

2-1/24

25-2-26

Missouri & Louisiana

NOÇÕES
DE
GEOMETRIA PRÁTICA

GEOMETRIA
DIGITALIZADO

GEOMETRIA
DIGITALIZADO

Olavo FREIRE

NOÇÕES

DE

Geometria Prática

39.ª Edição inteiramente refundida e adaptada
ao uso das escolas profissionais e técnicas

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

166, RUA DO OUVIDOR, 166 — RIO DE JANEIRO

S. PAULO

BELO HORIZONTE

292, Rua Libero Badaró

Rua Rio de Janeiro, 655

1942

Ao dileto Mestre e Amigo

Dr. J. J. de MENESES VIEIRA,

em testemunho de gratidão

O. D. C.
o
Olavo

Outubro — 1894

OLAVO,

Teu livrinho — *Primeiras noções de Geometria* — é um bom instrumento de ensino e uma prova da conquista que vão fazendo entre nós os sãos princípios pedagógicos.

Conseguiste libertar-te dos velhos moldes quanto ao método, aos exemplos, ao estilo e ao *sestro* de arranjar compêndios por empreitada e *à la minute*: aceita meus sinceros parabens!

Sinto, entretanto, que tivesses em um ponto transigido com a rotina (1), preferindo problemas abstratos às questões práticas, cuja resolução se oferece todos os dias na vida social.

Receaste por ventura os sarcasmos de que foi vítima o excelente M. Desargues, o consciencioso propagandista da geometria aplicada às artes!

Que te importaria semelhante afronta?

Aos teus censores responderias com as textuais palavras do ilustre Clairaut em 1741:

“Qu’Euclide se donne la peine de démontrer que les cercles qui se coupent n’ont pas le même centre, qu’un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés de cet autre, on ne sera pas surpris.

(1) Não transigi em absoluto porque pretendo publicar série de problemas de caráter essencialmente prático.

“La géométrie avait à convaincre des sophistes obstinés qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes. Il fallait donc alors que la géométrie eût, comme la logique, des raisonnements pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance est aujourd'hui en pure perte et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et dégoûter les lecteurs.”

E na verdade, meu amigo, *la géométrie du bon sens*, a geometria realmente descritiva e intuitiva é a única que deve ter o direito de entrada nas escolas primárias.

Este é o parecer do teu velho mestre e amigo dedicado.

Meneses Vieira.

N. C. — 26 Outubro 1894.

NOÇÕES

DE

GEOMETRIA PRÁTICA

CAPÍTULO I

Corpo. — Volume. — Superfície. — Área. —
Linha. — Ponto. — Circunferência.

CORPO

Todo corpo ocupa uma certa porção do espaço. É essa porção do espaço ocupada pelos corpos que interessa à Geometria, não importando absolutamente a substância de que são formados, a côr, peso, temperatura, etc. A Geometria só se preocupa com a *forma*, o *tamanho* e a *posição* do corpo.

VOLUME

A quantidade de espaço ocupada por um corpo é o seu *volume*.

Dois corpos podem ter formas muito diversas e terem, entretanto, o mesmo volume.

Basta ver que, com a mesma quantidade de uma substância pastosa (massa de vidraceiro, por ex.), podemos modelar corpos com as formas mais diferentes.

SUPERFÍCIE

A parte externa de um corpo e que o limita, separando-o do espaço, é chamada **superfície** do corpo.

Quando pegamos um corpo qualquer (um livro, por ex.) é na superfície dêsse corpo que tocamos; quando o operário forra, uma parede, é na sua superfície que ele cola o papel. Uma folha de papel finissima (mais fina que se puder imaginar) dá idéa aproximada de uma superfície. Dizemos aproximada porque uma superfície não tem espessura, ao passo que a folha de papel, por mais fina que seja, tem sempre alguma espessura.

Chama-se **área** à medida de uma superfície.

As superfícies dos corpos podem ser *planas* ou *curvas*.



Fig. 1 — O cubo é um corpo limitado por superfícies planas.

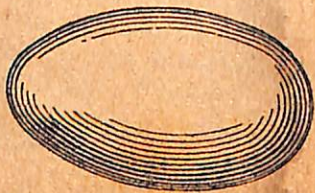


Fig. 2 — O ovo é um corpo limitado por superfície curva.

As superfícies muito bem alisadas de uma prancheta, da tábua de uma mesa, de um espelho comum, são planas.

