THEORIA DOS NUMEROS PRIMOS

88. Do grande numero de principios pertencentes a esta theoria consideraremos sómente os indispensaveis para a continuação d'este curso.

Os principios mais importantes da theoria dos numeros primos são:

89. 1º PRINCIPIO.—*Um numero dividindo a um productó de dous factores e sendo primo com um d'elles, divide necessariamente o outro factor.*

Seja AB o producto e D o numero que divide a esse producto e é primo com o factor A.

Se D é primo com A, ou se A e D são primos entre si, procurando o maior divisor commum de A e D, acharemos uma série de quocientes e uma série de restos, dos quaes o ultimo é a unidade. Sejam os restos successivos:

$$R, R', R'' \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

Multiplicando os dous numeros A e D por B e procurando o maior divisor commum dos numeros AB e BD, acharemos os mesmos quocientes e os restos apparecerão multiplicados por B e serão

$$BR, BR', BR'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B$$

Mas D divide AB, por hypothese, e BD por ser multiplo de D, e dividindo os dous numeros AB e BD, divide tambem o maximo divisor commum B a esses dous numeros.

Se um numero dividir um producto de tres ou mais factores e fôr primo com um d'elles, divide o producto dos outros factores.

D'este principio resultam os seguintes corollarios:

1º *Um numero primo dividindo um producto de dous ou mais numeros, divide um d'esses numeros.*

Seja D o divisor do producto ABC.

Se D não dividisse A, seria primo com A, e por isso teria de dividir BC; se dividisse BC e não B, seria primo com B e portanto teria de dividir o factor C.

2º *Um numero primo dividindo qualquer potencia de outro numero, divide tambem esse outro numero.*

Seja A^m uma potencia de A, e D o numero que divide A^m.
Sabemos que $A^m = A \times A \times A \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times A$.

O numero D sendo primo e dividindo o producto A^m, tem de dividir um dos factores; sendo, porém, os factores iguaes a A, segue-se que o numero primo D divide A.

3º *Sendo um numero divisivel por dous ou mais numeros primos entre si, dous a dous, é divisivel pelo producto d'elles.*

Seja N o numero divisivel por a, b, c e d, e sejam esses numeros a, b, c e d, primos entre si dous a dous.

Se a divide N, o quociente da divisão é um numero inteiro que representaremos por q; e, por ser o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente

$$(1) \qquad N = aq\,;$$

o numero b divide N e é primo com a, portanto tem de dividir q; mas se b divide q, o quociente d'essa divisão é um numero inteiro que representaremos por q'. Sendo o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente, temos

$$(2) \qquad q = bq'\,;$$

o numero c dividindo N e sendo primo com a, divide q; dividindo q e sendo primo com b, divide q'. Se c divide q', o quociente da divisão é um numero inteiro q'', e teremos

$$(3) \qquad q' = cq''\,;$$

o numero d, dividindo N e sendo primo com a, divide q; dividindo q, e sendo primo com b, divide q'; dividindo q' e sendo primo com c, divide q''. Se d divide q'', o quociente da divisão é um numero inteiro; representando-o por q''', teremos:

$$(4) \qquad q'' = dq'''\,;$$

substituindo, na igualdade n. 3, q'' pelo seu valor, temos

$$q' = cdq'''\,;$$

substituindo, na igualdade n. 2, q' pelo seu valor, vem

$$q = bcdq'''\,;$$

substituindo, na igualdade n. 1, q pelo seu valor, resulta

$$N = abcdq'''\,;$$

dividindo ambos os membros da igualdade por $abcd$, achamos

$$\frac{N}{abcd} = q'''$$

Sendo q''' numero inteiro, como quociente da divisão exacta de

q'' por d, segue-se que o primeiro membro é numero inteiro, isto é, que o numero N é divisivel por *abcd*.

90. 2º Principio.— *Um numero multiplo tem pelo menos um factor primo.*

Se o numero N é multiplo, tem um ou mais divisores differentes de N e da unidade. Seja a o menor divisor de N; a questão reduz-se a demonstrar que a é primo. Se a não fosse primo, teria pelo menos um factor b differente de a e da unidade; mas b dividindo a, tinha de dividir a N, por ser N multiplo de a, o que não é possivel, por termos supposto ser a o menor divisor de N.

91. 3º Principio.— *Um numero multiplo póde ser sempre decomposto em factores primos, e é igual ao producto d'elles.*

Se o numero N é multiplo, tem pelo menos um factor primo. Chamando a a esse factor primo e B o outro factor, será

$$N = a \times B$$

Se B fôr primo, fica N igual ao producto de dous factores primos; mas se B fôr multiplo, tem pelo menos um factor primo. Representando por b esse factor primo e o outro por C, teremos

$$B = b \times C$$

substituindo, na igualdade $N = a \times B$, B pelo seu valor, resulta

$$N = a \times b \times C$$

Se C fôr primo, fica N igual ao producto de tres factores primos; mas se C fôr multiplo, tem pelo menos um factor primo. Chamando c esse factor primo e D o outro factor, vem

$$C = c \times D.$$

substituindo, na igualdade $N = a \times b \times C$, C pelo seu valor, temos

$$N = a \times b \times c \times D$$

e assim por diante.

Os factores B, C, D, etc., sendo numeros inteiros que vão diminuindo successivamente, não podemos deixar de chegar a um que seja numero primo, e portanto o numero N será igual ao producto de um certo numero de factores primos.

92. 4º Principio.—*Sendo dous numeros inteiros primos entre si, as potencias de quaesquer gráos d'esses dous numeros são tambem primos entre si.*

Sejam A e B os dous numeros primos entre si.

Se A^m e B^n não fossem numeros primos entre si, teriam um divisor commum differente da unidade. Seja D esse divisor commum.

Se D fôr um numero primo, dividindo A^m e B^n, divide tambem A e B (n. 89), o que não é possivel, porque esses dous numeros são por hypothese primos entre si.

Se D fôr multiplo, é igual a um producto de factores primos a, b, c, d, e......, isto é, $D = abcde$......; e se A^m e B^n forem divisiveis por D, serão tambem divisiveis por a, b, c, d...... numeros primos, e dividindo todos elles A^m e B^n, dividem A e B, o que não é possivel; logo A^m e B^n são numeros primos entre si.

Meio de conhecer se um numero é primo

93. Para conhecer se um numero qualquer é primo, *divide-se esse numero successivamente pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11......, até achar um quociente menor que o divisor, sem que tenha deixado de haver resto em todas as divisões precedentes.*

Dividindo o numero 457 successivamente por 2, 3, 5, 7, 11...... 23, e dando o divisor 23 para quociente o numero 19, sem que se tenha achado um resto nullo, deve-se concluir ser primo o numero 457.

Com effeito, se o numero 457 não fosse primo, teria um divisor primo maior que 23; suppondo que esse divisor seja o numero 31, teremos $457 = 31 \times A$, sendo A o outro factor do numero 457. Ora, $457 < 23 \times 23$, portanto $31 \times A < 23 \times 23$, o que exige que A seja menor que 23. O numero 457 não póde, pois, admittir um divisor maior que 23 sem que admitta um menor; e sabendo-se que a não ser a unidade nenhum numero menor que 23 divide a 457, este numero não póde ter um divisor maior que 23, e por consequencia é primo.

Formulação de uma tabella de numeros primos

94. Facilmente se fórma uma tabella de numeros primos desde 1 até um certo limite determinado.

Supponhamos que se trate de formar uma tabella contendo todos os numeros primos comprehendidos entre os numeros 1 e 500.

Escreva-se a série dos numeros inteiros, supprimindo todos os numeros pares á excepção do numero 2. Ficarão assim excluidos todos os multiplos de 2.

Supprimindo os multiplos de 3, para o que basta excluir todos os numeros de tres em tres, a contar do numero 3 exclusivamente.

Supprimindo os multiplos de 5, o que se consegue excluindo os numeros de cinco em cinco, a contar do numero 5 exclusivamente.

Supprimindo os numeros de sete em sete, de onze em onze, a contar dos numeros 7 e 11 exclusivamente, ficarão excluidos os multiplos de 7 e 11.

Continuando do mesmo modo até o numero primo 19, que é o ultimo numero primo cuja segunda potencia é inferior ao numero 500, os numeros que restarem serão os numeros primos desde 1 até o numero 500.

Decomposição de um numero em seus factores primos

95. Decompõe-se um numero em seus factores primos *dividindo esse numero successivamente pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc., até achar para quociente um numero primo.*

Representando por N o numero que se quer decompor em factores primos, por a o menor numero primo que o divide, e por q o quociente d'essa divisão, teremos

$$N=aq$$

Fica a questão reduzida a decompor o numero q em factores primos.

Representando por b o menor numero primo que divide q, e por q' o quociente da divisão, acha-se

$$q=bq'$$

Substituindo na primeira igualdade q pelo seu valor, resulta

$$N=abq'$$

Ficamos reduzidos a decompor o numero q' em factores primos. E assim por diante.

Na pratica os numeros são dispostos como segue

26460	2
13230	2
6615	3
2205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

Formação dos divisores multiplos de um numero

96. Sendo um numero multiplo igual a um producto de factores primos, e um producto sendo sempre divisivel por qualquer de seus factores, segue-se que, conhecidos os divisores primos de um numero, combinando esses divisores primos dous a dous, tres a tres, quatro a quatro, etc., as differentes combinações serão divisores multiplos do numero.

Seja o numero 560.

560	2,
280	2, 4
140	2, 8
70	2, 16
35	5, 10, 20, 40, 80
7	7, 35, 14, 70, 28, 140, 56, 280, 112, 560.
1	

O segundo divisor 2, combinado com o precedente, fórma o divisor 4.

O terceiro divisor 2, combinado com os precedentes, dous a dous, não fórma divisor differente dos conhecidos, mas combinado com elles tres a tres fórma o divisor 8.

O quarto divisor 2, combinado com os precedentes, dous a dous e tres a tres, não fórma divisor algum differente dos conhecidos; mas, combinado com elles quatro a quatro, fórma o divisor 16.

O quinto divisor 5, combinado com os precedentes, dous a dous, fórma o divisor 10. Os mesmos divisores, combinados tres a tres, formam o divisor 20; combinados quatro a quatro, formam o divisor 40; e combinados cinco a cinco, formam o divisor 80.

O sexto divisor 7 com os precedentes, combinados dous a dous, formam os divisores differentes 35 e 14; combinados tres a tres, formam os divisores 70 e 28; combinados quatro a quatro, formam os divisores 140 e 56; combinados cinco a cinco, formam os divisores 280 e 112; e, finalmente, combinados seis a seis, formam o divisor 560.

Composição do menor multiplo commum de dous ou mais numeros

97. Para formar o menor multiplo commum de dous ou mais numeros, *decompõe-se esses numeros em seus factores primos e multiplicam-se os factores primos differentes, sendo cada um d'elles elevado ao maior expoente.*

Sendo:

$$2100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$
$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$$
$$2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

O menor multiplo commum dos numeros 2100, 2520 e 2700 é $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 27 \times 25 \times 7 = 37800$.

Com effeito, o numero 37800 contendo todos os factores primos que entram na composição dos numeros dados, e cada um d'esses factores tendo um expoente pelo menos igual ao expoente que tiver em cada um d'esses numeros, é necessariamente divisivel por elles.

O numero 37800 é o menor multiplo commum dos tres numeros dados, porque se houvesse um multiplo dos tres numeros menor que 37800, esse numero devendo ser divisivel pelos tres numeros dados, seria divisivel tambem por 2^3, 3^3, 5^2 e 7, e como esses numeros são primos entre si dous a dous, seria divisivel pelo producto d'elles, que é o numero 37800, o que não é possivel.

CAPITULO III

THEORIA DAS FRACÇÕES ORDINARIAS

98. Ao resultado exacto da comparação de duas grandezas, sendo uma d'ellas considerada como unidade, e na hypothese de ser a grandeza menor que a unidade, se dá o nome de *fracção*.

A fracção é sempre representada por meio de dous numeros separados por um traço horizontal.

O numero que fica na parte superior do traço chama-se *numerador*, e o que fica na parte inferior, *denominador*. A esses dous numeros, considerados simultaneamente, chamam-se tambem *termos da fracção*.

O denominador indica sempre o numero de partes iguaes em que a unidade está dividida, e o numerador o numero d'essas partes iguaes que a grandeza contém. Assim, se a unidade estiver dividida em sete partes iguaes, e uma das partes fôr contida na grandeza cinco vezes, a fracção é $\frac{5}{7}$; se a unidade estiver dividida em nove partes iguaes, e uma das partes fôr contida na grandeza quatro vezes, a fracção é $\frac{9}{4}$.

A fracção póde tambem ser considerada como o quociente de uma divisão indicada, sendo o numerador o dividendo e o denominador o divisor. Assim, $\frac{15}{7}$ é igual á setima parte do numero 15, de modo que 15 vezes a setima parte da unidade ou quinze setimos ou finalmente 15 dividido por 7 são expressões identicas.

Para lêr uma fracção, *lê-se em primeiro logar o numerador e depois o denominador, juntando a este ultimo a palavra avos.* Assim, as fracções $\frac{7}{12}$ $\frac{9}{29}$ $\frac{13}{32}$ enunciam-se do seguinte modo: *sete doze avos, nove vinte e nove avos; treze trinta e dous avos.*

Sendo o denominador um numero simples, lê-se *meios, terços, quartos, quintos*, etc.; se fôr 10, 100, 1000, etc., devemos ler *decimos, centesimos, millesimos*, etc.

As fracções que tiverem para denominador a unidade seguida de zeros, chamam-se *decimaes*.

Se o numerador de uma fracção fôr menor que o denominador, essa fracção se diz *propria*. Se o numerador fôr igual ao denominador ou maior, a fracção se diz *impropria*, porque, na primeira hypothese, é a unidade representada em fórma de fracção; e na segunda, é um numero inteiro ou mixto representado sob a mesma fórma.

As fracções podem ter denominadores iguaes ou differentes; se os têm iguaes, chamam-se *homogeneas* ou da mesma especie; se differentes, chamam-se *heterogeneas* ou de especies differentes.

99. Um numero inteiro qualquer póde ser sempre representado em fórma de fracção, tendo essa fracção para denominador um numero determinado. Supponhamos que se queira representar o numero 7 em fórma de fracção, tendo essa fracção para denominador o numero oito, diremos: uma unidade corresponde a oito oitavos; duas unidades correspondem a duas vezes oito oitavos ou dezeseis oitavos; tres unidades correspondem a tres vezes oito oitavos ou vinte e quatro oitavos; e finalmente sete unidades correspondem a sete vezes oito oitavos ou cincoenta e seis oitavos, e podemos, pois, escrever $7=\frac{7\times8}{8}=\frac{56}{8}$.

Sendo o mesmo raciocinio applicavel a quaesquer outros numeros, podemos concluir que, para dar a um numero inteiro qualquer a fórma de fracção, tendo essa fracção para denominador um certo numero determinado, *dá-se para numerador o producto do inteiro pelo denominador.*

100. O numero mixto póde tambem ser representado em fórma de fracção. Assim, no numero $4\frac{5}{7}$ sendo o inteiro 4 igual a $\frac{28}{7}$ com os $\frac{5}{7}$, teremos para resultado $\frac{33}{7}$.

Para representar um numero mixto em fórma de fracção, devemos, pois, estabelecer a seguinte

REGRA.—*Multiplica-se o inteiro pelo denominador, somma-se o producto com o numerador, e dá-se para denominador do resultado o denominador da fracção dada.*

101. Uma fracção tendo numerador maior que o denominador contém um certo numero de unidades, que para ser conhecido basta *dividir o numerador pelo denominador.*

Com effeito, se na fracção $\frac{23}{5}$ dividirmos 23 por 5, acharemos 4 para quociente incompleto e 3 para resto da divisão, e teremos

$23=4\times5+3$, isto é, 23 unidades de uma certa especie são iguaes a 4 vezes 5 d'essas unidades mais 3 d'essas mesmas unidades. Podemos, pois, dizer 23 quintos valem 4 vezes 5 quintos mais 3 quintos isto é, $\frac{23}{5}=4\frac{3}{5}$.

102. *Sommando ou subtrahindo ao numerador de uma fracção um numero inteiro qualquer, essa fracção augmenta ou diminue,* porque augmenta ou diminue o numero de partes iguaes que a grandeza contém.

103. *Sommando ou subtrahindo ao denominador de uma fracção um numero inteiro qualquer, essa fracção diminue ou augmenta,* porque augmentando ou diminuindo o numero de partes iguaes em que a unidade está dividida, diminue ou augmenta a grandeza de cada uma d'essas partes.

104. *Sommando a ambos os termos de uma fracção um numero inteiro qualquer, a fracção augmenta se fôr propria, e diminue se fôr impropria.*

Na fracção $\frac{5}{6}$, sommando 4 a ambos os termos resulta $\frac{9}{10}$, fracção maior que a primeira, porque á fracção $\frac{5}{6}$ falta $\frac{1}{6}$ para ser igual á unidade, e á fracção $\frac{9}{10}$ falta $\frac{1}{10}$ para ser igual á unidade; e, faltando á segunda menos do que á primeira para ser igual á unidade, é ella necessariamente maior.

Na fracção $\frac{5}{3}$, sommando 6 a ambos os termos resulta a fracção $\frac{11}{9}$, menor que a primeira, porque a fracção $\frac{5}{3}$ é maior que a unidade de $\frac{2}{3}$ e a fracção $\frac{11}{9}$ é maior que a unidade de $\frac{2}{9}$; e a segunda fracção approximando-se mais da unidade que a primeira é necessariamente menor.

