $\frac{a}{b}$, podendo ser sempre considerada irreductivel, os seus termos a e b serão numeros primos entre si; os seus cubos a^3 e b^3 serão tambem numeros primos entre si (92); o primeiro membro da igualdade será essencialmente fraccionario, e como o segundo é inteiro, a igualdade é impossivel e por consequencia a fracção impropria $\frac{a}{b}$ não póde ser a raiz cubica exacta do numero inteiro N.

As raizes cubicas d'esses numeros são numeros incommensuraveis, e se obtêm com a approximação que se quizer.

Para achar as raizes cubicas d'esses numeros, sem erro de uma unidade, basta achar as raizes cubicas dos maiores cubos contidos nelles. A raiz cubica do numero 43725658

```
43.725658     | 352          35        352
27            |-----         35        352
-----------   |  27         ----      -----
16 7.25       | 3675         175        704
42 8 75                     105        1760
-----------                 ----       1056
  8 50 6.58                 1225      ------
43 6 14 2 08                  35      123904
-----------                 ----         352
  1 11 4 50                 6125      ------
                           3675       247808
                           -----      619520
                           42875      371712
                                     --------
                                     43614208
```

é 352, sem erro de uma unidade.

Vejamos como se obtem a raiz cubica de um numero qualquer A, sem erro de $\frac{1}{n}$ de uma unidade qualquer.

Evidentemente $A=\frac{A \times n^3}{n^3}$

Suppondo effectuado o producto $A \times n^3$, e representando por a a raiz cubica do maior cubo contido nelle, teremos

$$a^3 < A \times n^3 < (a+1)^3$$

Dividindo esses tres numeros por n^3, resulta

$$\frac{a^3}{n^3} < \frac{A \times n^3}{n^3} < \frac{(a+1)^3}{n^3}$$

ou ainda

$$\left(\frac{a}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{a+1}{n}\right)^3$$

O numero A está comprehendido entre os cubos dos numeros $\frac{a}{n}$ e $\frac{a+1}{n}$, cuja differença é $\frac{1}{n}$

O numero $\frac{a}{n}$ é raiz cubica do numero dado por falta, e $\frac{a+1}{n}$ é raiz cubica do mesmo numero por excesso.

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

REGRA.—*Se a fracção que indicar o erro tiver para denominador um numero qualquer, sendo porém o numerador a unidade, multiplica-se o numero inteiro pelo cubo do denominador da fracção que indica o erro, extrahe-se a raiz cubica do producto e divide-se essa raiz pelo denominador.*

Se a fracção que indicar o erro tiver para termos numeros quaesquer, se fôr, por exemplo, $\frac{m}{p}$, multiplica-se o numero inteiro pelo cubo da fracção invertida, extrahe-se a raiz cubica do producto, e divide-se o resultado pela mesma fracção invertida.

Facilmente se reconhece ser esse o meio para obter a raiz cubica nessa ultima hypothese, observando que

$$\frac{m}{p}=\frac{1}{\frac{p}{m}}$$

Estas regras são applicaveis tambem ás fracções, como veremos depois.

1.º EXEMPLO: Achar a raiz cubica de 5, sem erro de $\frac{1}{4}$.

$$\sqrt[3]{5}=\frac{\sqrt[3]{5\times4^3}}{4}=\frac{\sqrt[3]{5\times64}}{4}=\frac{\sqrt[3]{320}}{4}=\frac{6}{4}$$

sem erro de $\frac{1}{4}$

2.º EXEMPLO: Achar a raiz cubica de 23, sem erro de $\frac{1}{100}$

$$\sqrt[3]{23}=\frac{\sqrt[3]{23\times100^3}}{100}=\frac{\sqrt[3]{23\times1000000}}{100}=\frac{\sqrt[3]{23000000}}{100}=$$

$$=\frac{284}{100}=2,84, \text{ sem erro de } \frac{1}{100}.$$

3.º EXEMPLO: Achar a raiz cubica de 2, sem erro de $\frac{5}{6}$

$$\sqrt[3]{2}=\frac{\sqrt[3]{2\times\frac{6^3}{5}}}{\frac{6}{5}}=\frac{\sqrt[3]{2\times\frac{216}{125}}}{\frac{6}{5}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{432}{125}}}{\frac{6}{5}}=$$

Raizes cubicas dos numeros fraccionarios

223. Trataremos em primeiro logar das raizes cubicas dos numeros decimaes.

Um numero decimal sendo cubo, o numero de algarismos da parte fraccionaria é sempre 3 ou multiplo de 3, porque, como já vimos, o cubo de um numero decimal tem sempre na parte fraccionaria o triplo do numero de algarismos que tiver a parte fraccionaria da raiz.

Seja a fracção 0,000512, da qual se quer extrair a raiz cubica.

Se prescindirmos da virgula e extrahirmos a raiz cubica do resultado 512, acharemos 8; porém, sendo 512 um milhão de vezes maior que a fracção dada, a raiz cubica de 512 ou o numero 8 é cem vezes maior que a raiz pedida; para termos, pois, a raiz pedida, devemos tornar cem vezes menor o numero 8, o que se consegue separando para a direita dous algarismos, e será 0,08 a raiz cubica de 0,000512.

Pelo que se conclue a seguinte

REGRA.—*Prescinde-se da virgula, extrahe-se a raiz cubica do resultado e separa-se nessa raiz para a direita a terça parte do numero de algarismos que tiver a parte fraccionaria do numero dado.*

Se um numero decimal não fôr cubo, a sua raiz cubica se obtem com a approximação que se quizer, applicando o processo apresentado na approximação das raizes cubicas dos numeros inteiros (222).

Seja o numero 7,3245684, do qual se quer extrair a raiz cubica sem erro de $\frac{1}{100}$.

Multiplicando o numero 7,3245684 por 1000000, cubo de 100, teremos 7324568,4.

Extrahindo a raiz cubica do maior cubo contido no numero 7324568, acha-se 193, e separando nessa raiz para a direita dous algarismos, teremos 1,93, raiz cubica do numero dado, sem erro de $\frac{1}{100}$.

Seja ainda o numero 0,0042, do qual se quer extrahir a raiz cubica sem erro de $\frac{1}{100}$.

Multiplicando o numero 0,0042 por 1000000, cubo de 100, resulta o numero 4200.

Extrahindo a raiz cubica do maior cubo contido em 4200, acha-se 16, e a raiz cubica pedida é 0,16.

224. Tratemos presentemente das raizes cubicas das fracções ordinarias.

A raiz cubica de uma fracção ordinaria póde ser obtida, convertendo a fracção ordinaria em decimal, e extrahindo depois a raiz cubica da fracção decimal.

Ha, porém, um processo especial para determinar a raiz cubica de uma fracção ordinaria. Este processo consiste em *extrahir a raiz cubica do numerador e depois a do denominador, dividindo a primeira raiz pela segunda.*

Não sendo conveniente que o denominador do resultado seja um numero incommensuravel, o que acontece sempre que o denominador não fôr cubo, devemos considerar na extracção das raizes cubicas das fracções ordinarias os dous casos seguintes:

1.º CASO.—*O denominador é cubo.*

2.º CASO.—*O denominador não é cubo.*

No primeiro caso, *extrahe-se a raiz cubica do numerador, exacta ou approximadamente, e a exacta do denominador, dividindo a primeira raiz pela segunda.*

EXEMPLOS:

$$\sqrt[3]{\frac{343}{513}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{7}{8}$$

$$\sqrt[3]{\frac{7}{216}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{6}$$

No segundo caso, *transforma-se a fracção numa outra igual, tendo para denominador um numero que seja cubo, o que se consegue em geral multiplicando ambos os termos da fracção pelo quadrado do denominador e applicando depois ao resultado o processo do 1º caso.*

EXEMPLO:

$$\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{100}{125}} = \frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{100}}{5}$$

O cubo de um numero inteiro sendo o producto dos cubos dos
factores primos que entram na composição d'esse numero (214), se-
gue-se que no segundo caso e na hypothese de ser o denominador um nu-
mero multiplo, póde-se sem multiplicar os termos da fracção pelo qua-
drado do denominador, effectuar a transformação, multiplicando-os por
um outro numero menor.

O numero pelo qual se deve multiplicar os dous termos da fra-
cção se conhece, decompondo o denominador em factores primos, e for-
mando um producto dos factores primos que lhe faltarem para que esse
denominador seja cubo.

Seja a fracção $\frac{7}{300}$ da qual se quer extrair a raiz cubica.

O denominador $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, e como para elle ser cubo faltam os factores primos 2, 3^2 e 5, o producto d'esses numeros ou 90 é o numero pelo qual devemos multiplicar os termos da fracção $\frac{7}{300}$ para que ella seja transformada em outra igual, tendo para denominador um cubo.

Effectuando a multiplicação e extrahindo depois a raiz cubica, teremos:

$$\sqrt[3]{\frac{7}{300}} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 90}{300 \times 90}} = \sqrt[3]{\frac{630}{27000}} = \sqrt[3]{\frac{630}{30}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{630}}{\sqrt[3]{30^3}} = \frac{\sqrt[3]{630}}{30}$$

PARTE SEGUNDA

CAPITULO VII

THEORIA DAS RAZÕES E PROPORÇÕES

225. *Ao resultado da comparação de duas grandezas da mesma especie, denomina-se razão ou relação.*

Comparando-se duas grandezas, procura-se saber de quanto uma d'ellas excede á outra, ou quantas vezes uma d'ellas contém a outra.

Na primeira hypothese, a razão se diz por differença; e, na segunda, por quociente.

A razão de duas grandezas é igual á razão dos numeros que as representam, sendo, porém, medidas com a mesma unidade.

Representemos por A e B as duas grandezas, e por U a unidade; supponde *a* o numero de vezes que U se contém em A, e *b* o numero de vezes que U se contém em B, teremos:

$$\frac{A}{U}=a \quad , \quad \frac{B}{U}=b$$

ou

$$A=Ua \quad , \quad B=Ub$$

ou ainda

$$\frac{A}{B}=\frac{Ua}{Ub}=\frac{a}{b}$$

A razão por differença entre 12 e 8 é 12—8. A razão por quociente entre 24 e 4 é $\frac{24}{4}$.

Os dous numeros que se comparam chamam-se *termos da razão*. Ao primeiro chama-se *antecedente* e ao segundo *consequente*.

Na razão por differença o antecedente é o numero 12 e o consequente o numero 8. Na razão por quociente o antecedente é o numero 24 e o consequente o numero 4.

Uma razão por differença não se altera, sommando ou subtrahindo o mesmo numero a ambos os termos.

Porque o resto de uma subtracção não muda, sommando ou subtrahindo ao minuendo e ao subtrahendo o mesmo numero.

Uma razão por quociente não se altera, multiplicando ou dividindo ambos os termos por um mesmo numero.

Porque o quociente de uma divisão não muda, multiplicando ou dividindo o dividendo e o divisor por um mesmo numero.

Da equidifferença

226. *Equidifferença é a expressão da igualdade de duas razões por differença.*

Assim, sendo 12—7 igual a 8—3, teremos a equidifferença 12—7=8—3, que póde ainda ser representada do seguinte modo: 12.7:8.3, e lê-se 12 para 7 como 8 para 3. Os termos 12 e 8 são os antecedentes das duas razões, e os termos 7 e 3, os consequentes. Os termos primeiro e quarto chamam-se tambem *extremos*, e os termos segundo e terceiro chamam-se *meios* da equidifferença.

Se a equidifferença tiver a fórma 12.7:8.3, e houver necessidade no calculo de represental-a do outro modo 12—7=8—3, chama-se a esta transformação *avaliação das razões.*

Propriedade fundamental

227. *Em toda a equidifferença a somma dos extremos é igual á somma dos meios.*

Demonstração.—Suppondo que os quatro numeros *a*, *b*, *c*, *d* formem uma equidifferença, teremos :

$$a.\ b:\ c.\ d$$

avaliando as razões da equidifferença, resulta

$$a-b=c-d$$

sommando a ambos os membros da igualdade a quantidade b+d, acha-se

$$a-b+b+d=c-d+b+d$$

reduzindo os termos semelhantes, teremos finalmente

$$a+d=b+c$$

resultado que demonstra a propriedade.