O marceneiro emprega o instrumento chamado *plaina* (fig. 3) para obter uma superfície plana.

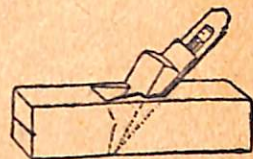


Fig. 3 — Uma plaina

As superfícies do ovo, de uma laranja, de uma bola, são curvas.

Podemos supor uma superfície plana prolongada quanto queiramos em todas as direções; a superfície plana assim estendida chama-se um *plano*.

Figura plana — Quando todos os pontos de uma figura pertencem ao mesmo plano, diz-se que ela é uma *figura plana*.

LINHA

Um fio muito fino, um traço a lapis sobre uma folha de papel, dão-nos a imagem aproximada, do que se chama **linha**. Dizemos aproximada, porque, por melhor que os façamos, haverá sempre neles uma espessura ou uma largura e a linha considerada geometricamente não tem espessura nem largura, mas só comprimento. Entretanto, para representarmos a linha, deslocamos sobre uma superfície uma ponta, seja de lapis, giz, aço, carvão, etc.

A linha pode também ser considerada como o encontro ou intersecção de duas superfícies.

Assim, por exemplo, as arestas de um cubo são linhas que resultam da intersecção de duas superfícies planas.

PONTO

As extremidades de uma linha são **pontos**: a intersecção de duas linhas é um **ponto**.

O **ponto** geométrico não tem dimensões, isto é, não tem *comprimento*, *largura* nem *espessura*; entretanto representamo-lo por um sinal deixado pela ponta do lapis, da pena ou do giz em uma superficie. Também representamos o ponto pela intersecção de dois pequenos traços.



Fig. 4 — Como se representa um ponto.

Designamos um ponto por meio de uma letra; assim, por exemplo: *ponto A*, *ponto B*, *ponto P*, (fig. 4).

LINHA RETA

Linha reta — A mais simples de todas as linhas é a *linha reta* da qual um fio (fig. 5) bem



Fig. 5 — Um fio bem esticado dá idéia de uma linha reta.

esticado dá-nos idéia aproximada. Em vez de *linha reta*, diz-se também, abreviadamente, *uma reta*.



Fig. 6 — Uma régua.

O instrumento usado para auxiliar o traçado das retas chama-se **régua** (fig. 6).

O carpinteiro e o pintor servem-se algumas vezes, para traçar uma reta, de um cordel coberto



Fig. 7

de giz, fixando-o bem esticado pelas extremidades, levantando-o depois pelo meio e largando-o de repente (fig. 7).

Antes de usar uma régua, devemos verificar si ela não tem defeito. Para isto, colocamo-la sobre o papel e traçamos uma linha apoiando a ponta do lapis contra a aresta da régua; depois, viramos a régua, fazendo-a girar em torno do traço feito e riscamos novamente: o segundo traço deve coincidir com o primeiro.

Propriedade característica da linha reta — Por dois pontos dados pode-se fazer passar uma linha reta e só uma.

De acôrdo com esta propriedade, designamos uma reta por meio de duas letras colocadas em

dois quaisquer de seus pontos. Assim, quando dizemos — a reta AB — estamos designando a reta única que passa pelos pontos A e B (fig. 8).



Fig. 8 — A reta AB

Da propriedade característica da reta se deduz, ainda, que duas retas distintas não podem ter mais de um ponto comum ou, o que é o mesmo, que duas retas só se podem cortar em um ponto.

Finalmente, a reta nos dá sempre a menor distância entre dois quaisquer de seus pontos.

Posições da reta — A linha reta, segundo a direção que segue, pode estar na posição *vertical*, *horizontal* ou *inclinada*.

A reta está na posição *vertical* quando segue a direção do *fio a prumo* (fig. 9).

O fio a prumo compõe-se geralmente de um cordel, na extremidade do qual se acha suspenso um corpo pesado.

O fio a prumo é usado pelos pedreiros para verificar a verticalidade de uma parede.

A reta está em posição *horizontal* quando segue a direção da superfície das águas tranquilas.

Assim, por exemplo, se conseguirmos colocar sobre a superfície d'água um fôforo e se este aí se conservar, ficará em posição horizontal.



Fig. 9—Fio a prumo.

O instrumento que serve para se verificar se uma reta ou uma superfície está horizontal chama-se *nível* (fig. 10).



