

lelas, os segmentos correspondentes nas duas retas são proporcionais.

**Problema 118.** — Achar a quarta proporcional a três segmentos dados.

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  (fig. 320) os segmentos dados.

Tracemos um ângulo qualquer  $V$  (fig. 321); sôbre um lado marquemos a distância  $VM = a$  e  $VN = b$  e,

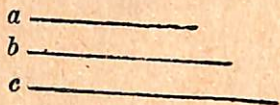


Fig. 320

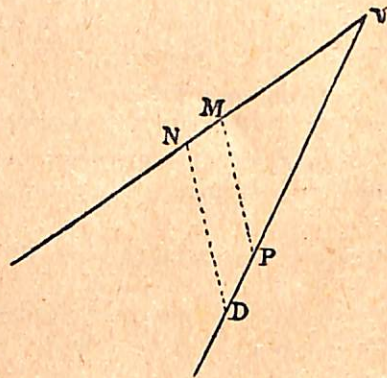


Fig. 321

sôbre o outro lado,  $VP = c$ . Liguemos o ponto  $M$  ao ponto  $P$  e do ponto  $N$  tracemos uma paralela a  $MP$ . A quarta proporcional pedida é  $VD$ .

**Problema 119.** — Achar a média proporcional a dois segmentos de reta.

Sejam  $a$  e  $b$  os segmentos dados (fig. 322). Sôbre uma reta indefinida marquemos  $MN$  (fig. 323) igual a  $a$  e  $NP = b$ . Sôbre  $MP$  como diâmetro, descrevamos uma

semi-circunferência e pelo ponto  $N$  levantemos uma perpendicular.  $NK$  é a média proporcional pedida.



Fig. 322

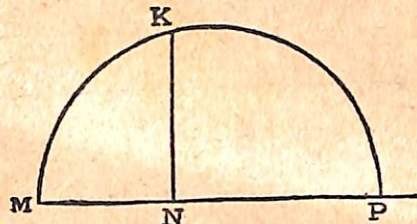


Fig. 323

**Problema 120.** — Dividir um segmento de reta em média e extrema razão.

Seja  $AB$  o segmento dado (fig. 324).

Construamos um triângulo  $ABC$  em que um cateto seja  $AB$  e o outro metade de  $AB$ .

Do ponto  $C$ , como centro e raio igual a  $CB$ , marquemos  $CE$ . Finalmente, do ponto  $A$  e com raio  $AE$  tracemos o arco  $ED$ .

O ponto  $D$  divide  $AB$  em média e extrema razão. Diz-se que  $AD$  é o segmento áureo de  $AB$  (\*).

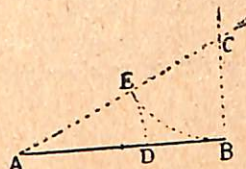


Fig. 324

**Problema 121.** — Construir um triângulo, dado o perímetro e sabendo seus lados proporcionais a três segmentos dados.

(\*) Dividir um segmento de reta em média e extrema razão é dividi-lo em duas partes, de modo que uma delas seja média proporcional entre o segmento todo e a outra parte. Quando no problema 109 (2.<sup>a</sup> solução) determinamos o lado do decágono regular convexo, não fizemos mais do que dividir o raio do círculo circunscrito em média e extrema razão, pois o lado do decágono regular convexo é igual ao segmento áureo do raio.



Seja  $AB$  o perímetro (fig. 325) e  $m$ ,  $n$  e  $p$  os segmentos proporcionais aos lados (fig. 326).

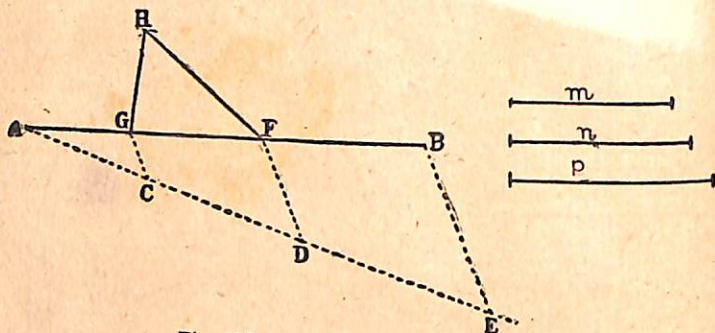


Fig. 325

Fig. 326

Do ponto  $A$  façamos partir uma semi-reta e apliquemos sobre ela  $AC = m$ ,  $CD = n$  e  $DE = p$ .

Liguemos o ponto  $B$  ao ponto  $E$  e de  $C$  e  $D$  tracemos paralelas a  $BE$ .

Os lados do triângulo pedido são iguais a  $AG$ ,  $GF$  e  $FB$  respectivamente,

### EXERCÍCIOS

1. Trace um segmento de reta qualquer e divida-o em 3, em 5, em 7, em 9, etc. partes iguais.
2. Trace três segmentos de reta e divida o primeiro deles em partes proporcionais aos outros dois.
3. Trace três segmentos de reta e construa a sua quarta proporcional.
4. Trace dois segmentos de reta e construa a sua média proporcional.
5. Divida graficamente em média e extrema razão um segmento de reta de 8cm.
6. Construa o triângulo que tem 10cm de perímetro e cujos lados são proporcionais a 2, 3 e 4.

## CAPÍTULO XI

### Polígonos semelhantes. — Escalas.

Consideremos o polígono  $ABCDE$  e construa-mos depois um outro,  $A'B'C'D'E'$  (fig. 327), onde os ângulos são respectivamente iguais aos do primeiro, isto é,

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A' & \angle B &= \angle B' & \angle C &= \angle C' \\ \angle D &= \angle D' & \angle E &= \angle E' \end{aligned}$$

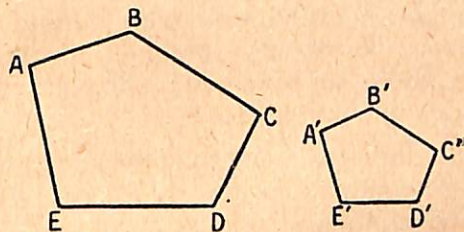


Fig. 327

e os lados são proporcionais, isto é,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$



Dizemos que esses dois polígonos,  $ABCDE$  e  $A'B'C'D'E'$ , são *semelhantes*. Os elementos que se correspondem nas duas figuras chamam-se *homólogos*. Assim, o lado  $A'B'$  é o homólogo de  $AB$ , o vértice  $C$  é o homólogo de  $C'$ , etc.

Dois polígonos são, portanto, semelhantes quando têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.

**Razão de semelhança.** — A razão constante que há entre os lados homólogos de dois polígonos semelhantes chama-se *razão de semelhança*. Assim, a razão de semelhança do polígono  $ABCDE$  para o polígono  $A'B'C'D'E'$  é 2, pois cada lado do primeiro é 2 vezes o seu homólogo; inversamente, a razão de semelhança de  $A'B'C'D'E'$  para  $ABCDE$  é  $\frac{1}{2}$ .

**Semelhança e igualdade.** — Convém não confundir polígonos semelhantes com polígonos iguais: duas figuras são iguais quando podem coincidir ponto por ponto, ao passo que, em geral, as figuras semelhantes não coincidem.

A igualdade pode ser considerada como o caso especial de semelhança em que a razão de semelhança é a unidade.

**Semelhança de polígonos regulares.** — Os polígonos regulares de mesmo número de lados e de mesma espécie são semelhantes. Quer isto dizer que todos os triângulos equiláteros são semelhantes, assim como todos os quadrados, todos os pen-

tágonos convexos regulares, todos os pentágonos regulares estrelados, etc.

**Semelhança de triângulos.** — Demonstra-se que toda paralela a um lado do triângulo determina outro triângulo semelhante ao primeiro. Exemplo: na fig. 314 (pag. 156), como  $DE$  é paralela a  $BC$ , o triângulo  $ADE$  é semelhante ao triângulo  $ABC$ . Esta propriedade é devida a Tales (*lei linear de Tales*).

Damos abaixo as condições suficientes para a semelhança de dois triângulos (*casos de semelhança de triângulos*):

Dois triângulos são semelhantes quando têm: 1.º) dois ângulos iguais; 2.º) um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais; 3.º) os três lados proporcionais.

**Decomposição de polígonos semelhantes.** — Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes e seme-

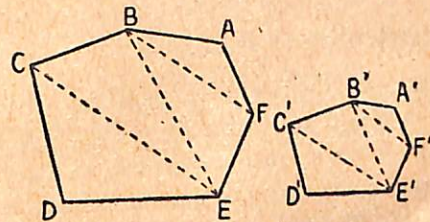


Fig. 328

lhantemente dispostos. É o que se observa na fig. 328 em que o triângulo  $ABF$  é semelhante a  $A'B'F'$ ,  $BEF$  é semelhante a  $B'E'F'$  e assim sucessivamente.



**Propriedade relativa aos perímetros de polígonos semelhantes.** — Os perímetros de dois polígonos semelhantes estão entre si como dois lados homólogos, isto é, na mesma razão de semelhança.

Esta propriedade nos permite, conhecida a razão de semelhança de dois polígonos e dado o perímetro de um deles, determinar o perímetro do outro.

Exemplo: A razão de semelhança do polígono  $P$  para o polígono  $P'$  é  $\frac{6}{7}$ ; o perímetro do primeiro é 18; qual o perímetro do segundo?

Chamando  $x$  o perímetro pedido, podemos fazer

$$\frac{18}{x} = \frac{6}{7}$$

donde se tira

$$x = \frac{18 \times 7}{6} = 21$$

O perímetro de  $P'$  é 21.

**Escalas.** — Quando passamos do polígono  $ABCDE$  para o seu semelhante  $A'B'C'D'E'$  (fig. 327), dizemos que houve uma *redução*, visto como a segunda figura é menor do que a primeira; isto se dá sempre que a razão de semelhança do novo polígono para o primitivo é menor do que a unidade. Ao contrário, se passarmos do polígono  $A'B'C'D'E'$  para o polígono  $ABCDE$  há uma *ampliação*, visto como a segunda figura é maior do que a primitiva; isto se dá sempre que a razão de semelhança do

novo polígono para o primeiro é maior do que a unidade.

Na redução, chama-se geralmente *escala* a razão de semelhança da figura desenhada para a figura primitiva, que serve de modelo. Pode-se dizer que escala é a razão das dimensões do desenho para as dimensões reais. Esta razão se costuma exprimir em forma de fração ordinária em que o numerador é a unidade.

Assim, diz-se que um desenho está na escala de *um para vinte* ( $1 : 20$  ou  $\frac{1}{20}$ ), quando a razão de semelhança da redução para o original for  $\frac{1}{20}$ .

Conhecida, em cada caso, a redução que se quer obter, pode-se construir facilmente uma *escala de redução* traçando duas paralelas e dividindo-as em partes iguais por perpendiculares comuns.

Para desenharmos um modelo na proporção de  $1:10$ , por exemplo, teríamos que construir uma escala em que cada uma das divisões representasse a décima parte da medida adotada.

Na figura 329 (escala de  $1:10$ )  $AB$  que é igual a um decímetro, representá um metro;  $Ac$  que é

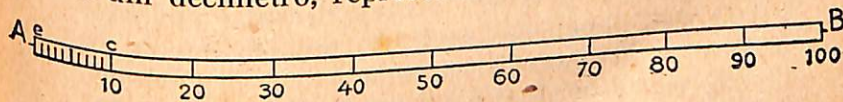


Fig. 329

igual a um centímetro, representa um decímetro e  $Ae$ , que é um milímetro, representa um centímetro.



Na figura 330 (escala de 1:20) *MN* mede cinco centímetros e representa um metro, porque cinco centímetros é a vigésima parte do metro; cada di-

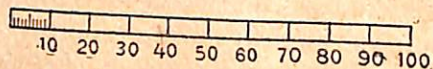


Fig. 330

visão é igual a cinco milímetros e representa um decímetro; finalmentê, divididos cinco milímetros em dez partes iguais, cada uma representará, nessa escala, um centímetro.

As escalas métricas de proporção mais usadas são:

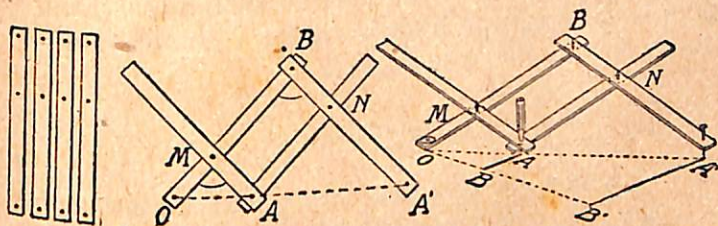
Escala	Medida real	Medida gráfica
1:5	1 metro	0,20m
1:10		0,10m
1:20		0,05m
1:25		0,04m
1:50		0,02m
1:100		0,01m

Conhecida a escala de um desenho podemos julgar das dimensões reais do modelo ou objeto representado nêsse desenho.

A **escala decimal transversal** permite divisões muito pequenas as quais não poderíamos obter na escala comum.

Sua construção é baseada na teoria dos triângulos semelhantes (Veja **Problema 122**).

**Pantógrafo** — O aparelho destinado a traçar figuras semelhantes é o *pantógrafo*, cuja construção se baseia na lei linear de Tales e está ao alcance de qualquer pessoa. Compõe-se ele, essencialmente, de 4 hastes rígidas iguais, cada uma delas dividida por um ponto de modo que a haste toda esteja para um dos segmentos (sôbre ela determinados por tal ponto) como a figura que se deseja deve estar para a figura dada. As 4 hastes são depois articuladas nesses pontos, de sorte a formarem um paralelogramo (*AMBN*).



Suponhamos que se deseja uma ampliação para o triplo, isto é, a razão de semelhança da figura pedida para a figura dada é 3 : 1 ou 3. Cada haste é dividida em três partes iguais e em seguida são as hastes articuladas no primeiro ponto de divisão. A extremidade *O* é fixada sobre a mesa; no ponto *A* existe um estilete e em *A'*, um lapis. Pois bem, quando, deformando o paralelogramo, se fizer o estilete descrever um segmento (*AB*), o lapis descreverá outro segmento paralelo 3 vezes maior



(A'B'). Do mesmo modo, qualquer que seja a figura descrita pelo estilete, o lapis descreverá outra semelhante e que estará para a primeira na razão 3 : 1.