228. Reciproca.—*Sendo a somma de dous numeros igual á somma de outros dous, os quatro numeros formam uma equidifferença, collocando nos extremos as parcellas de uma somma e nos meios as parcellas da outra somma.*

Demonstração.—Suppondo a+d=b+c.

Subtrahindo de ambos os membros d'essa igualdade a quantidade b+d, temos

$$a+d-b-d=b+c-b-d$$

reduzindo os termos semelhantes, acha-se

$$a-b=c-d$$

ou

$$a.\ b:\ c.\ d$$

resultado que demonstra a proposição.

229. CONSEQUENCIAS DA PROPRIEDADE FUNDAMENTAL

1.ª Consequencia.—*Uma equidifferença não se altera, sommando ou subtrahindo a ambos os antecedentes, a ambos os consequentes ou a ambos os termos de uma mesma razão um mesmo numero.*

Porque essas mudanças dos termos da equidifferença não alteram a propriedade : *a somma dos extremos é igual á somma dos meios.*

2.ª CONSEQUENCIA.—*Mudando os logares dos meios, passando os extremos para os logares dos meios e os meios para os logares de extremos, e finalmente mudando a collocação das razões, a equidifferença não se altera.*

Porque, não soffrendo alteração alguma a propriedade : *a somma dos extremos é igual á somma dos meios,* não deixa de existir a equidifferença.

A primeira transformação chama-se *alternar;* a segunda, *inverter;* e a terceira, *transpôr.*

3.ª CONSEQUENCIA.—*Sendo um dos termos de uma equidifferença desconhecido, é sempre facil determinar o seu valor. Se fôr meio, subtrahe-se o meio conhecido da somma dos extremos ; e se fôr extremo, subtrahe-se o extremo conhecido da somma dos meios.*

Assim, sendo a . b : x . c.

Applicando á equidifferença a propriedade fundamental, temos

$$b+x=a+c$$

subtrahindo de ambos os membros *b*, resulta

$$x=a+c-b.$$

O mesmo raciocinio prova que da equidifferença a . b : c . x, resulta $x=b+c-a$.

Uma equidifferença tendo os meios iguaes chama-se *continua.*

O meio de uma equidifferença continua chama-se *meio differencial.*

Em uma equidifferença continua, *o dobro do meio é igual á somma dos extremos, e por consequencia o meio differencial é igual á semisomma dos extremos.*

Sendo a . x : x . b, $x=\frac{a+b}{2}$

Da proporção

230. *Proporção é a expressão da igualdade de duas razões por quociente.*

Assim, sendo as duas razões $\frac{24}{8}$ e $\frac{18}{6}$ iguaes, ellas formam a proporção $\frac{24}{8}=\frac{18}{6}$, que se póde ainda representar do seguinte modo : 24 : 8 :: 18 : 6, e lê-se como nas equidifferenças 24 para 8 como 18 para 6.

As denominações dos termos são as mesmas que nas equidifferenças.

A proporção tendo a fórma 24 : 8 :: 18 : 6 e havendo no calculo necessidade de represental-a do outro modo $\frac{24}{8}=\frac{18}{6}$, chama-se esta transformação *avaliação das razões.*

231. PROPRIEDADE FUNDAMENTAL.—*Em toda a proporção o producto dos extremos é igual ao producto dos meios.*

$$a : b :: c : d$$

avaliando as razões da proporção, acha-se

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

multiplicando ambos os membros da igualdade por bd, temos

$$\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d}$$

ou ainda

$$ad=bc$$

resultado que demonstra a propriedade.

232. RECIPROCA.—*Sendo o producto de dous numeros igual ao* [illegible] *outro producto.*

DEMONSTRAÇÃO.—Suppondo $ad=bc$.

Dividindo ambos os membros d'essa igualdade por bd, temos

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$$

simplificando, vem

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ou ainda

$$a : b :: c : d$$

resultado que demonstra a proposição.

233. CONSEQUENCIAS DA PROPRIEDADE FUNDAMENTAL.

1ª CONSEQUENCIA.—*Uma proporção não se altera multiplicando ou dividindo os dous antecedentes, os dous consequentes, ou os dous termos de uma razão por um mesmo numero.*

Porque, mudando d'essa fórma os termos da proporção, ella não soffre alteração alguma, pois o producto dos extremos continúa a ser igual ao producto dos meios.

2ª CONSEQUENCIA.—*Mudando os logares dos meios, passando os extremos para os logares dos meios e os meios para os logares dos extremos, ou finalmente mudando a collocação das razões, a proporção não se altera.*

Porque, continuando o producto dos extremos a ser igual ao producto dos meios, não deixa de existir proporção.

A primeira transformação chama-se *alternar*; a segunda, *inverter*; e a terceira, *transpôr*.

3ª CONSEQUENCIA.—*Sendo desconhecido um dos termos de uma proporção, é sempre possivel determinar o seu valor. Se fôr extremo, divide-se o producto dos meios pelo extremo conhecido, e se fôr meio, divide-se o producto dos extremos pelo meio conhecido.*

Assim, sendo $a : b :: c : x$.

Applicando á proporção a propriedade fundamental, temos

$$ax=bc$$

dividindo ambos os membros da igualdade por *a*, resulta

$$x=\frac{bc}{a}$$

O mesmo raciocinio prova que da proporção $a : b :: x : c$, resulta $x=\frac{ac}{b}$.

Uma proporção tendo os meios iguaes chama-se *continua*.

O meio de uma proporção continua chama-se *meio proporcional*.

Em uma proporção continua, *o quadrado do meio é igual ao producto dos extremos, e*, por consequencia, *o meio proporcional é igual á raiz quadrada do producto dos extremos.*

Sendo $a : x :: x : b$, $x=\sqrt{ab}$

Propriedades das proporções

234. 1.ª PROPRIEDADE.—*Em toda a proporção a somma ou differença dos dous primeiros termos está para o segundo como a somma ou differença dos dous ultimos está para o quarto.*

Suppondo $a : b :: c : d$.

Avaliando as razões, temos

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Sommando ou subtraindo a ambos os membros da igualdade a unidade, vem

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$$

ou

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

ou finalmente

$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$

235. Corollario.—*Em toda a proporção, a somma ou differença dos dous primeiros termos está para o primeiro, como a somma ou differença dos dous ultimos está para o terceiro.*

Sendo $a : b :: c : d$.

Applicando á proporção a primeira propriedade, acha-se

$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$

alternando a ultima proporção e tambem a primeira, resulta

$$a \pm b : c \pm d :: b : d$$

$$a : c :: b : d$$

sendo as segundas razões iguaes, as primeiras tambem são, e portanto

$$a \pm b : c \pm d :: a : c$$

alternando o resultado, teremos finalmente

$$a \pm b : a :: c \pm d : c$$

236. 2ª Propriedade.—*Em toda a proporção, a somma ou differença dos antecedentes está para a somma ou differença dos consequentes como qualquer antecedente para o seu consequente.*

Seja a proporção: $a : b :: c : d$.

Alternando-a, temos

$$a : c :: b : d.$$

applicando ao resultado a primeira propriedade, acha-se

$$a \pm c : c :: b \pm d : d,$$

alternando a ultima proporção, resulta

$$a \pm c : b \pm d : d :: c : d.$$

237. 1º Corollario.—*Em toda a proporção, a somma dos antecedentes está para a sua differença, como a somma dos consequentes para a sua differença.*

Seja a proporção $a : b :: c : d$.

Applicando á proporção a segunda propriedade, temos

$$a \pm c : b \pm d :: c : d$$

separando as duas proporções, acha-se

$$a + c : b + d :: c : d$$

$$a - c : b - d :: c : d$$

sendo as segundas razões iguaes, segue-se que

$$a + c : b + d :: a - c : b - d$$

alternando a ultima proporção, resulta

$$a + c : a - c :: b + d : b - d.$$

238. 2º Corollario.—*Em uma serie de razões por quociente iguaes, a somma de alguns ou de todos os antecedentes está para a somma de alguns ou de todos os consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu consequente.*

Seja a serie $A : a :: B : b :: C : c :: D : d :: E : e ::$ etc.

Considerando as duas primeiras razões, resulta a proporção

$$A : a :: B : b$$

applicando a essa proporção a primeira parte da segunda propriedade, vem

$$A + B : a + b :: B : b$$

substituindo na ultima proporção em logar de B : b a razão C : c acha-se

$$A+B : a+b :: C : c$$

applicando na ultima proporção a primeira parte da segunda propriedade, temos

$$A+B+C : a+b+c :: C : c$$

substituindo em logar de C : c a razão D : d, teremos

$$A+B+C : a+b+c :: D : d$$

applicando ao resultado a segunda propriedade, vem

$$A+B+C+D : a+b+c+d :: D : d$$

substituindo na ultima proporção a razão D : d pela razão E : e, resulta

$$A+B+C+D : a+b+c+d :: E : e$$

e assim continuando se consegue demonstrar a propriedade para um numero qualquer de razões.

239. 3ª PROPRIEDADE. — *Multiplicando ordenadamente os termos de duas ou mais proporções, os productos formarão ainda uma proporção.*

Sejam as proporções

$$a : b :: c : d$$
$$e : f :: g : h$$
$$l : m :: n : o$$

Avaliando as razões nas tres proporções, acha-se

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$$

$$\frac{l}{m}=\frac{n}{o}$$

multiplicando as tres igualdades ordenadamente, temos

$$\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\times\frac{l}{m}=\frac{c}{d}\times\frac{g}{h}\times\frac{n}{o}$$

ou

$$\frac{ael}{bfm}=\frac{cgn}{dho}$$

ou, finalmente

$$ael : bfm :: cgn : dho$$

240. COROLLARIO. — *Quatro numeros formando proporção, as potencias do mesmo gráo d'esses quatro numeros tambem formam proporção.*

Seja a proporção a : b :: c : d

Considerando *m* proporções como a proporção dada e multiplicando ordenadamente os termos d'essas *m* proporções, resulta

$$a^m : b^m :: c^m : d^m.$$

241. 2º COROLLARIO. — *Quatro numeros formando proporção, as raizes do mesmo gráo d'esses quatro numeros tambem formam.*

Seja a proporção a : b :: c : d.

Avaliando as razões da proporção, acha-se

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

extraindo as raizes do gráo *m* de ambos os membros da igualdade, temos

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$$

ou

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$$

ou ainda

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$$

Regra de tres

242. Duas grandezas variando ao mesmo tempo, póde acontecer que uma d'ellas tornando-se maior ou menor um certo numero de vezes, a outra se torne o mesmo numero de vezes maior ou menor; ou tornando-se uma d'ellas maior ou menor um certo numero de vezes, a outra se torne o mesmo numero de vezes menor ou maior.

Na primeira hypothese a relação entre dous valores quaesquer dados á primeira grandeza, sendo igual á relação dos valores correspondentes da segunda, ellas variam na mesma relação ou são directamente proporcionaes. Assim, o preço de uma peça de fazenda varia com o numero de metros que ella contém. Se o numero de metros torna-se duas, tres, quatro, etc., vezes maior ou menor, o preço será duas, tres, quatro, etc., vezes maior ou menor, e portanto o preço da peça de fazenda é directamente proporcional ao numero de metros.

Na segunda hypothese a relação entre dous valores quaesquer dados á primeira grandeza, sendo igual á relação inversa dos valores correspondentes da segunda, as duas grandezas variam na razão inversa ou são inversamente proporcionaes. Assim, o tempo necessario para fazer uma certa obra está na razão inversa do numero de operarios.

Uma grandeza, sendo dependente de muitas outras, é directamente proporcional a cada uma d'ellas, quando fazendo variar sómente uma e conservando os valores de todas as outras, a grandeza de que se trata fôr proporcional áquella que se fizer variar. Assim, o peso de uma barra de ferro depende de seu comprimento, de sua largura e de sua espessura. Suppondo a largura e espessura constantes, fazendo variar sómente o comprimento, o peso será proporcional a esse comprimento; se o comprimento e a espessura forem constantes, o peso é proporcional á largura; e se, finalmente, o comprimento e a largura forem constantes, o peso é proporcional á espessura. O peso de uma barra de ferro é, por consequencia, proporcional ao comprimento, largura e espessura, suppondo que a natureza da barra seja sempre a mesma.