105. *Subtrahindo de ambos os termos de uma fracção um numero inteiro qualquer, a fracção augmenta se fôr impropria, e diminue se fôr propria.*

Na fracção $\frac{7}{5}$, subtrahindo 2 de ambos os termos, resulta a fracção $\frac{5}{3}$, maior que a primeira, porque a fracção $\frac{7}{5}$ é maior que a unidade de $\frac{2}{5}$, e a fracção $\frac{5}{3}$ é maior que a unidade de $\frac{2}{3}$; e a segunda fracção afastando-se mais da unidade que a primeira é necessariamente maior.

Na fracção $\frac{5}{8}$, subtrahindo 3 de ambos os termos, resulta a fracção $\frac{2}{5}$, menor que a primeira, porque á fracção $\frac{5}{8}$ faltam $\frac{3}{8}$ para ser igual á unidade, e á fracção $\frac{2}{5}$ faltam $\frac{3}{5}$ para ser igual á unidade, e faltando á segunda mais do que á primeira para ser igual á unidade, é ella necessariamente menor.

106. *Se, conservando o denominador de uma fracção, multiplicarmos ou dividirmos o numerador por um numero inteiro qualquer, a fracção torna-se maior ou menor esse mesmo numero de vezes.*

Porque, conservando-se o denominador de uma fracção e multiplicando ou dividindo o numerador por um numero inteiro qualquer, o numero de partes iguaes que a grandeza contém, augmenta ou diminue esse numero de vezes; e, como a grandeza de cada uma d'essas partes não soffre alteração alguma, a fracção augmenta ou diminue esse mesmo numero de vezes.

107. *Se, conservando o numerador de uma fracção, se multiplica ou divide o denominador por um numero inteiro qualquer, a fracção torna-se menor ou maior esse mesmo numero de vezes.*

Porque, conservando-se o numerador de uma fracção e multiplicando ou dividindo o denominador por um numero inteiro qualquer, o numero de partes iguaes em que a unidade está dividida augmenta ou diminue um certo numero de vezes, e o valor de cada parte torna-se menor ou maior esse mesmo numero de vezes; e como o numero de partes que a grandeza contém não soffre alteração alguma, a fracção diminue ou augmenta esse numero de vezes.

108. *Multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero inteiro, a fracção não muda de valor.*

Porque, quando se multiplica ou divide o numerador por um numero inteiro, a fracção augmenta ou diminue esse numero de vezes, e multiplicando ou dividindo o denominador por esse mesmo numero, a fracção diminue ou augmenta esse mesmo numero de vezes, portanto não póde mudar de valor por haver compensação.

D'estes principios resulta que: *de duas ou mais fracções de denominadores iguaes, a maior é a que tiver maior numerador; e se tiverem numeradores iguaes, a maior é a que tiver menor denominador.*

Reducção das fracções á sua expressão mais simples

109. No calculo das fracções ordinarias, muitas vezes se obtem para resultado uma fracção que tem para termos numeros consideraveis, e não se podendo facilmente fazer idéa de uma tal fracção, convém diminuir o mais que fôr possivel os termos d'ella, sem que o seu valor seja mudado; d'ahi provém a transformação — *Reducção das fracções á sua expressão mais simples.*

Na fracção $\frac{48}{72}$ o denominador 72 indica que a unidade está dividida em setenta e duas partes iguaes; e o numerador 48, que a grandeza contém quarenta e oito d'essas partes; mas se dividirmos ambos os termos d'essa fracção por 24, resulta a fracção $\frac{2}{3}$ na qual o denominador 3 indica que a unidade está dividida em tres partes; e incontestavelmente é mais facil fazer idéa da grandeza quando ella fôr representada por $\frac{2}{3}$ do que sendo representada por $\frac{48}{72}$.

Reduzir uma fracção ordinaria á expressão mais simples, é achar uma fracção que tenha o mesmo valor que a fracção dada, e que não possa ser substituida por outra de termos menores.

110. Não mudando de valor uma fracção quando se dividem os dous termos pelo mesmo numero, era natural que, nos primeiros tempos, os arithmeticos procedessem por tentativas, dividindo os dous termos da fracção successivamente pela série natural dos numeros inteiros.

E, de feito, os antigos assim procediam, porque nesse tempo ainda não era conhecido o principio:

Um numero divisivel por outro, é tambem divisivel pelos factores d'esse outro.

Depois de estabelecido este principio, reconheceram ser completamente inutil tentar a divisão dos termos da fracção pelos numeros multiplos, quando elles não fossem divisiveis pelos numeros primos, factores d'esses numeros multiplos; e então estabeleceram o processo para reduzir uma fracção á sua expressão mais simples, consistindo elle em tentar a divisão de ambos os termos da fracção successivamente pelos numeros primos, processo que foi depois muito simplificado com o conhecimento dos caracteres de divisibilidade, e que recebeu o nome de *processo das divisões successivas*.

Assim, para reduzir a fracção $\frac{1288}{2632}$ á sua expressão mais simples pelo processo das divisões successivas, dividiremos ambos os termos por 2, e teremos $\frac{644}{1316}$; dividindo os termos da fracção $\frac{644}{1316}$ por 2, acha-se $\frac{322}{658}$; dividindo ainda os termos da fracção $\frac{322}{658}$ por 2, resulta $\frac{161}{329}$; e não sendo os dous termos da ultima fracção divisiveis pelos numeros primos 2, 3 e 5, dividil-os-emos por 7, e teremos finalmente a fracção $\frac{23}{47}$, que não póde reduzir-se a outra de termos menores.

Esse processo foi empregado até que, estudada a theoria do maximo divisor commum, se reconheceu que: *o maximo divisor commum a dous ou mais numeros é o producto dos factores primos communs a esses dous ou mais numeros, affectados dos menores expoentes que nelles existirem.* (pg. 77).

111. Conhecida a composição do maximo divisor commum, foi estabelecido um processo mais simples para effectuar essa transformação, consistindo elle em *dividir ambos os termos da fracção dada pelo maximo divisor commum dos mesmos termos*. Este processo recebeu o nome de *processo directo* ou *do maximo divisor commum*.

Assim, procurando o maximo divisor commum dos numeros 2632 e 1288, acha-se 56; e dividindo ambos os termos da fracção $\frac{1288}{2632}$ por 56 resulta $\frac{1288}{2632} = \frac{23}{47}$. A fracção $\frac{23}{47}$ é a expressão mais simples da fracção $\frac{1288}{2632}$.

112. Para completar a theoria da reducção das fracções á sua expressão mais simples, demonstraremos os principios seguintes:

1º PRINCIPIO.— *Uma fracção sendo irreductivel, os seus termos são primos entre si.*

Effectivamente, se os termos da fracção não fossem numeros primos entre si, teriam um divisor commum differente da unidade, e a

fracção se converteria em outra igual, de termos menores, o que não é possivel por ser ella irreductivel.

RECIPROCA.— *Se os termos de uma fracção forem numeros primos entre si, a fracção é irreductivel.*

Com effeito, se a fracção não fosse irreductivel, poderia ser reduzida a uma outra igual de termos menores, isto é, os termos teriam um divisor commum differente da unidade, o que não é possivel, porque elles são por hypothese primos entre si.

113. 2º PRINCIPIO. — *Se uma fracção irreductivel fôr igual a uma outra, os termos d'essa outra são equimultiplos dos termos da primeira.*

DEMONSTRAÇÃO.— Sendo a fracção irreductivel $\frac{a}{b}$ igual á fracção $\frac{a'}{b'}$, teremos

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

multiplicando os numeradores das duas fracções por b', acha-se

$$\frac{ab'}{b} = \frac{a'b'}{b'}$$

supprimindo, no segundo membro, o factor b' commum aos dous termos, resulta

$$\frac{ab'}{b} = a'$$

O segundo membro da igualdade sendo numero inteiro, o primeiro tambem o é, isto é, b divide ab', e como b é primo com a, segue-se que b divide b'; chamando q o quociente da divisão, teremos

$$b' = bq$$

substituindo, na igualdade precedente, b' pelo seu valor bq, temos

$$\frac{abq}{b} = a'$$

supprimindo o factor b, commum aos dous termos da fracção, acha-se

$$aq = a'$$

Os dous termos da fracção $\frac{a'}{b'}$ são, pois, equimultiplos dos termos da fracção $\frac{a}{b}$.

Consequencia.—*Duas fracções irreductiveis sendo iguaes, são necessariamente identicas.*

Com effeito, sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ duas fracções irreductiveis.

Suppondo que as duas fracções sejam iguaes, teremos

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

se $\frac{a}{b}$ é irreductivel, seus termos são numeros primos entre si, e por consequencia os termos de $\frac{a'}{b'}$ são equimultiplos dos termos da primeira. Sejam $a'=aq$ e $b'=bq$.

Sendo q um numero inteiro, a' e b' não podem ser respectivamente menores que a e b.

A fracção $\frac{a'}{b'}$ sendo irreductivel, prova-se do mesmo modo que a e b não podem ser respectivamente menores que a' e b'.

Se os numeros a e a', b e b', não podem ser respectivamente menores um que o outro, são necessariamente iguaes, e teremos

$$a=a', b=b'$$

Reducção das fracções ao mesmo denominador

Menor denominador commum que duas ou mais fracções podem ter

114. Esta transformação funda-se no principio: *Uma fracção não muda de valor quando lhe multiplicamos ambos os termos por um mesmo numero.*

Effectuada a reducção, *o denominador commum ás fracções resultantes, é sempre multiplo dos denominadores das fracções dadas.*

Com effeito, sejam as fracções irreductiveis $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, e represente-se por D o denominador commum.

Chamando x, y e z os numeradores das fracções resultantes, teremos

$$\frac{x}{D}=\frac{a}{b},\ \frac{y}{D}=\frac{c}{d},\ \frac{z}{D}=\frac{e}{f};$$

multiplicando por D os numeradores das fracções nos dous membros das tres igualdades, resulta

$$x=\frac{D.a}{b},\ y=\frac{D.c}{b},\ z=\frac{D.e}{f}$$

Sendo numeros inteiros os primeiros membros das tres igualdades, os segundos tambem o são, portanto b divide D. a, e, como é primo com a, divide D; d divide D.c, e, como é primo com c, divide D; f divide D.e, e, como é primo com e, divide D; por consequencia o denominador commum D é multiplo dos denominadores b, d e f das fracções dadas.

Das igualdades $x=\frac{D.a}{b}$, $y=\frac{D.c}{b}$ e $z=\frac{D.e}{f}$ resulta que —conhecido o denominador commum, para formar os numeradores das diversas fracções, devemos empregar a seguinte

Regra. — *Divide-se o denominador commum pelos denominadores das fracções dadas, e multiplicam-se os numeradores d'essas fracções pelos quocientes respectivos.*

115. A reducção das fracções ao mesmo denominador depende, pois, do conhecimento do denominador commum, e sendo conveniente que esse denominador commum seja o menor possivel, deve elle ser o menor multiplo commum dos denominadores das fracções dadas.

Se os denominadores das fracções dadas forem numeros primos entre si, considerados dous a dous, o menor multiplo commum é o producto dos denominadores.

Se o maior denominador fôr divisivel por todos os outros, o menor multiplo commum é o maior denominador.

Se o maior denominador não fôr divisivel por todos os outros, mas houver pelo menos dous denominadores que não sejam numeros primos entre si, o menor multiplo commum é o producto dos factores primos differentes que entrarem na composição dos denominadores das fracções dadas, sendo cada um d'elles elevado ao maior expoente (n. 97).

Nesta ultima hypothese, podemos achar o menor multiplo commum, *multiplicando o maior denominador pela série natural dos numeros inteiros.*

Este ultimo meio é inconveniente se os denominadores das fracções dadas forem numeros consideraveis.

EXEMPLOS:

1º—Reduzir ao mesmo denominador as fracções

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{6}{7}$$

o menor denominador commum é $3\times5\times7$.

Dividindo esse menor denominador commum pelos diversos denominadores e multiplicando ambos os termos da primeira fracção por 5×7, ambos os termos da segunda por 3×7, e ambos os termos da terceira por 3×5, teremos

$$\frac{2\times5\times7}{3\times5\times7} \quad \frac{4\times3\times7}{5\times3\times7} \quad \frac{6\times3\times5}{7\times3\times5}$$

2º—Reduzir ao mesmo denominador as fracções

$$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{13}{24}$$

o menor denominador commum é 24.

Dividindo o menor denominador commum por todos os denominadores e multiplicando ambos os termos de cada fracção pelo quociente respectivo, acha-se

$$\frac{3}{24} \quad \frac{18}{24} \quad \frac{12}{24} \quad \frac{20}{24} \quad \frac{13}{24}$$

3º—Reduzir ao mesmo denominador as fracções

$$\frac{1}{8} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{3}{40} \quad \frac{2}{15}$$

Decompondo os denominadores em factores primos, temos:

$$8=2^3,\ 12=2^2\times3,\ 10=2\times5,\ 40=2^3\times5,\ 15=3\times5.$$

O menor denominador commum é $2^3\times3\times5$.

Dividindo o denominador commum por todos os denominadores e multiplicando ambos os termos de cada fracção pelo quociente respectivo, resulta

$$\frac{1\times3\times5}{2^3\times3\times5} \quad \frac{5\times2\times5}{2^3\times3\times5} \quad \frac{7\times2^2\times3}{2^3\times3\times5}$$

$$\frac{3\times3}{2^3\times3\times5} \quad \frac{2\times2^3}{2^3\times3\times5}$$

$$\frac{15}{120} \quad \frac{50}{120} \quad \frac{84}{120} \quad \frac{9}{120} \quad \frac{16}{120}$$

Esta transformação é usada na comparação de duas ou mais fracções de numeradores differentes. Reduzidas ao mesmo denominador, a maior será a que tiver maior numerador.

Usa-se tambem d'esta transformação nas duas primeiras operações sobre as fracções ordinarias.

Operações sobre as fracções ordinarias

116.—As principaes operações sobre as fracções ordinarias são *addição, subtracção, multiplicação e divisão.*

Addição

117. *A addição das fracções ordinarias tem por fim achar uma fracção que contenha todas as partes que entrarem na composição de duas ou mais fracções.*

Na addição das fracções ordinarias ha dous casos a considerar:

1º CASO: *Os denominadores são iguaes, ou as fracções são da mesma especie.*

2º CASO: *Os denominadores são differentes, ou as fracções são de especies differentes.*

118. 1º CASO—Sejam para sommar as fracções

$$\frac{5}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{7}{8}$$

A unidade sendo a mesma e achando-se nas tres fracções dividida no mesmo numero de partes iguaes, todas as partes são iguaes entre si. Reunindo, pois, as cinco partes da primeira fracção com as tres partes da segunda e com as sete partes da terceira, teremos quinze partes ou 15 oitavos ou uma unidade e sete oitavos; isto é

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

119. 2º CASO.—Sejam para sommar as fracções

$$\frac{2}{3},\quad \frac{5}{8},\quad \frac{7}{12}$$

Reduzindo as fracções dadas ao mesmo denominador, acha-se

$$\frac{16}{24} \quad \frac{15}{24} \quad \frac{14}{24}$$

Sommando as fracções resultantes, temos:

$$\frac{16}{24}+\frac{15}{24}+\frac{14}{24}=\frac{45}{24}=1\frac{21}{24}$$

Pelo que fica exposto, podemos estabelecer a seguinte

REGRA.— *Se as fracções tiverem denominadores iguaes, sommam-se os numeradores e dá-se para denominador da somma o denominador commum. Se as fracções tiverem denominadores differentes, reduzem-se ao mesmo denominador e sommam-se as fracções que resultarem.*

Addição dos numeros mixtos

120. *Para sommar numeros mixtos, devemos reduzir os numeros mixtos a expressões fraccionarias (n. 100), e depois sommar os resultados; ou reunir as fracções e depois os inteiros, attendendo ás reservas que se formarem na addição das fracções.*

EXEMPLO:

Sommar os numeros $3\frac{4}{5}$, $4\frac{1}{6}$ e $5\frac{2}{3}$

1º PROCESSO:

$$3\frac{4}{5}+4\frac{1}{6}+5\frac{2}{3}=\frac{19}{5}+\frac{25}{6}+\frac{17}{3}=$$
$$=\frac{114}{30}+\frac{125}{30}+\frac{170}{30}=\frac{409}{30}=13\frac{19}{30}$$

2º PROCESSO:

Sommando em primeiro logar as fracções $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{3}$, teremos

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{24}{30}+\frac{5}{30}+\frac{20}{30}=\frac{49}{30}=1\frac{19}{30}$$

Reunindo 1 com os inteiros 3, 4 e 5, acha-se 13; o resultado $13\frac{19}{30}$ é o mesmo obtido pelo primeiro processo.

