

Eixo e polo de um círculo da esfera: — Consideremos um círculo qualquer da esfera. O diâmetro da esfera perpendicular ao plano dêsse círculo chama-se *eixo* dêsse círculo e as extremida-

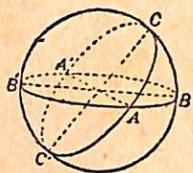


Fig. 450



Fig. 451

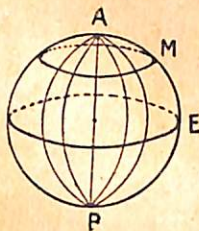


Fig. 452

des do eixo chamam-se *polos* do mesmo círculo da esfera (A e B na fig. 452).

Considerando um diâmetro qualquer como *eixo de revolução*, o círculo máximo perpendicular a tal eixo chama-se *equador*; os outros círculos menores perpendiculares ao eixo são os *círculos paralelos* (fig. 452).

Os círculos máximos que passam pelos polos do eixo de revolução chamam-se *meridianos* (fig. 452).

Porções da superfície esférica. — As porções da superfície esférica mais importantes são: a zona esférica, a calota e o fuso esférico.

Zona esférica é a porção da superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos (fig. 453). Os círculos que os dois planos determinam na superfície esférica são as *bases* da zona e a distância entre as bases é a *altura* da zona.

Se um dos planos se tornar tangente à esfera, uma das bases da zona se reduzirá a um ponto; tem-se, então, a zona de uma só base ou *calota* (fig. 454).

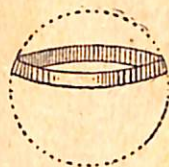


Fig. 453



Fig. 454



Fig. 455

Fuso esférico é a porção da superfície esférica compreendida entre dois semi-círculos máximos que têm o mesmo diâmetro (fig. 455).

Porções da esfera. — Entre as porções da esfera mais comumente encontradas, citaremos: o segmento, a cunha e o sector esféricos.

Segmento esférico. — é a porção da esfera compreendida entre dois planos paralelos (fig. 456). Os círculos que estes planos determinam são as bases do segmento e a distância entre as bases é a altura.

Se um dos planos se torna tangente à esfera, tem-se o segmento esférico de uma só base (fig. 457).

O segmento de duas bases é limitado por estas e por uma zona; o de uma só base é limitado por esta e por uma calota.

Cunha esférica é a porção da esfera limitada por um fuso e pelos dois semi-círculos máximos que determinam o fuso (fig. 458).



Fig. 456



Fig. 457



Fig. 458

Sector esférico é a porção da esfera gerada pela revolução completa de um sector circular em torno de um diâmetro que não o atravessa (fig. 459).

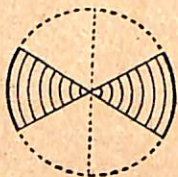


Fig. 459



Fig. 460

O *vértice* do sector é o centro da esfera e a *base* é uma zona ou uma calota (fig. 460).

Nota — Para as lições dos capítulos XV, XVI, XVII e XVIII é vantajoso que o professor disponha de uma coleção de sólidos geométricos.

Estes sólidos devem ser em cartão, e de preferência construídos pelos alunos.

QUESTIONÁRIO

1. Que é superfície cilíndrica?
2. Como se chama o sólido limitado por uma superfície cilíndrica e por dois planos paralelos?
3. Como pode ser o cilindro?
4. Que é altura do cilindro?
5. Como pode ser gerado um cilindro reto de base circular?
6. Em que cilindro a altura é igual à geratriz?
7. Que é tronco de cilindro e que outro nome se lhe dá?
8. Que é superfície cônica?
9. Como se chama o sólido limitado pela superfície cônica e por um plano que corta todas as geratrizes dessa superfície?
10. Que é cone reto de base circular?
11. Onde cai a altura do cone reto de base circular?
12. Que é tronco de cone e que outro nome tem?
13. Como pode ser gerado o cone reto de base circular?
14. Como pode ser gerado o tronco de cone de bases paralelas.
15. Quais são as secções cônicas?
16. Que é superfície esférica?
17. Que é esfera?
18. Com que instrumento se traçam círculos na superfície da esfera?
19. Qualquer secção plana da esfera que forma tem?
20. Como se chama o círculo que tem o mesmo raio da esfera?
21. Que é círculo menor da esfera?
22. Qual a propriedade do plano tangente à esfera?
23. Que são polos de um círculo da esfera?
24. Considerado um diâmetro da esfera como eixo, que é equador? e círculos paralelos? e meridianos?
25. Diga quais as porções da superfície esférica mais importantes e descreva-as.
26. Descreva as porções da esfera mais comumente encontradas.

CAPÍTULO -XIX

Áreas dos poliedros e dos corpos redondos.

A área total de um poliedro é igual à soma das áreas de todas as faces.

No poliedro regular, como as faces são iguais entre si, basta multiplicar a área, a , de uma face pelo número, n , de faces do poliedro.

Eis a fórmula:

$$AT = a \times n$$

HEXAEDRO REGULAR ou CUBO

Cada face do hexaedro é um quadrado cujo lado é a aresta do hexaedro.

A área de cada face é, portanto, a^2 e a área total é igual a 6 vezes a^2 , ou

$$AT = 6 \times a^2$$

Exercício — A aresta de um hexaedro regular é igual a 5 centímetros, pede-se a área total.

Aplicamos a fórmula e teremos:

$$AT = 6 \times 5^2 = 6 \times 25 = 150$$

A área total = 150 centímetros quadrados.

Exercício II — Qual a aresta de um caixa cúbica cuja área total é igual a 42336 centímetros quadrados?

$$\text{A área de uma face é } \frac{42336}{6} = 7.056$$

Portanto, a aresta da caixa cúbica é igual a $\sqrt{7056} = 84$ centímetros.

PRISMA RETO

A área lateral do prisma reto é igual ao perímetro da base multiplicado pela altura:

$$AL = P \times a$$

Exercício I — Pede-se a área lateral de um prisma reto, sabendo-se que a base tem 12cm de perímetro e que a altura é 5cm.

$$AL = 12 \times 5 = 60$$

Resposta: A área lateral é igual 60cm².

A área total é igual à área lateral (perímetro da base multiplicado pela altura) mais as áreas das duas bases:

$$AT = P \times a + 2B$$

Exercício II — Qual a área total de um prisma triangular regular tendo 8 centímetros de altura e 5cm para lado da base?

$$\text{O perímetro da base} = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{Uma base} = \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25 \times 1,732}{4} = 10,8250$$

Substituamos na fórmula P , a e B pelos seus valores.

$$AT = 15 \times 8 + 2 \times 10,8250 = 120 + 21,65 = 141,65$$

Resposta: A área total é 141,65cm².

PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

Chamando a , b e c as dimensões de paralelepípedo retângulo e lembrando que as faces opostas são iguais, acha-se para área total

$$AT = 2ab + 2ac + 2ab = 2(ab + ac + bc)$$

Exercício — Qual a área total de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 2, 5 e 7 centímetros?

$$AT = 2(2 \times 5 + 2 \times 7 + 5 \times 7) = 2 \times 59 = 118$$

Resposta: A área é 118 cm².

PRISMA OBLÍQUO

A área lateral de um prisma oblíquo é igual ao produto da aresta lateral pelo perímetro da secção reta:

$$AL = P sr \times a$$

$P sr$ é o perímetro da secção reta e a é a aresta lateral do prisma.

Exercício — Qual a área lateral de um prisma oblíquo cuja secção reta tem 24,5m de perímetro e cuja aresta lateral é 42,8m?

$$AL = 24,50 \times 42,80 = 1048,60m^2$$

PIRÂMIDE REGULAR

A área lateral da pirâmide regular é igual ao semi-produto do perímetro da base pelo apótema:

$$AL = \frac{P \times ap}{2}$$

Com efeito, as faces laterais da pirâmide regular são triângulos isóceles iguais e a altura desses triângulos é o apótema da pirâmide.

Exercício — Qual a área lateral de uma pirâmide pentagonal cujo apótema mede 14 centímetros e um lado do polígono da base 4 centímetros?

O perímetro da base é $= 4 \times 5 = 20$ centímetros.

O apótema sendo 14, vem

$$AL = \frac{20 \times 14}{2} = 140.$$

Resposta: A área lateral é 140cm².

A área total da pirâmide regular é igual à área lateral (semi-produto do perímetro da base pelo apótema) mais a área da base:

$$AT = \frac{P \times ap}{2} + B$$

Exercício — Qual a área total de uma pirâmide quadrangular regular cujo apótema é igual a 8 centímetros e um lado da base 3 centímetros?

O perímetro da base $= 3 \times 4 = 12$ centímetros

A base $= 3 \times 3 = 9$ centímetros quadrados, portanto

$$AT = \frac{12 \times 8}{2} + 9 = 57$$

Resposta: A área total é 57cm².

TRONCO DE PIRÂMIDE REGULAR

A área lateral de um tronco de pirâmide regular de bases paralelas é igual à semi-soma

dos perímetros das bases multiplicada pelo apótema:

$$AL = \frac{P+p}{2} \times ap$$

porque esta área se compõe de trapézios iguais, cuja altura é o apótema e cujas bases somadas formam os perímetros das bases do tronco.

Exercício — Qual a área lateral de um tronco de pirâmide de bases paralelas em que estas têm 25m e 35m de perímetro, respectivamente, e cujo apótema é 2,5m.

Substituindo-se P , p e ap pelos seus valores, teremos:

$$AL = \frac{35 + 25}{2} \times 2,50 = 30 \times 2,50 = 75.$$

Resposta: A área lateral é 75cm².

CILINDRO RETO DE BASE CIRCULAR

A área lateral, isto é, a área da superfície cilíndrica é igual à circunferência da base multiplicada pela altura:

$$AL = 2\pi R \times a$$

Exercício — Qual a área lateral de um cilindro com 50 centímetros de altura e 10 centímetros de raio da base?

A circunferência da base = $3,1416 \times 0,20 = 0,62832$ portanto

$$AL = 0,62832 \times 0,50 = 0,314160m^2.$$

A área total é igual à circunferência da base multiplicada pela altura mais duas vezes a área da base:

$$AT = 2\pi R \times a + 2\pi R^2 = 2\pi R (a + R)$$

Exercício — A altura de um cilindro é 4 centímetros e o raio da base 2 centímetros; qual é a área total? Substituamos na fórmula a e R pelos seus valores e teremos:

$$AT = 2 \times 3,1416 \times 0,02 (0,04 + 0,02) = 0,125664 \times 0,06 = 0,00753984m^2$$

TRONCO DE CILINDRO

A área lateral de um tronco de cilindro reto é igual ao produto da circunferência da base pela média aritmética entre a maior e a menor das geratrizes (fig. 461).

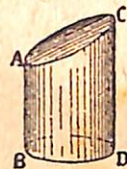


Fig. 461

$$AL = 2\pi R \times \frac{G+g}{2}$$

G é a geratriz maior e g é a geratriz menor.

Exercício — Qual a área lateral de um tronco de cilindro reto cuja base tem 6 metros de raio e no qual a geratriz menor tem 7,5m e a maior 8,3m.

Substituindo-se na fórmula as letras pelos seus valores:

$$AL = 2 \times 3,1416 \times 6 \times \frac{8,30 + 7,50}{2} = 297,823680m^2.$$

CONE RETO DE BASE CIRCULAR

A área lateral, isto é, a área da superfície cônica é igual ao semi-produto da circunferência da base pelo apótema ou geratriz

$$AL = \frac{2\pi R g}{2} = \pi R g$$

Exercício — Qual a área lateral de um cone reto de base circular com 6 centímetros de raio e 9 centímetros de geratriz?

$$A = 3,1416 \times 0,06 \times 0,09 = 0,01696464\text{m}^2$$

A área total é igual à área lateral mais a área da base:

$$AT = \pi R g + \pi R^2 = \pi R (g + R)$$

Exercício II — A geratriz de um cone é 32 centímetros e o raio da base 8 centímetros; pede-se a área total.

$$AT = 3,1416 \times 0,08 \times 0,40 = 0,10053120\text{m}^2$$

TRONCO DE CONE

A área lateral de um tronco de cone de bases paralelas é igual ao produto da semi-soma das circunferências das bases pela geratriz:

$$AL = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \times g = (\pi R + \pi r)g = \pi (R + r)g$$

Exercício III — Qual a área lateral de um tronco de cone reto de base circular, sabendo-se que os raios das bases são 8m e 6m, respectivamente, e a geratriz é 10,85m?

Substituindo, na formula, cada letra pelo seu valor, tem-se:

$$AL = 3,1416 (8 + 6) 10,85 = 477,209040$$

Resposta: a área lateral do tronco é 477,209040m².

ESFERA

A área da esfera é igual ao quádruplo da área do círculo máximo:

$$A = 4\pi R^2$$

Exercício I — Qual a área de uma esfera de 25 centímetros de raio?

Substituindo, na fórmula, R por 0,25 e π por 3,1416, obtém-se

$$A = 4 \times 3,1416 \times 0,25^2.$$

Resposta: a área da esfera é 0,7854m²

O raio de uma esfera é igual à raiz quadrada do quociente da divisão da área da esfera por 4π

$$R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

Exercício II — Qual o raio de uma esfera cuja área é igual a 50,2656m²?

$$\text{Substituindo, na fórmula, } R = \sqrt{\frac{50,2656}{12,5664}} = \sqrt{4} = 2.$$

Resposta: o raio é igual a 2 metros.