Uma grandeza póde ser ao mesmo tempo directamente proporcional a certas grandezas e inversamente proporcional a outras. Assim, o numero de operarios necessarios para fazer uma certa obra depende da quantidade da obra, do numero de dias em que ella deve ser feita e do numero de horas de trabalho em cada dia. Se o numero de dias em que a obra deve ser feita e o numero de horas de trabalho não mudarem, o numero de operarios é directamente proporcional á quantidade da obra; se a quantidade da obra e o numero de horas de trabalho em cada dia forem constantes, o numero de operarios é inversamente proporcional ao numero de dias de trabalho; se, finalmente, a quantidade da obra e o numero de dias de trabalho não mudarem, o numero de operarios é inversamente proporcional ao numero de horas de trabalho em cada dia. O numero de operarios é, por consequencia, directamente proporcional á quantidade da obra e inversamente proporcional ao numero de dias em que ella deve ser feita e ao numero de horas de trabalho em cada dia.

243. *Conhecido o valor numerico de uma grandeza, assim como tambem os valores de outras ás quaes a primeira é directa ou inversamente proporcional, achar o valor que toma a primeira quando as outras adquirem valores determinados, é o fim da* REGRA DE TRES.

Toda questão de regra de tres reduz-se á determinar o quarto termo de uma proporção, sendo conhecidos os outros tres.

Os tres termos conhecidos podem ser dados immediatamente pelo enunciado da questão, ou resultar da multiplicação de duas ou mais proporções ordenadamente.

Na primeira hypothese a regra de tres se diz simples, e na segunda se diz composta.

Regra de tres simples

244. Na regra de tres simples, dos tres termos conhecidos, os dous da mesma especie chamam-se *termos principaes*; o outro termo conhecido e desconhecido, que são tambem da mesma especie, chamam-se *termos relativos*.

Assim, na questão: *Se 47 kilogrammos de uma certa mercadoria custam 54$000, qual o preço de 32 kilogrammos da mesma mercadoria?*

Os termos principaes são 47 kilogrammos e 32 kilogrammos, e os termos relativos são 54$000 e a quantia correspondente a 32 kilogrammos.

Na questão: *Se 23 operarios gastam 25 dias para fazer uma certa obra, em quantos dias 47 operarios farão a mesma obra?*

Os termos principaes são 23 operarios e 47 operarios, e os termos relativos são 25 dias e o numero de dias correspondentes a 47 operarios.

Se em uma regra de tres simples, crescendo ou diminuindo um dos termos principaes, crescer ou diminuir o relativo correspondente, ella se diz *directa*; isto é, os termos principaes são directamente proporcionaes aos seus relativos; se, pelo contrario, crescendo ou diminuindo um dos principaes, diminuir ou crescer o seu relativo, ella se diz *inversa*; isto é, os termos principaes são inversamente proporcionaes aos seus relativos.

A regra de tres simples, sendo directa: *um dos principaes com o seu relativo devem occupar os logares de antecedentes; o outro principal e o seu relativo, os logares de consequentes; ou um dos principaes com o seu relativo formam a primeira razão, e o outro principal com o seu relativo formam a segunda razão.*

Se a regra de tres fôr inversa: *um dos principaes com o seu relativo devem occupar os logares de extremos, o outro principal com seu relativo devem occupar os logares de meios da proporção.*

Conhecendo-se a proporcionalidade entre os quatro numeros e se a relação entre elles é directa ou inversa, fica a questão reduzida a estabelecer a proporção e tirar d'ella o valor do termo desconhecido.

Consideremos alguns exemplos:

1º EXEMPLO.—*Se 47 kilogrammos de uma certa mercadoria custam 54$000, qual será o preço de 32 kilogrammos da mesma mercadoria?*

Custando 47 kilogrammos de uma certa mercadoria 54$000, o preço do dobro, do triplo, do quadruplo, etc., d'esse numero de kilogrammos, será o dobro, o triplo, o quadruplo, etc., de 54$000; o preço da metade, da terça parte, da quarta parte, etc., d'esse mesmo numero de kilogrammos, será a metade, a terça parte, a quarta parte, etc., de 54$000.

A questão é uma regra de tres simples e directa. Representando por x a quantia correspondente a 32 kilogrammos, teremos

$$47 : 32 :: 54000 : x$$

d'onde

$$x = \frac{32 \times 54000}{47} = \frac{1728000}{47} = 36765\frac{45}{47}$$

2º EXEMPLO.—*Uma fonte fornece 400 litros d'agua em 2 horas; quanto tempo será necessario para encher um tanque de 225 litros?*

Se a fonte fornece 400 litros d'agua em 2 horas, fornecerá o dobro, o triplo, o quadruplo, etc., d'esse numero de litros d'agua no dobro, no triplo, no quadruplo etc., d'esse numero de horas, e fornecerá a metade, a terça parte, a quarta parte, etc., do numero de litros d'agua na metade, na terça parte, na quarta parte, etc., d'esse numero de horas.

A questão é uma regra de tres simples e directa. Chamando x o numero de horas correspondente a 225 litros, teremos

$$400 : 225 :: 2 : x$$

d'onde

$$x = \frac{225 \times 2}{400} = \frac{450}{400} = 1\frac{50}{400} = 1\frac{1}{8}$$

3º EXEMPLO.—*23 operarios gastam 25 dias para fazer uma certa obra; em quantos dias 47 operarios farão a mesma obra, trabalhando elles sempre uniformemente?*

Se 23 operarios gastam 25 dias para fazer uma certa obra, o dobro, o triplo, o quadruplo, etc., do numero de operarios gastará a metade, a terça parte, a quarta parte, etc., d'esse numero de dias; e a metade, a terça parte, a quarta parte, etc., d'esse numero de operarios gastará o dobro, o triplo, o quadruplo, etc., do numero de dias.

A questão é uma regra de tres simples e inversa. Representando por x o numero de dias correspondente a 47 operarios, teremos

$$47 : 23 :: 25 : x$$

d'onde

$$x = \frac{23 \times 25}{47} = \frac{575}{47} = 12\frac{11}{47}$$

4.º EXEMPLO. — *A tripulação de um navio só tem mantimentos para 19 dias, e conta com uma viagem de 25 dias; como se deve reduzir a ração diaria de cada praça?*

Facilmente se reconhece que quanto maior fôr o numero de dias de viagem, tanto menor será a ração; quanto menor fôr o numero de dias de viagem, tanto maior será a ração.

A questão é uma regra de tres simples e inversa.

Suppondo ser 19 o numero de dias de viagem, a ração diaria de cada praça será 1, e chamando x a ração diaria correspondente a 25 dias de viagem, teremos

$$25 : 19 :: 1 : x$$

d'onde

$$x = \frac{19}{25}$$

Regra de tres composta

245. A regra de tres composta consta sempre de tantas regras de tres simples, quantas forem as condições das quaes depender o valor da incognita.

A resolução de uma regra de tres composta consiste em exprimir por uma proporção cada uma das regras de tres simples que resultar da consideração das diversas condições.

Multiplicando depois essas diversas proporções ordenadamente, o resultado será uma proporção que resolverá o problema.

Exemplo. — *32 operarios construiram em 12 dias, trabalhando 10 horas por dia, uma muralha tendo de comprimento 28 metros; quantos operarios construirão em 23 dias, trabalhando 8 horas por dia uma muralha como a primeira, tendo, porém, de comprimento 57 metros?*

O numero pedido de operarios depende de tres circumstancias, a saber: do numero de dias de trabalho, do numero de horas de trabalho em cada dia, e, finalmente, do comprimento da muralha.

Fazendo variar sómente o numero de dias de trabalho, a questão reduz-se á seguinte:

Se 32 operarios construiram em 12 dias uma certa muralha, quantos operarios construirão em 23 dias a mesma muralha?

Nessa questão observa-se que, crescendo o numero de dias de trabalho, diminue o numero de operarios, e se, pelo contrario, diminuir o numero de dias de trabalho, cresce o numero de operarios.

É uma regra de tres simples e inversa. Chamando x o numero de operarios para construir a obra em 23 dias, teremos:

$$23 : 32 :: 12 : x \qquad \text{(a)}$$

Fazendo variar o numero de horas de trabalho em cada dia, o resultado será a seguinte regra de tres:

Se x operarios fazem em um certo numero de dias (23) uma certa obra, trabalhando 10 horas por dia, quantos operarios farão a mesma obra no mesmo numero de dias, trabalhando, porém, 8 horas por dia?

Crescendo o numero de horas de trabalho, diminue o numero de operarios; diminuindo o numero de horas de trabalho, cresce o numero de operarios. A questão é uma regra de tres simples e inversa.

Representando por x' o numero de operarios para fazer a obra em 23 dias, trabalhando 8 horas por dia, teremos

$$8 : 10 :: x : x' \qquad \text{(b)}$$

Fazendo, finalmente, variar o numero de metros, a questão reduz-se á seguinte:

Se x operarios fazem em um certo numero de dias (23), trabalhando um certo numero de horas por dia (8), uma obra de 28 metros de comprimento, quantos operarios farão no mesmo numero de dias, trabalhando o mesmo numero de horas por dia, uma obra de 57 metros de comprimento?

Chamando x'' esse numero de operarios, e notando-se que crescendo o numero de metros cresce o numero de operarios, e diminuindo o numero de metros diminue o numero de operarios, se reconhece ser a questão uma regra de tres simples e directa, e portanto

$$28 : 57 :: x' : x'' \qquad \text{(c)}$$

Multiplicando ordenadamente as tres proporções (a, b, c), temos

$$23 \times 8 \times 28 : 32 \times 10 \times 57 :: 12\,xx' : xx'x''$$

dividindo os dous termos da segunda razão por xx', acha-se

$$23 \times 8 \times 28 : 32 \times 10 \times 57 :: 12 : x''$$

d'onde

$$x'' = \frac{32 \times 10 \times 57 \times 12}{23 \times 8 \times 28}$$

Methodo de reducção á unidade

246. Os problemas de regras de tres podem ser resolvidos sem o auxilio das proporções, por um processo mais simples, conhecido por *methodo de reducção á unidade*.

No primeiro problema :

47 kilogrammos de certa mercadoria custando 54000

1 kilogrammo da mesma mercadoria custa .... $\frac{54000}{47}$

32 kilogrammos da mesma mercadoria custam .... $\frac{54000 \times 32}{47}$

No segundo problema :

A fonte fornece 400 litros d'agua em .... 2 horas

fornecerá um litro d'agua em .... $\frac{2}{400}$ da hora

fornecerá 225 litros d'agua em .... $\frac{2 \times 225}{400}$ da hora.

No terceiro problema :

23 operarios fazendo a obra em .... 25 dias

1 operario fará a obra em .... 25×23 dias

47 operarios farão a obra em .... $\frac{25 \times 23}{47}$ do dia

No quarto problema :

Se o numero de dias de viagem fôr 19, a ração é 1

Sendo 1 o numero de dias de viagem, a ração é 19

Sendo 25 o numero de dias de viagem, a ração é .... $\frac{19}{25}$

No problema de regra de tres composta :

Suppondo o numero de horas de trabalho o mesmo (10 horas), e tambem o mesmo numero de metros (28), a questão reduz-se á seguinte :

32 operarios fazem em 12 dias, trabalhando um certo numero de horas (10) por dia, uma certa obra (28 metros) ; quantos operarios farão a mesma obra em 23 dias, trabalhando o mesmo numero de horas por dia ?

Se para fazer a obra em 12 dias o numero de operarios é 32,

para fazer a obra em um dia o numero de operarios será 32×12 e para fazer a obra em 23 dias o numero de operarios será $\frac{32 \times 12}{23}$.

