ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA

POR

JOÃO JOSÉ LUIZ VIANNA

Bacharel em sciencias mathematicas e physicas, membro do Instituto Polytechnico Brasileiro e Professor de mathematica na Escola Naval

OBRA ADOPTADA PELO GOVERNO NO GYMNASIO NACIONAL, NO COLLEGIO MILITAR, NA ESCOLA MILITAR DO RIO DE JANEIRO, NA ESCOLA NAVAL E EM OUTROS ESTABELECIMENTOS DE INSTRUCÇÃO.

17ª EDIÇÃO

Augmentada com numerosos **Exercicios e Problemas** por um professor de mathematica

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. PAULO — 129, Rua Libero Badaró | BELLO HORIZONTE — Rua da Bahia, 1055

1918

ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA

POR

JOÃO JOSÉ LUIZ VIANNA

Bacharel em sciencias mathematicas e physicas, membro do Instituto Polytechnico Brasileiro e Professor de mathematica na Escola Naval

OBRA ADOPTADA PELO GOVERNO NO GYMNASIO NACIONAL, NO COLLEGIO MILITAR, NA ESCOLA MILITAR DO RIO DE JANEIRO, NA ESCOLA NAVAL E EM OUTROS ESTABELECIMENTOS DE INSTRUCÇÃO.

17ª EDIÇÃO

Augmentada com numerosos **Exercicios e Problemas**
por um professor de mathematica

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. Paulo | Bello Horizonte
129, Rua Libero Badaró | 1055, Rua da Bahia

1918

A MEU MESTRE E AMIGO

DR. JOÃO PEDRO DE AQUINO

Ao illustrado mestre que tão sabiamente me dirigiu no estudo da sciencia mathematica e a quem devo em grande parte a posição que occupo na sociedade, compete-me offerecer este insignificante trabalho, como pequena prova de gratidão e amizade.

JOÃO JOSE LUIZ VIANNA

Parecer sobre a obra *Elementos de Arithmetica* do bacharel João José Luiz Vianna, dado pelo Exm. Sr. Conselheiro Dr. Manoel Francisco Corrêa Leal, lente de mathematicas da Escola de Marinha, e approvado unanimemente pelo Conselho de Instrucção da mesma escola.

Li attentamente o trabalho *Elementos de Arithmetica*, do bacharel João José Luiz Vianna, afim de emittir parecer conforme me foi exigido pelo Conselho de Instrucção d'esta escola.

Nesse trabalho as definições são claras e precisas, os corollarios decorrem logicamente dos principios admittidos; o processo das operações é indicado com methodo e clareza; as diversas theorias, tratadas elementarmente, estão estabelecidas de modo que o seu estudo, além de facil, torna-se proveitoso aos que se destinam a estudos mais elevados de mathematicas.

Cumpre notar que, tratando das noções sobre as quatro primeiras operações da algebra, parece, á primeira vista, que o autor excedeu os limites de *Elementos de Arithmetica*, mas assim não aconteceu, si se attender a que o conhecimento d'aquellas noções é de grande utilidade para o desenvolvimento da theoria da divisibilidade dos numeros e outras.

Concluindo, direi que o trabalho, sobre que me cabe dar opinião e que é destinado ao Collegio Naval, acha-se bem elaborado e nas condições de preencher o fim a que o destina o seu autor. Salvo melhor juizo.

MANOEL FRANCISCO CORRÊA LEAL.

Escola de Marinha, 10 de Abril de 1882.

NOÇÕES PRELIMINARES

1. A primeira idéa de *numero* resulta da consideração de um ou mais objectos da mesma especie, ou da observação de um ou mais phenomenos da mesma natureza.

O numero é ainda considerado como resultado da comparação de duas grandezas da mesma especie.

2. *Grandeza* é tudo aquillo que é susceptivel de augmento ou de diminuição; quer essa modificação seja real, quer concebida pelo pensamento. *Uma linha, uma superficie, um espaço, o tempo, o peso* de um corpo, *o calor, a luz, uma reunião de homens, de arvores, de livros, etc.*, são grandezas.

3. As grandezas se classificam em *continuas* e *descontinuas*. A grandeza é continua se ella póde crescer ou diminuir por gráos tão pequenos quanto se queira; e descontinua quando só póde crescer ou diminuir por gráos determinados. Assim, o *peso* de um corpo, *o calor, o tempo, a luz*, são grandezas continuas; *uma reunião de arvores, de homens, de navios*, são grandezas descontinuas.

4. O valor numerico de uma grandeza se obtem comparando essa grandeza com uma outra da mesma especie e já conhecida. A grandeza que serve de termo de comparação denomina-se *unidade*.

O valor numerico de uma grandeza póde tambem ser obtido por meio de outras grandezas já avaliadas, e que tenham com ella relações determinadas.

Na primeira hypothese esse valor é obtido directamente, e na segunda, indirectamente.

A avaliação indirecta das grandezas é a que mais commummente se apresenta, pela impossibilidade frequente de as attingirmos afim de applicar-lhes immediatamente a unidade. Substituimos então a grandeza dada por outra mais facil de avaliar e ao nosso alcance, com a qual a proposta esteja intimamente ligada por certas relações conhecidas. Assim, por exemplo, a *altura* de que um corpo cae, e o *tempo* gasto na quéda, guardam entre si uma relação conhecida, em virtude da qual mediremos indirectamente a *altura* quando tivermos avaliado directamente o *tempo* e vice-versa. A medição da largura, espessura e comprimento de um tijolo, multiplicados entre si, dão indirectamente o volume do tijolo, por causa da relação existente entre as grandezas—comprimento, largura, espessura e volume de um corpo de fórma prismatica. A medição de poucas linhas, convenientemente escolhidas em um terreno accidentado, bastam para determinar com rigor sua extensão, comtanto que se conheçam as relações existentes entre as grandezas em jogo. Em taes casos substituimos sempre as primitivas grandezas por outras mais accessiveis, que sejam directamente avaliaveis.

Essa substituição póde complicar-se ainda mais pela necessidade de procurarmos novas grandezas auxiliares e accessiveis, quando das propostas tivermos passado á outras tambem inaccessiveis. O estudo e conhecimento perfeito das ligações entre as diversas séries de grandezas assim introduzidas, permitte reduzir ao minimo possivel a avaliação directa das grandezas, afinal limitada a um restricto numero de casos faceis. Por isso define-se a *mathematica* como a sciencia que tem por objecto o conhecimento das relações precisas entre as diversas grandezas, de modo a determinar umas quando se conhecem as outras.

5. A unidade é *arbitraria* ou *determinada*.

É arbitraria, se a grandeza que se trata de medir fôr continua. Assim, se é uma distancia que se trata de medir, podemos considerar como unidade uma outra distancia qualquer; se é o peso de um corpo que se quer conhecer, a unidade será o peso de um outro corpo qualquer. É determinada, se a grandeza que se trata de medir fôr descontinua.

Tratando-se, por exemplo, de saber quantas arvores têm um jardim, a unidade é uma arvore; se é o numero de navios que uma bahia contém, que se trata de conhecer, a unidade é um navio.

6. Medida commum de duas grandezas da mesma especie é uma

terceira grandeza da mesma especie que as duas primeiras, e que se contém em cada uma d'ellas exactamente algumas vezes.

Uma grandeza póde ou não ter com outra da mesma especie uma medida commum. Na primeira hypothese as duas grandezas são *commensuraveis*, e na segunda, *incommensuraveis*.

Podendo duas grandezas da mesma especie ser commensuraveis ou incommensuraveis, os numeros que exprimem os resultados de comparações d'essas grandezas, são tambem chamados *commensuraveis* ou *incommensuraveis*.

7. Os numeros commensuraveis pódem ser *inteiros* ou *fraccionarios*.

O numero inteiro representa o valor de uma grandeza que contém a unidade exactamente algumas vezes.

A———|———|———B

a———b

Suppondo que a grandeza AB contenha a unidade *ab* tres vezes exactamente, o resultado da comparação é o numero inteiro 3.

O numero fraccionario representa o valor de uma grandeza que não contém a unidade exactamente algumas vezes, e sim uma de suas partes iguaes.

Os numeros fraccionarios podem ser *fracções* propriamente ditas ou *mixtos*.

O numero fracção representa exactamente o valor de uma grandeza menor que a unidade.

A———|———|———B

a———|———|———|———|———b

Seja a grandeza que se quer medir a distancia AB e a unidade a distancia *ab*.

Suppondo a unidade dividida em cinco partes iguaes, e que uma d'essas partes seja contida na grandeza tres vezes exactamente, o resultado da comparação é a fracção $\frac{3}{5}$

O numero mixto é o que representa o valor de uma grandeza que contém a unidade uma ou mais vezes e tambem uma de suas partes iguaes exactamente algumas vezes.

A————————|————————|—|—|—B

a—|—|—|—b

Seja a distancia AB que se quer medir e a unidade a distancia *ab*.

Suppondo que a unidade seja contida na grandeza duas vezes, ficando um resto, e que esse resto contenha uma das quatro partes iguaes da unidade tres vezes exactamente, o resultado da comparação é o numero mixto $2\frac{3}{4}$

O numero incommensuravel representa o valor de uma grandeza que não contém a unidade, nem uma de suas partes iguaes, por menor que ella seja, exactamente algumas vezes.

8. Os numeros podem ser considerados *em particular* ou *em geral*. Em particular, quando se consideram os seus valores, como, por exemplo: *tres homens, quatro livros, cinco metros*, etc. Em geral, quando não são considerados os seus valores, como, por exemplo: *um numero qualquer de homens, de livros, de metros*, etc.

9. A sciencia que se occupa dos numeros chama-se *Algorithmia* — e divide-se em tres partes — *Arithmetica, Algebra* e *Calculo infinitesimal.*

A *arithmetica* occupa-se das diversas operações que sobre esses numeros são feitas para satisfazer as necessidades da vida social, e tambem das propriedades de que gozam esses mesmos numeros.

Numeração

10. A numeração tem por fim o estudo da formação e representação de todos os numeros por meio de poucos symbolos oraes e escriptos.

Consideraremos o estudo da numeração dividido em duas partes: na primeira trataremos da formação e representação dos numeros inteiros; e na segunda, da formação e representação dos numeros fraccionarios.

Formação e representação dos numeros inteiros

11. O primeiro numero inteiro resulta da comparação de duas grandezas na hypothese de serem iguaes. Chama-se *unidade* ou *um*.

Os outros numeros inteiros formam-se reunindo ao primeiro successivamente uma unidade. Assim, reunindo ao primeiro numero inteiro uma unidade, forma-se o segundo; reunindo ao segundo uma unidade, forma-se o terceiro; reunindo ao terceiro uma unidade, forma-se o quarto; e assim por diante.

D'este modo de formar os numeros inteiros se conclue que, formado um numero inteiro qualquer, para termos o que se lhe segue, basta reunir ao numero formado uma unidade; e que, por esse facto, ha uma infinidade de numeros inteiros.

12. Os numeros inteiros são representados por meio de palavras ou por meio de signaes, e por isso o estudo da representação divide-se em duas partes: — a primeira tem por fim o estudo da representação dos numeros inteiros por meio de palavras, e chama-se *nomenclatura dos numeros* ou *numeração falada;* e a segunda tem por fim o estudo da representação d'esses numeros por meio de signaes, e chama-se *escriptura dos numeros* ou *numeração escripta.*

Nomenclatura dos numeros

13. Havendo uma infinidade de numeros inteiros, distinctos uns dos outros, foi necessario dar a cada um d'elles um nome differente dos nomes dos outros; e, reconhecida a impossibilidade de dar aos numeros inteiros nomes distinctos, assim como tambem de conservar todos esses nomes mentalmente, adoptou-se um pequeno numero de palavras; d'essas palavras foram derivadas outras, e, combinando-as convenientemente, conseguiu-se formar os nomes de todos os numeros inteiros possiveis.

Afim de conseguir nomear todos os numeros com limitada quantidade de palavras, foi-se levado a imaginar o que se chama—*systemas de numeração.* Um systema de numeração é o conjuncto de principios constituindo o artificio logico de classificação em grupos e sub-grupos das unidades que formam os numeros.

O principio fundamental de um systema de numeração é o seguinte: *Um certo numero de unidades de uma ordem ou grupo de unidades deve constituir uma unidade de ordem immediatamente superior.*

Base de um systema de numeração é uma certa quantidade de unidades que deve constituir uma unidade de ordem immediatamente superior. Um systema de numeração tira seu nome da base adoptada. Assim, temos o systema binario, de base 2, o *septimal*, de base 7, o *decimal*, de base 10, que foi universalmente adoptado, etc. O principio fundamental para esse systema será portanto: *dez unidades de uma ordem qualquer formam uma de ordem immediatamente superior.*

O segundo principio que completa o artificio da numeração é o seguinte: *Imaginar as unidades constitutivas dos numeros como distribuidas em classes, tendo cada classe sua denominação especial; que cada classe contenha tres ordens, tendo cada ordem sua denominação especial, sendo essas denominações as mesmas para as tres ordens de todas as classes; que as diversas quantidades de unidades de uma ordem tenham as suas denominações especiaes, e que estas denominações sejam identicas para as mesmas quantidades de unidades de todas as ordens das outras classes.*

As denominações adoptadas devem, tanto quanto possivel, ser formadas de radicaes e terminações que lembrem immediatamente as classes e as ordens de unidades que compõem o numero.

Applicando os preceitos precedentes ao systema decimal, póde-se organisar o seguinte quadro de nomenclatura dos numeros inteiros no systema decimal:

1ª CLASSE — UNIDADES

3ª ORDEM **Centena** UMA CENTENA = DÉZ DEZENAS	2ª ORDEM **Dezena** UMA DEZENA = DÉZ UNIDADES	1ª ORDEM **Unidade**
Cem ou *cento* = Uma centena	*Déz* = Uma dezena	*Um* = uma unidade
Duzentos = Duas centenas	*Vinte* = Duas dezenas	*Dous* = duas unidades
Trezentos = Tres »	*Trinta* = Tres »	*Tres* = tres »
Quatrocentos = Quatro »	*Quarenta* = Quatro »	*Quatro* = quatro »
Quinhentos = Cinco »	*Cincoenta* = Cinco »	*Cinco* = cinco »
Seiscentos = Seis »	*Sessenta* = Seis »	*Seis* = seis »
Setecentos = Sete »	*Setenta* = Sete »	*Sete* = sete »
Oitocentos = Oito »	*Oitenta* = Oito »	*Oito* = oito »
Novecentos = Nove »	*Noventa* = Nove »	*Nove* = nove »

2ª CLASSE — MILHARES

6ª ORDEM **Centena** UMA CENTENA DE MILHAR = DÉZ DEZENAS DE MILHAR	5ª ORDEM **Dezena** UMA DEZENA DE MILHAR = DÉZ MILHARES	4ª ORDEM **Unidade** UM MILHAR = DÉZ CENTENAS
Cem mil = Uma centena de milhar	*Déz mil* » = Uma dezena de milhar	*Mil* = um milhar
Duzentos mil = duas »	*Vinte* » = duas »	*Dous mil* = dous milhares
Trezentos » = tres »	*Trinta* » = tres »	*Tres* » = tres »
Quatrocentos » = quatro »	*Quarenta* » = quatro »	*Quatro* » = quatro »
Quinhentos » = cinco »	*Cincoenta* » = cinco »	*Cinco* » = cinco »
Seiscentos » = seis »	*Sessenta* » = seis »	*Seis* » = seis »
Setecentos » = sete »	*Setenta* » = sete »	*Sete* » = sete »
Oitocentos » = oito »	*Oitenta* » = oito »	*Oito* » = oito »
Novecentos » = nove »	*Noventa* » = nove »	*Nove* » = nove »

3ª CLASSE — MILHÕES

9ª ORDEM **Centena** UMA CENTENA DE MILHÕES = DÉZ DEZENAS DE MILHÕES	8ª ORDEM **Dezena** UMA DEZENA DE MILHÕES = DEZ MILHÕES	7ª ORDEM **Unidade** UM MILHÃO = DÉZ CENTENAS DE MILHAR
Cem milhões = Uma centena de milhões	*Déz milhões* = Uma dezena de milhões	*Um* milhão
Duzentos » = duas »	*Vinte* » = duas »	*Dous* milhões
Trezentos » = tres »	*Trinta* » = tres »	*Tres* »
Quatrocentos » = quatro »	*Quarenta* » = quatro »	*Quatro* »
Quinhentos » = cinco »	*Cincoenta* » = cinco »	*Cinco* »
Seiscentos » = seis »	*Sessenta* » = seis »	*Seis* »
Setecentos » = sete »	*Setenta* » = sete »	*Sete* »
Oitocentos » = oito »	*Oitenta* » = oito »	*Oito* »
Novecentos » = nove »	*Noventa* » = nove »	*Nove* »

As outras classes serão respectivamente designadas:

4ª classe.... *bilhões*	7ª classe.... *quintilhões*	10ª classe.... *octilhões*
5ª » .... *trilhões*	8ª » .... *seistilhões*	11ª » .... *nonilhões*
6ª » .... *quatrilhões*	9ª » .... *septilhões*	etc., etc.

A's classes subsequentes não se dão nomes especiaes, pois representam numeros que por sua extensão não têm quasi emprego.

Os nove primeiros numeros inteiros foram denominados: *um*, *dous*, *tres*, *quatro*, *cinco*, *seis*, *sete*, *oito* e *nove*. Ao numero *nove* reunindo uma unidade, fórma-se o numero *dez*.