ZONA ESFÉRICA

A área de uma zona (ou de uma calota) é igual ao produto da circunferência de um círculo máximo da esfera pela altura da zona:

$$A = 2\pi R \times a$$

Exercício — Em uma esfera de 26 metros de raio, tomamos uma zona de 1,22m de altura. Qual a sua área?

$$A = 2 \times 3,1416 \times 26 \times 1,22 = 199,303104\text{m}^2$$

FUSO ESFÉRICO

A área do fuso esférico é igual ao produto da área do círculo máximo da esfera pela medida do

ângulo dividida por 90. Assim, sendo n o número de graus do ângulo,

$$A = \frac{\pi R^2 n}{90}$$

Exercício — Qual a área de um fuso esférico de 18 graus numa esfera de 5 metros de raio?

$$A = \frac{3,1416 \times 25 \times 18}{90} = 15,7080\text{m}^2$$

Observação — Quando a medida do ângulo fôr expressa em minutos (m minutos, por exemplo), deve-se dividir a expressão acima por 60 e tem-se:

$$A = \frac{\pi R^2 m}{90 \times 60} = \frac{\pi R^2 m}{5400}$$

Finalmente, se a medida do ângulo fôr dada em segundos (s segundos, por exemplo), deve-se dividir esta última expressão por 60 e tem-se

$$A = \frac{\pi R^2 s}{90 \times 60 \times 60} = \frac{\pi R^2 s}{324000}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule a área de um cubo com 2,8m de aresta.
2. Determine a aresta de um cubo de 150cm² de área.
3. Ache a área lateral e a área total de um prisma quadrangular regular tendo o lado da base 2,5cm e a altura 42cm.
4. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são: 1,5cm, 12cm e 8cm. Qual a área do paralelepípedo?

5. Ache a área lateral de uma pirâmide hexagonal regular medindo o lado da base 7cm e o apótema da pirâmide 9cm.
6. Calcular a área lateral e a área total de uma pirâmide octogonal regular sabendo que o apótema da pirâmide mede 12cm e que a base está inscrita num círculo de 5cm de raio.
7. Ache a área lateral e a área total de um cilindro circular reto com 16cm de altura e 2,5cm de raio.
8. A geratriz maior de um tronco de cilindro mede 25cm e a menor, 18cm; a base tem 3cm de raio. Qual a área lateral do tronco?
9. Determine a área lateral de um cone circular reto com 8cm de geratriz e 1,4cm de raio. Ache depois a área total.
10. Um tronco de cone circular reto de bases paralelas tem 12cm de geratriz e os raios das bases são, respectivamente, 6,5cm e 4,8cm. Qual a área lateral do tronco?
11. Determinar a área total do tronco de cone a que se refere o problema 10.
12. Determine a área da esfera de 1m de raio.
13. A área de uma esfera é 1m². Qual é o raio?
14. Qual a área de uma zona de 3,8cm de altura numa esfera de 18cm de diâmetro?
15. Ache a área de um fuso esférico de 24°30' sendo o raio 15m.
16. Numa esfera de 10cm de raio, determine a altura de uma zona que tem 2m² de área.
17. De quantos graus é o fuso de 1m² de área numa esfera de 80cm de raio?

CAPÍTULO XX

Volume dos poliedros e dos corpos redondos.

Medir o volume de um corpo é determinar quantas vezes êste corpo contém o volume de outro, tomado para unidade.

A unidade de volume é, em geral, o cubo que tem para aresta a unidade de comprimento. No Sistema Métrico Decimal, é, portanto, o metro cúbico.

Quando dois sólidos, embora não sejam iguais, têm, todavia, o mesmo volume, dizemos que êles são *equivalentes*.

Demonstra-se que dois prismas, duas pirâmides, dois cilindros e dois cones são equivalentes quando têm bases equivalentes e a mesma altura.

PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

O volume do bloco retangular é igual ao produto das suas três dimensões; estas são dadas pelas arestas que convergem em um mesmo vertice.

Suponhamos que no paralelepípedo CF (fig. 462) a aresta $AB = 4$ cm, $BD = 6$ cm e $BF = 3$ cm.

Dividamos AB em quatro partes iguais e pelos pontos de divisão façamos passar planos perpendiculares a AB ; o paralelepípedo fica dividido em

4 outros menores, tendo, cada um, 1 cm de comprimento, 6 de altura e 3 de profundidade; dividamos BF em três partes iguais e pelos pontos de divisão façamos passar planos perpendiculares a BF : cada paralelepípedo menor, fica dividido em 3 outros, medindo, cada um, 1 centímetro de comprimento, 6 de altura e 1 de profundidade. CF terá, portanto, $4 \times 3 = 12$ paralelepípedos iguais a estes últimos.

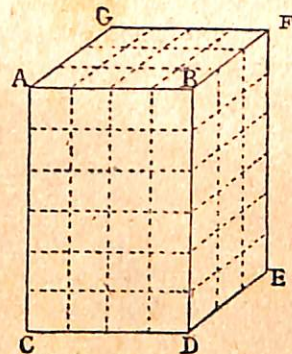


Fig. 462

Dividamos finalmente BD em 6 partes iguais e façamos passar, pelos pontos de divisão, planos perpendiculares a BD : cada um dos 12 paralelepípedos pequenos ficará dividido em 6 cubos de 1 centímetro de aresta.

CF terá então $4 \times 3 \times 6 = 72$ centímetros cúbicos.

Como 4×3 é a área da base do paralelepípedo, também se pode dizer que *o volume do paralelepípedo retângulo é igual à área da base multiplicada pela altura*. Podemos, pois, escrever

$$V = a \times b \times c$$

$$\text{ou } V = \text{base} \times \text{altura.}$$

Exercício — Que volume d'água pode conter um tanque com a forma de bloco retangular, tendo 1,25m de comprimento, 0,80m de profundidade e 0,90m de largura?

$$V = 1,25 \times 0,80 \times 0,90 = 0,900\text{m}$$

O tanque pode conter 900 decímetros cúbicos d'água.

PARALELEPIPEDO QUALQUER

O volume de um paralelepípedo qualquer é igual ao produto da área da base pela altura, porque um paralelepípedo qualquer é equivalente a um paralelepípedo retângulo de base equivalente e de mesma altura.

HEXAEDRO REGULAR

O volume do hexaedro regular é igual ao cubo da aresta porque o cubo é um caso particular do paralelepípedo retângulo cujas arestas são todas iguais entre si:

$$V = a^3$$

Exercício I — Qual o volume de uma caixa cúbica cuja aresta mede 6 decímetros?

$$V = 6^3 = 216 \text{ decímetros cúbicos}$$

Da fórmula

$$V = a^3$$

deduz-se

$$a = \sqrt[3]{V}$$

isto é, a aresta é igual à raiz cúbica do volume.

Exercício II — Que aresta tem uma caixa cúbica cujo volume é 551,368m³?

$$a = \sqrt[3]{551,368} = 8,2$$

Resposta: a aresta mede 8,2m.

PRISMA

PRISMA TRIANGULAR

O volume de um prisma triangular é igual ao produto da área da base pela altura.

Com efeito, o prisma triangular pode ser considerado (figs. 463 e 464) como a metade de um

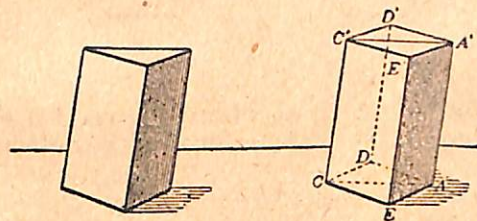


Fig. 463

Fig. 464

paralelepípedo de mesma altura e base dupla. Assim, chamando B a base do prisma, a do paralelepípedo é $2B$. Como o volume de tal paralelepípedo é $2B \times a$, o volume do prisma triangular é

$$V = \frac{2B \times a}{2} \text{ ou } B \times a$$

isto é, o produto da base pela altura.

PRISMA QUALQUER

O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela altura. Com efeito, demonstra-se que um prisma qualquer pode ser

decomposto em prismas triangulares de mesma altura e cujas bases somadas formam a base do prisma dado (figs. 465 e 460).

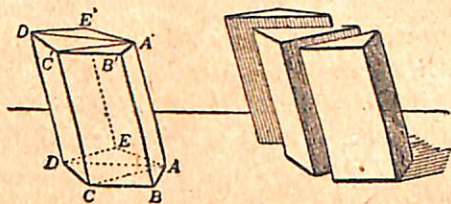


Fig. 465

Fig. 466

Exercício I — A altura de um prisma é 6 metros e a área da base mede 2,66m²; qual é o volume desse prisma?

$$V = 2,66 \times 6 = 15,960\text{m}^3$$

Da fórmula

$$V = B \times a$$

deduzem-se

$$\text{base do prisma } B = \frac{V}{a}$$

$$\text{altura do prisma } a = \frac{V}{B}$$

Exercício II — Qual a área da base de um prisma cuja altura mede 12m e o volume 3888m³?

$$B = \frac{3888}{12} = 324\text{m}^2$$

Exercício III — Qual a altura de uma torre prismática cuja base mede 68,49m² e o volume 410,940m³?

$$a = \frac{410,940}{68,49} = 6 \text{ metros}$$

PIRÂMIDE

PIRÂMIDE TRIANGULAR

Todo prisma triangular pode ser composto em três pirâmides triangulares equivalentes.

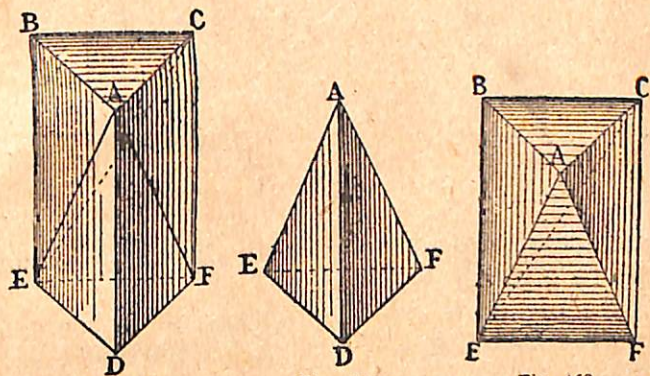


Fig. 467

Fig. 468

Fig. 469

Seja *AEDFCB* (fig. 467) o prisma triangular. Unamos o ponto *A* aos pontos *E* e *F*, e por *AE* e *AF* façamos passar um plano; obteremos uma pirâmide *AEDF* que tem a mesma base e a mesma altura que o prisma.

Destaquemos do prisma a pirâmide *AEDF* (fig. 468); obteremos uma outra pirâmide *AEFCB* (fig. 469) tendo para vértice o ponto *A* e para base o retângulo *EFCB*; tracemos a diagonal *CE* e façamos passar por ela e pelo ponto *A*, um plano

EAC que dividirá a pirâmide quadrangular em duas pirâmides triangulares *AEBC* (fig. 470) e *AEFC* (fig. 471) que são equivalentes como tendo para bases os triângulos iguais *EBC* e *CEF* e para

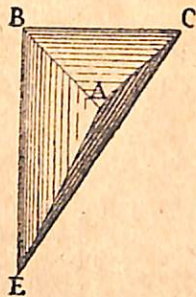


Fig. 470

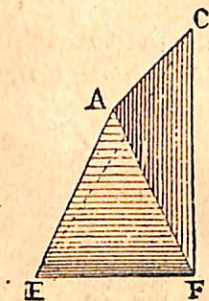


Fig. 471

altura comum a perpendicular abaixada do ponto *A* sobre o plano *EFCB*.

Na pirâmide *AEBC* o vértice pode ser considerado o ponto *E* e a base *ABC*; portanto, as pirâmides *AEBC* e *AEFC* são equivalentes como tendo a mesma altura (a altura do prisma) e a mesma base (a base do prisma); logo as três pirâmides são equivalentes.

Uma pirâmide triangular é, por conseguinte, a terça parte de um prisma triangular de mesma base e mesma altura. Como o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela altura, o volume de uma pirâmide triangular é igual à terça parte do produto da área da base pela altura.

$$V = \frac{B \times a}{3}$$

Exercício — A área da base de uma pirâmide triangular é 6 metros quadrados e a altura da pirâmide é 12 metros; qual o volume desta pirâmide?

$$V = \frac{6 \times 12}{3} = 24m^3.$$

PIRÂMIDE QUALQUER

O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura, porque uma pirâmide qualquer (fig. 472) pode

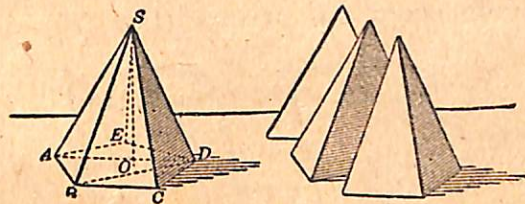


Fig. 472

ser decomposta em pirâmides triangulares tendo cada uma por volume a terça parte do produto da base pela altura; portanto, a soma de todas estas pirâmides, terá por volume a terça parte do produto da soma de suas bases pela altura comum ou, finalmente, um terço do produto da base da pirâmide dada pela altura.

$$V = \frac{B \times a}{3}$$

Desta fórmula, deduzem-se:

$$\text{a base } B = \frac{3V}{a}$$

$$\text{a altura } a = \frac{3V}{B}$$

Isto é, a base é igual ao triplo do volume dividido pela altura e esta é igual ao triplo do volume dividido pela base.

CILINDRO DE BASE CIRCULAR

O cilindro de base circular (fig. 473) pode ser considerado como um prisma (fig. 474) de base

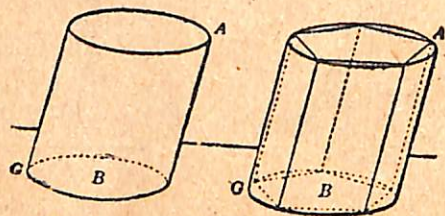


Fig. 473

Fig. 474

regular de um número infinito de lados, cada lado tendendo para zero. Por isso, seu volume também é igual ao produto da área da base pela altura. No caso do cilindro circular, como a base é um círculo, vem, chamando R o raio do círculo,

$$V = \pi R^2 \times a$$

isto é, o volume do cilindro circular é igual ao produto da área do círculo da base pela altura.