Addição de numero inteiro com uma fracção e vice-versa

121. Somma-se um numero inteiro com uma fracção e vice-versa, *reduzindo o numero inteiro a uma fracção que tenha para denominador o denominador da fracção dada (99) e sommando o resultado com essa fracção.*

EXEMPLOS:

1º $$4+\frac{5}{9}=\frac{36}{9}+\frac{5}{9}=\frac{41}{9}$$

2º $$\frac{6}{7}+5=\frac{6}{7}+\frac{35}{7}=\frac{41}{7}$$

É facil vêr que o mesmo resultado se obtem applicando a seguinte

REGRA.— *Multiplica-se o numero inteiro pelo denominador, somma-se o producto com o numerador, e dá-se para denominador do resultado o denominador da fracção dada.*

Subtracção

122. *A subtracção das fracções ordinarias tem por fim achar o excesso de uma fracção sobre outra menor.*

Na subtracção das fracções ordinarias ha dous casos a considerar:

1º CASO: *As fracções têm denominadores iguaes ou são da mesma especie.*

2º CASO: *As fracções têm denominadores differentes ou são de especies differentes.*

123. 1º CASO.—Supponhamos que da fracção $\frac{7}{9}$ se queira subtrahir a fracção $\frac{5}{9}$

Sendo a unidade a mesma, e achando-se dividida, nas duas fracções, no mesmo numero de partes iguaes, todas as partes são iguaes entre si. Subtrahindo, pois, das 7 partes da primeira fracção as 5 partes da segunda, restam evidentemente duas partes ou $\frac{2}{9}$ isto é:

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{2}{9}$$

124. 2º CASO.— Seja a fracção $\frac{3}{5}$ que pretendemos subtrahir da fracção $\frac{7}{8}$.

Reduzindo as duas fracções ao mesmo denominador, e effectuando depois a subtracção, teremos :

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \frac{35}{40} - \frac{24}{40} = \frac{11}{40}$$

Do exposto se conclue a seguinte

REGRA.—*Se as fracções tiverem denominadores iguaes, subtrahe-se o numerador do subtrahendo do numerador do minuendo, e dá-se para denominador do resultado o denominador commum. Se, porém, tiverem denominadores differentes, é preciso antes reduzil-as ao mesmo denominador, para em seguida ser effectuada a subtracção entre as fracções que resultarem.*

Subtracção de um numero mixto de outro

125. Para subtrahir um numero mixto de outro, *transformam-se os numeros mixtos em expressões fraccionarias, e effectua-se a subtracção, ou subtrahe-se a fracção do subtrahendo da fracção do minuendo, e a parte inteira do subtrahendo da parte inteira do minuendo.*

EXEMPLO :

Subtrahir do numero $7\frac{5}{9}$ o numero $3\frac{2}{7}$.

1º PROCESSO :

$$7\frac{5}{9} - 3\frac{2}{7} = \frac{68}{9} - \frac{23}{7} = \frac{476}{63} - \frac{207}{63} = \frac{269}{63} = 4\frac{17}{63}$$

2º PROCESSO :

Subtrahindo da fracção $\frac{5}{9}$ a fracção $\frac{2}{7}$, acha-se

$$\frac{5}{9} - \frac{2}{7} = \frac{35}{63} - \frac{18}{63} = \frac{17}{63}$$

Subtrahindo a parte inteira do subtrahendo da parte inteira do minuendo, acha-se 4; e o resultado $4\frac{17}{63}$ é o mesmo obtido pelo primeiro processo.

Este segundo processo póde apresentar na pratica algum embaraço, e isso acontece quando a fracção do subtrahendo é maior que a do minuendo. Essa difficuldade desapparece subtrahindo a fracção do subtrahendo da fracção do minuendo augmentada de uma unidade, e diminuindo de uma unidade a parte inteira do minuendo.

EXEMPLO :

Subtrahir do numero $7\frac{2}{9}$ o numero $4\frac{5}{7}$.

Reduzindo as duas fracções $\frac{2}{9}$ e $\frac{5}{7}$ ao mesmo denominador, resultam as fracções $\frac{14}{63}$ e $\frac{45}{63}$; e como não se póde subtrahir de $\frac{14}{63}$ a fracção $\frac{45}{63}$, subtrahe-se de $1\frac{14}{63}$ a fracção $\frac{45}{63}$, ou subtrahe-se da fracção $\frac{77}{63}$ a fracção $\frac{45}{63}$, e o resultado será $\frac{32}{63}$; subtrahindo de 6 a parte inteira do subtrahendo, acha-se 2, e o resultado final será $2\frac{32}{63}$.

Subtracção de um numero inteiro de uma fracção impropria

126. Para subtrahir de uma fracção impropria um numero inteiro, devemos *multiplicar o inteiro pelo denominador e subtrahir o producto do numerador, dando para denominador do resultado o denominador da fracção impropria dada.*

Assim,

$$\frac{23}{6} - 3 = \frac{23-(3\times 6)}{6} = \frac{23-18}{6} = \frac{5}{6}$$

Porque sendo 3 unidades o mesmo que $\frac{18}{6}$, subtrahir 3 unidades de $\frac{23}{6}$ é o mesmo que subtrahir de $\frac{23}{6}$ a fracção impropria $\frac{18}{6}$, e o resultado não póde deixar de ser $\frac{5}{6}$.

Subtracção de uma fracção de um numero inteiro

Para subtrahir uma fracção de um numero inteiro, *multiplica-se o inteiro pelo denominador, e subtrahe-se do producto o numerador, dando para denominador do resultado o denominador da fracção dada.*

Assim,

$$7 - \frac{4}{5} = \frac{(7\times 5)-4}{5} = \frac{35-4}{5} = \frac{31}{5}$$

Porque 7 unidades sendo iguaes a $\frac{34}{5}$, subtrahir de 7 unidades a fracção $\frac{4}{5}$ é o mesmo que subtrahir de $\frac{35}{5}$ a fracção $\frac{4}{5}$, e o resultado não póde deixar de ser $\frac{31}{5}$.

Multiplicação

127. *A multiplicação é, como já vimos, a operação que tem por fim, dados dous numeros, achar um terceiro derivado do primeiro, como o segundo se deriva da unidade.*

D'esta definição segue-se que sendo o multiplicador $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc., da unidade, o próducto é $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc., do multiplicando.

A idéa de multiplicação nem sempre envolve a de augmento, porquanto na hypothese de ser o multiplicador menor que a unidade, o producto é menor que o multiplicando.

Na multiplicação das fracções ordinarias ha tres casos a considerar:

1° CASO: *Multiplicação de uma fracção por um numero inteiro.*

2° CASO: *Multiplicação de um numero inteiro por uma fracção.*

3° CASO: *Multiplicação de uma fracção por outra.*

128. 1° CASO.— Seja a fracção $\frac{8}{9}$ para multiplicar por 3.

Sendo o multiplicador tres vezes a unidade, o producto é tres vezes o multiplicando; para termos, pois, o producto, devemos tornar o multiplicando tres vezes maior; o que se consegue multiplicando o numerador por 3, ou dividindo o denominador por 3.

Assim teremos

$$\frac{8}{9} \times 3 = \frac{8 \times 3}{9} = \frac{8}{9 \div 3}$$

Ha, pois, duas regras para multiplicar uma fracção por um numero inteiro.

1ª REGRA.— *Conserva-se o denominador, e multiplica-se o numerador pelo inteiro.*

2ª REGRA.— *Conserva-se o numerador e divide-se o denominador pelo inteiro*

A segunda regra só póde ser empregada na hypothese de ser o denominador divisivel pelo inteiro.

129. 2º CASO.—Seja o numero 7 para multiplicar pela fracção $\frac{5}{8}$.

Sendo o multiplicador cinco vezes a oitava parte da unidade, o producto é cinco vezes a oitava parte do multiplicando; para termos, pois, o producto, devemos tomar a oitava parte do multiplicando, que é $\frac{7}{8}$, e repetindo essa oitava parte cinco vezes, teremos o producto $\frac{7 \times 5}{8}$, isto é

$$7 \times \frac{5}{8} = \frac{7 \times 5}{8}$$

Pelo que fica dito, podemos estabelecer a seguinte

REGRA.—*Conserva-se o denominador, e multiplica-se o inteiro pelo numerador.*

130. 3º CASO.—Seja $\frac{5}{7}$ para multiplicar por $\frac{3}{8}$.

O multiplicador sendo tres vezes a oitava parte da unidade, o producto é tres vezes a oitava parte do multiplicando; para termos, pois, o producto, devemos tomar a oitava parte do multiplicando, que é $\frac{5}{7 \times 8}$, e tornando depois essa oitava parte tres vezes maior, acha-se o producto $\frac{5 \times 3}{7 \times 8}$, isto é

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{5 \times 3}{7 \times 8}$$

Para multiplicar uma fracção por outra, devemos, pois, empregar a seguinte

REGRA.—*Multiplicam-se os numeradores e tambem os denominadores. Divide-se o primeiro producto pelo segundo.*

Multiplicação de um numero mixto por outro

131. Para multiplicar um numero mixto por outro, *reduzem-se os numeros mixtos a expressões fraccionarias, e effectúa-se depois a multiplicação.*

EXEMPLO:

$$3\frac{4}{7} \times 4\frac{3}{5} = \frac{25}{7} \times \frac{23}{5} = \frac{25 \times 23}{7 \times 5} = \frac{575}{35}$$

OBSERVAÇÃO.—São applicaveis á multiplicação das fracções os seguintes principios, demonstrados na multiplicação dos numeros inteiros:

1º *Multiplicar uma fracção pelo producto de outras é o mesmo que multiplicar essa fracção successivamente pelas outras, uma a uma.*

2º *O producto de duas ou mais fracções é o mesmo, seja qual fôr a ordem dos factores.*

Divisão

132. *A divisão é, como já vimos, a operação que tem por fim, dados dous numeros, achar um terceiro que multiplicado pelo segundo reproduza o primeiro.*

D'esta definição se conclue que o dividendo é um producto, sendo o divisor um dos factores, que póde ser sempre considerado como multiplicador, e o quociente o outro factor, que é o multiplicando.

Tendo-se visto na multiplicação que o producto deriva-se do multiplicando como o multiplicador da unidade, segue-se que o *dividendo deriva-se do quociente, do mesmo modo que o divisor deriva-se da unidade.*

Assim, se o divisor fôr $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc., da unidade, o dividendo é $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc., do quociente, ou o quociente é duas, tres, quatro, cinco, etc., vezes o dividendo.

A idéa de divisão nem sempre envolve a de diminuição, porquanto na hypothese de ser o divisor menor que a unidade, o dividendo é menor que o quociente, ou o quociente é maior que o dividendo.

Na divisão das fracções ordinarias ha tres casos a considerar:

1º CASO: *Divisão de uma fracção por um numero inteiro.*

2º CASO: *Divisão de um numero inteiro por uma fracção.*

3º CASO: *Divisão de uma fracção por outra.*

133. 1º CASO.—Seja a fracção $\frac{8}{9}$ para dividir por 4.

Sendo o divisor quatro vezes a unidade, o dividendo é quatro vezes o quociente; para termos, pois, o quociente, devemos tornar o dividendo quatro vezes menor, o que se consegue multiplicando o denominador, ou dividindo o numerador por 4, e o resultado será

$$\frac{8}{9} \div 4 = \frac{8}{9 \times 4} = \frac{8 \div 4}{9}$$

Resultam, pois, duas regras para dividir uma fracção por um numero inteiro.

1ª REGRA.—*Conserva-se o numerador e multiplica-se o denominador pelo inteiro.*

2ª REGRA.—*Conserva-se o denominador e divide-se o numerador pelo inteiro.*

Esta segunda regra só póde ser empregada na hypothese de ser o numerador divisivel pelo inteiro.

134. 2º CASO.—Seja o numero 5 para dividir pela fracção $\frac{7}{8}$.

O divisor sendo sete vezes a oitava parte da unidade, o dividendo é sete vezes a oitava parte do quociente.

Tomando-se, pois, a setima parte do dividendo, acha-se $\frac{5}{7}$, que é a oitava parte do quociente, e tornando essa fracção oito vezes maior, acha-se o quociente $\frac{7 \times 8}{7}$, isto é

$$5 \div \frac{7}{8} = \frac{5 \times 8}{7} = \frac{40}{7}$$

Podemos estabelecer a seguinte

REGRA.—*Multiplica-se o inteiro pelo denominador e divide-se o producto pelo numerador.*

135. 3º CASO.—Seja a fracção $\frac{5}{8}$ para dividir pela fracção $\frac{4}{7}$.

Sendo o divisor quatro vezes a setima parte da unidade, o dividendo é quatro vezes a setima parte do quociente. Tomando, pois, a quarta parte do dividendo, acharemos a setima parte do quociente, que é $\frac{5}{9 \times 4}$; tornando essa setima parte do quociente sete vezes maior, acharemos o quociente $\frac{5 \times 7}{9 \times 4}$ e teremos

$$\frac{5}{9} \div \frac{4}{7} = \frac{5 \times 7}{9 \times 4}$$

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

REGRA. — *Multiplica-se o numerador do dividendo pelo denominador do divisor e o numerador do divisor pelo denominador do dividendo. Divide-se o primeiro producto pelo segundo.*

136. O processo natural para dividir uma fracção por outra consiste em *dividir o numerador do dividendo pelo numerador do divisor, e o denominador do dividendo pelo denominador do divisor, dividindo depois o primeiro resultado pelo segundo.*

Tratando-se de dividir $\frac{14}{56}$ por $\frac{7}{8}$, o resultado será

$$\frac{14 \div 7}{56 \div 8}$$

Com effeito, o quociente se obtem tomando a setima parte do dividendo e repetindo-a oito vezes. Ora, podemos tomar a setima parte do dividendo, dividindo o numerador por 7, e repetir essa setima parte oito vezes, dividindo o denominador por 8.

Este processo é muito conveniente, mas só póde ser empregado quando os termos do dividendo forem multiplos dos termos do divisor.

Divisão de um numero mixto por outro

137. Para dividir um numero mixto por outro, *reduzem-se os numeros mixtos a expressões fraccionarias, e depois effectua-se a divisão.*

EXEMPLO :

$$4\frac{3}{5} \div 2\frac{4}{7} = \frac{23}{5} \div \frac{18}{7} = \frac{23 \times 7}{18 \times 5} = \frac{161}{90}$$

Fracções de fracções

138. *Fracção de fracção é qualquer parte de uma fracção.*

Da multiplicação das fracções ordinarias resulta o calculo das fracções de fracções, porquanto, multiplicar uma fracção por outra não é mais do que calcular uma fracção de outra, razão por que, nesse calculo, é empregada a regra estabelecida para multiplicar uma fracção por outra.

Assim

$$\frac{3}{5} \text{ de } \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} \qquad \frac{4}{9} \text{ de } \frac{6}{7} = \frac{4 \times 6}{9 \times 7}$$

Para determinar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$, calcula-se em primeiro logar $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ e acha-se $\frac{5 \times 6}{6 \times 7}$; depois calcula-se $\frac{4}{5}$ do resultado e acha-se $\frac{4 \times 5 \times 6}{5 \times 6 \times 7}$; depois calcula-se $\frac{3}{4}$ do resultado e acha-se $\frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{4 \times 5 \times 6 \times 7}$, e finalmente, calculando $\frac{2}{3}$ do resultado, se obtem :

$$\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$$

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

REGRA PARA CALCULAR AS FRACÇÕES DE FRACÇÕES.— *Multiplicam-se todos os numeradores e tambem todos os denominadores; dividindo depois o primeiro producto pelo segundo.*

No calculo das fracções de fracções, convém indicar as multiplicações, por causa das simplificações que devemos fazer no resultado. No exemplo precedente, omittindo os factores communs aos dous termos da fracção $\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$, resulta a fracção $\frac{2}{7}$.

FRACÇÕES CONTINUAS

139. Uma fracção ordinaria sendo irreductivel, não póde ser transformada em outra igual de termos menores, porém é sempre possivel determinar outras fracções de termos mais simples, que se approximem cada vez mais da fracção dada.

Da indagação d'essas fracções, diversas approximações da fracção dada, originam-se as *fracções continuas.*

Consideremos a fracção $\frac{169}{473}$.

Dividindo os dous termos d'essa fracção por 169, acha-se

$$(1) \qquad \frac{169}{472} = \frac{1}{\frac{472}{169}} = \frac{1}{2\frac{134}{169}}$$

Desprezando a fracção $\frac{134}{169}$, teremos para primeira approximação a fracção $\frac{1}{2}$. Esta primeira approximação é maior que a fracção dada, porque, não considerando a fracção $\frac{134}{169}$, o denominador da fracção $\frac{1}{2\frac{134}{169}}$ diminue, e por consequencia a fracção augmenta.

Se em logar de desprezar a fracção $\frac{134}{169}$, dividirmos ambos os seus termos por 134, teremos

$$\frac{134}{169}=\frac{1}{\frac{169}{134}}=\frac{1}{1\frac{35}{134}}$$

Substituindo na expressão (1) $\frac{134}{169}$ pelo seu valor, resulta

$$(2)\qquad \frac{169}{472}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{35}{134}}}$$

Se desprezarmos a fracção $\frac{35}{134}$, resulta a segunda approximação: $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}=\frac{1}{3}$. Esta segunda approximação é menor que a fracção dada, porque desprezar a fracção $\frac{35}{134}$ é augmentar o denominador da fracção primitiva, e portanto diminuir essa fracção.

Não desprezando a fracção $\frac{35}{134}$ e dividindo ambos os seus termos por 35, teremos

$$\frac{35}{134}=\frac{1}{\frac{134}{35}}=\frac{1}{3\frac{29}{35}}$$

substituindo esse valor na expressão (2), resulta

$$(3)\qquad \frac{169}{472}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{29}{35}}}}$$

Desprezando a fracção $\frac{29}{35}$, teremos a terceira approximação

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{4}{3}}}=\cfrac{1}{2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{11}{4}}=\frac{4}{11}$$

Esta terceira approximação é maior que a fracção dada, porque desprezar a fracção $\frac{29}{53}$ é diminuir o denominador da fracção primitiva e por consequencia augmental-a.