As unidades de segunda ordem contam-se do mesmo modo que as unidades de primeira, e os nomes d'essas unidades são : *dez*, *vinte*, *trinta*, *quarenta*, *cincoenta*, *sessenta*, *setenta*, *oitenta* e *noventa*.

Os nomes dos nove numeros inteiros comprehendidos entre *dez* e *vinte*, *vinte* e *trinta*, *trinta* e *quarenta*, etc., são formados dos nomes das unidades de segunda ordem, seguidos dos nomes dos nove primeiros numeros inteiros, e são : *dez e um*, *dez e dous*, *dez e tres*, *dez e quatro*, *dez e cinco*, *dez e seis.... dez e nove; vinte e um*, *vinte e dous*, *vinte e tres.... vinte e nove; trinta e um*, *trinta e dous*, *trinta e tres.... trinta e nove;* finalmente, *noventa e um*, *noventa e dous*, *noventa e tres... e noventa e nove*.

Em logar de *dez e um*, *dez e dous*, *dez e tres*, *dez e quatro*, *dez e cinco*, diz-se *onze*, *doze*, *treze*, *quatorze e quinze*.

Ao numero *noventa e nove* reunindo uma unidade, forma-se o numero *cem* ou uma unidade de terceira ordem.

As unidades de terceira ordem contam-se do mesmo modo que as unidades das duas primeiras, e os nomes d'essas unidades são formados dos nomes das unidades de primeira ordem, seguidos da palavra *centos*, e são : *cem*, *dous centos*, *tres centos*, *quatro centos*, *cinco centos*, *seis centos*, *sete centos*, *oito centos* e *nove centos*.

Em logar de *dous centos*, *tres centos* e *cinco centos*, diz-se *duzentos*, *trezentos* e *quinhentos*.

Os nomes dos noventa e nove numeros inteiros comprehendidos entre *cem* e *duzentos*, *duzentos* e *trezentos*, *trezentos* e *quatrocentos*, etc., são formados dos nomes das unidades de terceira ordem seguidos dos nomes dos noventa e nove primeiros numeros inteiros, e são : *cento e um*, *cento e dous*, *cento e tres.... cento e noventa e nove ; duzentos e um*, *duzentos e dous*, *duzentos e tres... duzentos e noventa e nove ; trezentos e um*, *trezentos e dous*, *trezentos e tres... trezentos e noventa e nove ;* finalmente, *novecentos e um*, *novecentos e dous*, *novecentos e tres...nove centos e noventa e nove*.

Ao numero *novecentos e noventa e nove* reunindo-se uma unidade, forma-se o numero *mil* ou uma unidade de quarta ordem.

As unidades de quarta ordem contam-se do mesmo modo que as unidades das outras tres, e os nomes d'essas unidades são formados dos nomes das unidades de primeira ordem, seguidos da palavra *mil*, e são : *mil*, *dous mil*, *tres mil*, *quatro mil*, *cinco mil*, *seis mil*, *sete mil*, *oito mil* e *nove mil*.

Os nomes dos novecentos e noventa e nove numeros inteiros comprehendidos entre *mil e dous mil*, *dous mil e tres mil*, *tres mil e quatro mil*, etc., são formados dos nomes das unidades de quarta ordem seguidos dos nomes dos novecentos e noventa e nove primeiros numeros inteiros, e são : *mil e um*, *mil e dous*, *mil e tres.... mil novecentos e noventa e nove ; dous mil e um*, *dous mil e dous*, *dous mil e tres.... dous mil novecentos e noventa e nove ; tres mil e um*, *tres mil e dous*, *tres mil e tres.... tres mil novecentos e noventa e nove ;* finalmente, *nove mil e um nove mil e dous*, *nove mil e tres.... nove mil novecentos e noventa e nove*.

Ao numero *nove mil novecentos e noventa e nove* reunindo-se uma unidade, forma-se o numero *dez mil* ou uma unidade de quinta ordem.

As unidades de quinta ordem contam-se do mesmo modo que as unidades das outras quatro, e os nomes d'essas unidades são formados dos nomes das unidades de segunda ordem seguidos da palavra *mil*, e são : *dez mil*, *vinte mil*, *trinta mil*, *quarenta mil*, *cincoenta mil*, *sessenta mil*, *setenta mil*, *oitenta mil* e *noventa mil*.

Os nomes dos nove mil novecentos e noventa e nove numeros inteiros comprehendidos entre *dez mil* e *vinte mil*, *vinte mil* e *trinta mil*, *trinta mil* e *quarenta mil*, etc., são formados dos nomes das unidades de quinta ordem, seguidos dos nomes dos nove mil novecentos e noventa e nove primeiros numeros inteiros, e são : *dez mil e um*, *dez mil e dous*, *dez mil e tres.... dezenove mil novecentos e noventa e nove ; vinte mil e um*, *vinte mil e dous*, *vinte mil e tres.... vinte e nove mil novecentos e noventa e nove ; trinta mil e um*, *trinta mil e dous*, *trinta mil e tres.... trinta e nove mil novecentos e noventa e nove ;* finalmente, *noventa mil e um*, *noventa mil e dous*, *noventa mil e tres.... noventa e nove mil novecentos e noventa e nove*.

Ao numero *noventa e nove mil novecentos e noventa e nove* reunindo-se uma unidade, forma-se o numero *cem mil* ou uma unidade de sexta ordem.

As unidades de sexta ordem contam-se do mesmo modo que as das cinco primeiras, e os nomes d'essas unidades são formados dos nomes das unidades de terceira ordem, seguidos da palavra *mil*, e são: *cem mil, duzentos mil, trezentos mil, quatrocentos mil, quinhentos mil, seiscentos mil, setecentos mil, oitocentos mil e novecentos mil.*

Do mesmo modo se formam os nomes de todos os outros numeros inteiros.

Presentemente é facil reconhecer que os nomes dos numeros inteiros foram formados com os elementos seguintes:

1° O principio que preside á formação das unidades das differentes ordens.

2° As doze palavras distinctas: *um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, cem* e *mil.*

As duas terminações differentes, *enta* e *lhão*.

Com o fim de simplificar a nomenclatura dos numeros foram estabelecidas classes, sendo cada uma d'ellas composta de tres ordens.

14. É manifesta a facilidade com que são representados os numeros inteiros por meio de palavras, conservando-se mentalmente e sem grande esforço os nomes de todos elles; mas as diversas combinações feitas com esses numeros nos usos da vida social, tornar-se-iam muito complicadas, se esse meio de representação fosse adoptado. Além d'isso tem a representação dos numeros por meio de palavras o grande inconveniente de não ser universal, pois para isso seria necessario que elles fossem escriptos em uma linguagem que todos entendessem.

Attendendo a esses e mais outros inconvenientes que se observam na representação dos numeros por meio de palavras, procurou-se representa-los por meio de signaes.

Numeração escripta

15. Havendo uma infinidade de numeros inteiros, distinctos uns dos outros, e reconhecida a impossibilidade de adoptar-se uma infinidade de caracteres differentes para representar esses numeros, procurou-se escrevel-os empregando um numero limitado de signaes.

Na nomenclatura dos numeros vimos que os numeros inteiros eram compostos de classes; essas classes de ordens; e essas ordens,

de unidades; e, não podendo exceder de nove o numero de unidades de cada uma d'essas ordens, foram escolhidos nove signaes para exprimirem as unidades d'essas differentes ordens. Esses signaes são:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Elles representam na ordem em que se acham escriptos, uma, duas, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove unidades de qualquer ordem.

Para que esses signaes podessem em um mesmo numero representar as unidades das differentes ordens, foi necessario estabelecer-se o seguinte principio:

Todo signal escripto á esquerda de outro representa unidades dez vezes maiores do que representaria se estivesse escripto no logar d'esse outro; isto é, escriptos muitos signaes uns depois dos outros, o primeiro representa unidades; o segundo, dezenas; o terceiro, centenas; o quarto, milhares; o quinto, dezenas de milhares, etc., considerando-se sempre da direita para a esquerda.

16. Com esses elementos é claro que podemos representar qualquer numero inteiro, admittindo que todas as ordens d'esse numero tenham unidades. Assim, tratando-se de representar um numero composto de seis dezenas de milhares, cinco milhares, quatro centenas, tres dezenas e duas unidades, escrevemos o signal 2 em primeiro logar, o signal 3 em segundo, o signal 4 em terceiro, o signal 5 em quarto, e o signal 6 em quinto logar da direita para a esquerda, e teremos:

65432

Se em uma ou mais ordens de um numero houver falta de unidades, escreveremos nos logares d'essas ordens o signal 0 (zero).

Assim, se um numero tiver oito centenas de milhares, seis milhares, quatro centenas e tres unidades, escreveremos:

806403

Os signaes destinados á representação dos numeros chamam-se *algarismos*. Os nove primeiros, que exprimem as unidades das differentes ordens, chamam-se *significativos*, e o decimo (0) serve para exprimir falta de unidades em uma ordem qualquer, determinando ao mesmo tempo o valor do algarismo que fica á sua esquerda.

Os algarismos significativos têm cada um d'elles dous valores: um *absoluto* ou *real*, e outro *relativo* ou *local*.

Valor absoluto ou *real* de um algarismo é o que elle tem por causa da fórma, ou o que elle tem considerado isoladamente.

Valor relativo ou *local* de um algarismo é o que elle tem conforme o logar que occupa no numero, ou o que elle tem em relação aos outros que ficam á sua direita.

Pelo que fica exposto, facilmente estabelecemos a seguinte:

REGRA PARA ESCREVER UM NUMERO INTEIRO QUALQUER. *Escrevem-se os algarismos que representarem as centenas, as dezenas, as unidades de cada uma das classes, começando pela classe superior, tendo o cuidado de escrever zeros nos logares das ordens que não tiverem unidades.*

EXEMPLO. O numero *Vinte e oito septilhões, trezentos e cinco quintilhões, sete trilhões, quatrocentos e vinte e nove milhões e doze unidades*, é representado do seguinte modo:

28000305000007000429000012

Os numeros representados por um só algarismo chamam-se *simples*, e os representados por dous ou mais algarismos chamam-se *compostos*.

17. Notando-se que os tres primeiros algarismos da direita representam unidades, dezenas e centenas de unidades propriamente ditas; que os tres seguintes exprimem unidades, dezenas e centenas de milhar; que os tres que se seguem a estes ultimos exprimem unidades, dezenas e centenas de milhões etc., conclue-se que para lêr um numero inteiro qualquer deve-se empregar a seguinte:

REGRA.—*Divide-se o numero em classes de tres algarismos da direita para a esquerda. Dá-se a cada uma d'essas classes, começando pela primeira da direita, as denominações respectivas de unidades, milhares, milhões, bilhões, trilhões, quatrilhões, etc. Lê-se da esquerda para a direita cada uma d'essas classes, dando a cada uma o nome que lhe competir*

EXEMPLO. Lêr o numero 94035432700265023456. Dividindo-o em classes de tres algarismos:

94.	035.	432.	700.	265.	023.	456
Quintilhões	Quatrilhões	Trilhões	Bilhões	Milhões	Milhares	Unidades

Lê-se: *Noventa e quatro quintilhões, trinta e cinco quatrilhões, quatrocentos e trinta e dous trilhões, setecentos bilhões, duzentos e sessenta e cinco milhões, vinte e tres milhares e quatrocentas e cincoenta e seis unidades.*

18. Pelo principio estabelecido na numeração escripta, escrevendo á direita de um numero inteiro um, dous, tres zeros, os algarismos d'esse numero ficam representando unidades dez, cem, mil vezes maiores, e o numero fica dez, cem, mil vezes maior, ou multiplicado por 10, por 100, por 1000. Se, pelo contrario, um numero inteiro terminar por zeros, e prescindirmos de um, dous, tres zeros á sua direita, os algarismos d'esse numero ficarão representando unidades dez, cem, mil vezes menores, e o numero fica dez, cem, mil vezes menor, ou dividido por 10, por 100, por 1000.

19. O systema de numeração que acabamos de expôr, chama-se *decimal*, por ser a base d'esse systema o numero 10.

Base de um systema de numeração é o numero de unidades de uma ordem qualquer, necessario para formar uma unidade de ordem immediatamente superior.

A base de um systema de numeração podendo ser um numero inteiro qualquer, á excepção da unidade, segue-se que ha uma infinidade de systemas de numeração, e nesses diversos systemas os numeros inteiros são representados com tantos algarismos quantas forem as unidades da base, presidindo nelles leis semelhantes ás que foram estabelecidas no systema decimal.

Se o systema fôr *binario*, ou se a base do systema fôr o numero 2, as leis são:

1ª Duas unidades de uma ordem qualquer formam uma de ordem immediatamente superior.

2ª *Todo algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades duas vezes maiores do que representaria se estivesse escripto no logar d'esse outro.*

Os numeros inteiros são escriptos nesse systema com os algarismos 0 e 1.

Se o systema fôr *ternario*, ou tiver para base o numero 3, as leis são :

1ª *Tres unidades de uma ordem qualquer formam uma de ordem immediatamente superior.*

2ª *Todo algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades tres vezes maiores do que representaria se estivesse escripto no logar d'esse outro.*

Os numeros inteiros são escriptos nesse systema com os algarismos 0, 1 e 2.

Se o systema fôr *quaternario*, ou a base fôr o numero 4, facil é estabelecer as leis, e os numeros são representados com os algarismos 0, 1, 2 e 3.

Se o systema fôr *quinario*, ou tiver para base o numero 5, os numeros serão representados com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4.

Pelo que fica estabelecido, podemos dizer que, sendo a base do systema inferior a 10, os numeros são representados pelos algarismos usados no systema decimal desde 0 até ao que precede á base.

Se a base fôr superior a 10, é necessario adoptar mais outros signaes. Assim, se a base fôr o numero 12, devemos adoptar mais dous signaes, que poderão ser *a* e *b*; o primeiro para exprimir 10 unidades; e o segundo, 11 unidades de uma ordem qualquer.

20. Vejamos como se podem representar todos os numeros inteiros no systema de numeração cuja base é 8.

Nesse systema as leis são:

1ª *Oito unidades de uma ordem qualquer formam uma de ordem immediatamente superior.*

2ª *Todo algarismo escripto á esquerda de outro representa unidades oito vezes maiores do que representaria se estivesse escripto no logar d'esse outro.*

Os numeros nesse systema são representados com os algarismos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7

Os sete ultimos algarismos representarão os sete primeiros numeros inteiros.

Reunindo uma unidade ao numero sete, o resultado será o numero oito, ou uma unidade de segunda ordem, que escreveremos 10.

Escrevendo em logar do zero os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, teremos 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17, que representarão os numeros nove, dez, onze, doze, treze, quatorze e quinze.

Reunindo uma unidade ao numero quinze, teremos o numero dezeseis, ou duas unidades de segunda ordem, cuja representação será 20.

Escrevendo em logar de zero os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, teremos 21, 22, 23, 24, 25, 26 e 27, que representarão os numeros dezesete, dezoito, dezenove, vinte, vinte e um, vinte e dous e vinte e tres.

Continuando do mesmo modo, os numeros vinte e quatro, vinte e cinco, vinte e seis, vinte e sete, vinte e oito, vinte e nove, trinta e trinta e um, serão representados do seguinte modo :

30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 e 37

Os numeros trinta e dous, trinta e tres, trinta e quatro, trinta e cinco, trinta e seis, trinta e sete, trinta e oito e trinta e nove, são representados do seguinte modo:

40, 41, 42, 43, 44, 45, 46 e 47

Podemos deixar de representar os outros numeros inteiros, demonstrando: *que um numero inteiro qualquer sendo escripto no systema cuja base é 8, o numero inteiro immediatamente superior póde igualmente ser escripto com os oito algarismos d'esse systema.*

Com effeito, seja qual fôr o numero escripto, o numero de unidades da primeira ordem é inferior ou igual a sete ; sendo inferior, reunindo-se uma unidade, substitue-se o algarismo pelo que se seguir no systema, sem mudar os que ficam á esquerda ; sendo igual, reunindo-se uma unidade, obtem-se oito unidades de primeira ordem, ou uma de segunda, e nessa hypothese deve-se escrever zero no logar da primeira ordem e reunir uma unidade á segunda ordem.

Se, reunindo uma unidade á segunda ordem, ella ficar com um numero de unidades inferior a oito, substitue-se o algarismo da segunda ordem por outro que se seguir no systema; e se ella ficar com oito unidades, escreve-se zero no logar da segunda ordem,e reune-se uma unidade á terceira ordem, e assim por diante.

Podendo-se applicar um raciocinio analogo em outro qualquer systema de numeração, conclue-se que:

Um numero inteiro qualquer póde ser sempre representado em um systema qualquer de numeração com os algarismos que em numero limitado pertencerem a esse systema.

Formação e representação das fracções

21. *A fracção* é o resultado exacto da comparação de duas grandezas, sendo uma d'ellas considerada como unidade,e na hypothese de ser a grandeza menor que a unidade.

A avaliação da grandeza, na hypothese considerada, se obtem dividindo a unidade em um numero qualquer de partes iguaes e vendo depois quantas vezes uma d'essas partes se contém nella.

Ha, pois, necessidade de representar a fracção por meio de dous numeros, indicando um o numero de partes iguaes em que a unidade está dividida, e o outro o numero d'essas partes que a grandeza contém. Esses numeros são separados por um traço horizontal; o primeiro fica abaixo do traço e chama-se *denominador*, o segundo fica acima do traço e chama-se *numerador*. Esses dous numeros, considerados simultaneamente, chamam-se tambem *termos da fracção*.