Exercício — A altura de um cilindro circular é igual a 4 metros e o raio da base igual a 2 metros, qual será o volume d'este cilindro?

$$V = 3,1416 \times 4 \times 5 = 62,8320\text{m}^3.$$

CONE DE BASE CIRCULAR

O volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura. Com efeito, o cone (fig. 475) pode ser considerado como uma pirâmide (fig. 476) cuja base é um polígono re-

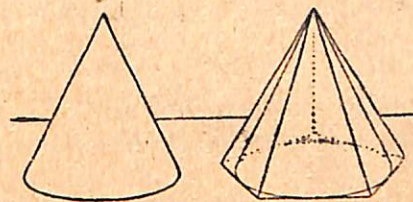


Fig. 475

Fig. 476

gular de um número infinito de lados, cada lado tendendo para zero. Então, se a base fôr um círculo de raio R , tem-se:

$$V = \frac{\pi R^2 a}{3}$$

Exercício — Qual o volume de um cône cuja altura mede 9 metros e o raio da base 2,5m?

$$V = \frac{3,1416 \times 2,5^2 \times 9}{3} = 58,905\text{m}^3.$$

TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR

O volume do tronco de prisma triangular é igual à terça parte do produto da área da base pela soma das distâncias dos três vértices opostos à mesma base.

Exemplo: o volume do tronco de prisma triangular da fig. 477 se obtém tomando a terça

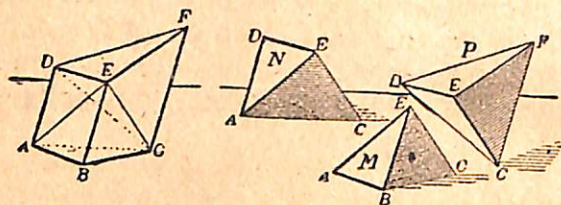


Fig. 477

parte do produto da área da base ABC pela soma das distâncias dos pontos D , E e F ao plano da base.

Com efeito, demonstra-se que o tronco é equivalente à soma de três pirâmides que têm a mesma base do tronco e cujas alturas são, respectivamente, as distâncias dos vértices opostos ao plano da referida base.

Podemos, pois, escrever:

$$V = \frac{B(a+a'+a'')}{3}$$

Exercício — Qual o volume de um tronco de prisma triangular cuja base mede 310 decímetros quadrados de área e as três alturas medem respectivamente 3,60m, 4,50m e 5,22m?

$$V = \frac{3,10(3,6 + 4,5 + 5,22)}{3} = 13,764\text{m}^3.$$

TRONCO DE PIRÂMIDE DE BASES PARALELAS

O volume do tronco de pirâmide de bases paralelas é igual ao produto da terça parte de sua altura pela soma das áreas de suas bases e da média proporcional entre estas áreas.

Chamando B e b as áreas das bases do tronco, vem

$$V = \frac{a}{3} \times \left(b + B + \sqrt{b \times B} \right)$$

Exercício — Qual o volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas com 21dm de altura e cujas bases têm respectivamente 64 decímetros quadrados e 25 decímetros quadrados de área?

$$V = \frac{21}{3} \times (64 + 25 + \sqrt{64 \times 25}) = 7(64 + 25 + \sqrt{1600}) = 7(64 + 25 + 40) = 7 \times 129 = 903.$$

Resposta: O volume do tronco é 903 decímetros cúbicos.

TRONCO DE CONE DE BASES PARALELAS

Para termos o volume, somamos os quadrados dos raios das bases e o produto dos dois raios entre si; depois multiplicamos este total por π e pela altura do tronco; finalmente dividimos esse produto por três:

A fórmula é

$$V = \frac{(R^2 + r^2 + Rr) \times \pi a}{3}$$

Exercício — Qual o volume de um tronco de cône em que os raios das bases medem 0,6m e 0,4m respectivamente e a altura 1,30m?

$$V = \frac{(0,36 + 0,16 + 0,24) \times 3,1416 \times 1,30}{3} = \frac{0,76 \times 4,084080}{3} = 0,76 \times 1,361360 = 1,034633600\text{m}^3$$

ESFERA

O volume da esfera é igual a um terço do produto da área pelo raio, porque podemos considerar a esfera como sendo formada de uma infinidade de pirâmides, cujos vértices estão no centro e cujas bases somadas formam a superfície da esfera.

A área da esfera é igual a $4 \pi R^2$; multiplicando-a pelo raio e tomando a terça parte, encontraremos

$$V = \frac{4 \pi R^2 R}{3} = \frac{4 \pi R^3}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Os $\frac{4}{3}$ de $\pi = 3,1416 \times \frac{4}{3} = \frac{12,5664}{3} = 4,1888$

A expressão $\frac{4}{3} \pi R^3$ equivale, pois, a $4,1888 \times R^3$ isto é: o volume da esfera é igual ao cubo do raio multiplicado por 4,1888.

Exercício — Qual o volume de uma esfera de 0,5m de raio?

$$V = 4,1888 \times 0,5^3 = 4,1888 \times 0,125 = 0,523600\text{m}^3$$

SECTOR ESFERICO

O volume do sector esférico é igual a um terço do produto da área da zona, que lhe serve de base, pelo raio da esfera: Como a área da zona é $2 \pi R a$, tem-se

$$V = \frac{2 \pi R a \cdot R}{3} = \frac{2 \pi R^2 a}{3} = \frac{2}{3} \pi R^2 a$$

Exercício — Qual o volume de um sector de uma esfera de 15 centímetros de raio, sabendo-se que a zona que lhe serve de base mede 6 centímetros de altura?

$$V = \frac{2 \times 3,1416 \times 0,15^2 \times 0,06}{3} = 0,002827440\text{m}^3$$

Resposta: O volume é 2,827440dm³.

CUNHA ESFÉRICA

O volume da cunha esférica é igual ao produto do volume da esfera, de que é parte a cunha, pelo número de graus do ângulo da cunha dividido por 360.

$$V = \frac{4 \pi R^3 \times n}{3 \times 360} = \frac{\pi R^3 n}{270}$$

chamando n a medida do ângulo em graus.

Se a medida do ângulo for expressa em minutos (m minutos, por exemplo), tem-se

$$\frac{\pi R^3 m}{270 \times 60}$$

Finalmente, se for dada em segundos a medida do ângulo, s segundos, por exemplo, tem-se

$$V = \frac{\pi R^3 s}{270 \times 60 \times 60}$$

Exercício — Qual o volume de uma cunha esférica de $12^\circ 50'$, sendo o raio da esfera $0,12m$?

Reduzindo $12^\circ 50'$ a minutos, acha-se $770'$; então,

$$V = \frac{3,1416 \times 0,12^3 \times 770}{270 \times 60} = 0,258030080dm^3$$

VOLUME DE CORPOS DE FORMAS QUAISQUER

Mesmo que um corpo não tenha forma geométrica definida, podemos determinar-lhe o volume. Consideremos dois casos:

1.º) Conhecem-se a densidade e o peso do corpo.

Pelo que se estuda na Aritmética, sabemos que o peso de um corpo expresso em gramas é igual ao produto de seu volume expresso em centímetros cúbicos pela sua densidade:

$$P = VD$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por D , achamos

$$V = \frac{P}{D}$$

isto é, o volume de um corpo é igual ao quociente de seu peso pela sua densidade.

Observação: — Quando o peso for expresso em kg. deve o volume ser expresso em dm^3 ; quando o peso for expresso em toneladas, o volume será expresso em m^3 .

Exercício I — Qual a capacidade de um vaso que se encheu com $32,50kg$ de mercúrio, sabendo-se que a densidade do mercúrio é $13,50$?

$$V = \frac{32,50}{13,50} = 2,4dm^3$$

Como o dm^3 equivale ao litro, a capacidade do vaso é $2,4$ litros.

Exercício II — Qual o volume de um toro de madeira do peso de $2,4$ toneladas, sabendo-se que a densidade dessa madeira é $0,64$?

$$V = \frac{2,4}{0,64} = 3,750m^3$$

Exercício III — Qual o volume de uma barra de metal pesando $468g$, sabendo-se que a densidade desse metal é $10,4$?

$$V = \frac{468}{10,4} = 45cm^3$$

Exercício IV — Qual o peso de uma ardozia cujo volume é igual a $150cm^3$ e cuja densidade é $2,88$?

$$P = 150 \times 2,88 = 432g$$

2) Quando um sólido não tem forma geométrica definida e não se lhe conhece o peso nem a densidade, procede-se do seguinte modo:

Em um vaso de forma cilíndrica, de que se conhece o raio da base tomado internamente, des-

peja-se uma certa quantidade d'água e mergulha-se o corpo de que se deseja conhecer o volume.

O volume da porção d'água deslocada, isto é, da porção do líquido que fica acima do primeiro nível é o volume do corpo.

Exercício — Determinar o volume de uma pera.

Seja o vaso (fig. 477a) de vidro transparente, de forma cilíndrica, tendo, internamente, na base 0,06m de raio.

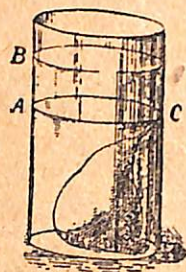


Fig. 477a

Entornemos nesse vaso um pouco d'água colorida de preferência para que seja bem visível através do vidro.

Mergulhemos nessa água a pera cujo volume desejamos conhecer: a água deslocada pela imersão do fruto sobe, e depois de bem tranquila a superfície do líquido, tomemos a altura AB da coluna que excede do primeiro nível AC ; suponhamos que $AB = 0,015m$.

O volume da pera será igual ao produto da base do vaso pela altura $0m,015$:

$$V = \pi R^2 a = 3,1416 \times 0,06^2 \times 0,015 =$$

$$= 3,1416 \times 0,0036 \times 0,015 = 0,169646dm^3.$$

EXERCÍCIOS

1. Ache a capacidade de um reservatório com a forma de bloco retangular, cujas dimensões, tomadas internamente, são: 1,20m, 0,90m e 0,75m.
2. Um paralelepípedo retângulo deve ter $5m^3$ de volume, mas sua altura foi fixada em 60cm. Qual deve ser a área da base?

3. A área da face de um cubo é $0,81m^2$. Que volume tem esse cubo?
4. Determine a aresta de um cubo de $343m^3$ de volume.
5. Ache o volume de um prisma triangular regular tendo 15cm de altura e 2cm de lado na base.
6. Determine a altura de um prisma quadrangular regular com $45dm^3$ de volume e 1,5dm de lado na base.
7. Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular com 20cm de altura e 3cm de lado na base.
8. Determine o volume de um cilindro circular de 1,2dm de altura e 5cm de raio.
9. Determine a geratriz de um cilindro cujo volume é $1178,100dm^3$ e cujo raio mede 5dm.
10. Calcule o volume de um cone circular reto com 10cm de altura e 3cm de raio.
11. Determine o raio de um cone circular reto de $1m^3$ de volume sendo a altura 3m.
12. A base de um tronco de prisma triangular regular tem 18cm de lado e as distâncias aos vértices opostos são 10cm, 12,5cm e 14cm. Qual o volume do tronco?
13. Calcule o volume de uma esfera de 1m de diâmetro.
14. Ache o raio de uma esfera de $1m^3$ de volume.
15. Qual o volume de um sector esférico de 20cm de raio, a zona que lhe serve de base tendo 4cm de altura?
16. Ache o volume da cunha esférica de 5cm de raio, o seu ângulo medindo $12^\circ 20'$.

CAPÍTULO XXI

Concordância de linhas

Concordar duas linhas é ligá-las de sorte que em sua junção não se forme ângulo nem inflexão. Na concordância de linhas observaremos que:

1.º Uma reta e um arco de círculo se concordam, quando o centro do arco se acha na perpendicular à reta dada no ponto de concordância ou de tangência;

2.º Dois arcos se concordam quando o ponto de contacto e os dois centros estão sobre a mesma reta.

A concordância de linhas é muito empregada no traçado de molduras.

Pontos de nascença de um arco são os pontos de tangência do arco, com as retas que terminam no começo da curva (A e B, na fig. 478).

Vão ou abertura de um arco é a distância em linha reta entre os pontos de nascença (AB na fig. 478).

Altura ou flecha de um arco é a perpendicular abaixada do meio do arco sobre a reta que passa pelos pontos de nascença do mesmo arco (CD na fig. 478).

Arco abatido é a curva cujos extremos ou pontos de nascença estão sobre a mesma reta hori-

zontal isto é, no mesmo nível e cuja altura ou flecha é menor do que a metade do vão (fig 478).

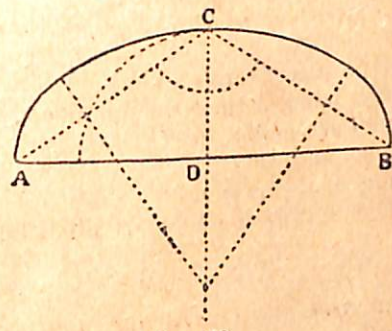


Fig. 478

Asa de cesto é um arco abatido formado de arcos de círculos (fig. 479).

Arco aviajado ou **esconso** (fig. 480) é uma curva de vários centros cujos pontos de nascença

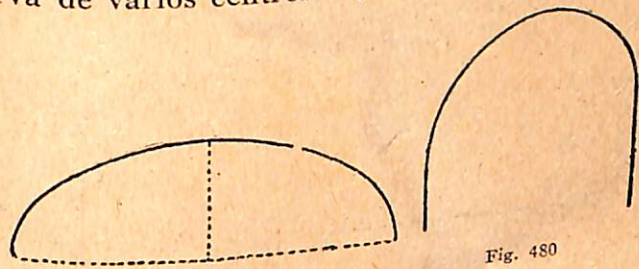


Fig. 479

Fig. 480

não estão sobre a mesma reta horizontal, isto é, não estão no mesmo nível.

