

dades negativas menores do que 0 e tanto menores quanto maiores forem seus valores absolutos.

De facto, foi esta a interpretação dada por muito tempo ás quantidades negativas e ainda hoje se encontram em muitos compendios *desequaldades* taes como $(-5) < 0$; $(-4) > (-5)$ etc.

Tal interpretação, porem, não tem mais razão de ser, desde que se attenda á inversão dos termos da subtracção e consequente opposição de sentido dos resultados, como ficou exposto linhas acima.

Assim, nas successivas subtracções que effectuamos, temos, desde $4-0=4$ até $4-4=0$, um minuendo constante 4 e um subtrahendo variavel crescendo desde 0 até 4; donde restos successivamente decrescentes desde 4 até 0.

Sendo, porem, o subtrahendo uma parte do minuendo, não pode tomar valores superiores ao deste; e desde que se tenha $4-5=-1$, $4-6=-2$ etc, comprehende-se a inversão de papeis dos termos da subtracção, passando o termo constante 4 de minu-

Alguem, segundo Pereira (Major Manoel da Silva Pereira — *Elementos de Algebra*—Bahia—1868) sustentando que as quantidades negativas são menores do que 0 e tanto menores quanto maiores forem seus valores absolutos, disse que taes quantidades não devem ser consideradas no caso de multiplicação.

«A isto tambem poderemos responder, diz espirituosamente o illustre professor, que taes quantidades não devem ser consideradas no caso de somma: temos, para tanto, igual direito». E continúa:—«Demais se as quantidades negativas são menores do que cifra e se sempre desprezamos cifra quando somada a qualquer quantidade, com mais forte razão devemos desprezar as quantidades negativas em presença das positivas. Assim $a+(-b)$ deve reduzir-se a a ; $c+(-d)$ ou $c-(-d)$ deveria reduzir-se a c , o que assim não é».

Raciocinio é este que me parece de grande força, somente comparavel a este outro do Dr. José Faustino: «..... se zero exprime a mesma idéa que o nada, se por zero entende-se o nada com referencia ás grandezas, isto é, a não existencia de grandeza alguma, como conceber que possam existir grandezas menores do que zero?» E adiante: «Portanto ou o zero não é zero, ou não podemos conceber, por absurda, a idéa de cousa alguma menor do que zero».

endo a subtrahendo e dando-se o contrario com o termo variavel.

E como, conservando-se constante o subtrahendo, o resto cresce ou decresce com o minuendo, os resultados (-1) , (-2) , (-3) etc. vão successivamente crescendo e não decrescendo, como parecia á primeira vista.

Por demais elementares as noções até aqui adquiridas sobre as quantidades negativas, são entretanto sufficientes para comprehensão de algumas partes deste trabalho em que tenhamos de as empregar.

Consulte-se, para maior desenvolvimento, a obra citada do Dr. José Faustino. *Memoria sobre as quantidades negativas*—Ceará—1902.

D'Alembert estabelece a seguinte proporção: $1 : (-1)$:: $(-1) : 1$ e diz:— Se $(-1) < 0$, com mais forte razão, sendo $+1 > 0$, será $(-1) < +1$. Ora, sendo incontestavel a existencia da proporção estatuida, visto como o producto dos extremos é igual ao producto dos meios; e sendo, como deve ser, $-1 < +1$ (visto admittir-se $-1 < 0$) será preciso, para que haja proporção, que o segundo consequente seja menor do que o seu antecedente e pois deverá ser $1 < -1$, o que é absurdo, pois já tinhamos $1 > -1$.

«Este argumento de d'Alembert, diz Pereira, origina uma dificuldade: si -1 não é menor do que 1 , será -1 maior do que 1 . Ora, sendo o primeiro consequente maior do que o seu antecedente, será necessario, para que haja proporção, que seja o segundo consequente maior do que o seu antecedente, isto é, $1 > -1$, o que é absurdo, pois já tinhamos $1 < -1$. Assim a tal proporção de d'Alembert prova que não pode ser $-1 > 1$ nem $-1 < 1$ e portanto se deveria deduzir $-1 = 1$, o que não pode ser». E acrescenta: «A proporção estabelecida do seguinte modo faz desaparecer o absurdo notado por d'Alembert: $1 : -1 :: 1 : -1$, porque sendo $-1 < 1$ na primeira razão, na segunda se verifica a mesma cousa».

Entretanto, a proporção de d'Alembert $1 : -1 :: -1 : 1$, provando que não deve ser $1 < (-1)$ e nem $(-1) < 1$, não diz que se deva ter $(-1) = 1$; bastará que se considerem equivalentes $+1$ e (-1) , segundo a opinião do Dr. José Faustino que me parece preferivel.

Complementos arithmeticos

Complemento arithmetico de um numero é o que falta a este numero para completar uma unidade de ordem immediatamente superior á maior que elle encerra; ou a differença entre elle e a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos d'elle.

Para termos o complemento arithmetico do numero 547, faremos $1000 - 547 = 453$. 453 é o complemento procurado. Obtem-se facilmente o complemento de um numero subtrahindo de 10 seu primeiro algarismo da direita e de 9 todos os mais (V. pag. 53).

Supponhamos agora a seguinte subtracção: —
7428—2437. Sendo 7563 o complemento arithmetico de 2437, teremos tambem $2437 = 10000 - 7563$; e substituindo:

$$\begin{aligned} 7428 - 2437 &= 7428 - (10000 - 7563) = 7428 - 10000 + \\ &+ 7563 = (7428 + 7563) - 10000 = 14991 - 10000 = \\ &= 4991. \end{aligned}$$

Deste modo o resto da subtracção 7428—2437 se obtem sommando ao minuendo o complemento arithmetico do subtrahendo e ao resultado subtrahendo uma unidade da ordem em que foi tomado o complemento (dezenas de milhares, neste caso). Assim se simplifica a subtracção, transformando-a em uma addição.

O emprego dos complementos arithmeticos é de real vantagem quando o subtrahendo é uma somma indicada como no exemplo seguinte:

(7428+8375+274) — (2375+5232+1375); porque então teremos, empregando os complementos arithmeticos:

$$\begin{aligned} (7428+8375+274) - (2375+5232+1375) &= (7428 + \\ &+ 8375 + 274) - 2375 - 5232 - 1375 = (7428 + 8375 + \\ &+ 274) - (10000 - 7625) - (10000 - 4768) - (10000 - \end{aligned}$$

$$-8625) = (7428 + 8375 + 274) - 10000 + 7625 - 10000 + \\ + 4768 - 10000 + 8625 = (7428 + 8375 + 274) + (7625 + \\ + 4768 + 8625) - 30000.$$

Ora, 7625, 4768, 8625 são os complementos arithméticos de 2375, 5232 e 1375; e para ter o resultado da subtração proposta somámos ao minuendo o complemento de cada uma das parcelas do subtrahendo e ao resultado subtrahimos tantas unidades da ordem em que foram tomados os complementos quantos foram estes; assim:

Minuendo	$\begin{array}{r} 7428 \\ 8375 \\ 274 \\ \hline 7625 \\ 4768 \\ 8625 \\ \hline 37095 \end{array}$	-	$\begin{array}{r} 2375 \\ 5232 \\ 1375 \\ \hline \end{array}$	Subtrahendo
	$\begin{array}{r} 7625 \\ 4768 \\ 8625 \\ \hline 37095 \end{array}$			Complementos das parcelas do subtrahendo
	$\begin{array}{r} 37095 \\ -3 \\ \hline 7095 \end{array}$			Somma

—3 Unidades da ordem em q' foram tomados os *cl.*

7095 Resto procurado.

Seja ainda $87416 - (3472 + 17 + 625 + 32 + 517 + 45 + 389)$.

Sommando ao minuendo os complementos arithméticos das parcelas do subtrahendo, temos:

87416	Minuendo
6528	<i>cl.</i> de 3472
83	<i>cl.</i> de 17
375	<i>cl.</i> de 625
68	<i>cl.</i> de 32
483	<i>cl.</i> de 517
55	<i>cl.</i> de 45
611	<i>cl.</i> de 389

95619 Somma.

133 A subtrahir.

82319 Numero procurado.

Como se vê, neste e em casos semelhantes, ha o inconveniente de termos depois que subtrahir á somma unidades de ordens differentes, desaparecendo assim a vantagem do artificio. No exemplo proposto subtrahimos á somma 95619 uma dezena de milhar correspondente ao complemento de 3472; tres milhares correspondentes aos complementos de 625, 517 e 389; e tres centenas correspondentes aos complementos dos outros numeros.

Removeremos esse inconveniente, suppondo ás parcellas do subtrahendo o mesmo numero de ordens, o que equivale a suppormos 0017 em logar de 17, 0625 em logar de 625; e então empregaremos os complementos com todas as suas vantagens.

Operando vem:

87416	Minuendo
6528	<i>cl.</i> de 3472
9983	<i>cl.</i> de 0017
9375	<i>cl.</i> de 0625
9968	<i>cl.</i> de 0032
9483	<i>cl.</i> de 0517
9955	<i>cl.</i> de 0045
9611	<i>cl.</i> de 0389
<hr/> 152319	Somma.
7	A subtrahir 7 dez. de mil. correspondentes aos 7 complementos.
<hr/> 82319	Numero procurado.



III Multiplicação

Já vimos como se effectua uma addição de muitas parcellas, $5+7+9+8+3+\dots$

Neste caso as parcellas podem ser numeros differentes, como no exemplo proposto, ou ainda eguaes como em $7+7+7+7+\dots$

E' deste caso particular de addição que nos vamos occupar; no qual, como se vê, se trata de repetir a mesma parcella 7 um certo numero de vezes.

Seja 5 este numero de vezes e teremos:

$$7+7+7+7+7=35$$

O numero 35 forma-se, portanto, do numero 7 pela repetição deste 5 vezes; e este modo de formação do numero 35 por meio dos numeros 5 e 7 chama-se *multiplicação*.

Definiremos, pois, multiplicação a operação que tem por fim repetir um numero tantas vezes quantas são as unidades de outro.

E' esta uma definição elementar que não abrange todas as questões de multiplicação, e que por isso teremos necessidade de modificar, o que faremos em logar proprio.

O numero que tem de ser repetido, 7 no nosso exemplo, chama-se *multiplicando*; o que indica quantas vezes deve ser repetido o multiplicando chama-se *multiplicador*; o resultado da multiplicação *producto*; dando-se a denominação de *factores* ao multiplicando e ao multiplicador.

Empregando qualquer dos signaes da multiplicação (*V. Signaes*), a relação

$$7+7+7+7+7=35$$

deve ser indicada

$$7 \times 5 = 35$$

$$\text{ou } 7 \cdot 5 = 35 \text{ (*)}$$

A pratica da multiplicação, neste caso mais simples nenhum processo especial exige; trata-se de uma addição de numeros simples, a qual se effectua como em logar proprio ficou indicado. Alem disso é facil conservar de memoria os resultados da operação neste caso, resultados que se obtêm ainda por meio da seguinte

TABOA DA MULTIPLICAÇÃO.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

(*) Se os numeros fossem representados de um modo geral por a , b , p , a relação $a \times b = p$ poder-se-ia indicar simplesmente $ab = p$; escrevendo os factores um em seguida ao outro sem signal; pois não temos aqui que considerar valores relativos dos algarismos.

Para construir a taboa, escrevem-se os nove primeiros numeros em sua ordem natural, de 1 a 9, os quaes constituem a primeira linha horisontal; sommando cada um desses numeros consigo mesmo, obtêm-se os numeros correspondentes da segunda linha; a somma de cada um destes com o que lhe corresponde na primeira linha, constitue o correspondente da terceira; dahi por diante, formada uma linha qualquer, a somma de cada um dos numeros que a constituem com o que lhe corresponde na primeira, é o numero correspondente da linha seguinte.

Para obter por meio da taboa o producto de dois numeros, 7×5 por exemplo, procura-se um dos factores, 7, na primeira linha horisontal, o outro, 5, na primeira columna á esquerda e, no encontro da columna encimada pelo primeiro com a linha horisontal ^{da} meçada pelo segundo, está o producto procurado; convindo notar que o mesmo producto encontraríamos se, em lugar de proceder como temos feito, procurassemos o factor 5 na primeira linha horisontal e o factor 7 na primeira columna á esquerda.

Se, em lugar de dois factores, tivessemos tres ou mais, $7 \times 5 \times 3 \times 8 \times 4 \dots$ o producto desses numeros seria o resultado obtido multiplicando-se o primeiro factor pelo segundo, o producto obtido pelo terceiro, o novo producto pelo quarto e assim por diante até o ultimo factor.

Esta operação, entretanto, conduz immediatamente a um numero composto e por isso examinaremos depois. Passemos agora a estudar este caso mais complexo de multiplicação:—a multiplicação de um numero composto por um simples.

Seja, por exemplo, 3478×7 .

Ainda aqui, sendo 7 o multiplicador, é praticavel o processo empregado no primeiro caso (espon-taneo), porque temos $3478 \times 7 = 3478 + 3478 + 3478 + 3478 + 3478 + 3478 + 3478$; poderemos, entretanto, obter mais rapidamente o resultado por outro meio

que constitue, para a multiplicação, o methodo de systematisação e a characterisa, fazendo della uma operação á parte, distincta da addição da qual se deriva.

Com effeito, empregando o processo espontaneo e effectuandô, temos :

$$\begin{array}{r}
 3478 \\
 3478 \\
 3478 \\
 3478 \\
 3478 \\
 3478 \\
 3478 \\
 \hline
 24346
 \end{array}$$

Examinando o que temos feito, notaremos que as unidades de 24346 foram obtidas repetindo-se 7 vezes as unidades de 3478; que as dezenas, as centenas, os milhares de 24346 se obtiveram do mesmo modo, repetindo 7 vezes as dezenas, as centenas, os milhares de 3478 e attendendo ás reservas.

A primeira dessas operações parciaes pertence ao primeiro caso de *multiplicação* e teremos $7 \times 8 = 56$ unidades; quanto ás outras conduzi-las-emos ao primeiro caso, lembrando que repetir 7 dezenas é repetir o valor absoluto 7 e dar ao resultado o valor relativo de dezenas; repetir 4 centenas ou 3 milhares é repetir o valor absoluto 4 ou 3 e dar ao resultado o valor relativo de centenas ou de milhares; pois que se trata de uma addição e a somma representa unidades da mesma ordem das parcellas; salvo formarem-se com ellas unidades de ordem superior.

Deste modo, a questão que estudamos fica decomposta nas quatro questões simples seguintes:

- 1.^a Repetir 7 vezes as unidades do multiplicando: $8 \times 7 = 56$ unidades.
- 2.^a Repetir 7 vezes as dezenas do multiplicando: $7 \times 7 = 49$ dezenas.

3.^a Repetir 7 vezes as centenas do multiplicando: $4 \times 7 = 28$ centenas.

4.^a Repetir 7 vezes os milhares do multiplicando: $3 \times 7 = 21$ milhares.

O producto procurado consta de 56 unidades, 49 dezenas, 28 centenas e 21 milhares; e como 56 unidades fazem 6 unidades e 5 dezenas, reuniremos estas ultimas ás 49 do producto correspondente, obtendo assim 54 dezenas ou 4 dezenas e 5 centenas que, com as 28 centenas, fazem 33, isto é, 3 centenas e 3 unidades de milhares, as quaes, reunidas ás unidades desta ordem, fazem 24 milhares; obtendo-se o resultado 24346.

Na pratica estas reservas são immediatamente levadas para a ordem a que pertençam, tornando-se a operação tão rapida quanto possível.

Dá-se ao calculo a seguinte disposição:

$$\begin{array}{r} 3478 \\ 7 \\ \hline 24346 \end{array}$$

e começando pela direita, diz-se: 7 vezes 8 são 56 (escreve-se 6) vão 5; 7 vezes 7 são 49 e 5 são 54 (escreve-se 4) vão 5; 7 vezes 4 são 28 e 5 são 33 (escreve-se 3) vão 3; 7 vezes 3 são 21 e 3 são 24 (escreve-se 24).

Poderíamos começar a operação pela esquerda; tal modo de proceder traria, porem, os inconvenientes notados na addição, como se vê no seguinte exemplo:

$$\begin{array}{r} 3478 \\ 7 \\ \hline 21896 \\ 245 \\ \hline 23246 \\ 11 \\ \hline 24346 \end{array}$$

Poderíamos ainda considerar o caso em que o multiplicando fosse um numero simples e o multiplicador composto; este porem se reduz ao precedente pela inversão da ordem dos factores, como teremos occasião de ver. (Propriedades—Theorema I).

Passemos pois ao caso mais complexo da multiplicação de numeros inteiros—aquele em que os dois factores são numeros compostos—e seja 7423×589 , onde o ultimo numero é o multiplicador.

Se no caso precedente, em que o multiplicador era um numero simples, a operação poderia ser effectuada pelo processo espontaneo, a questão que actualmente nos occupa não admite o emprego immediato desse processo, segundo o qual teriamos de praticar uma addição de 589 parcellas eguaes a 7423, operação por demais longa e fatigante e que por isso mesmo tornaria inevitavel o erro.

Poderemos, porem, decompor a questão em outras mais simples, as quaes, por sua vez, serão conduzidas ao caso fundamental e ahi applicado o processo espontaneo.

Vejamos como. Dada uma addição de muitas parcellas, é sempre possível distribuí-las em grupos, sommar separadamente esses grupos e reunir depois os resultados; e este modo de proceder de forma alguma alterará a somma procurada (Propriedades da addição—Theorema II).