Si quiséssemos uma figura que estivesse para a figura dada na razão 5 : 2, por exemplo, bastaria mudar os pontos de articulação das hastes, dividindo estas em 5 partes iguais e fazendo a articulação pelo segundo ponto de divisão; e assim por diante.

Os pantógrafos geralmente encontrados no mercado são de hastes de metal ou de madeira convenientemente graduadas e construídas de modo que se possa facilmente variar a escala, mudando os pontos de articulação.

### QUESTIONÁRIO

1. Quando é que dois polígonos se dizem semelhantes?
2. Que são elementos homólogos?
3. Que é razão de semelhança de dois polígonos?
4. Pode-se confundir semelhança de figuras com igualdade?
5. Mostre que dois polígonos regulares de mesmo número de lados e da mesma espécie são sempre semelhantes.
6. Quais são os casos de semelhança de triângulos?
7. Que é escala?
8. Como se indica geralmente a escala de um desenho?
9. Que é que se observa quanto à decomposição de polígonos semelhantes em triângulos?
10. Qual a razão existente entre os perímetros de polígonos semelhantes?

### PROBLEMAS

**Problema 122.** — *Construir uma escala decimal.*

Tracemos uma reta e marquemos, a partir de um ponto qualquer, diversas medidas, *AB, BC, CD, DE, etc.*, iguais entre si e cada uma correspondente à unidade de medida (fig. 331).

Dos pontos *A, B, C, D, E* levantemos perpendiculares à reta anteriormente traçada.

Sobre a perpendicular *A* apliquemos dez vezes uma mesma medida arbitraria e pelos pontos de divisão tracemos paralelas a *AE*. Dividamos *AB* em dez partes iguais, tracemos *F 9* e tiremos pelos pontos de divisão, paralelas a *F 9*, como indica a fig. 331.

O ponto *B* é o zero da escala; as distâncias crescentes *a1, b2, c3, etc.*, exprimem 1, 2, 3, etc., unidades; as partes iguais em que está dividida *AB* são as dezenas e as distâncias *AB, BC, CD,* são as centenas.

**Aplicações.** — Para marcar 130 unidades, tomemos a distância *C3* em linha horizontal.

Para ter 263 unidades tomemos a distância *MN* porque  $MN = M3 + 3c + cN$  ou  $200 + 3 + 60 = 263$ .

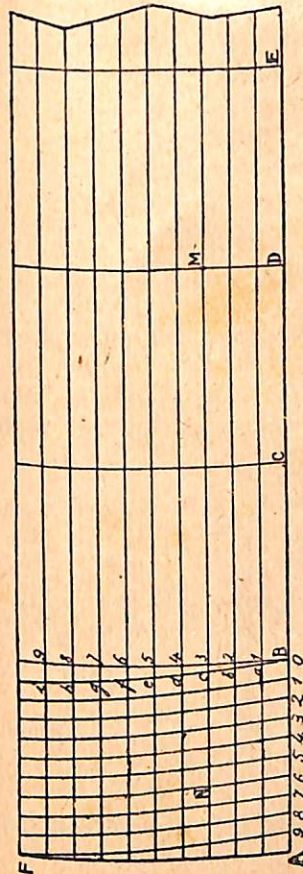


Fig. 331



**Problema 123.** — Construir um triângulo semelhante a outro dado, conhecido o homólogo de um dos lados.

Seja  $ABC$  o triângulo dado (fig. 332) e  $C'B'$  o homólogo de  $CB$  (fig. 333).

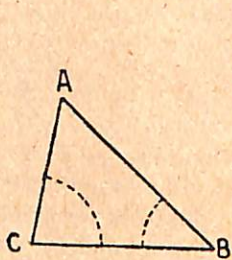


Fig. 332

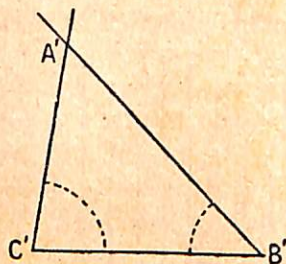


Fig. 333

Façamos no ponto  $C'$  um ângulo  $= C$  e no ponto  $B'$  um outro  $= B$ .

Os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes porque têm dois ângulos respectivamente iguais.

**Problema 124.** — Construir um polígono semelhante a outro dado, conhecido o homólogo de um dos lados.

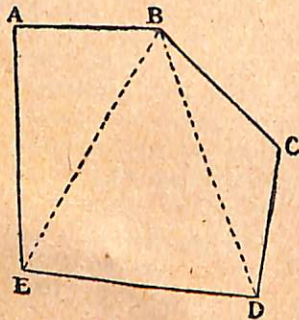


Fig. 334

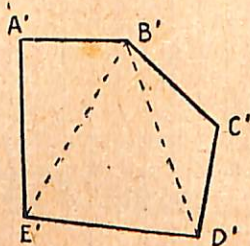


Fig. 335

Seja  $ABCDE$  polígono dado (fig. 334) e  $E'D'$  o lado homólogo de  $ED$  (fig. 335).

Decomponhamos  $ABCDE$  nos triângulos  $ABE$ ,  $BDE$  e  $BCD$ .

Sobre  $E'D'$ , façamos um triângulo  $B'D'E'$  semelhante a  $BDE$ ; sobre o lado  $B'D'$  façamos um triângulo  $B'C'D'$  semelhante a  $BCD$  e sobre  $B'E'$  um triângulo  $A'B'E'$  semelhante a  $ABE$ . Os polígonos  $A'B'C'D'E'$  e  $ABCDE$  são semelhantes.

**Problema 125.** — Construir um retângulo semelhante a outro dada conhecida a razão de semelhança.

Seja  $ABCD$  o retângulo dado (fig. 336), e seja  $6:7$  a razão de semelhança do novo retângulo para  $ABCD$ .

Tiremos a diagonal  $AD$  e dividamos o lado  $AB$  em 7 partes iguais.

Pelo ponto 6 levantemos uma perpendicular a  $AB$  até determinar o ponto  $M$  na diagonal  $AD$ .

Do ponto  $M$  tracemos  $MN$  paralela a  $CD$ . O retângulo pedido é  $A6MN$ , pois seus lados estão para os homólogos em  $ABCD$  na razão  $6:7$  ou  $\frac{6}{7}$ .

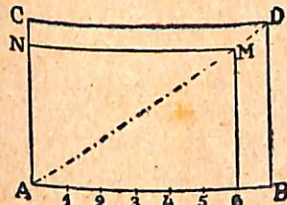


Fig. 336

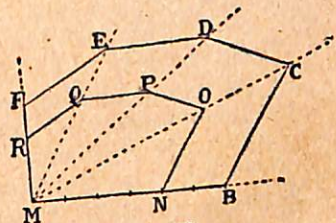


Fig. 337

**Problema 126.** — Construir um polígono semelhante a outro, sendo  $6:4$  a razão de semelhança do novo polígono para o polígono dado.

Seja  $MNOPQR$  o polígono (fig. 337).

Dividamos  $MN$  em 4 partes iguais e prolonguemos  $MR$  e  $MN$ .



Apliquemos em  $NB$  uma distância igual a  $\frac{2}{4}$  de  $MN$ ,

e teremos  $\frac{MB}{MN} = \frac{6}{4}$ .

Do vértice  $M$  tiremos todas as diagonais do polígono dado, prolongando-as.

Tracemos  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  e  $EF$  respectivamente paralelas a  $NO$ ,  $QP$ ,  $PQ$  e  $QR$ .

O polígono  $MBCDEF$  é semelhante ao polígono dado, e a razão de semelhança do primeiro para o segundo é  $\frac{6}{4}$ .

### EXERCÍCIOS

1. Dois pentágonos semelhantes,  $ABCDE$  e  $A'B'C'D'E'$  têm, respectivamente, 60cm e 45cm de perímetro. Os lados do primeiro medem:  $AB=12\text{cm}$ ;  $BC=18\text{cm}$ ;  $CD=10\text{cm}$ ;  $DE=14\text{cm}$ . Quanto medem os lados de  $A'B'C'D'E'$ ?
2. Os lados de um quadrilátero medem 3cm, 5cm, 7cm e 10cm. Um outro quadrilátero semelhante tem 75cm de perímetro. Qual a razão de semelhança do primeiro para o segundo?
3. Numa planta o segmento retilíneo de 4,5cm representa uma distância de 4500 metros. Qual a escala usada?
4. A escala empregada em um mapa foi 1:1.000.000 e nele a cidade  $A$  está a 7,2cm da cidade  $B$ . Qual deve ser a distância real entre as duas cidades?
5. A distância em linha reta entre Belo Horizonte e Rio de Janeiro é aproximadamente 380km e num mapa o segmento retilíneo que liga as duas cidades é de 19cm. Qual a escala do mapa?

## CAPÍTULO XII

### Medida da circunferência.

**Retificar** uma curva é obter um segmento retilíneo de comprimento igual ao da curva.

Se ajustarmos um fio de linha em torno de um círculo até completar-lhe a volta e, depois de esticado o fio, medirmos o seu comprimento, teremos retificado a circunferência daquele círculo. Mas, nem sempre se pode proceder a essa medida direta. Temos, por isso, que recorrer ao cálculo para medir indiretamente o comprimento da circunferência. Vejamos como isto é possível, desde que conheçamos o raio ou o diâmetro da circunferência.

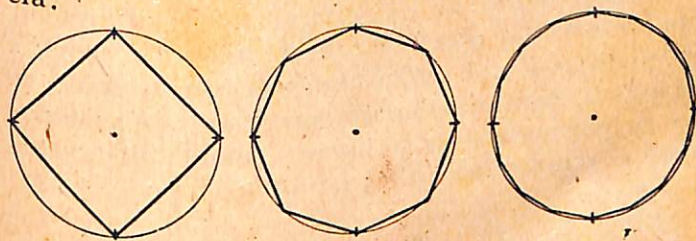


Fig. 338

Tracemos uma circunferência e inscrevamos nela um polígono regular: um quadrado, por exemplo. Notamos que há uma grande diferença entre



o perímetro da circunferência e o do quadrado inscrito. Mas, se dobrarmos o número de lados do polígono inscrito, isto é, si o polígono inscrito for o octógono, já não será tão grande a diferença entre os dois comprimentos; esta diferença ainda se tornará menor si o polígono inscrito for de 16 lados. Assim, si aumentarmos cada vez mais o número de lados do polígono regular inscrito, observaremos que cada lado dêste se vai tornando muito pequeno e que o perímetro dêle se vai aproximando da medida da circunferência. Ora, si considerarmos o polígono regular com um número infinitamente grande de lados, êle acabará se confundindo com o círculo e o seu perímetro será, então, igual à medida da circunferência (fig. 33).

O círculo pode, pois, ser considerado como um polígono regular de número infinito de lados, o comprimento de cada lado tendendo para zero; e a medida da circunferência como o perímetro de tal polígono.

Deste modo de considerar a circunferência, concluímos que duas circunferências são sempre semelhantes e que nelas os raios, assim como os diâmetros, são linhas homólogas. Como já sabemos que os perímetros de polígonos semelhantes estão entre si como duas linhas homólogas, podemos escrever

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} \quad \text{ou} \quad \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

chamando  $C$  o comprimento de uma circunferência de diâmetro  $D$  e raio  $R$  e  $C'$  o comprimento

de outra circunferência de diâmetro  $D'$  e raio  $R'$ . Essas duas proporções indicam que *duas circunferências estão entre si como os seus raios ou os seus diâmetros.*

Se, agora, trocarmos os meios da segunda proporção escrita acima, teremos

$$\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$$

o que significa que a razão da primeira circunferência para o seu diâmetro é igual à razão da segunda circunferência para o respectivo diâmetro. Esta razão constante da circunferência para o diâmetro é designada pela letra grega  $\pi$  (pronuncia-se pi).

O número  $\pi$  não pode ser calculado exatamente, mas os geômetras, usando metodos engenhosos, determinaram o seu valor com uma aproximação muito grande. Na prática, para os problemas usuais, empregamos 3, 1416.

**Medida da circunferência.** — Este valor de  $\pi$  nos mostra que o comprimento da circunferência é,

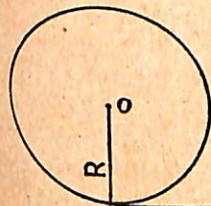


Fig. 339 — Circunferência retificada



aproximadamente, 3 vezes o diâmetro. Com efeito, de

$$\frac{C}{D} = \pi$$

pode-se tirar

$$C = \pi \times D$$

ou, ainda, substituindo o diâmetro pelo dôbro do raio,

$$C = 2 \pi R$$

Conclusão: *obtém-se o comprimento da circunferência multiplicando o seu diâmetro por 3,1416 ou multiplicando o seu raio por 6,2832.*

**Exercício** — Qual o comprimento de uma circunferência cujo raio é igual a 6 metros?

$$C = 2 \times 3,1416 \times 6 = 37,6992\text{m}$$

**Exercício** — Qual a circunferência que tem para diâmetro 16 metros?

$$C = 3,1416 \times 16 = 50,2656\text{m}$$

As mesmas fórmulas acima nos dão o diâmetro e o raio de um círculo quando se conhece a sua circunferência. Com efeito, de  $C = \pi D$  e  $C = 2 \pi R$ , se pode tirar

$$D = \frac{C}{\pi} \quad \text{e} \quad R = \frac{C}{2\pi}$$

isto é, o diâmetro se obtém dividindo o comprimento da circunferência por 3,1416 e o raio se obtém dividindo o comprimento da circunferência por 6,2832.

**Exercício** — Qual o diâmetro de um círculo cuja circunferência mede 37,6992m?

Substituindo-se  $C$  pelo valor dado, temos:

$$D = \frac{37,6992}{3,1416} = 12\text{m}$$

**Comprimento de um arco.** — Como a circunferência tem  $360^\circ$ , cada grau é  $\frac{1}{360}$  da circunferência e um arco de  $n$  graus representa  $\frac{n}{360}$  da circunferência. Então, para obter o comprimento de um arco de  $n$  graus, bastará multiplicar o comprimento total da circunferência por  $\frac{n}{360}$ . Chamando  $a$  o comprimento do arco, teremos

$$a = \frac{2 \pi R n}{360} = \frac{\pi R n}{180}$$

**Exercício** — Qual o comprimento de um arco de  $50^\circ$  numa circunferência de 6 metros de raio?

$$a = \frac{\pi \times 6 \times 50}{180} = \frac{3,1416 \times 6 \times 50}{180} = 5,236\text{m}$$

Si ambos os membros da igualdade

$$a = \frac{\pi R n}{180}$$

forem multiplicados por 180 e depois divididos por  $\pi R$ , obtém-se

$$n = \frac{180 a}{\pi R}$$

isto é, o número de graus de um arco é igual a 180 vezes o seu comprimento dividido por 3,1416 vezes o raio.