Fig. 10 — Um nível.

A reta que não estiver em posição vertical, nem horizontal, está em posição *inclinada*.

A reta é ilimitada — Um ponto que se move sobre uma reta AB pode percorrê-la em dois sentidos: de A para B ou de B para A (fig. 7). Assim é que, para traçar essa reta, o lapis pode deslocar-se sobre o papel da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita. Concebe-se então que uma reta pode ser prolongada indefinidamente nos dois sentidos. Diz-se, por isso, que a *reta é ilimitada*.

Semi-reta e segmento de reta — Marquemos sobre uma reta indefinida um ponto O ; ela fica dividida em duas porções, cada uma das quais só pode ser prolongada no sentido indicado pela seta correspondente; no outro sentido, cada porção está limitada pelo ponto O . Diz-se que a reta ficou dividida em duas *semi-retas*; o ponto O , além do

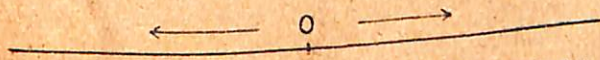


Fig. 11 — O ponto O divide a reta em duas semi-retas.

qual não se pode prolongar a semi-reta, chama-se *origem* da semi-reta (fig. 11).

A porção de reta compreendida entre dois pontos, *A* e *B*, é um **segmento de reta** ou segmento *retilíneo*. Os pontos *A* e *B* são as *extremidades* do segmento. Designa-se um segmento de reta pelas duas letras colocadas em suas extremidades.

Dois segmentos que têm uma extremidade comum chamam-se *consecutivos* (fig. 12). Dois

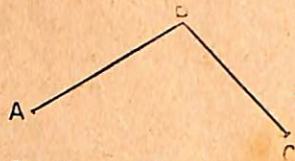


Fig. 12 — Os segmentos *AB* e *BC* são consecutivos.



Fig. 13 — *AB*, *BC*, *CD*, *AC*, *BD*, *AD*, são segmentos co-lineares.

segmentos situados sobre a mesma reta se chamam *co-lineares* (fig. 13).

Já sabemos que a reta nos dá a menor distância entre dois quaisquer de seus pontos. Por isso, quando falamos na *distância entre dois pontos* (*A* e *B*, por exemplo) é ao segmento retilíneo, (*AB*), que os liga, que nos referimos.

A unidade de comprimento — A medida de um segmento de reta é o seu *comprimento*. A unidade de comprimento é o *metro* (*).

(*) O *metro* é a unidade principal de comprimento e corresponde aproximadamente à décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre. Rigorosamente o metro é a distância, à temperatura de 0°C, entre dois traços gravados sobre uma barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas.

Divide-se o *metro* em decímetros, centímetros e milímetros. O decímetro é a décima parte do *metro*; o centímetro, a centésima parte e o milímetro a milésima parte. 10 *metros* = 1 decâmetro; 100 *metros* = 1 hectômetro; 1000 *metros* = 1 quilômetro.



Fig. 14 — Um metro (tamanho natural)

O *metro* tem geralmente a forma de uma regua chata de madeira, sobre a qual estão marcadas as divisões dos decímetros, centímetros, e, algumas vezes, dos milímetros.

Fabricam-se também *metros dobradiços* (fig. 14) em madeira, osso ou metal; e em fitas de pano, aço ou papel.

No desenho geométrico empregamos o *duplo-decímetro* para medir os segmentos retilíneos.

Linha quebrada ou poligonal — *Linha quebrada* ou *poligonal* é a figura formada por vários segmentos de reta consecutivos mas não co-lineares. Cada segmento é um *lado* da linha poligonal (fig. 15).



Fig. 15 — Linha poligonal

LINHA CURVA

Linha curva — A linha que não é reta nem quebrada, isto é, nem reta nem formada de porções de reta, é *curva* (fig. 16).



Fig. 16 — Linhas curvas



Fig. 17 — Linha mista

A linha composta de porções de retas e de curvas chama-se *mista* (fig. 17).

CIRCUNFERÊNCIA

Circunferência — É a curva plana, fechada, que tem todos os seus pontos a igual distância de um ponto do mesmo plano chamado *centro*. O segmento de reta que liga o centro a qualquer ponto da circunferência é um *raio*. Assim, na fig. 18 OA é um raio.