Assim, se a unidade estiver dividida em duas, tres, quatro, cinco, seis, sete, etc., partes iguaes, e uma das partes fôr contida na grandeza uma, duas, tres, quatro, cinco, seis, etc., vezes, as fracções serão $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, etc.

As partes iguaes em que a unidade se acha dividida chamam-se *unidades fraccionarias*.

Assim, nas fracções $\frac{7}{12}, \frac{25}{37}, \frac{48}{59}, \frac{32}{69}$, as unidades fraccionarias são $\frac{1}{12}, \frac{1}{37}, \frac{1}{59}, \frac{1}{69}$.

Para enunciar-se uma fracção, *lê-se o numerador e depois o denominador, juntando-lhe a terminação avos.* Assim, as fracções $\frac{7}{23}, \frac{9}{34}, \frac{8}{53}$, devem ser enunciadas do seguinte modo: *sete, vinte e tres avos; nove, trinta e quatro avos; oito, cincoenta e tres avos.*

Se o denominador fôr 10, 100, 1000, etc., devemos lêr decimos, centesimos, millesimos, etc.

Sendo o numerador de uma fracção menor que o denominador, ella é propria; e se o numerador fôr igual ou maior que o denominador, ella é impropria.

PARTE PRIMEIRA

CAPITULO I

Operações sobre os numeros inteiros

22. As soluções das diversas questões, que sobre os numeros se realisam para satisfazer as necessidades da vida social, dependem do conhecimento das operações da—*Arithmetica.*

D'essas operações consideremos em primeiro logar as quatro : *addição, subtracção, multiplicação* e *divisão.*

ADDIÇÃO

23. *Addição é a operação que tem por fim formar um numero que reuna em si todas as partes que entrarem na composição de dous ou mais numeros.*

Os numeros que se sommam chamam-se *parcellas ;* e o resultado da operação, *somma.*

Na addição dos numeros inteiros ha dous casos a considerar:

1º Caso.—*Addição de dous numeros simples ou de um numero composto com um simples.*

2º Caso.—*Addição de numeros compostos.*

24. 1º Caso.—A addição de dous numeros simples se effectua reunindo ao primeiro numero as unidades do outro, uma por uma. Assim, para sommar os numeros 3 e 4, diremos: tres e um, quatro; quatro e um, cinco; cinco e um, seis; seis e um, sete; e o resultado sete é a somma dos numeros 3 e 4.

A somma dos dous numeros póde ser mais facilmente obtida se reunirmos logo o primeiro numero ao segundo; o que fazemos dizendo: tres e quatro, sete; e para isso é sufficiente o conhecimento da seguinte:

Taboada da addição

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Esta taboada é constituida do seguinte modo:

A primeira linha horizontal começa por *zero*, seguindo-se os nove primeiros numeros inteiros.

A segunda começa pelo numero *um*, sendo os outros numeros formados pela addição de uma unidade a cada um dos numeros da primeira.

A terceira, juntando igualmente a cada numero da segunda uma unidade. O mesmo processo de formação é empregado até a decima linha.

Para, por meio d'esta tabella, acharmos a somma de dous numeros simples, por exemplo, 7 e 8, basta procurar o numero que se acha no cruzamento da columna que principia por 7 com a linha que principia por 8.

Para sommar 58 com 7, diremos :—oito unidades mais sete unidades, são quinze unidades, ou uma dezena e cinco unidades; reunindo a dezena com as cinco dezenas do numero 58, teremos seis dezenas e cinco unidades, ou o numero 65.

Pelo que fica estabelecido, não só podemos achar a somma de muitos numeros simples, como tambem de um numero composto com um ou mais numeros simples.

25. 2º Caso.—A addição de numeros compostos póde ser effectuada decompondo os numeros em suas diversas partes e reunindo em um só numero as unidades das differentes ordens que entrarem na composição dos numeros dados.

Sejam para sommar os numeros : 484, 685 e 796.

O numero 484 decompõe-se em 4 centenas, 8 dezenas e 4 unidades.

O numero 685 decompõe-se em 6 centenas, 8 dezenas e 5 unidades.

O numero 796 decompõe-se em 7 centenas, 9 dezenas e 6 unidades.

A reunião d'essas partes é um numero composto de 17 centenas 25 dezenas e 15 unidades, ou é o numero 1965.

O resultado achado póde ser obtido mais facilmente, se collocarmos os numeros uns abaixo dos outros, de modo que as unidades das differentes ordens se correspondam em columnas verticaes, e reunirmos as unidades de cada uma d'essas ordens, como se vê no seguinte exemplo :

$$\begin{array}{r} 7484 \\ 6385 \\ 5796 \\ \hline 19665 \end{array}$$

Quatro unidades mais cinco são nove, e mais seis são quinze unidades, ou uma dezena e cinco unidades.

Uma dezena mais oito são nove ; nove dezenas mais oito são dezesete, e mais nove são vinte e seis dezenas, ou duas centenas e seis dezenas.

Duas centenas mais quatro são seis ; seis centenas mais tres são nove, e mais sete são dezeseis centenas, ou um milhar e seis centenas.

Um milhar mais sete são oito ; oito milhares mais seis são quatorze, e mais cinco são dezenove milhares, ou uma dezena de milhar e nove milhares.

O raciocinio empregado para sommar os tres numeros precedentes póde ser applicado para sommar quaesquer outros numeros inteiros. É, pois, facil estabelecer a seguinte :

REGRA.— *Escrevem-se os numeros uns abaixo dos outros, de modo que as unidades das differentes ordens se correspondam em columnas verticaes. Sublinha-se. Sommam-se as unidades das differentes ordens contidas em cada uma das columnas, começando pela ordem mais inferior. Se a somma de cada columna não fôr superior a nove, é escripta por inteiro abaixo do traço. Se fôr superior a nove, escreve-se sómente o que excede de dez, vinte, trinta, etc., e essas dez, vinte, trinta unidades de uma ordem qualquer, convertidas em unidades da ordem seguinte, a ellas se reunem.*

Sendo o numero de parcellas muito grande, é conveniente decompol-as em grupos, cada um composto de um certo numero d'ellas. Sommando cada um d'esses grupos e reunindo depois essas diversas sommas, teremos o resultado.

SUBTRACÇÃO

26. *A subtracção é a operação que tem por fim achar o excesso de um numero sobre outro menor.*

O numero maior chama-se *minuendo*; o menor, *subtrahendo*; e o resultado da operação, *resto, excesso* ou *differença*.

Na subtracção dos numeros inteiros ha dous casos a considerar :

1° CASO.— *Subtrahir um numero simples de outro tambem simples; ou subtrahir um numero simples de um composto, sendo o resultado numero simples.*

2° CASO.— *Subtrahir um numero composto de outro tambem composto.*

27. 1° CASO.— A subtracção de um numero simples de outro simples, ou de um numero simples de outro composto, se effectua subtrahindo do numero maior as unidades de que se compõe o menor, uma por uma.

Assim, para subtrahir 4 de 7, diremos : sete menos um, seis ; seis menos um, cinco ; cinco menos um, quatro ; quatro menos um, tres ; e esse resultado 3 é o excesso do numero 7 sobre o numero 4.

Si se tratasse de subtrahir do numero 14 o numero 5, diriamos do mesmo modo : quatorze menos um, treze ; treze menos um, doze ; doze menos um, onze ; onze menos um, dez ; dez menos um, nove ; e o resultado 9 é o excesso do numero 14 sobre o numero 5.

O conhecimento da taboada da addição facilita muito a acquisição d'esses resultados ; porquanto, em logar de procedermos pelo modo indicado, podemos dizer 7 menos 4, 3 ; e 14 menos 5, 9.

28. 2° CASO.— A subtracção de um numero composto de outro tambem composto póde ser effectuada decompondo os dous numeros em suas diversas partes e subtrahindo as partes do menor successivamente das partes correspondentes do maior.

Seja o numero 3642 para subtrahir do numero 6874.

O numero 6874 decompõe-se em 6 milhares, 8 centenas, 7 dezenas e 4 unidades.

O numero 3642 decompõe-se em 3 milhares, 6 centenas, 4 dezenas e 2 unidades.

A subtracção das differentes unidades do numero 3642 das unidades correspondentes do numero 6874, dá em resultado um numero composto de 3 milhares, 2 centenas, 3 dezenas e 2 unidades ou o numero 3232.

Podemos facilmente obter o resultado da subtracção de um numero composto, de outro, se escrevermos o numero menor abaixo do maior e subtrahirmos as unidades das differentes ordens do numero menor, das unidades das ordens correspondentes no maior, como se póde ver nos exemplos seguintes :

1° EXEMPLO :
$$\begin{array}{r} 8975 \\ 6323 \\ \hline 2652 \end{array}$$

Subtrahindo de 5 unidades 3, restam 2 unidades.
De 7 dezenas subtrahindo 2, restam 5 dezenas.
Subtrahindo de 9 centenas 3, restam 6 centenas.
De 8 milhares subtrahindo 6, restam 2 milhares.
E o numero 2652 é o resultado.

2° EXEMPLO :
$$\begin{array}{cccc} \underbrace{8}\; & \underbrace{13} & \underbrace{7} & \underbrace{14} \\ 9 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 7 \end{array}$$

Não sendo possivel subtrahir de 4 unidades 7, decompõe-se uma dezena em 10 unidades, e o numero maior fica com 17 dezenas e 14 unidades; e se d'essas 14 unidades subtrahirmos 7, restam evidentemente 7 unidades.

Subtrahindo das 7 dezenas 2, restam 5 dezenas.

Não sendo tambem possivel subtrahir de 3 centenas 8, decompõe-se um milhar em 10 centenas, e o numero maior fica com 8 milhares e 13 centenas; e subtrahindo das 13 centenas 8, restam 5 centenas.

Subtrahindo finalmente de 8 milhares 3, restam 5 milhares.

E o numero 5557 é o resultado.

3º Exemplo:

			12			
7	9	9	2	9	9	14
8	0	0	3	0	0	4
2	7	5	8	4	3	6
5	2	4	4	5	6	8

Não sendo possivel de 4 unidades subtrahir 6, e não tendo o numero maior unidades nas ordens das dezenas e das centenas, decompõe-se um milhar em 10 centenas; d'essas 10 centenas decompõe-se uma em 10 dezenas, e das 10 dezenas decompõe-se uma em 10 unidades, e fica o numero maior tendo 2 milhares, 9 centenas, 9 dezenas e 14 unidades; e subtrahindo das 14 unidades 6, restam 8.

Subtrahindo das 9 dezenas 3, e das 9 centenas 4, restam 6 dezenas e 5 centenas.

Como não é tambem possivel subtrahir dos 2 milhares 8, e não tendo o numero maior unidades nas ordens das dezenas de milhares e centenas de milhares, decompõe-se um milhão em 10 centenas de milhares; d'essas 10 centenas de milhares decompõe-se uma em 10 dezenas de milhares, e das 10 dezenas de milhares decompõe-se uma em 10 milhares, e o numero maior fica com 7 milhões, 9 centenas de milhares, 9 dezenas de milhares e 12 milhares.

Subtrahindo dos 12 milhares 8, das 9 centenas de milhares 7, e dos 7 milhões 2, restam 4 milhares, 4 dezenas de milhares, 2 centenas de milhares e 5 milhões.

E o numero 5244568 é o resultado.

Do exposto podemos estabelecer a seguinte:

Regra.— *Escreve-se o numero menor abaixo do maior, de modo que as unidades das differentes ordens se correspondam em columnas verticaes. Sublinha-se. Subtrahem-se as unidades das differentes ordens do numero menor das unidades das ordens correspondentes no maior. Se em uma ordem do numero maior houver menor numero de unidades que na ordem correspondente do menor, reunem-se mentalmente a essa ordem dez unidades e diminue-se de uma unidade a ordem seguinte. Se a ordem ou as ordens seguintes não tiverem unidades, reunem-se mentalmente dez unidades a essa ordem, consideram-se as ordens seguintes como tendo cada uma d'ellas nove unidades e diminue-se de uma a primeira ordem que tiver unidades.*

Reunir dez unidades a uma ordem do numero maior e diminuir de uma unidade a ordem seguinte nesse mesmo numero, é o mesmo que reunir dez unidades á ordem do numero maior e augmentar de uma unidade a ordem seguinte no numero menor.

No segundo exemplo, em logar de subtrahir duas dezenas de 7, podemos subtrahir 3 dezenas de 8 e o resultado será o mesmo.

Provas da addição e subtracção

29. *Prova de uma operação é uma outra operação que indica probabilidade de não ter havido engano na primeira.*

D'entre os diversos modos de provar a addição, o mais acceito é aquelle que consiste em sommar os numeros da esquerda para a direita e subtrahir as sommas das diversas columnas, successivamente, do resultado da operação. Se, feitas todas as subtracções, não houver resto, é provavel estar certa a addição.

Exemplo:

5748
4659
3846
5764
20017
3220

Sommando a columna dos milhares, achamos 17 milhares; mas na somma ha 20; ha, pois, 3 de mais, que são convertidos em 30 centenas. Sommando as centenas, achamos 28 centenas; e havendo na somma 30, ha duas centenas de mais, que são convertidas em 20 dezenas, que, com uma pertencente á somma, perfazem 21. Sommando as dezenas, achamos 19 dezenas, e havendo na somma 21, ha duas dezenas de mais, as quaes são convertidas em 20 unidades, que, com 7 existentes na somma, perfazem 27. Sommando as unidades, achamos 27 unidades, e como esse numero de unidades é o mesmo que o contido na somma, não haverá resto algum.

Na subtracção, dando-se a somma de dous numeros e um d'elles, para achar o outro, é facil vêr que a prova consiste em sommar o subtrahendo com o resto, devendo o resultado ser o minuendo.

MULTIPLICAÇÃO

30. *A multiplicação é a operação que tem por fim, dados dous numeros, determinar um terceiro, derivado do primeiro, assim como o segundo se deriva da unidade.*

O primeiro numero chama-se *multiplicando*; o segundo, *multiplicador*; e o terceiro, *producto*.

D'esta definição se conclue que o producto é do multiplicando o que o multiplicador fôr da unidade.

Assim, se o multiplicador fôr duas, tres, quatro, etc. vezes a unidade, o producto será duas, tres, quatro, etc. vezes o multiplicando; d'onde a multiplicação dos numeros inteiros póde ainda ser definida do seguinte modo: *a operação que tem por fim repetir um numero tantas vezes quantas forem as unidades do outro.*

31. O producto de dous numeros inteiros póde ser obtido por meio da addição, e para isso basta sommar tantas parcellas iguaes ao multiplicando quantas forem as unidades do multiplicador. Se tratarmos de achar o producto de 7 por 8, basta sommar 8 parcellas iguaes a 7; se é o producto de 57 por nove que queremos achar, basta sommar 9 parcellas iguaes a 57; se, finalmente, tratarmos de multiplicar 584 por 385, basta sommar 385 parcellas iguaes a 584.

Este processo elementar nem sempre convém, por depender al-

gumas vezes de grande trabalho e de muito tempo, e isso acontece todas as vezes que o multiplicador é um numero muito grande.

32. No estudo do processo especial da multiplicação dos numeros inteiros, consideraremos dous casos:

1º CASO.— *O multiplicador é numero simples.*

2º CASO.— *O multiplicador é numero composto.*

Subdividindo-se cada um d'esses casos em dous, pois em cada um d'elles póde o multiplicando ser simples ou composto, fica o numero de casos sendo quatro.

1º CASO.— *O multiplicando é simples e o multiplicador tambem.*

2º CASO.— *O multiplicando é composto e o multiplicador é simples.*

3º CASO.— *O multiplicando é simples e o multiplicador é composto.*

4º CASO.— *O multiplicando é composto e o multiplicador tambem.*

Não alterando, porém, o producto a ordem dos factores, como veremos depois, fica o numero de casos reduzido a tres:

1º CASO. — *Multiplicar um numero simples por outro tambem simples.*

2º CASO. — *Multiplicar um numero composto por um simples.*

3º CASO. — *Multiplicar um numero composto por outro tambem composto.*

Passemos a estudar cada um d'esses tres casos.

33. 1º CASO.— O producto de um numero simples por outro tambem simples se obtem sempre por meio da taboada de Pythagoras, que deve ser conservada mentalmente.

Esta taboada é constituida do seguinte modo:

A primeira linha horizontal é formada pelos nove primeiros numeros inteiros.

Os numeros da segunda linha horizontal formam-se sommando duas parcellas iguaes a cada um dos numeros da primeira.

Os da terceira linha horizontal formam-se sommando os da primeira com os da segunda, e assim forma-se cada uma das outras sommando a primeira com a precedente.

Para, por meio d'esta tabella, conhecermos o producto de um numero simples por outro tambem simples, por exemplo, 7 multiplicado por 8, basta ver o numero que se acha no cruzamento da columna que principia por 7 e da linha horizontal que principia por 8, e acharemos 56.

Taboada da multiplicação

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

34. 2º Caso — Seja o numero 9758 para multiplicar pelo numero 6.