**Exercício** — Quantos graus tem um arco de 6 metros, numa circunferência de 15 metros de raio?

$$n = \frac{180 \times 6}{3,1416 \times 15} = 22^{\circ}55'$$

### QUESTIONÁRIO

1. Que é retificar uma curva?
2. Qual a razão de duas circunferências?
3. Como se representa a razão constante da circunferência para o seu diâmetro e que valor tem essa razão?
4. Se medirmos uma circunferência com o seu diâmetro quantas vezes ela o conterá?
5. Como se pode obter o comprimento de uma circunferência conhecendo-se o seu diâmetro ou o seu raio?
6. Como obter o comprimento de um arco de circunferência, conhecida a sua medida em graus?
7. Dado o comprimento de um arco, que fórmula permite calcular sua medida em graus?

## CAPÍTULO XIII

### Área dos polígonos e das figuras circulares.

Medir ou avaliar uma superfície é determinar quantas vezes ela contém uma outra superfície tomada para unidade.

A medida de uma superfície chama-se geralmente *área*.

A unidade de superfície é um quadrado, que tem para lado a unidade de comprimento.

Como no Sistema Métrico Decimal, de uso obrigatório por lei, a unidade de comprimento é o metro, a unidade de superfície é o *metro quadrado* ( $m^2$ ).

Os submúltiplos do metro quadrado são:

O *decímetro quadrado* ( $dm^2$ ), isto é, um quadrado cujo lado mede a décima parte do metro;

O *centímetro quadrado* ( $cm^2$ ), isto é, um quadrado cujo lado mede a centésima parte do metro;

O *milímetro quadrado* ( $mm^2$ ), isto é, um quadrado cujo lado mede a milésima parte do metro.

**Figuras equivalentes.** — Duas figuras iguais têm, evidentemente, a mesma área. Duas figuras, que não sejam iguais, podem, entretanto, ter a mesma área. Neste caso, diz-se que as figuras são *equivalentes*. Tomemos, por exemplo, o quadrado ABCD (fig. 340). Dividamos os lados AD e BC ao



meio, unamos o ponto  $M$  ao ponto  $N$ . O quadrado acha-se dividido em dois retângulos iguais. Colo-

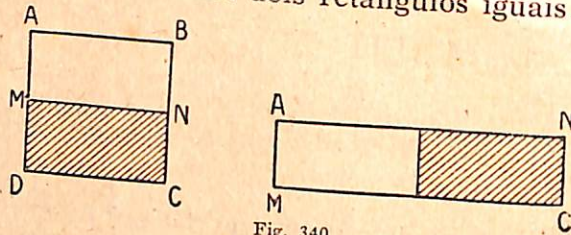


Fig. 340

quemos o retângulo  $MNCD$  de sorte que o lado  $MD$  coincida com o lado  $BN$  do retângulo  $ABNM$ .

Obtemos dêste modo um retângulo  $AMCN$  com a mesma área do quadrado  $ABCD$ . O quadrado  $ABCD$  e o retângulo  $AMCN$  são figuras equivalentes.

Veremos adiante muitos exemplos de figuras desiguais que têm a mesma área.

### ÁREA DO RETÂNGULO

Seja o retângulo  $ABCD$  (fig. 341).

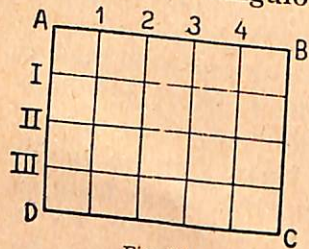


Fig. 341

Apliquemos a unidade de comprimento sôbre  $AB$ ; verificamos que  $AB$  contém 5 vezes a unidade. Em seguida apliquemos a mesma unidade à outra dimensão do retângulo,  $AD$ ; achamos que  $AD$  contém 4 vezes a unidade. Se, pelos pontos 1,2,3,4, tirarmos paralelas a  $AD$ , e, pelos pontos I, II, III, tirarmos paralelas a  $AB$ , o

retângulo ficará decomposto em  $5 \times 4$  ou 20 quadrados que tem de lado a unidade de comprimento, isto é, em 20 unidades de superfície. A área do retângulo é, por conseguinte, igual a 20.

Conclusão: A área do retângulo se obtém fazendo o produto de suas duas dimensões, ou, seja, produto da base pela altura

$$S = B \times A$$

Se conhecermos a área de um retângulo e uma de suas dimensões (base ou altura) podemos determinar a outra dimensão (altura ou base): basta dividir a área pela dimensão conhecida

$$B = \frac{S}{A} \quad A = \frac{S}{B}$$

**Exercício** — A altura de um muro é 2,80m; a área mede 197,40m<sup>2</sup>; qual o seu comprimento?

$$B = \frac{197,40}{2,80} = 70,5\text{m}$$

**Exercício** — Qual a altura de um retângulo cuja área é 32,30m e a base 8,5m.

$$A = \frac{32,30}{8,5} = 3,8\text{m}$$

### ÁREA DO QUADRADO

O quadrado pode ser considerado o caso especial do retângulo em que as dimensões se tornam iguais, (base igual à altura). Se aplicarmos a re-



gra deduzida para calcular a área do retângulo, teremos de multiplicar o lado do quadrado por si mesmo:

$$S = l \times l = l^2$$

Conclusão: a área de um quadrado é igual ao quadrado do lado.

**Exercício** — Qual a área de um quadrado de 12,5m de lado?

$$\text{Área} = 12,5^2 = 12,5 \times 12,5 = 156,25\text{m}^2.$$

Da fórmula  $S = l^2$  deduz-se imediatamente

$$l = \sqrt{S}$$

isto é, o lado do quadrado é igual à raiz quadrada da área.

**Exercício** — Qual o comprimento do lado de um quadrado, cuja área é igual a 46,24m<sup>2</sup>?

$$\text{O lado é igual a } \sqrt{46,24} = 6,8\text{m}.$$

Já vimos (problema N.º 103, pág. 133) que o lado do quadrado era igual ao raio do círculo circunscrito multiplicado pela raiz quadrada de 2, isto é,

$$l = R \sqrt{2}$$

Podemos, então, obter a área do quadrado, se conhecermos o raio do círculo circunscrito. Vem

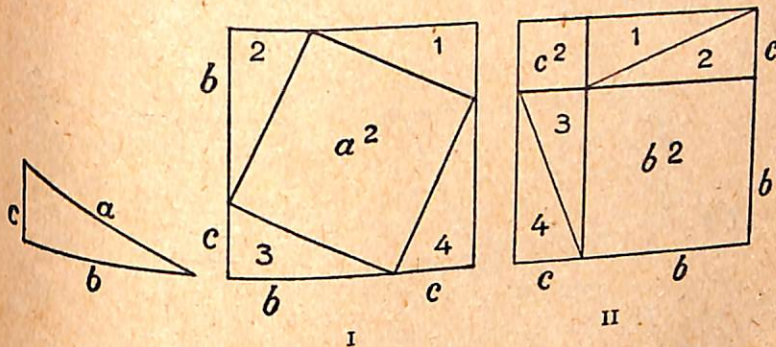
$$S = l^2 = (R \sqrt{2})^2 = 2R^2$$

Conclusão: a área do quadrado é igual ao dôbro do quadrado do raio do círculo circunscrito.

**Exercício** — Qual a área de um quadrado inscrito em um círculo de raio igual a 15m?

$$S = 2 \times 15^2 = 2 \times 225 = 450\text{m}^2$$

**O teorema de Pitágoras aplicado às áreas** — Dissemos na pág. 54 que em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Ora, como o quadrado da hipotenusa dá a área do quadrado que tem para lado a hipotenusa e o quadrado de cada cateto dá a área do quadrado cujo lado é o mesmo cateto, podemos concluir: o quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos. Isto nos é mostrado claramente pela figura abaixo, em relação ao triângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ .



Os dois quadrados (I e II) são evidentemente iguais, pois ambos têm de lado  $b + c$  (soma dos catetos). Entretanto, o primeiro se compõe do quadrado construído sobre a hipotenusa mais 4 triângulos iguais ao triângulo dado; o segundo se compõe destes 4 triângulos mais os quadrados construídos sobre os catetos. Por conseguinte, a



área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

### ÁREA DO PARALELOGRAMO

O paralelogramo é equivalente a um retângulo de mesma base e mesma altura.

Mostremos isto com o paralelogramo  $ABCD$  (fig 342).

Do vértice  $A$  abaixemos a perpendicular  $AE$  comum às paralelas  $AB$  e  $CD$ .  $AE$  é a altura do paralelogramo.

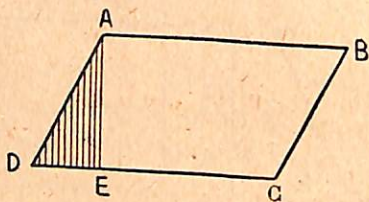


Fig. 342

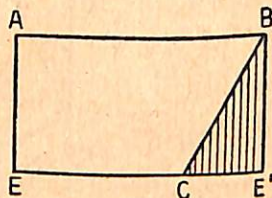


Fig. 343

Destaquemos o triângulo  $AED$  e transportemo-lo para o outro lado do paralelogramo, que se acha deste modo transformado em um retângulo equivalente  $ABE'E$  (fig. 343). A altura  $AE$  do paralelogramo é também altura do retângulo e  $AB$  é ao mesmo tempo base de um e de outro quadrilátero. Logo o mesmo produto  $AB \times AE$ , que dá a área do retângulo, também dá a do paralelogramo. A área

do paralelogramo é, portanto, igual ao produto da base pela altura:

$$S = B \times A$$

**Exercício** — A base de um paralelogramo mede 46,88m e a altura 12,59m: qual a área?

$$S = 46,88 \times 12,59 = 590,2192m^2$$

### ÁREA DO LOSANGO

A área de um losango pode ser obtida como a do paralelogramo: produto da base (o lado do losango) pela altura (fig. 344).

Todo losango é equivalente a um retângulo em que um lado é igual a uma das diagonais do lo-

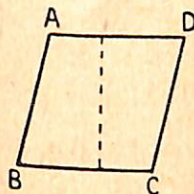


Fig. 344

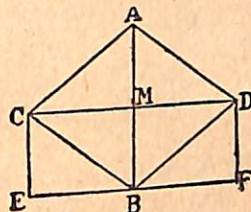


Fig. 345

sango e o outro lado igual à metade da outra diagonal. Assim, o losango  $ACBD$  (fig. 345) é equivalente ao retângulo  $CDFE$  em que uma dimensão ( $CD$ ) é uma diagonal do losango e a outra dimensão ( $MB$ ) é metade da outra diagonal. Chamando  $D$  e  $d$  as diagonais do losango, podemos escrever.

$$S = \frac{D \times d}{2}$$

isto é, a área do losango é igual ao semi-produto das suas diagonais.



**Exercício** — Qual a área de um ladrilho losangonal cujas diagonais são respectivamente 0,16m e 0,12m?

$$\text{Area} = \frac{0,16 \times 0,12}{2} = 0,0096\text{m}^2$$

Da fórmula  $S = \frac{D \times d}{2}$  deduzem-se:

$$d = \frac{2 \times S}{D} \quad \text{ou} \quad D = \frac{2 \times S}{d}$$

isto é, uma diagonal é igual ao dôbro da área dividido pela outra diagonal.

**Exercício** — Um losango tem de área 27,20m<sup>2</sup> e uma diagonal mede 6,40m. Quanto mede a outra diagonal?

$$D = \frac{27,20 \times 2}{6,40} = \frac{27,20}{3,20} = 8,50\text{m.}$$

### ÁREA DO TRIÂNGULO

Da área do retângulo vamos também deduzir a do triângulo. Seja o triângulo  $ABC$ . Do vértice  $B$  (fig 346) abaixemos a perpendicular  $BM$  sobre  $AC$ .  $BM$  é a altura do triângulo  $ABC$  e di-

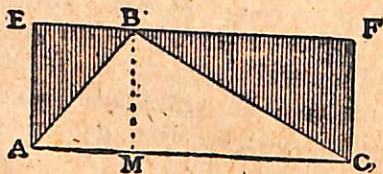


Fig. 346

vide este triângulo em dois outros  $BMA$  e  $BMC$ , ambos retângulos em  $M$ . Tracemos as retas  $AE$  e

$CF$ , ambas perpendiculares à base  $AC$  do triângulo  $ABC$ , e a paralela  $EF$  pelo ponto  $B$ .

O retângulo  $AEFC$  é o dôbro do triângulo  $ABC$  porque o triângulo  $BMA = AEB$  e o triângulo  $BMC = CFB$ .

Ora, a área do retângulo é dada pelo produto da base ( $AC$ ) pela altura ( $AE$  ou  $BM$ ); logo a área do triângulo é dada pela metade deste produto. Como  $AC$  e  $BM$  são também, respectivamente, a base e a altura do triângulo, concluímos que

$$S = \frac{B \times A}{2}$$

isto é, a área do triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

**Exercício** — Seja a base de um triângulo igual a 2 centímetros e a altura igual a 3 centímetros; pede-se a área.

Substituímos, na fórmula,  $B$  e  $A$  pelos seus valores:

$$S = \frac{2 \times 3}{2} = 3\text{cm}^2$$

Se conhecemos a área e a altura de um triângulo podemos determinar a base

$$B = \frac{2S}{A}$$

isto é, a base é igual ao dôbro da área dividido pela altura.

**Exercício** — Qual é a base de um triângulo cuja área mede 247,5075m<sup>2</sup> e a altura 15,25m?

$$\text{Base} = \frac{2 \times 247,5075}{15,25} = 32,46\text{m}$$



Do mesmo modo, conhecidas a área e a base, podemos determinar a altura:

$$A = \frac{2S}{B}$$

isto é a altura é igual ao dôbro da área dividido pela base.