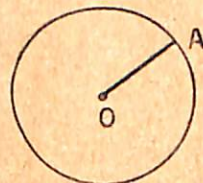


Fig. 18 — OA é um raio de circunferência



Fig. 19 — AB é um diâmetro da circunferência.

O segmento de reta que liga dois pontos da circunferência e passa pelo centro é um *diâmetro*. O diâmetro é, por definição, igual a dois raios (fig. 19).

Evidentemente uma circunferência tem uma infinidade de raios e uma infinidade de diâmetros. A porção de circunferência compreendida entre dois pontos chama-se *arco* de circunferência.

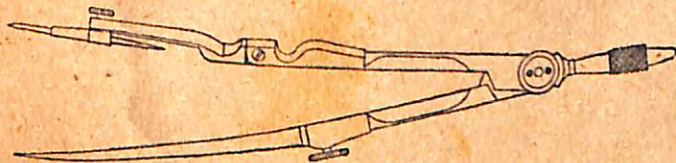


Fig. 20 — Compasso

O traçado de circunferências e de arcos de circunferência é feito com o *compasso* (fig. 20).

Para isto, abrimos o compasso de modo que a distância entre a ponta sêca e a do lapis (ou tiralinhas) preso à outra haste seja igual ao raio da circunferência que se quer traçar; em seguida, fixamos a ponta sêca no centro escolhido e fazemos a outra ponta girar em torno daquela. Quando a ponta móvel voltar ao ponto de partida estará completa a circunferência (fig. 21).



Fig. 21 — Como se traça uma circunferência com o compasso.

Ao ato de fixar a ponta sêca do compasso em determinado ponto chama-se *fazer centro*.

Em um terreno plano, fixamos uma estaca na qual

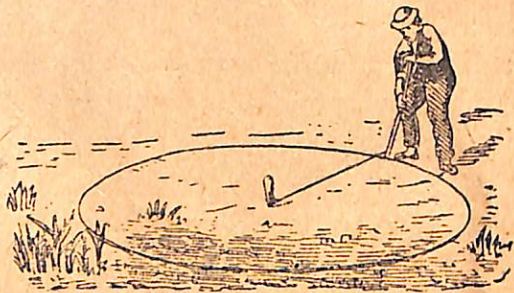


Fig. 22 — Circunferência traçada por um jardineiro

prendemos, por uma das extremidades, um cordel, e na outra extremidade é colocada uma ponteira ou uma vara.

A estaca ocupa o centro, o cordel bem esticado é o raio e a ponteira ou a vara traça a circunferência (fig. 22).

QUESTIONÁRIO

1. Como a Geometria considera os corpos?
2. Que é volume?
3. Que é superfície?
4. Como se chama a medida de uma superfície?
5. Como podem ser as superfícies?
6. Quando se diz que uma figura é plana?
7. Como se representa um ponto?
8. Qual a propriedade característica da linha reta?
9. Como se pode verificar se uma reta está perfeita?
10. Que é semi-reta? e segmento de reta?
11. Como se designa uma linha reta?
12. Quais as posições que uma reta pode ocupar?
13. Que é *fio a prumo*? para que serve?
14. Que é *nível* e para que serve?
15. Que são segmentos consecutivos? e segmentos colineares?
16. Que se entende por *distância* entre dois pontos?
17. Qual a unidade de comprimento e como foi obtida?
18. Que é linha quebrada e que outro nome tem?
19. Que é uma linha curva?
20. Como se pode definir a circunferência?

CAPÍTULO II

Ângulo — Classificação dos ângulos — Soma de ângulos — Ângulos complementares e suplementares.

Ângulo é a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem.

As duas semi-retas são os *lados* do ângulo e a origem comum delas é o *vértice* do ângulo.

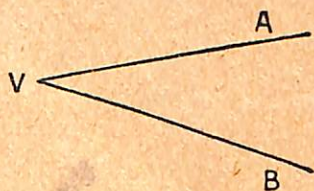


Fig. 23 — Ângulo AVB.

Designa-se um ângulo por três letras colocadas, uma no vértice e uma sôbre cada lado, ou simplesmente por uma letra colocada no vértice, quando, na figura a que pertencer, não houver outro ângulo com o mesmo vértice.

Assim, na fig. 23, podemos dizer: *ângulo V* ou *ângulo AVB*; escrevemos abreviadamente $\angle V$ ou, ainda, $\angle AVB$, tendo o cuidado de, neste ultimo caso, dizer e escrever a letra do vértice entre as outras duas.