O producto de 9758 por 6 póde ser obtido por meio da addição, e para isso basta sommar 6 parcellas iguaes a 9758.

```
9758
9758
9758
9758
9758
9758
```

Mas sommar seis parcellas iguaes a 8 unidades é repetir 8 unidades seis vezes; sommar seis parcellas iguaes a 5 dezenas é repetir 5 dezenas seis vezes; sommar seis parcellas iguaes a 7 centenas é repetir 7 centenas seis vezes; e finalmente sommar seis parcellas iguaes a 9 milhares é repetir 9 milhares seis vezes.

```
 9758
    6
-----
58548
```


Repetindo 8 unidades seis vezes, achamos 48 unidades, e como 48 unidades contém 4 dezenas e 8 unidades, devemos escrever as 8 unidades no logar competente e reunir as 4 dezenas com as dezenas.

Repetindo 5 dezenas seis vezes, achamos 30 dezenas, que com as 4 formam 34 dezenas; e como 34 dezenas contém 3 centenas e 4 dezenas, devemos escrever as 4 dezenas no seu logar proprio e reunir as 3 centenas com as centenas.

Repetindo 7 centenas seis vezes, achamos 42 centenas, que com as 3 formam 45 centenas; e como 45 centenas contém 4 milhares e 5 centenas, devemos escrever as 5 centenas no logar competente e reunir os 4 milhares com os milhares.

Repetindo 9 milhares seis vezes, achamos 54 milhares, que com os 4 formam 58 milhares; e, como 58 milhares contém 5 dezenas de milhares e 8 milhares, devemos escrever os 8 milhares no logar competente e á sua esquerda as 5 dezenas de milhares.

Do exposto se conclue a seguinte:

Regra. — *Multiplicam-se as diversas ordens do numero composto pelo numero simples; escrevem-se os productos abaixo de um traço, conservando mentalmente as reservas que se formarem em cada um d'elles e que têm de ser reunidas com o producto seguinte.*

35. Multiplica-se um numero inteiro qualquer por 10, 100, 1000, etc., escrevendo á sua direita um, dous, tres, etc., zeros, como vimos na numeração decimal dos numeros inteiros. (18)

36. 3º Caso. — Seja o numero 937 para multiplicar pelo numero 654.

```
     937
     654
  ------
    3748
   4685(0
  5622(00
  ------
  612798
```

O producto de 937 por 654 póde ser obtido por meio da addição, sommando 654 parcellas iguaes a 937

```
937
937
937
937   4 parcellas
```

937
...
...
...
937 50 parcellas
937
937
937
...
...
...
...
937 600 parcellas

Dividindo as 654 parcellas em 3 grupos, um de 4 parcellas, outro de 50 e outro de 600; sommando cada um dos grupos e reunindo as tres sommas, o resultado será a somma das 654 parcellas iguaes a 937, ou o producto de 937 por 654.

A somma do primeiro grupo ou das 4 parcellas iguaes a 937 se obtem, como no segundo caso, multiplicando 937 por 4, cujo resultado é igual a 3748.

As 50 parcellas iguaes a 937 são decompostas em 10 grupos, cada um de 5 parcellas.

1º grupo { 937
937
937
937
937

Sommando cada um d'esses dez grupos e reunindo depois essas 10 sommas iguaes, teremos a somma das 50 parcellas.

Ora, a somma de cada um d'esses 10 grupos se obtem multiplicando 937 por 5, cujo producto é 4685.

Reunindo as 10 sommas iguaes a 4685, ou multiplicando 4685 por 10, se obtem a somma das 50 parcellas iguaes a 937, que é 46850.

As 600 parcellas iguaes a 937 são decompostas em 100 grupos, cada um de 6 parcellas.

1º grupo { 937
937
937
937
937
937

Sommando cada um d'esses 100 grupos e reunindo depois as 100 sommas iguaes, teremos a somma das 600 parcellas.

Ora, a somma de cada um d'esses grupos se obtem multiplicando 937 por 6, cujo producto é 5622.

Reunindo as 100 sommas iguaes a 5622, ou multiplicando 5622 por 100, obtem-se a somma das 600 parcellas iguaes a 937, que é 562200.

A reunião das tres sommas obtidas é 612798, producto de 937 por 654, como se vê no exemplo.

Na pratica prescinde-se sempre do ultimo zero do segundo producto parcial, dos dous ultimos do terceiro, dos tres ultimos do quarto e assim por diante.

Pelo que fica estabelecido, podemos concluir a seguinte:

REGRA.— *Multiplica-se o multiplicando pelas diversas ordens do multiplicador. Os productos parciaes escrevem-se unsa baixo dos outros, de modo que o primeiro algarismo da direita de cada um d'elles fique abaixo do algarismo correspondente no multiplicador. Sommam-se depois os productos parciaes, e o resultado será o producto pedido.*

37. Se um dos factores ou ambos terminarem por zeros, a multiplicação se effectua prescindindo dos zeros, e no producto escrevem-se á direita tantos zeros quantos forem os zeros dos factores.

1º EXEMPLO:

```
     745876
      38000
   --------
    5967008
   2237628
-----------
28343288000
```

Prescindindo dos tres zeros no multiplicador, fica elle mil vezes menor, e por isso o producto fica tambem mil vezes menor, e para que o producto não mude, é necessario tornal-o mil vezes maior, o que se consegue escrevendo tres zeros á sua direita.

2º EXEMPLO:

```
  368000
    5700
--------
    2576
   1840
----------
2097600000
```

Prescindindo dos tres zeros no multiplicando, fica elle mil vezes menor, e o producto fica tambem mil vezes menor; prescindindo dos dous zeros no multiplicador, fica elle cem vezes menor, e o producto fica cem vezes menor; mas se o producto fica mil vezes menor por causa de um factor e cem vezes menor por causa de outro, fica cem mil vezes menor por causa de ambos; e para termos o producto pedido, é necessario tornal-o cem mil vezes maior, o que se consegue escrevendo cinco zeros á sua direita.

Se entre os algarismos do multiplicador houver um ou mais zeros, a multiplicação se effectua sem se attender aos zeros, segundo á regra estabelecida.

EXEMPLO:

```
     780564
      20007
    -------
    5463948
 1561128
 ----------
15616743948
```

Principios relativos á multiplicação dos numeros inteiros

38. 1º PRINCIPIO.— *O producto de dous numeros inteiros é sempre da especie do multiplicando.*

Com effeito, sendo o producto de dous numeros inteiros a somma de tantas parcellas iguaes ao multiplicando quantas forem as unidades do multiplicador, e sendo a somma sempre da mesma especie que as parcellas, segue-se que o producto é sempre da especie do multiplicando.

39. 2º PRINCIPIO.— *O numero de algarismos de um producto de dous numeros inteiros é igual ao numero de algarismos dos dous factores, ou é igual a esse numero diminuido de uma unidade.*

Tratando-se de multiplicar um numero de quatro algarismos por outro de tres, o producto deve ter sete ou seis algarismos.

Com effeito, o multiplicando tendo 4 algarismos, está comprehendido entre 10000 e 1000; o multiplicador tendo 3 algarismos, está comprehendido entre 1000 e 100; e o producto deve necessariamente

estar comprehendido entre 1000×10000 e 1000×100, ou entre 10000000 e 100000, e portanto tem 7 ou 6 algarismos.

40. 3º PRINCIPIO.— *O producto de dous factores não muda, seja qual fôr a ordem dos factores.*

Trata-se de demonstrar que $5 \times 6 = 6 \times 5$.

O producto de 5 por 6 se obtem por meio da addição, isto é, sommando 6 parcellas iguaes a 5.

$$5=1+1+1+1+1$$
$$5=1+1+1+1+1$$
$$5=1+1+1+1+1$$
$$5=1+1+1+1+1$$
$$5=1+1+1+1+1$$
$$5=1+1+1+1+1$$

Em logar de sommar as seis parcellas, podemos decompôr cada uma d'ellas em suas unidades e depois reunir essas unidades.

Contando por linhas horizontaes, temos seis linhas, cada uma de cinco unidades, isto é, temos 6 vezes 5 unidades ou 5×6; se contamos por linhas verticaes, temos 5 linhas, cada uma de seis unidades, isto é, temos 5 vezes 6 unidades ou 6×5; mas quer contemos de um modo, quer de outro, o numero de unidades é o mesmo; logo, 5×6 é o mesmo que 6×5.

41. 4º PRINCIPIO.— *O producto de tres factores não muda, invertendo a ordem dos dous ultimos factores.*

Trata-se de demonstrar que $3 \times 4 \times 5 = 3 \times 5 \times 4$.

O producto de 3 por 4 se obtem, sommando 4 parcellas iguaes a 3; e como esse producto deve ser repetido 5 vezes, deve-se considerar a somma das 4 parcellas iguaes a 3, cinco vezes.

$$3+3+3+3$$
$$3+3+3+3$$
$$3+3+3+3$$
$$3+3+3+3$$
$$3+3+3+3$$

Contando por linhas horizontaes, temos 5 linhas, e, como cada uma é igual a 3×4, o resultado será $3 \times 4 \times 5$; se contarmos por linhas verticaes, temos quatro linhas, e como cada uma é igual a 3×5, o resultado será $3 \times 5 \times 4$; mas como é indifferente contar de um ou de outro modo, segue-se que $3 \times 4 \times 5 = 3 \times 5 \times 4$.

42. 5º PRINCIPIO.— *O producto de um numero qualquer de factores não muda, invertendo de qualquer modo a ordem dos factores.*

Seja : $2\times3\times4\times5\times6\times7$.

Considerando os quatro primeiros factores como um só, ficam elles reduzidos a tres, a saber : 120, 6 e 7; pelo ultimo principio, podemos mudar a ordem dos dous ultimos, e teremos :

$$2\times3\times4\times5\times7\times6$$

Se prescindirmos do ultimo factor, 6, e considerarmos os tres primeiros como um só, ficam tres factores 24, 5 e 7, e ainda, pelo ultimo principio, podemos escrever $2\times3\times4\times7\times5$; mas sendo $2\times3\times4\times5\times7=2\times3\times4\times7\times5$, multiplicando os dous productos por 6, os resultados serão iguaes, e teremos :

$$2\times3\times4\times7\times5\times6.$$

Prescindindo dos dous ultimos factores, e considerando os dous primeiros como um só, ficam tres factores, 6, 4 e 7, e pelo ultimo principio teremos $2\times3\times7\times4$; mas sendo $2\times3\times4\times7=2\times3\times7\times4$, os dous productos multiplicados pelo numero 5×6 serão iguaes, e teremos :

$$2\times3\times7\times4\times5\times6$$

Se prescindirmos dos tres ultimos factores, ficam os tres factores 2, 3 e 7, nos quaes, mudando a ordem dos dous ultimos, temos $2\times7\times3$; mas sendo $2\times3\times7=2\times7\times3$, os dous productos multiplicados pelo numero $4\times5\times6$ serão iguaes, e teremos :

$$2\times7\times3\times4\times5\times6$$

Prescindindo dos quatro ultimos factores, ficam dous, 2 e 7, e como o producto de dous factores não muda invertendo a ordem dos factores, em logar de 2×7 podemos escrever 7×2, e sendo iguaes esses dous productos multiplicados pelo numero $3\times4\times5\times6$, os resultados serão iguaes, e teremos :

$$7\times2\times3\times4\times5\times6$$

Sendo o producto dos seis factores o mesmo, seja qual fôr o logar que occupe nesse producto o factor 7 ; e sendo applicavel aos outros factores o raciocinio que empregamos para o factor 7, fica demonstrado o principio.

43. 6º PRINCIPIO.— *Multiplicar um numero por outro é o mesmo que multiplicar esse numero pelos factores d'esse outro.*

Trata-se de demonstrar que $4\times30=4\times5\times6$.

Com effeito, multiplicar 4 por 30 é o mesmo que sommar 30 parcellas iguaes a 4 ; podendo-se decompôr as 30 parcellas iguaes a 4 em 6 grupos de 5 parcellas iguaes a 4, ou em 5 grupos de 6 parcellas iguaes a 4, segue-se que

$$4\times30=4\times5\times6=4\times6\times5$$

DIVISÃO

44. *A divisão é a operação que tem por fim, dados dous numeros, achar um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro.*

O primeiro numero chama-se *dividendo ;* o segundo, *divisor ;* e o terceiro, *quociente.*

D'esta definição segue-se que o dividendo é um producto de dous factores, sendo um d'elles o divisor e o outro o quociente.

Nas applicações da divisão, podendo o factor dado ser ora o multiplicando, ora o multiplicador, tem essa operação dous problemas differentes :

1º *Determinar quantas vezes um numero contém outro* — quando o factor dado é o multiplicando ; exemplo : *Com 20 soldados quantas fileiras de 5 soldados posso formar ?*

Com effeito, o factor dado sendo o multiplicando e da mesma especie do producto, o factor procurado é o multiplicador ; e como o multiplicador indica o numero de vezes que o producto contém o multiplicando (31), segue-se que determinar o multiplicador é determinar quantas vezes um numero contém outro.

2º *Dividir um numero em partes iguaes* — quando o factor conhecido é o multiplicador ; exemplo : *Distribuindo 20 soldados em 4 fileiras, quantos soldados terei em cada fileira ?*

Com effeito, o factor dado sendo o multiplicador, o factor pedido é o multiplicando e da mesma especie do producto ; e sendo o multiplicando uma das partes iguaes que o producto contém (31), segue-se que determinar o multiplicando é determinar uma d'essas partes iguaes, e para isso é necessario dividir o producto em um certo numero de partes iguaes.

No 1º problema, sendo o dividendo e o divisor da mesma especie, o factor dado é o multiplicando (38); o fim da divisão é então determinar quantas vezes um numero contém outro, e a especie do quociente é conhecida explicitamente pelo enunciado do problema.

No 2º problema, sendo o dividendo e o divisor de especies differentes, o factor dado é o multiplicador (38); o fim da divisão é então dividir um numero em partes iguaes, e a especie do quociente é implicitamente conhecida pela do dividendo.

45. O quociente da divisão de um numero inteiro qualquer por outro, póde ser obtido natural e espontaneamente por meio da subtracção, e para isso basta subtrahir do dividendo successivamente o divisor até esgotal-o complétamente ou não ser mais possivel a subtracção, como se vê nos seguintes exemplos:

1º EXEMPLO—48÷12.

```
48
12 1ª Subtracção.
—
36
12 2ª Subtracção.
—
24
12 3ª Subtracção.
—
12
12 4ª Subtracção.
—
 0
```

2º EXEMPLO—52÷12.

```
52
12 1ª Subtracção.
—
40
12 2ª Subtracção.
—
28
12 3ª Subtracção.
—
16
12 4ª Subtracção.
—
 4
```

No primeiro exemplo a divisão é exacta; o numero de subtracções representa o numero de unidades de que se compõe o quociente; e, no segundo exemplo, a divisão não é exacta, e o numero de subtracções representa o numero de unidades de que se compõe a parte inteira do quociente.

Quando a divisão não é exacta, significa que não existe nenhum *numero inteiro* que, multiplicado pelo divisor, reproduza o dividendo. Então o dividendo é igual ao producto do divisor pelo quociente mais o resto.

Nem sempre convém empregar este processo elementar e espon-

taneo, por depender algumas vezes de grande trabalho e de muito tempo, e isso acontece todas as vezes que o dividendo é muito grande em relação ao divisor.

Applica-se então um processo abreviado e racional, deduzido da consideração de ser o problema da divisão inverso do da multiplicação.

46. No estudo do processo especial da divisão dos numeros inteiros, consideraremos dous casos:

1º CASO: *O divisor tem um só algarismo.*

2º CASO: *O divisor tem mais de um algarismo.*

Em ambos os casos o quociente poderá ser simples ou composto.

Subdividindo-se cada um d'esses casos em dous, pois em cada um d'elles póde o dividendo ser menor ou maior que dez vezes o divisor, fica o numero de casos sendo quatro:

1º CASO: *O divisor tem um só algarismo e o dividendo é menor que dez vezes o divisor. O quociente será simples.*

2º CASO: *O divisor tem um só algarismo e o dividendo é maior que dez vezes o divisor. O quociente será composto.*

3º CASO: *O divisor tem mais de um algarismo e o dividendo é menor que dez vezes o divisor. O quociente será simples.*

4º CASO: *O divisor tem mais de um algarismo e o dividendo é maior que dez vezes o divisor. O quociente será composto.*

Tratemos de cada um d'esses casos.

47. 1º CASO.— Seja o numero 72 para dividir pelo numero 8.

Sendo o dividendo menor que dez vezes o divisor, o quociente é um numero simples e se obtem por meio da taboada de Pythagoras.

48. 2º CASO.— Seja o numero 648 para dividir pelo numero 9.

```
648 | 9
630 | 72
---
 18
 18
---
  0
```

Sendo o dividendo maior que dez vezes o divisor, o quociente tem mais de um algarismo.

Vejamos de quantos algarismos consta o quociente.

$$900=9\times100>648$$
$$90=9\times\ 10<648$$

O numero 100, multiplicado pelo divisor 9, dando um producto 900, maior que o dividendo 648, não póde o quociente ser 100, nem numero maior que 100, isto é, não póde ter tres, nem mais algarismos; e se o numero 10, multiplicado pelo divisor, dá um producto 90, menor que o dividendo, não póde o quociente ser numero menor que 10, isto é, ter um só algarismo. Ora, se o quociente não póde ter um só algarismo, se não póde ter tres, nem mais de tres algarismos, tem necessariamente dous.

Como se obtem cada um d'elles? O quociente, tendo dous algarismos, compõe-se de dezenas e unidades; e sendo o dividendo o producto do divisor pelo quociente, é elle um todo composto de duas partes; 1ª, producto do divisor pelas dezenas do quociente; 2ª, producto do divisor pelas unidades do quociente.

