

CAPÍTULO VI

Quadriláteros — Trapézio — Paralelogramo —
Retângulo — Losango — Quadrado.

Um polígono pode ser *simples* ou *entrelaçado*. É simples quando a linha poligonal não passa mais de uma vez pelo mesmo ponto. É entrelaçado se houver pontos por onde a linha poligonal passa mais de uma vez (fig. 161).

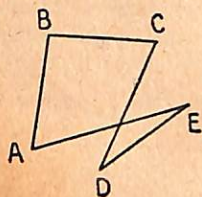


Fig. 161

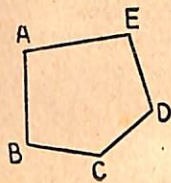


Fig. 162

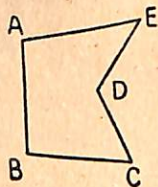


Fig. 163

O polígono simples pode ser *convexo* ou *não convexo*. É convexo quando só tem ângulos salientes (fig. 162), e não convexo quando tem ângulos reentrantes (fig. 163). Evidentemente o triângulo é sempre um polígono convexo, mas já o quadrilátero pode ser não convexo (fig. 164), e até entrelaçado (fig. 165).

Só trataremos daqui por diante dos polígonos convexos.

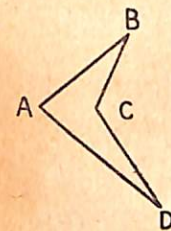


Fig. 164

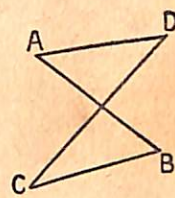


Fig. 165

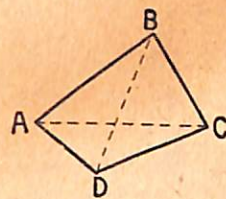


Fig. 166

O segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos de um polígono chama-se *diagonal*. Num quadrilátero se podem traçar duas diagonais. AC e BD são as diagonais do quadrilátero $ABCD$ (fig. 166).

Soma dos ângulos internos de um quadrilátero — Si traçarmos uma diagonal de um quadrilátero,

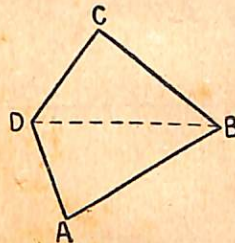


Fig. 167

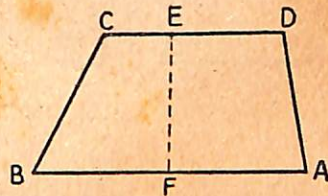


Fig. 168

(fig. 167) observaremos que é dividido em dois triângulos e que a soma dos ângulos internos

do quadrilátero é a soma dos ângulos internos dos dois triângulos. Ora, como em cada triângulo os ângulos internos somam dois retos, concluímos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a quatro retos.

Trapézio — O quadrilátero que tem dois lados paralelos chama-se *trapézio*. Os lados paralelos são as *bases* do trapézio e a distância entre as duas bases é a *altura* do trapézio. No trapézio $ABCD$ (fig. 168) as bases são AB e CD e a altura é EF .

O trapézio pode ser: *escaleno*, *isósceles* e *retângulo*.

Trapézio retângulo é aquele que tem um lado perpendicular às bases. Neste caso, dois ângulos são evidentemente retos e o lado perpendicular às bases fornece a altura (fig. 169).

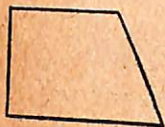


Fig. 169



Fig. 170



Fig. 171

Trapézio isósceles (também chamado *simétrico*) é aquele em que os lados não paralelos são iguais. No trapézio isósceles os ângulos adjacentes a cada base são iguais (fig. 170). Da mesma forma são iguais as diagonais do trapézio isósceles.

Trapézio escaleno é aquele que não é retângulo nem isósceles. No trapézio escaleno os lados não paralelos são sempre desiguais (fig. 171).

Base média do trapézio — é o segmento de reta que liga os meios dos lados não paralelos (fig. 172).

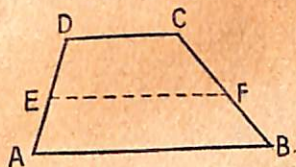


Fig. 172

Demonstra-se que a base média do trapézio é igual à semi-soma das bases.

Paralelogramo — Chama-se paralelogramo o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.

Demonstra-se que num paralelogramo: 1º) cada diagonal divide o paralelogramo em dois triângulos iguais; 2º) os lados opostos são iguais; 3º) os ângulos opostos são iguais; 4º) as diagonais cortam-se ao meio. Assim, no paralelogramo $ABCD$ (fig. 173): qualquer das diagonais, AC ou BC , divide-o em dois triângulos iguais; AB é igual a CD

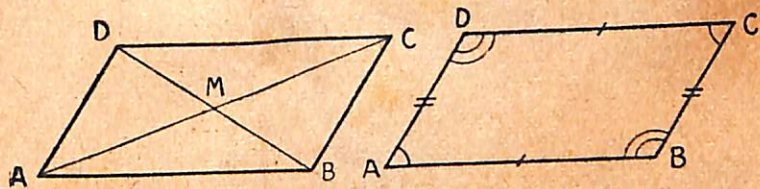


Fig. 173

e AD é igual a BC ; o ângulo A é igual ao ângulo C e o ângulo B é igual ao ângulo D ; finalmente, o ponto M é ao mesmo tempo o meio de AC e de BD .

Altura de um paralelogramo é a distância entre dois lados paralelos; neste caso, estes lados são as bases. Evidentemente num paralelogramo qualquer lado pode ser tomado como base. Todo paralelogramo tem, portanto, duas bases e duas alturas.

Retângulo — Chama-se *retângulo* o quadrilátero que tem todos os ângulos retos.

Verificamos no retângulo: 1º) os lados opostos são iguais e paralelos; 2º) dois lados consecutivos são perpendiculares; 3º) as diagonais, além de se cortarem ao meio, são iguais; 4º) cada diagonal divide o retângulo em dois triângulos retângulos iguais (figs. 174 e 175).

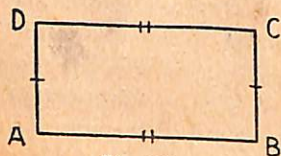


Fig. 174

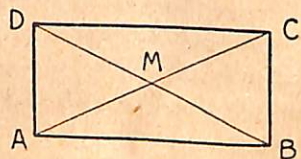


Fig. 175

O retângulo pode ser considerado como o caso particular do paralelogramo em que os ângulos se tornaram todos iguais.

Qualquer lado do retângulo pode servir-lhe de base; o outro diferente será, então, a altura.

Losango — O quadrilátero que tem os lados iguais chama-se *losango* ou *rombo*.

Em qualquer losango observamos as seguintes propriedades: 1º) os lados são paralelos dois a dois; 2º) os ângulos opostos são iguais; 3º) as diagonais além de se cortarem ao meio, são per-

pendiculares; 4º) cada diagonal é bissetriz dos ângulos cujos vértices ela liga e divide o quadrilátero em dois triângulos isósceles iguais (figs. 176 e 177).

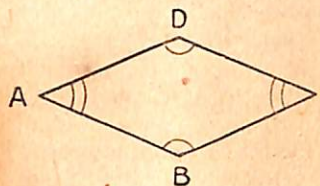


Fig. 176

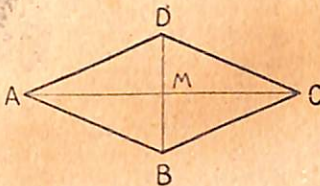


Fig. 177

O losango pode ser considerado como o caso particular do paralelogramo em que os lados são todos iguais.

Base do losango é qualquer dos seus lados; *altura* é a distância entre dois lados paralelos.

Quadrado — Chama-se *quadrado* ao quadrilátero regular, isto é, ao polígono de quatro lados em que todos os lados são iguais e bem assim os ângulos (fig. 178).

O quadrado também pode ser considerado o caso particularíssimo do paralelogramo em que se reúnem todas as propriedades dos retângulos e losangos. Com efeito, no quadrado notamos: 1º) os lados opostos são paralelos e dois lados consecutivos são perpendiculares; 2º) as diagonais são iguais e se cortam perpendicularmente ao meio; 3º) cada diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles.



Fig. 178

QUESTIONÁRIO

1. Como se dividem os polígonos?
2. Que é um polígono entrelaçado?
3. Os polígonos simples como podem ser?
4. Existem triângulos não convexos?
5. Como se pode definir o quadrilátero?
6. Que é diagonal?
7. A que é igual a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo?
8. Que é um trapézio e quais as suas propriedades?
9. Como se dividem os trapézios?
10. A que é igual a base média do trapézio?
11. Que é um paralelogramo?
12. Enuncie as propriedades do paralelogramo.
13. Que é retângulo e quais as suas propriedades?
14. Que outro nome tem o losango e como o podemos definir?
15. Como se chama o quadrilátero regular?
16. Quais são as propriedades do quadrado?

PROBLEMAS

Problema 55. — Construir um quadrado, conhecendo-se o lado.

1.^a Solução. — Sobre uma reta apliquemos o lado AM (conhecido) e de cada um dos pontos A e M (fig.

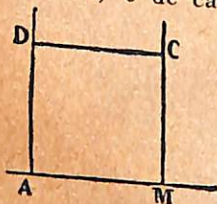


Fig. 179

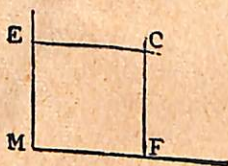


Fig. 180

179) levantemos, com o auxílio de um esquadro, uma perpendicular.

Tomemos as distâncias AD e MC iguais a AM ; liguemos o ponto D ao ponto C e teremos construído o quadrado.

2.^a Solução. — Façamos um ângulo reto (fig. 180).

A partir do vértice M e com um raio igual à medida do lado conhecido, determinemos os pontos E e F ; centro nesses pontos e com o mesmo raio, determinemos C , o qual, ligado aos pontos E e F , resolve o problema.

Problema 56. — Construir um quadrado conhecendo-se o lado e dado o seu centro.

Seja M o centro (fig. 181). Tracemos duas retas perpendiculares que se cortem no ponto M .

Façamos centro em M e, com raio igual à metade do lado, determinemos E, F, G, H .

Por E e F tracemos paralelas a GH e por G e H , tracemos paralelas a EF ; obteremos, assim, o quadrado $BCND$.

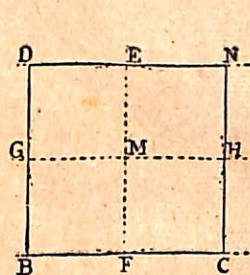


Fig. 181

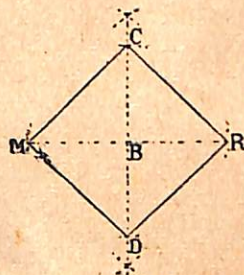


Fig. 182

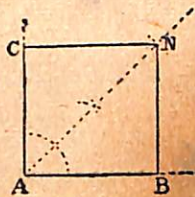


Fig. 183

Problema 57. — Construir um quadrado conhecendo-se a diagonal.

1.^a Solução. — Seja MR a diagonal (fig. 182). Façamos passar pelo seu meio uma perpendicular e , com o centro em B (meio de MR) e raio BM ou BR determinemos os pontos C e D .

O quadrado $MCRD$ resolve o problema.

2.^o Solução — Tracemos um ângulo reto e a sua bisetriz (fig. 183); sôbre esta, a partir do vértice, tomemos AN igual à medida da diagonal dada.

Do ponto N tracemos NC paralela a um lado do ângulo e NB paralela ao outro lado.

$ABNC$ é o quadrado pedido.

Problema 58. — Construir um retângulo, conhecendo-lhe as dimensões (base e altura).

Façamos um ângulo reto V . A partir do vértice, com um raio igual a um dos lados determinemos o ponto E (fig. 184), e com raio igual ao outro lado, marquemos o ponto F ; façamos partir do ponto F uma paralela a VE e, do ponto E , outra a VF ; estas duas retas encontram-se no ponto G . O quadrilátero $VEGF$ é o retângulo pedido.

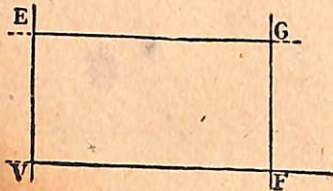


Fig. 184

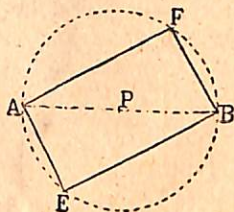


Fig. 185

Problema 59. — Construir um retângulo conhecendo-se um lado e a diagonal.

Façamos centro em P (meio da diagonal dada AB) e com um raio igual a PB ou PA descrevamos uma circunferência de círculo (fig. 185).

De A e B , como centros, e com um raio igual ao lado dado, marquemos os pontos E e F , aos quais liguemos A e B ; obtêm-se o retângulo pedido $AEBF$.

Problema 60. — Construir um retângulo conhecendo-se um lado e o ângulo que forma com esse lado a diagonal.

AB é o lado dado (fig. 186).

Formemos na extremidade B um ângulo igual ao ângulo conhecido e por A e B levantemos perpendiculares a AB .

A perpendicular tirada do ponto A encontra a diagonal no ponto C .

De C façamos partir uma paralela a AB , a qual determinará o ponto D .

$ABDC$ é o retângulo pedido.

Problema 61. — Construir um retângulo conhecendo-se a diagonal e o ângulo que essa diagonal forma com um dos lados.

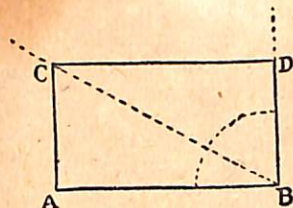


Fig. 186

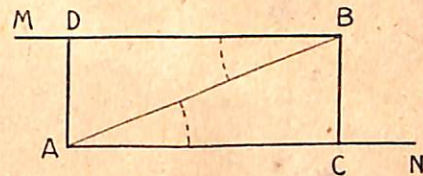


Fig. 187

Seja AB a diagonal (fig. 187).

Formemos nas extremidades A e B os ângulos ABM e BAN iguais ao ângulo dado.

Levantemos pela extremidade A uma perpendicular a BM e pela extremidade B , uma perpendicular a AN ; resulta o retângulo $ACBD$.

Problema 62. — Construir um retângulo conhecendo-se a diagonal e o ângulo formado pelas diagonais.

Seja A o ângulo dado (fig. 188).

Prolonguemos seus lados de modo a formar o ângulo que lhe é oposto pelo vértice.

Façamos centro no vértice do ângulo e com um raio igual à metade da diagonal, determinemos o ponto B , C , E e D .

O retângulo pedido é $BCED$.

Problema 63. — Construir um losango, qualquer.

Tracemos duas retas, que se cortem perpendicularmente (fig. 189); tomemos, a partir do ponto O , $OM = ON$ e $OP = OR$, mas diferentes de OM , tracemos RM , MP , PN e NR . O quadrilátero $RMPN$ é um losango.