Attendendo a isto, distribuiremos as 589 parcellas da addição proposta em tres grupos, a saber: um de 9 parcellas, um de 80 e o terceiro de 500 parcellas; ficando a questão dada decomposta nas tres seguintes:

$$\begin{array}{l} 1.^a - 7423 \times 9 \\ 2.^a - 7423 \times 80 \\ 3.^a - 7423 \times 500 \end{array}$$

A primeira destas questões pertence ao segundo caso estudado, e, portanto, sabemos resolvê-la. Quanto ás outras duas que parece não pertence-

rem ao segundo caso, visto como 500 e 80 são números compostos, notemos que, sendo $80 = 8 \times 10$, será $7423 \times 80 = 7423 \times 8 \times 10$, producto que se obtem multiplicando 7423 por 8 e o resultado por 10; assim como, sendo $500 = 5 \times 100$, será $7423 \times 500 = 7423 \times 5 \times 100$, producto que se obtem multiplicando 7423 por 5 e o resultado por 100.

As operações 7423×8 e 7423×5 pertencem ao segundo caso; e para multiplicar o primeiro producto por 10 e o segundo por 100, isto é, para tornar o primeiro producto 10 vezes maior e o segundo maior 100 vezes, bastará escrever um zero á direita do primeiro e dois zeros á direita do segundo, em consequencia do que ficou dito quando tratámos da numeração escripta (pag. 25); e teremos:

$$\begin{array}{l} 1.^a \text{ Questão } 7423 \times 9 = 66807 \\ 2.^a \text{ Questão } 7423 \times 80 = 7423 \times 8 \times 10 = 593840 \\ 3.^a \text{ Questão } 7423 \times 500 = 7423 \times 5 \times 100 = 3711500 \\ \text{Somma dos tres resultados } \quad \quad \quad 4372147 \end{array}$$

Examinando o que temos feito, notaremos que 66807 é o producto do multiplicando 7423 pelo algarismo 9 das unidades do multiplicador; que 593840 ou 59384 dezenas é o producto que se obtem multiplicando 7423 pelo algarismo 8 das dezenas do multiplicador e dando ao resultado o valor relativo de dezena; que 3711500 ou 37115 centenas é o resultado que se obtem multiplicando 7423 pelo algarismo 5 das centenas do multiplicador e dando ao producto obtido o valor relativo de centena, isto é, para obter esses resultados — PRODUCTOS PARCIAES — multiplicamos o multiplicando successivamente pelo algarismo de cada ordem do multiplicador, dando ao producto obtido o valor relativo dessa ordem. Finalmente 4372147, PRODUCTO TOTAL, é a somma dos productos parciaes obtidos.

Na pratica é dispensavel escrever á direita de cada producto os zeros que lhe dão valor relativo

conveniente: bastará escrever seu primeiro algarismo da direita na columna da ordem de unidades que elle deva representar, dispondo o calculo do seguinte modo:

$$\begin{array}{r} 7423 \\ 589 \\ \hline 66807 \\ 59384 \\ 37115 \\ \hline 4372147 \end{array}$$

Escrepto o multiplicador abaixo do multiplicando, começamos pela direita, formando o producto de todo o multiplicando pelo algarismo das unidades do multiplicador e teremos 66807; passando em seguida ao algarismo das dezenas do multiplicador, multiplicaremos por elle o multiplicando e o producto obtido, 59384, devendo representar dezenas, será escripto de modo que o seu primeiro algarismo da direita occupe esta ordem; finalmente o producto 37115 do multiplicando pelo algarismo das centenas do multiplicador, devendo ter o valor relativo de centenas, será escripto de modo que o seu primeiro algarismo da direita occupe a columna respectiva.

Obtidos e assim dispostos os productos parciaes, sua somma 4372147 é o producto total procurado.

Este modo de proceder é geral; applicavel mesmo ao caso em que o multiplicador contenha zeros intercalados, como em 28475×5009 ; notando-se unicamente que, sendo $28475 \times 0 = 0$, restam-nos apenas dois productos parciaes a formar, correspondentes aos dois algarismos significativos do multiplicador. Obtido, pois, o producto 256275 do multiplicando pelo algarismo das unidades do multiplicador, prescindiremos dos zeros que occupam as ordens das dezenas e centenas deste factor e, passando ao algarismo 5 dos milhares, multiplicaremos por este algarismo o multiplicando, dando ao producto obtido o valor re-

lativo de milhares, isto é, escrevendo seu primeiro algarismo da direita na ordem dos milhares.

Dispondo o calculo e praticando como ficou indicado, vem

$$\begin{array}{r} 28475 \\ 5009 \\ \hline 256275 \\ 142375 \\ \hline 142631275 \end{array}$$

Temos operado sempre da direita para a esquerda, o que é de real vantagem quanto ao multiplicando, pois, de outro modo, não poderíamos ter em vista as reservas, havendo o inconveniente notado no segundo caso. E', entretanto, indifferente começar por este ou aquelle algarismo do multiplicador, uma vez que, na disposição dos productos parciaes, attendamos ao valor relativo, de modo que as unidades da mesma ordem fiquem todas na mesma columna, como se vê nos seguintes exemplos:

$$\begin{array}{r} 7423 \\ 589 \\ \hline 37115 \\ 59384 \\ 66807 \\ \hline 4372147 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7423 \\ 589 \\ \hline 59384 \\ 37115 \\ 66807 \\ \hline 4372147 \end{array}$$

Operação começada pela esquerda dos dois factores.

$$\begin{array}{r} 7423 \\ 589 \\ \hline 35005 \quad) \quad 1.^{\circ} \text{ producto parcial} \\ 211 \quad) \\ \hline 56264 \quad) \quad 2.^{\circ} \quad " \quad " \\ 312 \quad) \\ \hline 63687 \quad) \quad 3.^{\circ} \quad " \quad " \\ 312 \quad) \\ \hline 3260047 \\ 11121 \\ \hline 4372147 \quad \text{Producto total.} \end{array}$$

Em resumo.

Ha, na multiplicação de numeros inteiros, tres casos que considerar:

1.º Multiplicação de um numero simples por outro simples.

2.º Multiplicação de um numero composto por um simples.

3.º Multiplicação de um numero composto por outro composto.

A multiplicação origina-se, como caso particular, da addição; da qual não se distingue por nenhum processo particular, em quanto se trata de multiplicar um numero simples por outro tambem simples. O resultado se obtem repetindo o multiplicando como parcella tantas vezes quantas forem as unidades do multiplicador. E' o *processo espontaneo*.

No segundo caso, o processo espontaneo é ainda applicavel; torna-se, entretanto, mais rapida a operação, decompondo a questão em outras do primeiro caso e resolvendo cada uma destas como ficou indicado. Este modo de proceder, que distingue a multiplicação da addição, fazendo della uma operação á parte, é o *methodo de systematisação*.

No terceiro caso, o processo espontaneo já não pode ser immediatamente applicado; a questão é resolvida, como ficou exposto, pelo methodo de systematisação.

OBSERVAÇÃO.— Considerando como caso distincto a multiplicação de um numero simples por um composto, dever-se-ia proceder como no caso de dois numeros compostos, dando ao calculo a disposição seguinte:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 4069 \\ \hline 63 \\ 42 \\ 28 \\ \hline 28483 \end{array}$$

$$a \times n = p$$

ou
$$p = a + a + a + a \dots + a \quad (*)$$

(n vezes)

Augmentando de b unidades cada uma das parcelas da somma p , a somma ficará augmentada de tantas vezes b unidades quantas forem as parcelas (Propriedades da addição—Th. IV—corol.—); e como ha n parcelas, a somma p ficará augmentada de n vezes b unidades ou de $b \times n$; e então será:

$$(a+b) \times n = p + b \times n$$

e por ser $p = a \times n$

vem
$$(a+b) \times n = a \times n + b \times n.$$

Se as parcelas fossem tres, $a+b+c$, fariamos $a+b=m$; e então teriamos

$$(a+b+c) \times n = (m+c) \times n = m \times n + c \times n$$

e sendo $m = a+b$

vem
$$(a+b+c) \times n = (a+b) \times n + c \times n = a \times n + b \times n + c \times n.$$

E deste modo reduziremos qualquer caso ao de duas parcelas.

Corollario:—Multiplica-se uma somma por outra, multiplicando cada parcella da primeira successivamente pelas da segunda e sommando os resultados.

Fazendo, em $(a+b) \times n = a \times n + b \times n$, $n = c+d$,

vem:
$$(a+b) \times (c+d) = a \times (c+d) + b \times (c+d)$$

(*) Escreve-se simplesmente $a + a + a + a \dots + a$; indicando n o numero de parcelas.

e effectuando os productos indicados no segundo membro

$$(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d.$$

THEOREMA IV. Multiplica-se por um numero o resultado de uma subtracção, multiplicando por esse numero o minuendo e o subtrahendo e subtrahindo o segundo producto do primeiro.

Sejam $a-b$ a subtracção indicada e n o numero. Formando o producto de a por n e representando-o por p , vem

$$p = a \times n$$

$$p = a + a + a + a \dots + a \quad (n)$$

Subtrahindo agora b unidades a cada uma das parcelas de p , a somma ficará diminuida de tantas vezes b unidades quantas forem as parcelas; e por serem estas em numero de n , ficará a somma diminuida de n vezes b unidades ou do producto de b por n , (Pag. 57—2.^a Observação) isto é,

$$(a-b) \times n = p - b \times n$$

e sendo
vem

$$(a-b) \times n = a \times n - b \times n$$

Corollario:—Multiplicam-se entre si os resultados de duas subtracções, multiplicando cada termo da primeira successivamente pelos da segunda e, da somma dos productos dos minuendos e dos subtrahendos, subtrahindo os productos dos minuendos pelos subtrahendos.

Se, em $(a-b) \times n = a \times n - b \times n$, fizermos $n = c - d$,
vem $(a-b) \times (c-d) = a \times (c-d) - b \times (c-d)$
e como $a \times (c-d) = a \times c - a \times d$
e $b \times (c-d) = b \times c - b \times d$
teremos $(a-b) \times (c-d) = (a \times c - a \times d) - (b \times c - b \times d) =$
 $= (\text{Th. IV de subtracção}) = a \times c - a \times d - b \times c + b \times d =$
 $= a \times c + b \times d - a \times d - b \times c.$

THEOREMA V

Multiplica-se por uma somma o resultado de uma subtracção, multiplicando cada parcella da somma successivamente pelos termos da subtracção e, da somma dos productos dominuendo, subtrahindo os de subtrahendo.

Fazendo em $(a+b) \times n$, $n = c - d$ vem:

$(a+b) \times n = a \times n + b \times n = a \times (c-d) + b \times (c-d)$
e por ser $a \times (c-d) = a \times c - a \times d$
e $b \times (c-d) = b \times c - b \times d$
vem $(a+b) \times (c-d) = (a \times c - a \times d) + (b \times c - b \times d) = a \times$
 $\times c - a \times d + b \times c - b \times d = a \times c + b \times c - a \times d - b \times d.$

THEOREMA VI. Juntando-se ou subtrahindo-se a um dos factores de um producto um numero, o producto vem augmentado ou diminuido do producto desse numero pelo outro factor.

Seja $a \times b = p$. Sommando ou subtrahindo m unidades ao factor a , obtem-se

$$(a \pm m) \times b = a \times b \pm m \times b = p \pm m \times b$$

THEOREMA VII. Multiplica-se um numero por um producto, multiplicando esse numero successivamente por todos os factores do producto.

Seja n o numero a multiplicar pelo producto $a \times b$.

Sendo $a \times b = a + a + a + \dots + a$ ^(b)

teremos $n \times (a \times b) = n \times (a + a + a + \dots + a)$ ^(b)

ou $n \times (a \times b) = n \times a + n \times a + n \times a + \dots + n \times a$ ^(b)

ou ainda $n \times (a \times b) = (n \times a) \times b.$

O caso em que haja um producto de tres factores $a \times b \times c$, conduz-se facilmente ao precedente, por que sendo

$$a \times b \times c = a \times b + a \times b + a \times b + \dots + a \times b$$
 ^(c)

vem $n \times (a \times b \times c) = n \times (a \times b + a \times b + a \times b + \dots + a \times b)$ ^(c)

ou $n \times (a \times b \times c) = n \times a \times b + n \times a \times b + n \times a \times b + \dots$

ou ainda $n \times (a \times b \times c) = (n \times a \times b) \times c.$

E assim conduziremos qualquer caso ao de dois factores.

THEOREMA VIII. Multiplica-se um producto por um numero, multiplicando qualquer dos factores por esse numero.

Sejam a e b os factores do producto p .

Se multiplicarmos por m o multiplicando a , teremos tornado m vezes maior cada uma das parcelas e portanto m vezes maior a somma dessas parcelas que é o producto p ; multiplicando por m o multiplicador b , teremos tornado m vezes maior o nu-

mero de parcellas eguaes e portanto m vezes maior a somma dessas parcellas que é o producto p .

THEOREMA IX. Multiplicam-se entre si dois productos de qualquer numero de factores, formando o producto de todos esses factores.

Seja $a \times b \times c$ a multiplicar por $m \times n$.
Sendo $m \times n = m + m + m + m \dots (n)$

$$\text{vem } (a \times b \times c) \times (m \times n) = (a \times b \times c) \times (m + m + m + m \dots + m \dots + m) \quad (n)$$

$$\text{ou } (a \times b \times c) \times (m \times n) = a \times b \times c \times m + a \times b \times c \times m \dots \dots \dots + a \times b \times c \times m \quad (n)$$

ou ainda $(a \times b \times c) \times (m \times n) = a \times b \times c \times m \times n$
producto constante seja qual for a ordem dos factores.

Corollario: — Multiplicam-se numeros terminados por zeros, prescindindo dos zeros finais, e, á direita do producto dos numeros resultantes, escrevendo todos os zeros.

Porque em 34700×2500 temos: $34700 = 347 \times 100$
e $2500 = 25 \times 100$
donde $34700 \times 2500 = (347 \times 100) \times (25 \times 100) = 347 \times 25 \times 100 \times 100 = (347 \times 25) \times (100 \times 100) = 8675 \times 10000 = 86750000$.

OBSERVAÇÃO. Uma expressão da forma $an \pm bn \pm cn$ pode sempre escrever-se $(a \pm b \pm c) \times n$, pondo-se em evidenci o factor n . Esta transformação é ás vezes vantajosa e nós teremos occasião de a encontrar neste livro.

IV Divisão

A questão inversa da que acabámos de estudar é resolvida pela DIVISÃO que se define:—a operação que tem por fim, dados um producto de dois factores e um delles, determinar o outro.

Mas um producto de dois factores contem um delles tantas vezes quantas são as unidades do outro; um producto de dois factores pode ser decomposto em tantas partes eguaes a um delles, quantas unidades o outro contem. A divisão, pois, resolve os dois problemas:—determinar quantas vezes um numero contem outro; dividir um numero em partes eguaes e tantas quantas forem as unidades de outro.

O producto e o factor dado recebem respectivamente os nomes de *dividendo* e *divisor*; o resultado da operação chama-se *quociente*.

Seja a principio determinar quantas vezes 35 contem 7 ou dividir 35 em 7 partes eguaes.

Examinando a primeira questão, reconhecemos que de dois modos é possível resolvê-la: subtraindo 7 de 35 tantas vezes quantas for possível; sommando 7 consigo mesmo até fazer 35 ou o numero que mais se approxime de 35.

Pelo primeiro processo temos: $35 - 7 = 28$; $28 - 7 = 21$; $21 - 7 = 14$; $14 - 7 = 7$; $7 - 7 = 0$; e como de 35 é possível subtrahir 5 vezes o numero 7, o quociente é 5, numero de vezes que o dividendo contem o divisor, e teremos: $35 \div 7 = 5$ (*)

O segundo processo dá: $7 + 7 = 14$; $14 + 7 = 21$;

(*) A divisão pode tambem ser indicada por um traço horisontal escrevendo-se acima o dividendo e abaixo o divisor.

$21+7=28$; $28+7=35$; e como, para fazer 35, tivemos que sommar 5 parcelas eguaes a 7, 5 é o quociente, o numero de vezes que 35 contem 7. Porem sommar 7 consigo mesmo até fazer 35 é o mesmo que multiplicar 7 pela serie dos numeros inteiros até obter aquelle producto; e assim teremos: $7 \times 1 = 7$; $7 \times 2 = 14$; $7 \times 3 = 21$; $7 \times 4 = 28$; $7 \times 5 = 35$. 5 é o numero que, multiplicado por 7, faz 35; é o factor procurado, o quociente da divisão de 35 por 7.

Estudando a segunda questão, reconhecemos que a solução pedida depende ainda do emprego dos mesmos processos; pois que o numero 35 será dividido em 7 partes eguaes como segue.

Dando para cada uma das partes que se querem formar, uma unidade, o numero 35 ficará desfalcado de 7 unidades e teremos $35-7=28$; augmentando de uma unidade cada uma das partes, o numero existente 28 ficará ainda desfalcado de 7 e, portanto, quando cada uma das partes tiver 2, o numero dado estará reduzido a $28-7=21$.

Continuando a operação, juntaremos mais uma unidade a cada uma das 7 partes, de sorte que ficarão estas com $2+1=3$ unidades e o numero dado reduzir-se-á a $21-7=14$.

Proseguindo do mesmo modo, teremos o quociente $3+1=4$ e o numero dado reduzido a $14-7=7$; e, finalmente, augmentando de uma unidade cada uma das 7 partes, ficarão estas com $4+1=5$ unidades e o numero proposto reduzido a $7-7=0$.