A grandeza de um ângulo depende exclusivamente do maior ou menor afastamento de seus lados. O comprimento dos lados de um ângulo nada influe em sua grandeza.

Comparação de dois ângulos — Para comparar dois ângulos, transportamos um sôbre outro, fazendo coincidir os vértices e dois lados, o que é sempre possível. Feito isto, se os outros lados também coincidirem, os dois ângulos são iguais. Em caso contrário, os dois ângulos são desiguais e o que contém o outro é maior. Assim, por exemplo, na figura 24 os ângulos AVB e A'VB' são

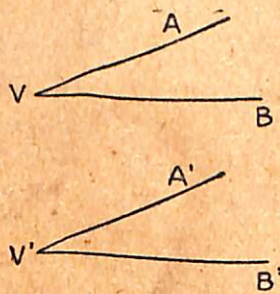


Fig. 24 — Ângulos iguais.

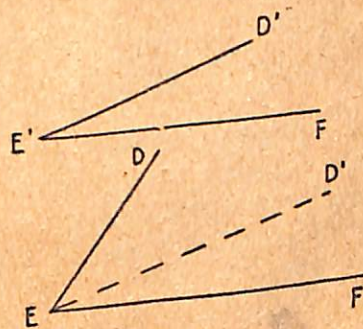


Fig. 25 — Ângulos desiguais

iguais; na fig. 25 os ângulos DEF e D'E'F' são desiguais e DEF é o maior.

Ângulos adjacentes — Dois ângulos que têm o mesmo vértice e estão separados por um lado co-

mum chamam-se *adjacentes*. Na fig. 26 os ângulos *BAC* e *CAD* são adjacentes, pois têm o mesmo vértice

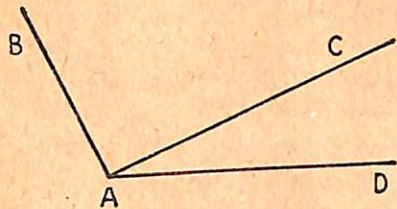


Fig. 26 — Ângulos adjacentes (*ABC* e *CAD*)

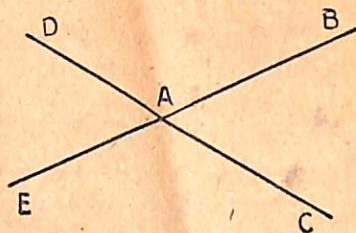


Fig. 27 — Ângulos opostos pelo vértice (*BAC* e *DAE*; ou *BAD* e *CAE*)

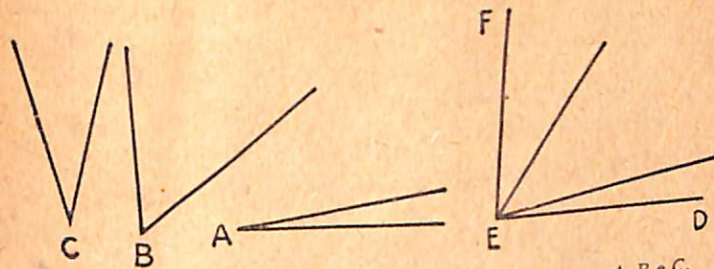
o vértice *A* e um lado comum, *AC*, que os separa. Os lados *AB* e *AD* chamam-se *exteriores*.

Ângulos opostos pelo vértice — Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro. Os ângulos *BAC* e *DAE* da figura 27 são opostos pelo vértice.

Os ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Soma de ângulos — A soma de dois ângulos é outro ângulo que se obtém do seguinte modo: constrói-se um deles adjacente ao outro e o ângulo formado pelos lados exteriores será a soma dos dois ângulos dados. Se a esses dois quisermos somar um terceiro, bastaria construir este adjacente à soma dos dois primeiros; e assim sucessivamente,

o ângulo formado pelos lados exteriores daria a soma total (figs. 28 e 29).



Figs. 28 e 29 — O ângulo *DEF* é a soma dos ângulos *A*, *B* e *C*.

Classificação dos ângulos — Quando duas retas se encontram, elas formam quatro ângulos, que, considerados dois a dois, são adjacentes ou opostos pelo vértice. Assim, na figura 27, os ângulos *BAC* e *DAE* são opostos pelo vértice, os ângulos *BAC* e *CAE* são adjacentes.