Dividindo os termos da fracção $\frac{29}{35}$ por 29, teremos

$$\frac{29}{35}=\frac{1}{\frac{35}{29}}=\frac{1}{1\frac{6}{29}}$$

substituindo este valor na expressão (3) resulta

$$(4)\qquad \frac{169}{472}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{6}{29}}}}}$$

Não considerando a fracção $\frac{6}{29}$, teremos a quarta approximação

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{5}{4}}}=\cfrac{1}{2+\frac{4}{5}}=\frac{1}{\frac{14}{5}}=\frac{5}{14}$$

Esta quarta approximação é menor que a fracção dada, porque desprezar a fracção $\frac{6}{29}$ reduz-se a augmentar o denominador da fracção primitiva, e por isso ella fica menor.

Dividindo os termos da fracção $\frac{6}{29}$ por 6, resulta

$$\frac{6}{29}=\frac{1}{\frac{29}{6}}=\frac{1}{4\frac{5}{6}}$$

substituindo na expressão (4) este valor, temos

$$(5)\qquad \frac{169}{472}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{5}{6}}}}}}$$

Desprezando a fracção $\frac{5}{6}$, teremos a quinta approximação maior que a fracção dada:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{5}{4}}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3\frac{4}{5}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{19}{5}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1\frac{5}{19}}}=\cfrac{1}{2+\frac{1}{\frac{24}{19}}}=\frac{1}{2\frac{19}{24}}=\frac{1}{\frac{67}{24}}=\frac{24}{67}$$

Dividindo ambos os termos da fracção $\frac{5}{6}$ por 5, temos

$$\frac{5}{6}=\cfrac{1}{\cfrac{6}{5}}=\cfrac{1}{1\,\cfrac{}{5}}$$

substituindo na expressão (5) em logar de $\frac{5}{6}$ o seu valor, acha-se

(6) $$\frac{169}{472}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{4\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{}{5}}}}}}}$$

A sexta approximação, menor que a fracção dada, será

$$\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{4\,\cfrac{}{1}}}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{}{5}}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{}{\cfrac{6}{5}}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{5}{3\,\cfrac{}{6}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{}{\cfrac{23}{6}}}}=$$

$$=\cfrac{1}{2\,\cfrac{6}{1\,\cfrac{}{23}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{}{\cfrac{29}{23}}}=\cfrac{1}{\cfrac{23}{2\,\cfrac{}{29}}}=\cfrac{1}{\cfrac{81}{29}}=\frac{29}{81}$$

Considerando a expressão (6) e effectuando as operações indicadas, será a fracção $\frac{169}{472}$.

Com effeito :

$$\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{4\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{}{5}}}}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{4\,\cfrac{}{\cfrac{6}{5}}}}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{5}{4\,\cfrac{}{6}}}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{}{\cfrac{29}{6}}}}}}=$$

$$=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{6}{1\,\cfrac{}{29}}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{}{\cfrac{35}{29}}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{29}{3\,\cfrac{}{35}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{}{\cfrac{134}{35}}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{35}{1\,\cfrac{}{134}}}=$$

$$=\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{\cfrac{169}{134}}}=\cfrac{1}{2\,\cfrac{134}{169}}=\cfrac{1}{\cfrac{147}{169}}=\frac{169}{472}$$

As expressões da fórma (6) denominam-se fracções continuas.

140. Consistindo o meio de reduzir a fracção $\frac{169}{472}$ á fórma

$$\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{4\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{}{5}}}}}}}$$

em dividir successivamente os termos das diversas fracções pelo numerador de cada uma d'ellas, é facil estabelecer um processo para obter o desenvolvimento de uma fracção continua. Esse processo consiste em *procurar o maximo divisor commum dos termos da fracção dada e formar depois a fracção continua, dando para numeradores das fracções que a compõem a unidade, e para denominadores os quocientes na ordem em que forem determinados.*

Seja a fracção $\frac{297}{988}$.

Procurando o maior divisor commum aos numeros 980 e 297, acha-se.

	3	3	2	1	29
980	297	89	30	29	1
89	30	29	1	0	

Portanto será

$$\frac{297}{980}=\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{2\,\cfrac{1}{1\,\cfrac{1}{29}}}}}$$

141. As fracções $\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{29}$ que compõem a fracção continua, denominam-se *fracções integrantes*.

Os denominadores d'essas diversas fracções, menos o da ultima, chamam-se *quocientes incompletos*.

A esses denominadores seguidos de todas as integrantes que estiverem depois d'elles, chamam-se *quocientes completos*.

A's diversas approximações da fracção dada, ou aos resultados que se obtêm considerando uma, duas, tres ou mais integrantes, denominam-se *fracções convergentes ou reduzidas*.

142. Tratemos presentemente de estabelecer um processo para formar as diversas reduzidas e mesmo determinar a fracção ordinaria correspondente á fracção continua, sem ter o trabalho de effectuar as operações indicadas.

Seja, em geral

$$x = \cfrac{1}{a\,\cfrac{1}{b\,\cfrac{1}{c\,\cfrac{1}{d\,\ddots\,\cfrac{1}{p\,\ddots}}}}}$$

A primeira reduzida é $\frac{1}{a}$.

A segunda reduzida é $\cfrac{1}{a\,\cfrac{1}{b}} = \cfrac{1}{\cfrac{ab+1}{b}} = \frac{b}{ab+1}$

A terceira reduzida é

$$\cfrac{1}{a\,\cfrac{1}{b\,\cfrac{1}{c}}} = \cfrac{1}{a\,\cfrac{1}{\cfrac{bc+1}{c}}} = \cfrac{1}{a\,\cfrac{c}{bc+1}} = \cfrac{1}{\cfrac{abc+a+c}{bc+1}} = \frac{bc+1}{abc+a+c}$$

A quarta reduzida é

$$\cfrac{1}{a\,\cfrac{1}{b\,\cfrac{1}{c\,\cfrac{1}{d}}}} = \cfrac{1}{a\,\cfrac{1}{b\,\cfrac{1}{\cfrac{cd+1}{d}}}} = \cfrac{1}{a\,\cfrac{1}{b\,\cfrac{d}{cd+1}}} = \cfrac{1}{a\,\cfrac{1}{\cfrac{bcd+b+d}{cd+1}}} =$$

$$= \cfrac{1}{a\,\cfrac{cd+1}{bcd+b+d}} = \cfrac{1}{\cfrac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}.$$

Analysando o valor da terceira reduzida, nota-se que o numerador bc+1 forma-se multiplicando o numerador *b* da precedente pelo terceiro quociente incompleto *c*, e sommando ao producto o numerador 1 da ante-precedente ; e o denominador se obtem multiplicando o denominador ab+1 da precedente pelo terceiro quociente incompleto, e sommando o producto com o denominador *a* da ante-precedente.

Esta lei é geral e póde-se enunciar do seguinte modo :

O numerador da reduzida da ordem n *obtem-se multiplicando o numerador da reduzida da ordem* n—1 *pelo quociente incompleto da ordem* n, *e sommando o producto com o numerador da reduzida da ordem* n—2 ; *e o denominador forma-se, multiplicando o denominador da reduzida da ordem* n—1 *pelo quociente incompleto da ordem* n, *e sommando o producto com o denominador da reduzida da ordem* n—2.

Para demonstrar esta lei, supponhamos que ella se verifique até a reduzida da ordem *n*.

Representando por A e B os termos da reduzida da ordem *n*, por A' e B' os termos da reduzida precedente, por A'' e B'' os termos da reduzida ante-precedente e por *p* o quociente, incompleto da ordem *n*, teremos

$$A = A'\,p + A''$$
$$B = B'\,p + B''$$

ou

$$\frac{A}{B} = \frac{A'\,p + A''}{B'\,p + B''}.$$

mas

$$\frac{A}{B}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\,\ddots+\cfrac{1}{p}}}}}$$

e chamando C e D os termos da reduzida da ordem n+1, será

$$\frac{C}{D}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d\,\ddots+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q}}}}}}$$

substituindo no valor de $\frac{A}{B}$, em logar de p, $p+\frac{1}{q}$, teremos o valor de $\frac{C}{D}$, isto é

$$\frac{C}{D}=\frac{A'\times p+\frac{1}{q}+A''}{B'\times p+\frac{1}{q}+B''}$$

ou

$$\frac{C}{D}=\frac{A'\times\frac{pq+1}{q}+A''}{B'\times\frac{pq+1}{q}+B'}$$

ou

$$\frac{C}{D}=\frac{\frac{A'pq+A'}{q}+A''}{\frac{B'pq+B'}{q}+B''}$$

ou

$$\frac{C}{D}=\frac{\frac{A'bq+A'+A''q}{q}}{\frac{B'bq+B'+B''q}{q}}$$

ou

$$\frac{C}{D}=\frac{A'bq+A'+A''q}{B'pq+B'+B''q}$$

ou finalmente

$$\frac{C}{D}=\frac{(A'b+A'')q+A'}{(B'p+B'')q+B'}$$

O resultado mostra-nos que o numerador da reduzida da ordem $n+1$ se fórma multiplicando o numerador $A'p+A''$ da reduzida da ordem n pelo quociente incompleto q da ordem $n+1$, e sommando o producto com o numerador A' da reduzida da ordem $n-1$; e o denominador se obtem do mesmo modo.

Segundo esta lei, as reduzidas na fracção continua

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}$$

são: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{19}{43}$, $\frac{23}{52}$, $\frac{134}{303}$

143. Na fracção continua

$$\frac{169}{472}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}}$$

achamos para reduzidas as fracções $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{24}{67}$, $\frac{29}{81}$, e vimos que a 1ª, 3ª e 5ª eram maiores que a fracção dada, sendo a 3ª menor que a 1ª, e a 5ª menor que a 3ª; e que a 2ª, 4ª e 6ª eram menores que a fracção dada, sendo a 4ª maior que a 2ª e a 6ª maior que a 4ª.

Podemos, pois, concluir que:

1º *As reduzidas de ordem impar são todas maiores que a fracção dada e vão diminuindo successivamente, approximando-se portanto cada vez mais da mesma fracção.*

2º *As reduzidas de ordem par são todas menores que a fracção dada e vão augmentando successivamente, approximando-se cada vez mais da mesma fracção.*

3º *A fracção dada está sempre comprehendida entre duas reduzidas consecutivas, é menor que a de ordem impar e maior que a de ordem par.*

144. Antes de terminar o estudo sobre as fracções continuas, convém demonstrar as seguintes propriedades:

1ª PROPRIEDADE

A differença entre duas reduzidas consecutivas é igual a uma fracção que tem para numerador ± 1, *e para denominador o producto dos denominadores das duas reduzidas.*

Consideremos as tres reduzidas consecutivas

$$\frac{A}{B}, \quad \frac{C}{D}, \quad \frac{E}{F}$$

Procurando a differença entre a reduzida $\frac{C}{D}$ e a reduzida $\frac{A}{B}$, acha-se

$$\frac{C}{D}-\frac{A}{B}=\frac{BC-AD}{BD} \qquad (1)$$

Pelo resultado vê-se que o denominador BD é o producto dos denominadores das duas reduzidas. Resta, pois, demonstrar que o numerador é igual a ± 1.

Pelo que estabelecemos no n. 142, segue-se que

$$\frac{E}{F}=\frac{Cp+A}{Dp+B}$$

chamando p o quociente incompleto da ordem a que pertencer a reduzida $\frac{E}{F}$

Subtrahindo de ambos os membros da igualdade precedente $\frac{C}{D}$, temos

$$\frac{E}{F}-\frac{C}{D}=\frac{Cp+A}{Dp+B}-\frac{C}{D}=\frac{CDp+AD-CDp-BC}{D(Dp+B)}=\frac{AD-BC}{D(Dp+B)} \quad (2)$$

Se compararmos os numeradores das duas differenças (1 e 2), facilmente reconheceremos serem iguaes e de signaes contrarios.

Ora, a differença entre a 1ª e a 2ª reduzidas da fracção continua (142), sendo

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{ab+1}=\frac{ab+1}{a(ab+1)}-\frac{ab}{a(ab+1)}=\frac{ab+1-ab}{a(ab+1)}=\frac{1}{a(ab+2)}$$

isto é, tendo para numerador 1, segue-se pelo que fica dito, que a differença entre a 2ª e 3ª reduzidas terá para numerador—1, e que a differença entre a 3ª e a 4ª reduzidas terá para numerador 1, e assim por diante.

Substituindo, pois, este (± 1) na fórmula (1), teremos

$$\frac{C}{D}-\frac{A}{B}=\frac{\pm 1}{BD}$$

resultado que demonstra a proposição.

2ª PROPRIEDADE

O erro que se commette tomando uma reduzida para valor approximado da fracção continua é menor que a unidade dividida pelo producto do denominador d'essa reduzida pelo da seguinte.

Com effeito, achando-se o valor da fracção continua comprehendido entre duas reduzidas consecutivas quaesquer $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$, a differença entre os valores da fracção continua e da reduzida $\frac{A}{B}$ é menor que a differença entre os valores das reduzidas $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$; sendo a differença d'estas $\frac{1}{BD}$, é claro que a differença entre a fracção continua e a reduzida $\frac{A}{B}$ é menor que $\frac{1}{BD}$.

CAPITULO IV

THEORIA DOS NUMEROS DECIMAES

145. No systema de numeração decimal vimos que as unidades das differentes ordens eram formadas de dez em dez, isto é, que dez unidades formavam uma dezena; dez dezenas, uma centena; dez centenas, um milhar, etc; e que, partindo da unidade, tinhamos uma série ascendente indefinida, na qual uma unidade de uma ordem qualquer correspondia a dez unidades de ordem immediatamente superior.

Supponho a unidade dividida em dez partes iguaes ou decimos, o decimo dividido em dez partes iguaes ou centesimos, o centesimo dividido em dez partes iguaes ou millesimos, etc; resulta d'essas subdivisões que, partindo tambem da unidade, teremos uma série descendente indefinida, na qual uma unidade de qualquer ordem corresponderá tambem a dez unidades de uma ordem immediatamente inferior. Essas duas séries podem ser dispostas de modo que formem uma unica, na qual dez unidades de uma ordem qualquer corresponderão sempre a uma de ordem immediatamente superior.

Na medida das grandezas menores que a unidade é muito conveniente para o calculo a divisão da unidade na razão decupla, pois d'essa divisão resultarão fracções tendo para denominadores o numero dez ou uma potencia qualquer de dez; fracções que poderão ser representadas como o são os numeros inteiros, presidindo á sua numeração as mesmas leis estabelecidas na numeração decimal d'estes.

A essas fracções dá-se o nome de *fracções decimaes*.

146. Attendendo ao modo pelo qual foram representados os numeros inteiros e ao principio que presidiu a essa representação, podemos escrever uma fracção decimal qualquer collocando o algarismo dos centesimos á direita do dos decimos; o dos millesimos á direita do dos centesimos; o dos decimos millesimos á direita do dos millesimos; e assim por diante, separando com uma virgula o algarismo das unidades do dos decimos.

Se um numero decimal fôr composto de sete unidades, quatro decimos, cinco centesimos, tres millesimos e seis decimos millesimos, sua representação será 7,4536.

As fracções $\frac{7}{10}$ $\frac{13}{100}$ $\frac{47}{1000}$ $\frac{593}{10000}$ escrevem-se do seguinte modo: 0,7; 0,13; 0,047; 0,0593.

Se o numero decimal é enunciado distinguindo-se apenas a parte inteira da fraccionaria, sem conhecer as unidades das differentes ordens d'esta ultima, é necessario decompôr a parte fraccionaria para sabermos de quantos decimos, centesimos, millesimos, etc., ella consta; e depois de representada a parte inteira, escreveremos os algarismos d'essas diversas ordens nos seus logares respectivos, collocando zeros nos logares das ordens que não tiverem unidades.

EXEMPLO:

Escrever o numero: *Quarenta e sete unidades e quatrocentos e trinta e seis decimos millesimos.*

Como quatrocentos decimos millesimos é o mesmo que quarenta millesimos e ainda o mesmo que quatro centesimos; e trinta decimos millesimos, o mesmo que tres millesimos, o numero será 47,0436.

Se o numero decimal fôr enunciado sem distincção das duas partes, escreve-se o numero como se fosse inteiro, e colloca-se a virgula de modo que o ultimo algarismo represente a ordem de unidades indicada pelo enunciado.

O numero: *Quarenta e tres milhões setecentos e sessenta e tres mil seiscentos e quatro centesimos millesimos*, escreve-se 437,63604.

O numero: *Quatrocentos e trinta e sete millionesimos*, escreve-se 0,000437.

147. No calculo das fracções é algumas vezes necessario mudar as fórmas dos numeros decimaes, e essas transformações se effectuam facilmente por meio de regras deduzidas de principios já estabelecidos.

1ª REGRA. Para passar um numero decimal da fórma primitiva para a fórma de numero inteiro, *escreve-se o numerador e separa-se nelle para a direita tantos algarismos quantos forem os zeros do denominador. Se o numero de algarismos do numerador fôr inferior ao numero de algarismos que deve ser separado, escrevem-se zeros á esquerda, até completar esse numero de algarismos.*

2ª Regra. Para passar um numero decimal da fórma de numero inteiro para a fórma primitiva, *escreve-se no numerador o numero dado, prescindindo da virgula, e, no denominador, a unidade seguida de tantos zeros quantos fôrem os algarismos da parte fraccionaria.*

148. Tratemos presentemente de estabelecer a regra para lêr um numero decimal qualquer.

Seja o numero 47,6587.