Fazendo variar sómente o numero das horas de trabalho, a questão reduz-se á seguinte :

$\frac{32 \times 12}{23}$ *operarios fazem uma certa obra (28 metros) em um certo numero de dias (23), trabalhando 10 horas por dia ; quantos operarios farão a mesma obra no mesmo numero de dias, trabalhando, porém, 8 horas por dia ?*

Se trabalhando 10 horas por dia o numero dos operarios é $\frac{32 \times 12}{23}$ trabalhando uma hora por dia o numero de operarios será $\frac{32 \times 12 \times 10}{23}$ e trabalhando 8 horas por dia o numero de operarios será $\frac{32 \times 12 \times 10}{23 \times 8}$

Fazendo variar o numero de metros, fica a questão reduzida á seguinte :

$\frac{33 \times 12 \times 10}{23 \times 8}$ *operarios fazem uma obra de 28 metros de comprimento em um certo numero de dias (23), trabalhando um certo numero de horas (8) por dia ; quantos operarios farão uma obra de 57 metros de comprimento no mesmo numero de dias, trabalhando o mesmo numero de horas por dia ?*

Se para fazer uma obra de 28 metros o numero de operarios é $\frac{32 \times 13 \times 10}{23 \times 8}$, para fazer uma obra de um metro de comprimento o numero de operarios será $\frac{32 \times 12 \times 10}{23 \times 8 \times 28}$ e para fazer uma obra de 57 metros de comprimento o numero de operarios será $\frac{32 \times 12 \times 10 \times 57}{22 \times 8 \times 28}$

Regra conjuncta

247. *O fim da regra conjuncta é determinar a relação entre dous numeros quaesquer, sendo conhecidas as relações d'esses numeros com outros determinados.*

Conhecendo-se, por exemplo, as relações entre os numeros A e B, B e C, C e D, é sempre possivel determinar a relação entre o primeiro numero A e o ultimo D.

Supponhamos que se tenha

$$A : B :: 4 : 5$$
$$B : C :: 6 : 7$$
$$C : D :: 8 : 9$$

Multiplicando ordenadamente os termos das tres proporções, acha-se

$$A\times B\times C : B\times C\times D :: 4\times 6\times 8 : 5\times 7\times 9$$

dividindo os dous termos da primeira razão por $B\times C$, resulta

$$A : D :: 4\times 6\times 8 : 5\times 7\times 9$$

A regra conjuncta é uma regra de tres composta, na qual os consequentes das diversas razões são da mesma especie que os antecedentes das razões seguintes. Ella é empregada na conversão de moedas de dous paizes, conhecendo-se as relações d'essas moedas com as de outros paizes.

EXEMPLO. — *Se 48 francos valem 39 soldos de Inglaterra, se 13 soldos de Inglaterra valem 8 florins da Allemanha, se 50 florins da Allemanha valem 9 ducados de Hamburgo; quantos ducados de Hamburgo valem 250 francos?*

A resolução da questão consiste em converter successivamente os 250 francos em soldos de Inglaterra, em florins da Allemanha e em ducados de Hamburgo, o que se consegue do seguinte modo:

Se 48 francos valem 39 soldos de Inglaterra, 250 francos a quantos soldos de Inglaterra correspondem?

É uma regra de tres simples e directa, e o resultado se obtem por meio da proporção

$$48 : 39 :: 250 : x \qquad (a)$$

x representa o numero de soldos de Inglaterra correspondente a 250 francos.

Se 13 soldos de Inglaterra valem 8 florins da Allemanha, 250 francos, ou x soldos de Inglaterra a quantos florins da Allemanha correspondem?

É uma regra de tres simples e directa; o resultado se obtem por meio da proporção

$$13 : 8 :: x : x' \qquad (q)$$

x' representa o numero de florins da Allemanha correspondente a x soldos de Inglaterra ou 250 francos.

Se 50 florins da Allemanha valem 9 ducados de Hamburgo, 250 francos, ou x soldos de Inglaterra; x' florins da Allemanha a quantos ducados de Hamburgo correspondem?

É uma regra de tres simples e directa, e o resultado é obtido por meio da proporção

$$50 : 9 :: x' : x'' \qquad (c)$$

x'' é o numero de ducados de Hamburgo correspondente a x' florins da Allemanha, ou a x soldos de Inglaterra, ou finalmente a 250 francos.

Multiplicando ordenadamente os termos das proporções (a, b, c), temos

$$48\times 13\times 50 : 39\times 8\times 9 :: 250\ xx' : xx'x''$$

dividindo os dous termos da segunda razão por xx', acha-se

$$48\times 13\times 50 : 39\times 8\times 9 :: 250 : x''$$

d'onde

$$x'' = \frac{39\times 8\times 9\times 250}{48\times 13\times 50}$$

O problema precedente póde ainda ser resolvido por um outro processo mais simples.

Representando por a, b, c, d, os valores intrinsecos do franco, do soldo de Inglaterra, do florim da Allemanha e do ducado de Hamburgo, temos

$$48a = 39b$$
$$13b = 8c$$
$$50c = 9d$$
$$d.x = 250a$$

multiplicando ordenadamente as quatro igualdades, acha-se

$$48\times 13\times 50\ abcdx = 39\times 8\times 9\times 250\ abcd$$

dividindo ambos os membros da ultima igualdade por $abcd$, resulta

$$48\times 13\times 50x = 39\times 8\times 9\times 250$$

d'onde

$$x = \frac{39\times 8\times 9\times 250}{48\times 13\times 50}$$

Regra de juros

248. *A regra de juros tem por fim determinar o rendimento produzido por uma certa quantia no fim de um certo tempo e segundo uma certa taxa.*

Taxa de juros é o rendimento de uma quantia determinada em tempo tambem determinado.

A quantia determinada é 100 e o tempo determinado é um anno.

A taxa de juros deve ser considerada como unidade de juros. Em diversos paizes, como no Brasil, a taxa é convencional ; em outros a lei estabelece um maximo.

A quantia posta a juros chama-se *capital*.

O juro de uma quantia depende do *capital*, da *taxa* e do *tempo*.

A regra de juros sendo um caso particular da regra de tres composta, as questões de juros são resolvidas pelo mesmo processo empregado na resolução d'essa regra.

As questões de juros podem ainda ser resolvidas por meio de formulas, que facilmente podemos estabelecer considerando uma questão geral de juros.

Supponhamos que se trate de achar o rendimento produzido pela quantia c, no fim de t annos, sendo a taxa i.

Esta questão póde ser enunciada ainda do seguinte modo :

Se a quantia 100 rende i *no fim de um anno, a quantia* c *quanto renderá no fim de* t *annos ?*

Considerando o tempo o mesmo (1 anno), a questão reduz-se á seguinte :

Se a quantia 100 rende i *no fim de um certo tempo* (1 anno), *a quantia* c *quanto renderá no fim do mesmo tempo ?*

É uma regra de tres simples e directa, e o resultado é conhecido pela seguinte proporção

$$100 : c :: i : x \qquad \text{(a)}$$

x representa o rendimento da quantia c em um anno.

Fazendo variar o tempo, a questão reduz-se á seguinte :

Se no fim de um anno uma certa quantia c *rende* x, *quanto renderá no fim de* t *annos a mesma quantia ?*

É uma regra de tres simples e directa, e é resolvida por meio da proporção :

$$1 : t :: x : x' \qquad \text{(b)}$$

x' representa o rendimento da quantia c no fim de t annos.

Multiplicando ordenadamente os termos das proporções (a, b), temos

$$100 : ct :: ix : xx'$$

dividindo os dous termos da segunda razão por x, resulta

$$100 : ct :: i : x'$$

d'onde

$$x' = \frac{cit}{100}$$

ou, representando o juro por j

$$j = \frac{cit}{100}$$

D'esta fórmula deduzimos facilmente mais tres, que resolverão outras questões sobre juros, tendo ellas por fim determinar o capital, a taxa e o tempo, sendo conhecidas as outras tres quantidades.

Com effeito, multiplicando ambos os membros da igualdade

$j = \frac{cit}{100}$ por 100, teremos

$$100\,j = cit.$$

dividindo successivamente ambos os membros da ultima igualdade por it, por ct e por ci, teremos

$$c = \frac{100\,j}{it} \qquad (2)$$

$$i = \frac{100\,j}{ct} \qquad (3)$$

$$t = \frac{100\,j}{ci} \qquad (4)$$

As quatro fórmulas $j = \frac{cit}{100}$, $c = \frac{100\,j}{it}$, $i = \frac{100\,j}{ct}$ e $t = \frac{100\,j}{ci}$ resolvem as quatro questões seguintes :

1ª *Determinar o juro de uma quantia, conhecendo o capital, a taxa e o tempo.*

2ª *Determinar o capital, conhecendo o juro, a taxa e o tempo.*

3ª *Determinar a taxa, conhecendo o capital, o juro e o tempo.*

4ª *Determinar o tempo, conhecendo o capital, a taxa e o juro.*

A fórmula (1) póde ser obtida mais facilmente, resolvendo a questão pelo processo de reducção á unidade.

Com effeito, se 100 rende i no fim de um anno, renderá it no fim de t annos; e 100 rendendo it no fim de t annos, 1 renderá $\frac{it}{100}$, e c renderá $\frac{cit}{100}$. Representando esse rendimento por j, teremos

$$j=\frac{cit}{100}$$

Appliquemos as fórmulas a alguns exemplos :

1º Exemplo.—*Calcular o juro do capital 3:528$000 durante 5 annos, sendo a taxa de juros 6.*

Applicando a fórmula $j=\frac{cit}{100}$, temos

$$j=\frac{3528000\times6\times5}{100}=\frac{105840000}{100}=1{:}058\$400$$

2º Exemplo.—*Calcular o capital que, posto a juros durante 5 annos, sendo a taxa 6, produz o juro de 1:058$400.*

Applicando a fórmula $c=\frac{100j}{it}$, acha-se

$$c=\frac{1058400\times100}{6\times5}=\frac{105840000}{30}=3{:}528\$000$$

3º Exemplo.—*Calcular a taxa, sabendo que o capital 3:528$000 no fim de 5 annos produziu 1:058$400.*

Applicando a fórmula $i=\frac{100\,j}{cit}$, vem

$$i=\frac{1058400\times100}{3528000\times5}=\frac{105840000}{17640000}=6.$$

4.º Exemplo.—*Calcular o tempo necessario para que o capital 3:528$000, posto a juros segundo a taxa 6, produza 1:058$400.*

Applicando a fórmula $t=\frac{100j}{ci}$, resulta :

$$t=\frac{1058400\times100}{3528000\times6}=\frac{105840000}{21168000}=5.$$

Regra de desconto

249. *A regra de desconto tem por fim determinar o abatimento que se deve fazer na importancia de uma letra, pagavel no fim de certo tempo, mas cujo pagamento se deseja realisar antes do dia do vencimento.*

Toda letra tem dous valores : *valor nominal e valor actual.*

Valor nominal de uma letra é a quantia que está escripta na letra, ou é o valor que ella tem no dia do vencimento.

Valor actual de uma letra é o valor que ella tem na occasião em que é descontada.

Ha dous modos de descontar uma letra :

O desconto racional, denominado tambem *desconto por dentro*, e o *desconto commercial*, conhecido tambem pelo nome de *desconto por fóra.*

O desconto racional é o juro do valor actual, e o desconto commercial é o juro do valor nominal da letra.

Sendo o valor actual menor que o nominal, o desconto racional é menor que o desconto commercial, e por isso é o mais favoravel ao portador da letra.

Dos dous modos de descontar as letras, é o desconto commercial preferido ao racional, por ser o calculo mais expedito ; mas é preciso notar que procedendo d'esse modo importa em confundir taxa de juros com taxa de descontos e considerar o valor nominal da letra como uma quantia emprestada.

Desconto racional

250. As questões de desconto, sendo regras de tres, resolvem-se do mesmo modo que essas regras; mas podemos, como na regra de juros, deduzir fórmulas por meio das quaes se consiga resolver todas essas questões.

Para estabelecer essas fórmulas, supponhamos que se trate de resolver a seguinte questão :

Determinar o valor actual de uma letra de c *francos, que se vence no fim de* t *annos, sendo a taxa de desconto* i.