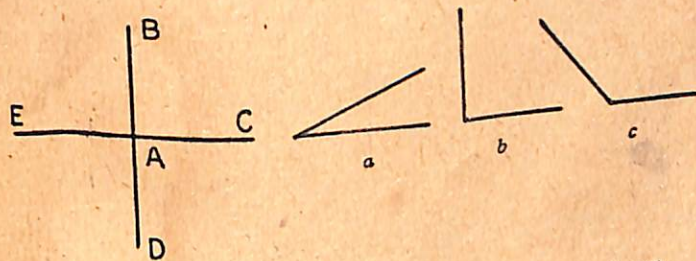


Fig. 30 — Retas perpendiculares.

Fig. 31 — Ângulos a) agudo; b) reto; c) obtuso.

Quando duas retas formam entre si ângulos adjacentes iguais, elas se dizem *perpendiculares*

(fig. 30) e cada um dos ângulos é um **ângulo reto**. Os ângulos retos são todos iguais.

O ângulo menor do que o reto se chama **agudo** e o ângulo maior do que o reto se chama **obtusos** (fig. 31).

Podemos classificar, portanto, os ângulos, quanto à sua grandeza, em retos, agudos e obtusos.

Ângulos complementares e suplementares —

Dois ângulos que somados dão um ângulo reto se dizem *complementares*; nesse caso, um é o *complemento* do outro. Os ângulos A e B são comple-

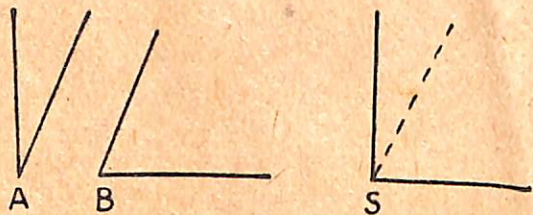


Fig. 32 — Os ângulos A e B são complementares.

mentares, porque a soma dêles, S , é um ângulo reto (fig. 32).

Dois ângulos adjacentes, cujos lados exteriores sejam perpendiculares, são complementares.

Quando a soma de dois ângulos é igual a dois ângulos retos, êles se dizem *suplementares*; neste caso, um é o *suplemento* do outro. Assim, na fig. 33, A e B são ângulos suplementares, porque a sua soma, S , é igual a dois retos.

Dois ângulos adjacentes, cujos lados exteriores estão em linha reta, são evidentemente suple-

mentares. Tais são os ângulos adjacentes ABC e ABD cujos lados BC e BD estão em linha reta (fig. 34).

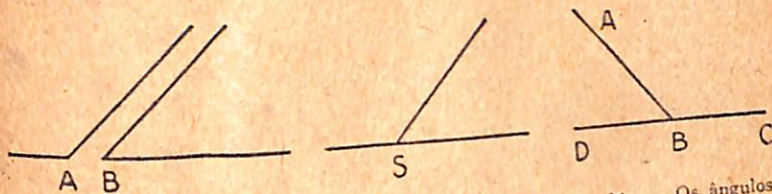


Fig. 33 — Os ângulos A e B são suplementares, por que a sua soma, S , é igual a dois ângulos retos.

Fig. 34 — Os ângulos adjacentes ABD e ABC são suplementares.

Soma de ângulos consecutivos — A soma dos ângulos consecutivos formados em torno de um ponto do mesmo lado de uma reta é igual a dois ângulos retos. (fig. 35).

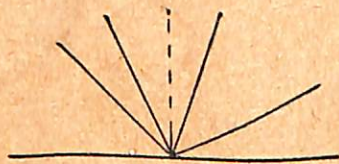


Fig. 35 — Ângulos consecutivos do mesmo lado de uma reta.

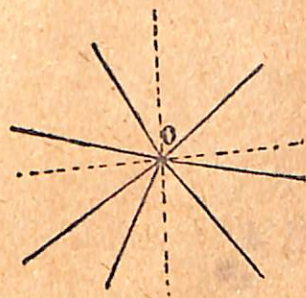


Fig. 36 — Ângulos consecutivos em torno de um ponto.

A soma dos ângulos consecutivos formados em torno de um ponto sobre um plano é igual a quatro ângulos retos. (fig. 36).