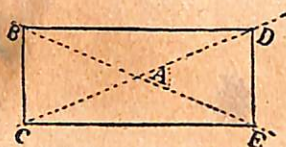


Fig. 188

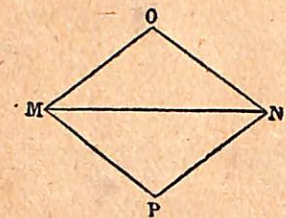


Fig. 190

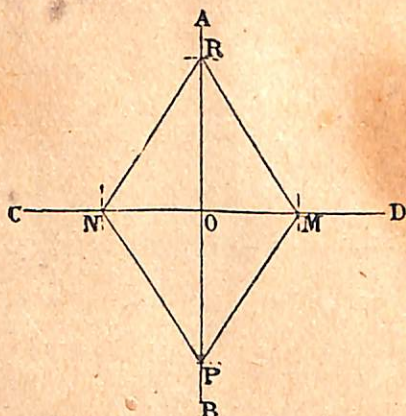


Fig. 189

Problema 64. — Construir um losango conhecendo-lhe as diagonais.

Este problema se resolve como o anterior (fig. 189). Apenas, tomam-se OM e ON iguais à metade de uma diagonal e OP e OR iguais à metade da outra diagonal.

Problema 65. — Construir um losango conhecendo-se o lado e uma diagonal.

Tracemos MN igual à diagonal e fazendo centro nas extremidades M e N , com um raio igual ao lado, determinemos os pontos O e P (fig. 190).

$MPNO$ é o losango pedido.

Problema 66. — Construir um losango conhecendo-se o lado e um ângulo.

Seja PR o lado (fig. 192), e M o ângulo (fig. 191).

Façamos em P um ângulo igual a M e reproduzamos em PS o lado PR .

Com o centro em S e depois em R e com um mesmo raio PR determinemos o ponto N . O losango é $PRNS$.

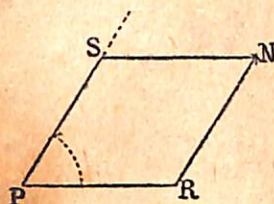


Fig. 192

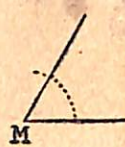


Fig. 191

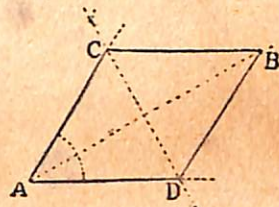


Fig. 193

Problema 67. — Construir um losango conhecendo-se um ângulo e uma diagonal.

Tiremos a bissetriz do ângulo conhecido A (fig. 193) e marquemos de A até B a medida da diagonal dada.

Façamos passar pelo meio dessa diagonal uma perpendicular que determinará os pontos C e D nos lados do ângulo A .

O losango pedido é $ACBD$.

Problema 68. — Construir um paralelogramo, conhecendo-se os dois lados e uma diagonal.

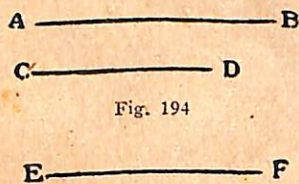


Fig. 194

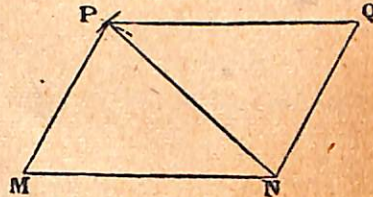


Fig. 196

1.ª Solução — Sejam AB e CD (fig. 194) os lados e EF (fig. 195) a diagonal. Tracemos MN igual a AB ; do ponto M (fig. 196) com um raio igual a CD e do ponto N com um raio igual a EF , determinemos o ponto P ; liguemos este ponto a M e a N . Do ponto P tiremos uma paralela a MN e do ponto N , outra a MP .

$MNQP$ é o paralelogramo pedido.

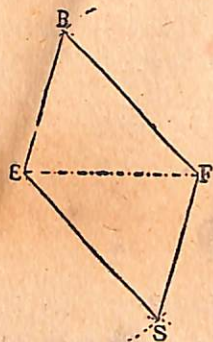


Fig. 197

2.^a Solução. — EF é a diagonal (fig. 197).

Façamos centro em E e depois em F e com um mesmo raio igual a AB (fig. 194) descrevamos dois arcos um de um lado e outro do outro lado de EF .

Com um raio igual a CD (fig. 194) e centro nos mesmos pontos E e F cortemos os arcos já traçados nos pontos R e S , aos quais liguemos as extremidades E e F .

$RESF$ é o paralelogramo pedido.

Problema 69. — Construir um paralelogramo conhecendo-se os dois lados e a altura.

Sejam AB e CD (fig. 198) os lados e EF (fig. 199) a altura. Tracemos MN igual a CD e de um de seus pontos,

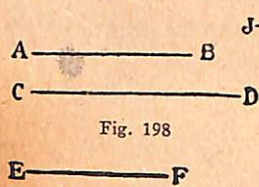


Fig. 198



Fig. 199

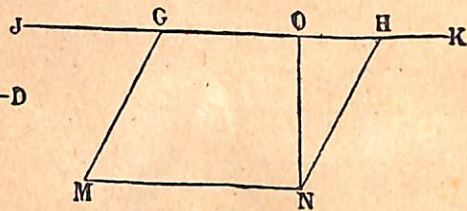


Fig. 200

N por exemplo, (fig. 200) levantemos-lhe uma perpendicular; sôbre esta marquemos NQ igual a EF . Pelo ponto Q tracemos uma paralela a MN . Façamos centro em N e com um raio igual a AB cortemos esta paralela no ponto H ; o mesmo faremos do ponto M para marcar G . O paralelogramo pedido é $MNHG$.

Problema 70. — Construir um paralelogramo conhecendo-se os lados e um ângulo.

Sejam AB e CD (fig. 201) os lados e E (fig. 202) o ângulo. Sôbre uma reta indefinida marquemos a distância

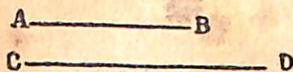


Fig. 201

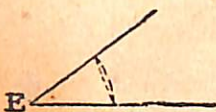


Fig. 202

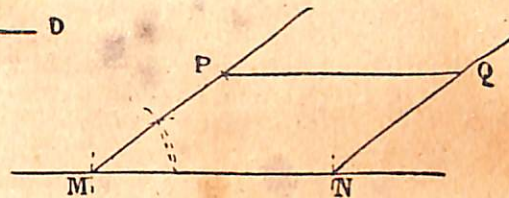


Fig. 203

MN igual a CD ; no ponto M (fig. 203) façamos um ângulo igual a E e com um raio igual a AB marquemos o ponto P a partir de M . Do ponto N tracemos uma paralela a MP e do ponto P outra a MN . O paralelogramo pedido é $MPQN$.

Problema 71. — Construir um paralelogramo conhecendo-se as diagonais e um lado.

Sôbre uma reta marquemos AB igual à medida do lado (fig. 204).

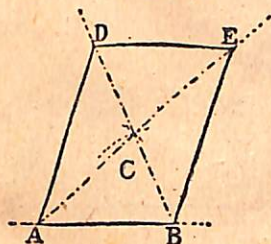


Fig. 204

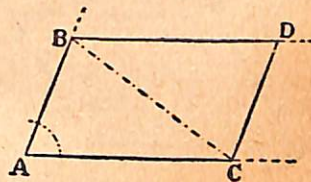


Fig. 205

Construamos o triângulo ABC em que os lados são AB e as metades das diagonais dadas.

Prolonguemos AC e BC e reproduzamos em CD a medida CB , e em CE a medida CA .

Tracemos AD , DE e EB e teremos em $ABED$ o paralelogramo pedido.

Problema 72. — Construir um paralelogramo conhecendo-se um lado, um ângulo, e uma diagonal.

Seja A o ângulo (fig. 205):

Marquemos AB igual ao lado e do ponto B , como centro, e com um raio igual à diagonal, determinemos o ponto C , no outro lado do ângulo A .

De B tiremos uma paralela a AC , e de C outra a AB . A solução do problema é $ACDB$.

Observação:

Esta construção, como se viu, depende da construção do prob. 29. Podem surgir, portanto, os mesmos casos e, conforme o tamanho da diagonal fornecida, o problema tem uma solução, duas ou nenhuma.

Problema 73. — Construir um paralelogramo conhecendo-se um lado, a altura relativa a esse lado e um ângulo.

Seja A o ângulo dado (fig. 206). Marquemos AB igual ao lado conhecido e do vértice levantemos uma perpendicular a BA .

Tomemos AM igual à altura. Pelo ponto M tiremos uma paralela a BA e por B uma outra a AC . O quadrilátero $BACD$ resolve o problema.

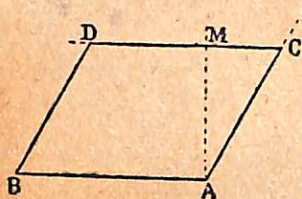


Fig. 206

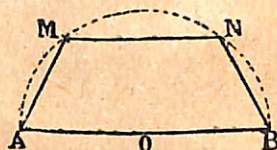


Fig. 207

Problema 74. — Construir um trapézio simétrico.

Tracemos um segmento AB (fig. 207), e tomando-o para diâmetro tracemos uma semi-circunferência.

Fazendo centro em A e depois em B , com um mesmo raio menor do que AB , determinemos os pontos M e N . O quadrilátero $ABNM$ é um trapézio simétrico.

Problema 75. — Construir um trapézio isósceles conhecendo-se as bases e a altura.

Sobre uma reta marquemos BC igual a uma base e pelo meio E de BC (fig. 208) levantemos-lhe uma perpendicular.

A partir de E , tomemos ED igual à altura.

Façamos passar por D uma paralela a BC e com um raio igual à metade da outra base determinemos a partir do ponto D , os pontos F e H .

Liguemos F a B e H a C . O trapézio pedido é $BCHF$.

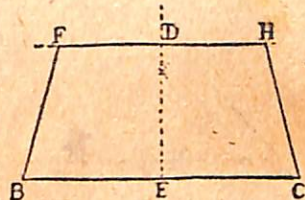


Fig. 208

Problema 76. — Construir um trapézio isósceles conhecendo-se as bases e um ângulo.

Seja M o ângulo (fig. 209).

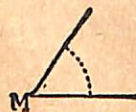


Fig. 209

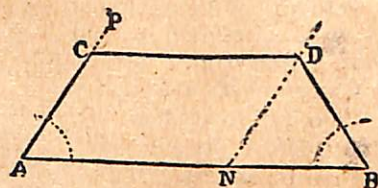


Fig. 210

Sobre uma reta marquemos AB igual à base maior e AN igual à base menor.

Façamos em A e em B (fig. 210) ângulos iguais a M . De N tracemos uma paralela a AP até determinar o ponto D , do qual tracemos uma paralela a AB .

O trapézio-isósceles pedido é $ABDC$.

Problema 77. — Construir um trapézio-isósceles conhecendo-se uma base, a altura, e o lado.

Sobre uma reta marquemos AB igual à base dada e por um ponto qualquer, B , dessa reta (fig. 211) levantemos-lhe uma perpendicular e tomemos BN igual à altura.

Pelo ponto N tracemos uma paralela a AB .
 Centro em A , e depois em B , com um raio igual ao lado determinemos os pontos C e D .
 A solução do problema é o trapézio $ABDC$.

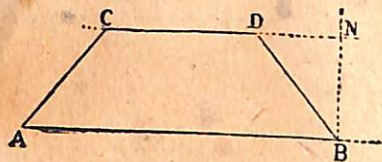


Fig. 211

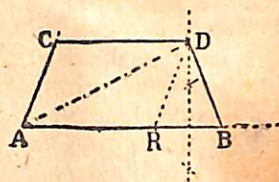


Fig. 212

Problema 78. — Construir um trapézio isósceles conhecendo-se as bases e a diagonal.

Marquemos em uma reta: AB igual à base maior e AR igual à base menor.

Pelo meio de RB façamos passar uma perpendicular e de A , como centro, e com raio igual à diagonal determinemos o ponto D .

Liguemos D a B e a R .

Pelo ponto A tiremos uma paralela a RD , e por D outra a AB . O trapézio pedido é $ABDC$.

Problema 79. — Construir um trapézio conhecendo-se as bases e os dois lados não paralelos.

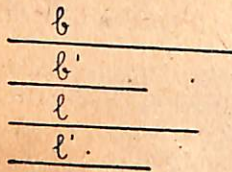


Fig. 213

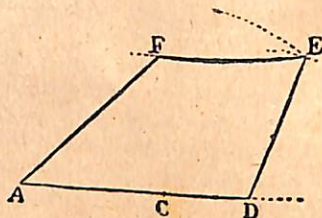


Fig. 214

Sejam as bases b e b' e sejam l e l' os lados (fig. 213).
 Marquemos em uma reta: $AD = b$ e $AC = b'$.

Façamos centro em C (fig. 214) e com um raio igual a l descrevamos um arco que será cortado no ponto E por um outro arco, traçado com um raio igual a l' e do ponto D , como centro.

De E tiremos uma paralela a AD e sobre essa paralela apliquemos EF igual a b' .

Liguemos o ponto F ao ponto A , e E ao ponto D ; resolveremos assim o problema.

Problema 80. — Construir um trapézio conhecendo-se as bases e as diagonais.

Construamos o triângulo ACD (fig. 215), em que o lado AC é igual à soma das bases do trapézio, AD é uma diagonal e CD a outra diagonal.

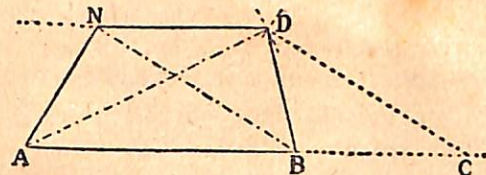


Fig. 215

Do ponto D tracemos uma paralela a AC , e de B uma paralela a CD ; as duas retas se cortam em N .

O trapézio pedido é $ABDN$.

EXERCÍCIOS

- 1 — Construa um quadrado com 6,2cm de lado. (Problema n.º 55).
- 2 — Construa um quadrado com 5,6cm de diagonal. (Problema n.º 57).
- 3 — Construa um retângulo cujas dimensões sejam 6cm e 3,8cm. (Problema n.º 58).