Se a taxa de desconto é i, a quantia 100 corresponde no fim de um anno a $100+i$; no fim de dous annos deve corresponder a $100+2i$; no fim de tres annos, a $100+3i$; no fim de t annos corresponde a $100+it$; e a questão fica, pois, reduzida á seguinte :

Se 100+it no fim de t *annos vale actualmente 100, a quantia* c *que valor terá actualmente ?*

É uma regra de tres simples e directa, e a proporção que a resolve é

$$100+it : c :: 100 : x$$

d'onde

$$x = \frac{100c}{100+it}$$

ou, chamando V o valor actual,

$$V = \frac{100c}{100+it} \qquad (1)$$

Se, em logar do valor actual, se quizer achar o desconto racional, o enunciado da questão será : *se pela quantia 100+it desconta-se* it, *pela quantia* c *quanto se descontará ?*

E a proporção será

$$100+it : c :: it : x$$

d'onde

$$x = \frac{cit}{100+it}$$

Ou, chamando d o desconto racional,

$$d = \frac{cit}{100+it} \qquad (2)$$

Sendo a somma do valor actual e do desconto racional igual ao valor nominal, segue-se que, conhecida uma d'essas quantidades, se

póde indirectamente conhecer a outra, e para isso basta subtrair a quantidade conhecida do valor nominal.

Assim

$$V = c - \frac{cit}{100+it} = \frac{100c+cit-cit}{100+it} = \frac{100c}{100+it} \qquad (1)$$

$$d = c - \frac{100\,c}{100+it} = \frac{100c+cit-100c}{100+it} = \frac{cit}{100+it} \qquad (2)$$

Da fórmula n. 1 podemos deduzir mais tres fórmulas, que resolverão as questões seguintes :

1.ª *Determinar o valor nominal de uma letra, conhecendo o valor actual, a taxa e o tempo.*

2.ª *Determinar a taxa, conhecendo os valores nominal e actual e a taxa.*

3.ª *Determinar o tempo, conhecendo os valores nominal e actual e a taxa.*

Com effeito, multiplicando por $100+it$ ambos os membros da igualdade $V = \frac{100c}{100+it}$, temos

$$100V+Vit=100c$$

d'onde

$$c = \frac{100V+Vit}{100}$$

Na igualdade $100V+Vit=100c$, subtraindo 100 V de ambos os membros, resulta

$$Vit=100c-100V$$

d'onde

$$i = \frac{100c-100V}{Vt}$$

$$t = \frac{100c-100V}{Vi}$$

Da fórmula n. 2 podemos deduzir mais tres fórmulas, que resolverão as questões seguintes :

1ª *Determinar o valor nominal, conhecendo o desconto, a taxa e o tempo.*

2ª *Determinar a taxa, conhecendo o valor nominal, o desconto e o tempo.*

3ª *Determinar o tempo, conhecendo o valor nominal, o desconto e a taxa.*

Com effeito, multiplicando por $100+it$ ambos os membros da igualdade $d=\frac{cit}{100+it}$, temos

$$100d+dit=cit$$

d'onde

$$c=\frac{100d+dit}{it}$$

Subtraindo dit de ambos os membros da igualdade $100d+dit=cit$, vem

ou

$$100d=cit-dit$$
$$100d=(ct-dt)\,i$$

d'onde

$$i=\frac{100d}{ct-dt}$$

A igualdade $100d=cit-dit$ se póde ainda escrever

$$100d=(ci-di)\,t$$

d'onde

$$t=\frac{100d}{ci-di}$$

Consideremos dous exemplos para applicar as duas fórmulas principaes.

1.º EXEMPLO:

Achar o valor actual de uma letra de 4:800$000, que se vence no fim de 4 annos, sendo a taxa de desconto 5.

Applicando a fórmula $V=\frac{100c}{100+it}$ acha-se

$$V=\frac{4800000\times100}{100+5\times4}=\frac{480000000}{120}=\frac{48000000}{12}=4000000$$

2.º EXEMPLO:

Achar o desconto racional que se deve fazer em uma letra de 4:800$000 pagavel no fim de 4 annos, sendo a taxa de desconto 5.

Applicando a fórmula $d=\frac{cit}{100+it}$, temos

$$d=\frac{4800000\times5\times4}{100+5\times4}=\frac{4800000\times20}{120}=\frac{96000000}{120}=800000$$

Desconto commercial

251. Sendo o desconto commercial o juro do valor nominal da letra, e esse valor sendo uma quantia conhecida, a questão se reduz a determinar o juro de uma quantia, e então o desconto commercial é obtido por meio da fórmula empregada para calcular o juro de uma quantia.

Chamando D o desconto commercial, temos

$$D=\frac{cit}{100} \qquad (3)$$

Subtrahindo do valor nominal da letra o desconto, teremos o valor actual.

Chamando v esse valor, acha-se

$$v=c-\frac{cit}{100}=\frac{100c-cit}{100} \qquad (4)$$

Da fórmula $D=\frac{cit}{100}$ deduzem-se as seguintes

$$c=\frac{100\,D}{it}$$

$$i=\frac{100\,D}{ct}$$

$$t=\frac{100\,D}{ci}$$

Da fórmula $v=\frac{100c-cit}{100}$, deduzem-se as fórmulas

$$c=\frac{100v}{100-it}$$

$$i=\frac{100c-100v}{ct}$$

$$t=\frac{100c-100v}{ci}$$

Terminaremos o estudo da regra de desconto, provando que a differença dos dous descontos é igual ao juro do desconto por dentro.

Com effeito, a differença dos dous descontos é

$$\frac{cit}{100} - \frac{cit}{100+it} = \frac{100cit+ci^2t^2}{10000+100it} - \frac{100cit}{10000+100it} =$$

$$= \frac{100cit+ci^2t^2-100cit}{10000+100it} = \frac{ci^2t^2}{10000+100it}$$

e o juro do desconto por dentro se obtem substituindo na fórmula $j = \frac{cit}{100}$, em logar de *c*, de *i* e de *t* os seus valores; fazendo o que acha-se:

$$j = \frac{\frac{cit}{100+it} \times it}{100} = \frac{\frac{ci^2t^2}{100+it}}{100} = \frac{ci^2t^2}{10000+100it}$$

Os dous resultados demonstram a proposição.

Regra de cambio

252. *A regra de cambio tem por fim facilitar transacções commerciaes entre duas cidades de um mesmo paiz, ou de paizes diversos sobre as moedas e os seus titulos correspondentes.*

Essas transacções são sempre realisadas entre certos individuos que devem fazer pagamentos, e outros que têm de effectuar cobranças em diversas cidades, por meio de uma letra de cambio, ou de uma ordem que os credores enviam aos seus devedores para estes pagarem o valor da letra ao respectivo portador.

Assim, se um individuo A, do Rio de Janeiro, fôr devedor de 3:000$000 a um individuo B, do Rio Grande do Sul, e se um individuo C, do Rio de Janeiro, fôr credor de um individuo D, do Rio Grande do Sul, de igual quantia: A compra a C uma letra de cambio sobre o Rio Grande do Sul, isto é, uma ordem dirigida por C a D para pagar a A ou á sua ordem a quantia de 3:000$000.

A passa essa letra a B, que no dia do vencimento recebe de D o seu valor; ficando d'esse modo pagas as dividas de A do Rio de Janeiro, para com B, do Rio Grande do Sul, e a de D, do Rio Grande do Sul, para com C, do Rio de Janeiro, sem os riscos e despezas que sempre ha com o movimento de dinheiro de uma para outra cidade.

Se a transacção é realisada entre duas cidades de um mesmo paiz, o cambio denomina-se *interno*; e se é realisada entre duas cidades de paizes differentes, o cambio denomina-se *externo*.

Saccar ou *vender* uma letra de cambio é trocar essa letra pelo correspondente em moeda. A letra de cambio em relação ao vendedor chama-se *saque*; e em relação ao comprador, *remessa*.

O preço que em uma cidade tem qualquer quantia pagavel em outra denomina-se *cambio*.

O cambio do Rio de Janeiro sobre o Rio Grande do Sul é o valor de 1000 réis pagaveis no Rio Grande do Sul. O cambio de Londres sobre Paris é o valor do franco pagavel em Paris, e o cambio de Paris sobre Londres é o valor da libra esterlina pagavel em Londres.

O cambio compõe-se de dous termos:

O primeiro é o numero 100, termo fixo que corresponde ao valor da letra de cambio, e chama-se o *certo*; o segundo é variavel, corresponde ao valor da letra, e chama-se *incerto*.

O *cambio está ao par* quando se dá em moeda nacional um valor igual ao valor que em moeda estrangeira deve receber o portador da letra no dia do seu vencimento.

O *cambio se diz abaixo* ou *acima* do *par* quando se dér em moeda nacional um valor menor ou maior que o valor da letra em moeda estrangeira.

As questões de cambio são *directas* ou *indirectas*. São directas, quando se realisam entre duas praças; indirectas, quando entram na combinação uma ou mais praças intermediarias, sejam de um paiz, sejam de paizes differentes.

Questão de cambio interno

253. 1ª Questão:

Sendo o cambio sobre o Rio Grande do Sul a 6 por cento contra o Rio de Janeiro, quanto custará uma letra de cambio para pagar 2:000$000 no Rio Grande do Sul?

Se o preço de uma letra de 100 é 106, o preço de uma letra de 2:000$000 será determinado pela proporção

$$100 \cdot 106 :: 2000000 \cdot x$$

d'onde

$$x=\frac{106\times 2000000}{100}=\frac{212000000}{100}=2120000$$

2ª Questão :

Tendo-se comprado uma letra de cambio por 2:120$000, sendo o cambio a 6 por cento a favor da letra, qual é o valor da letra ?

Se 106 é o preço de uma letra de 100, o valor da letra que custou 2:120$000 será conhecido pela proporção

$$106 : 100 : : 2120000 : x$$

d'onde

$$x=\frac{2120000\times 100}{106}=\frac{212000000}{106}=2000000$$

3.ª Questão:

Comprou-se uma letra de 2:000$000 por 2:120$000. Qual foi o preço do cambio ?

Se o preço de uma letra de 2:000$0000 é 2:120$000, o preço de uma letra de 100 é dado pela proporção:

$$2000000 : 2120000 : : 100 : x$$

d'onde

$$x=\frac{2120000\times 100}{2000000}=\frac{212000000}{2000000}=106$$

O preço do cambio é 106—100=6.

Questões de cambio externo

254. Nas questões de cambio externo trata-se sempre de saber em moeda estrangeira o valor correspondente a uma quantia em moeda nacional, ou de determinar em moeda nacional o valor correspondente a uma quantia em moeda estrangeira.

1.ª Questão :

Um negociante de Paris deve a um outro do Rio de Janeiro a quantia de 9:000$000. Querendo o negociante do Rio de Janeiro receber essa divida, sacca uma letra de cambio sobre o seu devedor. Qual é em moeda franceza o valor da letra, sendo 450 réis o valor do franco ?

Se 450 réis é o valor de............ 1 franco

O valor de 1 real é.............. $\frac{1}{450}$ do franco

E o valor de 9000000 é $\frac{9000000}{450}$ fr. = 20.000 francos.

2.ª Questão :

Um negociante de Paris sacca uma letra de 20000 francos contra um negociante do Rio de Janeiro. Qual o valor da letra em moeda nacional, supponde que o valor do franco seja 450 réis ?

Se 1 franco vale................ 450 réis

20000 francos valem............. 20000×450 = 9000000.

3.ª Questão :

Achar o valor de 1 £ estando o cambio a 11.

Resolve-se por uma proporção : se, com 1$000, podemos obter 11 dinheiros, com quantos mil réis obteremos 1 libra, que é igual a 240 dinheiros :

$$27 : 1000 : : 240 : x$$

$$x=\frac{240\times 1000}{27}=21\$818$$

Na pratica escusa se multiplicar por 1000, comtanto que se opere a divisão de 240 pela taxa do cambio, considerando a parte decimal do quociente como fracção do mil réis, substituindo portanto a virgula pelo \$. Teriamos então : $x=\frac{240}{27}=21{,}818=21\$818$.

As questões de cambio indirecto resolvem-se sempre por meio de regras conjunctas.