Separando do dividendo cada uma d'essas duas partes, e dividindo cada uma d'ellas pelo divisor, teremos as dezenas e as unidades do quociente.

Tratemos, pois, de separar do dividendo a primeira parte. O producto das dezenas do quociente pelo divisor dará pelo menos dezenas, portanto esse producto estará contido nas 64 dezenas do dividendo; e dividindo essas 64 dezenas pelo divisor 9, teremos o algarismo 7 para as dezenas do quociente. Multiplicando as 7 dezenas do quociente pelo divisor, teremos 63, que, deduzido das 64 dezenas do dividendo, deixa um resto de 1 dezena. Reunindo-a ás 8 unidades, teremos 18 para a segunda parte, isto é, para producto do divisor pelas unidades do quociente. Para achar estas, bastará dividir as 18 unidades do dividendo pelo divisor 9; o resultado é o algarismo 2 das unidades do quociente.

49. 3º Caso.— Dividir o numero 648 pelo numero 72. Sendo o dividendo menor que 10 vezes o divisor, o quociente só tem um algarismo, e esse algarismo se obtem raciocinando do seguinte modo: sendo o dividendo o producto do quociente pelo divisor, no exemplo dado o dividendo 648 constará de duas partes, a saber: o producto do algarismo procurado do quociente pelas unidades do divisor, e o producto d'esse mesmo algarismo pelas dezenas do divisor. Destacando então no dividendo um d'esses productos e dividindo-o pelo divisor, teriamos o quociente procurado; mas d'esses productos o unico que póde

ser destacado é o producto do algarismo procurado pelas 7 dezenas do divisor, porque este producto não forneceu reserva; elle estará contido nas 64 dezenas do dividendo 648. Portanto, dividindo essas 64 dezenas do dividendo pelas 7 dezenas do divisor, o quociente será muito provavelmente o algarismo procurado do quociente; essa divisão, feita pela tabella de Pythagoras, dá 9. Para termos certeza de que 9 é o verdadeiro quociente, devemos multiplical-o pelo divisor e verificar se esse producto reproduz o dividendo 648. Effectivamente $72 \times 9 = 648$, portanto 9 é o quociente pedido.

50. 4º Caso.— Dividir o numero 76518 pelo numero 327.

```
76518 | 327
65400 | 234
-----
11118
 9810
-----
 1308
 1308
-----
    0
```

Sendo o dividendo maior que dez vezes o divisor, o quociente tem mais de um algarismo.

Vejamos quantos algarismos tem o quociente.

$$32700 = 327 \times 100 < 76518$$
$$327000 = 327 \times 1000 > 76518$$

O numero 100 multiplicado pelo divisor dá um producto menor que o dividendo, por isso o quociente será maior que 100; o numero 1000 multiplicado pelo divisor, dá um producto maior que o dividendo, por isso o quociente será menor que 1000. O quociente estando comprehendido entre 100 e 1000 se comporá de tres algarismos.

Como se determina cada um d'esses tres algarismos do quociente? O quociente, tendo tres algarismos, compõe-se de centenas, dezenas e unidades; e sendo o dividendo o producto do divisor pelo quociente, é elle um todo composto de tres partes: — 1ª, producto do divisor pelas centenas do quociente; 2ª, producto do divisor pelas dezenas do quociente; 3ª, producto do divisor pelas unidades do quociente.

Se separarmos do dividendo cada uma d'essas partes e dividirmos cada uma d'ellas pelo divisor, teremos as centenas, as dezenas e as unidades do quociente.

Ora, o unico producto que póde ser assignalado em primeiro logar no dividendo é o das centenas do quociente pelo divisor, porque os outros acham-se desfalcados, visto terem fornecido reservas para os productos que lhes são immediatamente superiores. Separemos, pois, do dividendo a 1ª parte.

O producto das centenas do quociente pelo divisor dará pelo menos centenas, portanto tal producto estará incluido nas 765 centenas do dividendo; por conseguinte, dividindo o dividendo por um de seus factores 327, virá para quociente o outro factor, isto é, o algarismo das centenas do quociente. Essa divisão effectua-se pelo 3º caso, e dá 2 para as centenas do quociente. Multiplicando as duas centenas pelo divisor e subtrahindo o producto do dividendo, o resto 11118 será composto das outras duas partes.

Tratemos de separar d'esse resto a 2ª parte, producto do divisor pelas dezenas do quociente.

Por um raciocinio semelhante, concluiriamos que o producto das dezenas do quociente pelo divisor está contido nas 1111 dezenas do dividendo parcial 11118. Portanto devemos separar o ultimo algarismo d'esse dividendo parcial e dividir 1111 dezenas pelo divisor (3º caso), e teremos o algarismo 3 para as dezenas do quociente.

Multiplicando as tres dezenas do quociente pelo divisor e subtrahindo esse resultado do 1º resto, o 2º resto representará a 3ª parte que, dividida pelo divisor, dará as unidades do quociente.

Pelo que fica exposto, podemos estabelecer a seguinte

REGRA PARA DIVIDIR UM NUMERO INTEIRO POR OUTRO.— *Separam-se no dividendo, para a esquerda, tantos algarismos quantos forem necessarios para que o numero formado por elles contenha uma vez o divisor no minimo e nove no maximo, e teremos assim o primeiro dividendo parcial, que, dividido pelo divisor, dará o primeiro algarismo do quociente. Multiplica-se esse quociente pelo divisor, e o producto subtrahe-se do primeiro dividendo parcial. A' direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo e forma-se assim o segundo dividendo parcial, que, dividido pelo divisor, dará o segundo algarismo do quociente. Assim se continúa sempre até ter considerado todos os algarismos do dividendo.*

As multiplicações dos diversos quocientes parciaes pelo divisor e as subtracções d'esses productos dos respectivos dividendos parciaes,

podem ser effectuadas ao mesmo tempo, como se vê no exemplo seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 475832 & 3284 \\ \cline{2-2} 14743 & 144\frac{2936}{3284} \\ 16072 & \\ 2936 & \end{array}$$

Não sendo neste exemplo a divisão exacta, o quociente consta de duas partes: — uma de um numero inteiro 144; e outra, de uma fracção $\frac{2936}{3284}$ que tem para numerador o resto da divisão e para denominador o divisor.

Principios relativos á divisão dos numeros inteiros

51. 1º PRINCIPIO.—*Se a divisão de um numero inteiro por outro fôr exacta, multiplicando ou dividindo o dividendo por um numero inteiro, o quociente fica multiplicado ou dividido por esse numero.*

Com effeito, sendo a divisão exacta, o dividendo é um producto de dous numeros inteiros ou uma somma que se trata de dividir; o divisor é o multiplicador ou o numero de parcellas de que se compõe a somma, e o quociente é o multiplicando ou o valor de cada parcella (31 e 44); e se a somma a dividir torna-se duas, tres, etc., vezes maior ou menor, sem que o numero de parcellas seja alterado, o valor de cada parcella, isto é, o quociente fica duas, tres, etc., vezes maior ou menor.

52. 2º PRINCIPIO.—*Sendo a divisão de um numero inteiro por outro exacta, multiplicando ou dividindo o divisor por um numero inteiro, o quociente fica dividido ou multiplicado por esse numero.*

Com effeito, se o dividendo não muda, isto é, se a somma não soffre alteração alguma, e se o divisor ou o numero de parcellas torna-se duas, tres, etc. vezes maior ou menor, cada parcella ou o quociente fica duas, tres, etc. vezes menor ou maior.

53. 3º PRINCIPIO.—*Sendo a divisão de um numero inteiro por outro exacta, multiplicando ou dividindo o dividendo e o divisor ao mesmo tempo por um mesmo numero inteiro, o quociente não muda.*

Com effeito, multiplicando ou dividindo o dividendo por um certo numero inteiro, o quociente fica esse numero de vezes maior ou menor; e multiplicando ou dividindo o divisor por esse mesmo numero inteiro, o quociente fica esse mesmo numero de vezes menor ou maior, e portanto não póde mudar, por haver compensação.

54. 4º PRINCIPIO.—*Não sendo a divisão de um numero inteiro por outro exacta, multiplicando ou dividindo o dividendo e o divisor por um mesmo numero inteiro, a parte inteira do quociente não muda; mas o resto da divisão apparece multiplicado ou dividido por esse numero.*

Com effeito, sendo o resto da divisão a differença entre o dividendo e o producto do divisor pela parte inteira do quociente, tornando-se o dividendo e o divisor um certo numero de vezes maior ou menor, o producto do divisor pela parte inteira do quociente fica tambem esse numero de vezes maior ou menor. Ora, se o dividendo e o producto do divisor pela parte inteira do quociente ficam um certo numero de vezes maiores ou menores, sua differença ou o resto da divisão fica maior ou menor esse mesmo numero de vezes.

Provas da multiplicação e divisão

55. Da definição de divisão se deduz o meio de provar estas duas operações, porquanto, se na divisão se dá um producto de dous factores e um d'elles para determinar o outro, é claro que, todas as vezes que dividirmos um producto de dous factores por um d'elles, o quociente será sempre o outro factor; e que, se multiplicarmos o divisor pelo quociente, o producto será o dividendo.

Assim, pois, a prova da multiplicação dos numeros inteiros consiste em *dividir o producto por um dos factores; o quociente será o outro factor*; e a da divisão consiste em *multiplicar o divisor pelo quociente, e o producto será o dividendo.*

MUDANÇA DE BASE NOS SYSTEMAS DE NUMERAÇÃO

Sendo conhecidas as quatro operações sobre os numeros inteiros, completaremos o estudo da numeração, resolvendo os tres problemas seguintes:

1º

Um numero sendo escripto no systema de numeração decimal, escrevel-o em um outro systema de base dada.

Seja o numero 8756, representado no systema decimal, para escrever no systema cuja base é 7.

Como no systema de base 7 as unidades das differentes ordens formam-se de sete em sete, o numero conterá tantas unidades de segunda ordem, quantas vezes o numero 7 fôr contido nelle, e o resto da divisão representará o numero de unidades de primeira ordem.

O quociente, representando unidades de segunda ordem, conterá tantas unidades de terceira ordem, quantas vezes o numero 7 fôr contido nelle, e o resto d'essa segunda divisão representará o numero de unidades de segunda ordem.

Assim continuando, teremos as unidades das outras ordens do numero dado, representado no systema cuja base é 7.

Effectuando as divisões successivas, temos:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
8756 & \underline{7} & & & & \\
6 & 1250 & \underline{7} & & & \\
 & 4 & 178 & \underline{7} & & \\
 & & 3 & 25 & \underline{7} & \\
 & & & 4 & 3 & \underline{7} \\
 & & & & 3 & 0
\end{array}$$

e a representação do numero dado nesse systema será 34346.

Do que fica estabelecido deduz-se a seguinte:

REGRA.—*Divide-se successivamente o numero dado pela base do systema até achar para quociente zero. Os restos, escriptos da direita para a esquerda e na ordem em que forem achados, formarão o numero pedido.*

2º

Um numero sendo escripto em um systêma de numeração de base dada, escrevel-o no systema decimal.

Seja o numero 34346, representado no systema cuja base é 7, para escrever no systema decimal.

As 3 unidades de quinta ordem correspondem a 3×7 ou 21 unidades de quarta ordem, que, reunidas as 4 do numero dado, perfazem 25 unidades de quarta ordem.

As 25 unidades de quarta ordem correspondem a 25×7 ou 175 unidades de terceira ordem, que, reunidas ás 3 do numero dado, acha-se 178 unidades de terceira ordem.

As 178 unidades de terceira ordem correspondem a 178×7 ou

1246 unidades de segunda ordem, que, reunidas ás 4 do numero dado, perfazem 1250 unidades de segunda ordem.

Finalmente, as 1250 unidades de segunda ordem correspondem a 1250×7 ou 8750 unidades de primeira ordem, que, reunidas ás 6 do numero proposto, dão como resultado 8756.

Do exposto devemos concluir a seguinte :

REGRA.— *Multiplicam-se as unidades representadas pelo primeiro algarismo á esquerda pela base do systema, e somma-se o producto com as unidades representadas pelo algarismo seguinte ; a somma multiplica-se pela base do systema e reune-se o producto com as unidades representadas pelo algarismo seguinte, e assim successivamente, até ter juntado as unidades representadas pelo algarismo da direita.*

3°

Um numero sendo escripto em um systema de base dada, escrevel-o em um outro systema de base tambem dada, sendo porém as bases dos dous systemas differentes de 10.

Seja o numero 2534, escripto no systema de base 6, para escrever no systema de base 7.

Consegue-se resolver directamente esta questão, dividindo successivamente o numero dado por 7, fazendo, porém, as divisões no systema de base 6.

Effectuando, pois, as divisões, acha-se

2534 | 7
4 | 230 | 7
6 | 20 | 7
5 | 1 | 7
1

e a representação do numero será 1564.

O processo indirecto consiste em escrever o numero dado no systema decimal, e depois escrever o resultado no systema cuja base é 7.

No systema septimal, 7 unidades de uma ordem formam uma de ordem immediatamente superior ; portanto, dividindo o numero 2534 por 7, o quociente será expresso em unidades de 2ª ordem, e o resto dará as unidades de 1ª ordem. Para ter as unidades de 2ª ordem, deveremos, pelo mesmo principio, dividir por 7 o quociente achado ; esse novo quociente será expresso em unidades de 3ª ordem, e o resto dará as unidades de

2ª ordem e assim por diante. Este processo é semelhante ao do problema 1°, pois de facto elle constitue o caso mais geral. As operações devem se effectuar, porém, no systema de base dada, conforme é facil comprehender.

Para effectuar as divisões applica-se a mesma regra da divisão no systema decimal, convenientemente modificada, como é facil comprehender pelo desenvolvimento abaixo :

Seja a dividir 2534 por 7

2' 5' 3 4 | 7
| 0 2 3 0

2×6=12
17
3×6=18
21
0×6=0
4

CAPITULO II

PROPRIEDADE GERAES DOS NUMEROS

56. Expostos os processos para effectuar as quatro primeiras operações sobre os numeros inteiros, vamos nos occupar do estudo das propriedades geraes d'esses numeros ; e, sendo necessario, não só para esse fim, como tambem para o desenvolvimento das outras partes da arithmetica, o conhecimento das principaes operações algebricas, trataremos antes de tudo de deduzir as regras para cada uma d'essas operações, começando pela exposição dos signaes que a algebra emprega.

Os principaes signaes empregados na algebra são dez :

1° Letras do alphabeto.

2° + que se lê *mais*.

3° — que se lê *menos*.

4º $\times$ que se lê *multiplicado por*.

5º $\div$ que se lê *dividido por*.

6º $\sqrt{}$ que se lê *raiz de*.

7º $=$ que se lê *igual a*.

8º $>$ que se lê *maior que*; $<$ *menor que*.

9º Coefficiente.

10º Expoente.

As letras do alphabeto são empregadas para representar quaesquer numeros.

O signal $+$ indica *addição*. Escripto entre duas quantidades, exprime que ellas devem ser sommadas.

O signal $-$ indica *subtracção*. Collocado entre duas quantidades, exprime que uma d'ellas deve ser subtrahida da outra.

O signal $\times$ indica *multiplicação*. Escripto entre duas quantidades, exprime que uma d'ellas deve ser multiplicada pela outra.

A multiplicação indica-se ainda collocando um ponto entre os factores, ou escrevendo um factor ao pé do outro. Assim, $a \times b$, $a.\, b$, ab, lê-se *a* multiplicado por *b*.

O signal $\div$ indica *divisão*. Collocado entre duas quantidades, exprime que uma d'ellas deve ser dividida pela outra.

A divisão indica-se ainda separando o dividendo do divisor por um traço horizontal.

Assim, $a \div b$, $\frac{a}{b}$, lê-se *a* dividido por *b*.

O signal $\sqrt{}$ indica *extracção de raiz*.

A extracção de raiz é uma operação inversa da elevação a potencia.

Chama-se potencia de um numero um producto de factores iguaes a esse numero.

Assim, a segunda potencia de *a* é o producto de dous factores iguaes a *a*, ou a^2; a terceira potencia de *a* é o producto de tres factores iguaes a *a*, ou a^3; a quarta potencia de *a* é o producto de quatro factores iguaes a *a*, ou a^4; etc.

A segunda potencia tambem se chama *quadrado*; e a terceira, *cubo*.

A raiz de um numero é o numero que, multiplicado por si mesmo um certo numero de vezes, produz o numero dado.

Assim, a raiz segunda de a^2 é o numero que, multiplicado por si mesmo, produz a^2, isto é, *a*; a raiz terceira de a^3 é o numero que, multiplicado por si mesmo duas vezes, produz a^3, isto é, *a*, etc.

A raiz segunda chama-se tambem *raiz quadrada*; e a terceira, *raiz cubica*.

O grão da raiz se conhece por um signal que se escreve no radical, e se chama *indice*; $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$... $\sqrt[m]{a}$, lê-se: raiz quadrada de *a*, raiz cubica de *a*, raiz quarta de *a*... raiz do grão *m* de *a*.

Para indicar a raiz quadrada, é costume prescindir do indice.

Assim, em logar de $\sqrt[2]{a}$, escreve-se $\sqrt{a}$.

O signal $=$ indica *igualdade*. Escripto entre duas quantidades, exprime que ellas são iguaes.

EXEMPLO: $a-b=c-d$

A igualdade tem dous membros. O primeiro membro é formado pela expressão que fica á esquerda do signal, e o segundo é formado pela expressão que fica á direita do mesmo signal.