Os arcos abatidos e aviajados se empregam frequentemente nos traçados de abóbadas, arcos de pontes, viadutos, etc.

QUESTIONÁRIO

1. Que é concordar duas linhas?
2. Quais as regras observadas na concordância de linhas?
3. Que são pontos de nascença?
4. Que é vão ou abertura de um arco?
5. Que é um arco abatido?
6. Que é uma asa de cesto?
7. Que é um arco aviajado?
8. Onde se empregam os arcos abatidos e aviajados?

PROBLEMAS

Problema 144. — Concordar uma reta e um arco de círculo que passe por um ponto dado.

MN à reta (fig. 481), M o ponto de concordância escolhido e A o ponto dado.

Levantemos por M uma perpendicular a MN , unamos A a M e pelo meio de AM façamos passar uma perpendicular, que determinará na primeira o ponto V ; este é o centro e VM é o raio do arco que, partindo de M , passará por A .

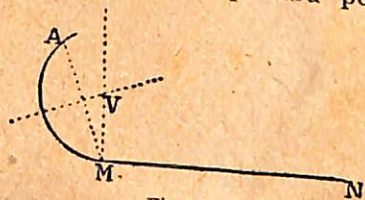


Fig. 481

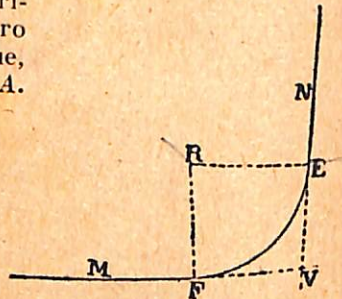


Fig. 482

Problema 145. — Concordar duas retas concorrentes. M e N (fig. 482) são as retas dadas. Prolonguemo-las até o ponto V do qual, como centro, e com um raio arbitrário determinemos os pontos E e F equidistantes de V .

Pelo ponto F levantemos uma perpendicular à reta M e pelo ponto E uma outra perpendicular à reta N .

R , ponto de encontro das duas perpendiculares, é o centro, e RE é o raio do arco que, partindo de E , passará por F .

Problema 146. — Concordar duas retas concorrentes conhecendo-se o raio do arco de concordância.

M e N são as duas retas e AB é o raio e do arco (fig. 483).

Tracemos duas paralelas às retas M e N distantes destas a medida AB . As paralelas determinam o ponto R do qual façamos partir as retas RV e RS perpendiculares respectivamente a N e M .

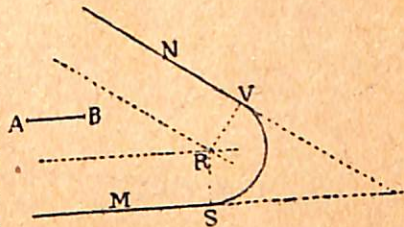


Fig. 483

Do ponto R , como centro, e com um raio RV descrevamos o arco VS que liga as retas dadas.

Problema 147. — Concordar uma reta com um arco de círculo por meio de um outro arco cujo raio é dado.

M é a reta (fig. 484); C é o centro do arco conhecido e AB é o raio dado.

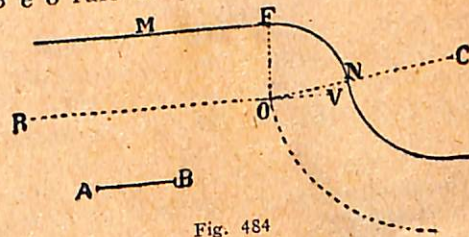


Fig. 484

Tracemos uma paralela à reta M e distante dela a medida AB .

Do ponto C , como centro e com um raio igual ao do arco conhecido mais AB , cortemos a paralela RV no ponto O . Tracemos OC e do ponto O , com um raio igual a ON , descrevamos o arco de concordância NF .

Problema 143. — *Concordar dois arcos de circulo por meio de um terceiro cujo raio é dado.*

A e B são os centros dos dois arcos conhecidos (figura 485) e MN é o raio do terceiro.

Dos pontos A e B como centros e com os raios respectivamente iguais aos dos arcos dados aumentados de MN, determinemos o ponto C.

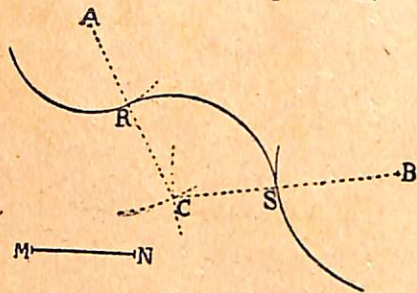


Fig. 485

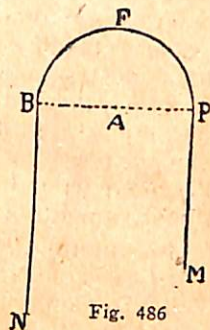


Fig. 486

Liguemos esse ponto a A e B e determinemos os pontos de contacto R e S.

De C, como centro, e com um raio CR, descrevamos o arco RS.

Problema 149. — *Concordar duas retas paralelas, os pontos de nascença estando no mesmo nível.*

BN e PM são as duas paralelas (fig. 486).

Tiremos a perpendicular BP comum às duas paralelas.

Com o centro em A (meio de BP) e com um raio igual a AB tracemos a semi-circunferência BFP que concordará as duas paralelas.

Problema 150. — *Traçar um arco aviajado conhecendo-se o ponto de tangência dos dois arcos, a tangente comum e as paralelas que passam pelos pontos de nascença.*

M (fig. 487) é o ponto de tangência dos dois arcos NP é a tangente comum aos dois arcos e AD e BG as paralelas que passam pelos pontos de nascença E e F.

Façamos passar pelo ponto M uma perpendicular a NP.

Centro em B e com um raio igual a BM descrevamos o arco MF; centro em A e com um raio AM descrevamos o arco ME. Pelos pontos E e F (pontos de nascença) tracemos as retas ER e FV perpendiculares às paralelas AD e BG.

Façamos centro em V e com um raio igual a VM descrevamos o arco FM, e de R, como centro, com o raio RM, descrevamos o arco ME. O arco aviajado é EMF.

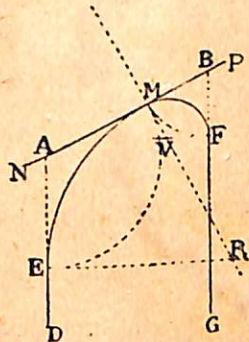


Fig. 487

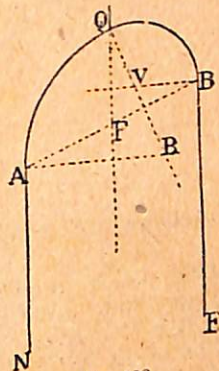


Fig. 488

Problema 151. — *Construir um arco aviajado conhecendo-se os pontos de nascença e a direção da reta tangente ao arco num destes pontos.*

A e B são pontos de nascença e AN é a tangente no ponto A (fig. 488).

Liguemos A a B e pelo meio de AB façamos passar uma paralela a AN; levantemos pelos pontos A e B perpendiculares às retas AN e BF.

Transportemos em PQ a medida PA e tiremos pelo ponto Q uma perpendicular a AB.

Esta perpendicular determinará os pontos R e V, centros dos arcos AQ e QB que formam o arco viajado.

Problema 152. — Traçar uma asa de cesto de três centros conhecendo-se o vão e flecha.
 Pelo meio de AB (fig. 489), vão do arco, façamos passar uma perpendicular e marquemos CD igual à altura dada; liguemos A e B ao ponto D .

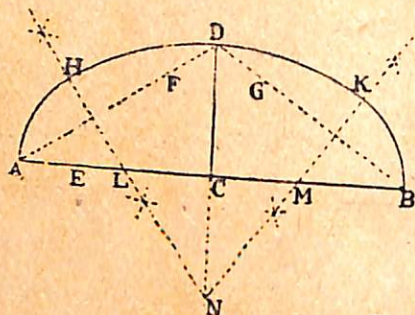


Fig. 489

Tomemos $CE = CD$ e marquemos DF e DG iguais a AE .

Pelos meios de AF e BG tracemos retas perpendiculares que determinarão o ponto N .

De L e M e com o mesmo raio LA (ou MB) descrevamos os arcos AH e BK ; finalmente, do ponto N e com um raio NH descrevamos o arco HDK .

$AHDKB$ é a asa de cesto tricêntrica.

Problema 153. — Traçar uma asa de cesto de cinco centros conhecendo-se o vão e a flecha.
 AB é o vão e CD é a flecha (fig. 490).

Dividamos AB ao meio e do ponto C descrevamos duas semicircunferências; uma com o raio CA e outra com o raio CD .

Dividamos cada uma destas semi-circunferências em seis partes iguais (veja-se a trissecção do ângulo reto); pelos pontos a, b, c, d tracemos paralelas a CD e por e, f, g, h paralelas a AB ; estas encontram aquelas em E, F, G, H .

Tracemos os segmentos AE, EF, GH, HB e pelo meio de AE, EF, GH e HB façamos passar perpendiculares. Duas destas determinam os pontos M e N .

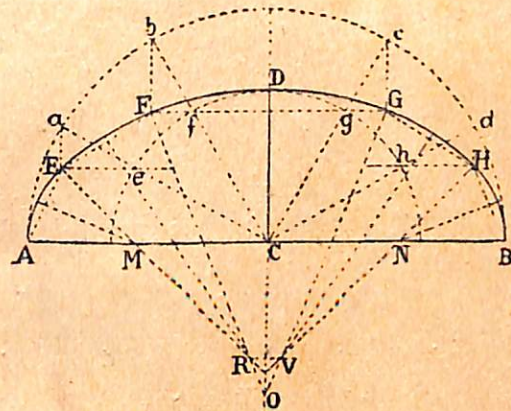


Fig. 490

Tiremos as retas EM e HN prolongando-as até determinarem os pontos R e V ; aquele no prolongamento da perpendicular ao meio de EF e este no prolongamento da perpendicular ao meio de GH .

Tracemos as retas FR e GV prolongando-as também até o ponto O . De M e N , com o raio MA descrevamos os arcos AE e BH ; de R e V , com o raio RE descrevamos EF e HG ; finalmente, do ponto O , com o raio OF descrevamos o arco FG .

Problema 153. — Traçar uma asa de cesto de sete centros sendo conhecidos o vão e a flecha.

MN é o vão e AB é a flecha (fig. 491).

Descrevamos duas semi-circunferências concêntricas em A e com os raios AM e AB .

Dividamo-las em oito partes iguais; pelos pontos a, b, c, d, e, f tracemos retas paralelas a AB e pelos pontos g, h, i, j, k, l paralelas a MN .

Todas estas paralelas determinam os pontos *C, D, E, F, G, H*.

Para termos os centros dos arcos que compõem a asa de cesto procedamos da seguinte maneira; *J e K* são

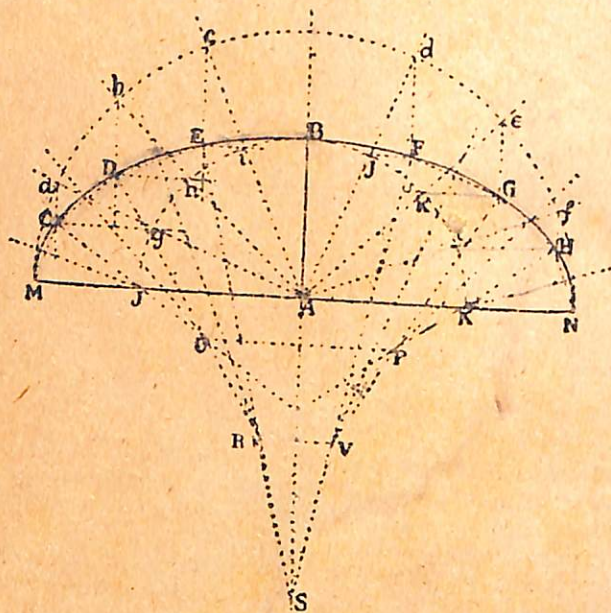


Fig. 491

as intersecções das perpendiculares ao meio de *MC e HN* com a reta *MN*; *O e P* resultam das intersecções das perpendiculares ao meio de *CD e GH* com os prolongamentos de *CJ e HK*; *R e V* são as intersecções das perpendiculares ao meio de *DE e FG* com os prolongamentos das retas *DO e GP*, e por último o ponto *S* é o resultado do encontro das retas *ER e FV*.

Descrevamos enfim, os sete arcos que formarão a asa de cesto e cujos centros são *S, R, V, O, P, J e K*.

CAPÍTULO XXII

Elipse. — Falsa elipse. — Oval. — Parábola.
— Hipérbole. — Espiral. — Hélice.

ELIPSE

À linha curva, plana e fechada em que a soma das distâncias de cada um de seus pontos a dous pontos interiores fixos é constante, dá-se o nome de **elipse** (fig. 492).

Os pontos fixos chamam-se *focos* (*E e F*, na fig. 493); o segmento de reta que liga os focos chama-se *segmento focal* e a sua medida é a *distância focal*.

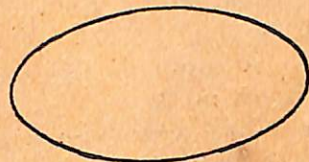


Fig. 492

A Terra e os outros planetas descrevem elipses ao redor do Sol. Também são muitos os objetos com forma elíptica: molduras, caixas, medalhões, jóias, espelhos, rótulos, bandejas, etc.

A elipse admite dois eixos de simetria, que são: a reta que passa pelos focos e a mediatriz do segmento focal. A intersecção dos dois eixos é o *centro* da elipse. Os pontos *A, B, C e D* são os *vértices* da elipse. A distância *AB* é o *eixo maior* e a distância *CD* é o *eixo menor* (fig. 493).