EXEMPLOS :

Se o cambio entre Lisboa e Madrid é de 935 réis por 1 peso, entre Madrid e Paris é de um peso por 5 francos, entre Paris e Londres é de 25 francos por 1 libra esterlina, e entre Londres e Genova é de 1 libra esterlina por 26 liras, quanto se deve remetter de Lisboa para pagar em Genova 6000 liras ?

$$\begin{array}{rl} 935 & a = b \\ & b = 5\ c \\ 25 & c = d \\ & d = 26\ e \\ 6000 & e = ax \end{array}$$

Multiplicando ordenadamente as igualdades precedentes, resulta

ou $$935 \times 25 \times 6000 \text{ abcde} = 5 \times 26 \text{ abcdex}$$

d'onde $$935 \times 25 \times 6000 = 5 \times 26 \text{ x}$$

$$x = \frac{935 \times 25 \times 6000}{5 \times 26} = \frac{935 \times 5 \times 6000}{26} = \frac{28050000}{26} = 1078846.$$

Regra de divisão proporcional e de sociedade

255. *A regra de divisão proporcional tem por fim dividir um numero em partes proporcionaes a outros numeros dados.*

Esta regra tem muitas applicações; é nella que se funda a divisão dos impostos, a distribuição dos dividendos, a repartição dos lucros ou perdas entre duas ou mais pessoas associadas em um negocio qualquer.

Seja, em geral, um numero qualquer A para dividir em partes proporcionaes aos numeros m, n, p, etc.

Representando por x, x', x'', etc., as partes do numero A, proporcionaes aos numeros m, n, p, etc., teremos

$$m : x :: n : x' :: p : x'' :: \text{etc.}$$

Applicando á serie o segundo corollario da segunda propriedade das proporções (238), acha-se

$$m+n+p+\& : x+x'+x''+\& :: \left\{ \begin{array}{l} m : x \\ n : x' \\ p : x'' \end{array} \right.$$

substituindo $x+x'+x''+\&$ pelo seu valor A, resulta

$$m+n+p+\& : A :: \left\{ \begin{array}{l} m : x \\ n : x' \\ p : x'' \end{array} \right.$$

d'onde

$$x = \frac{Am}{m+n+p+\&}$$

$$x' = \frac{An}{m+n+p+\&}$$

$$x'' = \frac{Ap}{m+n+p+\&}$$

Traduzindo em linguagem ordinaria esses diversos resultados, se obtem a seguinte

REGRA.—*Para dividir um numero em partes proporcionaes a certos numeros dados, divide-se pela somma d'estes o numero que se trata de dividir, e multiplica-se o quociente separadamente por esses numeros.*

256. A regra de divisão proporcional toma o nome de regra de sociedade, tratando-se de dividir, por duas ou mais pessoas associadas em certo negocio, o lucro ou perda que resulta d'esse negocio.

Devendo-se attender na regra de sociedade ás quantias com que entram os socios, e aos tempos durante os quaes elles estão na sociedade, ha quatro hypotheses a considerar:

1ª *Os socios entram com quantias iguaes e estão na sociedade durante o mesmo tempo.*

2ª *Os socios entram com quantias differentes e estão na sociedade durante o mesmo tempo.*

3ª *Os socios estão na sociedade durante tempos differentes e entram com quantias iguaes.*

4ª *Os socios entram com quantias differentes e estão na sociedade durante tempos differentes.*

Na primeira hypothese, *deve-se dividir igualmente pelos socios o lucro ou a perda total.*

Na segunda hypothese, *deve-se dividir o lucro ou perda total em partes proporcionaes ás entradas dos socios.*

Na terceira hypothese, *deve-se dividir o lucro ou perda total em partes proporcionaes aos tempos durante os quaes os socios estão na sociedade.*

Na quarta hypothese, *deve-se dividir o lucro ou perda total em partes proporcionaes aos productos das entradas pelos tempos.*

A divisão do lucro ou perda total nas tres primeiras hypotheses é razoavel e de justiça, sendo assim considerada por todos os negociantes.

Na quarta hypothese, a divisão do lucro ou perda total em partes proporcionaes aos productos das entradas pelos tempos é uma consequencia da segunda e terceira hypotheses.

Com effeito, sejam N e N' dous negociantes, e e e' as suas entradas, t e t' os tempos durante os quaes elles estiveram na sociedade;

e imagine-se um terceiro negociante N'' entrando para a sociedade com a mesma quantia *e* com que entrou o primeiro e estando nella durante o mesmo tempo *t'* que esteve o segundo.

Comparando-se as condições entre o primeiro negociante e o terceiro e entre este e o segundo, e chamando l, l', l'' os lucros ou perdas d'esses negociantes, resulta

$$l : l'' :: t : t'$$
$$l'' : l' :: e : e'$$

multiplicando ordenadamente os termos das duas proporções, temos

$$ll'' : l' l'' :: et : e' t'$$

dividindo os dous termos da primeira razão por l'', acha-se

$$l : l' :: et : e' t'$$

Resultado que demonstra a proposição.

Nas tres primeiras hypotheses, a regra de sociedade se diz simples, e na quarta se diz composta.

A regra de sociedade, quer seja simples, quer seja composta, reduzindo-se a dividir um numero em partes proporcionaes a certos numeros dados, na resolução das questões de sociedade podemos applicar as fórmulas já estabelecidas, representando nessas fórmulas A o lucro ou perda total, *m*, *n*, *p*, etc., entradas, tempos ou productos de entradas pelos tempos.

Estabelecidas estas noções, consideremos alguns exemplos:

1º EXEMPLO:

Tres pessoas associaram-se em um certo negocio, entrando a primeira com 4:000$000, a segunda com 5:000$000 e a terceira com 7:000$000. No fim de tres annos houve um lucro de 8:000$000, que se trata de dividir pelos socios.

Chamando x, x' e x'' os lucros dos socios, e applicando as fórmulas, teremos:

$$x = \frac{8000000 \times 4000000}{4000000+5000000+7000000} = \frac{32000000000000}{16000000} = 2000000$$

$$x' = \frac{8000000 \times 5000000}{4000000+5000000+7000000} = \frac{40000000000000}{16000000} = 2500000$$

$$x'' = \frac{8000000 \times 7000000}{4000000+5000000+7000000} = \frac{56000000000000}{16000000} = 3500000$$

2º EXEMPLO:

Tres pessoas associaram-se em um negocio, entrando com quantias iguaes, e estiveram na sociedade, o primeiro 5 annos, o segundo 3 annos e o terceiro 2 annos, e perderam 12:000$000.

Qual a perda de cada um dos socios?

Chamando x, x' e x'' as perdas dos socios, teremos:

$$x = \frac{12000000 \times 5}{5+3+2} = \frac{60000000}{10} = 6000000$$

$$x' = \frac{12000000 \times 3}{5+3+2} = \frac{36000000}{10} = 3600000$$

$$x'' = \frac{12000000 \times 2}{5+3+2} = \frac{24000000}{10} = 2400000$$

3º EXEMPLO:

Uma pessoa estabeleceu um negocio com a quantia de 12:500$000; cinco mezes depois associou-se uma outra com 20:000$000, e seis mezes depois da segunda associou-se uma terceira com 30:000$000. No fim de dous annos houve um lucro de 40:000$000, que se trata de dividir pelos socios, devendo tocar ao primeiro 5 por cento do lucro total, além da quota proporcional á quantia que empregou e ao tempo que esteve na sociedade.

Deduzindo do lucro total de 40:000$000 os 5 por cento ou 2:000$000, o resto 38:000$000 é a quantia a dividir pelos socios.

O primeiro socio, empregando 12500000 durante 24 mezes, deve ter o mesmo resultado que teria se empregasse 12500000×24, ou 300000000 durante um mez.

O segundo socio, empregando 20000000 durante 19 mezes, deve ter o mesmo resultado que teria se empregasse 20000000×19 ou 380000000 durante um mez.

O terceiro socio, empregando 30000000 durante 13 mezes, deve ter o mesmo resultado que teria se empregasse 30000000×13 ou 390000000 durante um mez.

Os lucros dos tres socios devem ser proporcionaes a esses tres productos.

Chamando x, x', x'' os lucros dos socios, temos

$$x = \frac{38000000 \times 30000000}{300000000+380000000+390000000} = \frac{1140000000}{107} = 10654205$$

$$x' = \frac{38000000 \times 38000000}{300000000+380000000+390000000} = \frac{1444000000}{107} = 13.495327$$

$$x'' = \frac{38000000 \times 39000000}{300000000+380000000+390000000} = \frac{1482000000}{107} = 13.850467$$

CAPITULO VIII

THEORIA ELEMENTAR DAS PROGRESSÕES

Serie é uma reunião de numeros que crescem ou decrescem segundo uma lei qualquer. Exemplos : a serie dos numeros pares, a serie dos numeros impares, a serie dos numeros primos, a serie dos numeros multiplos.

Uma serie toma o nome de progressão, se a lei de accrescimo ou diminuição de seus termos fôr constante.

As progressões são *crescentes* quando os termos augmentarem, e *decrescentes* se os termos diminuirem successivamente.

As progressões podem ser por *differença* ou por *quociente.*

Progressões por differença

257. *Progressão por differença, é uma série de numeros, cada um dos quaes excede ou é excedido pelo precedente de um numero constante que se chama a razão da progressão.*

A progressão por differença é *crescente*, quando cada termo excede o precedente.

EXEMPLO :

$$\div\ 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14, \text{ etc.}$$

A progressão por differença é *decrescente*, quando cada termo é excedido pelo precedente.

EXEMPLO :

$$\div\ 60.\ 55.\ 50.\ 45.\ 40.\ 35.\ 30, \text{ etc.}$$

Uma progressão por differença, crescente ou decrescente, não é mais do que uma serie de razões por differença iguaes, sendo cada termo da progressão consequente de uma razão e antecedente da seguinte, exceptuando o primeiro termo, que é sómente antecedente da primeira razão, e o ultimo, que é sómente consequente da ultima.

Assim, a progressão :

$$\div\ 2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12.\ 14.$$

póde ainda ser escripta :

$$2.\ 4 : 4.\ 6 : 6.\ 8 : 8.\ 10 : 10.\ 12 : 12.\ 14$$

A progressão :

$$\div\ 60.\ 55.\ 50.\ 45.\ 40.\ 35.\ 30$$

póde ser ainda escripta :

$$60.\ 55 : 55.\ 50 : 50.\ 45 : 45.\ 40 : 40.\ 35 : 35.\ 30$$

Tres termos consecutivos quaesquer de uma progressão por differença, formam sempre uma equidifferença continua.

258. A primeira questão a considerar no estudo das progressões por differença é : *calcular o valor de um termo qualquer, conhecendo o primeiro termo e a razão.*

Seja em geral a progressão

$$\div a.b.c.d.e.f.g.h., \text{etc.}$$

Suppondo crescente a progressão e chamando r a razão, temos :

$$\begin{aligned} b&=a+r \\ c&=b+r=a+r+r=a+2r \\ d&=c+r=a+2r+r=a+3r \\ e&=d+r=a+3r+r=a+4r \\ &\text{etc., etc., etc.,} \end{aligned}$$

Sendo o segundo termo igual ao primeiro mais a razão, o terceiro termo igual ao primeiro mais duas vezes a razão, o quarto termo igual ao primeiro mais tres vezes a razão, etc., segue-se que *um termo qualquer é sempre igual ao primeiro mais tantas vezes a razão quantos forem os termos precedentes.*

Representando por l um termo qualquer, por n o numero de termos desde o primeiro até o termo l, será $n—1$ o numero de termos precedentes, e o valor do termo l será (1)

$$l=a+(n-1)\,r.$$

Se a progressão fôr decrescente, temos

$$\begin{aligned} b&=a-r \\ c&=b-r=a-r-r=a-2r \\ d&=d-r=a-2r-r=a-3r \\ e&=d-r=a-3r-r=a-4r \\ &\text{etc., etc., etc.,} \end{aligned}$$

D'onde se conclue, como na hypothese precedente,

$$l = a - (n-1)\ r. \qquad (2)$$

Reunindo as duas fórmulas (1 e 2) por meio do signal $\pm$, resulta :

$$l = a \pm (n-1)\ r.$$

É por meio d'esta fórmula que se obtem o valor de um termo qualquer de uma progressão por differença conhecendo-se o primeiro termo da progressão, a razão e o numero de termos, desde o primeiro até aquelle que se determinar.