**Exercício** — *Pede-se a altura de um triângulo cuja área mede 175m<sup>2</sup> e a base 25 metros.*

$$\text{Altura} = \frac{2 \times 175}{25} = 14 \text{ metros.}$$

Pode-se determinar a área de um triângulo conhecendo-se os três lados: procura-se o semi-perímetro e dêle se subtrai cada lado separadamente; depois extrai-se a raiz quadrada do produto do semi-perímetro pelos três restos.

Geralmente chamamos  $2p$  ao perímetro e  $p$  ao semi-perímetro do triângulo. Si as medidas dos lados forem respectivamente  $a$ ,  $b$  e  $c$ , teremos a fórmula

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**Exercício** — *Qual a área de um triângulo cujos lados medem respectivamente 6, 8 e 10cm?*

O semi-perímetro é 12; aplicando a fórmula acima, vem

$$S = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$$

$$S = \sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2} = \sqrt{576} = 24$$

*Resposta:* a área do triângulo é 24cm<sup>2</sup>.

Quando o triângulo fôr equilátero, basta conhecer o lado,  $l$ , para se obter a área. Neste caso tem-se

$$S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

Como a raiz quadrada de 3 é aproximadamente 1,732 e, dividindo-se esta por 4 acha-se 0,433, também se pode dizer que a área do triângulo equilátero se obtém multiplicando o quadrado do lado por 0,433, isto é,

$$S = 0,433 \times l^2$$

**Exercício** — *O lado de um triângulo equilátero é 6,80m; pede-se a sua área.*

Substituindo-se na fórmula o valor do lado:

$$0,433 \times 6,80^2 = 20,021920\text{m}^2$$

Sendo o triângulo equilátero inscrito em um círculo cujo raio é conhecido, a sua área é igual ao produto do quadrado do raio por  $\frac{3}{4} \sqrt{3}$ .

$$S = R^2 \times \frac{3}{4} \sqrt{3}$$

Calculando o valor de  $\frac{3}{4} \sqrt{3}$  acha-se 1,299.

Por isso, para obter a área do triângulo equilátero, multiplica-se o quadrado do raio do círculo circunscrito por 1,299.

$$S = 1,299 \times R^2$$

**Exercício** — *Qual a área de um triângulo equilátero inscrito num círculo de 6 centímetros de raio?*

$$\text{Área} = 6^2 \times 1,299 = 36 \times 1,299 = 46,7640\text{cm}^2.$$



### ÁREA DO TRAPÉZIO

Seja o trapézio  $OPQR$  de bases  $PQ$  e  $OR$  e de altura  $PN$  (fig. 347). Marquemos o meio,  $M$ , do lado  $QR$  e tracemos  $PM$  prolongando até encontrar em  $T$  o prolongamento da base maior. Forma-se,

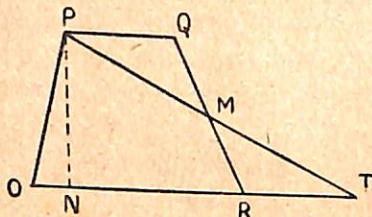


Fig. 347

assim, o triângulo  $POT$ , que vamos provar ser equivalente ao trapézio  $OPQR$ . Com efeito, o quadrilátero  $OPMR$  é comum às duas figuras, mas, enquanto o trapézio tem a mais o pequeno triângulo  $PQM$ , o triângulo  $POT$  tem a mais o pequeno triângulo  $RMT$ . Os dois triângulos pequenos,  $PQM$  e  $RMT$ , são porém, iguais, por terem um lado igual ( $MQ=MR$ ) e dois ângulos respectivamente iguais ( $PMQ = RMT$  como opostos pelo vértice e  $MQP = MRT$  como alternos-internos de duas paralelas com a transversal  $QR$ ).

Podemos, então, dizer que a área do trapézio é a mesma do triângulo. Ora, a área do triângulo  $POT$  é

$$\frac{OT}{2} \times PN$$

onde  $OT$  é a soma das bases do trapézio ( $OT = OR + RT$  ou  $OT = OR + PQ$  porque  $RT$  é

igual a  $PQ$ , dada a igualdade dos triângulos  $PQM$  e  $RMT$ ).

Conclusão: a área do trapézio é igual à semi-soma das bases multiplicada pela altura.

Chamando  $B$  a base maior,  $b$  a base menor e  $A$  a altura, temos a fórmula

$$S = \frac{B + b}{2} \times A$$

Como já sabemos que a semi-soma das bases do trapézio dá a sua base média, ainda se pode dizer que a área do trapézio é igual ao produto da base média pela altura.

**Exercício** — Determinar a área de um trapézio em que as bases medem respectivamente 15cm e 12cm e cuja altura mede 9cm.

Substituindo, na fórmula acima,  $B$  por 15,  $b$  por 12, e  $A$  por 9, obtemos

$$S = \frac{15 + 12}{2} \times 9 = 13,5 \times 9 = 121,5$$

Resposta: a área do trapézio é 121,50cm<sup>2</sup>.

### ÁREA DO POLÍGONO REGULAR

Quando o polígono é regular, efetuamos a decomposição em triângulos, ligando o centro a todos os vértices (fig. 348). Obtemos tantos triângulos quantos são os lados do polígono e cada um tem a mesma base (porque todos os lados do polígono



são iguais) e a mesma altura, que é o apótema do polígono.

Avaliemos a área de um desses triângulos: *DCO*, por exemplo; basta multiplicar metade da base *DC* (que é um lado do polígono) pela altura *OP* (que é o apótema do polígono).

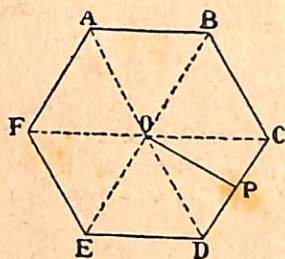


Fig. 348

Se o polígono tem cinco, seis, sete, oito lados, multiplicamos por cinco, seis, sete, oito a área de um triângulo para termos a do polígono. Mas, multiplicando a metade de um lado pelo número de lados, obtemos a metade do perímetro ou o semi-perímetro

do polígono. Chegamos, então, à conclusão de que a área de um polígono regular é igual ao produto do semi-perímetro pelo apótema, ou

$$S = p \times a$$

sendo *p* o semi-perímetro e *a* o apótema.

**Área do hexágono.** — Apliquemos esta fórmula ao caso do hexágono regular.

Já sabemos que o lado do hexágono é igual ao raio do círculo circunscrito, *R*; logo, o semi-perímetro do hexágono será *3R*. O apótema do hexágono, como mostra a fig. 349 é igual à metade do lado

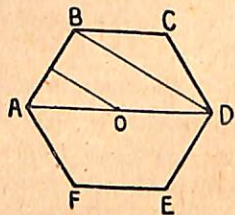


Fig. 349

do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo, isto é, metade de  $R\sqrt{3}$ , ou

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Fazendo o produto do semi-perímetro pelo apótema, vem

$$S = 3R \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = R^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Mas, como o lado do hexágono é igual ao raio, *R*, e  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  é igual a 2,598, podemos concluir que a área do hexágono é igual ao quadrado do lado (ou do raio do círculo circunscrito) multiplicado por 2,598.

$$S = 2,598 \times R^2 \text{ ou } S = 2,598 \times l^2$$

**Problema 201.** — Determinar a área ocupada pelo pedestal de uma estátua, sabendo-se que é um hexágono regular com 2,84m de lado.

$$\begin{aligned} \text{A área ocupada pelo pedestal} &= 2,84^2 \times 2,598 = \\ &= 8,0656 \times 2,598 = 20,954428\text{m}^2. \end{aligned}$$

**Outros polígonos regulares.** — Procedendo de forma análoga com outros polígonos regulares, podemos determinar a sua área quando lhes conhecermos o lado ou o raio do círculo circunscrito. Em cada caso encontramos o quadrado do lado ou do



raio multiplicado por uma quantidade constante, segundo a tabela abaixo:

Pentágono:  $S = 1,72 \times L^2$  ou  $S = 2,377 \times R^2$

Octógono:  $S = 4,828 \times L^2$  ou  $S = 2,828 R^2$

Decágono:  $S = 7,694 \times L^2$  ou  $S = 2,9389 \times R^2$

Dodecágono:  $S = 11,196 \times L^2$  ou  $S = 3 R^2$

### ÁREA DUM POLÍGONO QUALQUER

Para avaliarmos a área de um polígono irregular podemos decompô-lo em triângulos traçando todas as diagonais que partem de um mesmo vértice (fig. 350), ou marcando um ponto interior e

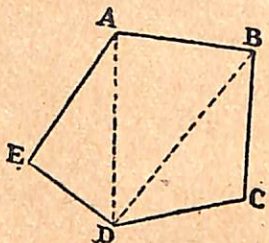


Fig. 350

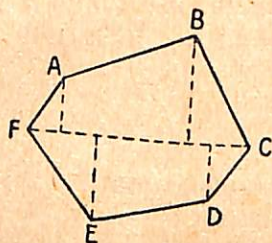


Fig. 351

ligando-o a todos os vértices do polígono; depois calculamos a área de cada um dos triângulos em que ficou decomposto o polígono e somamos os resultados. Embora muito simples, este processo, nem sempre é o mais cômodo. Geralmente decomponemos o polígono em triângulos retângulos e trapézios retângulos como se vê na figura 351.

### ÁREA DO CÍRCULO

Conforme ficou dito ao estudarmos o comprimento da circunferência, consideramos o círculo como o limite para o qual tende um polígono regular inscrito cujo número de lados cresce ilimitadamente, cada lado tendendo para zero.

É fácil verificar, entretanto, que, à medida que o número de lados do polígono aumenta, o apótema cresce e tende a confundir-se com o raio. Se considerarmos, pois, o círculo como o polígono regular de número infinito de lados, o seu apótema deve ser tomado, então, como igual ao raio. Por conseguinte, ao aplicarmos a fórmula  $S = p \times a$ , faremos o semi-perímetro igual à metade da circunferência do círculo e o apótema igual ao raio

$$S = \frac{2\pi R}{2} \times R \text{ ou } S = \pi R^2$$

**Conclusão:** a área do círculo é igual ao quadrado do raio multiplicado por 3,1416.

**Exercício** — Qual a área de um círculo de 5 centímetros de raio?

$$S = 3,1416 \times 25 = 78,54 \text{cm}^2$$

Da fórmula  $S = \pi R^2$  deduz-se o valor do raio do círculo quando se lhe conhece a área:

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

isto é, obtém-se o raio extraindo a raiz quadrada do quociente da área por 3,1416.



**Exercício** — Que raio tem o círculo com 4225cm<sup>2</sup> de área?

Fazendo  $S$  igual a 4225, acha-se:

$$R = \sqrt{\frac{4225}{3,1416}} = \sqrt{1344,85} = 36,67\text{cm.}$$

### ÁREA DO SECTOR CIRCULAR

A área do sector circular é igual ao produto da metade do arco que lhe serve de base pelo raio.

$$S = \frac{\text{arco}}{2} \times R$$

porque o sector pode ser considerado como a soma de uma infinidade de triângulos, todos com um vértice comum (o centro de círculo) e cujas bases, somadas, perfazem o arco.

**Exercício** — Qual a área de um sector circular de 48° e de 6 centímetros de raio?

O arco de 48° no círculo de 6cm. de raio mede

$$\frac{3,1416 \times 6 \times 48}{180}$$

e a metade dêsse arco é  $\frac{3,1416 \times 6 \times 48}{180 \times 2}$ .

A área do setor é, portanto,

$$S = \frac{3,1416 \times 6 \times 48}{180 \times 2} \times 6 = 15,08\text{cm}^2 \text{ aproximadamente.}$$

### ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

A área do segmento circular é igual à do sector menos a do triângulo formado pelos dois raios e pela corda do segmento.

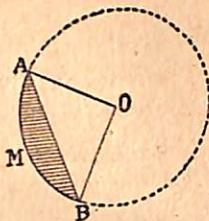


Fig. 352

Vê-se pela fig. 352 que a área do segmento  $AMB$  é igual à do sector  $AMBO$  menos a do triângulo  $ABO$ .

**Exercício** — Qual a área de um segmento circular de 90° num círculo de 8cm de raio?

A área do setor circular de 90° é a quarta parte do círculo ou  $\frac{\pi R^2}{4}$ .

O triângulo  $AOB$  é retângulo, em  $O$  e para achar sua área podemos tomar o raio  $R$  como base e como altura, o que dará  $\frac{R \times R}{2}$  ou  $\frac{R^2}{2}$ .

Então, a área do segmento é

$$S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}$$

que, para  $R = 8$ , dá

$$S = \frac{3,1416 \times 64}{4} - \frac{64}{2} = 18,2656\text{cm}^2.$$

### ÁREA DA CORÔA CIRCULAR

A área da corôa circular é igual à diferença dos dois círculos.



Se tomarmos  $R$  como raio do círculo maior e  $r$  como raio do círculo menor, teremos

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 \quad \text{ou} \quad \pi (R^2 - r^2)$$

isto é, a área da coroa circular se obtém fazendo o produto de  $\pi$  pela diferença entre os quadrados dos raios.

**Exercício** — Qual a área da uma coroa circular cujos raios medem 8 centímetros e 6 centímetros?

Substituindo, na fórmula acima,  $R$  por 8 e  $r$  por 6, tem-se

$$S = 3,1416 (64 - 36) = 3,1416 \times 28 = 87,9648$$

Resposta: a área da coroa é 87,9648cm<sup>2</sup>.

### QUESTIONÁRIO

1. Como se mede uma superfície?
2. Qual a unidade de superfície no Sistema Métrico Decimal?
3. Que são figuras equivalentes?
4. Como se obtém a área de um retângulo?
5. A que é igual a área de um quadrado?
6. Pode-se calcular a área de um quadrado quando se conhece o raio do círculo circunscrito? como?
7. Como se acha a área do paralelogramo?
8. A que é igual a área do losango?
9. Pode-se determinar uma diagonal do losango, conhecendo-se a área e a outra diagonal?
10. A que é igual a área do triângulo?
11. Qual a fórmula que permite calcular a área do triângulo conhecidos os lados?