A distância focal é geralmente representada por $2c$ e o eixo maior por $2a$.

Os segmentos de reta que unem os focos a qualquer ponto da curva tomam o nome de *raios*

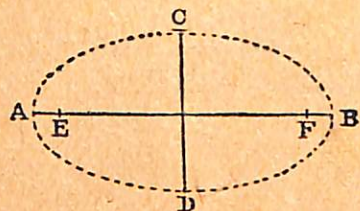


Fig. 493

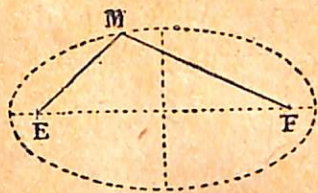


Fig. 494

vetores. Assim, EM e FM , na fig. 494 são raios vetores.

A soma de dois raios vetores é igual ao eixo maior, ou $2a$.

Tal como vimos em relação ao círculo, uma reta pode ser: *exterior* à elipse quando não tiver ponto comum com esta; *secante*, quando tiver com ela dois pontos comuns; e, finalmente, *tangente* à elipse quando com ela só tiver um ponto comum.

A propriedade da tangente à elipse é que ela forma ângulos iguais com os raios vetores que vêm ter ao ponto de contacto.

Excentricidade de uma elipse é a razão da distância focal para o eixo maior, ou, seja, a razão $\frac{c}{a}$.

A elipse é mais ou menos alongada, conforme sua excentricidade.

Quando $c = 0$, isto é, quando os focos coincidem, a excentricidade é nula e a elipse se reduz a uma circunferência de círculo; quando os focos são muito próximos um do outro, a excentricidade é pequena e nesse caso a elipse é arredondada, pouco diferindo da circunferência; finalmente, à medida que os focos se afastam, a excentricidade aumenta e, neste caso, a elipse alonga-se.

PROBLEMAS

Problema 155. — Traçar uma elipse dados os eixos.

1.º processo: (movimento contínuo) — Com uma linha, dois alfinetes e lapis, giz ou carvão. Sejam AB e CD (fig. 495) os eixos da elipse.

Tracemos os dois eixos, cortando-se perpendicularmente ao meio. Do ponto C (fig. 496) como centro e com um raio igual a OA , determinemos os pontos E e F , que são os focos.

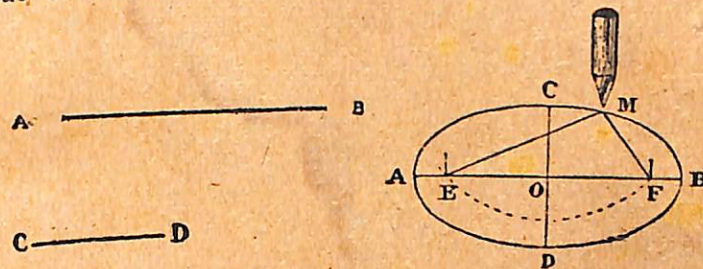


Fig. 495

Fig. 496

Tomemos um fio de linha e fixemo-lo com alfinetes, pelas extremidades, nos pontos E e F , do modo que a porção do fio entre E e F , tenha o comprimento do eixo maior (AB). Com a ponta de um lapis, estiquemos o fio e desloquemos a ponta do lapis sobre o papel, conser-

vando o fio sempre bem esticado; descreveremos, assim, metade da elipse. Procedamos da mesma forma no outro lado do eixo maior, e teremos a outra metade da elipse que desejávamos traçar.

Este processo facilimo de se executar é baseado na própria definição da elipse e é muito empregado para o traçado da curva em terrenos planos.

Os jardineiros usam dêste processo quando querem dar a um canteiro a forma elíptica, substituindo os alfinetes, por estacas, o lapis ou giz por uma ponteira e a linha por uma corda.

2.º processo: — Com uma tira de papel.

Depois de traçarmos os eixos como no 1.º processo, marquemos em uma tira de papel, cortada em linha reta (fig. 497) a distância MN igual a OB (fig. 498) e a distância $MP = OC$. A distância PN exprime a diferença dos semi-eixos.



Fig. 497

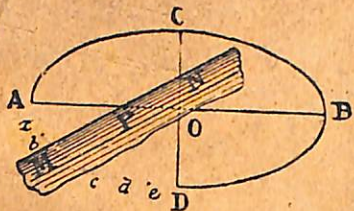


Fig. 498

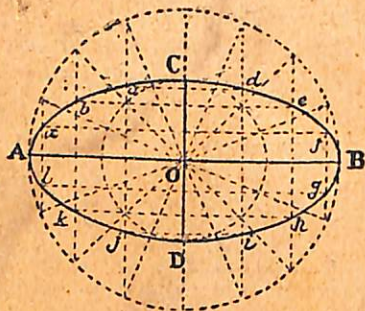


Fig. 499

Apliquemos o ponto N sempre sôbre o eixo CD e o ponto P sempre sôbre o eixo AB , de sorte que o ponto M determine os diversos pontos a, b, c, d, e, f , etc., conforme o ponto N se afaste mais ou menos do ponto O no eixo CD e o ponto P se afaste também do ponto O no eixo AB .

Os pontos a, b, c, d, e, f , etc., bem próximos uns dos outros determinam a passagem da curva; resta-nos ligar, a mão livre, êsses pontos para ter a elipse.

3.º processo: — Por meio de duas circunferências concêntricas tendo, cada uma, para diâmetro um eixo da elipse.

Tracemos os dois eixos cortando-se perpendicularmente ao meio e descrevamos duas circunferências concêntricas: uma com o raio igual à metade do eixo maior AB (fig. 499) e a outra com o raio igual à metade do eixo menor CD .

Dividamos a circunferência maior em um número qualquer de partes iguais, 16 por exemplo, e tracemos todos os raios que terminam nos pontos de divisão. Estes raios também dividem a circunferência menor em 16 partes iguais.

Pelos pontos de divisão da circunferência maior, tracemos paralelas ao eixo menor e pelos pontos de divisão da circunferência menor, paralelas ao eixo maior.

Os pontos $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, A, B, C, D$ são pontos da elipse; liguemo-los portanto, a mão livre.

Observação: — Para uma relativa perfeição do traçado devemos dividir as circunferências no maior número possível de partes iguais.

4.º processo: — Por pontos determinados pelo compasso.

Dividamos a distância OF (fig. 500) em um número qualquer de partes iguais, 6 por exemplo.

Façamos centro em F e com as distâncias Aa, Ab, Ac, Ad, Ae descrevamos arcos de círculo como nos mostra a fig. 500 e do ponto E , com as distâncias aB, bB, cB, dB, eB , determinemos os pontos $m, n, p, q, r, s, t, u, v, x$, os quais determinam a metade da elipse. Procedamos do

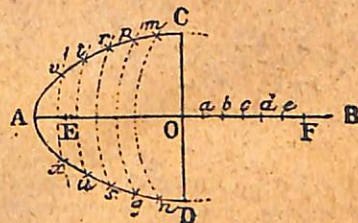


Fig. 500

mesmo modo em relação à outra metade do eixo AB e teremos a elipse completa.

Problema 156. — Traçar a tangente à elipse num ponto dado.

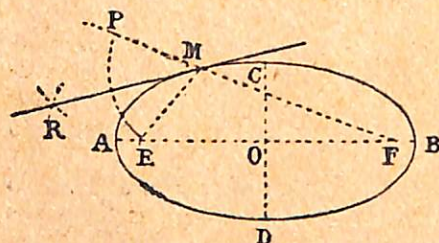


Fig. 501

Seja traçar a tangente à elipse (fig. 501) no ponto M . Traçemos os raios vetores d'êste ponto prolongando um d'êles (MF , por exemplo) além de M . Em seguida, tiremos a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor

ME com o prolongamento de MF . Essa bissetriz é tangente à elipse no ponto M .

Problema 157. — De um ponto dado, fora da elipse, traçar uma reta tangente a esta curva.

Seja P (fig. 502) o ponto dado.

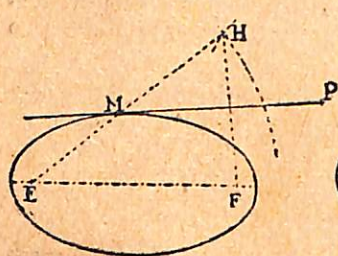


Fig. 502

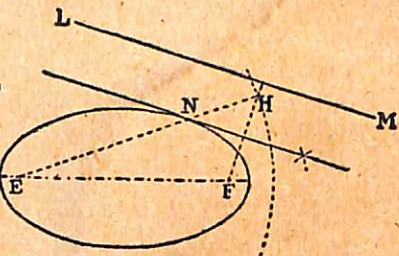


Fig. 503

Do ponto E , como centro, com um raio igual ao eixo maior descrevamos um arco; do ponto P , como centro, com raio igual a PF descrevamos um segundo arco que cortará o primeiro no ponto H .

Liguemos F a H e abaixemos do ponto P uma perpendicular a FH ; esta perpendicular será a tangente pe-

da. O ponto de contato M é determinado pela intersecção desta tangente com a reta EH .

NOTA. — Para que êste problema seja possível, é preciso que os dois arcos se cortem e para isso, que a distância EP entre os dois centros seja menor que a soma dos raios e maior que a sua diferença.

Problema 158. — Traçar uma tangente a uma elipse e que seja paralela a uma reta dada.

Do fóco E (fig. 503) e com um raio igual ao eixo maior descrevamos um arco; do ponto F tiremos sobre a reta dada LM uma perpendicular, que cortará o arco no ponto H .

Pelo meio de FH façamos passar uma perpendicular, que é a tangente pedida.

O ponto de contacto N é determinado pela intersecção desta tangente com EH .

FALSA ELIPSE

Parecida com a elipse há uma curva plana, fechada, composta de quatro arcos de círculo: é a **falsa elipse**, também chamada *oval regular*.

M, N, P, R são os centros dos arcos que formam a falsa elipse representada na fig. 504.

Como a elipse, a falsa elipse tem dois eixos, um AB que passa por P e R (*eixo maior*) e outro, CD , que passa por M e N (*eixo menor*). A intersecção dos eixos é o *centro* da curva.

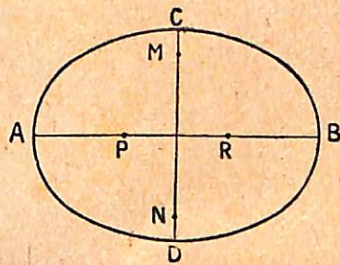


Fig. 504

Se os centros situados no eixo maior são afastados do eixo menor, a curva é alongada; no caso contrário, a curva é arredondada.

PROBLEMAS

Problema 159. — Traçar uma falsa ellipse dados os eixos.

1.º — processo: — Sejam AB e CD os dois eixos (fig. 505).

Tracemos AB e CD perpendicularmente, um pelo meio do outro (fig. 506).

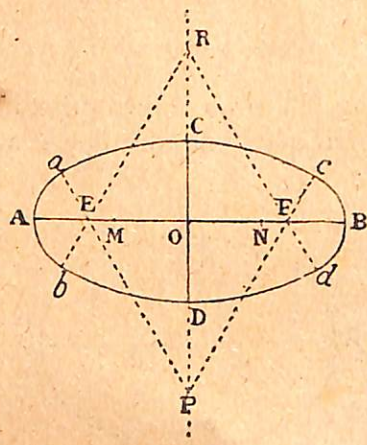


Fig. 506

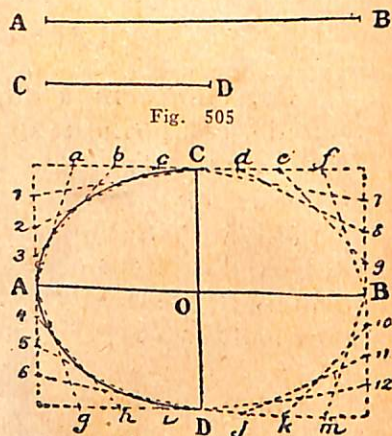


Fig. 507

Marquemos sôbre o eixo maior AM e BN iguais a OC (ou OD). A partir de M em direção ao ponto A , e do ponto N em direção ao ponto B marquemos uma distância (ME e NE) igual à terça parte de OM ou ON .

Dos pontos A e E , com o raio AE determinemos a e b ; de F e B , com o mesmo raio determinemos os pontos c e d . Prolonguemos o eixo menor nos dois sentidos; unamos o ponto a ao ponto E e prolonguemos a reta até encontrar no ponto P o prolongamento de CD ; tracemos as retas bER e Pfc . O ponto E é o centro do arco aAb ; o ponto F o centro do arco cBd ; P , o centro de aCc ; finalmente R , o centro de bDd .

2.º processo: — Tracemos os eixos AB e CD perpendicularmente um pelo meio do outro. Façamos passar pelos pontos C e D (fig. 507) paralelas ao eixo AB e, pelos pontos A e B , paralelas ao eixo CD : obtemos, assim, um retângulo. Dividamos cada lado desse retângulo em oito partes iguais e teremos os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, m$.

Unamos os pontos $aA, b3, c2, C1, C7, d8, e9, fB, Bm, 10k, 11j, 12D, D6, i5, h4, gA$.

Os pontos de intersecção, interiores, dessas retas determinam a passagem da falsa ellipse.

Problema 160. — Construir uma falsa ellipse arredondada dado o eixo menor.

Seja CD o eixo menor (fig. 508). Façamos passar pelo meio de CD uma perpendicular. Tomemos a metade de OC como raio e do ponto O marquemos N e M . Liguemos os pontos D e N, D e M, C e N, C e M , prolongando as retas DN, DM, CN, CM . Do ponto D tracemos o arco mCn ; do ponto C , o arco sDr ; do ponto N o arco ns e do ponto M , o arco mr .