Pelo segundo processo a questão se resolve assim. Suppondo successivamente 1, 2, 3, 4, 5 unidades para cada uma das 7 partes, a reunião destas será $7 \times 1 = 7$; $7 \times 2 = 14$; $7 \times 3 = 21$; $7 \times 4 = 28$; $7 \times 5 = 35$. 5 é, pois, o numero de unidades que deve ter cada parte, para que a reunião dellas seja 35; 5 é o numero procurado.

Nem sempre, porem, o dividendo é um producto exacto do divisor inteiro pelo quociente inteiro; sejam, por exemplo, 37 o dividendo e 7 o divisor.

Para determinar quantas vezes o dividendo 37 contem o divisor 7, teremos, pelo primeiro processo: $37-7=30$; $30-7=23$; $23-7=16$; $16-7=9$; $9-7=2$; e portanto 37 contem 5 vezes o divisor 7 e mais 2 unidades (*resto da divisão*).

O segundo processo dar-nos-ia: $7 \times 1 = 7$; $7 \times 2 = 14$; $7 \times 3 = 21$; $7 \times 4 = 28$; $7 \times 5 = 35$; e como $37 = 35 + 2$, segue-se que o dividendo contem o divisor 5 vezes e mais 2 unidades.

Para dividir o numero 37 em 7 partes eguaes, os mesmos processos conduzir-nos-iam aos mesmos resultados.

Entretanto, o quociente 5 (inteiro) não responde com precisão á questão; não é um quociente exacto.

Para o completar continuemos a operação. Do resto 2 tomemos uma unidade e dividamo-la em 7 partes eguaes; cada uma dessas partes será $\frac{1}{7}$ e, quando o quociente contiver 5 unidades e mais $\frac{1}{7}$, o dividendo estará reduzido a $2-1=1$. Dividindo ainda esta ultima unidade em 7 partes eguaes, teremos mais $\frac{1}{7}$ para reunir ao quociente, e então o dividendo estará reduzido a $1-1=0$, quando o quociente contiver 5 unidades e mais 2 vezes a setima parte da unidade, isto é, quando o quociente for o numero mixto $5\frac{2}{7}$.

E' o que se chama *quociente completo*; o qual se obtem, como acabamos de ver, juntando ao quociente inteiro uma fracção que tenha para numerador o resto da divisão e para denominador o divisor.

Do estudo que temos feito, conclue-se que, neste caso mais simples, em que o divisor é um numero simples e bem assim o quociente, a divisão não possui processo algum particular; resolvemos a questão, ou por subtracções successivas, e então a divisão não é

mais do que uma applicação ou um caso particular da subtracção; ou por multiplicações successivas, visto como a divisão é uma operação inversa da multiplicação.

Entretanto, é facil conservar de memoria os resultados de divisões neste caso, resultados que, aliás, se encontram facilmente por meio da taboa da multiplicação.

Vejamos como. Representando por x a parte inteira do quociente de 35 por 7, deveremos ter $x \times 7 = 35$, quando a divisão se fizer exactamente; sendo, se o contrario se der, $x \times 7$ o producto de 7 mais proximo de 35.

Na primeira hypothese, se fossem conhecidos os factores, a determinação de seu producto por meio da taboa seria feita como ficou indicado quando tratámos dessa operação; aqui, onde o producto é conhecido e a incognita um dos factores, procederemos inversamente. Procurando o factor 7 na primeira linha horisontal, percorreremos a columna vertical por elle começada até encontrar o producto 35; e, á esquerda deste, estará, na primeira columna, o factor procurado 5.

Na segunda hypothese, sejam 37 e 7 os numeros dados. Procedendo como anteriormente, procuraremos o factor 7 na primeira linha horisontal e percorreremos a columna por elle começada, verificando afinal que não existe nella o dividendo 37; e como o producto que mais proximo de 37 se encontra na referida columna é 35, tomaremos para parte inteira do quociente procurado o factor 5 que corresponde na taboa a este producto. O resto da divisão é $37 - 35 = 2$ e o quociente completo se obtem, juntando á parte inteira 5 a fracção $\frac{2}{7}$ que tem para numerador o resto da divisão e para denominador o divisor.

Assim temos resolvido a questão neste caso mais

simples. Os processos empregados não podem, porem, ser immediatamente applicados quando o quociente seja um numero composto, ainda mesmo sendo simples o divisor; como, por exemplo, se o dividendo e o divisor (*termos da divisão*) forem respectivamente 50345 e 8.

A simples inspecção dos dois numeros permite reconhecer que não se trata mais do caso simples; pois que suppondo para quociente 10, o menor numero composto, a existencia deste quociente indicaria que o dividendo poderia conter o divisor 8 dez vezes ou o producto $8 \times 10 = 80$, o que, de facto, se dá.

Para determinar o quociente, teriamos, pois, que subtrahir do dividendo o divisor tantas vezes quantas fosse possivel, ou multiplicar o divisor pela serie dos numeros inteiros até formar o dividendo ou o numero que mais se lhe approxime; operação tanto menos praticavel quanto maior deva ser o quociente.

Procuremos pois resolver a questão por partes e para isto indaguemos qual seja a ordem mais elevada do quociente.

Esta ordem mais elevada será a dos milhares; porque, se o quociente fosse 10000, seu producto pelo divisor ou $8 \times 10000 = 80000$, deveria conter-se no dividendo, o que não se dá; ao passo que 8×1000 ou 8 unidades de milhares se contêm um certo numero de vezes no dividendo maior do que 8000.

Este numero de vezes que o dividendo contiver 8000 ou 8 unidades de milhares, será o numero de unidades desta ordem no quociente; e como unidades de milhares não podem ser contidas em ordens inferiores, poderemos prescindir destas e a questão se reduz a indagarmos quantas vezes os 50 milhares do dividendo contêm 8 milhares ou ainda quantas vezes 50 contem 8.

A questão é, deste modo, conduzida ao primeiro caso e teremos para quociente 6 milhares e para res-

to 2 milhares, os quaes, reunidos ás ordens de que prescindimos, fazem 2345 unidades.

Para determinar as centenas do quociente, notemos que ellas existirão, se o resto 2345 contiver o producto $8 \times 100 = 800$; e tantas vezes o numero 2345 contenha 800, quantas centenas existirão no quociente; e como 800, ou 8 centenas não podem ser contidas em ordens inferiores, prescindiremos destas e procuraremos quantas vezes 8 centenas se contêm nas 23 centenas de 2345, isto é, quantas vezes 23 contem 8.

Ainda aqui temos uma questão do primeiro caso; a qual, resolvida, nos dá para quociente 2 (centenas) e para resto 7 centenas que, reunidas ás ordens inferiores de que prescindimos, fazem o numero 745.

A determinação das dezenas do quociente ainda é conduzida, como as precedentes questões, ao 1.º caso; porque a existencia de dezenas no quociente indica que 745 contem um certo numero de vezes o producto $8 \times 10 = 80$; e como 80 ou 8 dezenas somente podem se conter nas 74 dezenas de 745, prescindiremos do algarismo 5 das unidades e indagaremos quantas vezes 74 dezenas contêm 8 dezenas ou quantas vezes 74 contem 8.

Assim procedendo, encontraremos para quociente 9 dezenas e para resto 2 dezenas ou 20 unidades que, com as 5 de que havíamos prescindido, fazem 25.

Finalmente estas 25 unidades deverão conter o divisor 8 tantas vezes quantas forem as unidades do quociente, isto é, 3 vezes, havendo o resto 1 que é o resto da divisão proposta.

Deste modo temos determinado as unidades de cada ordem do quociente 6293, conduzindo este caso de divisão ao primeiro pela decomposição da questão proposta nas quatro questões simples seguintes.

- 1.ª Determinar quantas vezes 50 milhares contêm 8 milhares ou quantas vezes 50 contem 8, isto é, dividir 50 por 8.

- 2.ª Determinar quantas vezes 23 centenas contêm 8 centenas ou 23 contem 8.
 - 3.ª Determinar quantas vezes 74 dezenas contêm 8 dezenas ou 74 contem 8.
 - 4.ª Determinar quantas vezes 25 contem 8.
- Os numeros 50, 23, 74 e 25 chamam-se dividendos parciais e ao calculo dá-se a disposição seguinte.

<i>dividendo</i>	50'345	<i>divisor</i>	8	6293	<i>Quociente.</i>
				6293	$\frac{1}{8}$ quoc. completo.
<i>50—1.º dividendo parcial.</i>		<i>Producto do divisor pelo 1.º alg. do quoc.</i>	48	23	
		<i>2.º dividendo parcial</i>		16	
		<i>Producto do divisor pelo 2.º alg. do quoc.</i>		74	
		<i>3.º dividendo parcial</i>		72	
		<i>Prod. do divisor pelo 3.º alg. do quoc.</i>		25	
		<i>4.º dividendo parcial</i>		24	
		<i>Prod. do divisor pelo 4.º alg. do quoc.</i>		1	
					<i>Resto da divisão</i>

Obtido cada algarismo do quociente, multiplicamo-lo pelo divisor e o producto subtrahimos do divi-

dendo parcial correspondente. A' direita do resto escrevemos o algarismo seguinte do dividendo dado, formando deste modo novo dividendo parcial (*).

A's vezes ha um dividendo parcial menor do que o divisor e que, por conseguinte, nem uma vez o contem; o que quer dizer que no quociente não ha unidades da ordem que se procura determinar. Escreve-se então zero no quociente, toma-se outro algarismo do dividendo e, formando assim novo dividendo parcial, continua-se a operação.

E' o que se encontra indicado no seguinte calculo por meio de caracteres diferentes.

$$\begin{array}{r|l}
 273668 & 9 \\
 27 & \\
 \hline
 036 & 30407 \\
 36 & \\
 \hline
 068 & \\
 63 & \\
 \hline
 5 &
 \end{array}$$

Estudemos finalmente o caso mais complexo: aquelle em que o divisor é um numero composto e bem assim o quociente; e seja, por exemplo, 604785 a dividir por 945.

Como no caso precedente, teremos que determinar o quociente por partes e reconhecemos que sua ordem mais elevada será a das centenas; pois

(1) A operação torna-se mais rapida, fazendo-se as multiplicações e as subtrações mentalmente e escrevendo só os resultados, como se vê em seguida:

$$\begin{array}{r|l}
 5794 & 9 \\
 39 & 643 \\
 34 & \\
 7 & \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

O producto do divisor pelo primeiro algarismo do quociente é $6 \times 9 = 54$; e o resto, $57 - 54 = 3$, escreve-se abaixo do dividendo parcial correspondente. A direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo proposto formando o segundo dividendo parcial; e abaixo deste a differença entre elle e o producto do divisor pelo segundo algarismo do quociente. E assim por diante até haver considerado o ultimo algarismo do dividendo.

que o dividendo contem um certo numero de vezes o divisor multiplicado por 100 ou 945 centenas; mas não contem o divisor multiplicado por 1000 ou 945 milhares.

Para determinar o algarismo das centenas do quociente, será necessario indagar quantas vezes o dividendo contem 945 centenas; e como centenas não podem ser contidas em ordens inferiores, poderemos prescindir destas e a questão se reduz a determinar quantas vezes as 6047 centenas do dividendo contem 945 centenas ou, o que é o mesmo, quantas vezes 6047 contem 945.

Esta questão seria resolvida por qualquer dos processos espontaneos; pois que, procurando-se determinar um algarismo do quociente, isto é, um numero simples, o numero de subtrações ou multiplicações successivas não seria tal que tornasse o processo impraticavel.

Não obstante, é preferivel resolvê-la do seguinte modo.

O numero de vezes que 6047 contem 945 será, no maximo, o numero de vezes que 6047 contenha as centenas (ordem mais elevada) de 945; e como centenas não podem ser contidas em ordens inferiores, teremos que indagar quantas vezes as 60 centenas do primeiro numero contem 9 centenas ou, o que tanto vale, quantas vezes 60 contem 9.

A questão é agora resolvida pelo primeiro caso e o resultado 6, que escreveremos no quociente, indica que 6047 pode conter 6 vezes e não mais o divisor 945. Como meio de verificação e para determinar o resto da divisão, se o quociente for verdadeiro, formaremos o producto do divisor por 6, subtrahindo de 6047 o resultado 5670, o que equivale a subtrahir 6 vezes o divisor.

Assim temos para quociente 6 centenas e para resto $6047 - 5670 = 377$ centenas, as quaes, reunidas ás ordens inferiores de que haviamos prescindido, completam o resto 37785.

Para determinar o algarismo das dezenas do quociente, notemos que ellas existirão se o resto 37785 contiver pelo menos 10 vezes o divisor ou 945 dezenas; e como dezenas somente poderão conter-se nas dezenas do numero proposto (37785), prescindiremos do algarismo 5 das unidades e a questão se reduz a determinar quantas vezes 3778 dezenas contêm 945 dezenas ou, o que é o mesmo, quantas vezes 3778 contem 945. Mas 3778 contera 945 no maximo tantas vezes quantas contiver as 9 centenas (ordem mais elevada) de 945; e como centenas não podem ser contidas em ordens inferiores, tudo se reduz a procurar-mos quantas vezes 37 centenas contêm 9 centenas ou 37 contem 9.

O resultado obtido, 4, que escreveremos no quociente, á direita do algarismo 6 das centenas, indica que o dividendo parcial 3778 pode conter 4 vezes e não mais o divisor 945. Como meio de verificação e para determinar o resto da divisão, se o quociente for verdadeiro, formaremos o producto do divisor por 4 para subtrahir do dividendo esse producto.

Mas o producto do divisor por 4 é 3780, numero superior ao dividendo parcial 3778, e isto quer dizer que este dividendo não contem 4 vezes o divisor; pelo que escreveremos 3 no quociente em lugar de 4 e, subtrahindo do dividendo parcial 3 vezes o divisor, teremos $3778 - 2835 = 943$.

O algarismo das dezenas do quociente é então 3 e temos para resto 943 dezenas ou 9430 unidades, as quaes, reunidas ás 5 de que havíamos prescindido fazem 9435.

Resta-nos determinar o algarismo das unidades do quociente; e para isto notemos que neste numero haverá tantas unidades quantas vezes o dividendo parcial 9435 contiver o divisor 945; e como 9435 contera 945 no maximo tantas vezes quantas contiverem suas 94 centenas 9 centenas, a questão se reduz a determinarmos quantas vezes 94 contem 9.

94 contem 10 vezes 9; porem, se tivéssemos 10 unidades para quociente, como 10 unidades fazem uma dezena, teríamos no quociente 4 dezenas e não 3, contra o que verificámos, salvo se tivesse havido erro na divisão precedente; pelo que o algarismo das unidades do quociente será, no maximo, 9 e este algarismo escreveremos á direita dos que foram já determinados.

Formando agora o producto do divisor por 9, teremos 8505, numero que, subtrahido do ultimo dividendo parcial, põe em evidencia o resto da divisão 930.

Assim ficam determinados o quociente 639 e o resto 930 da divisão proposta; e o methodo empregado consistiu em decompor-mos a questão em tres outras mais simples sendo, cada uma destas, por sua vez, conduzida ao 1.º caso; a saber:

- 1.ª determinar quantas vezes 6047 contem 945;
 - 2.ª Determinar quantas vezes 3778 contem 945;
 - 3.ª Determinar quantas vezes 9435 contem 945;
- Os numeros 6047, 3778 e 9435 são os dividendos parciaes; e dá-se ao calculo a seguinte disposição (*):

	<i>Dividendo</i>	<i>Divisor</i>
<i>6047—1.º dividendo parcial.</i>	604785	945
<i>Producto do divisor pelo alg. 6 do quoc.</i>	5670	639 Quoc.
<i>2.º dividendo parcial</i>	3778	639 ⁹³⁰ quoc.
<i>Producto do divisor pelo alg. 3 do quoc.</i>	2835	945 comp.
<i>3.º dividendo parcial</i>	9435	
<i>Prod. do divisor pelo alg. 9 do quoc.</i>	8505	
<i>Resto da divisão</i>	930	

(*) Chama-se «chave de divisão» a figura formada pelos dois traços horisontal e vertical que separam o dividendo do divisor e este do quociente.

Separado o primeiro dividendo parcial que deve constar de tantos algarismos, quantos sejam necessários para que o numero formado contenha pelo menos uma vez o divisor, e determinado o quociente correspondente, formamos o producto do divisor por este algarismo afim de subtrahi-lo do dividendo parcial. Escreveremos á direita do resto o algarismo seguinte do dividendo, formando deste modo novo dividendo parcial e assim por diante, até a determinação do ultimo algarismo do quociente (*).