A igualdade não se perturba sommando a ambos os membros ou d'elles subtrahindo uma mesma quantidade; o mesmo acontece, multiplicando ou dividindo ambos os membros por uma mesma quantidade.

O signal $> <$ indica *desigualdade*. Collocado entre duas quantidades exprime que uma d'ellas é maior que a outra. Assim, $a>b$, $b<a$. A quantidade maior fica do lado da abertura do signal.

O *coefficiente é o multiplicador da quantidade que fica á sua direita*. O coefficiente, sendo inteiro indica, numero de parcellas iguaes á quantidade que fica á sua direita.

EXEMPLO:

$$6a=a+a+a+a+a+a$$

O *expoente é um signal que se escreve á direita de uma quantidade e um pouco acima d'ella, e indica o complexo de operações a effectuar sobre essa quantidade*. O expoente, sendo inteiro e positivo, indica numero de factores iguaes.

EXEMPLO:

$$a^5=a\times a\times a\times a\times a$$

Estes signaes são empregados como meio de abreviação e generalisação do calculo.

Expressões algebricas

57. *Expressão algebrica é a quantidade representada por meio dos signaes da algebra.* $3a$, $4a^2b$, $3a-2b$, $4a^2-5b+3c$, são expressões algebricas.

As expressões algebricas são *simples* ou *compostas: simples,* quando não têm partes separadas pelos signaes + ou — ; *compostas,* quando as têm ; $3a$, $4a^3b$, são expressões simples ; $3a-2b$, $4a^2-5b+3c$, são expressões compostas.

As expressões simples chamam-se tambem *monomios* ; e as compostas, *polynomios.*

As partes que nos polynomios estão separadas pelos signaes + ou — chamam-se *termos* do polynomio.

Ao polynomio de dous termos dá-se o nome de *binomio* ; e ao de tres termos, o de *trinomio.*

Termos iguaes são os que têm o mesmo coefficiente e as mesmas letras, tendo ellas respectivamente os mesmos expoentes.

Termos semelhantes são os que se compõem das mesmas letras, tendo essas letras respectivamente os mesmos expoentes.

Reducção de termos semelhantes

58. *A reducção de termos semelhantes tem por fim diminuir o mais que fôr possivel o numero de termos de um polynomio.*

Os termos semelhantes podem ser reduzidos dous a dous : o primeiro com o segundo ; o resultado com o terceiro ; o segundo resultado com o quarto, e assim por diante até o ultimo ; e na reducção d'esses termos deve-se sempre attender aos signaes.

Se os signaes dos dous termos forem iguaes, sommam-se os coefficientes ; á direita da somma escrevem-se as letras com os seus expoentes, e dá-se ao resultado o signal commum.

EXEMPLOS :

$$4a^4b^2+7a^4b^2=11a^4b^2$$
$$-9a^5b^4-8a^5b^4=-17a^5b^4$$

Se os termos semelhantes tiverem signaes differentes, subtrahe-se o menor coefficiente do maior ; á direita do resto escrevem-se as letras com os seus expoentes, e dá-se ao resultado o signal do maior coefficiente.

EXEMPLOS :

$$17a^8b^9-25a^8b^9=-8a^8b^9$$
$$-38a^6b^7+43a^6b^7=\ \ 5a^6b^7$$

No polynomio $25a^4b^2 - 39a^3b^3 + 15a^2b^4 - 27ab^5 - 19a^4b^2 + 12a^3b^3 - 8a^2b^4 + 13ab^5 + 6a^4b^2 + 32a^3b^3 - 4a^2b^4 + 5ab^5$, reduzidos os termos semelhantes, temos o resultado :

$$12a^4b^2+5a^3b^3+3a^2b^4-9ab^5$$

Operações algebricas

59. As principaes operações algebricas são : *addição, subtracção, multiplicação e divisão.*

Addição

60. Na addição algebrica ha dous casos a considerar :

1º CASO : *Addição de monomios.*

2º CASO : *Addição de polynomios.*

1º CASO.—Sendo semelhantes os monomios que se trata de sommar, a questão transforma-se em uma reducção de termos semelhantes.

A somma dos monomios : $12a^4b^2$, $15a^4b^2$ e $18a^4b^2$ é $12a^4b^2+15a^4b^2+18a^4b^2$ ou $45a^4b^2$; a somma dos monomios : $-4a^5b^4$, $-17a^5b^4$ e $-23a^5b^4$ é $-4a^5b^4-17a^5b^4-23a^5b^4$ ou $-44a^5b^4$; e finalmente a somma dos monomios : $25a^7b^8$, $-37a^7b^8$ e $-13a^7b^8$ é $25a^7b^8-37a^7b^8-13a^7b^8$ ou $-25a^7b^8$.

Se os monomios não forem semelhantes, indica-se a operação.

A somma dos monomios : $3a^5b^8$, $4a^9b^4$ e $7a^6b^3$ é $3a^5b^8+4a^9b^4+7a^6b^3$; a dos monomios : $4a^8b^4$ e $-17a^9b^5$ é $4a^8b^4+(-17a^9b^5)$ ou $4a^8b^4-17a^9b^5$.

2º CASO.—Sejam os polynomios P e P'.

O polynomio P póde ser representado por uma expressão da fórma $a-b$, sendo *a* a reunião dos termos que têm signal mais ; e *b* a reunião dos termos que têm signal menos. Da mesma fórma o polynomio P' póde ser representado por $c-d$. Sommar os dous polynomios P e P', é, pois, sommar as duas expressões $a-b$ e $c-d$.

Sommando c com $a-b$, o resultado será $a-b+c$; mas sommando c com $a-b$, somma-se de mais a quantidade d. Para termos, pois, a somma pedida, é necessario tirar d de $a-b+c$, e o resultado será $a-b+c-d$.

Pelo que fica exposto, segue-se a

REGRA PARA SOMMAR QUANTIDADES ALGEBRICAS.— *Escrevem-se as quantidades umas depois das outras, conservando todos os signaes. Reduzem-se os termos semelhantes.*

Exemplo: Sommar as expressões:

$$5a^4b-13a^3b^2+27a^2b^3-31ab^4$$
$$-18a^4b$$
$$31a^3b^2-19a^2b^3+12ab^4$$
$$13a^4b$$
$$2a^3b^2-5a^2b^3+3ab^4$$

A somma é

$$5a^4b-13a^3b^2+27a^2b^3-31ab^4-18a^4b+31a^3b^2-19a^2b^3+12ab^4+$$
$$+13a^4b+2a^3b^2-5a^2b^3+3ab^4;$$

reduzindo os termos semelhantes, acha-se

$$20a^3b^2+3a^2b^3-16ab^4$$

Subtracção

61. Na subtracção algebrica ha dous casos a considerar:

1º CASO: *O subtrahendo é um monomio.*

2º CASO: *O subtrahendo é um polynomio.*

1º CASO.— Seja dado o monomio $7a^4b^3$ para ser subtrahido de M.

O resultado devendo ser tal que, sommado com $7a^4b^3$, dê M, não póde deixar de ser $M-7a^4b^3$.

Seja dado ainda o monomio $-5a^7b^8$ para ser subtrahido de M. Como o resultado, sommado com $-5a^7b^8$, deve dar M, não póde deixar de ser $M+5a^7b^8$.

2º CASO.— Seja dado o polynomio P para ser subtrahido da quantidade M.

Podendo o polynomio P ser representado pela expressão $a-b$, é claro que subtrahir de M o polynomio P, é o mesmo que subtrahir de M a expressão $a-b$.

Se subtrahirmos a de M, o resultado será $M-a$; mas subtrahindo de M a quantidade a, subtrahimos de mais a quantidade b, e para que o resultado seja o pedido, é necessario juntar b a $M-a$, e teremos $M-a+b$.

Do exposto se conclue a seguinte

REGRA PARA SUBTRAHIR UMA QUANTIDADE QUALQUER DE OUTRA.— *Escreve-se uma depois da outra, trocando os signaes do subtrahendo. Reduzem-se em seguida os termos semelhantes.*

EXEMPLO:

Subtrahir do polynomio $18a^4b-25a^3b^2+32a^2b^3-15ab^4$,

o polynomio $12a^4b-18a^3b^2-3a^2b^3-21ab^4$.

O resultado é $18a^4b-25a^3b^2+32a^2b^3-15ab^4-12a^4b+18a^3b^2+3a^2b^3+21ab^4$; e reduzindo os termos semelhantes, acha-se:

$$6a^4b-7a^3b^2+35a^2b^3+6ab^4$$

Multiplicação

62. Na multiplicação algebrica ha tres casos a considerar:

1º CASO: *Multiplicação de monomio por monomio.*

2º CASO: *Multiplicação de polynomio por monomio ou de monomio por polynomio.*

3º CASO: *Multiplicação de polynomio por polynomio.*

1º CASO.— Seja dado o monomio $5a^4b^3c^2d^5$ para ser multiplicado pelo monomio $7a^2b^4c^3$.

Sendo $5a^4b^3c^2d^5=5aaaabbbccddddd$

e $7a^2b^4c^3=7aabbbbccc$

teremos

$$5a^4b^3c^2d^5\times 7a^2b^4c^3=5aaaabbbccddddd\times 7aabbbbccc=$$
$$=5\times 7aaaaaabbbbbbbcccccddddd=35a^6b^7c^5d^5$$

Do resultado se deduz a seguinte

REGRA.— *Multiplicam-se os coefficientes; escrevem-se no producto as letras communs aos dous factores, dando a cada uma expoente igual á somma dos expoentes dos dous factores, bem como as letras que entrarem em um só factor com os seus respectivos expoentes.*

2º Caso.— Represente-se o polynomio por a—b, e o monomio por *c*. A operação indica-se do seguinte modo:

$$(a-b)\,c$$

Se multiplicarmos *a* por *c*, o producto é *ac*; mas multiplicando *a* por *c*, multiplicamos por *c* uma quantidade augmentada de *b*, portanto o producto vem augmentado de *bc*; para termos, pois, o producto pedido devemos tirar *bc* de *ac*, e teremos ac—bc, isto é:

$$(a-b)c=ac-bc$$

Regra para multiplicar um polynomio por um monomio e vice-versa.—*Multiplica-se cada termo do polynomio pelo monomio.*

Exemplo:

$$(3a^4b-4a^5b^2+5a^6b^3)\,6a^2b^3=18a^6b^4-24a^7b^5+30a^8b^6$$

3º Caso.— Seja o polynomio P para multiplicar pelo polynomio P'.

Podendo os dous polynomios ser representados respectivamente pelas expressões a—b e c—d, a questão fica reduzida a multiplicar a primeira expressão pela segunda.

A multiplicação indica-se do seguinte modo:

$$(a-b)\ (c-d)$$

Se multiplicarmos a—b por *c*, o producto será ac—bc; mas multiplicando a—b por *c*, multiplica-se a—b por uma quantidade augmentada de *d*, e por isso o producto vem augmentado de a—b multiplicado por *d*, ou de ad—bd; para termos o producto pedido, devemos tirar ad—bd de ac—bc, e teremos

$$(a-b)\ (c-d)=ac-bc-ad+bd$$

Do resultado se conclue a seguinte

Regra.— *Multiplica-se todo o multiplicando pelos diversos termos do multiplicador, e sommam-se os productos parciaes, reduzindo depois os termos semelhantes.*

Ficou ao mesmo tempo demonstrada a seguinte regra dos signaes: *Se dous termos tiverem os mesmos signaes, o producto tem signal mais; se os termos tiverem signaes differentes, o producto tem signal menos.*

Esta regra é applicavel aos dous primeiros casos.

Exemplo: $(3a^4b-4a^3b^2+5a^2b^3)\ (6a^5b^2-7a^4b^3+8a^3b^4)$.

$$\begin{array}{l} 3a^4b-4a^3b^2+5a^2b^3 \\ 6a^5b^2-7a^4b^3+8a^3b^4 \\ \hline 18a^9b^3-24a^8b^4+30a^7b^5- \\ \qquad -21a^8b^4+28a^7b^5-35a^6b^6+ \\ \qquad\qquad +24a^7b^5-32a^6b^6+40a^5b^7 \\ \hline 18a^9b^3-45a^8b^4+82a^7b^5-67a^6b^6+40a^5b^7 \end{array}$$

Observação.—No producto de dous polynomios ha sempre dous termos que não se reduzem, e são o primeiro e o ultimo, se os dous polynomios estiverem ordenados em relação a uma letra, isto é, se os termos dos dous polynomios se acharem dispostos de modo que os expoentes d'essa letra diminuam ou augmentem de termo em termo.

No exemplo considerado, os termos que não se reduzem são $18a^9b^3$ e $40a^5b^7$, pois só nelles a letra *a* tem os expoentes 9 e 5.

Divisão

63. Na divisão algebrica ha tres casos a considerar:

1º Caso: *Divisão de um monomio por outro monomio.*

2º Caso: *Divisão de um polynomio por monomio.*

3º Caso: *Divisão de um polynomio por polynomio.*

1º Caso. — Seja dado o monomio $72a^8b^7c^6d^5$ para ser dividido pelo monomio $9a^4b^2c^5$

Indicando a divisão, temos: $\frac{72a^8b^7c^6d^5}{9a^4b^2c^5}$

É facil ver que $\frac{72a^8b^7c^6d^5}{9a^4b^2c^5}=\frac{9\times 8.a^4.a^4.b^2.b^5.c^5.cd^5}{9a^4b^2c^5}=8a^4b^5cd^5$.

Do resultado segue-se a

Regra.—*Divide-se o coefficiente do dividendo pelo coefficiente do divisor, e escrevem-se as letras communs aos dous termos, dando a cada uma d'ellas um expoente igual ao excesso do expoente do dividendo sobre o do divisor, e bem assim as letras que entrarem só no dividendo com os seus respectivos expoentes.*

A regra dos signaes é a mesma da multiplicação.

2º Caso.— Seja dado o polynomio $35a^7b^6-40a^8b^7+30a^9b^8$ para ser dividido pelo monomio $5a^4b^3$.

O dividendo, sendo o producto do divisor pelo quociente, é o producto de um polynomio por um monomio ; e, como o producto de um polynomio por um monomio se obtem multiplicando cada termo do polynomio pelo monomio, segue-se que os diversos termos do dividendo resultaram da multiplicação do monomio divisor pelos diversos termos do polynomio quociente, termos que se obtêm, dividindo cada termo do dividendo pelo monomio divisor. O resultado será $7a^3b^3-8a^4b^4+6a^5b^5$.

REGRA PARA DIVIDIR UM POLYNOMIO POR UM MONOMIO.— *Divide-se cada termo do polynomio pelo monomio.*

3º CASO.— Dividir $18a^9b^3-45a^8b^4+82a^7b^5-67a^6b^6+40a^5b^7$ por $3a^4b-4a^3b^2+5a^2b^3$.

Dispondo os termos e procedendo á divisão, temos :

$$\begin{array}{l|l}
18a^9b^3-45a^8b^4+82a^7b^5-67a^6b^6+40a^5b^7 & 3a^4b-4a^3b^2+5a^2b^3 \\
\underline{-18a^9b^3+24a^8b^4-30a^7b^5} & \overline{6a^5b^2-7a^4b^3+8a^3b^4} \\
\quad -21a^8b^4+52a^7b^5-67a^6b^6+40a^5b^7 & \\
\quad \underline{21a^8b^4-28a^7b^5+35a^6b^6} & \\
\qquad 24a^7b^5-32a^6b^6+40a^5b^7 & \\
\qquad \underline{-24a^7b^5+32a^6b^6-40a^5b^7} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

DEMONSTRAÇÃO.— O dividendo, sendo o producto do polynomio divisor pelo quociente, tem pelo menos dous termos que não se reduziram, e esses dous termos são $18a^9b^3$ e $40a^5b^7$. O termo $18a^9b^3$ resultou da multiplicação do termo $3a^4b$ do divisor pelo termo correspondente do quociente, e se dividirmos esse termo do dividendo pelo do divisor, acharemos o primeiro termo do quociente $6a^5b^2$. Multiplicando esse termo do quociente pelo divisor e subtrahindo o producto do dividendo, depois de reduzidos os termos semelhantes, acharemos o primeiro resto $-21a^8b^4+52a^7b^5-67a^6b^6+40a^5b^7$.

Sendo o dividendo a somma reduzida dos productos parciaes que resultam da multiplicação do divisor pelos diversos termos do quociente, subtrahindo do dividendo o primeiro d'esses productos parciaes, o resto é a somma reduzida dos outros, ou é o producto do divisor pelo quociente, prescindindo do primeiro termo, e deve portanto ter pelo menos dous termos que não se reduziram com nenhum dos outros. Esses termos são $-21a^8b^4$ e $40a^5b^7$. O termo $-21a^8b^4$ resultou da multiplicação do termo $3a^4b$ do divisor pelo termo correspondente do

quociente ; dividindo pois $-21a^8b^4$ por $3a^4b$, acharemos o segundo termo do quociente $-7a^4b^3$, que multiplicado pelo divisor e esse producto subtrahido do primeiro resto, depois de reduzidos os termos semelhantes, dará para resultado o segundo resto $24a^7b^5-32a^6b^6+40a^5b^7$.

Considerando o segundo resto do mesmo modo que o primeiro, acharemos o terceiro termo do quociente.