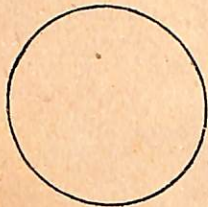
- 4 — Construa um retângulo com 7cm de diagonal e com uma dimensão de 5cm. (Problema n.º 59).
- 5 — Construir um retângulo em que uma das dimensões, de 6cm, forma com a diagonal um ângulo de 40°. (Problema n.º 60).
- 6 — Construir o retângulo em que a diagonal, de 7cm, forma com uma das dimensões um ângulo de 35°. (Problema n.º 61).
- 7 — Construir o retângulo em que as diagonais medem 6,5cm e formam entre si um ângulo de 48°. (Problema n.º 62).
- 8 — Construir o losango cujas diagonais medem, respectivamente, 5,8cm e 4,3cm. (Problema n.º 64).
- 9 — Construir o losango de 5,7cm de lado e no qual uma diagonal mede 8cm. (Problema n.º 65).
- 10 — Construir um losango com 6,4cm de lado e no qual um ângulo mede 41°. (Problema n.º 66).
- 11 — Construir um losango com uma diagonal de 7cm e um ângulo de 34°. (Problema n.º 67).
- 12 — Construir um paralelogramo cujos lados medem respectivamente 5cm e 3,4cm e onde uma diagonal mede 6,5cm. (Problema n.º 68).
- 13 — Construir um paralelogramo que tenha 6cm e 4,3cm de lados e 3,2cm de altura. (Problema n.º 69).
- 14 — Construir um paralelogramo com um ângulo de 40° e onde os lados medem respectivamente 8cm e 6cm. (Problema n.º 70).
- 15 — Construir um paralelogramo cujas diagonais sejam 9cm e 6,2cm e onde um lado mede 2,8cm. (Problema n.º 71).

- 16 — Construir um paralelogramo em que um lado mede 7cm, a diagonal mede 8cm e onde um ângulo tem 60°. (Problema n.º 72).
- 17 — Construir o paralelogramo em que um lado mede 9cm, a altura relativa a este lado mede 3,8cm e um dos ângulos tem 48°. (Problema n.º 73).
- 18 — Construa o trapézio simétrico com 6cm e 4,5cm de bases e 3,2cm de altura. (Problema n.º 15).
- 19 — Construir um trapézio isósceles com um ângulo de 41°, tendo as bases iguais a 7cm e 5,2cm respectivamente. (Problema n.º 76).
- 20 — Construir um trapézio simétrico com: 6,8cm de base, 3cm de altura e 4,2cm de lado. (Problema n.º 77).
- 21 — Construir um trapézio isósceles com 7,2cm e 5cm de bases e 4,6cm de diagonal (Problema n.º 78).
- 22 — Construir um trapézio com 5cm e 6,2cm de bases, os lados não paralelos medindo 3cm e 3,6cm (Problema n.º 79).
- 23 — Construir um trapézio com 8cm e 5,8cm de bases e 9,2cm e 6,3cm de diagonais. (Problema n.º 80).

CAPÍTULO VII

Circunferência e círculo — Raio — Corda — Diâmetro — Arcos e cordas do mesmo círculo — Posições relativas de uma circunferência e uma reta — Os ângulos e a circunferência — Medida de arcos — Medida de ângulos — O transferidor — Medida do ângulo inscrito — Posições relativas de duas circunferências — Polígono inscrito e circunscrito à circunferência — Propriedade da mediatriz de uma corda — Segmento, sector e corôa circulares.

Já definimos no 1º capítulo a *circunferência* como a linha curva plana, fechada, cujos pontos



I



II

Fig. 216

distam igualmente de um ponto chamado *centro*. Também já vimos como se traça uma circunferência (fig. 216-I).

A porção do plano limitada pela circunferência recebe o nome de *círculo* (fig. 216-II).

O segmento de reta que liga o centro a qualquer ponto da circunferência chama-se *raio*. Exemplo: *OA* na fig. 217 é um raio. Pela própria definição dada, verifica-se que se pode traçar numa circunferência uma infinidade de raios, todos iguais entre si.

O segmento de reta que liga dois pontos quaisquer da circunferência é uma *corda*. Exemplo: *AB* na fig. 218.

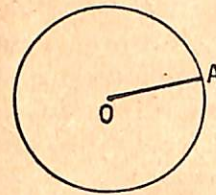


Fig. 217

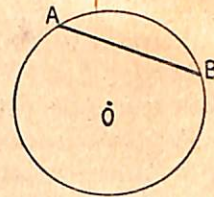


Fig. 218

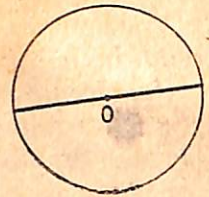


Fig. 219

A corda que passa pelo centro chama-se *diâmetro* (fig. 219). Numa circunferência podemos traçar uma infinidade de diâmetros, todos iguais ao dôbro do raio.

O diâmetro é a maior corda que se pode traçar numa circunferência e êle divide ao meio tanto a circunferência como o círculo.

Toda corda divide a circunferência em dois arcos que têm as mesmas extremidades. Assim, a corda *AB*, na fig. 220, divide a circunferência nos arcos *AMB* e *ANB*. Diz-se que a corda *subtende* êsses dois arcos. Já vimos que quando a corda

considerada é um diâmetro os dois arcos são iguais; mas, se a corda não for diâmetro, os dois arcos são desiguais, sendo um arco maior e outro menor do que meia circunferência.

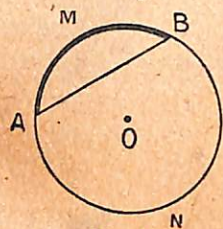


Fig. 220

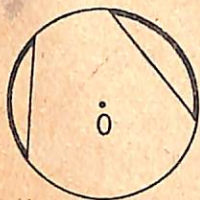


Fig. 221

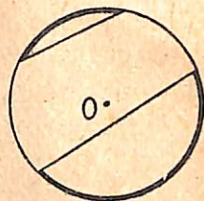


Fig. 222

De modo geral, quando falamos no *arco subtendido por uma corda*, é ao arco menor do que meia circunferência que nos estamos referindo.

Demonstra-se que, no mesmo círculo ou em círculos iguais (que têm o mesmo raio):

1.º as *cordas iguais subtendem arcos iguais* e, vice-versa, arcos iguais são subtendidos por cordas iguais. Por isso, quando, no mesmo círculo ou em círculos iguais, queremos determinar arcos iguais, basta-nos traçar cordas iguais: os arcos subtendidos serão iguais (fig. 221);

2.º cordas desiguais subtendem arcos desiguais e a maior corda subtende maior arco e, vice-versa, arcos desiguais são subtendidos por cordas desiguais e o maior arco é subtendido pela maior corda (fig. 222).

Também se demonstra que, no mesmo círculo ou em círculos iguais: cordas iguais se afastam igualmente do centro (fig. 223), cordas desiguais se afastam desigualmente e a maior é a que menos

se afasta (fig. 224). Inversamente: se duas cordas se afastam desigualmente do centro, elas são desiguais e a que menos se afasta é a maior.

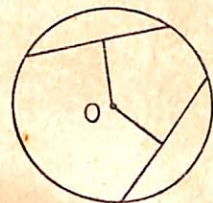


Fig. 223

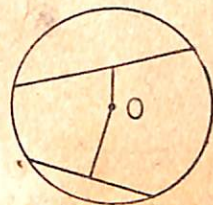


Fig. 224

Estas propriedades vêm confirmar ser o diâmetro a maior corda.

Posições relativas de uma reta e uma circunferência. — Uma reta pode ocupar três posições em relação a uma circunferência: *exterior*, *tangente* ou *secante*.

Uma reta é exterior à circunferência quando a distância do centro à reta é maior do que o raio. Nesse caso a reta não tem nenhum ponto comum com a curva (fig. 225).

A reta é tangente à circunferência quando a distância do centro à reta é igual ao raio. Nesse caso há um ponto apenas comum às duas linhas e esse ponto é chamado *ponto de contacto* ou *ponto de tangência* (P, na fig. 226).

A propriedade da tangente ao círculo é que ela é perpendicular ao raio que termina no ponto de contacto.

Uma reta é secante à circunferência quando a distância do centro à reta é menor do que o raio.

Neste caso a reta corta a curva em dois pontos (*pontos de secância*), mas não pode cortá-la em mais de dois pontos (fig. 227).

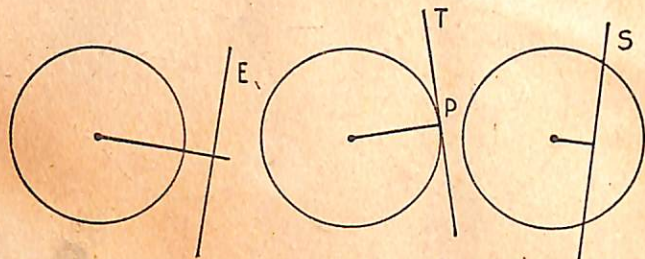


Fig. 225

Fig. 226

Fig. 227

A mesma reta pode ser tangente a duas circunferências; essa reta é, neste caso, uma *tangente comum*.

Se as duas curvas ficarem do mesmo lado da tangente, esta se chama *tangente comum exterior*

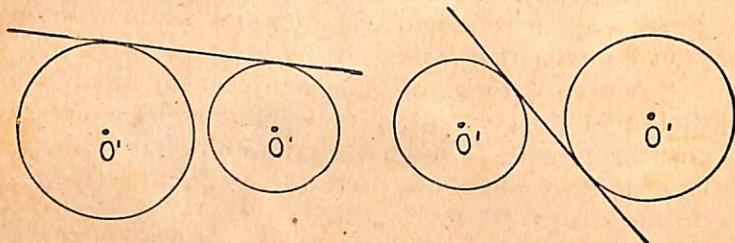


Fig. 228

Fig. 229

(fig. 228). Se as curvas ficarem uma de cada lado da tangente, esta se chama *tangente comum interior* (fig. 229).

Os ângulos e a circunferência. — Um ângulo relativamente a uma circunferência pode ser:

Ângulo central — quando tem o vértice no centro da circunferência. Neste caso, os lados são raios. (fig. 230).

Ângulo inscrito — aquele que tem o vértice sobre a curva e cujos lados são cordas. Exemplo: ângulo *BAC* da fig. 231.

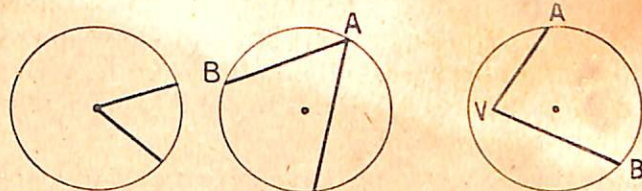


Fig. 230

Fig. 231

Fig. 232

Ângulo interior excêntrico — aquele cujo vértice está no interior do círculo, mas não no centro, como o ângulo *AVB* da figura 232.

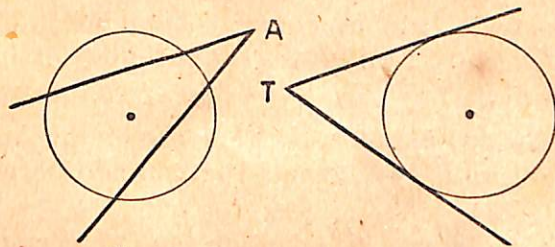


Fig. 233

Fig. 234

Ângulo exterior — aquele cujo vértice está fóra do círculo e cujos lados são secantes à circunferência; tal é o ângulo *A* da fig. 233.

Angulo circunscrito — quando tem o vértice fóra do círculo e os lados são tangentes à circunferência. Exemplo: o ângulo *T* da fig. 234.

Medida de arcos. — Medimos um arco de circunferência comparando-o com outro, da mesma circunferência ou de circunferência igual, tomado para unidade.

A unidade principal de arco é o *grau*, que foi obtido dividindo-se a circunferência em 360 partes iguais. Cada arco de grau foi dividido, por sua vez, em 60 pequenos arcos chamados *minutos*; finalmente, cada minuto foi dividido em 60 partes iguais denominadas *segundos*.

Indica-se o grau por um zéro colocado à direita e um pouco acima do número que exprime a medida do arco; exemplo: 6° lê-se 6 graus.

O minuto é designado por um acento e o segundo por dois acentos também colocados à direita e um pouco acima do número; exemplo: 9' lê-se 9 minutos e 14" lê-se 14 segundos.

De acôrdo com as convenções acima, um ângulo de 19 graus, 14 minutos e 8 segundos exprime-se: 19°14'8".

Medida dos ângulos. — Para medir um ângulo temos que compará-lo com outro tomado para unidade.

Se considerarmos o ângulo com o vértice no centro da circunferência, notamos que seus lados, de passagem, interceptam um arco. Observamos, ainda que, na mesma circunferência, ou em circunferências iguais, ângulos iguais interceptam

arcos iguais (fig. 235); se um ângulo é duplo de outro, êle intercepta também um arco duplo do arco interceptado por êsse outro; o ângulo três vezes maior do que outro compreende entre os seus



Fig. 235

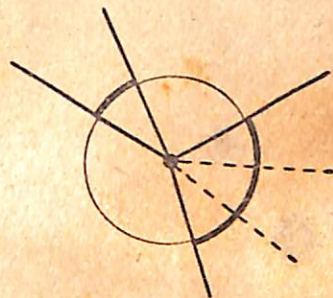


Fig. 236

lados um arco três vezes maior do que o compreendido pelos lados dêste outro (fig. 236); e assim por diante.

Em vista desta correspondência, e para maior facilidade, convencionou-se adotar para unidade de ângulo o ângulo central que compreende entre os seus lados o arco tomado para unidade. Podemos, então, dizer: ângulo central de tantos graus minutos e segundos, conforme o arco compreendido entre os seus lados medir êsse número de graus, minutos e segundos.

Conclusão: o ângulo central se mede pelo arco compreendido entre os seus lados.

O Transferidor. — Baseados na propriedade enunciada acima é que usamos, para medir ângulos, o instrumento chamado *transferidor*.

O transferidor consiste geralmente em um semi-círculo de madeira, chifre, latão ou celulóide, cuja semi-circunferência está dividida em 180 partes iguais, cada uma destas valendo, portanto, um grau. A essa semi-circunferência dá-se o nome de *limbo* e ao seu diâmetro chama-se *linha de fé*.

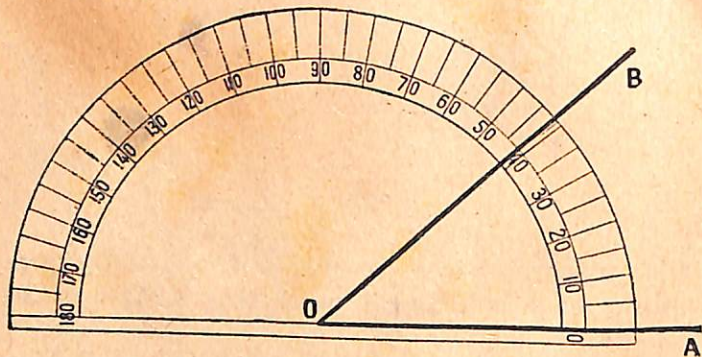


Fig. 237

Vejamos como se pode medir um ângulo com o transferidor: fazemos coincidir o centro do transferidor com o vértice do ângulo e a linha de fé com um dos lados do mesmo; a divisão do limbo sob a qual fica o outro lado do ângulo determina o seu valor.

Também podemos com o transferidor medir um arco qualquer de circunferência: ligamos as extremidades do arco ao centro d'êste e medimos o ângulo central que resulta; a medida d'êste ângulo nos dá a medida do arco.