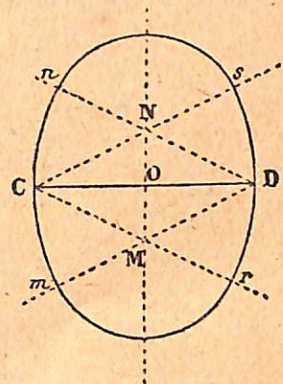


Fig. 508

Problema 161. — Construir uma falsa ellipse arredondada dado o eixo maior. AB é o eixo maior (fig. 509).

Dividamo-lo em três partes iguais; tracemos os dous triângulos equiláteros MNP e MNR , prolonguemos PN , PM , RN , RM . Dos pontos M e N tracemos os arcos nAm e sBv ; dos pontos R e P , os arcos ms e nv .

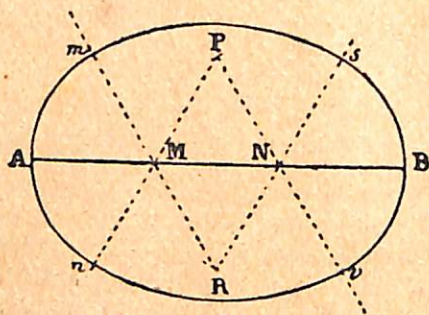


Fig. 509

Problema 162. — Construir uma falsa elipse alongada dado o eixo menor. DC é o eixo menor (fig. 510). Façamos passar pelo meio de DC uma perpendicular.

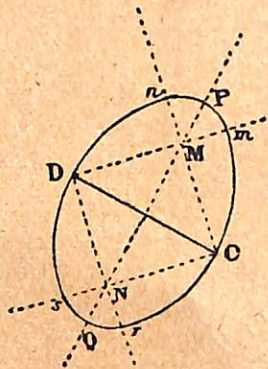


Fig. 510

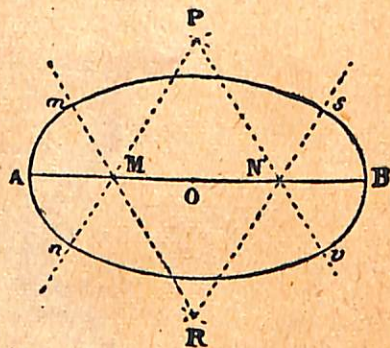


Fig. 511

Formemos o quadrado $DMCN$; prolonguemos CM , CN , DM , DN . Dos pontos C e D descrevamos os arcos sDn e mCr ; dos pontos M e N os arcos nPm e rQs .

Problema 163. — Construir uma falsa elipse alongada dado o eixo maior.

Seja AB o eixo maior (fig. 511); dividamo-lo em quatro partes iguais. Sôbre MN façamos os triângulos equiláteros MNR e MNP . Dos pontos M e N tracemos os arcos mAn e sBv ; dos pontos R e P tracemos os arcos ms e nv .

OVAL

Dá-se o nome de **oval** a uma curva plana, fechada, composta de uma semi-circunferência, de dous grandes arcos e de um pequeno arco (fig. 512).

O nome lhe vem do fato de lembrar a configuração do ovo; entretanto esta curva também é conhecida por *oval irregular* em virtude de alguns autores chamarem *oval regular* à falsa elipse.



Fig. 512

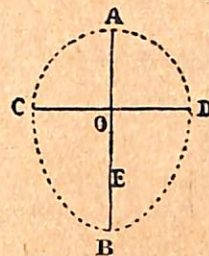


Fig. 513

O segmento de reta que faz de diâmetro da semi-circunferência é o *eixo menor* da oval (CD , na fig. 513); a perpendicular ao meio do eixo menor e limitado pela curva é o seu *eixo maior* (AB , na pag. 513).

PROBLEMAS

Problema 164. — Traçar uma oval dado o eixo menor.

Seja CD o eixo menor (fig. 514). Tracemos pelo meio dêsse eixo uma perpendicular.

Façamos OA e OM iguais a OC (ou OD); unamos C e D ao ponto M e prolonguemos DM e CM .

De O como centro e com raio igual a OD descrevamos a semi-circunferência CAD ; dos pontos D e C com raio igual a CD descrevamos os grandes arcos Cm e Dn ; finalmente, do ponto M , com raio igual a Mm descrevamos o pequeno arco mBn .

Problema 165. — Traçar uma oval conhecendo-se o eixo maior.

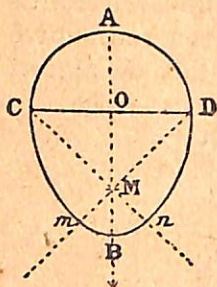


Fig. 514

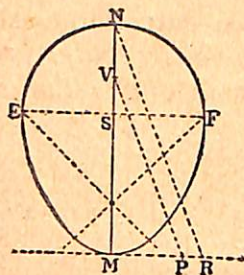


Fig. 515



Fig. 516

Seja MN o eixo maior (fig. 515).

Construamos uma oval auxiliar dado o eixo menor de qualquer tamanho (fig. 516).

Façamos passar pela extremidade M do eixo MN uma perpendicular e apliquemos sôbre ela $MP = CD$ (metade do eixo menor da oval auxiliar).

Reproduzamos em MV a medida AB (eixo maior da oval auxiliar).

Unamos V a P e do ponto N tracemos uma paralela a VP até determinar o ponto R .

MR é a metade do eixo menor da oval pedida.

Apliquemos em NS a medida MR ; pelo ponto S façamos passar uma perpendicular ao eixo MN , e depois reproduzamos em SE e SF a mesma medida NS .

Sendo EF o eixo menor, resolvamos o problema como nos ensina o precedente.

PARÁBOLA

A curva plana, aberta, cujos pontos são todos igualmente distantes de um ponto fixo (*foco*) e de uma reta fixa (*diretriz*) chama-se **parábola**.

A perpendicular traçada do foco sôbre a diretriz, chama-se *eixo* da parábola.

A parábola é uma curva simétrica em relação ao eixo.

O ponto em que o eixo encontra a curva é o *vértice* da parábola.

O segmento de reta que liga o foco a um ponto qualquer da curva chama-se *raio vetor*.

A distância do fóco à diretriz denomina-se *parâmetro*.

À reta que, situada no mesmo plano da parábola, tem com esta um só ponto comum, dá-se o nome de *tangente*; o ponto comum é o *de contacto*.

A distância do vértice ao foco é a *distância focal*.

Todo segmento de reta cujas extremidades estão sôbre a curva é uma *corda*.

Toda reta tirada de um ponto da curva e paralela ao eixo da parábola é um *diâmetro*.

A tangente na extremidade de um diâmetro é paralela às cordas que este diâmetro divide ao meio.

Na fig. 517, AX é o eixo; F , o fóco; MN , a diretriz; V , o vértice; FP , um raio vetor; AF , o parâmetro; TG uma tangente; P , o ponto de contacto; VF , a distância focal; DE uma corda; HL um diâmetro.

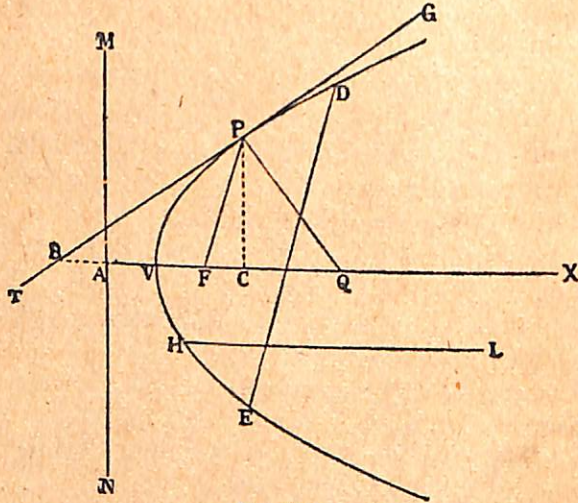


Fig. 517

Os refletores das lanternas de alguns carros, das locomotivas, dos navios, em geral, de todos os aparelhos que dão luz para ser vista de muito longe, são parabólicos.

Nos faróis são também empregados refletores parabólicos; os espelhos dos telescópios são parabólicos.

PROBLEMAS

Problema 166. — Traçar uma parábola dados o foco e a diretriz.

1.º processo: — (movimento continuo) com régua, esquadro e cordel.

Façamos coincidir uma aresta da régua com a diretriz (fig. 518); apliquemos um cateto do esquadro contra a régua, fixemos um cordel do tamanho do outro cateto do esquadro, nos pontos G e F .

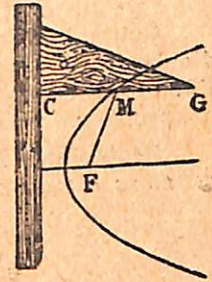


Fig. 518

Com a ponta de um lapis conservemos o cordel constantemente esticado, parte dele ficando aplicado ao longo de CG , e façamos ao mesmo tempo escorregar o esquadro pela régua. Com este movimento continuo, a ponta do lapis conservar-se-á sempre equidistante da régua e do ponto F . Esta operação feita de um e de outro lado do eixo completará a parábola.

2.º processo: — Com o compasso.

F é o fóco (fig. 519), MN a diretriz. Façamos passar pelo foco uma perpendicular à diretriz; dividamos FA ao meio; o ponto V será o vértice da parábola.

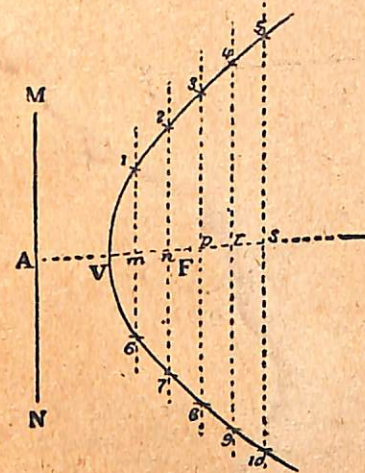


Fig. 519

Tomemos sobre o eixo as distâncias iguais mn, np, pr, rs , etc.; pelos pontos m, n, p, r, s tracemos paralelas à diretriz. Do foco, como centro, e com os raios iguais a mA, nA, pA, rA, sA , etc., cortemos as paralelas nos pontos 1 e 6; 2 e 7; 3 e 8; 4 e 9; 5 e 10; etc., os quais determinam a passagem da parábola.

Problema 167. — Construir uma parábola conhecendo-se a diretriz e o vértice.

Seja MN a diretriz e V o vértice (fig. 519).

Determinemos o eixo abaixando de V uma perpendicular a MN ; e o foco, reproduzindo em VF a medida VA . Desde que conhecemos a diretriz e o foco, recaímos no problema anterior.

Problema 167-a. — Construir uma parábola conhecendo-se o foco e duas tangentes.

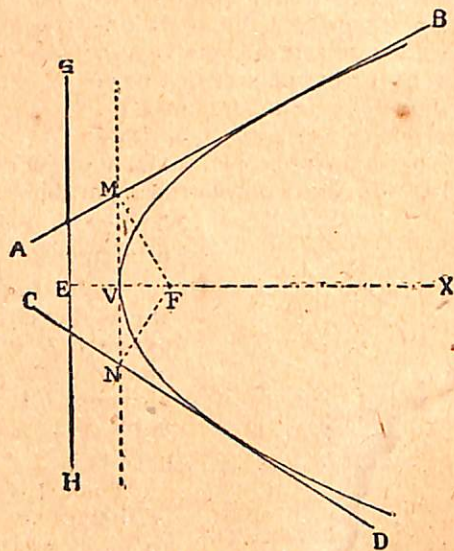


Fig. 520

Seja F o foco e AB e CD as duas tangentes (fig. 520). Abaixemos do foco uma perpendicular sobre cada tangente; os pontos M e N determinam a passagem da tangente no vértice da curva.

A reta VFX perpendicular ao meio de MN é o eixo. Tomemos $VE = VF$ e pelo ponto E tracemos GH paralela a MN .

GH é a diretriz e F é o foco; tracemos, agora a parábola como nos ensina o problema 166.

Problema 168. — Construir uma parábola conhecendo-se o foco, o eixo e uma tangente.

F é o foco, MT , a tangente e NX , o eixo (fig. 521).

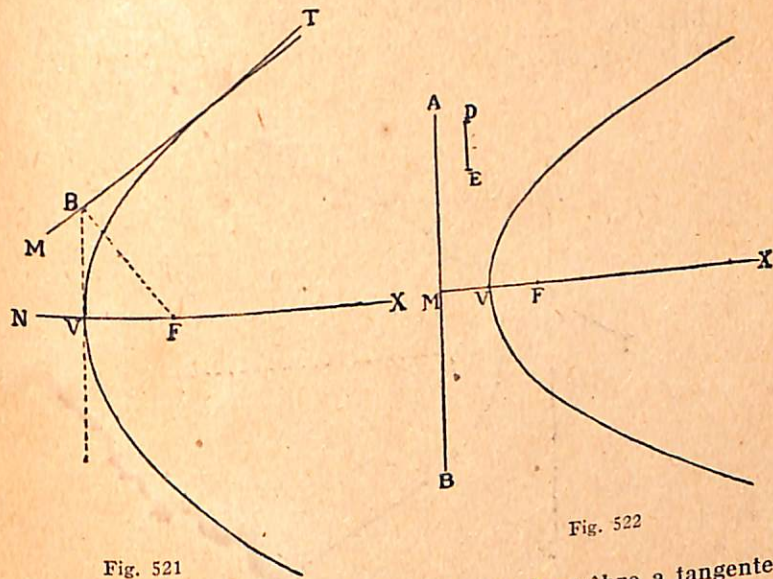


Fig. 521

Fig. 522

De F abaixemos uma perpendicular sobre a tangente e do ponto B uma outra sobre o eixo. V é o vértice da parábola. Com estes elementos, tracemos a parábola como nos indicam os problemas 166 e 167.