12. Dado o lado do triângulo equilátero como obter-lhe a área?
13. Como se determina a área do trapézio conhecidas as bases e a altura?
14. Como se procede para determinar a área de um polígono qualquer?
15. Qual a fórmula da área do polígono regular?
16. A que é igual a área do círculo quando se conhece o raio, ou o diâmetro?
17. Como obter a área de um sector circular? de uma coroa? de um segmento circular?

### PROBLEMAS

**Problema 127.** — Construir um quadrado equivalente a um retângulo.

Seja  $ABCD$  o retângulo (fig. 353).

Procuremos a média proporcional  $PQ$  (fig. 354), entre  $DC$  e  $CB$ , e construamos o quadrado  $PQRS$  (fig. 355), tendo para lado  $PQ$ .



Fig. 353

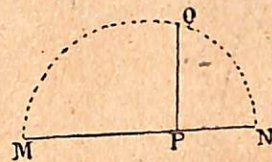


Fig. 354

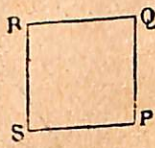


Fig. 355

Com efeito, o lado do quadrado é a média proporcional entre as dimensões do retângulo, pois o produto destas (área do retângulo) deve ser igual ao lado do quadrado multiplicado por si mesmo (área do quadrado).

**Problema 128.** — Construir um quadrado equivalente a um paralelogramo.



Seja  $ABDC$  o paralelogramo.

O lado do quadrado é a média proporcional entre a base,  $AB$ , e altura,  $EF$ , do paralelogramo (figs. 356, 357 e 358).

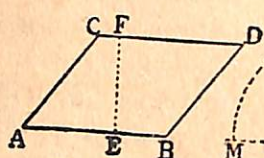


Fig. 356

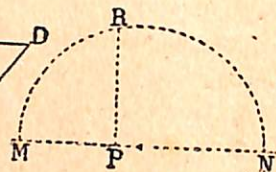


Fig. 357



Fig. 358

Com efeito, a área do quadrado tem que ser igual à do paralelogramo e a deste é o produto da base pela altura.

**Problema 129.** — Construir um quadrado equivalente a um triângulo.

O lado do quadrado é a média proporcional entre a metade de um lado do triângulo e altura relativa a esse lado.

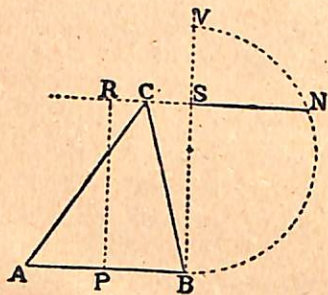


Fig. 359

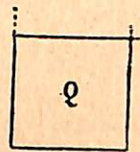


Fig. 360

Assim, si o triângulo for  $ABC$  (fig. 359) procura-se a média proporcional entre  $AP$  e  $PR$ ; acha-se  $SN$ , que vai ser o lado do quadrado (fig. 360).

**Problema 130.** — Construir um quadrado equivalente a um losango.

Já sabemos que a área do losango é igual ao produto de uma diagonal pela metade da outra.

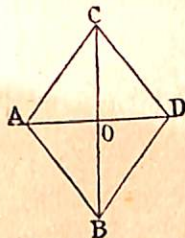


Fig. 361

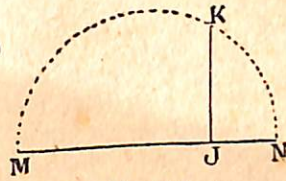


Fig. 362

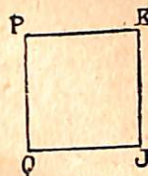


Fig. 363

Por isso, determinando a média proporcional entre  $BC$  e  $AO$  (fig. 361) temos o lado,  $JK$ , do quadrado equivalente ao losango  $ABDC$  (fig. 362 e 363).

**Problema 131.** — Construir um quadrado equivalente à soma de vários outros.

Esta construção se baseia no Teorema de Pitágoras (veja pag. 185).

Construamos um triângulo retângulo cujos catetos sejam os lados de dois dos quadrados fornecidos,  $A$  e  $B$ , (fig. 364). Já sabemos que a hipotenusa desse triângulo ( $MN$  na fig. 365) é o lado do quadrado  $Q$  equivalente à

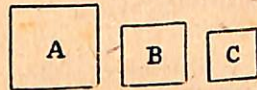


Fig. 364

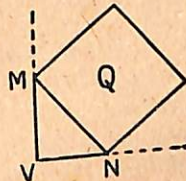


Fig. 365

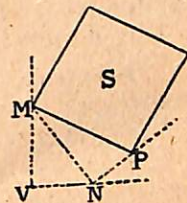


Fig. 366

soma dos quadrados  $A$  e  $B$ . Se, agora, tomarmos  $MN$  para um cateto e o lado do terceiro quadrado fornecido,  $C$ , para outro cateto, construiremos (fig. 366), outro triângulo



gulo retângulo ( $MNP$ ) em que a hipotenusa ( $MP$ ) vai ser o lado do quadrado  $S$  equivalente à soma dos três quadrados fornecidos. Continuando do mesmo modo, poderíamos construir o quadrado equivalente à soma de quantos quadrados fossem dados.

**Problema 132.** — Construir um quadrado equivalente à diferença de dois outros.

Sejam  $P$  e  $R$  os quadrados (fig. 367).

Esta construção também se baseia na relação de Pitágoras: Com efeito, desta deduzimos que o quadrado de um cateto é igual ao quadrado da hipotenusa menos



Fig. 367

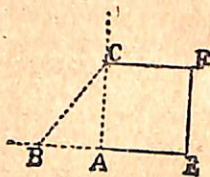


Fig. 368

o quadrado do outro cateto. Basta então construir o triângulo retângulo  $ABC$  em que a hipotenusa é o lado do quadrado maior ( $R$ ) e um cateto é o lado do quadrado menor ( $P$ ). O outro cateto ( $AC$  na fig. 368) será o lado do quadrado pedido.

**Problema 133.** — Dado um quadrado, traçar um outro cuja área seja o dôbro da do primeiro.

Seja  $ABCD$  o quadrado (fig. 369).

Prolonguemos os lados  $AB$  e  $AC$  e tracemos a diagonal  $AD$ , prolongando-a, também, além de  $D$ .

Façamos centro em  $A$  e, com um raio igual a  $AD$ , descrevamos o arco  $DE$ . Dêste último ponto, como centro, e com um raio =  $EA$ , cortemos em  $F$  o prolongamento da diagonal. Centro em  $A$  e com o mesmo raio cortemos em  $G$  o prolongamento de  $AC$ .

Liguemos os pontos  $G$  e  $E$  ao ponto  $F$ .  
A área de  $AEFG$  é o dôbro da área  $ABDC$ .

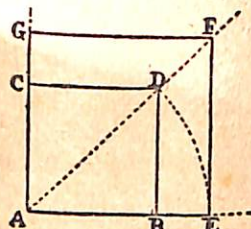


Fig. 369

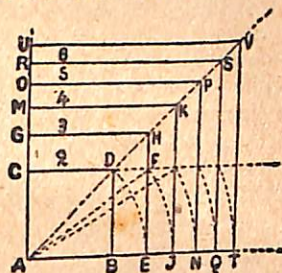


Fig. 370

**Problema 134.** — Dado um quadrado, construir outros cujas áreas sejam o dôbro, o triplo, o quádruplo, o quintuplo, etc., da área do primeiro.

Seja  $ABDC$  o quadrado conhecido (fig. 370).

A área do quadrado  $AEHG$  é, como já vimos no problema antecedente, o dôbro da do primeiro ( $ABDC$ ).

Para obtermos o quadrado de área tripla, prolonguemos o lado  $CD$  e, com um raio  $AF$  e centro em  $A$ , descrevamos o arco  $FJ$ . Centro em  $J$  e raio igual a  $JA$ , cortemos o prolongamento da diagonal  $AD$  no ponto  $K$ ; de  $A$  e com o mesmo raio, determinemos o ponto  $M$ .

Liguemos  $M$  e  $J$  ao ponto  $K$ . A área do quadrado  $AJKM$  é o triplo da de  $ABDC$ .

Procedendo-se sempre do mesmo modo, obteremos quadrados de áreas quádrupla, quintupla, sextupla etc.

Assim:  $ANPO$  = quádruplo de  $ABDC$ ;  $AQSR$  = quintuplo do mesmo quadrado;  $ATVU$  = sextuplo do mesmo quadrado  $ABDC$ .

**Problema 135.** — Construir um triângulo equivalente a outro triângulo dado.

Seja  $ABD$  o triângulo dado (fig. 371); pelo vértice  $D$  tracemos  $CM$  paralela ao lado  $AB$ .



Se ligarmos  $A$  e  $B$  a qualquer ponto,  $D'$ , dessa paralela, formaremos um triângulo equivalente a  $ABD$ , pois qualquer triângulo assim formado tem a mesma base e a mesma altura de  $ABD$ . Si quiséssemos um triângulo isósceles, bastaria traçar a mediatriz de  $AB$  e tomar para terceiro vértice do triângulo o ponto  $I$  em que a mediatriz encontrasse a paralela  $CM$ .

Se o triângulo pedido fosse retângulo, levantaríamos uma perpendicular a  $AB$ , por  $A$  ou por  $B$ , e tomaríamos para 3º vértice o ponto  $R$  ou  $R'$  em que a perpendicular encontrasse a paralela  $CM$ .

**Observação:** — Assim como traçamos a paralela a  $AB$  pelo vértice  $D$ , poderíamos ter traçado por  $A$  uma paralela a  $BD$  ou por  $B$  uma paralela a  $AD$ ; depois procederíamos do mesmo modo.

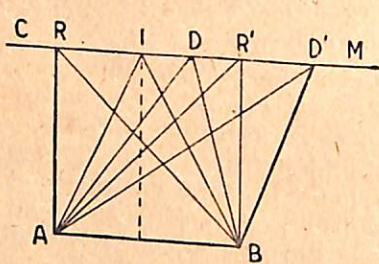


Fig. 371

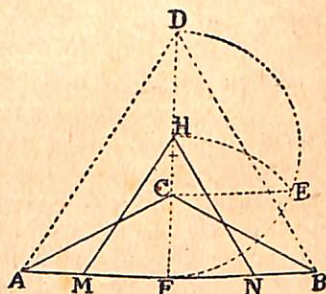


Fig. 372

**Problema 136.** — Construir um triângulo equilátero equivalente a um triângulo isósceles.

Seja  $ABC$  o triângulo isósceles (fig. 372).

Construamos sobre  $AB$  (base do triângulo isósceles dado) o triângulo equilátero  $ABD$  e tiremos a altura  $DF$ .

Sobre  $DF$  como diâmetro, descrevamos uma semi-circunferência, como nos mostra a fig. 372.

Levantemos a perpendicular  $CE$  sobre  $DF$  e façamos  $FH = FE$ .

Do ponto  $H$  tracemos  $HM$  paralela a  $DA$  e  $HN$  paralela a  $DB$ .

O triângulo  $MNH$  é equilátero e equivalente ao triângulo  $ABC$ .

**Problema 137.** — Construir um triângulo retângulo equivalente a um losango dado.

Seja  $ABCD$  o losango (fig. 373); tracemos  $CE$  paralela à diagonal  $DB$  e prolonguemos  $AB$  até encontrar  $CE$ ; o triângulo retângulo  $ACE$  é equivalente ao losango, porque este tem para área  $AC \times OB$ ; a área daquele é  $AC \times \frac{CE}{2}$ ;

$$\text{porém } \frac{CE}{2} = OB.$$

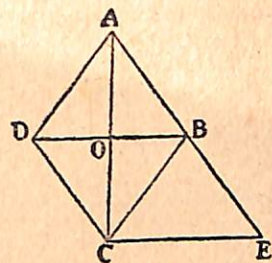


Fig. 373

**Problema 138.** — Construir um triângulo equivalente a um hexágono regular convexo.

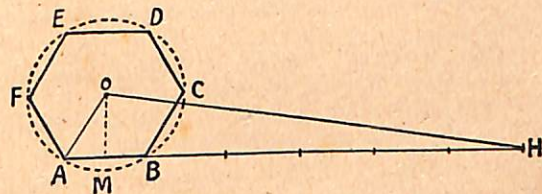


Fig. 374

Seja  $ABCDEF$  o hexágono (fig. 374); prolonguemos o lado  $AB$  além de  $B$ ; sobre esse prolongamento marquemos 5 vezes consecutivamente o comprimento do lado do hexágono; resulta o segmento  $AH$  igual ao perímetro do hexágono; ligando  $O$  a  $A$  e  $H$ , temos o triângulo  $OAH$  equivalente ao polígono dado, porque sua área é metade de  $AH$  (semi-perímetro do hexágono) multiplicada pela altura  $OM$  (apótema do hexágono).



**Problema 138a.** — Construir um retângulo equivalente a um losango dado.

Seja  $ABCD$  o losango (fig. 375).

Pelos pontos  $A$  e  $C$ , tracemos  $AM$  e  $CN$  paralelas à diagonal  $DB$  e pelo ponto  $B$ , tracemos  $NM$  paralela à diagonal  $CA$ .

O retângulo  $AMNC$  é equivalente ao losango  $ABCD$  porque um e outro têm para área  $CA \times OB$ .

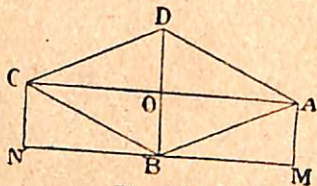


Fig. 375

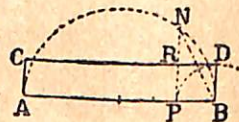


Fig. 376

**Problema 139.** — Construir um retângulo equivalente a um quadrado sobre um segmento dado.

$M$  é o quadrado (fig. 376) e  $AB$  o segmento.

Sobre  $AB$  como diâmetro, descrevamos uma semi-circunferência.

Do ponto  $B$ , como centro, e com o raio igual ao lado do quadrado  $M$ , marquemos o ponto  $N$ ; deste tiremos  $NP$  perpendicular a  $AB$ .

A altura do retângulo é  $BP$  e a base é  $AB$ .

**Problema 140.** — Sobre um segmento dado, construir um retângulo equivalente a um outro.

Seja  $ABDC$  o retângulo dado (fig. 377).