Quando um dividendo parcial fôr, em valor absoluto, menor do que o divisor, isto é, nem uma vez contiver o divisor, o que indicará a falta, no quo-

(*) Abrevia-se a operação fazendo mentalmente as multiplicações e subtracções e escrevendo somente os resultados, como se vê no seguinte exemplo:

$$\begin{array}{r} 67808'6 \\ 27996 \\ 135 \end{array} \left| \begin{array}{r} 9287 \\ 73 \end{array} \right.$$

Do dividendo parcial 67808 deve ser subtrahido o producto do divisor 9287 pelo algarismo 7 do quociente; fazendo-se as subtracções á medida que as unidades de diversas ordens do producto vão sendo obtidas. Mas o producto em questão consta de 49 unidades, 56 dezenas, 14 centenas e 63 milhares; e como é impossivel subtrahir 49 unidades de 8, juntamos 50 a estas e teremos $58 - 49 = 9$, escrevendo 9 abaixo das 8 unidades do dividendo parcial. Ora, o augmento de 50 unidades ao minuendo é compensado augmentando-se o subtrahendo, de 50 unidades ou 5 dezenas, as quaes, reunidas ás 56 dezenas existentes, fazem 61; e como 61 dezenas não podem ser subtrahidas de 0 dezenas, juntam-se 70 dezenas ao minuendo e fica $70 - 61 = 9$, algarismo que escreveremos abaixo do 0 do dividendo parcial. Ainda, o augmento de 70 dezenas ao minuendo é compensado juntando-se ao subtrahendo 70 dezenas ou 7 centenas que, reunidas ás 14 existentes, fazem 21; e por ser impossivel subtrahir 21 centenas de 8, juntaremos 20 centenas ao minuendo e teremos $28 - 21 = 7$, resto que se escreve abaixo das 8 centenas do dividendo parcial. Finalmente, o augmento de 20 centenas ao minuendo é compensado pelo augmento de 20 centenas ou 2 milhares ao subtrahendo; e esses 2 milhares, reunidos aos 63 existentes, fazem 65 milhares que, subtrahidos dos 67 do dividendo parcial, deixam $67 - 65 = 2$. Deste modo determinamos o resto 2799 e, escrevendo á direita deste resto o algarismo seguinte do dividendo proposto, formamos o novo dividendo parcial 27996, sobre o qual operamos como fica indicado.

ciente, de unidades da ordem que se procura, pre-encheremos esta ordem com um zero. Depois, tomando novo algarismo do dividendo, formaremos outro dividendo parcial e continuaremos a operação. E' isto o que, no seguinte calculo, está indicado por meio de typos diferentes.

$$\begin{array}{r} 23498113 \\ 2332 \\ \hline 1781 \\ 1749 \\ \hline 3213 \\ 2915 \\ \hline 298 \end{array} \left| \begin{array}{r} 583 \\ 40305 \end{array} \right.$$

Aos mesmos resultados poderíamos ainda chegar por outro modo que em seguida estudamos, referindo-o unicamente ao ultimo caso.

Considerando o dividendo 604785 como producto do divisor pelo quociente, será elle a somma dos productos parciaes que se obtêm multiplicando o divisor pelo algarismo significativo de cada ordem do quociente e dando ao resultado o valor relativo dessa ordem.

Desde então se reconhece que a ordem mais elevada do quociente deve ser a das centenas, pois que, se admittissemos a existencia de milhares, o producto parcial correspondente seria pelo menos 945 milhares (quando o algarismo do quociente fosse 1), numero maior do que o dividendo.

Para determinar o algarismo das centenas do quociente, notemos que o producto parcial correspondente, devendo ter o valor relativo de centenas (pag. 72), existirá nas 6047 centenas do dividendo e não nas ordens inferiores; e tudo consiste agora em saber-se, abstrahindo do valor relativo, por que numero deveremos multiplicar o divisor 945 para obter 6047 ou um producto que mais se approxime de 6047.

Poderíamos resolver esta questão multiplicando o divisor por 1, 2, 3... até encontrarmos o numero procurado; pois o numero de multiplicações successivas não seria tal que tornasse o processo impraticavel. Observemos, entretanto, que o numero procurado será no maximo aquelle que, multiplicado pelas 9 centenas de 945, der como resultado as 60 centenas de 6047 ou um producto que mais se lhe approxime; e isto nos conduz a procurar o quociente da divisão de 60 por 9.

Este quociente é 6; e subtrahindo do dividendo parcial 6047 o producto $945 \times 6 = 5670$, determinamos o resto 377 centenas, as quaes, reunidas ás ordens inferiores de que prescindimos, fazem 37785 (*).

Este numero 37785, que é o dividendo proposto menos o producto do divisor pelas centenas do quociente, deve conter os outros productos parciaes correspondentes aos algarismos das dezenas e das unidades do quociente.

Para determinar o algarismo das dezenas, notemos que seu producto pelo divisor, devendo ter o valor relativo de dezenas, existirá nas 3778 dezenas de 37785; e portanto, prescindindo do algarismo 5 das unidades, procuraremos o numero que, multiplicado por 945, dê 3778 ou o producto que mais se approxime de 3778. Procedendo como precedentemente, procuraremos o quociente da divisão de 37 centenas por 9 centenas ou simplesmente de 37 por 9, verificando que o algarismo 4 encontrado é maior do que o procurado, pois seu producto pelo divisor é superior a 3778. Escreveremos, por conseguinte, 3 em lugar de 4 no quociente e, formando o producto $945 \times 3 = 2835$, subtrahimo-emos de 3778.

O resto 943 dezenas ou 9430 unidades, reunido

(*) Temos assim destacado do dividendo um dos productos parciaes que concorreram para sua formação. 37785 é a somma dos outros productos parciaes.

ás 5 unidades do dividendo, faz 9435 unidades, numero que deve conter o producto do divisor pelas unidades do quociente.

Para determinar estas unidades, teremos finalmente que dividir 94 centenas por 9 centenas ou 94 por 9; mas o quociente 10 não satisfaz, porque 10 unidades fazem uma dezena e então teríamos 4 dezenas e não 3, contra o que verificámos; salvo o caso de ter havido erro na determinação do algarismo 3. Escreveremos então 9 na ordem das unidades do quociente; e o producto $945 \times 9 = 8505$, subtrahido de 9435, põe em evidencia o resto 930 da divisão proposta.

Resumindo:

Ha na divisão de numeros inteiros tres casos que considerar:

- 1.º Divisor e quociente numeros simples;
- 2.º Divisor simples e quociente composto;
- 3.º Divisor composto e quociente simples ou composto.

Dada uma divisão verifica se se o quociente é simples ou composto, escrevendo um zero á direita do divisor. Se o numero formado é menor do que o dividendo, o quociente será maior do que 10 e portanto composto; no caso contrario o quociente será um numero simples.

No caso mais simples a divisão nenhum processo especial possui: como caso particular da subtracção, as questões de que ella se occupa, resolvem-se pela subtracção; como operação inversa da multiplicação, é pela multiplicação que se resolvem os seus problemas.

Pratica-se a divisão por meio da subtracção, subtrahindo do dividendo o divisor tantas vezes quantas for possível; o numero de subtracções successivas é o quociente.

A ultima subtracção pode annular o dividendo ou não. No segundo caso haverá um *resto*, o qual não pode

deixar de ser menor do que o divisor; pois, do contrario, a subtracção ainda teria logar.

Pratica-se a divisão por meio da multiplicação, multiplicando o divisor pela serie dos numeros inteiros até formar o dividendo ou o producto que mais se approxime do dividendo; obtido este resultado, o numero pelo qual se multiplicou o divisor é o quociente procurado.

Não havendo um numero que, multiplicado pelo divisor, reproduza exactamente o dividendo, subtrah-se deste o maior producto do divisor que elle contenha, determinando-se deste modo o resto da divisão.

Ainda no primeiro caso de divisão, obtem-se o resultado por meio da taboa da multiplicação como ficou indicado; sendo, finalmente, facil conservar de memoria todos os resultados deste caso mais simples da operação que nos occupa.

No segundo e terceiro casos nenhum dos processos empregados no primeiro tem applicação immediata; a questão proposta se decompõe em outras mais simples que possam admittir aquelles processos e nisto consiste o methodo de systematisação.

Quando uma divisão se faz sem resto ou, o que é o mesmo, quando o resto é zero, o producto do divisor pelo quociente é exactamente egual ao dividendo e tem-se a relação $D = d \times q$, onde D representa o dividendo, d o divisor e q o quociente.

Quando uma divisão não se faz exactamente, isto é, quando ha um resto, ao producto do divisor pelo quociente é necessario juntar o resto para ter o dividendo; e representando por r o resto tem-se a relação $D = d \times q + r$.

Quando uma divisão não se faz exactamente, o quociente completo se obtem, juntando á parte inteira uma fracção que tenha para numerador o resto e para denominador o divisor.

Neste caso, despresada a fracção complementar do quociente, a parte inteira representa este quociente com um erro, para menos, egual á fracção despresada

e diz-se que o quociente é approximado a menos de uma unidade por defeito.

Se, em logar de despresar a fracção complementar, junta-se-lhe o necessario para formar uma unidade, o inteiro resultante representa o quociente com um erro, para mais, menor do que uma unidade; e diz-se que o quociente é approximado a menos de uma unidade por excesso.

Convem notar que, effectuando uma divisão qualquer, por exemplo $37 \div 7$, se subtrahirmos do dividendo 37 o producto do divisor pelo quociente 5 , a menos de uma unidade por defeito, virá $37 - 7 \times 5 = 37 - 35 = 2$; e se subtrahirmos do mesmo dividendo o producto do divisor pelo quociente 6 , a menos de uma unidade por excesso, teremos $37 - 7 \times 6 = 37 - 42 = -5$; sendo a somma dos dois resultados, em valor absoluto, $2 + 5 = 7$, isto é, o divisor.

Complementos arithmeticos

Como caso de subtracção, a divisão admitte o emprego dos complementos arithmeticos.

Seja $384972 \div 645$

Obtido, como ficou indicado, o primeiro algarismo (5) do quociente, correspondente á divisão de 3849 por 645 , notamos que subtrahir 5 vezes 645 equivale a sommar 5 vezes o complemento de 645 e ao resultado subtrahir 5 unidades da ordem em que foi tomado o complemento (unidade de milhar); e do mesmo modo para todas as outras divisões parciaes, como indica o seguinte calculo:

		3 5 5 <i>cl. do divisor</i>
<i>Dividendo</i>	3 8 4 9 7 2	6 4 5 <i>Divisor</i>
<i>5 cl</i>	1 7 7 5	5 9 6
	5) 6 2 4 7	
<i>9 cl</i>	3 1 9 5	
	9) 4 4 2 2	
<i>6 cl</i>	2 1 3 0	
	6) 5 5 2	

Abrevia-se a operação fazendo mentalmente as multiplicações e adições e escrevendo só os resultados

		3 5 5
3 8 4 9 7 2		6 4 5
5) 6 2 4		5 9 6
9) 4 4 2 2		
6) 5 5 2		

Propriedades da divisão

THEOREMA I. O quociente de uma divisão augmenta ou diminue de tantas unidades, quantas vezes se junta ou subtrahê o divisor ao dividendo.

Sejam D , d e q o dividendo, o divisor e o quociente de uma divisão. O quociente q devendo conter tantas vezes a unidade quantas o dividendo D contiver o divisor d ; é claro que, se o dividendo contiver mais ou menos n vezes o divisor, o quociente conterá mais ou menos n unidades; e, portanto, se o dividendo D contem q vezes o divisor d , donde

$D = d \times q$, o dividendo $D \pm d \times n$ conterá $q \pm n$ vezes o divisor d e teremos $D \pm d \times n = d \times (q \pm n)$.

A existencia de um resto em cousa alguma virá modificar o que ficou dito; porque, tendo-se juntado ou subtrahido ao dividendo um numero exacto de vezes o divisor, este numero exacto só influirá sobre a parte inteira do quociente, isto é,

tendo-se
ter-se-á

$$D = d \times q + r$$

$$D \pm d \times n = d \times (q \pm n) + r$$

THEOREMA II. Divide-se uma somma por um numero, dividindo por esse numero cada parcella da somma e sommando os resultados.

Sejam A , n e q o dividendo, o divisor e o quociente de uma divisão, donde $A = q \times n$. Façamos $B = q' \times n$ e juntemos B a A , o que dá $A + B$. $A + B$ é o dividendo A augmentado de q' vezes o divisor n ; o que quer dizer que o quociente q ficará augmentado de q' unidades, isto é, se tornará $q + q'$; e se observarmos que o quociente de A por n é q , o quociente de B por n é q' e o quociente de $A + B$ por n é $q + q'$, teremos demonstrado a proposição.

A proposição ainda é verdadeira para o caso de mais de duas parcelas; porque, se nos derem $A + B + C$, faremos $A + B = S$ e então teremos $(S + C) \div n = S \div n + C \div n$; e como $S = A + B$ vem:

$$(A + B + C) \div n = (A + B) \div n + C \div n = A \div n + B \div n + C \div n$$

THEOREMA III. Divide-se por um numero o resultado de uma subtracção, dividindo por esse numero o minuendo e o sub-

trahendo e do primeiro resultado subtrahindo o segundo.

Sejam M , n e q o dividendo, o divisor e o quociente de uma divisão, donde $M = n \times q$. Fazendo $S = n \times q'$, subtraímos S de M , o que dá $M - S$. Assim procedendo, temos subtrahido ao dividendo q' vezes o divisor e portanto o quociente ficará diminuído de q' unidades, isto é, tornar-se-á $q - q'$. E como q é o quociente de M ; q' o quociente de S e $q - q'$ o quociente de $M - S$, sendo empregado em todas as divisões o mesmo divisor n , fica demonstrada a proposição.

THEOREMA IV. Divide-se um producto indicado por um numero, dividindo um dos factores por esse numero.

Sejam $a \times b$ o producto e n o numero.

Sendo $a \times b = a + a + a + a + a + \dots + a$ (b)

temos pelo th. II $(a \times b) \div n = a \div n + a \div n + a \div n + \dots + a \div n$ (b)

ou ainda $(a \times b) \div n = (a \div n) \times b$.

A proposição é verdadeira seja qual for o numero de factores; porque sendo

$$a \times b \times c = a \times b + a \times b + a \times b + \dots + a \times b \quad (c)$$

para dividir por n o primeiro membro da igualdade, teremos de dividir por n cada uma das parcelas do segundo membro, isto é, teremos de dividir por n o producto $a \times b$; e sendo

$$a \times b = a + a + a + \dots + a \quad (b)$$

tudo se reduz a dividirmos por n o factor a .

Corollario — 1.º — Divide-se um producto por um de seus factores, supprimindo esse factor.

Porque $a \times b \times c$ será dividido por a se dividirmos por a um de seus factores, donde

$$(a \times b \times c) \div a = (a \div a) \times b \times c$$

e como vem

$$a \div a = 1$$

$$(a \times b \times c) \div a = 1 \times b \times c = b \times c$$

Corollario 2.º — Divide-se um producto por outro que não contenha factores diferentes dos seus, supprimindo no primeiro todos os factores do segundo.

Porque, se tivermos para dividendo o producto $a \times b \times c \times m$ e para divisor o producto $a \times b \times c$, fazendo $a \times b \times c = p$ virá;

$$(a \times b \times c \times m) \div (a \times b \times c) = (p \times m) \div p = m$$

Corollario 3.º — Um producto não se altera se se multiplicar um dos seus factores e divide outro pelo mesmo numero.

Porque se, em $a \times b$, multiplicarmos por n o factor a , o producto ficará multiplicado por n ; se dividirmos por n o factor b , o producto ficará dividido por n ; e, portanto, sendo praticadas as duas operações, o producto não se alterará (*).

(*) Se em um producto de muitos factores, tomarmos esses factores dois a dois, multiplicando um e dividindo o outro pelo mesmo numero, o producto não se alterará.

Assim em $a \times b \times c \times d \times e \dots$ poderemos multiplicar o factor a e dividir b por m ; multiplicar c e dividir d por n e assim por diante.

THEOREMA V. Multiplicando-se ou dividindo-se o dividendo por um numero, sem alterar o divisor, o quociente e o resto ficam multiplicados ou divididos por esse numero.

Sejam D o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto de uma divisão, donde

$$D = d \times q + r$$

Multiplicando-se ou dividindo-se por n o primeiro membro da igualdade, o dividendo, é necessario multiplicar ou dividir por n o segundo membro e então teremos

$$D \times n = dq \times n + r \times n$$

$$d \div n = dq \div n + r \div n$$

ou

No primeiro membro temos multiplicado ou dividido por n o dividendo; no segundo temos multiplicado ou dividido por n o resto r e o producto dq . E como, segundo o enunciado, o factor d é constante, segue-se que o numero n multiplicará ou dividirá o outro factor, isto é, o quociente q ; donde

$$D \times n = d \times (q \times n) + r \times n$$

$$D \div n = d \times (q \div n) + r \div n$$

ou

Sendo a divisão exacta, o resto será nullo e portanto nullo o producto $r \times n$ ou o quociente $r \div n$; e então teremos

$$D \times n = d \times (q \times n)$$

$$D \div n = d \times (q \div n)$$

THEOREMA VI. Multiplicando-se ou dividindo-se o divi-

sor por um numero, sem alterar o dividendo, o quociente fica dividido ou multiplicado por esse numero e o resto não se altera.

Sejam D o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto de uma divisão, donde

$$D = d \times q + r$$

Multiplicando ou dividindo por um numero n o divisor d , o producto dq ficará multiplicado ou dividido por esse numero e a igualdade deixará de existir, sendo porem restabelecida se praticarmos com relação ao factor q operação inversa da que soffreu o outro factor; porque então, em virtude do th. IV corollario 3.º, o producto dq não se alterará.

E assim teremos

$$D = (d \times n) \times (q \div n) + r$$

ou

$$D = (d \div n) \times (q \times n) + r$$

onde D , o dividendo, é constante; d , o divisor, é multiplicado ou dividido por n ; q , o quociente, é dividido ou multiplicado por n ; e r , o resto, é constante.

THEOREMA VII. Multiplicando-se ou dividindo-se pelo mesmo numero o dividendo e o divisor o quociente não se altera, mas o resto vem multiplicado ou dividido por esse numero.

Este theorema não é mais do que uma consequencia dos dois ultimos demonstrados; pois que, quanto ao quociente, ficará multiplicado ou dividido

em virtude da multiplicação ou divisão do dividendo (th. V), e, ao mesmo tempo, dividido ou multiplicado em virtude da multiplicação ou divisão do divisor (th. VI); e portanto não se alterará. Quanto ao resto, fica multiplicado ou dividido em virtude da multiplicação ou divisão do dividendo (th. V); não soffre alteração com a multiplicação ou divisão do divisor e portanto permanecerá multiplicado ou dividido (*).