Se, por exemplo, se quizer determinar o decimo quinto termo da progressão crescente $\div 2.6.10\ldots$, será $a=2, r=4, n=15$, e teremos

$$l = 2 + 14 \times 4 = 2 + 56 = 58$$

Se é o decimo segundo termo da progressão decrescente $\div$ 150. 145. 140... que se quer conhecer, teremos

$$l = 150 - 11 \times 5 = 150 - 55 = 95$$

Da fórmula $l = a \pm (n-1)\ r$, podemos deduzir outras, por meio das quaes se póde determinar :

1.º *O valor do primeiro termo de uma progressão, conhecendo o ultimo termo, a razão e o numero de termos.*

2.º *O valor do numero de termos da progressão, conhecendo o primeiro termo, o ultimo e a razão.*

3.º *O valor da razão, conhecendo o primeiro termo, o ultimo e o numero de termos.*

Essas fórmulas são :

Para determinar o valor do primeiro termo :

$$a = l - (n-1)\ r, \qquad a = l + (n-1)\ r$$

Para determinar o numero de termos :

$$n = \frac{l + r - a}{r} \qquad n = \frac{a + r - l}{r}$$

Para determinar a razão :

$$r = \frac{l - a}{n - 1} \qquad r = \frac{a - l}{n - 1}$$

D'estas fórmulas a mais importante é a ultima, porque é empregada na resolução do seguinte problema, que, pelas suas applicações, é considerado como um dos mais importantes d'esta theoria :

Inserir entre dous termos quaesquer de uma progressão por differença um numero qualquer de meios differenciaes.

Antes de tratar d'esta questão, notemos que sendo m o numero de meios que se quer inserir entre os termos a e l de uma progressão, o numero de termos da progressão será $m+2$, e como esse numero é representado nas fórmulas por n, segue-se que $m+2=n$ ou $m+1=n-1$, e fazendo nas ultimas fórmulas a substituição, teremos

$$r = \frac{l - a}{m + 1} \qquad r = \frac{a - l}{m + 1}$$

Estas duas fórmulas se traduzem na seguinte

REGRA.—*Para inserir meios differenciaes entre dous termos quaesquer de uma progressão por differença, subtrae-se o menor do maior e divide-se o resto pelo numero de meios que se quer inserir, augmentado de uma unidade. O quociente é a razão da progressão.*

1.º EXEMPLO : *Inserir entre 4 e 32, 13 meios differenciaes.*

Applicando a fórmula $r = \frac{l - a}{m + 1}$, temos

$$r = \frac{32 - 4}{13 + 1} = \frac{28}{14} = 2$$

A progressão será

$\div$ 4. 6.8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. 32.

2º. EXEMPLO : *Inserir 14 meios differenciaes entre 50 e 5.*

Applicando a fórmula $r = \frac{a - l}{m + 1}$, temos

$$r = \frac{50 - 5}{14 + 1} = \frac{45}{15} = 3$$

A progressão será

$\div$50. 47. 44. 41. 38. 35. 32. 29. 26. 23. 20. 17. 14. 11. 8. 5.

Propriedades

PRIMEIRA PROPRIEDADE

259. *Inserindo-se entre os termos consecutivos de uma progressão por differença o mesmo numero de meios differenciaes, as progressões parciaes assim formadas constituem uma só progressão.*

Seja a progressão crescente ÷ a. b. c. d. e. f. g. h. etc.

Suppondo x o numero de meios a inserir entre a e b, b e c, c e d, etc., e chamando R, R', R'', etc., as razões das diversas progressões parciaes, temos

$$R = \frac{b-a}{x+1}$$
$$R' = \frac{c-b}{x+1}$$
$$R'' = \frac{d-c}{x+1}$$

Os denominadores das fracções que representam os valores das razões são evidentemente iguaes, e sendo os numeradores d'essas fracções todos iguaes á razão da progressão dada, segue-se que as razões das progressões parciaes são todas iguaes entre si, e como o primeiro termo de cada uma é igual ao ultimo da precedente, ellas ligam-se perfeitamente formando uma só.

Se a progressão ÷ a. b. c. d. e. f. g. h. etc. fôr decrescente, os valores das razões das progressões parciaes são :

$$R = \frac{a-b}{x+1}$$
$$R' = \frac{b-c}{x+1}$$
$$R'' = \frac{c-d}{x+1}$$

Sendo ainda esses valores iguaes entre si, as progressões parciaes ligam-se formando ainda uma só progressão.

Devemos notar que a razão da progressão que resulta da juncção das diversas progressões parciaes é o quociente da divisão da razão da progressão primitiva pelo numero de meios que inserirmos mais um.

SEGUNDA PROPRIEDADE

260. *Dous termos quaesquer de uma progressão por differença e dous que distem igualmente d'elles, formam sempre uma equidifferença.*

Seja a progressão ÷ a. b. c. d. e. f. g. h. m. o. p. q. s. . . .

Suppondo os termos b e p e os dous e e h equidistantes d'elles, trata-se de provar que

$$b . e : h . p$$

Considerando a progressão desde b até e, e substituindo na fórmula $l = a \pm (n-1) r$, em logar de l o seu valor e, e em logar de a o seu valor b, temos

$$e = b \pm (n-1) r \qquad (1)$$

Se considerarmos a progressão desde h até p, e substituirmos na mesma fórmula em logar de l o seu valor p, e em logar de a o seu valor h, teremos

$$p = h \pm (n-1) r \qquad (2)$$

Subtrahindo b de ambos os membros da primeira igualdade e h de ambos os membros da segunda, acha-se

$$e - b = \pm (n-1) r$$
$$p - h = \pm (n-1) r$$

Na penultima igualdade, n representa o numero de termos desde b até e, e na ultima representa o numero de termos desde h até p, e sendo por hypothese o numero de termos entre b e e o mesmo que entre h e p, segue-se que n tem o mesmo valor nas duas igualdades.

O mesmo acontece com r, porquanto na penultima igualdade representa a razão da progressão desde b até e, e na ultima representa a razão da progressão desde h até p, e a razão de uma progressão é um numero constante.

Sendo os segundos membros iguaes, os primeiros tambem são, e teremos

$$e - b = p - h$$

ou

$$e . b : p . h$$

ou, invertendo

$$b . e : h . p$$

SOMMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO POR DIFFERENÇA

261. Tratemos presentemente de deduzir a fórmula para determinar a somma dos termos de uma progressão por differença.

Seja a progressão

$$\div\ a.\ b.\ c.\ d. \ldots\ldots m.\ o.\ p.\ l.$$

Consideremos uma outra progressão, tendo os mesmos termos que a primeira, porém dispostos em ordem inversa.

$$\div\ l.\ p.\ o.\ m. \ldots\ldots d.\ c.\ b.\ a.$$

Chamando S a somma dos termos da primeira progressão, teremos

$$S = a + b + c + d + \ldots\ldots + m + o + p + l$$
$$S = l + p + o + m + \ldots\ldots + d + c + b + a$$

Sommando as duas igualdades ordenadamente, acha-se

$$2\,S = (a+l) + (b+p) + (c+o) + (d+m) \ldots\ldots +$$
$$+ (m+d) + (o+c) + (p+b) + (l+a)$$

Sendo as parcellas que estão no segundo membro iguaes entre si por causa da propriedade precedente, podemos em logar d'essas parcellas escrever uma d'ellas multiplicada por um numero que tenha tantas unidades quantas forem as parcellas ou os termos da progressão.

Chamando n o numero de termos da progressão, resulta

$$2\,S = (a+l)n$$

d'onde

$$S = \frac{(a+l)\,n}{2}$$ que se enuncia assim:

A somma dos termos de uma progressão por differença é igual á semi-somma dos termos extremos multiplicada pelo numero de termos.

Querendo-se a somma de um certo numero de termos, desde o primeiro até, por exemplo, o 12º, bastará considerar a progressão até esse termo e applicar-lhe a regra acima, fazendo l igual ao 12º termo e $n = 12$.

1º EXEMPLO:

Achar a somma dos termos na progressão:

$$\div\ 5.\ 10.\ 15.\ 20.\ 25.\ 30.\ 35.\ 40.\ 45.\ 50.\ 55.$$

Applicando a fórmula, acha-se

$$S = \frac{(5+55)\,11}{2} = \frac{60 \times 11}{2} = 30 \times 11 = 330$$

2º EXEMPLO:

Achar a somma dos termos na progressão:

$$\div\ 240.\ 232.\ 224.\ 216.\ 208.\ 200.\ 192.\ 184.\ 176.$$

Applicando a fórmula, temos

$$S = \frac{(240+176)\,9}{2} = \frac{416 \times 9}{2} = 208 \times 9 = 1872$$

Progressões por quociente

262. *Progressão por quociente é uma serie de numeros, cada um dos quaes é igual ao precedente multiplicado por um numero constante, que se chama razão da progressão.*

As progressões por quociente podem ser *crescentes* e *decrescentes*; são *crescentes* quando as razões forem maiores que a unidade, e *decrescentes* se as razões forem menores que a unidade.

A progressão $\div\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 :$ etc., é crescente e a razão é 2.

A progressão $\div\div\ 480 : 240 : 120 : 60 : 30 : 15 :$ etc., é decrescente e a razão é $\frac{1}{2}$

Uma progressão por quociente não é mais do que uma serie de razões por quociente iguaes, sendo cada termo da progressão consequente de uma razão e antecedente da razão seguinte; exceptuando o primeiro termo que é sómente antecedente da primeira razão, e o ultimo que é sómente consequente da ultima.

A progressão:

$$\div\div\ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$$

póde ainda ser escripta

$$2 : 4 :: 4 : 8 :: 8 : 16 :: 16 : 32 :: 32 : 64.$$

A progressão:

$$\div\div\ 240 : 140 : 60 : 30 : 15 : 7\tfrac{1}{2}$$

póde ainda ser escripta

$$240 : 120 :: 120 : 60 :: 60 : 30 :: 30 : 15 :: 15 : 7\tfrac{1}{2}$$

Tres termos consecutivos quaesquer de uma progressão por quociente formam sempre uma proporção continua.

263. A primeira questão a considerar no estudo das progressões é: *calcular o valor de um termo qualquer, conhecendo o primeiro termo e a razão.*

Seja em geral a progressão:

$$\div\!\div a : b : c : d : e : f : g : h : \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} b &= ar \\ c &= br = ar.r = ar^2 \\ d &= cr = ar.^2r = ar^3 \\ e &= dr = ar.^3r = ar^4 \\ \text{etc.} &\quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Sendo o segundo termo igual ao primeiro multiplicado pela razão, o terceiro termo igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada ao expoente 2, o quarto termo igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada ao expoente 3, etc., segue-se que: *um termo qualquer é sempre igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada a um expoente que tem tantas unidades quantos são os termos precedentes.*

Representando por l um termo qualquer, por n o numero de termos desde o primeiro até o termo l, será $n-1$ o numero de termos precedentes, e o valor do termo l será

$$l = a.\, r^{n.1}$$

É esta a fórmula por meio da qual se obtem o valor de um termo qualquer de uma progressão por quociente, conhecendo-se o primeiro termo, a razão e o numero de termos, desde o primeiro até aquelle que se quer determinar

Se, por exemplo, se quer determinar o 5° termo da progressão $\div\!\div$ 2 : 6 :............., será $a=2$, $r=3$ e $n=5$, e teremos

$$l = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$$

Se o termo que se quizer conhecer estiver muito afastado do primeiro, a questão fica dependendo de elevar a razão a uma potencia consideravel, operação que depende de muito tempo e trabalho, mas que se simplifica depois de conhecidas as propriedades dos logarithmos, como veremos adiante.