Sobre o lado  $AB$  apliquemos  $BE$  igual ao segmento dado.

Prolonguemos o lado  $BD$  e pelo ponto  $A$  tiremos  $AP$  paralela a  $ED$ .

$BP$  é a altura do retângulo pedido, que é  $BEFP$ .

**Problema 141.** — Construir um retângulo equivalente a um quadrado, sendo dado o semi-perímetro do retângulo.

Seja  $Q$  o quadrado (fig. 378) e seja  $AB$  o semi-perímetro, isto é, a soma dos lados diferentes do retângulo pedido (fig. 379).

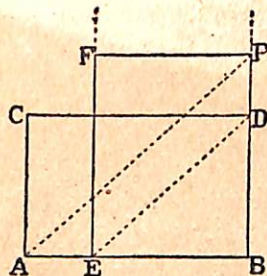


Fig. 377



Fig. 378

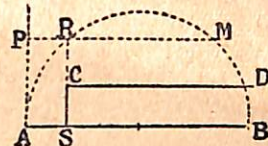


Fig. 379

Descrevamos uma semi-circunferência tendo  $AB$  para diâmetro.

Levantemos pelo ponto  $A$  uma perpendicular e marquemos  $AP$  igual ao lado do quadrado  $Q$ , e pelo ponto  $P$  tracemos  $PM$  paralela a  $AB$ .

Do ponto  $R$  tracemos uma perpendicular a  $AB$ .

As dimensões do retângulo são  $AS$  e  $SB$ .

**Problema 142.** — Dado um polígono convexo construir outro equivalente com um lado menos do que o polígono dado.

Seja o polígono convexo  $ABCDEF$ , de seis lados (fig. 380).

Tracemos a diagonal  $BD$  e pelo vértice  $C$  tiremos uma paralela a essa diagonal, prolongando-a até encontrar, no ponto  $C'$ , o prolongamento de  $ED$ . Liguemos  $B$  a  $C'$ . O polígono  $ABC'E'F$ , com 5 lados apenas, é equivalente ao polígono  $ABCDEF$  de 6 lados. Com efeito,  $ABDEF$  é comum aos dois polígonos; as partes não comuns (triângulos  $BCD$  e  $BC'D$ ) se equivalem, pois são triângulos de mesma base e mesma altura.



**Problema 143.** — *Dado um polígono convexo, transforma-lo em um triângulo equivalente.*

O problema se resolve aplicando a construção anterior para ir reduzindo, um a um, os lados do polígono  $ABCDEF$  (fig. 381). Traçamos a diagonal  $BF$  e por

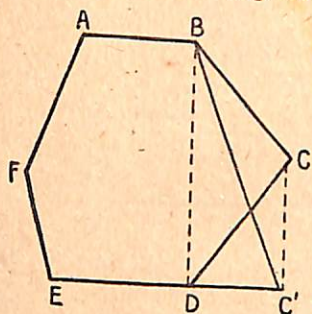


Fig. 380

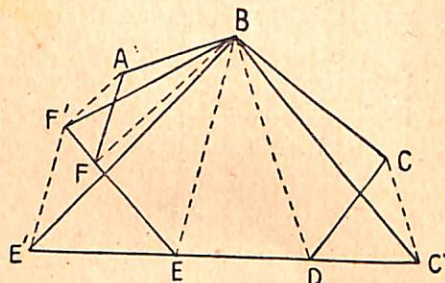


Fig. 381

A tiramos-lhe uma paralela, prolongando-a até encontrar, em  $F'$ , o prolongamento de  $EF$ . Em seguida, traçamos a diagonal  $BD$  e por  $C$  tiramos-lhe uma paralela, prolongando-a até encontrar, em  $C'$ , o prolongamento de  $ED$ .

O polígono dado era de 6 lados e já obtivemos o quadrilátero  $BF'EC'$  que lhe é equivalente.

Por fim, tracemos a diagonal  $BE$  do quadrilátero e por  $F'$  tiremos-lhe uma paralela, prolongando-a até encontrar, em  $E'$ , o prolongamento de  $EC'$ . O triângulo  $BE'C'$  é equivalente ao polígono  $ABCDEF$ .

### EXERCÍCIOS

1. Construa o quadrado equivalente a um retângulo de 8,3cm de base e 4,1cm de altura.
2. Trace um paralelogramo qualquer e construa o quadrado equivalente.
3. Trace um triângulo qualquer e construa o quadrado equivalente.

4. Construa o quadrado equivalente a um losango cujas diagonais medem 6cm e 2,8cm.
5. Trace dois quadrados quaisquer e construa o quadrado equivalente à soma dos dois.
6. Construa o quadrado equivalente à soma de três outros qujos lados medem respectivamente 2cm, 2,7cm e 5,1cm.
7. Construa o quadrado equivalente à diferença de dois outros que têm de lado respectivamente 2cm e 3,8cm.
8. Trace um quadrado qualquer e construa o quadrado de área dupla.
9. Trace um triângulo isósceles com 5cm de base e 7cm de lado e construa em seguida o triângulo equivalente.
10. Trace um losango qualquer e construa um triângulo retângulo equivalente.
11. Trace o octógono regular convexo e construa um triângulo equivalente.
12. Trace um segmento de reta de 10cm e sôbre êle construa um retângulo equivalente ao quadrado de 8cm de lado.
13. Trace um pentágono irregular convexo e construa um triângulo equivalente.



## CAPÍTULO XIV

### O plano e a linha reta.

**O plano.** — Já vimos que as superfícies podem ser planas e curvas.

Uma superfície é dita plana si, aplicando sobre ela, em qualquer direção, a aresta de uma régua, esta aresta tocar a superfície em toda a sua extensão. Isto significa que todos os pontos de uma reta traçada em um plano estão contidos nesse plano.

Uma prancheta, um quadro negro bem alinhado, um espelho comum, dão-nos idéia aproximada de superfícies planas.



Fig. 382

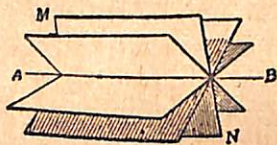


Fig. 383

Como o plano é uma superfície ilimitada, só a podemos representar em parte; por isso, na prática, costumamos representá-lo por uma porção retangular do mesmo (fig. 382).

**Determinação de um plano.** — Um plano fica determinado: 1.º) por uma reta e um ponto situado fora dessa reta.

- 2.º) por três pontos não em linha reta;
- 3.º) por duas retas que se cortam;
- 4.º) por duas retas paralelas.

Note-se que por uma reta pode passar uma infinidade de planos; porque, desde que um plano passe por uma reta, fazendo-o girar ao redor dessa reta, cada posição que êle toma determina a passagem de um outro plano (fig. 383).

Tomemos um cartão de visita e com os indicadores apertemo-lo por dois dos cantos opostos; sobremos brandamente o cartão assim mantido e o veremos girar ao redor do eixo que une os dois cantos opostos: cada nova posição define um novo plano passando sempre pela mesma reta.

**Posições relativas de um plano e uma reta.** — Uma reta traçada num plano divide-o em duas regiões chamadas *semi-planos*; a reta é a *origem* dos dois semiplanos.

A reta que tem dois pontos comuns com um plano está toda contida nesse plano e diz-se que ela *pertence* ao plano.

Uma reta que não pertence a um plano pode ser *perpendicular* (fig. 384), *oblíqua* (fig. 385) ou *paralela* (fig. 387), a êsse plano.

Uma reta é *perpendicular* a um plano quando é perpendicular a todas as retas que passam por seu pé nêsse plano.

Evidentemente é impossível traçar todas as retas de um plano que passam pelo mesmo ponto.



Demonstra-se, entretanto, que, se uma reta fôr perpendicular a duas das retas que passem por seu pé no plano, será perpendicular a qualquer outra e, por conseguinte, perpendicular ao plano.

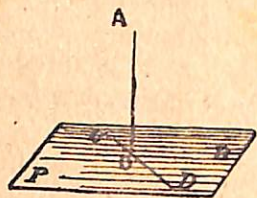


Fig. 384

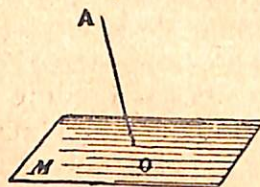


Fig. 385

De um ponto do plano, ou fóra dele, pode-se traçar uma perpendicular a esse plano e só uma. Duas retas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas entre si (fig. 386).

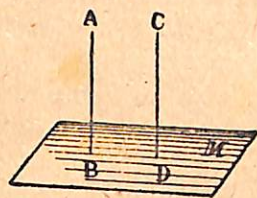


Fig. 386



Fig. 387

Uma reta e um plano são paralelos quando indefinidamente prolongados não se encontram.

**Intersecção de dois planos.** — A intersecção de dois planos é uma linha reta.

Verifica-se isto facilmente dobrando uma folha de papel: a dobra obtida é uma linha reta.

Na fig. 388, os planos MN e PQ se cortam e a sua intersecção é a reta AB.

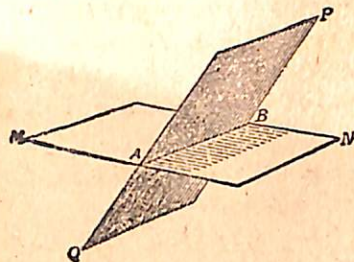


Fig. 388

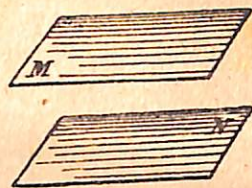


Fig. 389

**Planos paralelos.** — Dois planos são paralelos (fig. 389) quando, prolongados indefinidamente

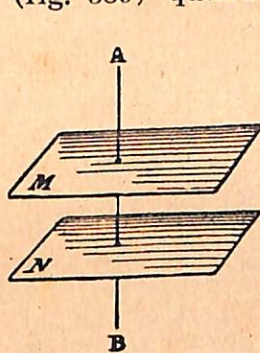


Fig. 390

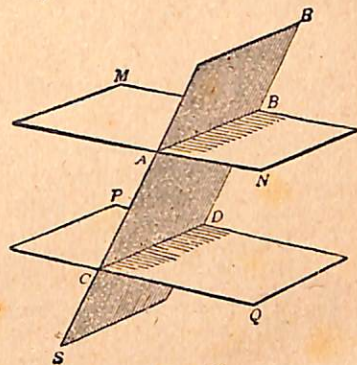


Fig. 391

não se encontram; tais são, por exemplo, os planos das faces opostas de um dado de jogar.

Por um ponto dado sobre uma reta podemos fazer passar um plano perpendicular a essa reta e só um. Do mesmo modo, de um ponto dado fóra



de uma reta podemos fazer passar um plano perpendicular a essa reta e só um.

Dois planos perpendiculares à mesma reta são paralelos (fig. 390) porque, se não o fossem, teríamos por um mesmo ponto da reta de intersecção dois planos perpendiculares à mesma reta, o que é impossível.

As intersecções de dois planos paralelos, com um terceiro plano são paralelas entre si.

Com efeito, si as retas  $AB$  e  $CD$  (fig. 391) não fossem paralelas elas se encontrariam e, como pertencem aos planos  $M$  e  $N$ , respectivamente, estes dois planos iriam também encontrar-se; ora, isto não é possível, pois os dois planos foram supostos paralelos.

### QUESTIONÁRIO

1. Quando se diz que uma superfície é plana?
2. Como se representa um plano?
3. Quantas posições pode ocupar uma reta relativamente a um plano?
4. Quando se diz que uma reta é perpendicular a um plano? e oblíqua? e paralela?
5. Que são planos paralelos?
6. Por um ponto quantos planos podem passar que sejam perpendiculares a uma reta?
7. Dois planos perpendiculares à mesma reta que são entre si?
8. Duas retas perpendiculares ao mesmo plano que são, entre si?
9. Quantos planos podem passar por uma reta?
10. De quantos modos fica determinado um plano?
11. Se dois planos paralelos forem cortados por um terceiro, de que natureza são as intersecções.

## CAPÍTULO XV

### Ângulos diedros — Ângulos sólidos ou poliédricos.

Chama-se *ângulo diedro*, ou simplesmente *diedro*, a figura formada de dois semi-planos que têm a mesma reta de origem.

Os semi-planos são as *faces* e a reta comum de origem chama-se *aresta* do diedro.

Designa-se um diedro por quatro letras, colocadas duas sôbre a aresta e uma sôbre cada face,

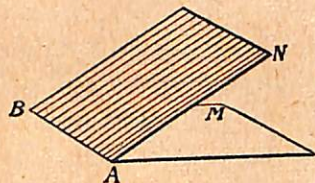


Fig. 392

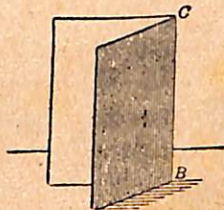


Fig. 393

tendo o cuidado de enunciar as duas da aresta entre as das faces. Exemplo: diedro  $MABN$  (fig. 392).

Caso o diedro esteja isolado, podem bastar duas letras sôbre a aresta. Exemplo: diedro  $BC$  (fig. 393).



**Medida do diedro.** — De um ponto da aresta do diedro tracemos em cada face uma perpendicular à aresta naquele ponto. Resulta um ângulo chamado *ângulo plano* ou *ângulo retilíneo* do diedro: tal é o ângulo *HIG* (fig. 394). Pois bem: o ângulo diedro se mede pelo seu ângulo retilíneo.

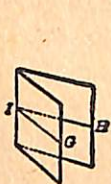


Fig. 394

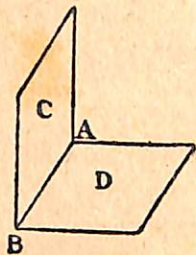


Fig. 395

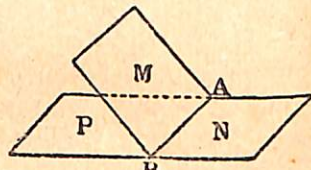


Fig. 396

Os ângulos diedros são, pois, conforme os respectivos ângulos retilíneos: *retos*, *agudos* e *obtusos*.

O diedro *CABD* é reto (fig. 395); o diedro *MABP* (fig. 396) é *agudo* e o diedro *MABN* é *obtusos*.