Corollario. O quociente da divisão de dois numeros terminados por zeros não se altera se se supprime em ambos o mesmo numero de zeros que, entretanto, devem ser escriptos á direita do resto.

Sejam 345000 e 2700 o dividendo e o divisor; temos: $345000 \div 2700 = (3450 \times 100) \div (27 \times 100)$; e dividindo por 100 os dois termos da divisão: $345000 \div 2700 = 3450 \div 27$. O quociente da divisão não se alterou pela suppressão dos dois zeros finaes no dividendo e no divisor, porque não temos feito mais do que dividir esses dois numeros pelo mesmo numero 100. Entretanto o resto que obtivermos, será o da divisão proposta dividido por 100; e por isso é necessario multiplicá-lo por 100, o que se consegue escrevendo dois zeros á sua direita.

THEOREMA VIII. O quociente que se obtem dividindo um numero por um producto effectuado, é o mesmo que se obtem dividindo esse nume-

(*) Para dividir $abckl$ por $abcde$, dividiremos os dois termos da divisão por abc e teremos $abckl \div abcde = (abckl \div abc) \div (abcde \div abc) = kl \div de$.

ro successivamente pelos factores do producto.

O caso em que todas as divisões se façam exactamente, nenhuma difficuldade offerece; porque se dividirmos N pelo producto $P=abc$ e representarmos por q o quociente, virá $N=P \times q$ ou $N=abc \times q$; e se dividirmos $abcq$ ou N successivamente pelos factores do producto, teremos os quocientes bcq , cq e, finalmente q , quociente da divisão de N pelo producto effectuado. Demais, N , resultado da multiplicação de q pelo producto abc , se forma (Multiplicação th. VII) multiplicando q por um dos factores do producto, por exemplo a , o que dá qa ; multiplicando qa pelo outro factor, o que dá qab e, finalmente, multiplicando qab pelo ultimo factor, o que dá $qabc$. Praticando a operação inversa, procederemos inversamente, supprimindo cada um dos factores, isto é, dividindo por elle; e, quando houvermos supprimido o ultimo, o producto $qabc$ estará reduzido a q , quociente da divisão.

Estudemos, pois, o caso em que as divisões não se façam exactamente, demonstrando que a parte inteira do quociente é sempre a mesma; e sejam N o numero, abc o producto, Q o quociente e R o resto da divisão de N por abc .

O quociente completo desta divisão será

$$N \div abc = Q + \frac{R}{abc};$$

e como o resto é sempre menor do que o divisor, o maior valor que R poderá ter, será $abc-1$ (o divisor menos uma unidade). Substituindo portanto R por este maior valor, o que não alterará a parte inteira do quociente, teremos

$$N \div abc = Q + \frac{abc-1}{abc}$$

Dividindo agora N por a e representando por q e r o quociente e o resto da divisão, teremos

$$N = aq + r$$

onde r será, no maximo, igual a $a-1$ (o divisor menos 1). Dividindo ainda por b o quociente q e representando por q' e r' o quociente e o resto da nova divisão, teremos

$$q = bq' + r'$$

onde r' será, no maximo, igual a $b-1$ (o divisor menos 1). Finalmente dividindo q' por c e representando por q'' e r'' o quociente e o resto desta divisão, teremos

$$q' = cq'' + r''$$

onde r'' será, no maximo, igual a $c-1$ (o divisor menos uma unidade).

Em $N = aq + r$ substituamos q pelo valor obtido $bq' + r'$ e teremos

$$N = a(bq' + r') + r$$

ou effectuando $N = abq' + ar' + r$

Ainda aqui substituamos q' por seu valor $cq'' + r''$, o que dá

$$N = ab(cq'' + r'') + ar' + r$$

ou effectuando $N = abcq'' + abr'' + ar' + r$

Substituindo, alem disso, r , r' e r'' pelos valores maximos $a-1$, $b-1$, $c-1$, virá

$$N = abcq'' + ab(c-1) + a(b-1) + a-1$$

e effectuando $N = abcq'' + abc - ab + ab - a + a - 1$

ou por ser $ab - ab = 0$ e $a - a = 0$

$$N = abcq'' + abc - 1$$

Dividindo finalmente os dois membros da igualdade por abc vem

$$N \div abc = abcq'' \div abc + (abc - 1) \div abc$$

$$\text{ou } N \div abc = q'' + \frac{abc-1}{abc}$$

onde temos o mesmo dividendo N , o mesmo divisor abc , a mesma fracção complementar do quociente $\frac{abc-1}{abc}$ e portanto deveremos ter a mesma parte inteira deste quociente, isto é,

$$q'' = Q.$$



V Potenciação

Os factores de um producto podem ser numeros differentes como em $8 \times 7 \times 5 \times 3 = 840$ ou eguaes como em $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 4096$.

Neste caso particular o producto recebe o nome de *potencia*; chamando-se *grau* da potencia o numero de factores eguaes e *base* da potencia um desses factores

As potencias classificam-se pelos graus; assim, 4096 é a potencia de 4.^o grau ou a 4.^a potencia de 8; $27 = 3 \times 3 \times 3$ é a 3.^a potencia de 3; $16 = 4 \times 4$ é a 2.^a potencia de 4. Os numeros 8, 3 e 4 são as *bases*.

De um modo geral $a \times a \times a \times a \dots a^{(m)}$ é a potencia de grau m do numero a ; a é a base. As potencias de 2.^o e 3.^o graus recebem as denominações particulares de quadrado e cubo; porque, para conhecer a area de um quadrado ou o volume de um cubo, se eleva á segunda potencia o numero que mede o lado do quadrado ou á terceira o que mede a aresta do cubo.

O producto $a \times a \times a \times a \dots a^{(m)}$ indica-se abreviadamente a^m e enuncia-se a elevado a m .

O numero m que se escreve á direita da base e um pouco elevado, designando o grau da potencia, recebe a denominação de *expoente*.

A POTENCIAÇÃO é a operação que tem por fim formar a potencia de grau dado de um numero tambem dado.

A potenciação deriva-se da multiplicação como caso particular e é pela multiplicação que se resolvem os seus problemas.

Trate-se de um numero simples ou de um numero composto, o processo directo para a formação da potencia de grau dado é o mesmo:—formar por multiplicações successivas o producto de tantos factores eguaes á base, quantas forem as unidades do grau. Deste modo, para ter a quarta potencia de 523, faremos $523^4 = 523 \times 523 \times 523 \times 523$ e effectuaremos, dando ao calculo a seguinte disposição.

$$\begin{array}{r}
 523 \\
 523 \\
 \hline
 1569 \\
 1046 \\
 2615 \\
 \hline
 273529 \\
 523 \\
 \hline
 820587 \\
 547058 \\
 \hline
 1367645 \\
 143055667 \\
 523 \\
 \hline
 429167001 \\
 286111334 \\
 715278335 \\
 \hline
 523^4 = 74818113841
 \end{array}$$

Como se vê, este processo directo offerece um recurso muito limitado; pois é tanto menos praticavel quanto maior for o grau da potencia, crescendo a difficuldade com a base para as potencias do mesmo grau. Entretanto, outro não possui a arithmetica, segundo o qual possamos formar uma potencia qualquer de qualquer numero.

O processo que poderíamos obter para a formação das potencias de numeros compostos pela decomposição destes em suas unidades de diversas ordens, conduzindo assim a questão ao caso de numero simples, assenta sobre a lei de formação de uma po-

tencia qualquer de uma somma, conhecida pelo nome de lei binomial de Newton ou simplesmente binomio de Newton, a qual se estuda em Algebra.

Entretanto, é possível estudá-la desde já nos casos particulares em que a potencia seja do segundo ou do terceiro grau; e é o que faremos em seguida.

THEOREMA I. O quadrado de uma somma de duas parcelas é igual ao quadrado da primeira parcella, mais o dobro do producto da primeira pela segunda, mais o quadrado da segunda.

Se em $(a+b) \times (c+d) = ac + bc + ad + cd$ (Propriedades da multiplicação th. III—corollario) fizermos $a=c$ e $b=d$, teremos

$$(a+b) \times (a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$$

e como $(a+b) \times (a+b) = (a+b)^2$; $a \times a = a^2$; $b \times b = b^2$ e $a \times b + b \times a = a \times b + a \times b = 2 \times a \times b$

temos, por substituição

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

onde a^2 é o quadrado da primeira parcella a da somma; $2ab$ é o dobro do producto da primeira parcella a pela segunda b ; b^2 é o quadrado da segunda parcella.

Corollario 1.º. O quadrado de um numero composto de dezenas e unidades é igual ao quadrado das dezenas, mais o dobro

do producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades.

Seja qual for o numero composto N , é sempre possível decompô-lo em duas partes: uma constituida pelas dezenas e outra pelas unidades. Assim o numero 83497 pode ser decomposto em 8349 dezenas e 7 unidades. Posto isto, representando por d e u as dezenas e as unidades do numero composto N , teremos

$$N = d + u$$

e elevando ao quadrado $N^2 = d^2 + 2du + u^2$.

Corollario 2.º. A differença entre os quadrados de dois numeros inteiros consecutivos é igual ao dobro do menor mais uma unidade.

Representando por a um numero inteiro qualquer, o numero seguinte será $a+1$. O quadrado de $a+1$ é

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a \times 1 + 1^2$$

ou $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

e subtrahindo a^2 , $(a+1)^2 - a^2 = a^2 + 2a + 1 - a^2$

ou $(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$

THEOREMA II. O cubo de uma somma de duas parcelas é igual ao cubo da primeira parcella, mais o triplo do producto da primeira parcella pela segunda, mais o triplo do produ-

eto da primeira pelo quadrado da segunda, mais o cubo da segunda.

Seja elevar ao cubo a somma $a + b$;

temos $(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b)$
 e por ser $(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 vem $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a + b)$
 ou effectuando $(a + b)^3 = a^2 \times a + 2ab \times a + b^2 \times a + a^2 \times b + 2ab \times b + b^2 \times b$
 e como $a^2 \times a = a \times a \times a = a^3$, $2ab \times a = 2a \times a \times b = 2a^2 b$, $2ab \times b = 2ab^2$ e $b^2 \times b = b \times b \times b = b^3$

temos por substituição $(a + b)^3 = a^3 + 2a^2 b + ab^2 + a^2 b + 2ab^2 + b^3$;

e sendo ainda $2a^2 b + a^2 b = a^2 b + a^2 b + a^2 b = 3a^2 b$
 e $2ab^2 + ab^2 = ab^2 + ab^2 + ab^2 = 3ab^2$
 vem finalmente $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

onde a^3 é o cubo da primeira parcella a ; $3a^2 b$ é o triplo do producto de a^2 , quadrado da primeira parcella, por b , segunda parcella; $3ab^2$ é o triplo do producto de a , primeira parcella, por b^2 , quadrado da segunda; e b^3 é o cubo da segunda.

Corollario 1.º. O cubo de um numero composto de dezenas e unidades é igual ao cubo das dezenas, mais o triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades, mais o triplo do producto das dezenas

pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades.

Qualquer que seja o numero composto N , teremos $N = d + u$ onde d e u representam respectivamente as dezenas e as unidades de N ; e elevando ao cubo vem

$$N^3 = (d + u)^3$$

$$N^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3$$

Corollario. 2.º A differença entre os cubos de dois numeros inteiros consecutivos é igual ao triplo do quadrado menor, mais o triplo do menor, mais uma unidade.

Sejam a e $a + 1$ dois numeros inteiros consecutivos. Formando o cubo do maior desses numeros,

tem-se $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 \times 1 + 3a \times 1^2 + 1^3$
 ou $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$
 e, subtrahindo a^3 (cubo do menor)

$$(a + 1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$$

Procuremos agora formar o quadrado de um numero composto e seja este numero 754

Temos $754^2 = (750 + 4)^2 = 750^2 + 2 \times 750 \times 4 + 4^2$
 e como $750^2 = (700 + 50)^2 = 700^2 + 2 \times 700 \times 50 + 50^2$
 e $2 \times 750 = 2(700 + 50) = 2 \times 700 + 2 \times 50$
 vem $754^2 = 700^2 + 50^2 + 4^2 + 2(700 \times 50) + 2(700 \times 4) + 2(50 \times 4) = 490000 + 2500 + 16 + 70000 + 5600 + 400 = 568516$.

Assim poderíamos deduzir uma regra para a formação dos quadrados dos numeros compostos e semelhantemente para a formação dos cubos; entretanto, á applicação de taes regras prefere-se ordinariamente o emprego do processo directo.

Propriedades das potencias

THEOREMA I. Eleva-se um producto a uma potencia, elevando cada um dos factores á mesma potencia e multiplicando entre si os resultados.

Sejam $a \times b \times c$ o producto e m o grau da potencia.

Temos
$$(a \times b \times c)^m = (a \times b \times c) \times (a \times b \times c) \times (a \times b \times c) \times \dots \times (a \times b \times c) \dots \dots \dots (m)$$

e como (Propr. da multiplicação—th. IX)

$$(a \times b \times c)(a \times b \times c)(a \times b \times c) \dots \dots \dots (m) = a \times a \times a \dots \dots \dots (m) \times b \times b \times b \dots \dots \dots (m) \times c \times c \times c \dots \dots \dots (m)$$

vem
$$(a \times b \times c)^m = a^m \times b^m \times c^m.$$

Corollario. Para elevar a uma potencia um numero terminado por zeros, prescinde-se dos zeros, eleva-se á potencia de grau dado o numero formado pelos algarismos res-

tantes e á direita do resultado escrevem-se tantas vezes os zeros desprezados, quantas forem as unidades do grau da potencia.

Seja 3500^3 a potencia que se quer formar.
Sendo $3500 = 35 \times 100$ teremos:

$$3500^3 = (35 \times 100)^3 = 35^3 \times 100^3$$

$$35^3 = 35 \times 35 \times 35 = 42875$$

$$100^3 = 100 \times 100 \times 100 = 1000000$$

$$3500^3 = 42875000000.$$

E por ser e vem

THEOREMA II. Para ter o producto de duas ou mais potencias da mesma base, eleva-se a base a uma potencia de grau igual á somma dos graus das potencias factores.

Sejam a^m e a^n duas potencias dadas.

Sendo $a^m = a \times a \times a \times a \times a \dots \dots \dots (m)$

e $a^n = a \times a \times a \times a \times a \dots \dots \dots (n)$

o producto $a^m \times a^n$ será obtido como ficou indicado no theorema IX de multiplicação; e então conterà os m factores de a^m e ainda os n factores de a^n , isto é, $a^m \times a^n$ é um producto de $m+n$ factores todos eguaes a a

ou
$$a^m \times a^n = a \times a \times a \dots \dots \dots \times a \dots \dots \dots (m+n)$$

ou ainda
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Semelhantemente se demonstraria que

$$a^m \times a^n \times a^p \times \dots = a^{m+n+p}$$

THEOREMA III. Para ter o quociente de duas potencias da mesma base, eleva-se a base a uma potencia de grau igual ao do dividendo menos o do divisor.

Pois que temos pelo theorema antecedente

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

teremos por divisão $\frac{a^{m+n}}{a^m} = \frac{a^m \times a^n}{a^m} = a^n = a^{(m+n)-m}$

Se os expoentes do dividendo e do divisor fossem eguaes, teriamos

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

e como

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

vem

$$a^0 = 1, \text{ isto é,}$$

qualquer quantidade affecta de expoente 0 exprime a unidade. Ainda, se o expoente do dividendo fosse menor do que o do divisor, teriamos

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-(m+n)} = a^{m-m-n} = a^{(-n)}$$

e por ser $\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \times a^n} = \frac{1 \times a^m}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^n}$ (1)

temos finalmente $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, isto é,

(*) V. pag. 83 nota.

qualquer quantidade affecta de expoente negativo exprime uma fracção que tenha para numerador a unidade e para denominador a mesma quantidade affecta do mesmo expoente tornado positivo.

THEOREMA IV. Eleva-se uma potencia a outra potencia elevando a base a uma potencia do grau igual ao producto dos dois expoentes.

Seja a^m a potencia que se quer elevar a n ;

$$\text{Ter-se-á } (a^m)^n = a^m \times a^m \dots \times a^m \underset{(n)}{=} a^{m+m+m\dots} = a^m \times n$$

THEOREMA V. O producto da somma de duas quantidades pela differença entre ellas é igual á differença entre os respectivos quadrados.

Sejam a e b as quantidades dadas; $a+b$ a somma e $a-b$ a differença. Temos $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$.

E sendo $ab - ab = 0$, fica:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

VI Radiciação

A questão inversa da resolvida pela potenciação pode ser enunciada assim:—dada uma potencia e o grau respectivo, determinar a base.

A base recebe então o nome de *raiz* e a operação que resolve a questão proposta é a *radiciação*. Podemos, pois, definir:—RADICIAÇÃO é a operação que tem por fim, dada uma potencia e o grau respectivo, determinar a base ou raiz.

Nem sempre, porem, o numero proposto é potencia exacta ou perfeita do grau dado; o contrario se dá a maior parte das vezes.

Assim, se considerarmos os quadrados dos numeros simples teremos:

Bases	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81

e, como o quadrado de 10 é 100, vemos que entre os 100 primeiros numeros inteiros só ha 10 quadrados perfectos.

Ora, se tomarmos, para os mesmos limites, graus successivamente crescentes, o numero de potencias perfectas será sempre menor; e da setima potencia em diante só ha $1^m = 1$, pois a setima potencia de 2 já é maior do que 100.