Medida do ângulo inscrito. — Seja o ângulo BAC da fig. 238; dizemos que êle está *inscrito* no arco BMC e *compreende* entre os seus lados o arco BNC . Por conseguinte, um ângulo está inscrito num determinado arco quando o seu vértice está sobre êsse arco e os seus lados passam pelas extremidades do mesmo arco. O arco BNC é o arco *compreendido entre os lados* do ângulo BAC .

Demonstra-se que a medida do ângulo inscrito é dada pela metade do arco compreendido entre os seus lados.

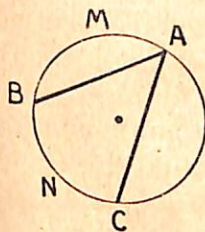


Fig. 238

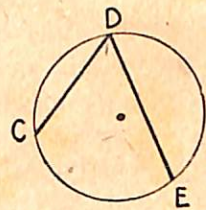


Fig. 239

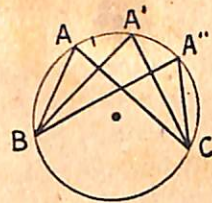


Fig. 240

Assim, o ângulo CDE (fig. 239), que compreende entre os seus lados um arco correspondente à terça parte da circunferência (arco de 120°), mede 60° .

Evidentemente os ângulos inscritos no mesmo arco são iguais, porque também compreendem entre os seus lados arcos iguais. Na fig. 240 os ângulos BAC , $BA'C$, $BA''C$ são todos iguais.

Os ângulos inscritos numa semi-circunferência são todos retos, pois compreendem entre os seus lados a outra semi-circunferência, cuja metade equivale a 90° (fig. 241).

Os ângulos inscritos num arco maior do que uma semi-circunferência são agudos (fig. 242); os

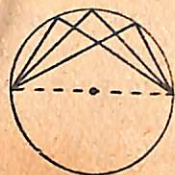


Fig. 241



Fig. 242

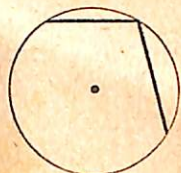


Fig. 243

ângulos inscritos num arco menor do que uma semi-circunferência são obtusos (fig. 243).

Posições relativas de duas circunferências. —

Duas circunferências podem ocupar, uma em relação a outra, diversas posições. Vejamos:

Se duas circunferências não têm ponto comum, nem tão pouco os seus círculos, elas se dizem *exteriores* (fig. 244).

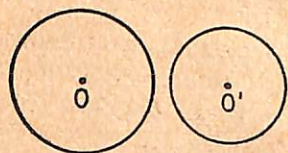


Fig. 244

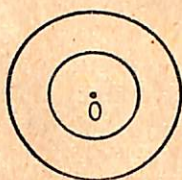


Fig. 245

Se duas circunferências não têm ponto comum, mas os seus círculos têm, elas se dizem *interiores*. Podem-se dar, então, dois casos: ou as circunferências têm o mesmo centro e se chamam *concêntricas* (fig. 245) ou não têm o mesmo centro e se chamam *excêntricas* (fig. 246).

Se duas circunferências só têm um ponto comum, elas são *tangentes*. Duas circunferências po-

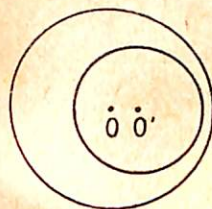


Fig. 246

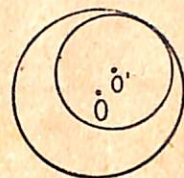
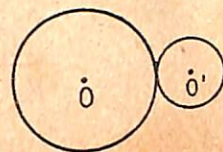


Fig. 247



247a

dem ser tangentes interiormente e exteriormente, como se vê pelas figuras 247 e 247a.

Enfim, quando duas circunferências se cortam, elas se dizem *secantes*. Neste caso, elas têm dois pontos comuns (*pontos de secância*) e não podem ter mais (fig. 248).

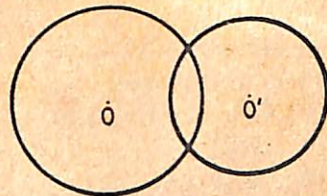


Fig. 248

Polígonos inscrito e circunscrito à circunferência. — Um polígono está *inscrito* na circunferência quando os seus vértices estão sobre a curva e os seus lados são cordas da circunferência (fig. 249).

Quando o polígono está inscrito na circunferência, também se diz que a circunferência está *circunscrita* ao polígono.

Um polígono está *circunscrito* à circunferência quando os seus lados são tangentes à circunferência. Também se diz, então, que a circunferência está *inscrita* no polígono. (fig. 250).

Quando um polígono pode ser inscrito na circunferência, é se denomina *inscritível*; analogamente, denomina-se *circunscritível* se puder ser circunscrito à circunferência.

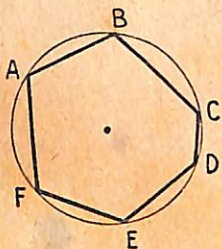


Fig. 249

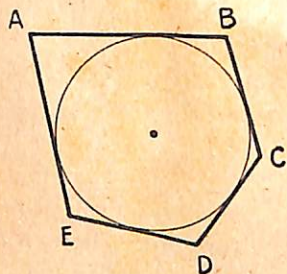


Fig. 250

Demonstra-se que qualquer polígono regular pode ser inscrito ou circunscrito à circunferência.

O único polígono que sempre se pode inscrever ou circunscrever à circunferência, seja regular ou não, é o triângulo.

Propriedade da mediatriz de uma corda. — A mediatriz de uma corda passa pelo centro e divide ao meio os arcos que a corda subtende. Quer isto dizer que si, pelo meio, M , de qualquer corda (AB por exemplo) traçarmos uma perpendicular, esta vai passar pelo centro e dividir ao meio os dois arcos subtendidos por AB (fig. 251).

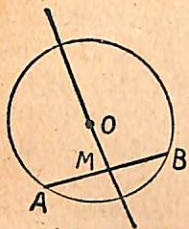


Fig. 251

Por outro lado, se do centro tirarmos uma perpendicular sobre uma corda, essa perpendicular

dividirá ao meio a corda e os dois arcos por esta subtendidos.

Segmento circular. — Chama-se segmento circular a porção do círculo compreendida entre um arco e a corda que o subtende (fig. 252).

Sector circular. — Chama-se sector circular a porção do círculo compreendida entre um arco e os

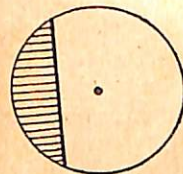


Fig. 252



Fig. 253



Fig. 254

dois raios que terminam nas extremidades do arco (fig. 253).

Corôa circular. — Corôa circular é a porção do plano limitada por duas circunferências concêntricas (fig. 254).

QUESTIONÁRIO

1. Que diferença se faz entre circunferência e círculo?
2. Que é raio da circunferência?
3. Um diâmetro o que é do raio?
4. Quantos raios e quantos diâmetros tem uma circunferência?
5. Que relações existem entre as cordas e os arcos por elas subtendidos no mesmo círculo ou em círculos iguais?

6. No mesmo círculo ou em círculos iguais, que relações existem entre os tamanhos das cordas e seu afastamento do centro?
7. Quantas posições uma reta pode ocupar relativamente a uma circunferência?
8. Qual a propriedade da tangente à circunferência?
9. Em quantos pontos se podem cortar duas circunferências e como se chamam esses pontos?
10. Que é ângulo central? ângulo inscrito? ângulo interior? ângulo exterior? ângulo circunscrito?
11. Quantas posições uma circunferência pode ocupar em relação a outra?
12. Quando é que um polígono está inscrito na circunferência?
13. Quando é que um polígono está circunscrito à circunferência?
14. Qualquer polígono pode ser inscrito ou circunscrito a uma circunferência?
15. Enuncie a propriedade relativa à mediatriz de uma corda.
16. Que é segmento circular?
17. Que é sector circular?
18. Que é coroa circular?
19. Como se mede um arco?
20. Como se obteve a unidade principal de arco? e o minuto? e o segundo?
21. Que é que se observa com os ângulos centrais relativamente aos arcos compreendidos pelos seus lados?
22. Qual a convenção adotada para medir os ângulos centrais?
23. Descreva o instrumento chamado transferidor e diga para que serve.
24. Como se mede um ângulo com o transferidor?
25. Qual a medida de um ângulo inscrito num arco de circunferência?
26. Os ângulos inscritos numa semi-circunferência quanto medem?

PROBLEMAS

Problema 81. — Traçar uma circunferência que passa por dois pontos dados.

Sejam A e B os pontos. Tracemos o segmento de reta AB e, em seguida, a sua mediatriz, isto é, a perpendicular ao meio de AB , (fig. 255).

Como a mediatriz tem todos os seus pontos a igual distância das extremidades do segmento, qualquer ponto da mediatriz de AB pode servir de centro de uma circunferência que passa por A e por B . O problema tem, por conseguinte, uma infinidade de soluções.

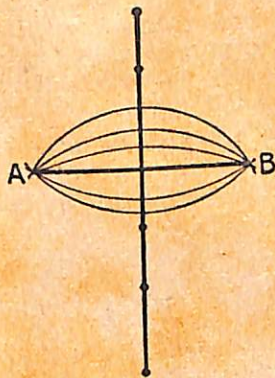


Fig. 255

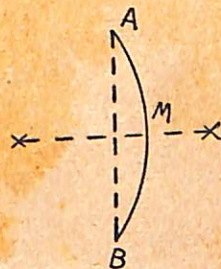


Fig. 256

Problema 81-a. — Dividir um arco de círculo ao meio.

Já sabemos que a perpendicular ao meio de uma corda do círculo passa pelo meio do arco por ela subtendido. Então, quando quisermos dividir ao meio um arco de círculo, AB , por exemplo (fig. 256), basta traçar a corda AB e dividi-la ao meio como se divide um segmento de reta qualquer.

Problema 82. — Fazer passar uma circunferência por três pontos dados não em linha reta.

Sejam A, B e C os pontos (fig. 257). Unamos os pontos A e B ao ponto C ; tracemos uma perpendicular pelo meio de BC e outra pelo meio de AC . Fazamos centro em M (ponto de encontro das duas perpendiculares) e com o raio MB descrevamos a circunferência que passará forçosamente pelos pontos A, B e C .

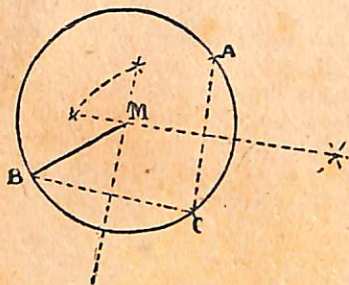


Fig. 257

Observação: — Por 3 pontos não em linha reta sempre se pode fazer passar uma circunferência e só uma.

Problema 83. — Determinar o centro de uma circunferência ou de um arco.

Sobre o arco cujo centro se quer determinar, marquemos três pontos: A, B e C (fig. 258).

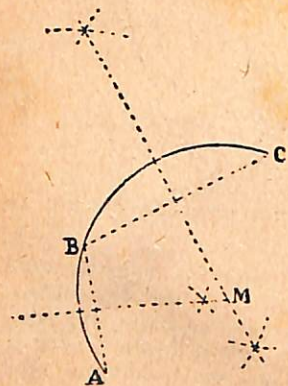


Fig. 258

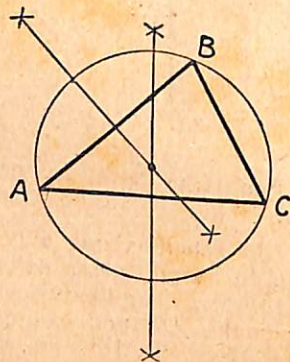


Fig. 259

Basta, agora, proceder, como no problema anterior, pois o centro do arco dado é centro da circunferência única que passa por A, B e C .

Problema 84. — Circunscrever uma circunferência a um triângulo.

Seja o triângulo ABC (fig. 259). Como a circunferência pedida deve passar pelos vértices do triângulo dado, que são três pontos não em linha reta, basta-nos proceder como no problema anterior, fazendo passar uma circunferência por A, B e C .

Problema 85. — Descrever um arco de circunferência igual a um arco dado.

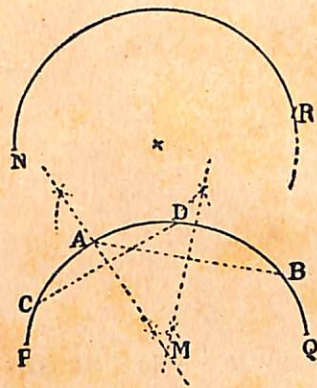


Fig. 260 e 261

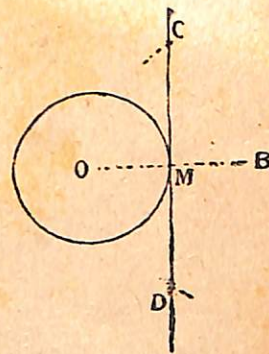


Fig. 262

Seja FQ o arco dado (fig. 260).

Para que dois arcos sejam iguais é preciso:

1.º que tenham o mesmo raio; 2.º que sejam subtendidos por cordas iguais. Vamos, por isso, achar o raio do arco FQ , o qual se obtém procurando o centro do mesmo arco. Achado o raio tracemos um arco evi-

dentemente maior do que o arco dado e nele tomemos uma corda NR igual à corda FQ (fig. 261).

O arco subtendido pela corda NR resolve o problema.

Problema 86. — Traçar uma tangente a uma circunferência num ponto dado.

Liguemos o centro O ao ponto dado M (fig. 262). Prolonguemos OM de uma distância $MB = OM$ e depois façamos passar pelo meio de OB a perpendicular CD , que é a tangente pedida.

Problema 87. — De um ponto dado fora de uma circunferência, traçar tangentes a esta circunferência.

Seja traçar as tangentes do ponto M à circunferência O .

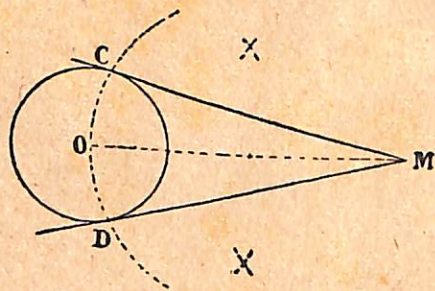


Fig. 263

Liguemos o centro O ao ponto M e sôbre OM (figura 263) como diâmetro, tracemos um arco que corte a circunferência dada em dois pontos C e D . As retas CM e DM são as tangentes pedidas.

Problema 88. — Traçar a tangente a um arco num ponto dado desse arco.

Seja M o ponto dado do arco (fig. 264).

Façamos centro nesse ponto e com o mesmo raio arbitrário marquemos sôbre o arco E e F ; tracemos a corda EF e, em seguida, a sua mediatriz, a qual passará

por M . Finalmente levantemos por M uma perpendicular à mediatriz de EF . Tal perpendicular é a tangente pedida.