**Diedros adjacentes.** — Dois diedros que têm a mesma aresta e uma face comum que os separa

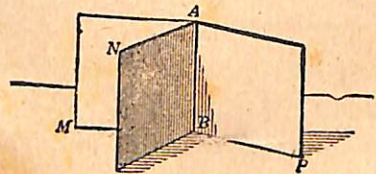


Fig. 397

chamam-se *adjacentes*. Assim, na fig. 397, o diedro *MABN* é adjacente ao diedro *NABP*.

**Diedros opostos pela aresta.** — Dois diedros são opostos pela aresta quando as faces de um são os prolongamentos das faces do outro. Dois diedros opostos pela aresta são iguais (fig. 398).

Quando dois planos se cortam formam-se quatro diedros que, considerados dois a dois, são adjacentes ou opostos pela vértice. Si os diedros adjacentes são iguais, os planos são *perpendiculares*;

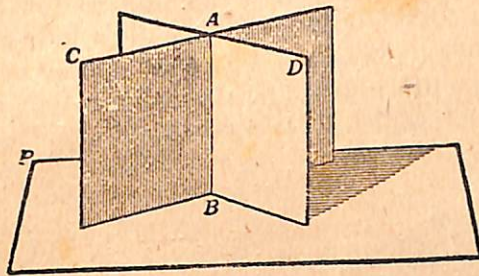


Fig. 398

si os diedros adjacentes são desiguais, os planos são *obliquos*. No primeiro caso, os diedros formados são todos retos; no segundo, dois diedros são agudos e dois obtusos.

Se dois planos que se cortam são perpendiculares a um terceiro plano, a intersecção dos dois primeiros é também perpendicular a este último.

Os planos *C* e *D* (fig. 398) são perpendiculares ao plano *P*; a reta *AB*, que é a intersecção, é também perpendicular ao mesmo plano.

**Ângulo poliédrico.** — Ângulo poliédrico é a figura formada por vários planos que passam por



um ponto chamado *vértice*, cada plano se limitando com dois outros. Estas intersecções são as *arestas* e as porções de planos limitadas pelas arestas são as *faces* do ângulo poliédrico.

Assim, a figura 399 representa um ângulo poliédrico  $SABCD$  cujo vértice é  $S$ , as arestas são  $SA, SB, SC$  e  $SD$  e cujas faces são os ângulos  $ASB, BSC, CSD$  e  $DSA$ .

Um ângulo poliédrico tem tantas faces quantas arestas e o mesmo número de diedros. Estes são formados por duas faces consecutivas quaisquer. O ângulo poliédrico da fig. 399 tem 4 faces, 4 arestas e 4 diedros. Os diedros são  $ASBC, BSCD, CSDA$  e  $DSAB$ .

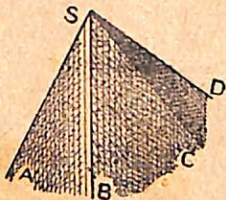


Fig. 399

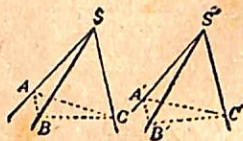


Fig. 400

Denomina-se um ângulo poliédrico pelo número de faces, sendo que o de três faces se chama *triedro*.

Dois ângulos poliédricos se dizem *iguais* quando suas faces e os diedros que elas formam são respectivamente iguais e dispostos na mesma ordem; tais são os ângulos sólidos  $SABC$  e  $S'A'B'C'$  da fig. 400.

As faces de um ângulo sólido medem-se em graus, minutos e segundos, como ângulos planos quaisquer. Demonstra-se e é fácil verificar que a soma das faces de um ângulo poliédrico varia entre 0 e  $360^\circ$ .

### QUESTIONÁRIO

1. Que é ângulo diedro?
2. Que são faces e arestas de um diedro?
3. Como se designa um diedro?
4. Que é ângulo plano de um diedro?
5. Que outro nome tem o ângulo plano de um diedro?
6. Como se classificam os ângulos diedros?
7. Quando se diz que dois diedros são adjacentes?
8. Que são diedros opostos pela aresta e que relação há entre eles?
9. Quando se diz que dois planos são perpendiculares? e quando se dizem oblíquos?
10. Que é um ângulo poliédrico e que outro nome se lhe pode dar?
11. Como se designa um ângulo poliédrico?
12. Quando é que dois ângulos poliédricos são iguais?
13. Como se medem as faces de um ângulo poliédrico?
14. Entre que limites está compreendida a soma das faces de um ângulo poliédrico?



### POLIEDROS REGULARES

Se as faces do poliedro são polígonos regulares iguais e todos os ângulos sólidos também são iguais entre si, o poliedro se diz *regular*. Assim, o cubo é um poliedro regular: suas faces são quadrados iguais e seus ângulos sólidos são todos iguais entre si (fig. 408).

Está claro que a igualdade das faces no poliedro regular acarreta a igualdade das arestas do poliedro e, do mesmo modo a igualdade dos ângulos sólidos determina a igualdade dos diedros do poliedro.

Demonstra-se que só há cinco poliedros regulares, sendo três limitados por faces triangulares,



Fig. 401

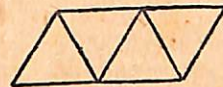


Fig. 402



Fig. 403

res, um limitado por faces quadradas e um limitado por faces pentagonais. São eles:

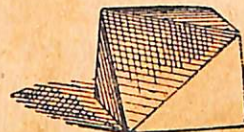


Fig. 404

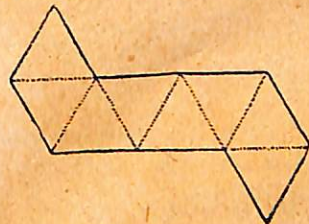


Fig. 405

### CAPÍTULO XVI

#### Poliedros — Poliedros regulares.

Os sólidos limitados exclusivamente por superfícies planas chamam-se **poliedros**.

Em um poliedro consideramos:

as *faces*

as *arestas*.

os *vértices*

os *ângulos poliédricos*

os *diedros*.

As *faces* são polígonos planos. Os lados destes polígonos são as *arestas* e os vértices dos polígonos são os *vértices* do poliedro. Cada aresta é comum a duas faces, as quais formam um *ângulo diedro*. Em cada vértice concorrem três ou mais faces para formarem os *ângulos sólidos* do poliedro.

Alguns poliedros tomam nomes especiais, conforme o número de faces que o limitam; tais são os de quatro, cinco, seis, sete, oito, dez, doze, vinte faces, que se denominam, respectivamente, *tetraedro*, *pentaedro*, *hexaedro*, *heptaedro*, *octaedro*, *decaedro*, *dodecaedro*, *icosaedro*.



*Tetraedro regular*, limitado por 4 triângulos equiláteros (fig. 401);

*Octaedro regular*; limitado por 8 triângulos equiláteros (fig. 404);

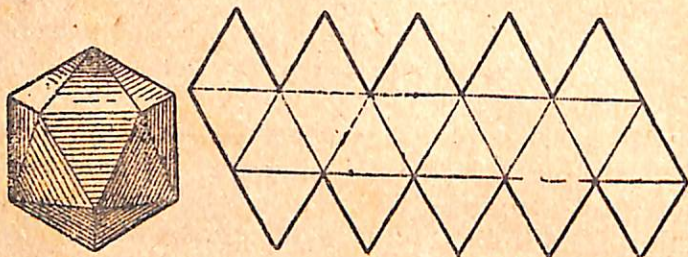


Fig. 406

Fig. 407

*Icosaedro regular*, limitado por 20 triângulos equiláteros (fig. 406).

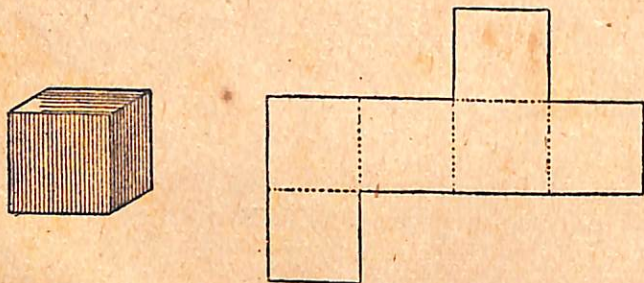


Fig. 408

Fig. 409

*Hexaedro regular* ou *cubo*, limitado por seis quadrados (fig. 408).

*Dodecaedro regular*, limitado por 12 pentágonos regulares (fig. 410).

Conhecida a natureza e o número das faces de um poliedro, é fácil fazer a planificação dêsse

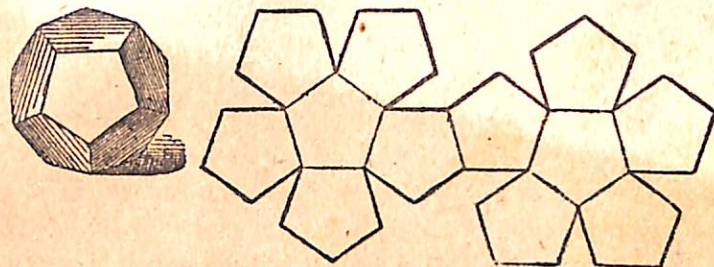


Fig. 410

Fig. 411

poliedro, isto é, traçar sôbre um plano, folha de papel ou cartão, todas as suas faces, de modo que, depois, recortando e dobrando convenientemente, se possam formar os sólidos-modelos (fig. 412).

O desenho assim traçado chama-se *rêde* do sólido.

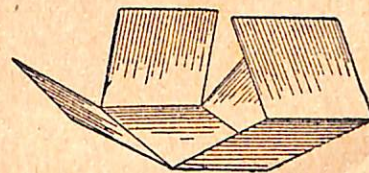


Fig. 412

Entre as figuras dêsse capítulo, vemos as redes dos poliedros regulares, estando em linhas pontilhadas as arestas que devem ser dobradas.



### QUESTIONÁRIO

1. Que são poliedros?
2. Que elementos há a considerar num poliedro?
3. Que são faces, arestas, vértices, diedros e ângulos sólidos de um poliedro?
4. Quais os poliedros que receberam denominações especiais?
5. Quando se diz que um poliedro é regular?
6. Quantos são os poliedros regulares?
7. Quais os poliedros regulares limitados por triângulos?
8. Qual o poliedro regular limitado por quadrados?
9. Qual o poliedro regular limitado por pentágonos?
10. Como se planifica um sólido?
11. Que é rede de um sólido?

## CAPÍTULO XVII

### Prismas e pirâmides

Classificar os poliedros exclusivamente pelo número de faces nos levaria a reunir na mesma classe sólidos de aspectos muito diversos. Basta ver as figuras 413 e 414 as quais representam igualmente hexaedros, isto é, poliedros de seis faces.



Fig. 413

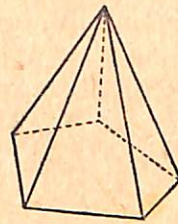


Fig. 414

Vamos, por isso, distinguir, entre os poliedros duas espécies muito importantes: os *prismas* e as *pirâmides*.

### PRISMAS

**Prisma** é o poliedro limitado por dois polígonos iguais e paralelos e por tantos paralelogramos quantos são os lados desses polígonos.



Os polígonos iguais e paralelos chamam-se *bases* do prisma e os paralelogramos são as *faces laterais*.



Fig. 415

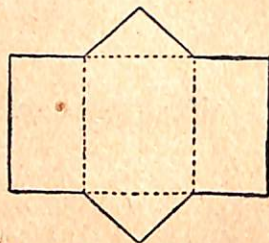


Fig. 416 — Planificação do prisma triangular reto.

O prisma se diz triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal, etc., conforme suas bases forem triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc.

A fig. 415 representa um prisma triangular, ao passo que a fig. 417 é a de um prisma hexagonal.

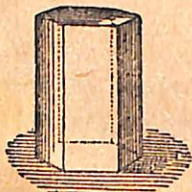


Fig. 417

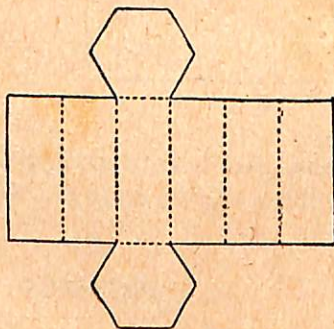


Fig. 418 — Planificação do prisma hexagonal reto.

As arestas do prisma que ligam uma base a outra chamam-se *arestas laterais* do prisma.

Um prisma é *reto* quando as arestas laterais são perpendiculares às bases (figs. 415 e 417); em caso contrário, êle é *obliquo* (fig. 419).

Quando o prisma é reto, as faces laterais são retangulares.



Fig. 419

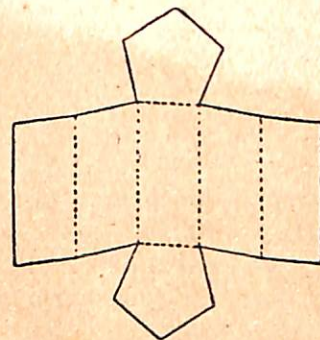


Fig. 419a — Planificação do prisma pentagonal obliquo.

O prisma reto de base regular chama-se *prisma regular*; no prisma regular as faces laterais são retângulos iguais. A fig. 417 é a de um prisma hexagonal regular.

A distância de uma base à outra do prisma é a *altura* do prisma. Para obter a altura de um prisma, portanto, basta de um ponto qualquer de uma base traçar uma perpendicular ao plano da outra base.

Evidentemente, no prisma reto a altura é igual à aresta lateral; no prisma obliquo é sempre menor.

Se as bases do prisma também são paralelogramos, o prisma recebe o nome de *paralelepípedo*.



Como qualquer prisma, o paralelepípedo pode ser *reto* ou *obliquo*, conforme as arestas laterais

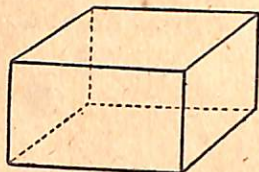


Fig. 420

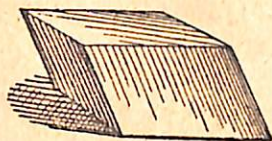


Fig. 421

são perpendiculares (fig. 420) ou oblíquas às bases (fig. 421).

Se um paralelepípedo, além de reto tem a base retangular, êle toma o nome de *paralelepípedo retângulo* (fig. 422). Neste caso, as faces



Fig. 422

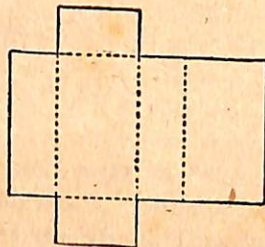


Fig. 423 — Planificação do bloco retangular.

são todas retângulos e, por isso, o paralelepípedo retângulo também é chamado *bloco retangular*.