Na maioria dos casos, pois, não se procura uma raiz inteira exacta; e nós nos limitaremos, por ora, á determinação de uma raiz do grau dado tal, que o numero proposto fique comprehendido entre as potencias do mesmo grau da raiz achada e desta raiz augmentada de uma unidade.

Entretanto convem deixar enunciado desde já o seguinte theorema cuja demonstração estudaremos opportunamente:

—O numero que não é potencia perfeita do grau dado, não tem raiz exacta deste grau; sua raiz é um numero incommensuravel.

As raizes, como as potencias, se classificam pelos graus. Assim se diz: raiz do segundo grau ou raiz quadrada; raiz do terceiro grau ou raiz cubica; raiz do quarto grau, do quinto grau etc.; em geral raiz do grau m .

A radiciação é indicada pelo signal $\sqrt{\quad}$ a que se dá o nome de *radical*; escrevendo-se o numero cuja raiz se quer determinar abaixo da barra horizontal e na abertura do angulo o numero que indica o grau da raiz, ao qual se dá o nome de *indice do radical*.

Assim $\sqrt[3]{328}$ indica a extracção da raiz cubica de 328; $\sqrt[5]{596}$ indica a extracção da raiz do 5.º grau de 596; de um modo geral $\sqrt[m]{A}$ a extracção da raiz de grau m do numero A . A raiz quadrada indica-se simplesmente \sqrt{A} , sem o indice.

Sendo $a^m = a \times a \times a \times a \dots (m)$, parece que a divisão deve fornecer um processo directo para as extracções de raizes; entretanto a difficuldade consiste em que o proprio divisor é a incognita do problema; sendo tanto maior a difficuldade quanto mais elevado for o grau da raiz a extrahir (*).

Em todo caso é preferivel outro processo: Sendo $\sqrt[m]{A}$ um numero tal x que se tenha $x^m = A$, percorrermos a serie natural dos numeros inteiros, elevando cada

(*) Aarão Reis—Arith.—1.ª ed. n.º 192.

um delles á potencia de grau m , até obtermos a egualdade $x^m = A$ ou $x = \sqrt[m]{A}$, no caso em que A seja uma potencia perfeita do grau m . No caso contrario o numero proposto não terá uma raiz exacta deste grau; porem obteremos dois numeros inteiros consecutivos x e $x+1$, de sorte que seja $x^m < A$ e $(x+1)^m > A$; ou $x < \sqrt[m]{A} < (x+1)$. x é a raiz procurada a menos de uma unidade por defeito; e $x+1$ a mesma raiz a menos de uma unidade por excesso.

Este ultimo processo, perfeitamente applicavel e mesmo o unico applicavel á radiciação de qualquer grau, em quanto a raiz é um numero simples, sómente modificado pode ter applicação quando a raiz seja um numero composto; o outro, ainda mesmo tratando-se de uma raiz simples, torna-se de difficil applicação desde o terceiro grau.

Temos, pois, que considerar dois casos na extracção das raizes de qualquer grau, a saber:

- 1.º A raiz procurada é um numero simples;
- 2.º A raiz procurada é um numero composto.

Nas linhas que seguem veremos como reconhecer quando se trata de um ou de outro caso.

Raiz quadrada

Em quanto se trata do primeiro caso, qualquer dos dois processos indicados é perfeitamente applicavel á extracção da raiz quadrada de um numero dado; e é facil reconhecer quando se trata do primeiro ou do segundo caso porque, sendo $10^2 = 100$, se conclue que só os numeros menores do que 100 têm raizes quadradas simples, isto é, só os numeros menores do que 100 têm a extracção de sua raiz quadrada comprehendida no primeiro caso.

Posto isto, seja 36 o numero cuja raiz quadrada se quer extrahir.

Fazendo $\sqrt{36} = x$, teremos $36 = x^2$ ou $36 = x \times x$; e, portanto, conhecido x , se o tomarmos para divisor de 36, virá $36 \div x = x$; sendo, porem, o proprio divisor a incognita do problema, procederemos por tentativas, dividindo 36 pela serie dos numeros inteiros até encontrar um quociente igual ao divisor (M).

Dividindo 36 por 2, 3, 4, 5, encontraremos os quocientes 18, 12, 9, 7; e, finalmente dividindo por 6, teremos $36 \div 6 = 6$, donde $36 = 6 \times 6 = 6^2$ ou $\sqrt{36} = 6$.

Pelo segundo processo teriamos: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; 6 é o numero que, elevado ao quadrado, produz 36; 6 é a raiz quadrada de 36.

Seja ainda 45 o numero proposto; dividindo-o successivamente por 2, 3, 4, 5, 6, encontramos os quocientes 22, 15, 11, 9, 7, cada um delles maior do que o divisor empregado; porem, se dividirmos por 7, encontraremos o quociente 6, menor do que o divisor; o que quer dizer que a raiz procurada está comprehendida entre 6 e 7, isto é, a raiz procurada é 6 a menos de uma unidade por defeito ou 7 a menos de uma unidade por excesso.

Pelo segundo processo teriamos: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$; $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$; $7^2 = 49$; isto é, $6^2 < 45 < 7^2$ ou $6 < \sqrt{45} < 7$. A raiz é 6 a menos de uma unidade por defeito ou 7 a menos de uma unidade por excesso.

Finalmente, a questão se resolve com facilidade, neste primeiro caso, por meio da taboa dos quadrados dos numeros simples que se encontra no principio deste capitulo; pois que ou o numero é quadrado perfeito e então sua raiz quadrada se encontra na taboa ou o contrario se dá e então o numero dado estará comprehendido entre dois quadrados perfeitos cujas raizes representam a raiz procurada a menos de uma unidade por defeito ou excesso.

Um numero $N > 100$ tem sua raiz quadrada maior do que 10 e a determinação da raiz já não é praticavel por qualquer dos processos directos, taes como ficaram expostos; podemos, entretanto, com uma ligeira modificação que diminua, quanto possivel, o numero de tentativas, tornar qualquer delles applicavel á extracção de uma raiz quadrada qualquer.

Procuremos, por exemplo, extrahir, por divisão, a raiz quadrada de 205209.

Estando o numero proposto comprehendido entre 100000 e 1000000, sua raiz quadrada estará comprehendida entre 100 e 1000; pois que $100^2 = 10000$ e $1000^2 = 1000000$. A raiz procurada é, pois, um numero composto de tres algarismos (*).

Para determinar o algarismo das centenas da raiz, notemos que o producto do divisor pelo quociente igual ao divisor (centenas por centenas) estará comprehendido nas 20 dezenas de milhares do numero dado e nunca em ordens inferiores; e, portanto, prescindindo destas, dividiremos 20, successivamente por 2, 3, até encontrar um quociente igual ao divisor; e assim teremos o algarismo procurado. Dará isto logar ás seguintes operações:

$$\begin{array}{r} 20 \\ 00 \end{array} \left| \frac{2}{10} \right.; \quad \begin{array}{r} 20 \\ 2 \end{array} \left| \frac{3}{6} \right.; \quad \begin{array}{r} 20 \\ 00 \end{array} \left| \frac{4}{5} \right.; \quad \begin{array}{r} 20 \\ 00 \end{array} \left| \frac{5}{4} \right.$$

O quociente completo acha-se comprehendido entre 4 e 5; o que quer dizer que a raiz procurada está comprehendida entre 4 e 5 centenas ou entre 40 e 50 dezenas.

Seja, porem, qual for o numero de dezenas da raiz, o producto do divisor pelo quociente igual ao

(*) Reconhecido que a raiz é maior do que 100 poder-se-ia começando de 101 experimentar todos os numeros maiores do que 100. Ainda assim a serie de tentativas faria abandonar o processo.

divisor (dezenas por dezenas) estará comprehendido nas 2052 centenas do numero proposto e nunca em ordens inferiores; e determinaremos as dezenas procuradas dividindo 2052, successivamente, por 41, 42, 43, até obtermos um quociente igual ao divisor, como segue:

$$\begin{array}{r} 2052 \\ 002 \end{array} \left| \frac{41}{50} \right.; \quad \begin{array}{r} 2052 \\ 372 \end{array} \left| \frac{42}{48} \right.; \quad \begin{array}{r} 2052 \\ 332 \end{array} \left| \frac{43}{47} \right.; \quad \begin{array}{r} 2052 \\ 292 \end{array} \left| \frac{44}{46} \right.; \quad \begin{array}{r} 2052 \\ 252 \end{array} \left| \frac{45}{45} \right.$$

36
31
28
27

5 é, pois, o algarismo das dezenas da raiz que, deste modo, estará comprehendida entre 450 e 460 unidades; e, para determiná-la, dividiremos o numero proposto, successivamente por 451, 452, até obtermos um quociente igual ao divisor, como segue:

$$\begin{array}{r} 205209 \\ 2480 \\ 2259 \\ 004 \end{array} \left| \frac{451}{455} \right.; \quad \begin{array}{r} 205209 \\ 2440 \\ 1809 \\ 001 \end{array} \left| \frac{452}{454} \right.; \quad \begin{array}{r} 205209 \\ 2400 \\ 1359 \\ 000 \end{array} \left| \frac{453}{453} \right.$$

453 é, pois, a raiz procurada, exacta.

Poderíamos ainda resolver a questão pelo processo das potenciações; do qual, entretanto, nos occuparemos applicando-o á extracção da raiz cubica. Examinemos agora o processo indirecto.

O numero N pode ser um quadrado perfeito; e então, representando por $d+u$ a raiz de N decomposta em dezenas e unidades, deveremos ter

$$N = (d+u)^2$$

ou

$$N = d^2 + 2du + u^2.$$

Na maioria dos casos, porem, N não é quadrado perfeito e sua raiz quadrada é obtida com aproximação; sendo que actualmente nos limitaremos a determinar a raiz approximada a menos de

uma unidade por defeito, o que equivale a extrahir a raiz quadrada do maior quadrado contido em N .

Representando por n^2 esse maior quadrado e por r a differença entre N e n^2 , teremos $N = n^2 + r$; e, decompondo n em dezenas e unidades:

$$N = (d + u)^2 + r$$

ou
$$N = d^2 + 2du + u^2 + r.$$

Ora, não existindo caracteres pelos quaes possamos reconhecer se N é um quadrado perfeito, consideraremos sempre o ultimo desenvolvimento no qual será $r = 0$, quando se tiver $N = n^2$; cumprindo, desde já, observar que, em todo caso, deveremos ter

$$r < 2n + 1;$$

porque se fizermos $r = 2n + 1$

virá

$$N = n^2 + 2n + 1$$

ou

$$N = (n + 1)^2$$

o que não pode ter logar uma vez que se suppõe

$$N < (n + 1)^2$$

por ser n a raiz quadrada de N a menos de uma unidade por defeito.

Supponhamos $N = 3954$. Sendo $3954 > 100$, sua raiz quadrada será um numero composto e teremos, segundo o que ficou dito linhas acima:

$$3954 = d^2 + 2du + u^2 + r$$

sendo $r = 0$ no caso de ser 3954 quadrado perfeito.

Procuremos determinar a raiz quadrada de 3954 ou do maior quadrado nelle contido.

Se nos fosse possível conhecer uma das tres primeiras partes do desenvolvimento, se conhecessemos

ou ao menos soubessemos em que parte existe no quadrado nelle contido, operando sobre ella, determinaríamos uma das partes da raiz procurada.

Podendo o quadrado de unidades constar unicamente de unidades, como $3^2 = 9$, ou de unidades e dezenas, como $5^2 = 25$, é impossível precisar em que parte do numero 3954 existirá o quadrado (u^2) das unidades da raiz procurada. O mesmo, porem, não se dá quanto ao quadrado (d^2) das dezenas da raiz; pois que, sendo este um numero exacto de centenas, visto como $10^2 = 100$, ha de existir nas centenas do numero proposto e jamais nas unidades ou dezenas.

Prescindindo, pois, destas duas ordens, somos levados a procurar o quadrado das dezenas da raiz nas 39 centenas do numero proposto; as quaes poderão conter ainda reservas que hajam affluído das outras ordens; e extrahindo a raiz quadrada do maior quadrado contido em 39, que é 36, teremos $\sqrt{36} = 6$, ficando, deste modo, determinado o algarismo das dezenas da raiz (*).

Elevando ao quadrado as dezenas encontradas, o que dá $6^2 = 36$ centenas, e subtrahindo este quadrado das centenas do numero proposto, acharemos um resto 3 centenas, as quaes, reunidas ás ordens infe-

(*) 6 é o verdadeiro algarismo procurado; porque, se admittissemos 7 dezenas na raiz, o quadrado seria 49 centenas, maior do que o numero dado; e, para termos 5 dezenas, seria necessario que as centenas de reservas das outras duas partes do quadrado da raiz e do resto da operação attingissem a $39 - 25 = 14$ centenas, o que não tem logar ainda que o algarismo das unidades fosse o maior possível, 9, como mostra o seguinte calculo:

Dobro do producto das dezenas		= 900
pelas unidades $2 \times 5d \times 9 = 90d =$		
	Quadrado das unidades	$9^2 = 81$
	Resto o maior possível 2×59	108
		1089
	Reservas	10 centenas

riores de que havíamos prescindido, fazem o numero 354.

Este numero é o proposto menos o quadrado das dezenas de sua raiz quadrada, isto é,

$$354 = d^2 + 2du + u^2 + r - d^2$$

$$354 = 2du + u^2 + r$$

ou

Resta-nos agora determinar o algarismo das unidades da raiz; e, para isto, notemos que, se é impossível saber em que parte de 354 se encontra o quadrado u^2 , o mesmo não se dá com o producto $2du$ que, sendo um numero exacto de dezenas, existirá nas 35 dezenas de 354. Prescindiremos pois do algarismo das unidades; e como já temos $d=6$ dezenas, donde $2du = 12 \times u$, numero exacto de dezenas, dividiremos as 35 dezenas de 354 por 12 dezenas ($2d$, dobro das dezenas da raiz) e o quociente representará u , unidades procuradas, ou um algarismo mais forte; pois que nas 35 dezenas em questão podem existir, alem do producto $2du$, dezenas provenientes do quadrado u^2 .

Assim procedendo, teremos $35 \div 12 = 2$; 2 é, então, no maximo, o algarismo das unidades da raiz; o qual, escripto á direita das 6 dezenas já determinadas, faz 62.

Como meio de verificação e para determinar o resto da operação no caso de ser 62 a verdadeira raiz procurada, formemos o quadrado deste numero, o que dá $62^2 = 3844$ e subtraíamo-lo do numero proposto; o resultado será $3954 - 3844 = 110$, resto da operação.

Para nos certificarmos de que 62 é a verdadeira raiz procurada, notemos que ella não é muito forte, visto como seu quadrado é menor do que o numero proposto; e não é muito fraca, uma vez que o resto é $110 < 2 \times 62 + 1$ e já vimos que deve ser sempre $r < 2n + 1$.

Ao calculo dá-se a disposição seguinte:

<i>A raiz quadrada do maior quadrado contido em 39 é o algarismo das dezenas</i>	39,54	<i>d u</i> 62
<i>Quadrado das dezenas</i>	$6^2 = 36$	$2d = 2 \times$
<i>Resto seguido dos outros algarismos</i>	35,4	$\times 6 = 12$ de-
<i>Quadrado da raiz</i>	$62^2 = 3844$	<i>zenas</i>
<i>Resto da operação</i>	$3954 - 3844 =$	$35 \div 12 = 2$ uni-
	110	<i>dades da raiz.</i>

Outro meio de verificação da raiz e determinação do resto é preferivel por dar logar a operações mais simples:

Voltando á relação $354 = 2du + u^2 + r$, notemos que $2du + u^2$ pode ser obtido, multiplicando-se $2d + u$ por u ; pois que $(2d + u)u = 2du + u^2$. Ora, $2d$, dobro das dezenas da raiz é, no nosso caso, $2 \times 6 = 12$ dezenas; e, reunindo-se-lhe u , teremos $2d + u = 12$ dezenas + 2 unidades = 122 unidades; e $(2d + u)u = 122 \times 2 = 244$, consistindo tudo em escrever-se o algarismo das unidades á direita do dobro das dezenas e multiplicar o resultado pelo algarismo das unidades.

Para determinar o resto da operação teremos

$$354 = (2d + u)u + r$$

donde

$$r = 354 - (2d + u)u$$

isto é,

$$r = 354 - 244 = 110.$$

Dá-se então ao calculo a disposição seguinte:

	39,54	<i>d u</i> 62
<i>Quadrado das dezenas:</i>	$6^2 = 36$	$2d + u = 122$
<i>Resto seguido dos outros alg.</i>	35,4	$u = 2$
	$2du + u^2$	$2du + u^2 = 244$
<i>Resto</i>	$354 - 244$	110

Ainda que a raiz procurada conste de tres ou mais algarismos, a questão não constitue um caso dis-

incto de radiciação; resolve-se pelos mesmos processos que acabámos de expor.

Seja por exemplo, extrahir a raiz quadrada de 5746824.

Para isto, supporemos a raiz procurada, seja qual for o numero de seus algarismos, decomposta em dezenas e unidades, donde a relação

$$5746824 = d^2 + 2du + u^2 + r$$

e como o quadrado das dezenas da raiz procurada é um numero exacto de centenas e, portanto, não pode existir em ordens inferiores, prescindiremos das 24 unidades do numero proposto e procuraremos as dezenas da raiz, extrahindo a raiz quadrada do maior quadrado contido em 57468.

Porem 57468 ainda é um numero maior do que 100 e, portanto, sua raiz quadrada é maior do que 10. O quadrado das dezenas desta raiz, sendo um numero exacto de centenas, não pode existir em ordens inferiores e, por isso, prescindindo das 68 unidades, procuraremos as dezenas da raiz em questão, extrahindo a raiz quadrada do maior quadrado contido em 574.