Lê-se, em primeiro logar, a parte inteira.

A parte fraccionaria, compondo-se de 6 decimos, 5 centesimos, 8 millesimos e 7 decimos millesimos, e sendo :

6 decimos = 60 centesimos = 600 millesimos = 6000 decimos millesimos ;

5 centesimos = 50 millesimos = 500 decimos millesimos ;

8 millesimos = 80 decimos millesimos ;

reunindo tudo isso com os 7 decimos millesimos, teremos 6578 decimos millesimos e o enunciado do numero é 47 unidades e 6587 decimos millesimos.

Devemos estabelecer a seguinte

Regra.—*Lê-se a parte inteira e depois a fraccionaria, dando-lhe a denominação da ultima ordem.*

Póde-se tambem lêr o numero decimal sem separar as duas partes, dando-lhe a denominação da ultima ordem. O numero 47,6587 lê-se ainda: *quatrocentos e setenta e seis mil quinhentos e oitenta e sete decimos millesimos.*

149. *Um numero decimal não muda de valor escrevendo á sua direita um numero qualquer de zeros.*

Com effeito, dos numeros 3,472 e 4,4720, os algarismos conservam os mesmos valores relativos, e por isso esses numeros são iguaes.

Se em um numero decimal mudarmos a virgula para a direita, um, dous, tres, etc. algarismos, elle ficará dez, cem, mil, etc., vezes maior; e ficará o mesmo numero de vezes menor se a virgula fôr mudada para a esquerda.

Nos numeros decimaes:

4,7853
47,853
478,53
4785,3

os algarismos representam successivamente unidades dez, cem, mil vezes maiores, e por isso esses numeros ficam dez, cem, mil vezes maiores. Este principio tem tambem applicação aos numeros inteiros. Assim, um numero inteiro não terminando em zeros, torna-se dez, cem, mil, etc., vezes menor, separando nelle para a direita um, dous, tres, etc., algarismos.

OPERAÇÕES SOBRE OS NUMEROS DECIMAES

Das operações sobre os numeros decimaes consideraremos por ora as quatro primeiras: *addição, subtracção, multiplicação e divisão.*

Addição

150. A addição dos numeros decimaes se effectua do mesmo modo que a addição dos numeros inteiros. Assim como nos numeros inteiros, sommam-se as unidades, as dezenas, as centenas, etc., devemos nos numeros decimaes sommar os millesimos, os centesimos, os decimos ; as reservas se formarão do mesmo modo e a regra será ainda a mesma.

Escrevem-se os numeros uns abaixo dos outros, de modo que as unidades das differentes ordens se correspondam em columnas verticaes, o que se consegue escrevendo os numeros de modo que as virgulas fiquem em uma columna. Sommam-se successivamente as unidades que compõem cada uma das columnas, começando pelas de ordem inferior. Se a somma de cada columna não passar de 9, escreve-se abaixo do traço. Se a somma passar de 9, escreve-se o que passar de 10, 20, 30, etc., e essas 10, 20, 30 unidades de uma ordem qualquer convertem-se em unidades da ordem seguinte e a ellas se reunem.

Exemplo: — Sommar os numeros

$$6,7853+18,56+2,347+0,6308+4,0052$$

```
              6,7853
             18,56
              2,347
              0,6308
              4,0052
           ---------
Somma........ 32,3283
Prova........ 22,2110
```

A prova é a mesma da addição dos numeros inteiros.

Subtracção

151. A subtracção dos numeros decimaes se effectua do mesmo mod oque a subtracção dos numeros inteiros, tendo, porém, o cuidado de reduzir os dous numeros á mesma denominação, o que se consegue escrevendo zeros á direita do numero que tiver menor numero de algarismos na parte fraccionaria.

Isto se faz para que os numeros sejam referidos á mesma unidade.

Preparados assim os numeros, applica-se a

Regra.—*Escreve-se o numero menor abaixo do maior de modo que as virgulas fiquem em uma columna. Sublinha-se. Subtrahem-se as unidades das differentes ordens do numero menor das unidades das ordens correspondentes do maior. Se em uma ordem do numero menor houver maior numero de unidades que na ordem correspondente do maior, reunem-se mentalmente a essa ordem dez unidades, e diminue-se de uma unidade a ordem seguinte. Se a ordem ou as ordens seguintes não tiverem unidades, reunem-se a essa ordem 10 unidades, consideram-se as ordens seguintes como tendo cada uma d'ellas nove unidades, e diminue-se de uma unidade a primeira ordem que tiver unidades.*

Exemplo:—Subtrahir do numero 43,72 o numero 28,47235.

```
             43,72000
             28,47235
             --------
Resto ....... 15,24765
Prova ....... 43,72
```

A prova é a mesma que a da subtracção dos numeros inteiros.

Multiplicação

152. Na multiplicação dos numeros decimaes, consideraremos dous casos.

1º Caso : *O multiplicador é numero inteiro.*

2º Caso : *O multiplicador é numero decimal.*

153. 1º Caso.—Seja o numero 6,369 para multiplicar pelo numero 528.

A operação reduz-se a repetir o multiplicando 528 vezes ; e como o multiplicando representa 6,369 millesimos, repetindo-o 528 vezes, o resultado deve ser igual a 528 vezes esse numero de millesimos, ou 3362,832.

```
     6, 3 6 9
        5 2 8
  -----------
    5 0 9 5 2
  1 2 7 3 8
3 1 8 4 5
-------------
3 3 6 2, 8 3 2
```

Do que fica exposto se conclue a seguinte

Regra.—*Effectua-se a multiplicação, prescindindo-se da virgula, separando-se no producto, para a direita, tantos algarismos quantos forem os algarismos da parte fraccionaria do multiplicando.*

Esta regra póde ainda ser demonstrada do seguinte modo :

Prescindindo da virgula no multiplicando, fica elle 1000 vezes maior, e o producto fica tambem 1000 vezes maior ; e para que o producto não mude, é necessario tornal-o 1000 vezes menor, o que se consegue separando tres algarismos para a direita.

154. 2º Caso.—Seja o numero 32,476 para ser multiplicado pelo numero 4,37.

Multiplicar 32,476 por 4,37 é repetir 437 vezes a centesima parte do multiplicando.

O producto se obtem, pois, repetindo 437 vezes a centesima parte do multiplicando, ou 0,32476.

```
      0, 3 2 4 7 6
             4 3 7
   ---------------
       2 2 7 3 3 2
       9 7 4 2 8
   1 2 9 9 0 4
   ---------------
   1 4 1, 9 2 0 1 2
```

Comparando o resultado com os dous numeros dados, teremos a

REGRA.—*Effectua-se a multiplicação, prescindindo-se das virgulas, separando-se no producto, para a direita, tantos algarismos quantos forem os algarismos das partes fraccionarias dos dous factores.*

Esta regra póde ainda ser demonstrada do seguinte modo:

Prescindindo-se das virgulas nos dous factores, o multiplicando fica 1000 vezes maior e o multiplicador 100 vezes maior, e por isso o producto fica 100000 vezes maior; para termos o producto pedido, é necessario tornal-o 100000 vezes menor, o que se consegue separando cinco algarismos para a direita.

Se o numero de algarismos no producto fôr inferior ao numero de algarismos que devemos separar, escrevem-se zeros á esquerda do producto até completar esse numero de algarismos, como se vê no seguinte exemplo:

$$
\begin{array}{r}
0,00479 \\
0,0078 \\
\hline
3832 \\
3353 \\
\hline
0,000037362
\end{array}
$$

A prova da multiplicação dos numeros decimaes é a mesma que a da multiplicação dos numeros inteiros.

Divisão

155.—Na divisão dos numeros decimaes, consideraremos dous casos:

1º CASO: *Divisão de um numero decimal por um numero inteiro e vice-versa.*

2º CASO: *Divisão de um numero decimal por outro.*

156. 1º CASO.—Seja o numero 2476,83 para ser dividido pelo numero 32.

Se prescindirmos da virgula no dividendo, fica elle 100 vezes maior e por isso o quociente fica 100 vezes maior; para que o quociente não mude, é necessario tornar o divisor tambem 100 vezes maior, o que se consegue escrevendo dous zeros á sua direita. Fica, pois, a questão reduzida a dividir o numero 247683 pelo numero 2300,

$$
\begin{array}{r|l}
247683 & 3200 \\
23683 & \overline{\frac{1283}{}} \\
1283 & 77\frac{1283}{3200}
\end{array}
$$

O quociente é $77\frac{1283}{3200}$, que póde ter uma outra fórma, como veremos depois.

Seja ainda o numero 92 para dividir pelo numero 0,0125.

Se prescindirmos da virgula no divisor, fica elle 10000 vezes maior, e por isso o quociente fica 10000 vezes menor; para que o quociente não mude, devemos tornar o dividendo tambem 10000 vezes maior, o que se consegue escrevendo quatro zeros á sua direita, e a questão fica reduzida a dividir o numero 920000 pelo numero 125.

$$
\begin{array}{r|l}
920000 & 125 \\
\cline{2-2}
450 & 7360 \\
750 & \\
0 &
\end{array}
$$

O quociente é 7360.

Pelo que fica exposto, podemos estabelecer a seguinte

REGRA.—*Prescinde-se da virgula no numero decimal, e escrevem-se á direita do numero inteiro tantos zeros quantos forem os algarismos da parte fraccionaria do numero decimal. Divide-se o primeiro resultado pelo segundo, applicando-se a regra estabelecida para a divisão dos numeros inteiros.*

157. 2º CASO.—Seja o numero 27,43 que queremos dividir pelo numero 0,0025.

Escrevendo dous zeros á direita do dividendo, elle não muda de valor; e conservando-se o divisor o mesmo, o quociente não muda tambem de valor, e a questão fica reduzida a dividir o numero 27,4300 pelo numero 0,0025.

Prescindindo-se das virgulas no dividendo e divisor, o quociente não muda; e a questão reduz-se a dividir o numero 274300 pelo numero 25.

$$
\begin{array}{r|l}
274300 & 25 \\
\cline{2-2}
243 & 10972 \\
180 & \\
55 & \\
0 &
\end{array}
$$

O quociente é o numero 10972.

Este raciocinio sendo applicavel a quaesquer outros numeros, podemos estabelecer a seguinte

REGRA.—*Reduzem-se os numeros decimaes á mesma denominação e effectua-se a divisão, prescindindo-se das virgulas.*

EXEMPLO :

Dividir o numero 3,5728 pelo numero 1,25. Reduzindo á mesma denominação, temos

$$3{,}5728 \div 1{,}2500$$

Prescindindo das virgulas e effectuando a divisão, resulta .

$$\begin{array}{r|l} 35728 & 12500 \\ \hline 10728 & 2\,\frac{10728}{12500} \end{array}$$

158. O quociente da divisão de um numero decimal por outro póde ser uma fracção propria, ou um numero inteiro, ou finalmente um numero mixto.

Na hypothese de ser o quociente fracção propria ou numero mixto, é conveniente que a fracção que representa o quociente ou a que acompanha a parte inteira do quociente seja transformada em fracção decimal.

A prova da divisão dos numeros decimaes é a mesma que a da divisão dos numeros inteiros.

Reducção da fracção ordinaria em decimal

159. A reducção da fracção ordinaria em decimal origina-se da divisão das fracções decimaes, na hypothese de ser o quociente uma fracção ou numero mixto.

No ultimo exemplo que consideramos na divisão das fracções decimaes, vimos que o quociente era $2\,\frac{10728}{12500}$

Vejamos como converter em fracção decimal a fracção $\frac{10728}{12500}$ que acompanha a parte inteira do quociente.

$$\begin{array}{r|l} 107280 & 12500 \\ \cline{2-2} 72800 & 0,85824 \\ 103000 & \\ 30000 & \\ 50000 & \\ 0 & \end{array}$$

Convertendo 10728 unidades em decimos, achamos 107280 decimos; dividindo esse resultado por 12500, teremos o algarismo dos decimos no quociente ; reduzindo o resto 7280 decimos em centesimos, achamos 72800 centesimos ; dividindo o resultado pelo mesmo divisor, teremos o algarismo dos centesimos no quociente ; convertendo o resto 10300 centesimos em 103000 millesimos e dividindo o resultado pelo mesmo divisor, acharemos o algarismo dos millesimos do quociente ; e o resto 3000 millesimos reduz-se em 30000 decimos millesimos. Continuando do mesmo modo, acharemos os outros algarismos do quociente.

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

REGRA PARA CONVERTER UMA FRACÇÃO ORDINARIA EM DECIMAL.—*Escreve-se zero e virgula no quociente e um zero á direita do numerador, e, dividindo-o pelo denominador, acharemos o algarismo dos decimos e um resto, á direita do qual se escreve um zero. Dividindo o resultado pelo mesmo divisor, teremos o algarismo dos centesimos e um resto, á direita do qual se escreve um zero. Continúa-se do mesmo modo até terminar a divisão, ou até á ordem que a questão exigir.*

Em logar de escrever um zero á direita do numerador e successivamente um zero á direita de cada um dos restos, podemos escrevel-os todos á direita do numerador, porquanto, na divisão pelo denominador, os zeros do numerador vão passando para a direita de cada um dos restos.

160. Uma fracção ordinaria convertida em fracção decimal, póde originar uma fracção decimal de numero limitado ou infinito de algarismos. Assim, as fracções $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{1}{125}$, etc., convertem-se em fracções decimaes de numero limitado de algarismos ; as fracções $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{15}$, etc., convertem-se em fracções decimaes de numero infinito de algarismos.

Os principios por meio dos quaes podemos conhecer se uma fracção ordinaria produz uma fracção decimal de numero limitado ou infinito de algarismos, são :

161. 1º PRINCIPIO.—*Se o denominador de uma fracção ordinaria irreductivel tiver em sua composição sómente factores primos iguaes a 2 e 5, essa fracção se converte em uma fracção decimal de numero limitado de algarismos*

Seja a fracção irreductivel $\frac{a}{b}$ e supponhamos que o denominador b tenha sómente factores primos iguaes a 2 e 5.

Decompondo o denominador b em seus factores primos, teremos

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2\times2\times2\times\ldots\ldots\times5\times5\times\ldots\ldots}$$

Suppondo m o numero de factores iguaes a 2, e p o numero de factores iguaes a 5, resulta

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2\times2\times2\times2\ldots\ldots\times5\times5\times\ldots\ldots}=\frac{a}{2^m\times5^p}$$

Admittindo que o denominador b tenha factores primos iguaes a 2 e 5, póde o numero de factores iguaes a 2 ser igual, maior ou menor que o numero de factores iguaes a 5, e portanto na demonstração do principio, devemos considerar as seguintes hypotheses: $m=p$, $m>p$ e $m<p$.

As hypotheses $m>p$ e $m<p$ comprehendem as em que o denominador tem sómente factores iguaes a 2 ou sómente factores iguaes a 5.

Supponhamos $m=n$.

Mudando no denominador da fracção $\frac{a}{2^m\times5^p}$ p em m, e attendendo a que $2^m\times5^m=10^m$, temos

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2\times2\times2\times\ldots\ldots\times5\times5\times\ldots\ldots}=\frac{a}{2^m\times5^p}=\frac{a}{2^m\times5^m}=\frac{a}{10^m}$$

O denominador da ultima fracção sendo uma potencia de 10, essa fracção é decimal e de numero limitado de algarismos.

Supponhamos $m>p$.

Multiplicando ambos os termos da fracção $\frac{a}{2^m\times5^p}$ por 5^{m-p} e attendendo a que $2^m\times5^m=10^m$, resulta

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2\times2\times2\times\ldots\times5\times5\times\ldots}=\frac{a}{2^m\times5^p}=\frac{a\times5^{m-p}}{2^m\times5^p\times5^{m-p}}=\frac{a\times5^{m-p}}{2^m\times5^m}=\frac{a\times5^{m-p}}{10^m}$$

Sendo o denominador da ultima fracção uma potencia de 10, essa fracção é decimal e de numero limitado de algarismos.

Supponhamos $m<p$

Multiplicando ambos os termos da fracção $\frac{a}{2^m\times5^p}$ por 2^{p-m}, e attendendo a que $2^p\times5^p=10^p$, acha-se

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2\times2\times2\times\ldots\ldots5\times5\times\ldots}=\frac{a}{2^m\times5^p}=\frac{a\times2^{p-m}}{2^m\times2^{p-m}\times5^p}=\frac{a\times2^{p-m}}{2^p\times5^p}=\frac{a\times2^{p-m}}{10^p}$$

O denominador da ultima fracção sendo uma potencia de 10, essa fracção é decimal e de numero limitado de algarismos.

162. 2º PRINCIPIO—*Se o denominador de uma fracção ordinaria irreductivel tiver um ou mais factores primos differentes de 2 e 5, a fracção converte-se em fracção decimal de numero infinito de algarismos. Essa fracção decimal é periodica*

Seja a fracção irreductivel $\frac{a}{b}$, e supponhamos que o denominador b tenha um factor primo c differente de 2 e 5.

Para converter a fracção $\frac{a}{b}$ em fracção decimal, devemos escrever zeros á direita do numerador.