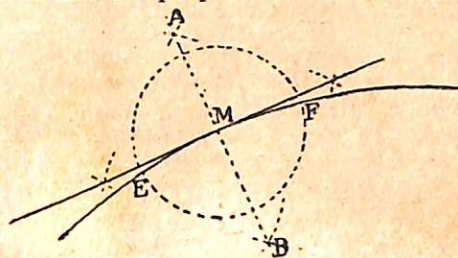


Fig. 264

Problema 89. — Dadas uma circunferência e uma reta traçar tangentes à mesma circunferência paralelas à reta dada.

Seja a circunferência de centro C (fig. 265) e AB a reta.

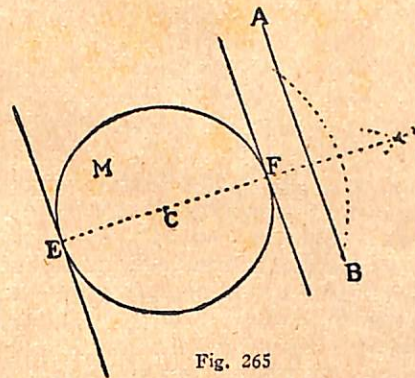


Fig. 265

Do centro C tracemos uma perpendicular a AB ; esta perpendicular determinará na circunferência os pontos E e F que serão os pontos de contacto das tangentes pedidas.

Estas se obtêm traçando, pelos pontos E e F , paralelas a AB .

Problema 90. — Traçar as tangentes comuns a duas circunferências.

1.º) tangentes exteriores.

Façamos passar uma reta pelos centros, M e N , das duas circunferências (fig. 266), prolongando-a até cortar outra vez, em E , a circunferência maior.

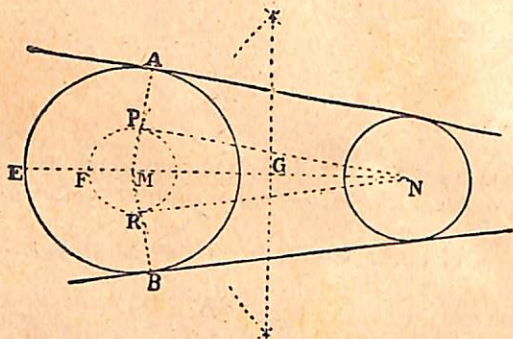


Fig. 266

Reproduzamos em EF , a medida do raio da circunferência menor.

Centro em M e raio $= MF$ descrevamos uma circunferência. Do ponto N tracemos as tangentes a esta terceira circunferência (problema n.º 87). P e R são os pontos de contacto. Em seguida, tracemos os raios MA e MB da circunferência maior e que passam por P e por R . Finalmente, das extremidades, A e B , destes raios, tiremos paralelas respectivamente a NP e a NR . Estas são as tangentes exteriores comuns às duas circunferências dadas.

2.º) tangentes interiores.

Liguemos os centros A e B (fig. 267) e tracemos os dois raios AM e BN paralelos mas de sentidos opostos.

Liguemos M a N por um segmento de reta que cortará AB no ponto C .

Basta, agora, traçar, do ponto C , as tangentes a uma das curvas. Estas tangentes prolongadas além de C vão tocar a outra circunferência.

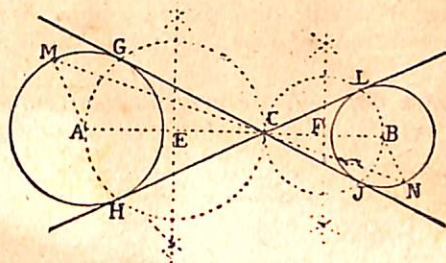


Fig. 267

Problema 91. — Descrever uma circunferência tangente exteriormente a uma outra em um ponto dado, e que passa por outro ponto, também dado.

Sejam: C a circunferência, M o ponto de contacto e N o ponto por onde deve passar a circunferência pedida. (fig. 268).

Liguemos C e N a M ; prolonguemos CM além de M . Façamos passar uma perpendicular pelo meio de MN ; do ponto de intersecção R , com raio RM , descrevamos uma circunferência, que será tangente à primeira no ponto M e passará pelo ponto N .

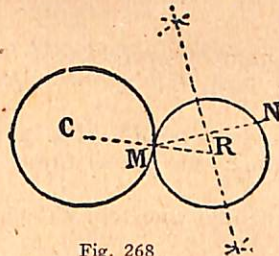


Fig. 268

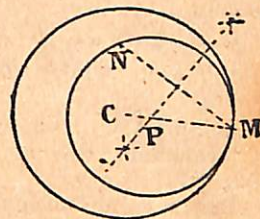


Fig. 269

Problema 92. — Descrever uma circunferência tangente a uma outra em um ponto dado, e passando por um ponto situado no interior da circunferência.

Tracemos o raio CM (fig. 269) e unamos entre si os pontos M e N ; façamos passar pelo meio de MN uma perpendicular e do ponto de intersecção P , como centro, com raio igual a PM , descrevamos uma circunferência, que será tangente à primeira no ponto dado M e passará pelo ponto N .

Problema 93. — *Descrever uma circunferência que passe por um ponto e seja tangente a uma reta em um ponto dado.*

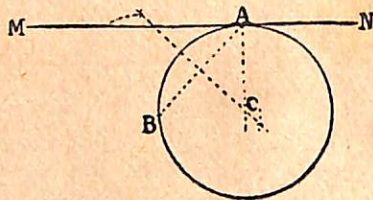


Fig. 270

Seja MN a reta, A o ponto de contacto, e B o outro ponto (fig. 270) pelo qual deve passar a circunferência.

Unamos o ponto A ao ponto B e façamos passar pelo meio uma perpendicular.

Tiremos do ponto A uma perpendicular a MN ; esta última cortará a que passa pelo meio de AB , determinando o ponto C , que será o centro da circunferência desejada.

Problema 94. — *Descrever uma circunferência tangente a uma reta e que passa por dois pontos fora da reta.*

Sejam A e C os pontos fora da reta MN (fig. 271). Tracemos CA e prolonguemos até determinar o ponto E .

Descrevamos a semi-circunferência que tem EC para diâmetro.

Do ponto A levantemos uma perpendicular a EC até determinar o ponto F na semi-circunferência.

Centro em E e raio igual a EF descrevamos o arco FG .

De G levantemos uma perpendicular a MN e pelo meio de AC façamos passar outra perpendicular que se encontrará com a primeira no ponto D , centro da circunferência pedida.

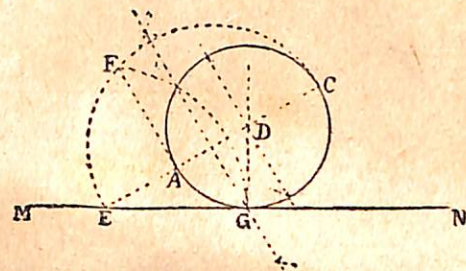


Fig. 271

Problema 95. — *Descrever uma circunferência tangente a outra e a uma reta dadas.*

Seja AB a reta e M a circunferência (fig. 272).

Do centro O tracemos um raio que prolongado corte a reta dada, e façamos passar uma perpendicular ao mesmo raio na sua extremidade P , prolongando tal perpendicular até marcar o ponto N na reta AB .

Tracemos a bissetriz do ângulo PNA a qual cortará OD no ponto E .

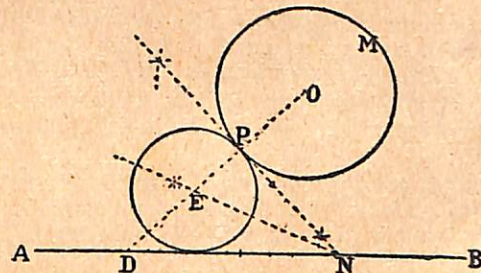


Fig. 272

Descrevamos, com o raio EP e centro em E , a circunferência pedida.

Problema 96. — Traçar as circunferências inscrita e ex-inscritas (*) num triângulo.

Seja o triângulo MNO (fig. 273) cujos lados prolongamos nos dois sentidos.

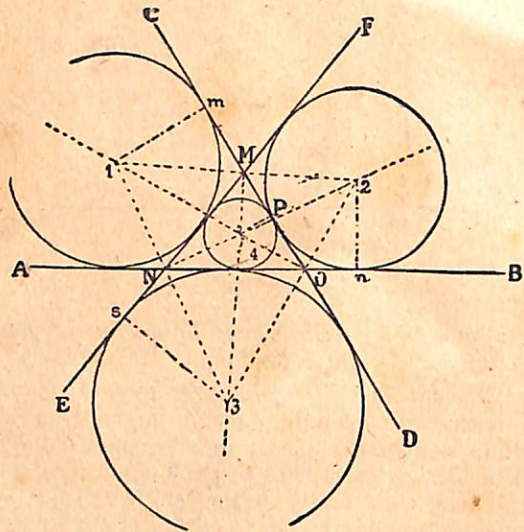


Fig. 273

Tracemos as bissetrizes dos ângulos do triângulo, prolongando-as e também as de três dos ângulos externos do mesmo triângulo, por exemplo, de FMO , NOD e MNA .

Estas bissetrizes prolongadas, além do vértice, servem de bissetrizes dos outros ângulos externos opostos aos primeiros.

As bissetrizes internas encontram-se num ponto (4) que é o centro do círculo inscrito e cujo raio é $4P$ (perpendicular traçada de (4) sobre o lado MO).

(*) Circunferência ex-inscrita num triângulo é a circunferência tangente a um lado do triângulo e aos prolongamentos dos outros dois lados. Para cada triângulo há três circunferências ex-inscritas.

Cada bissetriz interna se encontra com as externas dos outros ângulos nos pontos 1, 2 e 3 que são os centros das circunferências ex-inscritas.

Os raios destas são, respectivamente, as perpendiculares $1m$, $2n$ e $3s$.

Problema 97. — Descrever diversas circunferências tangentes entre si e a duas retas dadas.

Tracemos a bissetriz do ângulo MVN formado pelas retas dadas (fig. 274).

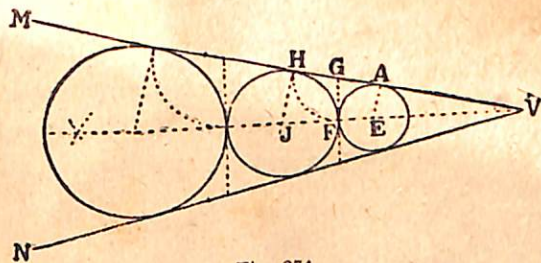


Fig. 274

Tomemos o ponto A da reta MV como primeiro ponto de contacto e por êle levantemos uma perpendicular até determinar o ponto E na bissetriz.

Com o raio EA e centro em E descrevamos a primeira circunferência.

Pelo ponto F façamos passar uma perpendicular à bissetriz e de G , como centro e raio GF descrevamos o arco FH .

Deste último ponto H levantemos outra perpendicular a MV até determinar o ponto J na bissetriz.

Centro em J e raio JF descrevamos a segunda circunferência tangente à primeira e às duas retas.

Prosseguindo do mesmo modo, obteremos tantas circunferências quantas quisermos, nas condições do problema.

Observação: Se as retas dadas fossem paralelas, as circunferências seriam todas iguais e ficariam os centros sobre uma paralela equidistante das duas.

CAPÍTULO VIII

POLÍGONOS

Polígonos. — Denominações — Soma dos ângulos internos do polígono convexo — Medida do ângulo interno — Construção de polígonos regulares — Problemas.

Os polígonos têm nomes especiais conforme o número de lados; assim,

um polígono de	}	5 lados — pentágono.
		6 lados — hexágono.
		7 lados — heptágono.
		8 lados — octógono.
		9 lados — eneágono.
		10 lados — decágono.
		11 lados — hendecágono.
12 lados — dodecágono.		
15 lados — pentadecágono.		
20 lados — icoságono.		

Só trataremos, por enquanto, dos polígonos simples convexos.

Soma dos ângulos internos de um polígono. — Já sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos. Vamos aplicar esta propriedade para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.

Tomemos, para isso, um pentágono convexo (fig. 276). Marquemos um ponto *P*, no seu interior e liguemo-lo a todos os vértices do polígono. Formam-se, então, 5 triângulos, isto é, tantos triângulos quantos são os lados. Os ângulos internos destes 5 triângulos somam 5×2 ou 10 retos. Si destes 10 retos subtrairmos os ângulos em torno de *P*, o que restar será a soma dos ângulos do pentágono. Ora, os ângulos consecutivos formados em torno de um ponto somam 4 retos. Logo, a soma dos ângulos do pentágono é igual a $10 - 4$ ou 6 ângulos retos.

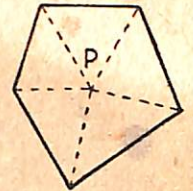


Fig. 276

O que fizemos para o pentágono, poderemos fazer para qualquer polígono e teremos sempre um número de retos igual ao dôbro do número de lados menos 4.

Concluimos, pois, que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é, em ângulos retos, igual ao dôbro do número de lados menos quatro.

Medida do ângulo de um polígono regular convexo. — Como no polígono regular todos os ân-

gulos são iguais entre si, podemos agora calcular a medida de cada um destes ângulos: bastará, de acôrdo com a lei acima, determinar a soma de todos e depois dividir pelo número dêles.

Exemplifiquemos com o pentágono: a soma é 6 retos ou 540 graus; cada ângulo mede, portanto $\frac{540}{5}$ ou 108 graus.

Damos abaixo uma tabela das medidas do ângulo interno de alguns polígonos regulares:

Triângulo	60°
Quadrado	90°
Pentágono	108°
Hexágono	120°
Octógono	135°
Eneágono	140°
Decágono	144°
Dodecágono	150°
Pentadecágono	156°
Polígono de 16 lados	157°,5
" " 18 "	160°
Icoságono	162°

Apótema. — Já vimos que todo polígono regular pode ser inscrito numa circunferência. O centro desta circunferência é também chamado *centro* do polígono.

Todos os lados do polígono regular distam igualmente do centro por serem cordas iguais da mesma circunferência. A distância constante, *OM* (fig. 277), do centro a qualquer lado do polígono regular chama-se *apótema* do polígono.

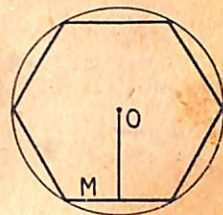


Fig. 277

Para obter o apótema de um polígono, basta, portanto, tirar uma perpendicular do centro sôbre qualquer lado do mesmo.

Construção de polígonos regulares convexos. —

Para construir um polígono regular convexo de *n* lados, dividimos a circunferência em *n* partes iguais e ligamos consecutivamente os pontos de divisão.

Com efeito, é facil demonstrar que o polígono assim construído é regular: os lados são todos iguais entre si, como cordas que subtendem arcos iguais na mesma circunferência; os ângulos também são iguais entre si por estarem inscritos em arcos iguais. Assim, si dividirmos a circunferência em 8 partes iguais e ligarmos consecutivamente os pontos de divisão, o polígono resultante será um octógono regular.

O problema da construção dos polígonos regulares convexos se reduz pois ao da divisão da circunferência em partes iguais.