O mesmo raciocinio conduzir-nos-á ainda a separar os dois algarismos da direita de 574, como fizemos para o numero 3954.

Dispondo, pois, o calculo (*) para a extracção da raiz quadrada de 574 e effectuando, temos:

	5,74	d u 2 3	
d^2	4		$2d = 2 \times 2 = 4; 17 \div 4 = 4$ (alg. muito forte)
	17,4		$2d + u = 43$
$2du + u^2$	129		$u = 3$
r	45		$2du + u^2 = 129$
			mo 3
			$45 < 2 \times 23 + 1$

(*) C 224-27.

23 é a raiz quadrada de 574 e 45 o resto da operação; porem sendo 574 as centenas de 57468, 23 representa as dezenas da raiz quadrada deste numero e 45 resto de centenas. Escrevendo, pois, á direita destas 46 centenas as 68 unidades de 57468, temos 4568, numero que deve conter o dobro do producto das 23 dezenas da raiz pelas unidades, o quadrado das unidades e mais o resto da operação.

Cumpra agora determinar o algarismo das unidades, o que se consegue dividindo pelo dobro das dezenas da raiz (2×23) as dezenas do resto 456 ou já ficou dito.

	5,74,68	d u 23 9	
	4		$2d = 2 \times 23 = 46; 456 \div 46 = 9$
	17,4		$2d + u = 469$
	129		$u = 9$
$2du + u^2$	456,8		$2du + u^2 = 4221$
r	4221		$347 < 2 \times 239 + 1$

Achado o algarismo 9 das unidades, temos que a raiz quadrada de 57468 é 239, deixando a operação o resto 347; e como 57468 representa centenas de 5746824, segue-se que 239 são as dezenas da raiz quadrada deste numero e 347 resto de centenas.

Finalmente, reunindo ás 347 centenas do resto as 24 unidades do numero proposto, temos 34724, numero que deve conter o dobro do producto das 239 dezenas da raiz pelas unidades, o quadrado das unidades e mais o resto da operação; e, procedendo como temos feito até agora, determinaremos o algarismo das unidades, dando ao calculo a disposição seguinte:

5,7 4,6 8,2 4	$\overline{239} 7$	$d \ u$
4	43	469
$\overline{17,4}$	3	9
129	$\overline{129}$	4221
$\overline{456,8}$		
4221		$2d+u=4787$
$\overline{3472,4}$		$u=7$
$2du+u^2$	$\overline{33509}$	$2du+u^2=33509$
r	$\overline{1215}$	$<2 \times 2397 + 1$

Como se vê, antes de qualquer operação, tivemos que dividir o numero dado em classes de dois algarismos, a partir da direita (*), convindo notar que a ultima classe á esquerda poderá conter um só algarismo. A cada classe corresponde um algarismo para a raiz; o numero destes pode, portanto, ser determinado pela simples inspecção do numero proposto.

O primeiro algarismo (2) da raiz é a raiz quadrada do maior quadrado (4) contido na ultima classe á esquerda; e, subtrahindo desta este maior quadrado, escrevemos á direita do resto (1) a classe seguinte (74).

Para determinar o segundo algarismo da raiz (3), tomámos o primeiro resto (1) seguido da segunda classe (74), separámos á direita do numero assim formado (174) o ultimo algarismo (4) e o numero formado pelos algarismos restantes (17) dividimos pelo dobro do primeiro algarismo da raiz ($2 \times 2 = 4$). O quociente desta divisão ($17 \div 4 = 4$) será o algarismo procurado ou maior, convindo, portanto, verificá-lo.

Esta verificação poderia ser feita de dois mo-

(*) Facilmente se reconhece que esta primeira parte é commum ao processo empregado na extracção da raiz quadrada de 205209 (pags. 124 e 125).

dos: 1.º escrever-se o algarismo do quociente (ou 9 no maximo, se o quociente for um numero composto) á direita do primeiro algarismo da raiz e elevar-se o numero formado ao quadrado; este quadrado, subtrahido das duas primeiras classes consideradas, deve deixar um resto menor do que o dobro da raiz do primeiro algarismo, o quociente achado (ou 9 no maximo quando o quociente for um numero composto) e o numero assim formado multiplicar-se por esse quociente (ou por 9 quando se houver escripto 9); o producto subtrahido do primeiro resto seguido da segunda classe, deve deixar um resto menor do que o dobro da raiz mais uma unidade.

De um modo ou de outro, o resto obtido será o mesmo; e a impossibilidade de subtracção quer dada; e diminue-se uma unidade e faz-se nova verificação.

Adoptando de preferencia o segundo meio de verificação, escrevemos o quociente 4 á direita do dobro do primeiro algarismo da raiz ($2 \times 2 = 4$) e multiplicámos ainda por 4 o numero formado, 44; o producto (176) sendo maior do que 174, primeiro resto (1) seguido da segunda classe (74) reconhecemos que o algarismo 4 é muito forte e escrevemos 3 na raiz, verificando este ultimo algarismo. O producto $43 \times 3 = 129$, subtrahido de 174, deixa o resto $45 < 2 \times 23 + 1$.

Para ter o terceiro algarismo da raiz, escrevemos á direita do segundo resto (45) a terceira classe (68) do numero dado; á direita do numero assim formado (4568) separámos o ultimo algarismo (8) e dividimos o numero resultante (456) pelo dobro (2×23) da parte (23) já determinada da raiz; o quociente desta divisão ($456 \div 46 = 9$) é o algarismo procurado ou um muito forte.

Adoptando o segundo meio de verificação, escrevemos o quociente 9 á direita do dobro da raiz

achada ($2 \times 23 = 46$) e multiplicámos por 9 o numero obtido 469; o producto 4221, subtraído de 4568 (segundo resto, 45, seguido da terceira classe, 68) deixa um resto $347 < 2 \times 239 + 1$.

Assim determinámos, um por um, todos os algarismos da raiz.

Notemos ainda que, escrevendo á direita de um resto a classe seguinte do numero proposto, o numero assim formado, separando-se-lhe o ultimo algarismo da direita, pode não conter o dobro da raiz achada, isto é, o quociente da divisão é zero e este é o algarismo procurado. Escreveremos, portanto 0 na raiz; e, tomando nova classe do numero proposto, continuaremos a operação.

E' o que, no seguinte calculo, está indicado por meio de caracteres differentes.

29,2 3,4 8,3 7	5406		
25	$2 \times 5 = 10$	$2 \times 54 = 108$	$2 \times 540 = 1080$
<u>4 2,3</u>	$42 \div 10 = 4$	74 $\div 108 = 0$	$7483 \div 1080 = 7$
4 1 6	104		10807
<u>7 4 8 3,7</u>	4		7
6 4 8 3 6	416		<u>75649</u> > 74837
1 0 0 0 1			10806
			6
			<u>64836</u>

OBSERVAÇÃO. Temos dito que não existem caracteres pelos quaes possamos reconhecer se um numero dado é quadrado perfeito; entretanto é facil ver que absolutamente não podem ser quadrados perfeitos os numeros que não terminem por 1, 4, 6, 9 ou 25. Terminarão por 1 os quadrados dos numeros terminados por 1 ou 9; terminarão por 4 os quadrados dos numeros terminados por 2 ou 8; terminarão por 6 os dos numeros terminados por 4 ou 6; e por 9 os dos numeros terminados por 3 ou 7; porque o algarismo das unidades do quadrado é o desta

mesma ordem do quadrado das unidades da base. Terminarão por 25 os quadrados dos numeros terminados por 5; porque, em taes casos, $2du$ é $2 \times d \times 5 = d \times 10$, numero exacto de centenas; e as ordens inferiores serão preenchidas exclusivamente por u^2 , isto é, por $5^2 = 25$. O quadrado de um numero terminado por zeros terminará por um numero duplo de zeros, isto é, o numero que termina por um numero impar de zeros não pode ser quadrado perfeito.

Raiz cubica

A extracção da raiz cubica de um numero dado é ainda praticavel por qualquer dos processos directos e não admite outro, emquanto se trata do 1.º caso; e é facil reconhecer quando ha questão do 1.º caso ou do 2.º, porque, sendo $10^3 = 1000$, se conclue que a raiz cubica de um numero N será um numero simples quando for $N < 1000$ e composto no caso contrario.

Assim, sendo $N = a \times a \times a$, deveremos ter $N \div a = a \times a$; $a \times a \div a = a$; e a dificuldade consiste em que o proprio divisor a é a incognita do problema (p. 121).

Façamos applicação e seja $N = 216$; procedendo por tentativas, como no caso da raiz quadrada, teremos (*):

$$\begin{aligned} 216 \div 2 &= 108; & 108 \div 2 &= 54 \\ 216 \div 3 &= 72; & 72 \div 3 &= 24 \\ 216 \div 4 &= 54; & 54 \div 4 &= 13 \\ 216 \div 5 &= 43; & 43 \div 5 &= 8 \\ 216 \div 6 &= 36; & 36 \div 6 &= 6 \end{aligned}$$

6 é a raiz procurada, exacta.

Tomemos ainda outro exemplo e façamos $N = 315$. Procedendo como precedentemente, temos

(*) Quocientes inteiros exactos ou ap. por defeito.

$$\begin{aligned}
 315 \div 2 &= 157; & 157 \div 2 &= 78 \\
 315 \div 3 &= 105; & 105 \div 3 &= 35 \\
 315 \div 4 &= 78; & 78 \div 4 &= 19 \\
 315 \div 5 &= 63; & 63 \div 5 &= 12 \\
 315 \div 6 &= 52; & 52 \div 6 &= 8 \\
 315 \div 7 &= 45; & 45 \div 7 &= 6
 \end{aligned}$$

donde se conclue que a raiz cubica está comprehendida entre 6 e 7; é 6 a menos de uma unidade por defeito; 7 a menos de uma unidade por excesso.

Como se vê, mesmo no primeiro caso, este processo é já de difficil applicação na extracção da raiz cubica; elle é impraticavel na extracção das raizes de graus superiores ao terceiro pela serie de tentativas a que dá logar.

Resolvendo pelo segundo processo as mesmas questões, isto é, elevando successivamente ao cubo a serie dos numeros inteiros, até encontrar um numero que satisfaça, teremos para a primeira: $1^3=1$; $2^3=8$; $3^3=27$; $4^3=64$; $5^3=125$; $6^3=216$; e a raiz procurada é 6. Para a segunda questão temos: $6^3=216$; $7^3=343$; e estando o numero proposto comprehendido entre 216 e 343, cubos de 6 e de 7, a raiz procurada está comprehendida entre estes dois ultimos numeros, isto é, a raiz procurada é 6 a menos de uma unidade por defeito ou 7 a menos de uma unidade por excesso.

Finalmente, a questão se resolve com facilidade neste primeiro caso, por meio da seguinte taboa dos cubos dos numeros simples; pois que, ou o numero proposto é cubo perfeito e então sua raiz cubica se encontra na taboa, ou o contrario se dá e então o numero dado está comprehendido entre dois cubos perfeitos, cujas raizes cubicas representam a raiz procurada a menos de uma unidade por defeito ou excesso.

Bases	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Uma vez, porem, que a raiz procurada seja um numero composto, os processos directos não são mais

praticaveis, taes como ficaram expostos; vejamos, entretanto, como será possível, mediante ligeira modificação, applicar um delles á extracção da raiz cubica de um numero qualquer.

Seja 41063859 o numero dado e applicemos o processo das potenciações successivas.

Em primeiro logar $100^3 < 41063859 < 1000^3$; e, portanto, $100 < \sqrt[3]{41063859} < 1000$, isto é, a raiz procurada tem tres algarismos.

Posto isto, como $100^3=1000000$, o cubo das centenas da raiz procurada não pode dar unidades de ordem inferior a milhão; e, portanto, achar-se-á contido nos 41 milhões do numero proposto, ou, abstraindo do valor relativo, o algarismo das centenas será a raiz cubica do maior cubo contido em 41.

Porem $1^3=1$; $2^3=8$; $3^3=27$; $4^3=64$; donde se segue que o algarismo procurado é 3 e a raiz não pode conter menos de 30 nem mais de 39 dezenas.

O cubo das dezenas da raiz procurada, seja qual for o numero de dezenas, não dará unidades de ordem inferior a milhar e portanto existirá nos 41063 milhares do numero proposto; e determinaremos as dezenas, elevando ao cubo 31, 32, 33.... até formar o maior cubo contido em 41063.

Assim teremos: $31^3=29391$; $32^3=32768$; $33^3=35937$; $34^3=39304$; $35^3=42875$; e, por ser $34^3 < 41063 < 35^3$, segue-se que 34 é o numero de dezenas da raiz, a qual não pode ser menor do que 340 nem maior do que 349 unidades.

Finalmente, determinaremos o algarismo das unidades elevando ao cubo 341, 342.... até obtermos o maior cubo contido no numero dado, como segue:

$$\begin{aligned}
 341^3 &= 39651821; & 342^3 &= 40001688; & 343^3 &= 40353607; \\
 344^3 &= 40707584; & 345^3 &= 41063625; & 346^3 &= 41421736.
 \end{aligned}$$

A raiz procurada é, pois, 345 e o resto da operação 234, differença entre o numero dado e o maior cubo perfeito nelle contido.

Estudemos agora o processo indirecto; pois que o das divisões não somente dá logar a tentativas muito enfadonhas, como não precisa de ser exposto aqui, visto já ter sido applicado á extracção da raiz quadrada.

Suppondo $N > 1000$ um cubo perfeito. Se representarmos por $d+u$ a raiz cubica de N decomposta em dezenas e unidades, teremos

$$N = (d+u)^3$$

ou

$$N = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

Entretanto, no caso mais geral, N não é cubo perfeito e sua raiz cubica é obtida com approximação; sendo que, actualmente, nos limitaremos á determinação da raiz com um erro menor do que uma unidade por defeito, o que equivale a extrahir a raiz cubica do maior cubo perfeito contido em N .

Representando por n^3 esse maior cubo e por r a differença entre N e n^3 teremos

$$N = n^3 + r$$

e, decompondo n em dezenas e unidades

$$N = (d+u)^3 + r$$

$$\text{ou } N = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + r.$$

Ora, não existindo caracteres que nos indiquem se N é um cubo perfeito, consideraremos sempre o ultimo desenvolvimento, no qual será $r=0$, quando for $N=n^3$; accrescendo que, em todo caso, deve ser

$$r < 3n^2 + 3n + 1$$

porque se fosse seria

$$N = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

ou

$$N = (n+1)^3;$$

o que não pode ter logar, pois que é

$$N < (n+1)^3$$

por ser n a raiz cubica do maior cubo contido em N .
Seja $N = 165957$. Sendo $165957 > 1000$ sua raiz

cubica é um numero composto e deveremos ter

$$165957 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + r$$

sendo $r=0$ no caso em que o numero dado seja um cubo perfeito.

Procuremos extrahir a raiz cubica de 165957 ou do maior cubo contido neste numero.

Começando pela determinação do algarismo das dezenas, como fizemos no caso de raiz quadrada, notemos que sendo $10^3 = 1000$, d^3 , cubo das dezenas da raiz procurada, deverá existir nos milhares do numero proposto e em caso algum nas ordens inferiores.

Prescindindo, portanto, das tres primeiras ordens da direita do numero proposto, somos levados a procurar o cubo das dezenas da raiz nos 165 milhares de 165957, os quaes ainda poderão conter reservas que hajam affluído das outras ordens; e extrahindo a raiz cubica do maior cubo contido em 165 que é 125, teremos $\sqrt[3]{165} = 5$, algarismo das dezenas da raiz procurada (*).

Elevando ao cubo as dezenas encontradas, o que dá $5^3 = 125$ milhares, e subtrahindo este resultado dos milhares do numero proposto, achamos um resto $165 - 125 = 40$ milhares; os quaes, reunidos ás ordens in-

(*) 5 é o verdadeiro algarismo procurado; porque se admittissemos 6 dezenas para a raiz, o cubo seria $6^3 = 216$ milhares, numero maior do que o proposto; e se tivissemos 4 dezenas cuja terceira potencia é $4^3 = 64$ milhares, seria necessario que os milhares de reservas das outras partes do cubo da raiz e do resto da operação attingissem a $165 - 64 = 101$ milhares, o que não tem logar ainda que o algarismo das unidades seja o maior possível, 9, como mostra o seguinte calculo:

$$3d^2u = 3 \times 40^2 \times 9 = 3 \times 1600 \times 9 = 43200$$

$$3du^2 = 3 \times 40 \times 9^2 = 3 \times 40 \times 81 = 9720$$

$$u^3 =$$

$$93 = 729$$

$$\text{Resto o maior possível } 3 \times 49^2 + 3 \times 49 = 7350$$

$$60999$$

Reserva 60 milhares.

feriores de que havíamos prescindido, fazem o numero 40957

Este numero representa o proposto menos o cubo das dezenas de sua raiz cubica, isto é,

$$40957 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + r - d^3$$

$$40957 = 3d^2u + 3du^2 + u^3 + r.$$

ou
Resta-nos determinar o algarismo das unidades da raiz.

Se dividirmos $3d^2u$ por $3d^2$, teremos para quociente u , unidades procuradas, e a difficuldade consiste agora em podermos destacar do numero 40957 esta segunda parte do cubo da raiz.

Sendo, porem, d^2 , quadrado de dezenas, um numero exacto de centenas, o producto $3d^2u$ não pode existir em ordens inferiores e sim nas centenas do numero em questão; pelo que, separando em 40957 os dois ultimos algarismos da direita que occupam ordens inferiores a centenas, dividiremos as 409 centenas do mesmo numero por $3d^2$ ou $3 \times 5^2 = 75$ centenas; e o quociente, $409 \div 75 = 5$, é o algarismo procurado ou um maior do que elle, pois que em 409 centenas podem existir reservas das outras partes do cubo da raiz.