Suppondo que o numero necessario de zeros para convertel-a em decimal seja m, ella tomará a seguinte fórma $\frac{a\times10^m}{b}$.

O denominador sendo por hypothese divisivel por c, o quociente da divisão é numero inteiro, que representaremos por Q, e teremos $\frac{b}{c}=Q$ ou $b=cQ$.

Substituindo na fracção $\frac{a\times10^m}{b}$ em logar de b o seu valor cQ, resulta

$$\frac{a\times10^m}{cQ}$$

Se provarmos que a divisão não é exacta, seja qual fôr o valor de m, isto é, seja qual fôr o numero de zeros que se escreva á direita do numerador, teremos demonstrado a primeira parte do principio.

O numerador não é divisivel pelo denominador, porque se $a\times10^m$ fosse divisivel por cQ, seria tambem divisivel por c (n. 69); mas c, sendo numero primo e dividindo $a\times10^m$, tem de dividir a ou 10^m (n. 89); ora, c não póde dividir a 10^m, porque para isso era necessario que dividisse 10, o que não é possivel porque os factores primos de 10 são 2 e 5; não dividindo ambos os membros da ultima igualdade por 10000, teremos finalmente

$$x=\frac{4583\times99+24}{990000}$$

Attendendo ao resultado, facil é estabelecer a

Regra para converter uma dizima periodica composta em fracção ordinaria.—*Dá-se para numerador a parte não periodica multiplicada por um numero formado de tantos noves quantos forem os algarismos de um dos periodos mais um dos periodos, e para denominador um numero formado de tantos noves quantos forem os algarismos de um dos periodos, seguido de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não periodica.*

166. Podemos deduzir uma regra mais simples que a precedente para converter uma dizima periodica composta em fracção ordinaria.

Representando ainda por x a fracção ordinaria correspondente á dizima periodica composta, teremos

$$x=0,4583242424 \text{ etc. };$$

multiplicando ambos os membros d'esta igualdade por 10000 e depois por 1000000, resultam as igualdades

$$10000x=4583,242424 \text{ etc. };$$
$$1000000x=458324,242424 \text{ etc. };$$

subtrahindo a penultima igualdade da ultima ordenadamente, vem

$$990000x=458324-4583$$

dividindo ambos os membros da ultima igualdade por 990000, teremos finalmente

$$x=\frac{458324-4583}{990000}$$

Do que fica exposto segue-se que: *O denominador forma-se do mesmo modo que pela primeira regra; e o numerador, pela parte não periodica unida a um dos periodos menos a parte não periodica.*

Analysando os dous valores obtidos pelas duas regras, nota-se que sendo iguaes os denominadores, para provar que elles são identicos, basta demonstrar que os numeradores são iguaes, o que é facil, attendendo-se a que:

$$4583\times99+24=4593\,(100-1)+24=458300-4583+24=458324-$$
$$-4583$$

Na hypothese de produzir a fracção ordinaria uma dizima periodica, facilmente se reconhece se essa dizima é simples ou composta, estabelecendo os principios seguintes:

167. 1º Principio—*Se o denominador de uma fracção ordinaria irreductivel $\frac{a}{b}$ não contiver o factor 2 nem o factor 5, essa fracção produz uma dizima periodica simples.*

Demonstração.—A fracção $\frac{a}{b}$ convertida em decimal não póde produzir uma fracção decimal de numero limitado de algarismos, nem tambem uma dizima periodica composta, porque se a dizima periodica fosse composta, se converteria em uma fracção ordinaria tendo para denominador um numero formado de noves seguidos de zeros, e teriamos, por exemplo

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{90}$$

reduzindo a fracção $\frac{c}{90}$ á sua expressão mais simples, se dos factores 2 e 5 eliminar-se um, ficará o outro. Suppondo que fique o factor 2, resulta

$$\frac{a}{b}=\frac{n}{d\times2}$$

sendo irreductiveis as duas fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{n}{d\times2}$ teremos (n. 113)

$$a=n \qquad b=d\times2$$

D'onde se segue que o denominador b tem o factor 2, o que é contra a hypothese.

Se a fracção $\frac{a}{b}$ não produz fracção decimal de numero limitado de algarismos, nem dizima periodica composta, produz necessariamente uma dizima periodica simples.

168. 2º Principio.—*Se o denominador de uma fracção ordinaria irreductivel $\frac{a}{b}$ contiver factores primos differentes de 2 e 5 e juntamente um d'esses factores ou ambos, essa fracção produz uma dizima periodica composta.*

Demonstração.—A fracção decimal correspondente á fracção ordinaria $\frac{a}{b}$ não póde ter numero limitado de algarismos, nem tambem ser dizima periodica simples; porque se ella fosse dizima periodica simples, se converteria em uma fracção ordinaria tendo para denominador um numero formado sómente de noves, e teriamos, por exemplo

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{9}$$

reduzindo a fracção $\frac{c}{9}$ á sua expressão mais simples, resulta

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$$

D'onde

$$a=d \text{ e } b=e$$

O que não é possivel, porque *e* não contém os factores 2 e 5, e *b* os contém.

Se a fracção $\frac{a}{b}$ não produz fracção decimal de numero limitado de algarismos, nem dizima periodica simples, produz necessariamente dizima periodica composta.

CAPITULO V

Systemas metrologicos. Operações sobre os numeros complexos

SYSTEMA METRICO DECIMAL

169. No fim do seculo passado, a França conseguiu realizar a grandiosa idéa de estabelecer um systema de pesos e medidas, tomando para base d'esse systema uma dimensão do globo terrestre.

Delambre e Mechain, celebres mathematicos francezes, foram encarregados da medição do arco do meridiano comprehendido entre Dunkerke e Barcellona, e, da combinação d'esse resultado com observações astronomicas, determinou-se a distancia do pólo ao equador, sendo essa distancia igual a 5130740 toezas, 4 pés, 5 pollegadas e 4 linhas.

Dividida essa distancia em dez milhões de partes iguaes, uma d'essas partes, igual a 3 pés, 0 pollegadas e 11,296 linhas, foi considerada como unidade principal do systema, recebendo o nome de *metro*.

As vantagens do systema metrico decimal sobre todos os outros systemas de pesos e medidas são:

1ª *Simplicidade de sua nomenclatura e uniformidade das medidas.*

2ª *Facilidade dos calculos.*

3ª *Fixidade da unidade principal, baseada na medida de uma das dimensões do globo.*

170. As unidades do systema metrico decimal são, como nos outros systemas metrologicos: de *comprimento*, de *superficie*, de *capacidade*, de *peso*, de *tempo*, *angular* e *monetaria*.

Os nomes dos multiplos das diversas unidades no systema metrico decimal são formados escrevendo antes dos nomes d'essas diversas unidades as palavras:

MYRIA	KILO	HECTO	DECA
10000	1000	100	10

Os nomes dos submultiplos formam-se antepondo aos nomes das diversas unidades as palavras

DECI	CENTI	MILLI
0,1	0,01	0,001

Unidades de comprimento

Myriametro = 10 kilometros = 10000 metros
Kilometro = 10 hectometros = 1000 »
Hectometro = 10 decametros = 100 »
Decametro = 10 metros.

METRO (unidade principal)

Decimetro = 0,1 do metro.
Centimetro = 0,1 do decimetro = 0,01 do metro.
Millimetro = 0,1 do centimetro = 0,001.

Os multiplos *myriametro* e *kilometro* são empregados como medidas itinerarias.

Nas medidas de comprimento, *uma unidade qualquer corresponde a dez de classe immediatamente inferior.*

Unidades de superficie

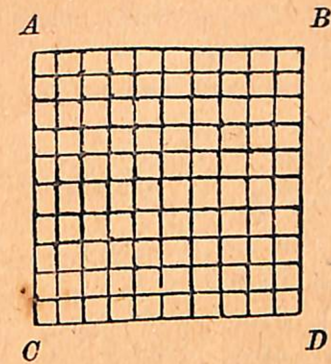
Myriametro quadrado = 100 kilometros quadrados = 100000000 metros quadrados.
Kilometro quadrado = 100 hectometros quadrados = 1000000 metros quadrados.
Hectometro quadrado = 100 decametros quadrados = 10000 metros quadrados.
Decametro quadrado = 100 metros quadrados.

METRO QUADRADO (unidade principal)

Decimetro quadrado = 0,01 do metro quadrado.
Centimetro quadrado = 0,01 do decimetro quadrado = 0,0001 do metro quadrado.
Millimetro quadrado = 0,01 do centimetro quadrado = 0,000001 do metro quadrado.

Nas unidades de superficie, *uma unidade qualquer corresponde á cem da classe immediatamente inferior.*

Demonstremos, por exemplo, que *um metro quadrado tem cem decimetros quadrados.*



Consideremos o metro quadrado ABCD.

Dividindo os lados AB e AC em 10 partes iguaes, cada uma d'essas partes será igual a um decimetro, e traçando parallelas a esses lados pelos pontos de divisão, fica o metro quadrado dividido em decimetros quadrados.

A cada uma d'essas partes de AC correspondem 10 decimetros quadrados, como facilmente se vê na figura, e como o numero de partes de AC é igual a 10, segue-se que o metro quadrado contém 10 vezes 10 ou 100 decimetros quadrados.

Para *medidas agrarias* usa-se do *Are*, quadrado construido sobre um *decametro*, e por consequencia igual a 100 metros quadrados.

Seus multiplos e submultiplos são :

Myriare = 10000 ares
Kilare = 1000 »
Hectare = 100 »
Decare = 10 »

ARE

Deciare = 0,1 do are
Centiare = 0,01 » »
Milliare = 0,001 » »

Dos multiplos do *Are*, o unico empregado é o *hectare*, que corresponde a 10000 metros quadrados, e dos submultiplos é o *centiare*, que é igual ao metro quadrado.

Unidades de capacidade

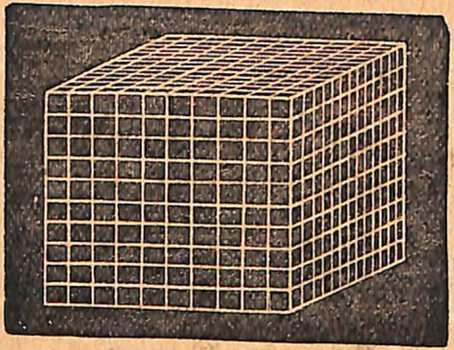
Myriametro cubico = 1000 kilometros cubicos = 1.000.000.000.000 metros cubicos.
Kilometro cubico = 1000 hectometros cubicos = 1.000.000.000 metros cubicos.
Hectometro cubico = 1000 decametros cubicos = 1.000.000 metros cubicos.
Decametro cubico = 1000 metros cubicos.

METRO CUBICO (unidade principal)

Decimetro cubico = 0,001 do metro cubico.
Centimetro cubico = 0,001 do decimetro cubico = 0,000001 do metro cubico.
Millimetro cubico = 0,001 do centimetro cubico = 0,000000001 do metro cubico.

Nas unidades de capacidade, *uma unidade qualquer corresponde a mil da classe immediatamente inferior.*

Demonstremos, por exemplo, que o *metro cubico tem mil decimetros cubicos.*



Considerando o metro quadrado *AC* dividido em 100 decimetros quadrados, e imaginando sobre cada um d'elles construido um decimetro cubico, formaremos uma camada tendo um metro quadrado de base e um decimetro de altura e contendo 100 decimetros cubicos.

Collocando sobre esta camada mais nove iguaes á primeira, teremos um cubo de um metro quadrado de base e de um metro de altura, isto é, teremos um metro cubico contendo mil decimetros cubicos, por ser composto de dez camadas, tendo cada uma d'ellas cem decimetros cubicos.

Reconhecendo-se a inconveniencia da fórma do cubo para as medidas de capacidade, deu-se ao *decimetro cubico* a fórma cylindrica, tendo debaixo d'essa nova fórma o nome de — *Litro.*

Os multiplos e submultiplos do *litro* são :

Myrialitro = 10 kilolitros = 10000 litros
Kilolitro = 10 hectolitros = 1000 »
Hectolitro = 10 decalitros = 100 »
Decalitro = 10 litros.

LITRO

Decilitro = 0,1 do litro
Centilitro = 0,1 do decilitro = 0,01 do litro
Millilitro = 0,1 do centilitro = 0,001 do »

Os multiplos *myrialitro* e *kilolitro* e o submultiplo *millilitro* não são usados.

Para medir lenha, carvão, emprega-se o *Stereo*, cuja capacidade é de *um metro cubico.*

Dos multiplos do *Stereo*, o unico empregado é o *decastereo*, e dos submultiplos é o *decistereo.*

Unidades de peso

A unidade principal é o — *Grammo* — peso d'agua distillada, na temperatura de 4 gráos centigrados, contida em um *centimetro cubico.*

Myriagrammo = 10 kilogrammos = 10000 grammos
Kilogrammo = 10 hectogrammos = 1000 »
Hectogrammo = 10 decagrammos = 100 »
Decagrammo = 10 grammos

GRAMMO (unidade principal)

Decigrammo = 0,1 do grammo
Centigrammo = 0,1 do decigrammo = 0,01 do grammo
Milligrammo = 0,1 do centigrammo = 0,001 do »

Para medir pesos consideraveis empregam-se :
A tonelada metrica = 1000 kilogrammos = 1000000 grammos;
e o quintal metrico = 100 kilogrammos = 100000 grammos.

Unidades de tempo

A commissão encarregada da refórma do systema de pesos e medidas propôz que a unidade de tempo, o *dia*, fosse dividida em 10 *horas*, a *hora* em 100 *minutos* e o *minuto* em 100 *segundos*. Essa nova subdivisão da unidade de tempo não foi acceita, continuando, portanto, a ser adoptada a divisão do antigo systema, isto é, o *dia* em 24 horas, a *hora* em 60 minutos e o *minuto* em 60 segundos.

Unidade angular

Medindo-se os angulos por meio dos arcos oppostos e descriptos dos vertices como centros, considerou-se o *grado* como unidade angular no systema metrico decimal.

O *grado* representa $\frac{1}{400}$ da circumferencia.

O *grado* se subdivide em 100 *minutos* e o *minuto* em 100 *segundos*.

Unidade monetaria

A unidade principal é o *franco*, que se subdivide em 10 *decimos*, e o *decimo* em 10 *centimos*.

Esta parte do systema metrico decimal não é adoptada no Brasil, por ser o systema monetario brasileiro não só superior ao d'esse systema, como tambem aos dos outros systemas adoptados nas outras nações.

NUMERAÇÃO DAS MEDIDAS NO SYSTEMA METRICO DECIMAL

Medidas de comprimento

171. Para escrever um numero qualquer de *metros*, *decimetros*, etc., *escreve-se o numero collocando a virgula de modo que a cada submultiplo da unidade principal corresponda um algarismo na parte fraccionaria.* (146).

O numero : *Sessenta e sete metros e trinta e sete millimetros*, *escreve-se*

$$67^{m},037$$

172. Para enunciar um numero qualquer de *metros*, *decimetros*, *centimetros*, etc., *lê-se todo o numero como se fosse inteiro, dando-lhe a denominação da ultima subdivisão principal* : ou então *lê-se em primeiro logar a parte inteira com o nome da unidade principal, e depois a parte fraccionaria com a denominação da ultima subdivisão da mesma unidade principal.* (148).

O numero $352^{m}, 439$ lê-se : 352 *metros* e 438 *millimetros*, ou 352439 *millimetros*.

Medidas de superficie

173. Para escrever um numero qualquer de *metros quadrados*, *decimetros quadrados*, *centimetros quadrados*, etc., *escreve-se o numero enunciado, collocando a virgula de modo que a cada submultiplo da unidade principal correspondam dous algarismos na parte fraccionaria.*

O numero : *Quatrocentos e cincoenta e tres metros quadrados e quinhentos e oito mil trezentos e seis millimetros quadrados*, escreve-se

$$453^{m^2}, 508306$$

174. Para enunciar um numero qualquer de *metros quadrados*, *decimetros quadrados*, *centimetros quadrados*, etc., *lê-se em primeiro logar a parte inteira, dando-lhe o nome da unidade principal, e dividindo a parte fraccionaria em classes de dous algarismos da esquerda para a direita, lê-se cada uma d'essas classes, dando a cada uma d'ellas os nomes de decimetros quadrados, centimetros quadrados*, etc.

Se a ultima classe tiver um só algarismo, escreve-se um zero á direita.

Podemos tambem *lêr a parte inteira, dando-lhe o nome da unidade principal, e depois a fraccionaria, dando-lhe a denominação da ultima classe*, ou *lêr todo o numero, dando-lhe o nome da ultima classe.*

O numero $43^{m^2},530769$ lê-se : 43 *metros quadrados*, 53 *decimetros quadrados*, 7 *centimetros quadrados* e 69 *millimetros quadrados*, ou 43 *metros quadrados* e 530769 *millimetros quadrados*, ou, finalmente, 43530769 *millimetros quadrados*.

Medidas de capacidade

175. Para escrever um numero qualquer de *metros cubicos, decimetros cubicos, centimetros cubicos, etc., escreve-se o numero enunciado collocando a virgula de modo que a cada submultiplo da unidade principal correspondam tres algarismos na parte fraccionaria.*

O numero: 57 *metros cubicos*, 37565623 *millimetros cubicos*, escreve-se:

$$57^{m3},037565623$$

176. Para enunciar um numero qualquer de *metros cubicos, decimetros cubicos, centimetros cubicos, etc., lê-se em primeiro logar a parte inteira, dando-lhe o nome da unidade principal, e dividindo a parte fraccionaria em classes de tres algarismos, da esquerda para a direita, lê-se cada uma d'essas classes, dando a cada uma d'ellas os nomes de decimetros cubicos, etc.*

Se a ultima classe tiver um só algarismo, escrevem-se á sua direita dous zeros, e se tiver dous algarismos escreve-se um zero.