Problema 169. — Construir uma parábola conhecendo-se a distância focal.

Seja DE a distância focal (fig. 522). Tracemos uma reta indefinida MX e reproduzamos a partir de um ponto M , dois segmentos consecutivos MV e VF , iguais à distância DE .

O ponto F é o foco, V , o vértice e M um dos pontos da diretriz da parábola. Tiremos pelo ponto M uma perpendicular AB à reta MX ; essa perpendicular é a diretriz. Com esses elementos construamos a parábola.

Problema 170. — Construir uma parábola conhecendo-se a diretriz, uma tangente e o ponto de contacto.

Seja MN a diretriz, TG a tangente, e G o ponto de contacto (fig. 523). Abaixemos do ponto G uma perpen-

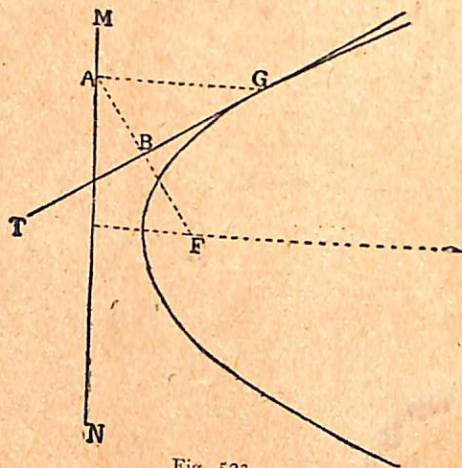


Fig. 523

dicular sobre a diretriz, e do ponto A uma outra sobre a tangente. Como o ponto A é simétrico ao foco, basta tomar $BF = BA$.

Com estes elementos (fóco e diretriz) construimos a parábola.

Problema 171. — Traçar uma tangente à parábola num ponto dado da curva.

Seja M o ponto dado na parábola (fig. 524). Façamos $FB = FM$ e tracemos a reta que passa por B e M , e teremos a tangente pedida.

Outro processo. — Abaixemos do ponto M a perpendicular ME sobre a diretriz e unamos E a F ; a tangente será a perpendicular traçada pelo meio de FE .

Problema 172. — Traçar uma tangente à parábola por um ponto exterior.

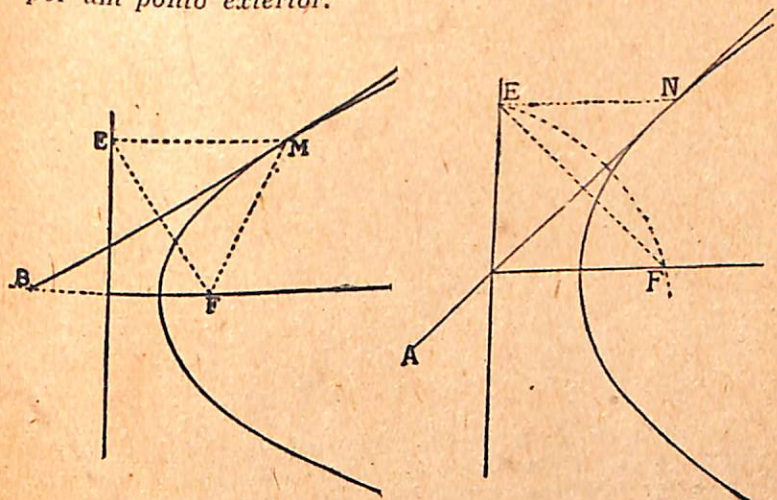


Fig. 524

Fig. 525

Seja A o ponto exterior (fig. 525). Do ponto A , como centro e AF como raio, descrevamos um arco que determinará o ponto E na diretriz.

Tiremos a reta EF e do ponto A abaixemos uma perpendicular sobre ela. Esta perpendicular será a tangente pedida.

O ponto de contacto N é determinado pela intersecção desta perpendicular com a reta EN paralela ao eixo.

NOTA. — Para que este problema possa ter solução é preciso que a distância do ponto A à diretriz seja menor que o raio do círculo descrito do ponto A ; isto é, menor que AF .

Problema 173. — Traçar uma tangente à parábola e que seja paralela a uma reta dada.

Seja F o foco da parábola e MN a reta dada (fig. 526).

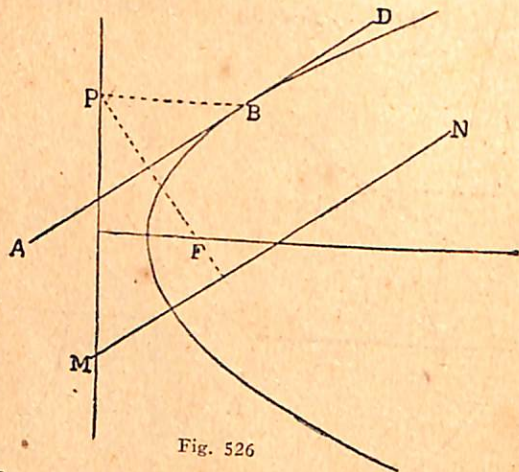


Fig. 526

Do foco abaixemos uma perpendicular sôbre a reta MN e prolonguemo-la até encontrar a diretriz no ponto P ; levantemos uma perpendicular AD pelo meio de FP ; esta perpendicular será a tangente pedida.

O ponto de contacto B será determinado pela intersecção desta tangente com uma paralela ao eixo, tirada do ponto P .

O problema seria impossível se a reta MN fosse paralela ao eixo; em qualquer outro será sempre possível.

Problema 174. — Sendo dado um arco da parábola, determinar seu eixo, seu foco e sua diretriz.

Seja BAC o arco de parábola (fig. 527).
Tracemos nesta curva duas cordas paralelas BC e DE e façamos passar pelos meios dessas cordas uma reta que é o diâmetro da curva de extremidade A ; tomemos no prolongamento deste diâmetro uma distância $AP = AG$ e liguemos P a B e a C ; estas retas serão tangentes à parábola nos pontos B e C .

Conhecidas estas duas tangentes e os pontos de contacto, tracemos, por B e C , as paralelas ao diâmetro, BH e CJ . Façamos os ângulos $PBF = MBH$ e $PCF = JCN$; determinamos, assim, o foco F , pelo qual tracemos FX paralelamente a PG ; FX é o eixo da curva.

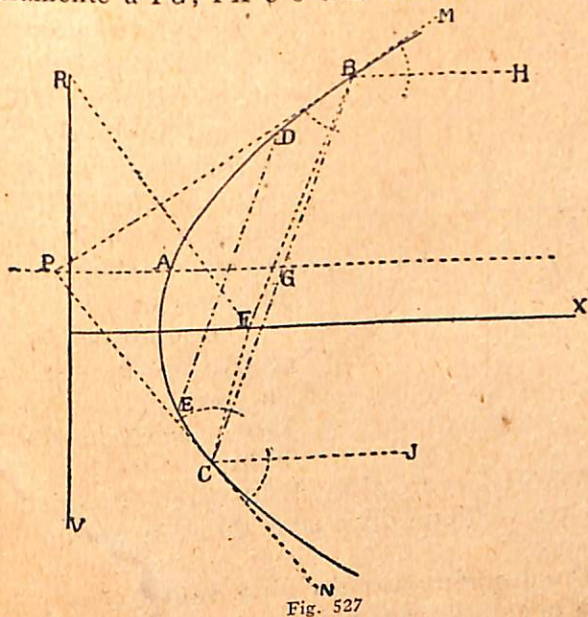


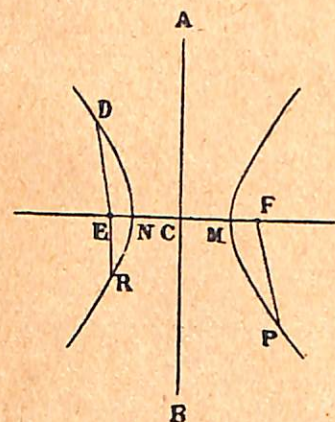
Fig. 527

Para ter a diretriz tomemos o ponto R simétrico ao ponto F em relação à tangente PM e tracemos de R a reta RV perpendicular a FX .

HIPÉRBOLE

Hipérbole é a curva, plana, composta de dous ramos, na qual é constante a diferença das distâncias de qualquer de seus pontos a dous pontos fixos chamados *focos* (fig. 528).

Os segmentos de reta que ligam os focos a qualquer ponto da curva chamam-se *raios vetores*. A distância entre os focos é a *distância focal*.



A hipérbole tem dois eixos: um que passa pelos focos — *eixo transverso*; outro perpendicular a este no meio da distância focal — *eixo não transverso*.

O ponto de intersecção dos eixos é o *centro* da hipérbole.

Os pontos de intersecção dos ramos da curva com o eixo transverso são os *vértices* da hipérbole.

À porção do eixo transverso compreendida entre os vértices da curva dá-se o nome de *eixo real*.

O comprimento do eixo real é igual à diferença constante dos raios vetores do mesmo ponto da curva.

Chamam-se *assíntotas* da hipérbole duas retas que passam pelo centro da hipérbole, fazendo com o eixo transversal um mesmo ângulo e tal que os dois ramos da curva delas se aproximam cada vez mais, sem, todavia, nunca as encontrar.

Tangente é qualquer reta situada no plano da curva, e que só tem com esta um ponto comum (*ponto de contacto*).

Circunferência diretora da hipérbole é a de raio igual ao eixo real, e tem o centro em qualquer dos focos.

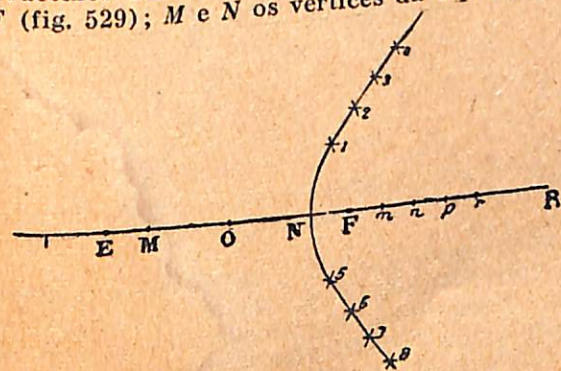
Uma hipérbole é *equilátera* quando as assíntotas são bissetrizes dos ângulos formados pelos eixos.

Na fig. 528 os pontos *E* e *F* são os focos; *N* e *M*, os vértices; *C*, o centro; a reta *EF*, o eixo transversal; *AB* é o eixo não transversal; *FP*, *ED*, *ER* são raios vetores; *EF* é a distância focal; *NM* a diferença constante ou eixo real.

PROBLEMAS

Problema 175. — Traçar uma hipérbole com o compasso, dados os focos e os vértices.

Tracemos uma reta indefinida; marquemos os focos *E* e *F* (fig. 529); *M* e *N* os vértices da hipérbole.



Dividamos *MN* ao meio: o ponto *O* será o centro da hipérbole. Marquemos, a partir de *F* para *R*, as distâncias *Fm*, *mn*, *np*, *pr* iguais entre si. Do ponto *F* como

centro e com os raios mN , nN , pN , rN , descrevamos arcos de um e outro lado do eixo transverso; do ponto E e com raios iguais a mM , nM , pM , rM , determinemos os pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, os quais marcam a passagem de um ramo da hipérbole.

Procedamos de modo inverso em relação aos focos E e F e obteremos o outro ramo da hipérbole.

Problema 176. — Traçar uma hipérbole de um movimento contínuo conhecendo-se os focos e a diferença constante dos raios vetores de cada ponto (comprimento do eixo real).

Sejam MN a diferença constante, E e F os focos (figura 530).

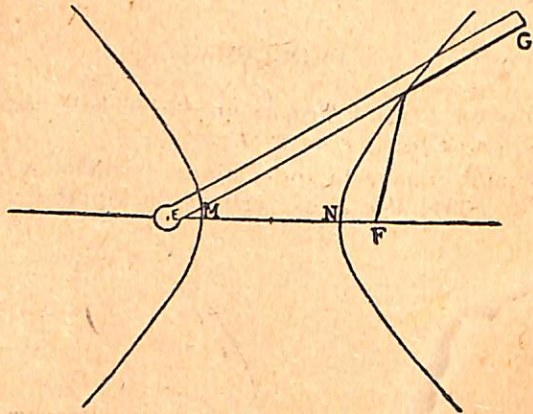


Fig. 530

Descrevamos primeiro o ramo cujos pontos estão mais próximos de F do que de E . No foco E fixemos um prego, parafuso ou alfinete, ao redor do qual faremos girar uma régua EG de comprimento maior que a distância focal; na extremidade dessa régua fixemos um cordel cujo comprimento seja o da régua menos o do eixo real. A outra extremidade do cordel será fixada no ponto F ; se fizermos girar a régua ao redor do ponto E e ao mesmo tempo mantivermos um lapis junto à régua e es-

ticando o cordel, a ponta do lapis descreverá o arco da hipérbole.

O outro ramo se obtém procedendo de modo inverso em relação a E e F .

Problema 177. — Traçar a tangente à hipérbole em um ponto da curva.

M é o ponto dado na hipérbole (fig. 531).

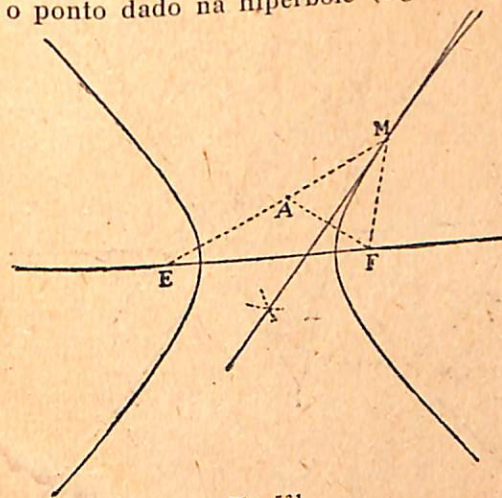


Fig. 531

Tracemos os raios vetores (EM e FM) do ponto de contacto; a bissetriz do ângulo EMF será a tangente pedida.