Construção de polígonos regulares estrelados. —

Dividamos uma circunferência em *n* partes iguais e liguemos os pontos de divisão de 2 em 2, de 3 em

3, de 4 em 4 e assim por diante; se a linha poligonal fechar depois de passar por todos os pontos, obteremos (pelos mesmos motivos dados acima) um polígono regular. Desta vez, porém, o polígono é entrelaçado e tem o nome de *polígono regular estrelado*.



Fig. 278

Dividamos, por exemplo, a circunferência em 5 partes iguais e liguemos os pontos de divisão de 2 em 2. Formaremos um *pentágono regular estrelado* (fig. 278). Si procurássemos ligar os pontos de divisão de 3 em 3, encontraríamos o mesmo polígono e si ligássemos de 4 em 4, obteríamos o pentá-

gono regular convexo. Concluimos, então, que só há uma espécie de pentágono estrelado.

Vejamos, agora, se podemos formar hexágono estrelado: ligando os pontos de divisão de 2 em 2, resultará um triângulo; ligando de 3 em 3, a figura se reduzirá a um diâmetro. É inútil ligar de 4 em 4, porque isto corresponderia a ligar de 2 em 2 no sentido contrário e voltariamos, ainda, ao triângulo. Finalmente, também não adiantaria ligar de 5 em 5, pois iríamos obter o hexágono convexo. Chegamos, então, à conclusão de que *não há hexágono estrelado*.

Procedendo da mesma forma, relativamente à circunferência dividida em sete partes iguais, verificaríamos que há duas espécies de heptágonos

estrelados: um que se obtém ligando os pontos de divisão de 2 em 2 e outro quando se ligam esses pontos de 3 em 3 (figs. 279 e 280).

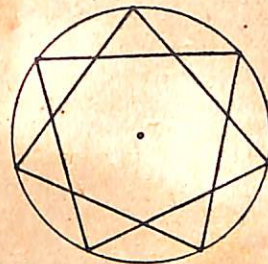


Fig. 279



Fig. 280

De um modo geral, chegamos ao resultado seguinte: *há tantos polígonos regulares de n lados quantos forem os números primos com n menores do que $\frac{n}{2}$* ; desses polígonos um é convexo e os demais são estrelados.

Exemplifiquemos: só há duas espécies de octógonos regulares, um convexo e outro estrelado, porque só há dois números primos com 10 menores que 5 : 1 e 3.

Exercício — *Quantas espécies de polígonos regulares de 16 lados há?*

Os números primos com 16 e menores do que a metade de 16 são quatro, a saber:

1, 3, 5, 7,

Há, por conseguinte, quatro espécies de polígonos regulares de 16 lados, sendo um convexo e 3 estrelados.

QUESTIONÁRIO

1. Quais os polígonos que têm nomes especiais?
2. Enuncie a lei que permite calcular a soma dos ângulos internos de um polígono convexo.
3. Como se pode calcular o valor de um ângulo interno num polígono regular convexo?
4. Que é apótema no polígono regular?
5. Como se pode construir um polígono regular convexo?
6. Como se pode construir um polígono regular estrelado?
7. Quantos pentágonos regulares há?
8. Existe algum hexágono regular?
9. Qual é a lei que permite dizer quantas espécies de polígonos regulares de n lados há?
10. Quantas espécies de decágonos regulares há? e quantos icoságonos? Porque?

PROBLEMAS

Problema 98. — Construir um ângulo dado com o transferidor.

Tracemos uma reta AB , e marquemos sobre ela o ponto M , que vai ser o vértice do ângulo.

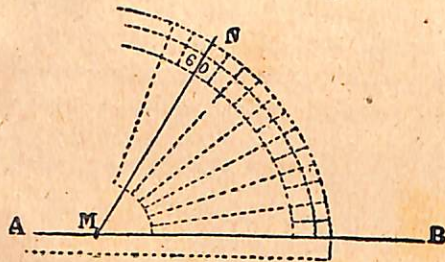


Fig. 281

Escolhamos a semi-reta MB para um lado do ângulo. Coloquemos o transferidor de modo que a linha de fé

coincida com a reta AB , e o centro do transferidor caia em M , procuremos no limbo a medida do ângulo e marquemos um ponto (N) defronte do limite dessa medida.

Ligando êsse ponto ao vértice escolhido, M , teremos o ângulo pedido NMB .

Exemplo: a fig. 281 mostra a construção do ângulo NMB de 60° .

Problema 99. — Traçar com o compasso e a régua um ângulo de 60° .

Da origem V de uma semi-reta como centro e com um raio arbitrário, descrevamos um arco de modo que determine o ponto M (fig. 282) sobre a semi-reta.

Façamos centro nesse ponto e com o mesmo raio determinemos o ponto N sobre o arco.

Liguemos V a N e formaremos o ângulo NVM de 60° .

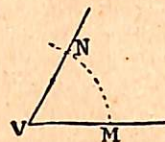


Fig. 282

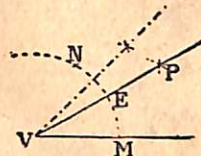


Fig. 283

Problema 99. — Traçar com o compasso e a régua um ângulo de 30° , de 15° e de 45° .

Para obter o ângulo de 30° traçamos, como no problema anterior a ângulo de 60° e dividimo-lo ao meio pela bissetriz.

Para obter o ângulo de 15° dividimos ao meio o de 30° .

Finalmente o ângulo de 45° obtém-se traçando a bissetriz do ângulo reto; ou, ainda, (fig. 283) dividindo ao meio o ângulo de 60° e somando uma metade deste com a metade da outra metade ($30 + 15^\circ = 45^\circ$).

Problema 100. — Traçar com a régua e o compasso um ângulo de 120° .

Basta proceder como no problema 99 e aplicar sôbre o arco duas vezes, consecutivamente e a partir de M , o mesmo raio (fig. 284).

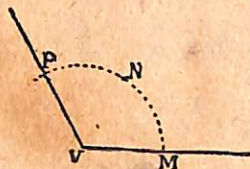


Fig. 284

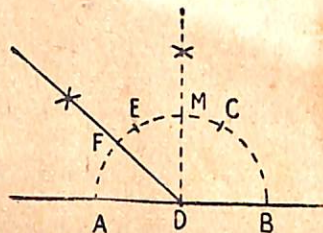


Fig. 285

Problema 101. — Traçar com o compasso e a régua um ângulo de 135° .

De um ponto D de uma reta e com um raio arbitrário descrevamos uma semi-circunferência (fig. 285)

Com o mesmo raio, determinemos de B , o ponto C e dêste, o ponto E . Dividamos ao meio o arco EC . O arco MB mede 90° . Se, agora, dividirmos o arco MA ao meio e ligarmos este meio, F , ao ponto D , teremos o ângulo FDB de 135° .

Problema 102. — Traçar com o compasso e a régua um ângulo de 150° .

Façamos centro num ponto V de uma reta e com um raio arbitrário tracemos uma semi-circunferência (figura 286).

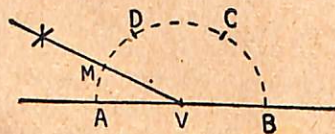


Fig. 286

Aplicamos êsse mesmo raio duas vezes sôbre a circunferência a partir de B . Determina-se, assim, o ponto

D . Em seguida, dividamos o arco DA ao meio. Ligando o meio M do arco DA ao ponto V , temos o ângulo MVB de 150° .

Problema 103. — Inscrever um quadrado em um círculo.

Tracemos um diâmetro qualquer AB (fig. 287); tracemos um segundo diâmetro CD perpendicular ao pri-

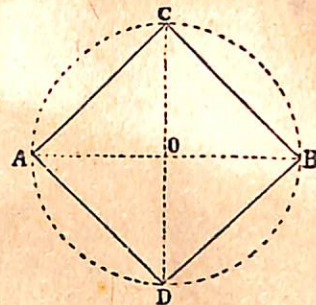


Fig. 287

meiro; as extremidades A, C, B, D , dêsse diâmetros dividem a circunferência em quatro partes iguais.

Ligando-os consecutivamente obtemos o quadrado inscrito.

Observação: — O lado do quadrado inscrito na circunferência é igual ao raio multiplicado pela raiz quadrada de 2, isto é, $l = R \sqrt{2}$, ou, ainda, substituindo $\sqrt{2}$ por 1,4142,

$$l = 1,4142 \times R.$$

Quanto ao apôtoma, basta olhar a figura para ver que é metade do lado.

Problema 104. — Inscrever um hexágono regular e um triângulo equilátero em um círculo.

1.º Hexágono regular:

A divisão da circunferência em seis partes iguais é simples: é bastante aplicar consecutivamente, o próprio

raio sôbre a circunferência. Ligando os pontos de divisão temos o hexágono regular convexo inscrito na circunferência (fig. 288).

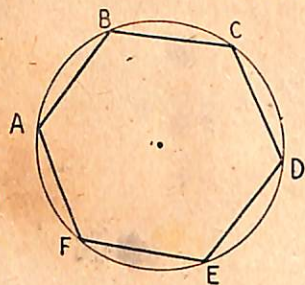


Fig. 288

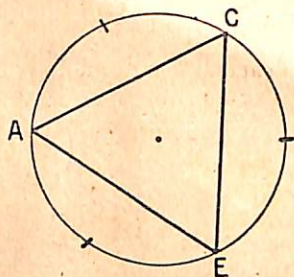


Fig. 289

Observações: — O lado do hexágono inscrito numa circunferência é igual ao raio. Não há hexágono estrelado.

2) Triângulo equilátero:

Para inscrevermos em um círculo um triângulo equilátero, dividimos a circunferência em seis partes e ligamos alternadamente os pontos de divisão; assim, por exemplo: liguemos os pontos A, C e E da figura 289 e acharemos o triângulo equilátero inscrito no círculo.

Observações I — O lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência é igual ao raio multiplicado pela raiz quadrada de 3

$$l = R \sqrt{3}$$

ou, ainda, sendo $\sqrt{3} = 1,732$

$$l = 1,732 \times R.$$

II. — A altura é igual a três meios do raio.

III. — O apótema é igual à metade do raio.

Problema 105. — Inscrever em um círculo um pentágono regular convexo.

Tracemos um diâmetro AB (fig. 290). Determinemos o meio M, da semi-circunferência AMB.

Tomemos o meio, P, do raio OA. Do ponto P como centro e com o raio igual a MP determinemos o ponto L, o qual, ligado ao ponto M nos dá o lado do pentágono regular inscrito no círculo O.

Apliquemos sôbre a circunferência, a partir de B, duas vezes a medida LM para um e para outro lado; liguemos consecutivamente os pontos de divisão da circunferência e teremos o pentágono.

Pentágono estrelado. — Podemos traçar um pentágono regular estrelado, o qual se obtém ligando alternadamente os pontos da divisão da circunferência em 5 partes iguais. (Veja fig. 278).

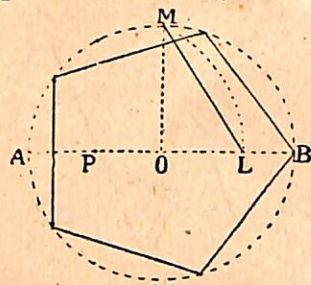


Fig. 290

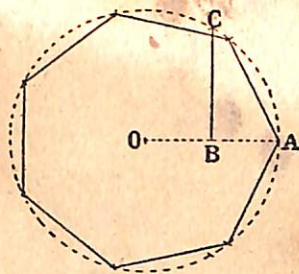


Fig. 291

Problema 106. — Inscrever em um círculo um heptágono regular convexo.

Tracemos um raio OA (fig. 291). Levantemos pelo meio do raio uma perpendicular BC até encontrar a circunferência. A distância do pé da perpendicular ao ponto em que ela encontra a circunferência será o lado do heptágono regular inscrito.

Apliquemos a partir de A, sôbre a circunferência, três vezes a medida BC, seguidamente, para um e para outro lado. Liguemos consecutivamente os pontos de divisão (*).

(*) Esta construção não é exata; foi obtida aproximadamente, dada a impossibilidade de se dividir a circunferência em sete partes iguais só com auxílio de régua e compasso.

Heptágonos estrelados. — Há 2 heptágonos regulares estrelados que se obtêm ligando os pontos de divisão da circunferência em 7 partes iguais de 2 em 2 e de 3 em 3, (veja figs. 279 e 280 da pag. 129).

Problema 107. — *Inscriver em um círculo o octógono regular convexo.*

Dividamos a circunferência em 4 arcos iguais e depois cada um destes arcos ao meio. Fica a circunferência dividida em 8 partes iguais. Ligando consecutivamente os pontos de divisão temos o octógono regular convexo inscrito (fig. 292),

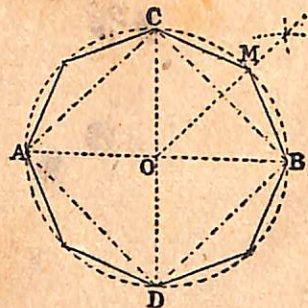


Fig. 292

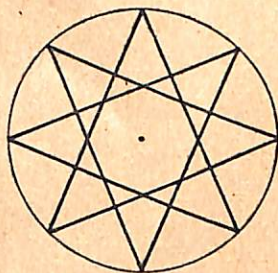


Fig. 293

Octógono estrelado. — Só se pode construir um octógono regular estrelado, que se obtêm ligando de 3 em 3 os pontos de divisão da circunferência em 8 partes iguais (fig. 293).

Problema 108. — *Inscriver em um círculo o eneágono regular convexo.*

Tracemos dois diâmetros perpendiculares (fig. 294). Com o centro em B e com o mesmo raio (OB) descrevamos um arco OG; com o centro em A e com o raio igual à distância AG, descrevamos um arco GC até encontrar o prolongamento do diâmetro EE. Fazendo centro no ponto C e com raio igual a AC ou BC tracemos o arco BD. A distância DF será o lado do eneágono regular inscrito.

Reproduzamos sôbre a circunferência, e a partir do ponto F, a medida DF, quatro vezes seguidamente para cada lado e liguemos consecutivamente os pontos obtidos (*).

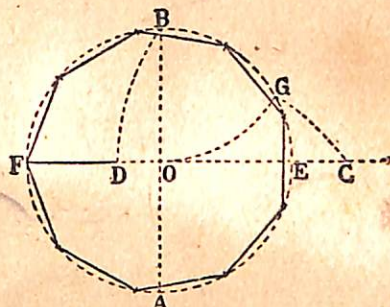


Fig. 294

Eneágonos estrelados. — São dois os eneágonos regulares estrelados que se podem traçar e para isso li-

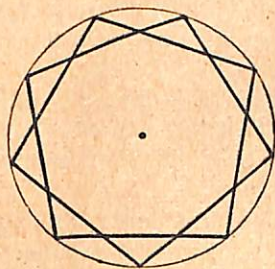


Fig. 295

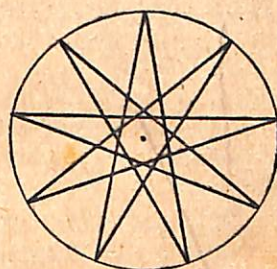


Fig. 296

gam-se de 2 em 2 e de 4 em 4 os pontos de divisão da circunferência em 9 partes iguais (figs. 295 e 296).