Podemos tambem *lêr a parte inteira, dando-lhe o nome da unidade principal, e depois a fraccionaria, dando-lhe a denominação da ultima classe;* ou *lêr todo o numero, dando-lhe o nome da ultima classe.*

O numero: $437^{m3},358047273$ lê-se: 437 *metros cubicos*, 358 *decimetros cubicos*, 47 *centimetros cubicos* e 273 *millimetros cubicos;* ou 437 *metros cubicos* e 358047273 *millimetros cubicos;* ou finalmente 437358047273 *millimetros cubicos.*

SYSTEMA METRICO BRASILEIRO ANTIGO

Relações entre as unidades d'esse systema e as do systema metrico decimal

UNIDADES DE COMPRIMENTO

Uma legua	= 3 milhas	$= 5555^m,55$
Uma milha	$= 841\frac{3}{4}$ braças	$= 1851^m,85$
Uma braça	= 2 varas	$= 2^m,2$
Uma vara	= 5 palmos	$= 1^m,1$

Um palmo	= 8 pollegadas	$= 0^m,22$
Uma pollegada	= 12 linhas	$= 0^m,0275$
Uma linha	$= 0^m,0022$	

A legua e a milha eram usadas como unidades itinerarias.

UNIDADES DE SUPERFICIE

Uma legua quadrada	= 9 milhas quadradas = $= 30864135,^{m2}8025$
Uma milha quadrada	$= 708543\frac{1}{16}$ braças quadradas = $= 34293,^{m2}4225$
Uma braça quadrada	= 4 varas quadradas $= 4^{m2},84$
Uma vara quadrada	= 25 palmos quadrados $= 1,^{m2}21$
Um palmo quadrado	= 64 pollegadas quadradas $= 0^{m2}0484$
Uma pollegada quadrada	= 144 linhas quadradas $= 0^{m2}00075625$
Uma linha quadrada	$= 0^{m2},00000484$.

Empregam-se como *medidas agrarias*: a *geira=400 braças quadradas=1936 metros quadrados*; e a *braça quadrada.*

UNIDADES DE CAPACIDADE

Para seccos . . .	Moio	=60 alqueires	$= 217^l,62$
	Alqueire	=4 quartas	$= 36^l,27$
	Quarta	=4 selamins	$= 9^l,06$
	Selamim	$= 2^l,26$	
Para liquidos . .	Almude	=12 canadas	$= 31^l,944$
	Canada	=4 quartilhos	$= 2^l,662$
	Quartilho	$= 0^l,665$	

UNIDADES DE PESO

Pesos ordinarios	Tonelada	$= 13\ ^1/_2$ quintaes	=792,99 kilogrammos
	Quintal	= 4 arrobas	=58,74 »
	Arroba	= 32 libras	=14,685 »
	Libra	= 2 marcos	=458,9 grammos
	Marco	= 8 onças	=229,45 »
	Onça	= 8 oitavas	=28,68 »
	Oitava	=72 grãos	= 3,58 »
	Grão	= 0,049 do grammo	

Pesos para metaes e pedras preciosas			
	Onça	= 8 oitavas	= 28,68 grammos
	Oitava	= 3 escropulos	= 3,58 »
	Escropulo	= 6 quilates	= 1,19 »
	Quilate	= 4 grãos	= 0,29 do grammo.

Unidades de tempo

A unidade de tempo é o dia.

Os multiplos do *dia* são : o *seculo* com 100 *annos ;* o *anno* com 365 *dias*, divididos por 12 *mezes* e do seguinte modo : *Janeiro* com 31 dias, *Fevereiro* com 28 dias, *Março* com 31 dias, *Abril* com 30 dias, *Maio* com 31 dias, *Junho* com 30 dias, *Julho* com 31 dias, *Agosto* com 31 dias, *Setembro* com 30 dias, *Outubro* com 31 dias, *Novembro* com 30 dias e *Dezembro* com 31 dias.

O anno tropico tem proximamente 365 $\frac{1}{4}$ dias, e attendendo-se á inconveniencia de ser fraccionario esse numero de dias, considerou-se o anno civil com 365 dias, compensando o desprezo que se faz de $\frac{1}{4}$ do dia em cada anno, pelo augmento de um dia de quatro em quatro annos.

Esses annos de 366 dias foram denominados *bissextos* e nelles tem o mez de Fevereiro 29 dias.

Os submultiplos do *dia* são : a *hora*, que é a vigesima quarta parte do dia ; a hora subdivide-se em 60 *minutos* e o minuto em 60 *segundos*.

Unidade angular

No systema antigo, a circumferencia era dividida em 360 partes iguaes denominadas *gráos*, sendo uma d'essas partes a *unidade angular*.

Sendo a circumferencia no systema metrico decimal dividida em 400 partes iguaes denominadas grados, segue-se que o quadrante tem 90 gráos ou 100 grados ; por consequencia 1 gráo $=\frac{100}{90}=\frac{10}{9}$ do grado, e 1 grado $=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$ do gráo.

Unidade monetaria

A unidade monetaria no Brasil é o *real*, moeda ficticia, de valor tão pequeno que nunca é empregada nas differentes transacções commerciaes. Os multiplos são :

Moedas de ouro	20.000 réis 10.000 réis 5.000 réis
Moedas de prata	2.000 réis 1.000 réis 500 réis 200 réis
Moedas de nickel	400 réis 200 réis 100 réis 50 réis
Moedas de cobre	40 réis 20 réis

Operações sobre os numeros complexos

177. *Numero complexo é o que consta de unidades de grandezas diversas, sendo todas sujeitas a uma mesma que se denomina principal.*

Numero incomplexo é o que consta de uma ou mais unidades de uma mesma grandeza.

Os numeros: *34 braças, 7 palmos, 5 pollegadas; 23 dias, 17 horas, 37 minutos* são complexos.

Os numeros *348 arrobas, 25 almudes* são incomplexos.

178. As operações sobre os numeros complexos podem ser effectuadas, applicando as regras estabelecidas para as operações sobre as fracções ordinarias, por ser sempre possivel converter um numero complexo em uma expressão fraccionaria da unidade principal, e, reciprocamente, converter uma expressão fraccionaria de uma certa unidade em numero complexo.

Tratemos, pois, de estabelecer as regras para effectuar essas duas transformações.

1ª transformação

179. Seja para converter em uma expressão fraccionaria da unidade principal o numero complexo 34 braças, 7 palmos e 5 pollegadas.

34^{br} 7^{P} 5^{p}	
10	
340	
7	
347	palmos
8	
2776	
5	
2781	pollegadas

Uma braça tendo 10 palmos, 34 braças terão 340 palmos, que, com os 7 palmos do numero dado, formam 347 palmos.

Um palmo tendo 8 pollegadas, 347 palmos terão 347 vezes 8 ou 2776 pollegadas, que, com as 5 pollegadas do numero dado, formam 2781 pollegadas.

Sabendo-se, porém, que uma braça tem 80 pollegadas, cada pollegada corresponde a $\frac{1}{80}$ da braça; e se uma pollegada corresponde a $\frac{1}{80}$ da braça, 2781 pollegadas corresponderão a $\frac{2781}{80}$ da braça.

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

REGRA. *Dá-se para numerador o numero dado, reduzido a unidades da ultima subdivisão; e para denominador a unidade principal reduzida tambem a ultima subdivisão.*

2ª TRANSFORMAÇÃO

180. Seja para converter em numero complexo o numero fraccionario $\frac{2781}{80}$ da braça.

2781	80
381	34^{br} 7^{P} 5^{p}
61	
10	
610^{P}	
50	
8	
400^{p}	
0	

Sendo $\frac{2781}{80}$ da braça o mesmo que a 80ª parte de 2781 braças, dividindo 2781 braças por 80, acharemos o numero de braças que a fracção dada contém, isto é, 34 braças.

Convertendo o resto 61 braças em palmos, acharemos 610 palmos, e dividindo esse resultado por 80, teremos para quociente 7 palmos e para resto 50 palmos.

Convertendo o resto 50 palmos em 400 pollegadas e dividindo o resultado por 80, acharemos para quociente 5 pollegadas.

Pelo que fica dito facil é estabelecer a seguinte

REGRA. — *Divide-se o numerador pelo denominador; o quociente representará unidades principaes e o resto converte-se em unidades da primeira subdivisão. Dividindo o resultado pelo mesmo divisor, acharemos para quociente unidades da primeira subdivisão. Se houver ainda resto, converteremos esse resto em unidades da segunda subdivisão, e assim continuaremos até a ultima subdivisão.*

Estabeleçamos presentemente o processo directo para effectuar cada uma das quatro principaes operações sobre os numeros complexos.

Addição

181. A addição dos numeros complexos se effectúa do mesmo modo que a addição dos numeros inteiros. *Escrevem-se os numeros uns abaixo dos outros, de modo que as unidades das differentes classes se correspondam em columnas verticaes. Sommam-se as unidades contidas em cada uma das columnas, começando pela primeira da direita e attendendo em cada uma d'essas sommas ás diversas subdivisões da unidade principal; conservam-se mentalmente as reservas que se formarem, para reunir com as unidades da columna seguinte.*

Sejam para sommar os numeros:

	27^{lb}	$13^{onç}$	6^{oit}	34^{grs}
	14	9	7	47
	23	14	5	32
	13	6	3	18
Somma	79^{lb}	$12^{onç}$	6^{oit}	59^{grs}
Prova		44	22	131
		22	1	20
	12			

Sommando a columna dos grãos, achamos 131; convertidos em oitavas dão 1^{oit} 59^{gr}; escrevemos por baixo 59^{gr}, e como reserva levamos 1^{oit} para sommar á columna das oitavas. A somma d'estas é então 22^{oit};

convertidas a onça dão $2^{onç}$ 6^{oit}; escrevem-se 6^{oit} na columna respectiva, e como reservas juntam-se $2^{onç}$ á columna das onças. Assim por diante, tendo sempre em mente a relação entre as subdivisões da unidade principal.

A prova é a mesma da addição dos numeros inteiros.

Subtracção

182. A subtracção dos numeros complexos se effectúa do mesmo modo que a subtracção dos numeros inteiros. *Escreve-se o subtrahendo abaixo do minuendo, de modo que as unidades das differentes classes se correspondam em columnas verticaes. Subtrahem-se as unidades de cada uma das classes do subtrahendo das unidades das classes correspondentes no minuendo. Se em uma classe do minuendo houver menor numero de unidades que na classe correspondente do subtrahendo, junta-se a essa classe uma unidade da classe seguinte, decomposta em unidades da classe de que se trata, e diminue-se de uma unidade a classe seguinte. Se a classe seguinte ou as classes seguintes não tiverem unidades, consideram-se essas classes como tendo cada uma d'ellas tantas unidades menos uma, quantas bastarem para formar uma unidade da classe seguinte, e diminue-se de uma unidade a primeira classe que tiver unidades.*

1.° EXEMPLO:

	$\underbrace{12^{br}}_{}$ 11	$\underbrace{5P}_{}$ 15	$\underbrace{5^{p}}_{}$ 4	$\underbrace{3^{l}}_{}$ 15
	3	8	2	9
Resto..	8^{br}	7P	2^{p}	6^{l}
Prova..	12^{br}	5P	5^{p}	3^{l}

Não se podendo subtrahir 9 linhas de 3 linhas, decompõe-se uma pollegada em 12 linhas, e fica o minuendo tendo 4 pollegadas e 15 linhas. Subtrahindo 9 linhas de 15 linhas, e 2 pollegadas de 4 pollegadas, restam 6 linhas e 2 pollegadas.

Não sendo possivel subtrahir 8 palmos de 5 palmos, decompõe-se uma braça em 10 palmos, e fica o minuendo tendo 11 braças e 15 palmos. Subtrahindo 8 palmos de 15 palmos, e 3 braças de 11 braças, restam 7 palmos e 8 braças.

2.° EXEMPLO:

	$\underbrace{23^{lb}}_{}$ 22	$\underbrace{0^{onç}}_{}$ 15	$\underbrace{0^{oit}}_{}$ 7	$\underbrace{3^{grs}}_{}$ 75
	9	8	5	47
Resto..	13^{lb}	$7^{onç}$	2^{oit}	28^{grs}
Prova.	23^{lb}	$0^{onç}$	0^{oit}	3^{grs}

Não sendo possivel subtrahir 47 grãos de 3 grãos, decompõe-se uma libra em 16 onças e uma onça em 8 oitavas; d'essas 8 oitavas decompõe-se uma em 72 grãos, e o minuendo fica tendo 22 libras, 15 onças, 7 oitavas e 75 grãos. Subtrahindo successivamente 47 grãos de 75 grãos, 5 oitavas de 7 oitavas, 8 onças de 15 onças e 9 libras de 22 libras, acha-se o resto 13 libras, 7 onças, 2 oitavas e 28 grãos.

A prova é a mesma da subtracção dos numeros inteiros.

Multiplicação

183. Na multiplicação dos numeros complexos ha dous casos a considerar:

1.° CASO: *O multiplicador é numero incomplexo.*

2.° CASO: *O multiplicador é numero complexo.*

184. 1.° —CASO. A multiplicação, neste caso, reduz-se a repetir o multiplicando tantas vezes quantas forem as unidades do multiplicador, o que se consegue, multiplicando pelo multiplicador cada uma das partes do multiplicando, e conservando mentalmente as reservas que se formarem em cada um d'esses productos para reunir com o producto seguinte.

Ha, porém, um processo conhecido pelo nome de processo das partes aliquotas, por meio do qual se obtem facilmente o producto.

Parte aliquota de um numero é um submultiplo d'esse numero, ou um numero nelle contido um numero inteiro de vezes.

O processo consiste em decompôr o total das unidades de cada classe em partes aliquotas da unidade principal ou de suas subdivisões.

Resolvamos, pois, por esse processo a questão seguinte:

Uma muralha tendo de comprimento 1 braça, é construida em 14 dias, 20 horas e 50 minutos; quanto tempo se gastará para construir uma muralha nas mesmas condições que a primeira, tendo, porém, de comprimento 37 braças.

Se uma muralha tendo de comprimento 1 braça, é construida em 14 dias, 20 horas e 50 minutos, uma muralha que tiver de comprimento 37 braças será construida em um tempo 37 vezes maior.

Dispondo os termos e effectuando a multiplicação, temos

	14^{d}	20^{h}	50^{m}
	37^{br}		
14^{d}	$\begin{cases} 98^{b} \\ 42 \end{cases}$		
12	18	12^{h}	
6	9	6	
2	3	2	
30^{m}	0	18	30^{m}
15	0	9	15
5	0	3	5
	550^{d}	2^{h}	50^{m}

O primeiro producto parcial se obtem multiplicando 14 dias por 37.

Passemos a multiplicar 20 horas por 37.

Notando que $20 = 12 + 6 + 2$, podemos effectuar a multiplicação de 20 horas por 37, multiplicando separadamente 12 horas por 37, 6 horas por 37 e 2 horas por 37, e sommando os tres productos parciaes.

Sendo 12 horas metade do dia, o producto de 12 horas por 37 é igual ao producto da metade do dia por 37, isto é, $\frac{37}{2}$ do dia, ou metade de 37 dias, que é 18 dias e 12 horas.

O producto de 6 horas por 37 se obtem, tomando a metade do producto de 12 horas por 37, isto é, tomando a metade de 18 dias e 12 horas, que é 9 dias e 6 horas.

O producto de 2 horas por 37 acha-se, tomando a terça parte do producto de 6 horas, por 37, isto é, tomando a terça parte de 9 dias e 6 horas, que é 3 dias e 2 horas.

Multipliquemos, finalmente, 50 minutos ou 30 minutos, 15 minutos e 5 minutos por 37.

Sendo 30 minutos a metade da hora ou a quarta parte de duas horas, o producto de 30 minutos por 37 se obtem, tomando a quarta parte do producto de duas horas por 37, ou tomando a quarta parte de 3 dias e duas horas, que é 18 horas e 30 minutos.

O producto de 15 minutos por 37 se obtem, tomando a metade do

producto de 30 minutos por 37, isto é, tomando a metade de 18 horas e 30 minutos, que é 9 horas e 15 minutos.

O producto de 5 minutos por 37 acha-se, tomando a terça parte do producto de 15 minutos por 37, que é 3 horas e 5 minutos.

Sommando esses diversos productos parciaes, o resultado 550 dias, 2 horas e 50 minutos será o producto pedido.

Ás vezes, na applicação do processo das partes aliquotas ha necessidade de formar certos productos auxiliares, para, por meio d'elles, determinarmos outros. Esses *productos subsidiarios* não devem fazer parte do resultado, e por isso são assignalados com traços, para evitar enganos.

185. 2º Caso.—Seja para resolver a seguinte questão:

Uma barra de ferro tendo de comprimento 1 vara, pesa 25 libras, 11 onças e 7 oitavas; quanto pesará uma barra de ferro como a primeira, tendo, porém, de comprimento 23 varas, 3 palmos e 6 pollegadas?