Para tirarmos essa bissetriz, poderemos marcar $MA = MF$, depois unir A a F e traçar uma perpendicular pelo meio de AF .

Problema 178. — Traçar uma tangente à hipérbole por um ponto exterior.

Seja P este ponto (fig. 532); do ponto E , como centro, com um raio igual ao eixo real, descrevamos uma circunferência; do ponto P , como centro, e PF como raio, descrevamos um arco que corte aquela circunferência nos

pontos H e N ; tracemos o segmento HF e abaixemos sôbre êle, do ponto P , uma perpendicular; esta será a tangente pedida.

O ponto de contacto M é determinado pela intersecção desta tangente com o prolongamento da reta EH .

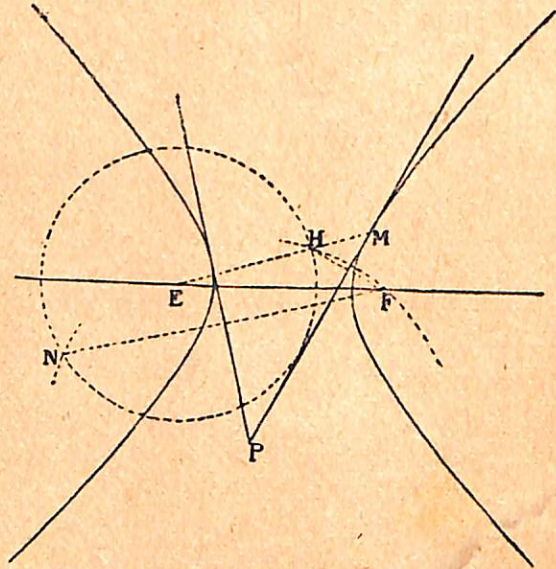


Fig. 532

Do ponto dado, P , ainda se pode tirar outra tangente: é a perpendicular baixada de P sôbre NF .

Problema 179. — Traçar uma tangente à hipérbole e que seja paralela a uma reta dada.

AB é a reta dada (fig. 533).

Do foco E como centro, com raio igual ao eixo real, descrevamos a *circunferência diretora*; do foco F tracemos uma perpendicular a AB ; esta cortará o círculo em dois pontos M e N ; pelos meios de FM e FN tracemos paralelas a AB ; estas paralelas serão as tangentes pedidas.

Os pontos de contacto, R e V , serão os pontos de in-

tersecção das tangentes com os prolongamentos das retas EM e NE .

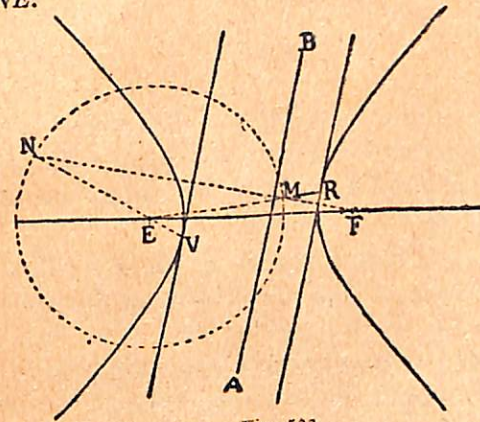


Fig. 533

Problema 120. — Traçar as assintotas de uma hipérbole.

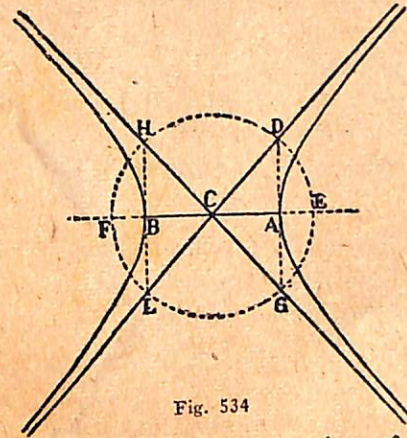


Fig. 534

Descrevamos do ponto C uma circunferência com o raio CF (fig. 534) e pelos pontos A e B façamos passar perpendiculares ao eixo real.

Estas perpendiculares determinam na circunferência os pontos *D, G, H, L*, por onde passam as assintotas.

ESPIRAL

A curva plana descrita por um ponto que gira em torno de um ponto fixo e se afasta dele progressivamente, chama-se **espiral**. O ponto fixo chama-se *polo* da espiral.

A espiral mais simples e mais conhecida é a de Arquimedes, cujas propriedades foram descobertas por este ilustre geômetra.

A **espiral de Arquimedes** é a curva plana descrita por um ponto que se desloca em movimento uniforme sobre uma semi-reta enquanto esta gira uniformemente em torno da sua origem. Esta é o *polo* da espiral. A porção da curva que corresponde a uma rotação completa (4 retos) chama-se *espira*. O segmento de reta que liga o polo a um ponto qualquer da curva é um *raio vetor*. A distância medida sobre um raio vetor entre duas espiras consecutivas é constante e se chama *passo da espiral*.

A mola que faz mover as rodas de um relógio tem a forma de espiral.

O ornamento em espiral é muito empregado nos trabalhos de ferro forjado em grades, suportes, portões, etc.

Empregam-se também às curvas análogas à espiral, chamadas *falsas espirais* com 2, 3, 4, 5 ou mais centros.

PROBLEMAS

Problema 181. — Traçar uma espiral de Arquimedes.

Seja *M* o polo e *MN* (fig. 535) o passo da espiral; tracemos a circunferência de raio *MN* e dividamo-la em um número arbitrário de partes iguais; tiremos raios pelos pontos de divisão e dividamos um deles, *MN* por exemplo, no mesmo número de partes em que foi dividida a circunferência.

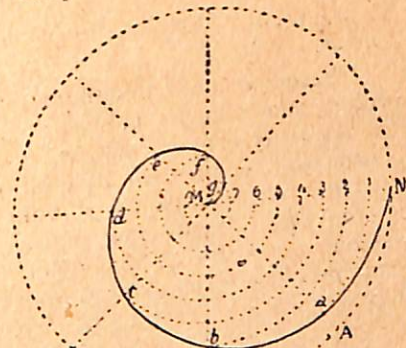


Fig. 535

Façamos centro em *M* e com um raio *M1* descrevamos um arco que determine no raio *MA* o ponto *a* da curva.

Depois, sempre, com o centro em *M* e com os raios *M2, M3, M4, M5, M6, M7* descrevamos os arcos *2b, 3c, 4d, 5e, 6f, 7g* cujos pontos extremos *b, c, d, e, f, g* indicam a passagem da espiral, que se traçará a mão livre.

Quanto maior for o número de partes em que se dividir a circunferência, melhor se traçará a espiral.

Problema 182. — Traçar uma falsa espiral de dois centros.

Tracemos uma reta indefinida (fig. 536) e marquemos sobre ela os pontos *M* e *N*, que vão ser os centros da espiral. Façamos centro em *M* e com um raio *MN* tracemos a semi-circunferência *AN*. Façamos centro em *N* e com um raio *NA* descrevamos a semi-circunferência *AB*; centro novamente em *M*, descreva-

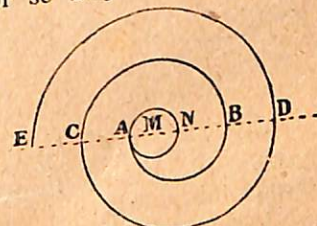


Fig. 536

com o raio *NA* descrevamos a semi-circunferência *AB*; centro novamente em *M*, descreva-

mos a semi-circunferência BC ; e assim por diante, fazendo centro em N e M , descrevendo as semi-circunferências CD , DE , etc.

Problema 133. — Traçar uma falsa espiral de três centros.

Tracemos um triângulo equilátero ABC (fig. 537) e prolonguemos-lhe os lados.

Façamos centro em A e, com raio AC , descrevamos o arco CD ; centro em B , com raio BD , descrevamos o arco DE ; em seguida em C , com o raio CE , descrevamos o arco EF ; e assim por diante, fazendo centro sucessivamente em A , B e C , tomemos como raios as distâncias de cada um desses centros à extremidade do último arco descrito.

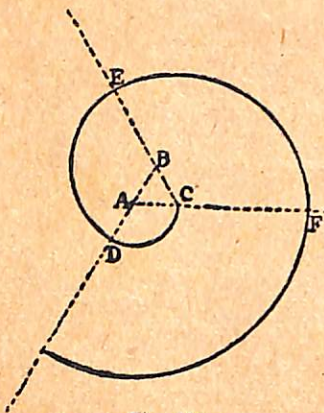


Fig. 537

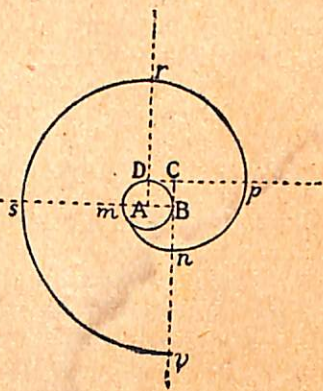


Fig. 538

Problema 134. — Traçar uma falsa espiral de quatro centros. Tracemos o quadrado $ABCD$ (fig. 538) e prolonguemos-lhe os lados.

Façamos centro em A e descrevamos a semi-circunferência Bm ; o ponto B é o centro do arco mn , o ponto C é o centro do arco np ; D é o centro do arco pr ; A é novamente centro do arco rs e assim por diante. Os

pontos A , B , C e D são os centros dos arcos que formam a espiral.

Observação: — Segundo a mesma marcha, podemos traçar uma falsa espiral de 5, 6, 7 e mais centros, partindo dos polígonos regulares convexos de igual número de lados.

HELICE

Chama-se **hélice** a curva formada sobre a superfície cilíndrica por um lado de um ângulo que se enrola no cilindro, enquanto o outro lado se enrola no círculo da base do cilindro (fig. 539).

São muito comuns as molas em forma de hélice (fig. 540). Mesmo na natureza encontramos trepadeiras, como a corriola (fig. 541), que se desenvolvem em hélice.



Fig. 539



Fig. 540



Fig. 541

A porção da hélice compreendida entre duas passagens consecutivas da curva pela mesma geratriz do cilindro é uma *espira* da hélice; o segmento da geratriz entre duas passagens consecutivas é o *passo* da hélice.

Observação — É importante assinalar que todas as curvas até aqui estudadas (círculo, elipse, hipérbole, parábola, oval, espiral, etc.), são curvas planas; a hélice, entretanto, não tem todos os seus pontos no mesmo plano e por isso se diz que a hélice é uma curva *reversa*.

QUESTIONÁRIO

1. Que é elipse?
2. Cite astros que em seus movimentos descrevem elipses.
3. Quantos eixos admite a elipse e quais são?
4. Que é distância focal da elipse e como é ela representada?
5. Que são raios vetores da elipse?
6. Quantas posições pode ocupar uma reta em relação à elipse?
7. Qual a propriedade da tangente à elipse?
8. De que depende ser a elipse arredondada ou alongada?
9. Na elipse, que exprime a razão $\frac{c}{a}$?
10. Quando a excentricidade da elipse é nula a que se reduz ela?
11. De que se compõe uma falsa elipse e que outro nome se lhe dá?
12. Que é oval?
13. Quais são os eixos da oval?
14. Que é uma parábola?
15. Defina os seguintes elementos da parábola: foco, diretriz, eixo, vértice, raio vetor, parâmetro e diâmetro.
16. Que é hipérbole?
17. Defina, em relação à hipérbole: focos, distância focal, raios vetores e vértices.
18. Quantos eixos tem a hipérbole e quais são?
19. Que são assíntotas da hipérbole?
20. Que é circunferência diretora da hipérbole?
21. Quando se diz que a hipérbole é equilátera?
22. Que é espiral de Arquimedes?
23. Defina polo e passo da espiral de Arquimedes.
24. Que curvas são chamadas falsas espirais?
25. Que é uma hélice?
26. Porque se diz que a hélice é uma curva reversa?

Matigiani

Extrato do Catálogo da Livraria Francisco Alves

OLAVO BILAC e MANOEL BOMFIM:

Livro de Leitura para o Curso de Admissão.

ALBERTO DE OLIVEIRA:

Céu, Terra e Mar.

RAJA GABAGLIA e JOÃO RIBEIRO:

Exame de Admissão para os Ginásios (História do Brasil — Geografia — Aritmética — Ciências Físicas e Naturais).

OSVALDO SERPA e MACHADO SILVA:

A. B. C. (Direct method).

English for children.

Paul and Mary.

JOÃO RIBEIRO:

Gramática portuguesa — Curso primário.

Gramática portuguesa — Curso médio.

Gramática portuguesa — Curso superior.

MAXIMINO MACIEL:

Lições Elementares da Língua Portuguesa.

OTHELLO SOUZA REIS:

Seiscentas expressões fracionárias.

Noções de História do Brasil.

Pesos e medidas e tabelas de moedas nacionais e estrangeiras.

Europa, Asia, Africa, America, Oceania de hoje.

ANTONIO TRAJANO:

Aritmética Primária.

Aritmética Elementar.

Aritmética Progressiva.

Chave da Aritmética Progressiva.

Algebra Elementar.

FELICISSIMO FERNANDES:

Ciências Naturais e Físicas — C. elementar.

Ciências Naturais e Físicas — C. medio e superior.

EUGENIO WERNECK:

Antologia Brasileira.

A. DE REZENDE MARTINS:

Geografia Elementar.

HENRI DE LANTEUIL:

Pour les petits.

Mon Premier Livre.

Mon Deuxième Livre.

Remetemos o nosso catálogo, grátis, a quem o pedir