(*) Esta construção não é exata; foi obtida aproximadamente, visto não se poder dividir a circunferência em nove partes iguais só com régua e compasso.

Problema 109. — *Inscriver em um círculo o decágono regular convexo.*

Tracemos um diâmetro AB (fig. 297). Determinemos o meio da semi-circunferência AMB .

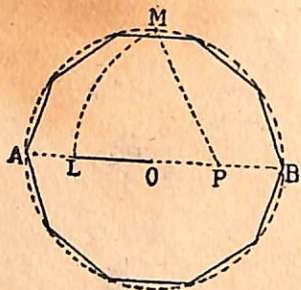


Fig. 297

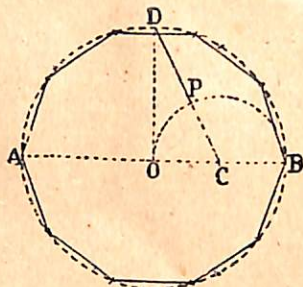


Fig. 298

Tomemos o meio (P) do raio OB ; a partir do ponto P , marquemos no diâmetro a distância PL igual a PM . A distância OL será o lado do decágono regular convexo inscrito.

Apliquemos sobre a circunferência, e a partir dos pontos A e B , a distância OL duas vezes seguidamente para cada lado; liguemos consecutivamente esses pontos de divisão.

Outra solução. — Tracemos um diâmetro AB (figura 298) e o raio OC perpendicular ao mesmo diâmetro.

Dividamos OB ao meio e liguemos C a D .

Centro em C e raio igual a CB determinemos o ponto P .

DP é o lado do decágono regular convexo inscrito.

Decágono estrelado — Só há um decágono estrelado que se obtém ligando de 3 em 3 os pontos da divisão da circunferência em 10 partes iguais (fig. 299).

Problema 110. — *Inscriver em um círculo um hendecágono regular convexo.*

Tracemos o diâmetro AB (fig. 300). Tomemos o meio da semi-circunferência ACB e também do raio OB . Unamos C ao ponto D e dividamos CD ao meio.

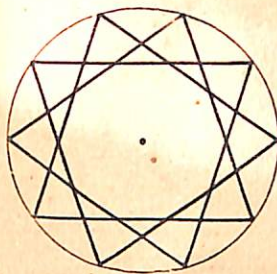


Fig. 299

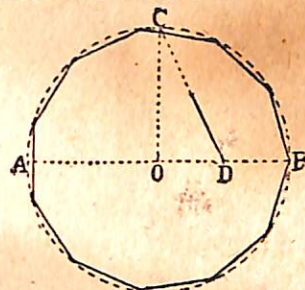


Fig. 300

Com o compasso apliquemos seguidamente a metade de CD , cinco vezes de cada lado, a partir de B , e depois de ligados os pontos de divisão, teremos o hendecágono regular inscrito (*).

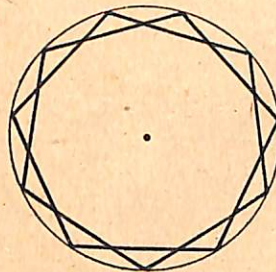


Fig. 301

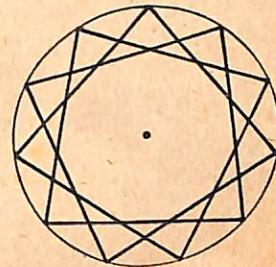


Fig. 302

Hendecágonos regulares estrelados. — Podemos traçar 4 hendecágonos regulares estrelados, ligando de 2 em 2, de

(*) Esta construção também foi obtida aproximadamente, visto não ser possível dividir a circunferência em 11 partes iguais com auxílio de régua e compasso.

3 em 3, de 4 em 4, de 5 em 5, os pontos da divisão da circunferência em 11 partes iguais (figs. 301 a 304).

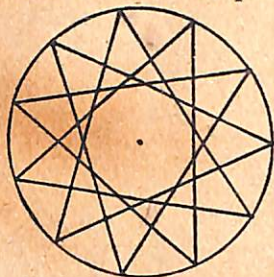


Fig. 303

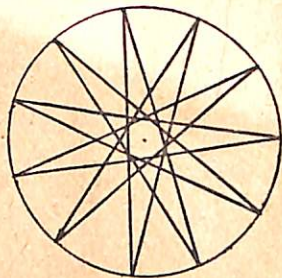


Fig. 304

Problema 111. — *Inscriver em um círculo um dodecágono regular convexo.*

Descrivamos uma circunferência e tracemos dois diâmetros AB e CD perpendiculares entre si (fig. 305).

Centro em cada das extremidades dos diâmetros e com o mesmo raio da circunferência determinemos os pontos: 1 e 2 da extremidade A ; 3 e 4 de B ; 5 e 6 de C e 7 e 8 de D .

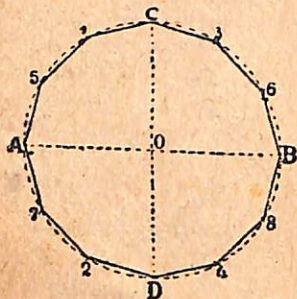


Fig. 305

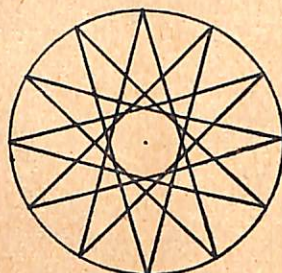


Fig. 306

A circunferência ficou dividida em 12 partes iguais; liguemos consecutivamente esses pontos e teremos o dodecágono regular convexo inscrito.

Dodecágono estrelado: — Só há uma espécie de dodecágono regular estrelado; aquele que se obtém li-

gando de 5 em 5 os pontos da divisão da circunferência em 12 partes iguais (fig. 306).

Problema 112. — *Inscriver em um círculo um pentadecágono regular convexo.*

Descrivamos uma circunferência e determinemos o lado do decágono regular inscrito. MN é o lado do decágono (fig. 307).

A partir de um ponto qualquer A , apliquemos a medida AR igual ao raio e $AP = MN$.

A corda PR é o lado do pentadecágono regular inscrito; apliquemo-la pois a partir do ponto C , sôbre a circunferência sete vezes de cada lado, e liguemos consecutivamente os pontos de divisão.

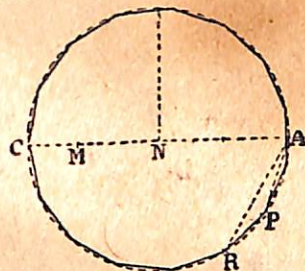


Fig. 307

Pentadecágonos regulares estrelados. — Podemos construir 3 espécies de pentadecágonos regulares ligando de 2 em 2, de 4 em 4 e de 7 em 7 os pontos da divisão da circunferência em 15 partes iguais.

Problema 113. — *Traçar um pentágono regular convexo conhecendo-se o lado.*

Seja AB o lado (fig. 308).

Façamos um ângulo de 108° na extremidade B e apliquemos $BC = AB$.

Façamos passar perpendiculares pelo meio de AB e de BC .

Centro em O e com um raio a OA marquemos D e E . Liguemos entre si A e E , E e D , D e C .

$ABCDE$ é o polígono pedido.

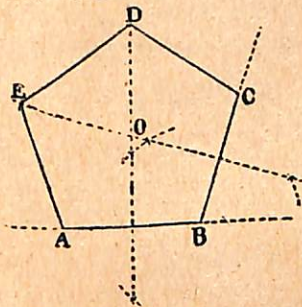


Fig. 308

Problema 114. — *Traçar um heptágono regular convexo conhecendo-se o lado.*

Tracemos um heptágono convexo regular $Abcdefg$ inscrito em um círculo qualquer (fig. 309).

Tomemos um vértice como ponto de partida, A por exemplo, e prolonguemos os lados do ângulo.

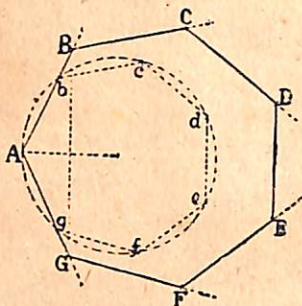


Fig. 309

Façamos AB e AG iguais ao lado fornecido.

De B tiremos uma paralela a bc e de G , outra a gf .

Marquemos em BC e GF a medida AB .

De C tracemos uma paralela a cd e de F , outra a fe .

Façamos CD e EF iguais a AB e finalmente liguemos D a E .

$ABCDEFG$ é o heptágono regular pedido.

Problema 115. — Traçar um octógono regular dado o lado.

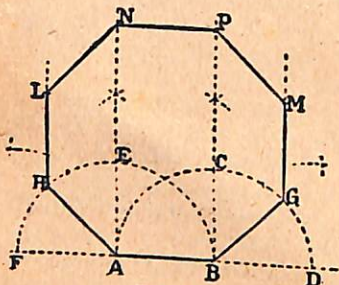


Fig. 310

Seja AB o lado (fig. 310).

Prolonguemo-lo em ambos os sentidos e levantemos perpendiculares por A e B .

Centro em cada um desses pontos e com o mesmo raio AB , descrevamos as duas semi-circunferências que determinam os pontos C , D , E e F .

Tiremos as bissetrizes dos ângulos CBD e FAE , as quais assinalam os pontos G e H .

Por G e H tracemos paralelas a BC e façamos HL e GM iguais a AB .

De L e de M , com centros, e com um raio $= AB$, marquemos N e P .

Tracemos a linha quebrada $LNPM$ e completaremos o octógono $ABGMPNLR$ pedido.

EXERCÍCIOS

- 1 — Inscrever um quadrado num círculo de 3cm de raio.
- 2 — Trace um hexágono regular com 2,4cm de lado.
- 3 — Inscreva um triângulo equilátero num círculo de 2,2cm de raio.
- 4 — Num círculo de 5,8cm de diâmetro inscreva um pentágono regular convexo e outro estrelado.
- 5 — Inscreva um heptágono regular convexo num círculo de 2,8cm de raio.
- 6 — Construa um octógono regular convexo num círculo de 6cm de diâmetro.
- 7 — Inscreva um eneágono regular convexo em um círculo de 2,5cm de raio.
- 8 — Construa o decágono regular convexo ao qual está circunscrito um círculo de 5,6cm de diâmetro.
- 9 — Num círculo de 3cm de raio inscreva um hendecágono regular convexo.
- 10 — Inscreva um pentadecágono regular convexo num círculo de 2,7cm de raio.
- 11 — Trace um pentágono regular convexo de 14cm de perímetro.
- 12 — Trace um heptágono convexo de 17,5cm de perímetro.
- 13 — Construir um octógono regular convexo de 2,5cm de lado.

CAPÍTULO IX

Simetria no plano

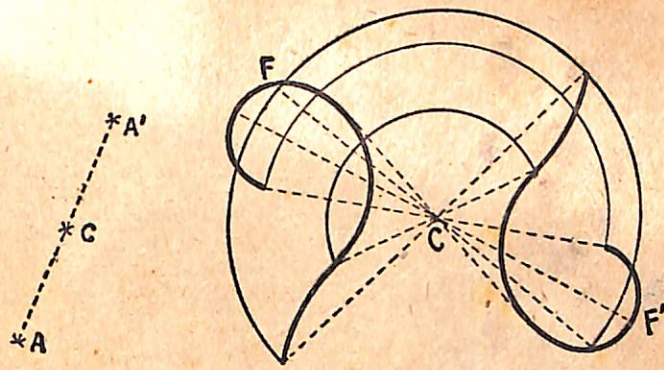
A simetria de figuras num plano pode ser em relação a um ponto (*simetria central*) ou em relação a uma reta (*simetria axial*).

Simetria central. — Dois pontos, A e A' , são simétricos em relação a um terceiro, C , quando este é o meio do segmento AA' , que liga os dois primeiros. Diz-se, então, que C é o *centro de simetria* e que A' é o *simétrico* de A .

A própria definição mostra como construir o simétrico de um ponto dado, A , em relação ao centro C : basta ligar o ponto A ao centro C , prolongar o segmento e tomar, a partir de C , uma distância CA' igual a AC .

Duas figuras F e F' se dizem *simétricas em relação a um centro* quando cada ponto de uma encontra na outra o seu simétrico em relação ao mesmo centro. Os pontos que se correspondem se chamam *homólogos*.

Dada uma figura, pode-se obter a sua simétrica em relação a um centro, construindo esta ponto por ponto. Outro modo de obtê-la seria imprimir à figura dada uma rotação de 180 graus.



Os pontos A e A' são simétricos em relação a C .

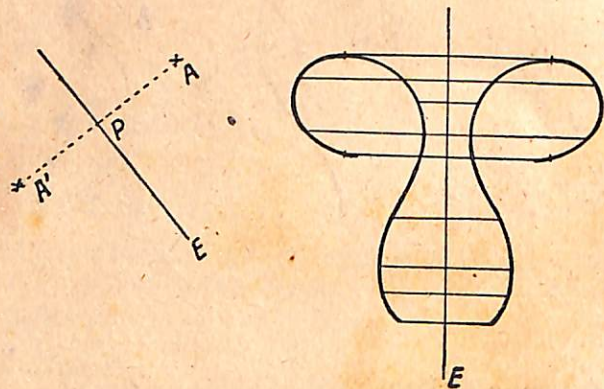
F e F' são figuras simétricas em relação a C .

De uma forma ou de outra, verificamos que, na simetria central: I) a figura simétrica de uma reta é outra reta paralela à primeira; II) a figura simétrica de uma semi-reta é outra semi-reta paralela, mas de sentido oposto; III) a figura simétrica de um segmento de reta é outro segmento retilíneo igual; IV) a figura simétrica de um ângulo é outro ângulo igual.

Simetria axial. — Dois pontos, A e A' são simétricos em relação a uma reta, E , quando esta é

a mediatriz do segmento (AA') que liga os dois pontos. Diz-se, então, que a reta E é um *eixo de simetria* e que A' é o *simétrico* de A .

Dados um ponto A e uma reta E , pode-se facilmente obter o ponto simétrico do primeiro em relação à reta: basta tirar de A uma perpendicular (AP) sobre E , prolongando-a, e a partir do pé da perpendicular tomar uma distância (PA') igual a AP .



Os pontos A e A' são simétricos em relação à reta E .

Figuras simétricas em relação a um eixo.

Duas figuras se dizem *simétricas em relação a um eixo* quando cada ponto de uma encontra na outra o seu simétrico em relação ao mesmo eixo.

Evidentemente pode-se obter a figura simétrica de outra em relação a um eixo construindo-a ponto por ponto; mas é fácil de ver que a simé-

trica também pode ser obtida rebatendo a figura dada em torno do eixo.