Chama-se *secção reta* de um prisma a secção plana perpendicular às arestas laterais do prisma (fig. 424).

As faces laterais formam a *superfície lateral* do prisma; a superfície lateral mais as das bases formam a *superfície total*.

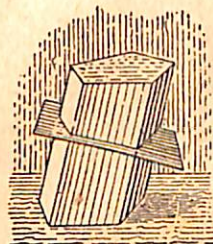


Fig. 424



Fig. 425

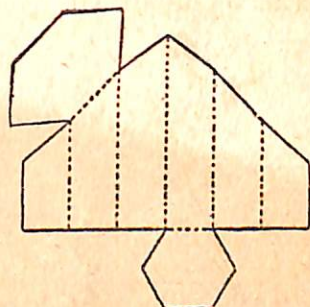


Fig. 426 — Planificação do tronco de prisma hexagonal.

À porção de um prisma compreendida entre uma base e uma secção plana não paralela às bases, mas que corta todas as arestas laterais do prisma, chama-se *tronco de prisma* ou *prisma truncado* (fig. 425).

## PIRÂMIDES

Chama-se *pirâmide* ao sólido limitado por um polígono qualquer e por triângulos que têm um vértice comum. O polígono é a *base* da pirâmide; os triângulos são as faces laterais e o vértice comum destas é o *vértice* da pirâmide.

As arestas que partem do vértice chamam-se *arestas laterais* da pirâmide.



Para designar uma pirâmide colocamos uma letra no vértice da pirâmide e uma em cada vértice da base. Na fig. 427 temos a pirâmide  $VABCD$  (ter o cuidado de ler a letra do vértice da pirâmide

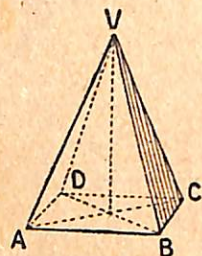


Fig. 427

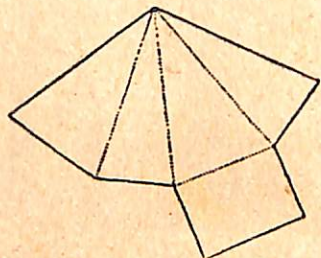


Fig. 428 — Planificação de uma pirâmide quadrangular.

em primeiro lugar) de vértice  $V$ ; sua base é o quadrilátero  $ABCD$ ; suas arestas laterais são  $VA$ ,  $VB$ ,  $VC$  e  $VD$ ; e suas faces laterais são os triângulos  $AVB$ ,  $BVC$ ,  $CVD$  e  $DVA$ .

A distância do vértice ao plano da base é a altura da pirâmide. A altura de uma pirâmide se obtém, portanto, traçando a perpendicular do vértice sobre o plano da base (fig. 429).

Uma pirâmide se diz triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a base é um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc. A fig. 427 representa uma pirâmide quadrangular.

Quando a base da pirâmide é um triângulo, todas as suas faces são triangulares e, como são em número de quatro, o sólido se chama *tetraedro*. (fig. 430). Neste caso qualquer face pode servir de base.

Uma pirâmide é *regular* quando tem por base um polígono regular e sua altura cai no centro da base. Na pirâmide regular as faces laterais são



Fig. 429

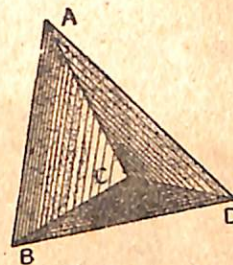


Fig. 430

triângulos isósceles iguais; estes triângulos têm, portanto a mesma altura. Esta altura, igual para todas as faces laterais da pirâmide regular, chama-se *apótema da pirâmide*.



Fig. 431

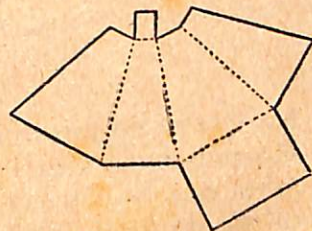


Fig. 432 — Planificação do tronco de pirâmide quadrangular de bases paralelas.

A porção de pirâmide compreendida entre a base e uma secção plana que corta todas as arestas laterais chama-se *tronco de pirâmide* ou *pirâmide truncada*.



A secção pode ser paralela à base, ou não; daqui duas espécies de troncos: *de bases paralelas* (fig. 431) e *de bases não paralelas* (fig. 433).

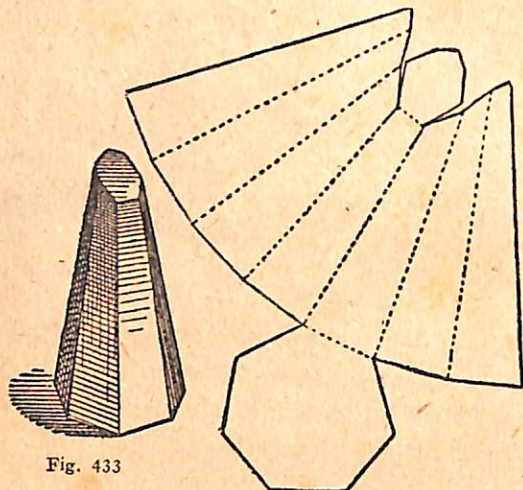


Fig. 434 — Planificação do tronco de pirâmide hexagonal de bases não paralelas.

No tronco de pirâmide de bases paralelas, estas são polígonos semelhantes e as faces laterais são trapézios simétricos todos iguais entre si. A altura desses trapézios é o *apótema* do tronco.

#### QUESTIONÁRIO

1. Que é um prisma?
2. Que forma têm as faces laterais do prisma?
3. Como se denominam os prismas quanto às bases?
4. Quando é que o prisma se diz reto? e quando é obliquo?

5. Que forma têm as faces laterais do prisma reto?
6. Que é um prisma regular?
7. Quando a base do prisma também é paralelogramo como se chama êle?
8. Como se classificam os paralelepípedos?
9. Que é um bloco retangular?
10. Que é um tronco de prisma ou prisma truncado?
11. Como se pode obter a altura de um prisma?
12. Que é secção reta de um prisma?
13. Que é pirâmide?
14. Como se designa uma pirâmide?
15. Como se classificam as pirâmides quanto às bases?
16. Que é altura da pirâmide?
17. Quando se diz que a pirâmide é regular?
18. Que outro nome tem a pirâmide de base triangular?
19. Que é apótema da pirâmide?
20. Que é tronco de pirâmide ou pirâmide truncada?
21. Como pode ser o tronco de pirâmide?
22. Quando o tronco de pirâmide é de bases paralelas, que relação há entre as bases e que forma têm as faces laterais?



# CAPÍTULO XVIII

## Cilindro — Cone — Esfera.

### CILINDRO

Chama-se *superfície cilíndrica* à superfície gerada por uma reta (*geratriz*) que se move apoiada numa curva fixa (*diretriz*) e conservando-se paralela a uma direção dada (fig. 435).

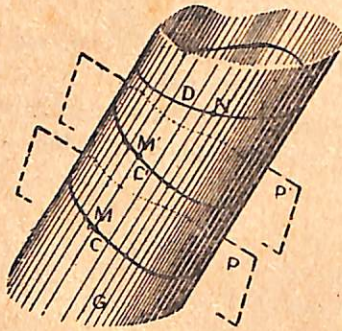


Fig. 435

O sólido limitado por uma superfície cilíndrica e por dois planos paralelos é um **cilindro** (fig. 436). Se estes planos, que são as *bases* do cilindro, forem perpendiculares à geratriz da superfície cilíndrica, o cilindro é *reto*; em caso contrário, é *obliquo*. A distância entre as bases é a *altura* do cilindro (AB na fig. 436).

Vejam particularmente o cilindro reto de base circular, isto é, cuja base é um círculo.

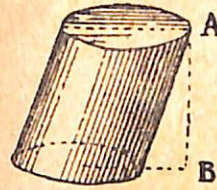


Fig. 436

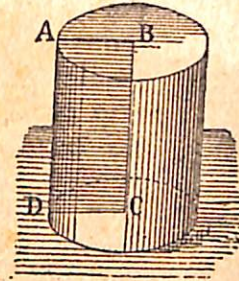


Fig. 437

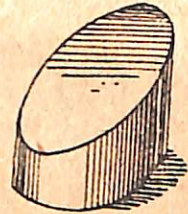


Fig. 438

ABCD, girando em torno de BC, gera um cilindro reto de base circular (fig. 437): o lado BC, em torno do qual o retângulo gira, é o *eixo*; o lado oposto AD, que vai gerar a superfície cilíndrica é a *geratriz*; os círculos gerados pelos lados AB e CD são as *bases* do cilindro.

No cilindro reto de base circular a altura é igual à geratriz.

**Tronco de cilindro.** — A porção de cilindro compreendida entre uma base e uma secção plana não paralela às bases, mas que corta todas as geratrizes, chama-se *tronco de cilindro* ou *cilindro truncado*. (fig. 438).

### CONE

Chama-se *superfície cônica* (fig. 439) à superfície gerada por uma reta móvel (*geratriz*) que



passa por um ponto fixo (*vértice*) e se apoia sôbre uma curva fixa (*diretriz*).

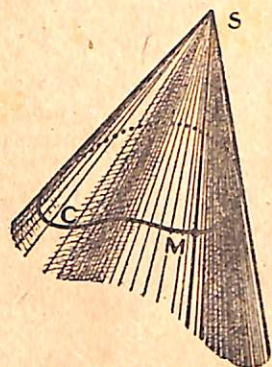


Fig. 439

O sólido limitado por uma superfície cônica e por um plano que corta todas as geratrizes da superfície cônica é um **cone** (fig. 440). O plano é a base do cone. A distância do vértice ao plano da base é a *altura* do cone (*AB* na fig. 440).

O cone mais comumente encontrado é o *cone reto de base circular*.

O cone reto de base circular é o sólido gerado pela revolução completa de um triângulo retângulo que gira em torno de um dos catetos. Assim,



Fig. 440

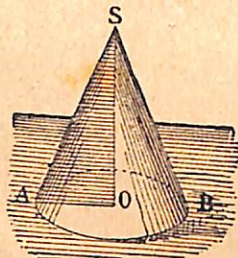


Fig. 441



Fig. 442

o triângulo retângulo *AOS* (fig. 441), girando em torno de *OS*, gerou um cone reto de base circular. Neste caso, *OS* é o *eixo*; a hipotenusa, que gera a

superfície cônica, é a *geratriz* do cone; *S* é o *vértice* do cone; o círculo gerado pelo outro cateto (*AO*) é a *base* do cone.

No cone reto de base circular, a altura se confunde com o eixo e cai, portanto, no centro da base. Quando, embora de base circular, a altura não cai no centro da base, o cone é *obliquo* (fig. 440).

**Tronco de cone.** — A porção de cone compreendida entre a base e uma secção plana que corta todas as geratrizes do cone, é um *tronco de cone* ou *cone truncado*.

O tronco de cone pode ser de *bases paralelas* ou de *bases não paralelas*, conforme a secção plana fôr paralela, ou não, à base do cone.

O tronco de cone reto de bases paralelas pode ser considerado como um sólido gerado pela revolução completa de um trapézio retângulo que gira em torno do lado perpendicular às bases (fig. 442). Este lado do trapézio é o *eixo* do tronco.

**Secções cônicas.** — Quando um plano passa pelo eixo do cone de revolução, a secção é um



Fig. 443



Fig. 444

triângulo isósceles (fig. 443); mas se o plano não passar pelo eixo, a secção será uma curva de aspecto variável conforme a inclinação do referido



plano sobre o eixo. As curvas assim determinadas são chamadas *secções cônicas*.

Se o plano secante fôr perpendicular ao eixo, a secção será um *círculo* (fig. 444).

Se o plano secante fôr oblíquo ao eixo, mas cortar todas as geratrizes, a secção será uma *elipse* (fig. 445).

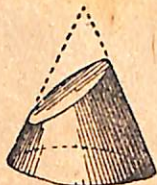


Fig. 445



Fig. 446



Fig. 447

Se o plano secante for paralelo a uma só geratriz do cone, a secção será uma *parábola* (fig. 446).

Finalmente, se o plano secante fôr paralelo a duas geratrizes, a secção será uma *hipérbole* (fig. 447).

### ESFERA

**Esfera** é o sólido gerado pela revolução completa de um semi-círculo em torno do seu diâmetro (fig. 448).

A semi-circunferência gera uma superfície redonda, que é a *superfície esférica*.

Podemos dizer que a superfície esférica é aquela cujos pontos são todos equidistantes de um

ponto interior, que é o *centro* da esfera. Essa distância constante de qualquer ponto da superfície esférica ao centro é o *raio* da esfera. O raio da esfera é evidentemente igual ao do círculo gerador.

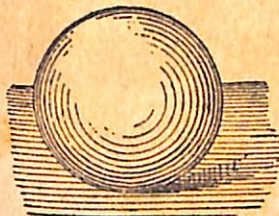


Fig. 448

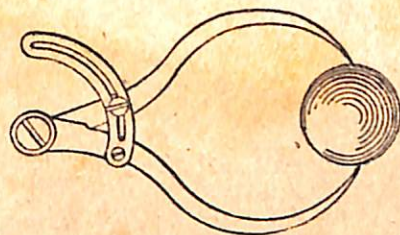


Fig. 449

Praticamente obtêm-se o *diâmetro* de uma esfera com um instrumento chamado *compasso esférico* (fig. 449) também usado para traçar circunferências sobre a superfície esférica.

Toda *secção plana da esfera é um círculo*. Si o plano passar pelo centro, a secção é um círculo com o mesmo raio da esfera e se chama *círculo máximo* (fig. 450); si não passar pelo centro, o seu raio será menor do que o da esfera e se chama *círculo menor* (fig. 451).

À proporção que o plano secante se afasta do centro, o raio da secção vai diminuindo, até que se reduz a um ponto. Nesta posição limite dizemos que o plano é *tangente* à esfera, só tendo com esta um ponto comum chamado *ponto de contacto*.

O plano tangente à esfera é perpendicular ao raio que termina no ponto de contacto.