Da fórmula $l = ar^{n-1}$, podemos deduzir outras por meio das quaes se possa determinar:

1º *O valor do primeiro termo de uma progressão por quociente, conhecendo-se o ultimo, a razão e o numero de termos.*

2º *O valor da razão, conhecendo-se o primeiro termo, o ultimo e o numero de termos.*

3º *O valor do numero de termos da progressão, conhecendo-se o primeiro termo, o ultimo e a razão.*

A fórmula para resolver a primeira questão é

$$a = \frac{l}{r^{n-1}}$$

A fórmula para resolver a segunda questão é

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

A fórmula para resolver a terceira questão só póde ser deduzida depois de estudadas as propriedades dos logarithmos.

D'estas tres fórmulas a mais importante é a que tem por fim determinar o valor da razão, conhecendo-se o primeiro termo, o ultimo e o numero de termos da progressão, porque é por meio d'esta questão que se consegue *inserir entre dous termos quaesquer de uma progressão por quociente um numero qualquer de meios proporcionaes.*

Nas progressões por differença vimos que, sendo m o numero de meios a inserir, o numero de termos da progressão era igual a $m+2$, e que se podia substituir nas fórmulas $m+1$ em logar de $n-1$.

Feita a substituição na fórmula $r = \sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}$, resulta

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$$

Esta fórmula póde ser traduzida na seguinte

REGRA. — *Para inserir meios proporcionaes entre dous numeros dados, divide-se o segundo numero pelo primeiro, e do quociente se extrae a raiz do gráo designado pelo numero de meios augmentado de uma unidade. A raiz assim achada é a razão da progressão.*

As applicações d'esta regra dependem quasi sempre de muito tempo e trabalho, por ser necessario extrair a raiz de um gráo superior ao terceiro, operação esta que é simplificada depois de conhecidas as propriedades dos logarithmos.

Póde-se algumas vezes resolver a questão fazendo-a depender de uma serie de raizes quadradas, inserindo os termos um a um.

EXEMPLO :

Inserir entre a e *l sete meios proporcionaes.*

Inserindo entre os dous numeros um termo b, acha-se :

$$\div\!\div\ a : b : l$$

Inserindo entre a e b um termo c, e entre b e l um termo d, temos

$$: : a : c : b : d : l$$

Inserindo entre a e c um termo e, entre b e l um termo f, entre b e d um termo g, e entre d e l um termo h, resulta a progressão

$$: : a : e : c : f : b : g : d : h : l$$

e a questão fica resolvida.

Propriedades

264. Primeira propriedade :

Inserindo-se entre todos os termos consecutivos de uma progressão por quociente o mesmo numero de meios proporcionaes, as progressões parciaes assim formadas constituem uma só progressão.

Seja a progressão $\div\!\div$ a : b : c : d : e : f : g : h : etc.

Supponho que o numero de meios a inserir entre a e b, b e c,

c e d, etc., seja x, e chamando R, R', R'', etc., as razões das diversas progressões parciaes, temos

$$R = \sqrt[x+1]{\frac{b}{a}}$$

$$R' = \sqrt[x+1]{\frac{c}{b}}$$

$$R'' = \sqrt[x+1]{\frac{d}{c}}$$

As quantidades submettidas aos radicaes, sendo iguaes á razão da progressão dada, são iguaes entre si, e portanto as raizes do mesmo gráo d'essas quantidades são tambem iguaes entre si. Sendo as razões das diversas progressões parciaes iguaes entre si e sendo o primeiro termo de cada uma d'essas progressões igual ao ultimo da progressão precedente, ellas ligam-se formando uma só progressão.

Devemos notar que a razão da progressão final é igual á raiz do gráo marcado pelo numero de meios que inserimos mais um da razão da progressão primitiva:

265. Segunda propriedade:

Dous termos quaesquer de uma progressão por quociente e dous que distem igualmente d'elles, formam sempre uma proporção.

Seja a progressão $\div\!\div$ a : b : c : d : e : f : g : h : m : o : p : q : s : ...

Supponho os termos b e q e os dous f e h equidistantes d'elles; trata-se de provar que

$$b : f : : h : q$$

Considerando a progressão desde b até f e substituindo na fórmula $l = ar^{n-1}$, em logar de l seu valor f, e em logar de a o seu valor b, teremos

$$f = br^{n-1}$$

Se considerarmos a progressão desde h até q e substituirmos na mesma fórmula em logar de l o seu valor p, e em logar de a o seu valor h, temos

$$q=hr^{n-1}$$

Dividindo ambos os membros da primeira igualdade por b, e ambos os membros da segunda por h, acha-se

$$\frac{f}{b}=r^{n-1}$$

$$\frac{q}{h}=r^{n-1}$$

n na penultima igualmente representa o numero de termos desde b até f e na ultima o numero de termos desde h até q, e sendo por hypothese o numero de termos entre b e f o mesmo que entre h e q, segue-se que n tem o mesmo valor nas duas igualdades.

O mesmo acontece com r, porque r na penultima igualdade representa a razão da progressão desde b até f, e na ultima representa a razão da progressão desde h até q, e a razão da progressão é um numero constante.

Sendo iguaes os segundos membros, os primeiros são tambem, e teremos

$$\frac{f}{b}=\frac{q}{h}$$

ou

$$f : b : q : h$$

ou, invertendo

$$b : f : : h : q$$

266. Tratemos presentemente de deduzir as fórmulas para determinar a somma e o producto dos termos de uma progressão por quociente.

Seja a progressão

$$\div\div a : b : c : d : \ldots\ldots : m : o : p : l$$

Chamando r a razão da progressão, temos :

$$\begin{aligned} b &= ar \\ c &= br \\ d &= cr \\ &\vdots \\ o &= mr \\ p &= or \\ l &= pr \end{aligned}$$

Sommando as igualdades ordenadamente, acha-se

$$b+c+d+\ldots\ldots\ldots\ldots+o+p+l=$$
$$=(a+b+c+\ldots\ldots\ldots\ldots+m+o+p)\,r.$$

Representando por S a somma dos termos da progressão, a ultima igualdade se reduz a

$$S-a=(S-l)r$$

ou

$$S-a=Sr-lr$$

Sommando lr a ambos os membros da igualdade, vem

$$lr+S-a=Sr.$$

subtrahindo S de ambos os membros da ultima igualdade, acha-se

$$lr-a=Sr-S$$

ou

$$lr-a=(r-)1\ S$$

d'onde

$$S=\frac{lr-a}{r-1} \qquad (1)$$

Se na igualdade $S-a=Sr-lr$, sommarmos a a ambos os membros, teremos

$$S=a+Sr-lr$$

Subtrahindo Sr de ambos os membros da ultima igualdade, acha-se

$$S-Sr=a-lr$$

ou

$$(1-r)\ S=a-lr$$

d'onde

$$S=\frac{a-lr}{1-r} \qquad (2)$$

A primeira fórmula serve para as progressões crescentes, e a segunda para as decrescentes.

1º Exemplo:

Achar a somma dos termos da progressão:

$$\div\div\ 2:4:8:16:32:64:128:256.$$

Applicando a fórmula $S=\frac{lr-a}{r-l}$, acha-se

$$S=\frac{256\times2-2}{2-1}=\frac{512-2}{1}=510$$

2º Exemplo:

Achar a somma dos termos da progressão

$$\div\div\ 480:240:120:60:30:15.$$

Applicando a fórmula $S=\frac{a-lr}{1-r}$, acha-se

$$S=\frac{480-15\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{480-\frac{15}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{960-15}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{945}{2}}{\frac{1}{2}}=945$$

267. Para deduzir a fórmula por meio da qual se conhece o producto dos termos de uma progressão por quociente, seja ainda a progressão.

$$\div\div\ a:b:c:d:\ldots m:o:p:l.$$

Considerando uma outra progressão composta dos mesmos termos, dispostos, porém, em ordem inversa,

$$\div\div\ l:p:o:m:\ldots d:c:b:a.$$

Representando por P o producto dos termos da primeira progressão, teremos

$$P=a\times b\times c\times d\times\ \ldots\ \times m\times o\times p\times l$$
$$P=l\times p\times o\times m\times\ \ldots\ \times d\times c\times b\times a$$

multiplicando as duas igualdades ordenadamente, acha-se $P^2=al\times bp\times\times co\times dm\times\ldots\times md\times oc\times pb\times la$; sendo $al=bp=co=dm\ldots$ por causa da segunda propriedade das progressões por quociente, e suppondo que o numero de termos da progressão seja n, resulta

$$P^2=(al)^n$$

d'onde

$$P=\sqrt{(al)^n}\ .$$

CAPITULO IX

THEORIA ELEMENTAR DOS LOGARITHMOS

268. Na primeira parte d'este curso, tratando-se do estudo das seis operações elementares, vimos que a *addição*, a *multiplicação* e a *formação de potencias* eram operações directas ou de composição; sendo as outras tres, *subtracção*, *divisão* e *extracção de raizes*, indirectas ou de decomposição.

Podemos ainda classificar essas operações em tres grupos: 1º— *addição e subtracção*; 2º— *multiplicação e divisão*; 3º— *formação de potencias e extracção de raizes*.

As difficuldades de tempo e de trabalho que algumas vezes apresentam as operações pertencentes aos dous ultimos grupos, desapparecem com o conhecimento de uma outra operação, por meio da qual se consegue reduzir as operações do 2º grupo ás do 1º e as do 3º ás do 2º

A possibilidade d'essas transformações claramente se manifesta, comparando as fórmulas das progressões por differença com as correspondentes das progressões por quociente, reconhecendo-se que as *addições, subtracções, multiplicações e divisões* em umas, correspondem a *multiplicações, divisões, formação de potencias* e *extracção de raizes* em outras.

Da indagação dos principios por meio dos quaes se effectuam essas transformações, originou-se a *theoria dos logarithmos*, que por sua importancia é considerada como uma das mais grandiosas concepções do espirito humano.

Consideramos sómente a parte elementar d'esta theoria, devendo a *Algebra* occupar-se do seu desenvolvimento.

269. *Logarithmos são numeros em progressão por differença, correspondendo termo a termo a outros numeros em progressão por quociente; havendo sempre na progressão por differença um termo* zero, *que corresponda a um termo igual a* um *na progressão por quociente.*

Assim, considerando as progressões:

$$\div\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \text{etc.}$$
$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . \text{etc.}$$

Os logarithmos dos numeros 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc, são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

O logarithmo de um numero designa-se fazendo preceder o numero pelas letras log ou lg. Assim, logarithmo de 4, logarithmo de 32, escreve-se lg. 4, lg. 32.

O conjuncto das duas progressões constitue um systema de logarithmos.

Podendo-se sempre imaginar uma infinidade de systemas de duas progressões, uma por quociente e outra por differença, correspondendo sempre nellas os termos 1 e 0; segue-se que o numero de systemas de logarithmos é infinito e que em todos elles o logarithmo de 1 é sempre 0.

Os systemas de logarithmos distinguem-se pelas bases.

Base de um systema de logarithmos é o numero que nesse systema tiver para logarithmo a unidade.

A base do systema considerado é o numero 2.

Segundo a definição de logarithmos, parece que sómente os numeros 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc., termos da progressão por quociente, têm logarithmos.

É, porém, facil conhecer que *todo numero maior que a unidade tem um logarithmo em cada systema.*

Com effeito, inserindo-se entre todos os termos consecutivos da progressão por quociente um grande numero de meios proporcionaes, o mesmo entre cada dous termos consecutivos,a differença entre qualquer termo e o precedente na progressão resultante será menor do que qualquer numero por menor que seja; e essa progressão, representando uma serie de numeros que vão crescendo insensivelmente, deve conter todos os numeros maiores que a unidade até um limite determinado, considerando-se o numero que não se achar na progressão como igual a um dos dous termos d'ella entre os quaes elle estiver comprehendido.

Inserindo-se tambem entre todos os termos consecutivos da progressão por differença o mesmo numero de meios differenciaes, os termos da progressão resultante serão os logarithmos dos termos correspondentes na progressão por quociente.

Propriedades geraes dos logarithmos

PRIMEIRA PROPRIEDADE

270. *O logarithmo de um producto é igual á somma dos logarithmos dos factores.*