Do exposto se deduz a

REGRA.— *Ordenam-se o dividendo e o divisor em relação a uma letra qualquer. Divide-se o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor ; multiplica-se o quociente pelo divisor ; subtrahe-se o producto do dividendo e reduzem-se os termos semelhantes.*

Divide-se o primeiro termo do resto pelo primeiro do divisor ; multiplica-se o quociente pelo divisor; subtrahe-se o producto do primeiro resto, e reduzem-se os termos semelhantes. Assim se continúa sempre até terminar a divisão.

DIVISIBILIDADE DOS NUMEROS

64. *A divisibilidade dos numeros tem por fim estabelecer principios por meio dos quaes podemos conhecer os divisores de um numero, assim como tambem achar o resto da divisão de um numero inteiro por outro, sem effectuar essa divisão.*

Antes de demonstrar os principios d'esta parte da Arithmetica, convém que sejam conhecidas as seguintes definições.

Numero primo é o numero sómente divisivel por si e pela unidade. Exemplos : 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.

Numero multiplo é o numero que tem um ou mais divisores differentes de si e da unidade. Exemplos : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, etc.

Numeros primos entre si são dous ou mais numeros que sómente têm por divisor commum a unidade.

Exemplos : 5, 7 e 13 ; 11, 15 e 18 ; 8, 9 e 15.

Os principios de divisibilidade dos numeros são :

65. 1º PRINCIPIO.— *Um numero dividindo as parcellas de uma somma, divide tambem a somma.*

Seja $S=A+B+C$ e D o numero que divide as parcellas A, B e C.

Se D divide A, B e C, os quocientes das divisões de A, B e C, por D são numeros inteiros, que podemos representar por q, q' e q'', e então

$$\frac{A}{D}=q \quad \frac{B}{D}=q' \quad \frac{C}{D}=q''$$

Por ser o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente,

$$A=Dq,\ B=Dq'\ C=Dq'';$$

sommando as tres igualdades ordenadamente, resulta

$$A+B+C=Dq+Dq'+Dq'';$$

substituindo no primeiro membro $A+B+C$ pelo seu valor S, e pondo em evidencia o factor commum D, no segundo membro, a ultima igualdade transforma-se em

$$S=D\ (q+q'+q'')$$

dividindo ambos os membros da ultima igualdade por D, temos

$$\frac{S}{D}=q+q'+q''$$

Ora q, q' e q'' sendo numeros inteiros, como quocientes das divisões exactas dos numeros A, B e C pelo numero D, fica o segundo membro sendo numero inteiro, e, por consequencia, D.

66. 2º Principio.— *Sendo uma somma composta de duas parcellas, se um numero dividir a somma e a uma das parcellas, dividirá tambem a outra parcella.*

Seja $S=A+B$, e D o numero que divide S e A.

Se D divide S e A, os quocientes das duas divisões são numeros inteiros, que podemos representar por q e q', e então

$$\frac{S}{D}=q \quad \frac{A}{D}=q'$$

Sendo o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente, temos:

$$S=Dq \quad A=Dq'$$

Subtrahindo a ultima igualdade da penultima ordenadamente, acha-se

$$S-A=Dq-Dq'$$

substituindo, no primeiro membro, $S-A$ pelo seu valor B, e pondo no segundo membro o factor commum D em evidencia, vem

$$B=D\ (q-q')$$

dividindo ambos os membros da ultima igualdade por D, resulta

$$\frac{B}{D}=q-q'$$

Sendo q e q' numeros inteiros, como quocientes das divisões exactas dos numeros S e A pelo numero D, fica o segundo membro sendo numero inteiro; por consequencia D divide B.

Se a somma fôr composta de mais de duas parcellas: *Se um numero dividir a somma e a uma das parcellas, dividirá a somma das outras parcellas.*

67. 3º Principio.—*Sendo uma somma composta de duas parcellas: se um numero dividir uma das duas parcellas e não dividir a outra, não dividirá tambem a somma. Os restos das divisões da somma e da parcella não divisivel por esse mesmo numero são iguaes.*

Seja $S=A+B$; D o numero que divide A e não divide B; q a parte inteira do quociente da divisão de B por D, e R o resto d'essa divisão.

Se D divide A, o quociente da divisão de A por D é um numero inteiro, que representaremos por Q, e teremos

$$\frac{A}{D}=Q$$

Se D não divide B, o quociente da divisão de B por D consta de duas partes; uma é um numero inteiro, que representamos por q, e a outra uma fracção propria que tem para denominador o divisor e para numerador o resto da divisão, que por hypothese é R, e resulta

$$\frac{B}{D}=q+\frac{R}{D}$$

Por ser o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente

$$A=DQ$$
$$B=Dq+R$$

Sommando as duas igualdades ordenadamente, temos

$$A+B=DQ+Dq+R$$

substituindo, no primeiro membro, $A+B$ pelo seu valor S, e pondo no segundo membro o factor commum D em evidencia, a ultima igualdade transforma-se em

$$S=D(Q+q)+R\ ;$$

dividindo ambos os membros da igualdade por D, resulta

$$\frac{S}{D}=Q+q+\frac{R}{D}$$

Ora, Q é um numero inteiro, por ser o quociente da divisão exacta de A por D ; *q* é um numero inteiro por ser a parte inteira do quociente da divisão de B por D, e $\frac{R}{D}$ é uma fracção propria por ser a fracção que completa o quociente da divisão de B por D ; a somma de dous numeros inteiros é um numero inteiro, fica, pois, o segundo membro sendo um numero fraccionario, e por consequencia D não divide S.

Se o quociente da divisão de S por D consta de duas partes : se uma d'ellas é um numero inteiro Q+q, e se a outra é uma fracção propria que tem para denominador o divisor, o numerador R é o resto da divisão, e portanto o resto da divisão de S por D é igual ao resto da divisão de B por D.

68. 4º PRINCIPIO.—*Se um numero dividir a um dos factores de um producto, divide tambem o producto.*

Este principio póde ainda ser enunciado do seguinte modo :

Um numero dividindo a um outro, divide tambem a qualquer multiplo d'esse outro.

Seja AB o producto e D o numero que divide A.

Se D divide A, o quociente da divisão de A por D é um numero inteiro, que representaremos por Q, e teremos

$$\frac{A}{D}=Q$$

Por ser o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente

$$A=DQ$$

multiplicando ambos os membros da igualdade pelo numero inteiro B, vem

$$AB=BDQ$$

dividindo ambos os membros da igualdade por D, resulta

$$\frac{AB}{D}=BQ$$

B é um numero inteiro por hypothese, Q tambem é um numero inteiro, por ser o quociente da divisão exacta de A por D, e sendo o pro-

ducto de dous numeros inteiros um numero inteiro, fica o segundo membro da igualdade sendo numero inteiro, e por consequencia D divide o producto AB.

69. 5º PRINCIPIO.—*Se um numero fôr divisivel por outro, é tambem divisivel pelos factores d'esse outro.*

Seja N o numero divisivel pelo numero D, e supponhamos D=abc.

Se N é divisivel por D, o quociente da divisão de N por D é um numero inteiro ; representando esse numero inteiro por *q*, teremos

$$\frac{N}{D}=q$$

Por ser o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente,

$$N=Dq$$

substituindo D pelo seu valor *abc* vem

$$N=abcq$$

dividindo ambos os membros da igualdade successivamente por *a*, *b*, *c*, resulta

$$\frac{N}{a}=bcq,\ \frac{N}{b}=acq,\ \frac{N}{c}=abq$$

Sendo *a*, *b* e *c* numeros inteiros, como factores do numero inteiro D, e *q* tambem numero inteiro por ser o quociente da divisão exacta de N por D, ficam os segundos membros das tres igualdades sendo numeros inteiros, e por consequencia N é divisivel por *a*, por *b* e por *c*.

Theoria dos restos

CARACTERES DE DIVISIBILIDADE

70. Antes de tratar da theoria dos restos e dos caracteres de divisibilidade, convém demonstrar o seguinte

PRINCIPIO.—*Toda a potencia de 10 é um producto dos factores primos 2 e 5 elevados á mesma potencia.*

Trata-se, pois, de demonstrar que $10^m=2^m\times5^m$.

Com effeito :

$$10^m=10\times10\times10\times\ldots\times10=2\times5\times2\times5\times2\times5\times\ldots$$
$$\ldots\times2\times5=2^m\times5^m.$$

Os principios mais importantes da theoria dos restos são:

71. 1º Principio.—*O resto da divisão de um numero inteiro qualquer por 10^m, é o numero formado pelos* m *ultimos algarismos do numero dado.*

Demonstração.—O numero dado póde sempre ser decomposto em duas partes, uma terminada por m zeros, e a outra formada pelos m ultimos algarismos. A primeira parte é divisivel por 10^m, e a segunda, sendo menor que essa potencia de 10, é necessariamente o resto da divisão.

D'este principio deduz-se a seguinte:

Consequencia.—Se o ultimo algarismo de um numero for zero, será esse numero divisivel por 10, e portanto tambem por 2 e 5, que são factores de 10.

Se os dous ultimos algarismos de um numero forem zeros, esse numero é divisivel por 10^2 e por consequencia pelos factores d'esse numero 2^2 e 5^2.

Se os tres ultimos algarismos de um numero forem zeros, esse numero é divisivel por 10^3, e portanto pelos seus factores 2^3 e 5^3.

Se, finalmente, o numero terminar por m zeros, é divisivel por 2^m e 5^m.

72. 2º Principio.—*O resto da divisão de um numero inteiro qualquer por 2 ou por 5, é igual ao resto da divisão do numero formado pelo ultimo algarismo do numero dado pelos mesmos numeros 2 e 5.*

Demonstração.— Um numero inteiro qualquer póde sempre ser decomposto em duas partes, uma d'ellas terminada por um zero e a outra formada pelo ultimo algarismo. Sendo a primeira parte divisivel por 2 ou 5, segue-se que o resto da divisão do numero dado por um d'esses numeros é igual ao resto da divisão da segunda parte por esses mesmos numeros.

Consequencia.— *Para que um numero seja divisivel por 2 ou por 5, é necessario e sufficiente que o ultimo algarismo represente um numero divisivel por 2 ou por 5.*

Os numeros divisiveis por 2 chamam-se *pares*; e os não divisiveis, *impares*.

A formula geral dos numeros pares é $2n$; e a dos numeros impares, $2n+1$ ou $2n-1$, sendo n um inteiro qualquer.

73. 3º Principio.— *O resto da divisão de um numero inteiro qualquer por 2^2 ou 5^2 é igual ao resto da divisão do numero formado pelos dous ultimos algarismos do numero dado por esses mesmos numeros.*

Demonstração.— Podemos sempre decompôr um numero inteiro qualquer em duas partes, uma d'ellas terminada por dous zeros, e a outra formada pelos dous ultimos algarismos.

Sendo a primeira parte divisivel por 2^2 ou 5^2, segue-se que o resto da divisão do numero dado por um d'esses numeros é igual ao resto da divisão da segunda parte por esses mesmos numeros.

Consequencia.— *Um numero é divisivel por 2^2 ou 5^2, se os dous ultimos algarismos formarem um numero divisivel por 2^2* ou 5^2. Esta condição é necessaria e sufficiente.

74. 4º Principio.— *O resto da divisão de um numero inteiro qualquer por 2^3 ou 5^3 é igual ao resto da divisão do numero formado pelos tres ultimos algarismos do numero dado por esses mesmos numeros.*

Demonstração.— Um numero inteiro qualquer póde sempre ser decomposto em duas partes, uma terminada por tres zeros, e a outra formada pelos tres ultimos algarismos. Sendo a primeira parte divisivel por 2^3 ou 5^3, resulta que o resto da divisão do numero dado por um d'esses numeros é igual ao resto da divisão da segunda parte por esses mesmos numeros.

Consequencia.—*Para que um numero seja divisivel por 2^3 ou 5^3, é necessario e sufficiente que os tres ultimos algarismos d'esse numero formem um numero divisivel por 2^3 ou 5^3.*

75. 5º Principio.—*O resto da divisão de um numero inteiro qualquer por 2^m ou 5^m é igual ao resto da divisão do numero formado pelos* m *ultimos algarismos d'esse numero pelos mesmos numeros 2^m ou 5^m.*

Demonstração.—Seja qual fôr o numero que se considere, elle póde ser decomposto em duas partes, uma d'ellas terminada por m zeros e a outra formada pelos m ultimos algarismos. Sendo a primeira parte divisivel por 2^m ou 5^m, o resto da divisão do numero considerado por esses numeros é igual ao resto da divisão da segunda parte por esses mesmos numeros.

Consequencia.—*Um numero é divisivel por 2^m ou por 5^m, se os* m *ultimos algarismos d'esse numero formarem um numero divisivel por 2^m ou 5^m.* Esta condição é necessaria e sufficiente.

76. 6º PRINCIPIO.—*O resto da divisão de um numero inteiro qualquer por 9 é igual ao resto da divisão do numero formado pela somma dos valores absolutos dos algarismos do numero dado, pelo mesmo numero 9.*

A demonstração d'este principio depende das seguintes proposições:

PRIMEIRA.—*Uma potencia qualquer de 10 é um multiplo de 9 mais um.*

Porque, seja qual fôr o numero que se considere composto sómente de noves, elle é evidentemente divisivel por 9, e juntando a esse numero uma unidade o resultado será uma potencia de 10.

SEGUNDA.—*Um numero sendo formado de algarismo significativo seguido de um numero qualquer de zeros, é igual a um multiplo de 9 mais o numero representado por esse algarismo.*

Com effeito, o numero dado, seja qual fôr, póde ser decomposto em tantas parcellas, potencias de 10, quantas forem as unidades do numero representado pelo algarismo significativo; e como cada uma das parcellas é um multiplo de 9 mais 1, segue-se que o numero dado é igual a um multiplo de 9 mais um numero composto de tantas unidades quantas forem as parcellas ou quantas forem as unidades do numero representado pelo algarismo significativo.

TERCEIRA.— *Um numero inteiro qualquer é igual a um multiplo de 9 mais a somma dos valores absolutos de seus algarismos.*

Com effeito, $78654=70000+8000+600+50+4$

Mas

$$70000=m.\ 9+7$$
$$8000=m.\ 9+8$$
$$600=m.\ 9+6$$
$$50=m.\ 9+5$$
$$4=\quad 4$$

Sommando as igualdades ordenadamente, temos

$$78654=m.9+(7+8+6+5+4),$$

ou ainda

$$78654=m.9+30$$

sendo 30 a somma dos valores absolutos dos algarismos do numero 78654.

Se um numero inteiro qualquer póde sempre ser decomposto em duas partes, uma d'ellas sendo um multiplo de 9 e a outra a somma dos valores absolutos de seus algarismos, e se a primeira parte é divisivel por 9, é claro que o resto da divisão do numero dado por 9 é igual ao resto da divisão da segunda parte por esse mesmo numero.

CONSEQUENCIA.— *Para que um numero seja divisivel por 9, é necessario e sufficiente que a somma dos valores absolutos dos algarismos d'esse numero seja um numero divisivel por 9.*

77. 7º PRINCIPIO.— *O resto da divisão de um numero inteiro qualquer por 3 é igual ao resto da divisão do numero formado pela somma dos valores absolutos dos algarismos do numero dado, por esse mesmo numero 3.*

DEMONSTRAÇÃO.— Sendo 9 multiplo de 3, podemos dizer que um numero inteiro póde sempre ser decomposto em duas partes, sendo uma d'ellas um multiplo de 3, e a outra a somma dos valores absolutos dos algarismos. A primeira parte sendo divisivel por 3, o resto da divisão do numero dado por 3 é igual ao resto da divisão da segunda parte por esse mesmo numero.

CONSEQUENCIA.—*Um numero é divisivel por 3, se a somma dos valores absolutos dos algarismos d'esse numero fôr um numero divisivel por 3.* Esta condição é necessaria e sufficiente.

78. 8º PRINCIPIO.— *O resto da divisão de um numero por 11 é igual ao resto da divisão do excesso da somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar, a partir da direita, sobre a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par, por esse mesmo numero 11.*

Esta proposição é dependente das seguintes:

Uma potencia qualquer de 10 é igual a um multiplo de 11 mais ou menos 1 : mais, se a potencia fôr par; e menos, se fôr impar.

$$10=11-1$$
$$100=99+1=90+9+1=9\ (11-1)\ +9+1=$$
$$=9\times11-9+9+1=m.\ 11+1$$
$$1000=999+1=900+90+9+1=9\ (m\ 11+1)+$$
$$+9\ (11-1)\ +9+1=9\times m.\ 11+9+9\times11-$$
$$-9+9+1=9\times m.\ 11+9\times11+$$
$$+10=m.\ 11-1$$
$$10000=9999+1=9000+900+90+9+1=$$
$$=9\ (m.\ 11-1)\ +9\ (m.\ 11+1)\ +9\ (11-1)\ +9+$$
$$+1=9\times m.\ 11-9+9\times m.\ 11+9+$$
$$+9\times11-9+9+1=m.\ 11+1$$

e assim successivamente.

Do principio demonstrado, deduz-se que :

Um numero inteiro formado por um algarismo significativo, seguido de um numero qualquer de zeros, é igual a um multiplo de 11 mais ou menos o numero formado por esse algarismo significativo: mais, se o numero de zeros fôr par; e menos, se fôr impar.