(50)

	25^{lb}	11^{onc}	7^{oit}
	23^{v}	3^{P}	6^{p}
25^{lb}	$\begin{cases} 75^{lb} \\ 50 \end{cases}$		
		$8^{onç}$	
$8^{onç}$	11	14	
2	2	7	
1	1	11	4^{oit}
4^{oit}	0	5	6
2	0	2	7
1	0	2	3
1^{P}	5	4	6
2	10	9	$1\frac{1}{2}$
4^{p}	2	4	$4\frac{3}{4}$
2	1		
	611^{lb}	$6^{onç}$	$0^{oit}\frac{1}{4}$

O peso da barra de ferro se obtem achando o peso da parte d barra de ferro que tem de comprimento 23 varas, depois o peso d parte da mesma barra de ferro que tem de comprimento 3 palmos, e fi nalmente o peso da parte que tem de comprimento 6 pollegadas. Som mando esses tres pesos, o resultado será o peso pedido.

O peso da parte da barra de ferro que tem de comprimento 2 varas, se obtem multiplicando 25 libras, 11 onças e 7 oitavas por 2 como no exemplo precedente.

O peso da parte da barra de ferro que tem de comprimento 3 palmos, acha-se procurando o peso de 1 palmo, depois o de 2 palmos da mesma barra de ferro.

Sendo 1 palmo a quinta parte da vara, o peso de 1 palmo é a quinta parte de 25 libras, 11 onças e 7 oitavas, ou 5 libras, 2 onças e 3 oitavas ; e o peso de 2 palmos será 10 libras, 4 onças e 6 oitavas.

O peso de 6 pollegadas se obtem calculando o peso de 4 pollegadas e depois o de 2 pollegadas.

Sendo 4 pollegadas a metade de um palmo, o peso de 4 pollegadas é a metade do peso de 1 palmo, isto é, 2 libras, 9 onças e $1\frac{1}{2}$ da oitava.

O peso de 2 pollegadas é metade do peso de 4 pollegadas, isto é, 1 libra, 4 onças e $4\frac{3}{4}$ da oitava.

Sommando esses diversos productos parciaes, o resultado 611 libras, 6 onças e $\frac{1}{4}$ da oitava é o peso pedido.

Seja ainda para resolver a seguinte questão :

Um fio de arame tendo de comprimento 23 varas, 3 palmos e 6 pollegadas pesa uma libra ; qual o comprimento de um fio de arame como o primeiro, pesando, porém, 25 libras, 11 onças e 7 oitavas ?

	23^{v}	3^{p}	6^{p}
	25^{lb}	11^{onc}	7^{oit}
22^{v}	$\left\{ \begin{array}{l} 115^{v} \\ 46 \end{array} \right.$		
1^{p}	5		
2	10		
4^{p}	2	2^{p}	4^{p}
2	1	1	2
$8^{onç}$	11	4	3
2	2	4	$6\frac{3}{4}$
1	1	2	$3\frac{3}{8}$
4^{oit}	0	3	$5\frac{11}{6}$
2	0	1	$6\frac{27}{32}$
1	0	0	$7\frac{27}{64}$
	611^{v}	1^{p}	$7^{p}\frac{5}{64}$

Nos dous ultimos exemplos, nota-se que sendo os dous factores os mesmos, não são no entretanto iguaes os productos quanto á especie e ás subdivisões da unidade principal, e por consequencia o principio de-

monstrado no n. 40 não tem applicação na multiplicação dos numeros complexos.

A razão da differença dos dous productos provém de não seguirem a mesma lei as divisões de uma e de outra unidade principal.

Divisão

186. Na divisão dos numeros complexos ha dous casos a considerar :

1º. CASO : *O dividendo e o divisor são de especies differentes.*

2º. CASO : *O dividendo e o divisor são da mesma especie.*

O primeiro caso subdivide-se em dous : 1ª. subdivisão — *o divisor é imcomplexo ;* 2ª. subdivisão — *o divisor é complexo.*

1º CASO (1ª. subdivisão)

187. Seja para resolver a seguinte questão :

Um viajante caminhou 37 leguas em 89 dias, 7 horas, 53 minutos e 32 segundos ; quanto tempo gastou o mesmo viajante para andar uma legua ?

Se o tempo que gasta o viajante para andar uma legua fosse conhecido, multiplicando esse tempo por 37 leguas, o resultado seria 89 dias, 7 horas, 53 minutos e 32 segundos. O tempo pedido se obtem dividindo 89 dias, 7 horas, 53 minutos e 32 segundos por 37.

$89^{d}\ 7^{h}\ 53^{m}\ 32^{s}$	37
15	$2^{d}\ 9^{h}\ 56^{m}\ 34^{s}\ \frac{34}{37}$
24	
60	
30	
360	
7	
367	
34	
60	
2040	
53	
2093	
243	
21	
60	
1260	
32	
1292	
182	
34	

Dividindo as unidades principaes do dividendo pelo divisor, acha-se 2 dias para quociente e 15 dias para resto.

Convertendo esse resto em 360 horas, reunindo as 7 horas do dividendo e dividindo o resultado 367 horas pelo mesmo divisor, acharemos 9 horas para quociente e 34 horas para resto.

Reduzindo o resto a 2040 minutos, reunindo os 53 minutos e dividindo o resultado pelo divisor, acharemos 56 minutos para quociente e 21 minutos para resto.

Convertendo o resto em 1260 segundos e reunindo os 32 segundos do dividendo, o resultado 1292 segundos dividido pelo mesmo divisor dará para quociente 34 segundos e $\frac{34}{37}$ do segundo.

1º Caso (2ª subdivisão)

Seja para resolver a seguinte questão :

A agua contida em um reservatorio, cuja capacidade é de 18 almudes, 5 canadas e 2 quartilhos pesa 728 libras, 13 onças e 7 oitavas ; pergunta-se quanto pesa cada almude de agua ?

Se o peso de um almude de agua fosse conhecido, multiplicando esse peso por 18 almudes, 5 canadas e 2 quartilhos, o resultado seria 728 libras, 13 onças e 7 oitavas.

O peso pedido se obtem, dividindo 728 libras, 13 onças e 7 oitavas por 18 almudes, 5 canadas e 2 quartilhos.

A divisão se effectúa reduzindo o divisor a uma fracção ordinaria da unidade principal, e multiplicando depois o dividendo por essa fracção invertida.

Convertendo o divisor em fracção ordinaria do almude, acha-se $\frac{886}{48}$ do almude.

Multiplicando $728^{lb}\ 13^{onç}\ 7^{oit}$ por 48, acha-se $34985^{lb}\ 10^{onç}$, e a questão fica reduzida a dividir $34985^{lb}\ 10^{onç}$ por 886.

Indicando o calculo, teremos

$$728^{lb}\ 13^{onç}\ 7^{oit} \div 18^{alm}\ 5^{can}\ 2^{q} = 728^{lb}\ 13^{onç}\ 7^{oit} \div \frac{886^{alm}}{48} =$$

$$= 728^{lb}\ 13^{onç}\ 7^{oit} \times \frac{48}{886} = \frac{728^{lb}\ 13^{onç}\ 7^{oit} \times 48}{886} = \frac{34985^{lb}\ 10^{onç}}{886}$$

$$\begin{array}{rl|l} 34985^{lb} & 10^{onç} & 886 \\ \cline{3-3} 8405 & & 39^{lb}\ 7^{onç}\ 6^{oit}\ 25^{grs}\frac{602}{886} \\ 431 & & \\ 16 & & \\ \hline 2586 & & \\ 431 & & \\ \hline 6896 & & \\ 10 & & \\ \hline 6906^{onç} & & \\ 704 & & \\ 8 & & \\ \hline 5632^{oit} & & \\ 316 & & \\ 72 & & \\ \hline 632 & & \\ 2212 & & \\ \hline 22752^{grs} & & \\ 5032 & & \\ 602 & & \end{array}$$

2º Caso

188. Seja para resolver a seguinte questão :

Uma fonte enche um vaso, cuja capacidade é de 1 almude, em 3 horas, 12 minutos e 27 segundos ; quantos almudes encherá a fonte em 23 horas, 53 minutos e 58 segundos ?

O resultado se obtem, dividindo 23 horas, 53 minutos, e 58 segundos por 3 horas, 12 minutos e 27 segundos.

Reduzindo os dous numeros complexos a fracções ordinarias da hora e indicando o calculo, teremos

$$23^h 53^m 58^s \div 3^h 12^m 27^s = \frac{86038^h}{3600} \div \frac{11547^h}{3600} = \frac{86038}{3600} \times$$

$$\times \frac{3600}{11547} = \frac{86038 \times 3600}{11547 \times 3600} = \frac{86038}{11547}$$

Dividindo 86038 por 11547, e lembrando que pelo enunciado do problema o quociente deve representar almudes, canadas e quartilhos, teremos

86038 5209 12 10418 5209 62508^{can} 4773 4 19092^{quart} 7545	11547 $7^{alm}\ 5^{can}\ 1^{q}\ \frac{7545}{11547}$

Na divisão dos numeros complexos :

Se o dividendo e o divisor forem de especies differentes, o quociente é da especie do dividendo ; e, se forem da mesma especie, é pelo enunciado do problema que se conhece a especie do quociente.

Conversão das medidas de um systema para o outro

MEDIDAS LINEARES

189. Conhecendo o coefficiente de reducção da vara em metros, assim como os de seus multiplos e submultiplos, facilmente se converte um numero qualquer de braças, varas, palmos e pollegadas em metros, e, reciprocamente, um numero qualquer de metros em braças, varas, palmos e pollegadas.

Seja, por exemplo, 7 braças, 6 palmos e 5 pollegadas para converter em metros.

A questão póde ser resolvida de quatro modos differentes :

1.º

Sendo 1 braça $= 2^m,2$ . . . $7^{br} = 15^m,4$
Sendo 1 palmo $= 0^m,22$ . . . $6^P = 1^m,32$
Sendo 1 pollegada $= 0^m,0275$. . . $5^p = 0^m,1375$

Sommando as tres igualdades ordenadamente, teremos

$$7^{br}\ 6^P\ 5^p = 16^m,8575$$

2º.

Convertendo 7 braças, 6 palmos e 5 pollegadas em pollegadas, e multiplicando $0^m,0275$, coefficiente de reducção da pollegada em metros, pelo numero de pollegadas correspondente ao numero dado.

Ao numero $7^{br}\ 6^P\ 5^p$ correspondendo 613, teremos.

$$\begin{array}{r} 0^m,0275 \\ 613 \\ \hline 825 \\ 275 \\ 1650 \\ \hline 16^m,8575 \end{array}$$

3º.

Converte-se o numero dado em uma fracção ordinaria da braça, e multiplica-se o coefficiente de reducção da braça em metros por essa fracção.

Sendo a fracção $\frac{613^{br}}{80}$ correspondente ao numero dado, temos :

$$7^{br}\ 6^P\ 5^p = 2^m,2 \times \frac{613^{br}}{80} = \frac{1348^m,6}{80} = \frac{13486^m}{800} = 16^m,8575.$$

4º.

Multiplicando $2^m,2$ por 7 braças, 6 palmos e 5 pollegadas.

$$\begin{array}{lr} & 2^m,2 \\ & 7^{br}\ 6^P\ 5^p \\ \hline & 15^m,4 \\ 5^P & 1\ ,1 \\ 1 & 0\ ,22 \\ 4^p & 0\ ,11 \\ 1 & 0\ ,0275 \\ \hline & 16^m,8575 \end{array}$$

190. *Para converter um numero qualquer de metros* ***em braças, palmos, pollegadas,*** *basta dividir esse numero de metros por $2^m,2$ coefficiente de reducção da braça em metros.*

Seja o numero de metros $16^m,8575$.

Effectuando a divisão, acha-se

$$16^{m},8575 \div 2^{m},2 = 16^{m},8575 \div 2^{m},2000 = 168575 \div 22000 = 7^{br}\ 6^{p}\ 5^{p}$$

$$\begin{array}{r|l} 168575 & 22000 \\ \cline{2-2} 14575 & 7^{br}\ 6^{p}\ 5^{p} \\ 10 & \\ \hline 145750^{p} & \\ 13750 & \\ 8 & \\ \hline 110000^{p} & \\ 0 & \end{array}$$

MEDIDAS DE SUPERFICIE

191. É tambem facil converter um numero qualquer de braças quadradas, palmos quadrados e pollegadas quadradas em metros quadrados; e, reciprocamente, um numero qualquer de metros quadrados em braças quadradas, palmos quadrados e pollegadas quadradas.

Seja, por exemplo, 4 braças quadradas, 7 palmos quadrados e 8 pollegadas quadradas para converter em metros quadrados.

A questão póde ser resolvida de quatro modos differentes:

1.º

Sendo 1 braça quadrada $= 4^{m^2},84$..................

.... 4 braças quadradas $= 19^{m^2},36$

Sendo 1 palmo quadrado $= 0^{m^2},0484$..................

.... 7 palmos quadrados $= 0^{m^2},3388$

Sendo 1 pollegada quadrada $= 0^{m^2},00075625$........

.... 8 pollegadas quadradas $= 0^{m^2},00605$

Sommando as tres igualdades ordenadamente, teremos:

4 braças quadradas, 7 palmos quadrados e 8 pollegadas quadradas $= 19^{m^2},70485$.

2.º

Convertendo 4 braças quadradas, 7 palmos quadrados e 8 pollegadas quadradas em pollegadas quadradas, e multiplicando $0^{m^2},00075625$, coefficiente de reducção da pollegada quadrada em metros quadrados, pelo numero de pollegadas quadradas correspondente ao numero dado.

Ao numero 4 braças quadradas, 7 palmos quadrados e 8 pollegadas quadradas correspondendo 26056 pollegadas quadradas, teremos:

$$\begin{array}{r} 0^{m^2},00075625 \\ 26056 \\ \hline 453750 \\ 378125 \\ 4537500 \\ 151250 \\ \hline 19^{m^2},70485000 \end{array}$$

3.º

Converte-se o numero dado em numero fraccionario da braça quadrada, e multiplica-se o coefficiente de reducção da braça quadrada por esse numero fraccionario.

Sendo o numero fraccionario $\frac{26056^{bq}}{6400}$ correspondente ao numero dado, temos

4 braças quadradas, 7 palmos quadrados e 8 pollegadas quadradas $= 4^{m^2},84 \times \frac{26056^{bq}}{6400} = \frac{126111^{m^2},04}{6400} = 19^{m^2},70485$.

4.º

Multiplicando $4^{m^2},84$ por $4^{bq}\ 7^{pq}\ 8^{pq}$

$$\begin{array}{lr} & 4^{m^2},84 \\ & 4^{bq}\ 7^{pq}\ 8^{pq} \\ \hline & 19^{m^2},36 \\ & 0,242 \\ 5^{pq}\ldots\ldots & 0,0484 \\ 1\ldots\ldots & 0,0484 \\ 1\ldots\ldots & 0,00605 \\ 8^{pq}\ldots\ldots & \\ \hline & 19^{m^2},70485 \end{array}$$

192. *Para converter um numero qualquer de metros quadrados em braças, palmos e pollegadas quadradas, basta dividir esse numero de metros quadrados por $4^{m^2},84$, coefficiente de reducção da braça quadrada em metros quadrados.*

Seja o numero de metros quadrados $19^{m^2},70485$. Effectuando a divisão, acha-se

$$19^{m^2},70485 \div 4^{m^2},84 = 19^{m^2},70485 \div 4^{m^2},84000 = 1970485 \div 484000 =$$
$$= 4^{bq}\ 7^{Pq}\ 8^{pq}.$$

```
1970485  | 484000
  34485  |-------------
    100  | 4bq 7Pq 8pq
-------
3448500Pq
  60500
     64
-------
   2420
  3630
-------
3872000pq
      0
```

As conversões das outras unidades se effectuam do mesmo modo.

CAPITULO VI

POTENCIAS E RAIZES DOS NUMEROS

193. *Potencia de um numero é o producto de factores iguaes a esse numero.*

As differentes potencias do numero 2 são 4, 8, 16, 32, 64, etc.; as potencias da fracção $\frac{1}{2}$ são: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, etc.; as potencias da fracção 0,2 são: 0,04, 0,008, 0,0016, 0,00032, 0,000064, etc.

Raiz de qualquer gráo de um numero é o numero que elevado ao gráo da raiz produz o numero dado.

As raizes do 6º gráo dos numeros 64, $\frac{1}{64}$ e 0,000064; as do 5º gráo dos numeros 32, $\frac{1}{32}$ e 0,00032; as do 4º gráo dos numeros 16, $\frac{1}{16}$ e 0,0016 etc., são respectivamente iguaes aos numeros 2, $\frac{1}{2}$ e 0,2.

É facil reconhecer pelo que fica estabelecido que:

1º *As differentes potencias da unidade são todas iguaes á unidade.*

2º *As potencias dos numeros maiores que a unidade são todas maiores que as raizes.*

3º *As potencias successivas de um mesmo numero maior que a unidade, vão augmentando successivamente, e esse augmento segue uma lei invariavel.*

4º *As potencias dos numeros menores que a unidade são todas menores que as raizes dos gráos respectivos.*

5º *As potencias successivas de um mesmo numero menor que a unidade, vão diminuindo successivamente, e essa diminuição segue uma lei invariavel.*

As duas primeiras potencias denominam-se *quadrado* e *cubo*; e as raizes dos gráos respectivos, *raiz quadrada* e *raiz cubica*.