Como meio de verificação e para determinar o resto da operação no caso em que a raiz encontrada seja a verdadeira, elevemos 55 ao cubo, afim de subtrahir o resultado do numero proposto; e como $55^3 = 166375$, é maior do que o numero dado, conclue-se que o algarismo 5 é muito forte.

Escrevendo, portanto, 4 e elevando 54 ao cubo, teremos $54^3 = 157464$; numero que, subtrahido do proposto, dá $165957 - 157464 = 8493$, resto da operação.

Para nos certificarmos de que 54 é a verdadeira raiz procurada, notemos que ella não é muito forte uma vez que, elevada ao cubo, produz um numero menor do que o proposto; e não é muito fraca uma vez que, elevada ao cubo e subtrahida do numero dado,

o resto da operação é $8493 < 3 \times 54^2 + 3 \times 54 + 1$, satisfazendo assim a condição $r < 3n^2 + 3n + 1$.

Na pratica dispõe-se o calculo do seguinte modo:

N	165,957	d	54
	d^3		$3d^2 = 3 \times 25 = 75$
			$409 \div 75 = 5$ (algarismo forte)
			54
	n^3		54
	$N - n^3$		216
			270
			2916
			54
			11664
			14580
			157464

Verificação do algarismo 4.

Outro meio de verificação da raiz e determinação do resto da operação ainda poderia ser empregado:

Voltando à relação $40957 = 3d^2u + 3du^2 + u^3 + r$, donde $r = 40957 - (3d^2u + 3du^2 + u^3)$, notemos que este desenvolvimento $3d^2u + 3du^2 + u^3$ pode ser obtido do seguinte modo: multiplicando-se $d + u$ por $3d$ vem $(d + u)3d = 3d^2 + 3du$; sommando ao resultado u^2 , tem-se $3d^2 + 3du + u^2$; e, finalmente, multiplicando o ultimo resultado por u , encontra-se $(3d^2 + 3du + u^2)u = 3d^2u + 3du^2 + u^3$. Consiste o processo em multiplicar-se toda a raiz achada pelo triplo de suas dezenas, reunir ao resultado o quadrado das unidades e multiplicar o todo ainda pelas unidades. Este producto, subtrahido de 40957 (no nosso exemplo), porá em evidencia o mesmo resto 8493, já encontrado como se vê em seguida:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 d^3 \quad 125 \\
 \hline
 409,57 \\
 \hline
 32464 \\
 \hline
 8493
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 d \quad u \\
 165,957 \quad 54 \\
 \hline
 3d^2 = 3 \times 25 = 75 \\
 409 \div 75 = 5 \text{ (Alg. forte)} \\
 \hline
 \text{Verificação} \\
 \text{da raiz } 54
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 d+u \quad 54 \\
 3d \quad 150 \\
 \hline
 270 \\
 54 \\
 \hline
 8100 \\
 u^2 \quad 16 \\
 \hline
 8116 \\
 u \quad 4 \\
 \hline
 3d^2u + 3du^2 + u^3 \quad 32464
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

Ainda outro exemplo virá mostrar de que modo deveremos proceder quando a raiz procurada constar de 3 ou mais algarismos.

Seja extrahir a raiz cubica de 47160102479; para isto supporemos a raiz procurada, seja qual for o numero de seus algarismos, decomposta em dezenas e unidades; donde

$$47160102479 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3 + r;$$

e sendo d^3 , cubo das dezenas da raiz, um numero exacto de milhares, não poderá existir em ordens inferiores e sim nas 47160102 milhares do numero dado; os quaes poderão conter ainda milhares provenientes das outras partes do cubo da raiz.

Prescindiremos, pois, dos tres algarismos da direita do numero dado, que occupam ordens inferiores a milhares, e procuraremos ás dezenas da raiz, extrahindo a raiz cubica do maior cubo perfeito contido em 47160102.

Porem este numero ainda é maior do que 1000 e, portanto, sua raiz cubica é um numero composto de dezenas e unidades. O cubo das dezenas da raiz cubica de 47160102, sendo um numero exacto de milhares, não poderá existir em ordens inferiores; e, por isto, ainda aqui, prescindiremos dos tres algarismos da direita e procuraremos as dezenas da raiz

deste numero, extrahindo a raiz cubica do maior cubo contido em 47160 ou, o que é o mesmo, extrahindo a raiz cubica de 47160 a menos de uma unidade por defeito.

Dispondo o calculo e effectuando, como já sabemos, vem:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 d \quad u \\
 47,160 \quad 36 \\
 \hline
 3^3 \quad 27 \\
 \hline
 201,60 \\
 \hline
 36^3 \quad 46656 \\
 \hline
 47160 - 36^3 \quad 504
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 d \quad u \\
 36 \\
 \hline
 3d^2 = 3 \times 9 = 27 \text{ (1)} \\
 201 \div 27 = 7 \text{ (forte)} \\
 \hline
 36 \\
 36 \\
 \hline
 216 \\
 108 \\
 \hline
 1296 \\
 36 \\
 \hline
 7776 \\
 3888 \\
 \hline
 36^3 = 46656
 \end{array}
 \end{array}$$

Reconhecido que o algarismo 7 é forte, escreve-se 6 e verifica-se a raiz 36, formando o cubo deste numero.

36 é a raiz cubica de 47160 e 504 o resto da operação; porem 47160 representa milhares de 47160102; e, portanto 36 representa as dezenas da raiz cubica deste numero e 504 resto de milhares; faltando determinar o algarismo das unidades da raiz.

A' direita do resto 504 milhares escrevamos as 102 unidades de que haviamos prescindido; o numero formado, 504102, deverá conter o triplo do producto do quadrado das 36 dezenas da raiz pelas unidades, mais o triplo do producto dessas 36 dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades, alem do resto da operação.

Para determinar as unidades da raiz, dividamos as 5041 centenas de 504102 pelas centenas resultantes do triplo do quadrado das dezenas da raiz; o quociente desta divisão será o algarismo das unidades ou maior (2); o que verificaremos

(1) 27 centenas: do mesmo modo q' o dividendo é 201 centenas.

(2) E' desnecessario insistir sobre a razão de se considerarem só as centenas de 504102.

como ficou indicado, desfalcando-o se for necessario. Assim procedendo, teremos

	$\overline{d \ u}$	
	$\overline{36 \ 1}$	
3^3	27	$3 \times 3^2 = 27$
	<u>201,60</u>	$201 \div 27 = 7$ (forte)
36^3	466 56	$3d^2 = 3 \times 36^2 = 3888$
	<u>5 041,02</u>	$5041 \div 3888 = 1$
361^3	470 458 81	361
r	<u>1 142 21</u>	361
		361
		2166
		1083
		<u>130321</u>
		361
		<u>130321</u>
		781926
		<u>390963</u>
		<u>47045881</u>

Verificação do algarismo das unidades.

Temos, assim, determinado a raiz cubica, 361, de 47160102; mas, representando este numero milhares do numero dado, 47160102479, sua raiz cubica, 361, representa dezenas da raiz procurada; e o resto da operação, 114221 milhares, reunido ás 479 unidades de que haviamos prescindido, faz o numero 114221479.

Agora que conhecemos as dezenas da raiz do numero proposto, procuremos determinar as unidades da mesma raiz; e, para isto, notemos que 114221479 é o numero dado menos o cubo das dezenas de sua raiz cubica e, portanto, deve conter o triplo do producto do quadrado dessas dezenas pelas unidades da raiz, mais o triplo do producto das dezenas pelo quadrado das unidades, mais o cubo das unidades, alem do resto da operação.

O mesmo raciocinio, já por vezes empregado, nos levará a prescindir dos dois ultimos algarismos da direita de 114221479 e dividir as 1142214 centenas deste numero pelas centenas resultantes do triplo do quadrado das dezenas da raiz ou $3d^2 =$

$3 \times 361^2 = 390963$. O quociente desta divisão será o algarismo procurado ou um mais forte que desfalcaremos convenientemente.

O calculo tomará emfim a disposição seguinte:

3^3	27	$3 \times 3^2 = 27$	
	<u>201,60</u>	$201 \div 27 = 7$ (forte)	
36^3	466 56	$3d^2 = 3 \times 36^2 = 3888$	
	<u>5 041,02</u>	$5041 \div 3888 = 1$	
361^3	470 458 81	361	
r	<u>1 142 21</u>	361	
		361	
		2166	
		1083	
		<u>130321</u>	
		361	
		<u>130321</u>	
		781926	
		<u>390963</u>	
		<u>47045881</u>	

3^3	27	$3 \times 3^2 = 27$	
	<u>201,60</u>	$201 \div 27 = 7$ (forte)	
36^3	466 56	$3d^2 = 3 \times 36^2 = 3888$	
	<u>5 041,02</u>	$5041 \div 3888 = 1$	
361^3	470 458 81	361	
r	<u>1 142 21</u>	361	
		361	
		2166	
		1083	
		<u>130321</u>	
		361	
		<u>130321</u>	
		781926	
		<u>390963</u>	
		<u>47045881</u>	

3^3	27	$3 \times 3^2 = 27$	
	<u>201,60</u>	$201 \div 27 = 7$ (forte)	
36^3	466 56	$3d^2 = 3 \times 36^2 = 3888$	
	<u>5 041,02</u>	$5041 \div 3888 = 1$	
361^3	470 458 81	361	
r	<u>1 142 21</u>	361	
		361	
		2166	
		1083	
		<u>130321</u>	
		361	
		<u>130321</u>	
		781926	
		<u>390963</u>	
		<u>47045881</u>	

Como se vê, antes de qualquer operação, tivemos que dividir o numero dado, da direita para a esquerda em classes de tres algarismos (*), não importando que a ultima classe á esquerda conste de menos de tres algarismos. A cada classe corresponde um algarismo para a raiz; o numero destes pode, pois, ser determinado pela simples inspecção do numero dado.

O primeiro algarismo (3) da raiz é a raiz cubica do maior cubo contido em 47, primeira classe a partir da esquerda; e, subtrahindo desta este maior cubo ($3^3 = 27$), escrevemos á direita do resto (20) a classe seguinte (160).

Para determinar o segundo algarismo da raiz, escrevemos, á direita do primeiro resto (20) a segunda classe (160), separamos á direita do numero assim formado (20160) os dois ultimos algarismos (60) e o numero formado pelos algarismos restantes (201) dividimos pelo triplo do quadrado do primeiro algarismo da raiz ($3 \times 3^2 = 27$).

O quociente desta divisão (7), podendo ser o algarismo procurado ou um mais forte, deve ser verificado e esta verificação pode ser feita de dois modos:

1.º Escrever-se o algarismo achado (ou 9 no maximo, se o quociente for composto) á direita do primeiro algarismo da raiz e elevar-se o numero assim formado ao cubo; o resultado, subtrahido das duas primeiras classes consideradas, deve deixar um resto menor do que o triplo do quadrado da raiz, mais o triplo da raiz, mais uma unidade.

2.º Escrevendo o quociente achado (ou 9 no maximo) á direita do primeiro algarismo da raiz, multiplicar-se o numero assim formado pelo triplo do primeiro algarismo seguido de um zero, juntar-se ao producto o quadrado do segundo algarismo e multipli-

(*) Facilmente se reconhece que esta primeira parte é comum ao processo empregado á pagina 137.

car-se o resultado ainda pelo segundo algarismo. O producto, subtrahido do primeiro resto seguido da segunda classe, deve deixar um resto menor do que o triplo do quadrado da raiz, mais o triplo da raiz, mais um.

De um modo ou de outro, o resto obtido é o mesmo; e a impossibilidade de subtracção indica que o algarismo achado é mais forte do que o verdadeiro; diminue-se uma unidade e faz-se nova verificação.

Adoptando o primeiro processo, escrevemos, á direita do primeiro algarismo da raiz, o quociente achado (7) e, elevando ao cubo o numero resultante, reconhecemos que 37^3 é maior do que o numero 47160 formado pelas duas primeiras classes á esquerda do proposto; pelo que, escrevemos 6 na raiz e, elevando 36 ao cubo, subtrahimos o resultado das duas classes consideradas, obtendo o resto 504.

Para determinar o terceiro algarismo da raiz, escrevemos á direita do segundo resto (504) a terceira classe (102) do numero dado; á direita do numero assim formado (504102) separamos dois algarismos (02) e dividimos o numero resultante (5041) pelo triplo do quadrado (3×36^2) da parte (36) já determinada da raiz; o quociente desta divisão podendo ser o algarismo procurado ou maior, convem verificá-lo.

Adoptando o primeiro modo de verificação, escrevemos o quociente achado (ou 9, se o quociente fosse composto) á direita dos dois algarismos da raiz já determinados e o numero resultante (361), elevado ao cubo e subtrahido das tres primeiras classes á esquerda do proposto, deixa o resto 114221.

Continuando do mesmo modo, conseguimos determinar, um por um, todos os algarismos da raiz procurada.

Temos dito que, apparecendo um quociente composto, deve se fazer a verificação com o algarismo 9. De facto, a existencia de 10 unidades de certa ordem na raiz viria augmentar de uma unidade a or-

dem immediatamente superior, o que não pode ter logar, se não houve erro na determinação do algarismo desta.

Adoptado de preferencia o segundo modo de verificação, o calculo tomaria a disposição seguinte:

$\begin{array}{r} 47,160,102,479 \\ 27 \overline{) 201,60} \\ 19656 \\ \hline 5041,02 \\ 389881 \\ \hline 1142214,796^2 \\ 78235928 \\ \hline 35985,551 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 3^2 = 27 \\ 201 \div 27 = 7 \text{ (forte)} \\ \hline 36 \\ 90 \\ \hline 3 \times 30 \\ \hline 3240 \\ 36 \\ \hline 3276 \\ 6 \\ \hline 19656 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 36^2 = 3888 \\ 5041 \div 3888 = 1 \\ \hline 361 \\ 1080 \\ \hline 3 \times 360 \\ \hline 2888 \\ 361 \\ \hline 389880 \\ 1 \\ \hline 389881 \\ 1 \\ \hline 389881 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 361^2 = 390963 \\ 1142214 \div 390963 = \\ = 3 \text{ (forte)} \\ \hline 3612 \\ 10830 \\ \hline 3 \times 3610 \\ \hline 10836 \\ 28896 \\ \hline 3612 \\ 39117960 \\ 4 \\ \hline 39117964 \\ 2 \\ \hline 78235928 \end{array}$
	<i>Verificação do alg. 6</i>	<i>Verificação do alg. 1</i>	<i>Verificação do alg. 2</i>

Observemos ainda, que, escrevendo á direita de um resto a classe seguinte do numero proposto e, no numero assim formado, separando os dois ultimos algarismos da direita, o numero resultante pode não conter o triplo do quadrado da raiz achada, isto é, o quociente da divisão pode ser zero e este será o

algarismo procurado. Escreveremos, portanto, zero na raiz e, tomamos a nova classe no numero proposto, continuaremos a operação.
E' o que, no seguinte calculo, está indicado por meio de caracteres diferentes.

$\begin{array}{r} 39,4\ 77,659,8\ 83\ 3405 \\ \underline{27} \\ 12\ 4,77 \\ \underline{39\ 3\ 04} \\ 1\ 736598,83 \\ \underline{39\ 4\ 77\ 655\ 1\ 25} \\ 4\ 758 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 3^2 = 27 \\ 124 \div 27 = 4 \\ \underline{34} \\ 34 \\ \underline{136} \\ 102 \\ \underline{1156} \\ 34 \\ \underline{4624} \\ 3468 \\ \underline{39304} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 34^2 = 3468 \\ 1736 \div 3468 = 0 \\ \underline{3405} \\ 3405 \\ \underline{17025} \\ 13620 \\ \underline{10215} \\ 11594025 \\ \underline{3405} \\ 57970125 \\ \underline{46376100} \\ 34782075 \\ \underline{39477655125} \end{array}$
---	--	---

Raizes de graus superiores ao terceiro

Seja extrahir a raiz de 5.^o grau do numero 15.045.919.515.750.

Sendo $100^5 = 10000000000$

e $1000^5 = 1000000000000000$, segue-se

que é $100^5 < 15045919515750 < 1000^5$

ou $100 < \sqrt[5]{15045919515750} < 1000$,

isto é, a raiz procurada tem tres algarismos.

Para determinar o algarismo das centenas, notemos que não podendo a 5.^a potencia de centenas dar unidades de ordens inferiores a dezenas de bilhões, a 5.^a potencia das centenas procuradas existirá nas 1504 dezenas de bilhões do numero proposto e determinaremos o algarismo da raiz procurada, extrahindo a raiz de 5.^o grau da maior potencia deste grau contida em 1504.

Assim, teremos:

$1^5 = 1$; $2^5 = 32$; $3^5 = 243$; $4^5 = 1024$; $5^5 = 3125$.

4 é, pois, o algarismo das centenas da raiz que não pode conter nem menos de 40 nem mais de 49 dezenas; e como a 5.^a potencia de dezenas é um numero exacto de centenas de milhares ($10^5 = 100000$), obteremos as dezenas da raiz elevando á 5.^a potencia 41, 42, 43.....até formamos a maior quinta potencia contida nas 150459195 centenas de milhares do numero proposto; a raiz correspondente será o numero procurado.

Assim procedendo, teremos:

$41^5 = 116.266.201$.

$42^5 = 130.691.232$

$43^5 = 147.008.443$

$44^5 = 164.916.224$;