Assim

$$20 = \text{m. } 11 - 2$$
$$300 = \text{m. } 11 + 3$$
$$4000 = \text{m. } 11 - 4$$
$$50000 = \text{m. } 11 + 5$$

Sabendo-se que

$$72856 = 70000 + 2000 + 800 + 50 + 6$$

e sendo

$$70000 = \text{m. } 11 + 7$$
$$2000 = \text{m. } 11 - 2$$
$$800 = \text{m. } 11 + 8$$
$$50 = \text{m. } 11 - 5$$
$$6 = \phantom{\text{m. } 11} 6$$

resulta, sommando as igualdades ordenadamente,

$$72856 = \text{M. } 11 + (7 + 8 + 6) - (2 + 5)$$

Fica, pois, o numero 72856 decomposto em duas partes, a primeira é divisivel por 11, por ser multiplo d'esse numero; se a segunda parte não fôr divisivel por 11, a somma não será tambem divisivel por esse numero, e os restos das divisões da somma e da parte não divisivel por esse mesmo numero são iguaes; o que demonstra a proposição primitiva.

CONSEQUENCIA.—*Para que um numero seja divisivel por 11, é necessario que seja divisivel por esse numero o excesso da somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar, a contar da direita, sobre a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par.*

Se a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem impar fôr menor que a somma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par, junta-se á primeira somma o numero 11 ou um multiplo d'esse numero.

Provas dos noves das quatro operações

Pelo principio estabelecido no n. 76, podemos sempre achar o resto da divisão de um numero inteiro qualquer por 9, sommando os valores absolutos dos algarismos d'esse numero e dividindo essa somma por 9.

Em logar de proceder pelo modo indicado, podemos dividir por 9 ou desprezar successivamente 9, á medida que se fôr sommando os valores absolutos dos algarismos. Assim, para achar o resto da divisão do numero 472856 por 9, ou para tirar os 9 d'esse numero, diremos: quatro mais sete são onze, tirando nove ficam dous; dous mais dous são quatro, quatro mais oito são doze, tirando nove, ficam tres; tres mais cinco são oito, oito mais seis são quatorze, tirando nove, ficam cinco. O resto 5 é o que achariamos se sommassemos os valores absolutos de todos os algarismos e dividissemos essa somma por 9, como é facil verificar.

Prova da addição

79. *Tiram-se os noves ás parcellas e separadamente á somma. Os restos devem ser iguaes.*

DEMONSTRAÇÃO.—Seja $S = A + B + C$.

Os numeros A, B e C podendo ser decompostos em duas partes, sendo uma d'ellas um multiplo de 9, e a outra a somma dos valores absolutos dos algarismos de cada um d'elles; se chamarmos 9a, 9b e 9c esses multiplos de 9, e s, s', s'' as sommas dos valores absolutos dos algarismos nas tres parcellas, teremos

$$S = 9a + s + 9b + s' + 9c + s'';$$

pondo em evidencia os multiplos de 9, resulta

$$S = 9(a + b + c) + s + s' + s''$$

Se a somma S fica decomposta em duas partes, a primeira sendo divisivel por 9, por ser multiplo d'esse numero, e a segunda sendo a somma dos valores absolutos de todos os algarismos das parcellas, segue-se que o resto da divisão da somma por 9 é igual ao resto da divisão da segunda parte por esse mesmo numero.

Prova da subtracção

80. Seja M o minuendo, S o subtrahendo e R o resto.

A subtracção tendo por fim, dada a somma de dous numeros e um d'elles, achar o outro, segue-se que o minuendo é a somma do subtrahendo com o resto. Para tirar, pois, a prova da subtracção, *tiram-se os noves ao subtrahendo e ao resto, e em separado ao minuendo. Os dous restos devem ser iguaes.*

Prova da multiplicação

81. *Tiram-se os noves ao multiplicando e ao multiplicador; multiplicam-se os dous restos, e tiram-se os noves ao resultado; tirando depois os noves do producto, os restos devem ser iguaes.*

DEMONSTRAÇÃO.—Seja A o multiplicando e B o multiplicador, AB será o producto.

O multiplicando podendo ser decomposto em duas partes, uma d'ellas um multiplo de 9, e a outra o resto da divisão do multiplicando por 9, teremos

$$A=9Q+R;$$

raciocinando do mesmo modo em relação ao multiplicador, resulta

$$B=9Q'+R'$$

Multiplicando as duas igualdades ordenadamente, temos

$$AB=9^2QQ'+9Q'R+9QR'+RR'$$

ou ainda

$$AB=9(9QQ'+Q'R+QR')+RR'$$

Logo o resto da divisão do producto AB por 9 é igual ao resto da divisão por 9 do producto RR' dos restos que se obtêm tirando os 9 do multiplicando e multiplicador.

Prova da divisão

82. Se a divisão fôr exacta, *tiram-se os noves ao divisor e ao quociente; multiplicam-se os dous restos e tiram-se os noves do resultado, e o resto deve ser igual ao resto que se obtem tirando os noves do dividendo*, porque o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente.

Se a divisão não fôr exacta, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pela parte inteira do quociente, mais o resto da divisão.

Chamando, pois, D o dividendo, *d* o divisor, Q a parte inteira do quociente, e R o resto da divisão, temos

$$D=dQ+R$$

Se *r* e *r'* forem os restos das divisões de dQ e R por 9, resulta

$$dQ=m.\ 9+r$$
$$R=m'.\ 9+r'$$

Sommando as duas igualdades ordenadamente, vem

$$dQ+R=m.\ 9+m'.\ 9+r+r'$$

ou

$$D=M\ 9+(r+r')$$

O resto da divisão de D por 9 é igual ao resto da divisão de r+r' pelo mesmo numero 9.

Para tirar, portanto, a prova da divisão na hypothese de não ser ella exacta: *tiram-se os noves ao divisor e ao quociente; multiplicam-se os dous restos; somma-se o producto com o resto da divisão; tiram-se os noves ao resultado, e o resto deve ser igual ao resto que se obtem tirando os noves do dividendo.*

THEORIA DO MAXIMO DIVISOR COMMUM

83. *Maximo divisor commum a dous ou mais numeros é o maior numero que divide exactamente a esses dous ou mais numeros.*

A demonstração do processo para achar o maximo divisor commum a dous numeros depende dos tres principios seguintes, já demonstrados.

1º *Um numero dividindo um outro, divide tambem a qualquer multiplo d'esse outro.*

2º *Um numero dividindo as parcellas de uma somma, divide tambem a somma.*

3º *Um numero dividindo a somma de duas parcellas e a uma d'ellas, divide tambem a outra parcella.*

Considerando que o dividendo é uma somma de duas parcellas, a saber, o producto do quociente pelo divisor e o resto, costuma-se enunciar o 2º e o 3º principios da seguinte fórma:

2º *Todo numero que divide o menor de dous numeros dados e o resto da divisão do maior pelo menor, divide tambem o maior.*

3º *Todo numero que divide dous numeros dados, tambem divide o resto da divisão do maior d'elles pelo menor.*

84. Tratemos, pois, de estabelecer a regra para achar o maximo divisor commum a dous numeros.

Sejam A e B esses dous numeros e supponhamos $A>B$.

Se B dividir A, será B o maior divisor commum dos dous numeros dados.

Com effeito, B dividindo A e a si mesmo, fica dividindo aos dous numeros dados e portanto sendo divisor commum. É o maior, porque um numero maior que B poderá quando muito dividir A, mas não B, por não poder ser o dividendo menor que o divisor, na hypothese de ser a divisão exacta. Vejamos, pois, se B divide A.

Supponhamos que a divisão não seja exacta, e represente-se por Q a parte inteira do quociente e por R o resto da divisão. D'essa hypothese resulta a igualdade.

$$(1) \qquad A=BQ+R$$

Se R dividir B, será R o maior divisor commum aos dous numeros dados.

Com effeito, R dividindo B, divide BQ, por ser um multiplo de B, e dividindo a si mesmo, fica dividindo as parcellas de uma somma e portanto divide a somma A; dividindo A e B, é divisor commum aos dous numeros dados. É o maior; porque se um numero maior que R dividisse A e B, esse numero tinha de dividir BQ, e dividindo uma somma composta de duas parcellas e uma d'ellas, tinha de dividir a outra R; mas um numero maior que R não podendo dividir R exactamente, o maior divisor commum a A e B não póde exceder de R. Será R, se R dividir B.

Supponhamos que a divisão não seja exacta, e representemos por Q' a parte inteira do quociente e por R' o resto da divisão. D'essa hypothese resulta a igualdade

$$(2) \qquad B=RQ'+R'$$

Se R' dividir R, será R' o maior divisor commum aos dous numeros dados.

Com effeito, R' dividindo R, dividirá RQ', e como R' divide a si mesmo, fica dividindo as parcellas de uma somma, e portanto divide a somma B; dividindo B, divide BQ, e como por hypothese divide R, torna a dividir as parcellas de uma somma (igualdade n. 1) e portanto divide a somma A; mas dividindo A e B é divisor commum aos dous numeros dados. É o maior, porque se um numero maior que R' dividisse A e B, dividindo B tinha de dividir BQ, e por dividir A e BQ ficava dividindo uma somma composta de duas parcellas e uma d'ellas, portanto tinha de dividir a outra parcella R; dividindo R, tinha de dividir RQ', e como por hypothese divide B, torna de novo a dividir a uma somma composta de duas parcellas e a uma d'ellas, portanto tem de dividir a outra parcella R'; mas um numero maior que R' não póde dividir exactamente R'; por consequencia o maior divisor commum procurado não póde exceder de R'. Será R', se R' dividir a R.

Suppondo que da divisão de R por R', a parte inteira do quociente seja Q'' e o resto da divisão R'', resultará a igualdade

$$(3) \qquad R=R'Q''+R''$$

Raciocinando do mesmo modo se concluirá a seguinte

REGRA.—*Divide-se o maior numero pelo menor. Se a divisão fôr exacta, o menor numero será o maior divisor commum. Se houver resto, divide-se o menor numero pelo resto; se houver um segundo resto, divide-se o primeiro resto pelo segundo, e assim por diante até não haver mais resto. O ultimo divisor ou o ultimo resto é o maior divisor commum.*

EXEMPLO:

Achar o divisor commum aos numeros 4896 e 872.

	5	1	1	1	1	2	8
4896	872	536	336	200	136	64	8
536	336	200	136	64	8	0	

O numero 8 é o maior divisor commum aos dous numeros.

85. Considerando as igualdades achadas no numero precedente

$$A=BQ+R$$
$$B=RQ'+R'$$
$$R=R'Q''+R''$$

e suppondo que um numero D divide A e B, esse numero dividirá R, R' e R''.

Com effeito, o numero D dividindo B, divide BQ; e dividindo A e BQ, divide R; dividindo R, divide RQ'; e se divide B e RQ', tem de dividir R'; dividindo R' tem de dividir R'Q'', e como divide R, tem de dividir R''.

Do exposto se conclue o seguinte

PRINCIPIO.—*Todo divisor de dous numeros divide os restos que resultarem do processo do maximo divisor commum applicado a esses dous numeros.*

Sendo o maior divisor commum a dous numeros o ultimo resto, segue-se que

Todo divisor de dous numeros divide ao maximo divisor commum d'esses dous numeros.

86. Vejamos agora o processo para achar o maximo divisor commum a mais de dous numeros.

Esse processo basea-se no seguinte lemma: *O maior divisor commum a muitos numeros não se altera substituindo dous ou mais d'entre elles pelo seu maior divisor commum.*

Consideremos, em primeiro logar, os tres numeros A, B e C.

Representemos por D o maior divisor commum a A e B, e por D' o maior divisor commum a D e C. Será D' o maior divisor commum aos numeros A, B e C.

Com effeito, D' dividindo D, divide seus multiplos A e B, e por consequencia é divisor commum de A, B e C. É o maior, porque o maior divisor commum de A, B e C divide D, maior divisor commum de A e B (n. 85), e pela mesma razão divide D', maior divisor commum de D e C, e por isso não póde ser maior que D'. É, pois, D' o maior divisor commum aos numeros A, B e C.

Sejam os numeros A, B, C e E.

Representemos por D'' o maior divisor commum de D' e E. Será D'' o maior divisor commum aos numeros A, B, C e E.

Com effeito, D'' dividindo D', divide seus multiplos D e C; dividindo D, divide seus multiplos A e B, e por isso é divisor commum aos numeros A, B, C e E. É o maior, porque o maior divisor commum aos numeros A, B, C e E divide D, maior divisor commum de A e B; dividindo D, divide D', maior divisor commum a D e C, e dividindo D' divide D'', maior divisor commum de D' e E, e por consequencia não

póde ser maior que D''. Será, pois, D'' o maior divisor commum aos numeros A, B, C e E.

Do exposto segue-se que para achar o maximo divisor commum a mais de dous numeros, deve-se empregar a seguinte

REGRA.—*Procura-se o maior divisor commum aos dous primeiros numeros; depois o maior divisor commum ao maior divisor commum dos dous primeiros numeros e do terceiro; e depois o maior divisor commum d'esse ultimo maior divisor commum e do quarto numero; e assim por diante até o ultimo.*

EXEMPLO:

Achar o maior divisor commum aos numeros 720, 420 e 138.

Procurando o maior divisor commum aos numeros 720 e 420.

	1	1	2	2
720	420	300	120	60
300	120	60	0	

Procurando o maior divisor commum aos numeros 138 e 60, maior divisor commum de 720 e 420

	2	3	3
138	60	18	6
18	6	0	

O numero 6, maior divisor commum de 138 e 60, é o maior divisor commum aos tres numeros dados.

Do exposto se conclue o seguinte

PRINCIPIO.—*O numero que divide outros divide tambem o maior divisor commum a esses numeros.*

Com effeito, para achar o maior divisor commum aos numeros A, B, C e E, procura-se:

o m. d. c. a A e B, seja D;

o m. d. c. a D e C, seja D';

o m. d. c. a D' e E, seja D''.

Ora, todo numero que dividir os numeros propostos A, B, C e E, dividirá D (principio do n. 85). Dividindo C, por hypothese, dividirá tambem D' (mesmo principio). Dividindo, por hypothese, E, dividirá tambem D'', que é o maior divisor commum aos numeros dados.

87. Se, procurando o maior divisor commum de dous ou mais

numeros, acharmos a unidade, esses dous ou mais numeros são primos entre si.

EXEMPLO:

Achar o maior divisor commum aos numeros 873 e 317.

	2	1	3	15	1	1	2
873	317	239	78	5	3	2	1
239	78	5	28	2	1	0	
			3				

O maior divisor commum aos dous numeros dados é a unidade e os dous numeros são primos entre si.

No exemplo precedente, tendo-se achado para resto o numero primo 5, que não divide o resto antecedente 78, era inutil continuar o processo, pois deviamos logo por essa circumstancia considerar os numeros dados primos entre si.

Com effeito, o maior divisor commum aos dous numeros, tendo de dividir os restos que resultam do processo empregado, deve dividir a 239, 78 e 5, e não póde deixar de ser 5 ou 1; e como 5 não divide o resto 78, é elle necessariamente 1, e os dous numeros são primos entre si.

Propriedades do maior divisor commum

1ª *Quando se multiplicam ou dividem dous ou mais numeros por um mesmo factor, o maior divisor commum fica multiplicado ou dividido por esse mesmo factor.*

Com effeito, o maior divisor commum não é mais do que o ultimo resto que serviu de divisor em uma das divisões successivas a que conduz o processo usual, e sabemos que quando se multiplicam ou dividem o dividendo e o divisor por um mesmo numero, o resto fica multiplicado ou dividido por esse mesmo numero.

2ª *Os quocientes das divisões de dous ou mais numeros, respectivamente, pelo seu maior divisor commum, são numeros primos entre si.*

É uma consequencia da 1ª propriedade. Com effeito, se o maior divisor commum aos numeros A, B e C, fôr D, o maior divisor commum

aos numeros $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ e $\frac{C}{D}$ será $\frac{D}{D}=1$; logo esses quocientes são numeros primos entre si.

A reciproca tambem é verdadeira e enuncia-se do seguinte modo: *Se dividirmos dous ou mais numeros por um outro numero tal que os quocientes respectivos sejam numeros primos entre si, o divisor empregado será o maior divisor commum aos numeros dados.*

3ª *O maximo divisor commum a dous ou mais numeros é o producto dos factores primos communs a esses dous ou mais numeros affectados dos menores expoentes que nelles existirem.*

Sejam os numeros 1800 e 3780.

O numero $1800=2^3\times3^2\times5^2$

O numero $3780=2^2\times3^3\times5\times7$.

Trata-se de demonstrar que o maximo divisor commum é $2^2\times3^2\times5$ ou o numero 180.

Com effeito, o numero 180 é divisor do numero 1800 por não conter divisores primos differentes dos que entram na composição d'esse numero, não tendo os factores primos do numero 180 expoentes maiores que os expoentes dos factores primos respectivos do numero 1800; sendo pela mesma razão o numero 180 divisor de 3780, segue-se que esse numero é divisor commum aos numeros 1800 e 3780.

É o maior divisor commum, porque sendo

$$\frac{1800}{180}=\frac{2^3\times3^2\times5^2}{2^2\times3^2\times5}=2\times5,$$

$$\frac{3780}{180}=\frac{2^2\times3^3\times5\times7}{2^2\times3^2\times5}=3\times7.$$

os quocientes das duas divisões são numeros primos entre si.

Esta propriedade, vulgarmente designada—*Composição do maior divisor commum*, fornece um novo processo para achar o maior divisor commum a dous ou mais numeros. Basta, para isso, decompôr os numeros dados em seus factores primos, e effectuar o producto de todos aquelles que fôrem communs aos numeros dados, dando a cada um d'esses factores communs o menor expoente que tiver.

Na theoria dos numeros primos aprenderemos a decompôr um numero qualquer em seus factores primos.