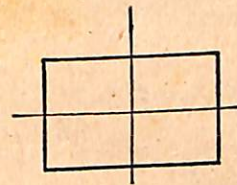
Verifica-se, então, que, em relação a um eixo: I) a figura simétrica de uma reta é outra reta; II) a figura simétrica de uma semi-reta é outra semi-reta; III) a simétrica de um segmento retilíneo é outro segmento igual; IV) a figura simétrica de um ângulo é outro ângulo igual.

SIMETRIA ABSOLUTA

Suponhamos, agora, uma figura em que os pontos sejam, dois a dois, simétricos em relação



O triângulo isósceles tem um eixo de simetria.

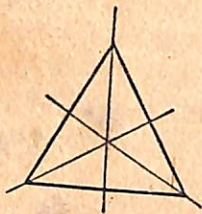


O retângulo tem dois eixos de simetria.

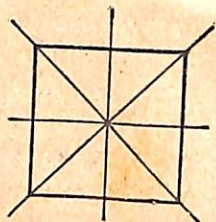
à mesma reta. Dizemos, neste caso, que a *figura tem simetria axial* ou que ela é *simétrica* em relação àquele eixo.

Uma figura pode ter um eixo de simetria (triângulo isósceles), dois eixos de simetria (o re-

tângulo), três eixos (o triângulo equilátero), quatro eixos (o quadrado) e, de um modo geral, todo polígono regular tem tantos eixos de simetria quan-

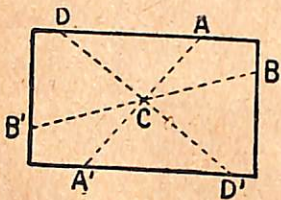


O triângulo equilátero tem 3 eixos de simetria

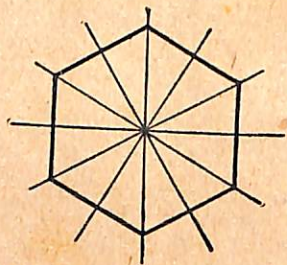


O quadrado tem 4 eixos de simetria.

tos lados. Assim, o pentágono tem cinco eixos de simetria, o hexágono tem seis, etc. A circunferência de círculo tem uma infinidade de eixos de simetria, que são os diâmetros.



O retângulo é uma figura simétrica em relação a um centro.



O hexágono regular convexo tem seis eixos e um centro de simetria.

Do mesmo modo, si os pontos de determinada figura são, dois a dois, simétricos em relação ao

mesmo ponto, dizemos que a figura é *simétrica* em relação a este ponto, que ela tem *centro de simetria*, ou, ainda, que ela tem *simetria central*.

Dentre as figuras geométricas que têm centro de simetria podemos citar: retângulo (interseção das diagonais), o quadrado, o círculo e todos os polígonos regulares de número par de lados.

QUESTIONÁRIO

- 1 — Como pode ser a simetria no plano?
- 2 — Quando é que dois pontos são simétricos em relação a um terceiro?
- 3 — Que são figuras simétricas em relação a um centro?
- 4 — Qual a simétrica de uma reta em relação a um ponto? e a de uma semi-reta? de um segmento retilíneo? de um ângulo?
- 5 — Quando é que se diz que uma figura é simétrica em relação a um ponto?
- 6 — Quando é que dois pontos se dizem simétricos em relação a uma reta? e como se chama, então, esta reta?
- 7 — Quando é que duas figuras se dizem simétricas em relação a um eixo?
- 8 — Dados um ponto e uma reta, como construir o simétrico do ponto em relação à reta?
- 9 — Na simetria axial, qual é a simétrica de uma reta? de uma semi-reta? de um segmento retilíneo? de um ângulo?
- 10 — Que é uma figura simétrica em relação a um eixo?

- 11 — Cite uma figura geométrica que apresente um eixo de simetria, com dois, três, quatro, oito eixos de simetria e diga, em cada caso quais são esses eixos.
- 12 — Há alguma figura geométrica com uma infinidade de eixos de simetria? Qual é?
- 13 — Que figuras geométricas conhece que tenham centro de simetria? Em cada uma delas onde está esse centro?

CAPÍTULO X

Linhas proporcionais

O quociente, que obtemos dividindo os números que exprimem duas grandezas medidas com a mesma unidade, chama-se *razão*.

Sejam essas grandezas dois segmentos de reta, AB e CD , e tomemos para unidade comum o centímetro. Se o primeiro medir 8cm e o segundo medir 4cm, a razão de AB para CD é $\frac{8}{4}$ ou 2; inversamente, a razão de CD para AB é $\frac{4}{8}$ ou $\frac{1}{2}$.

O primeiro termo de uma razão chama-se *an-
tecedente* e o segundo, *consequente*.

Números proporcionais. — Dados os números a, b, c, d, e, \dots que correspondam a outros $a', b', c', d', e', \dots$ dizemos que eles são proporcionais si pudermos escrever

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \dots$$

Assim, os números 3, 4, 7, 10 e 15 são proporcionais a 9, 12, 21, 30 e 45, porque podemos escrever

$$\frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{7}{21} = \frac{10}{30} = \frac{15}{45}$$

Com efeito, simplificando, veremos que qual-
quer das razões acima é igual a $\frac{1}{3}$.

Do mesmo modo, dados m segmentos de reta
(AB , CD , EF , etc.) êles são proporcionais a outros
 m segmentos ($A'B'$, $C'D'$, $E'F'$, etc), si os números
que medirem êsses segmentos forem proporcionais.
Podemos, então, escrever

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'} = \dots$$

Proporção. — Quando se consideram apenas
quatro números tais que a razão de dois dêles é
igual à razão dos outros dois, a expressão da igual-
dade dessas razões é uma *proporção*. Exemplo:

$$\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$$

é uma proporção e lê-se: 3 está p.^a. 7 como 12 p.^a. 28.

Do mesmo modo, si a razão de dois segmentos
de reta fôr igual à razão de dois outros segmentos,

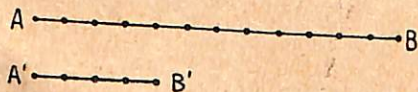


Fig. 311

as duas razões, reunidas pelo sinal de igualdade,
formam uma proporção. Exemplo: AB mede 12 e

$A'B'$ mede 4 (fig. 311); CD mede 15 e $C'D'$ mede 5
(fig. 312). A razão de AB para $A'B'$ é $\frac{12}{4}$ ou 3; a

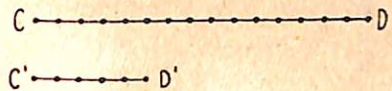


Fig. 312

razão de CD para $C'D'$ é $\frac{15}{5}$ ou 3. Podemos, então,
escrever

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Na Aritmética estudamos que o primeiro e o
último termos da proporção chamam-se *extremos*,
o segundo e o terceiro chamam-se *meios*.

A propriedade fundamental das proporções é:
*em toda proporção o produto dos meios é igual ao
produto dos extremos*

Exemplo: na proporção

$$\frac{6}{5} = \frac{12}{10}$$

tem-se: $5 \times 12 = 10 \times 6$.

Esta propriedade permite calcular um termo
qualquer da proporção quando os outros três são
conhecidos. Assim, dada a proporção

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{x}$$

em virtude da propriedade fundamental, podemos escrever

$$2 \times x = 6 \times 4$$

donde se pode tirar o valor de x

$$x = \frac{6 \times 4}{2} = 12$$

Concluimos, então, que um extremo é igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo.

Do mesmo modo, na proporção $\frac{3}{x} = \frac{9}{12}$ tem-se

$$x = \frac{3 \times 12}{9} = 4$$

isto é, um meio da proporção é igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio.

Em Aritmética demonstra-se, ainda, que: *numa série de razões iguais, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes como qualquer antecedente para o respectivo consequente.*

Assim, tomando-se varias razões iguais

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15}$$

somando-se os antecedentes e separadamente os consequentes, obtém-se, dividindo a primeira soma pela segunda, a razão $\frac{28}{42}$ que é igual a qualquer das razões dadas. Com efeito, simplificando as razões dadas e a que foi obtida, verificamos que todas são iguais a $\frac{2}{3}$.

Média proporcional. — A proporção cujos meios são iguais chama-se *continua* e, nesse caso, o valor do meio é a *média proporcional* (ou geométrica) entre os dois números que servem de extremos.

É facil mostrar que *a média geométrica entre dois números é igual à raiz quadrada do produto deles.*

Seja a proporção continua

$$\frac{p}{m} = \frac{m}{q}$$

De acôrdo com a propriedade fundamental tem-se

$$m \times m = p \times q \quad \text{ou} \quad m^2 = pq$$

donde

$$m = \sqrt{p \times q}$$

Conclusão: *para achar a média proporcional ou geométrica entre dois números basta extrair a raiz quadrada do produto desses números.*

Exemplo: a média geométrica entre 4 e 9 é

$$\sqrt{4 \times 9} = 6$$

Quarta proporcional — Chama-se *quarta proporcional* de três números, o quarto termo de uma proporção da qual os três primeiros termos são os números dados. Portanto, si quisermos determinar a quarta proporcional dos números 4, 7 e 6, teremos de calcular o valor de x na proporção

$$\frac{4}{7} = \frac{6}{x}$$

A quarta proporcional de 4, 7 e 6 é

$$x = \frac{7 \times 6}{4} = 10,5.$$

Algumas propriedades relativas a segmentos de reta proporcionais. — Dentre as propriedades que se referem à proporcionalidade de segmentos de reta em determinadas figuras, citemos algumas de que nos utilizaremos na solução dos problemas deste capítulo e dos seguintes:

a) Si um feixe de paralelas determinar sobre uma reta que o corta (*transversal*) segmentos iguais entre si, determinará sobre qualquer outra transversal segmentos também iguais entre si.

Assim, na fig. 313 sendo $AB = BC = CD$, também $A'B' = B'C' = C'D'$.

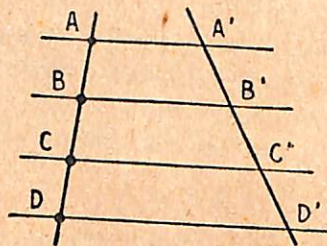


Fig. 312

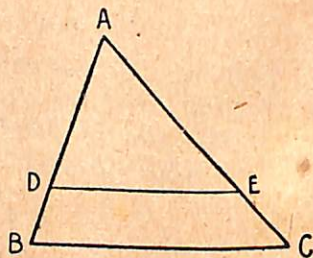


Fig. 314

b) Toda paralela a um lado do triângulo divide os outros dois em partes proporcionais. Na fig. 314, como DE é paralela a BC , tem-se

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

c) Um feixe de paralelas determina sobre duas retas que o cortam (*transversais*) segmentos proporcionais. Exemplo: na fig. 315 tem-se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$$

d) A perpendicular traçada de um ponto da circunferência sobre um diâmetro é média proporcional entre os segmentos que determina sobre esse diâmetro.

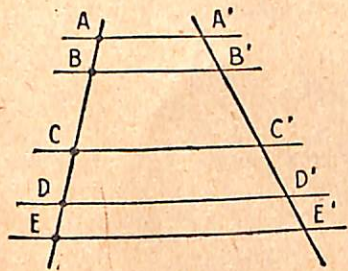


Fig. 315

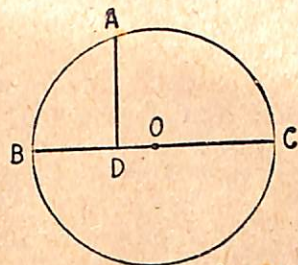


Fig. 316

Na fig. 316, AD é média proporcional entre DB e DC .

QUESTIONÁRIO

1. Que é razão de dois números? e razão de dois segmentos?
2. Quando se diz que m números dados são proporcionais a outros?
3. Que é proporção?
4. Como se denominam os termos de uma proporção?
5. Qual é a propriedade fundamental das proporções?

6. Que é uma quarta proporcional e como se pode determiná-la?
7. Enuncie a propriedade relativa a uma série de razões iguais.
8. Que é média proporcional ou geométrica entre dois números?
9. Se traçarmos uma paralela a um lado de um triângulo, como vai ela dividir os outros dois lados?
10. A perpendicular baixada de um ponto da circunferência sobre um diâmetro o que é dos segmentos determinados por ela neste diâmetro?

PROBLEMAS

Problema 116. — *Dividir um segmento de reta em partes iguais.*

Seja o segmento AB (fig. 317), que queremos dividir em cinco partes iguais.

Do ponto A tracemos uma semi-reta AC que forme com AB um ângulo qualquer. A partir do ponto A e sobre

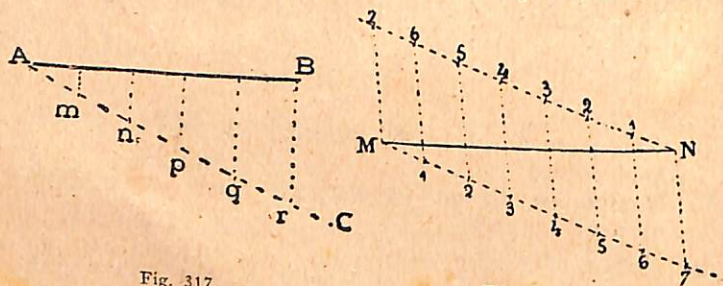


Fig. 317

AC marquemos cinco distâncias iguais Am , mn , np , pq e qr . Liguemos o ponto r ao ponto B e pelos pontos

q , p , n , m tracemos paralelas a rB , as quais vão dividir AB em cinco partes iguais.

Outra solução. — Seja MN o segmento que desejamos dividir em 7 partes iguais (fig. 318).

Formemos na extremidade M um ângulo qualquer e em N outro igual a M .

Apliquemos, a partir de M e de N , sobre cada uma das semi-retas que formam com MN os ângulos, sete distâncias iguais entre si e liguemos depois $M-7, 1-6, 2-5, 3-4, 4-3, 5-2, 6-1$ e $7-N$.

Estes segmentos são todos paralelos e dividem MN em 7 partes iguais.

Problema 117. — *Dividir um segmento de reta em partes proporcionais a outros segmentos dados.*

Seja AB que queremos dividir em partes proporcionais aos segmentos m , n , e p (fig. 319).

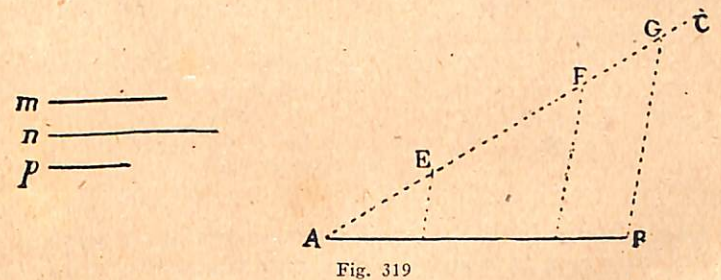


Fig. 319

Do ponto A tracemos uma semi-reta AC que forme com AB um ângulo qualquer. Sobre AC e a partir de A marquemos $AE = m$, $EF = n$ e $FG = p$; unamos G a B e dos pontos E e F tracemos paralelas a GB . Estas paralelas dividem AB em partes proporcionais às distâncias m , n e p , porque se duas retas cortam um feixe de para-