Bissetriz de um ângulo é a semi-reta que, partindo do vértice, divide o ângulo ao meio (fig. 37).
A propriedade da bissetriz de um ângulo é que

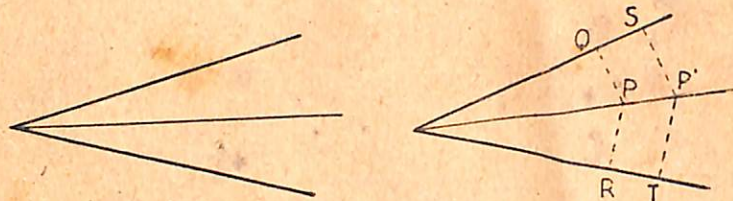


Fig. 37 — Ângulo e sua bissetriz

Fig. 38 — Os pontos da bissetriz distam igualmente dos lados do ângulo.

todos os seus pontos distam igualmente dos lados do ângulo. Na (fig. 38) por exemplo, $PQ = PR$, $P'S = P'T$, e assim por diante.

QUESTIONÁRIO

1. Que é ângulo?
2. Como se designa um ângulo?
3. Como se comparam dois ângulos?
4. Que são ângulos adjacentes?
5. Que são ângulos opostos pelo vértice?
6. Como se somam dois ou mais ângulos?
7. Que são retas perpendiculares?
8. Como se classificam os ângulos?
9. Que são ângulos complementares?
10. Que são ângulos suplementares?
11. A que é igual a soma dos ângulos consecutivos formados em torno de um ponto do mesmo lado de uma reta?
12. A que é igual a soma dos ângulos consecutivos formados sobre um plano em torno de um ponto?
13. Que é bissetriz de um ângulo?
14. Qual a propriedade da bissetriz?

PROBLEMAS

Problema 1. — Construir um ângulo igual a outro ângulo dado.

Seja CAB o ângulo dado (fig. 39). Com um raio qualquer e do vértice A , como centro, descrevamos o arco de circunferência de círculo EF compreendido

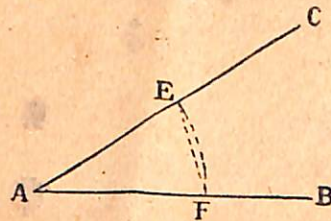


Fig. 39

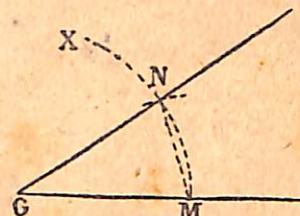


Fig. 40

pelos lados do ângulo. Tracemos uma semi-reta (fig. 40) e de sua origem, G , com o mesmo raio tracemos o arco MN ; meçamos com o compasso a distância EF e apliquemo-la em MX : acharemos o ponto N que, ligado a G , resolverá o problema.

Problema 2. — Traçar a bissetriz de um ângulo ou dividi-lo em duas partes iguais.

Do ponto A , com um raio qualquer, descrevamos o arco MN . Dos pontos M e N , como centros (fig. 41),



Fig. 41

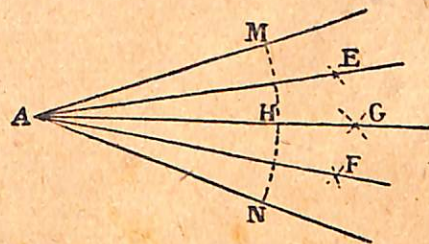


Fig. 42

descrevamos arcos de mesmo raio que se cortem; o ponto de intersecção, *G*, ligado ao vértice do ângulo, isto é, ao ponto *A*, nos dará a bissetriz pedida.

Problema 3. — *Dividir um ângulo em quatro, oito, dezesseis, trinta e duas partes iguais.*

Para resolver este problema, tiremos a bissetriz do ângulo (fig. 42), depois dividamos cada metade do ângulo em duas partes iguais e prossigamos nesta operação até obter a divisão desejada.

Problema 4. — *Dividir um ângulo reto em três partes iguais.*

Do vértice *A* (fig. 43) como centro, e com um raio qualquer, descrevamos o arco *MD*; dos pontos *M* e *D*, como centros, e com o mesmo raio, marquemos os pontos *H* e *G*, os quais, ligados ao vértice *A*, resolverão o problema.

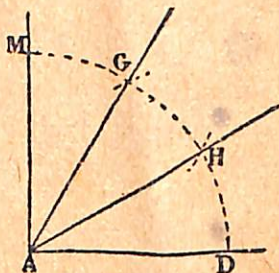


Fig. 43

Problema 5. — *Dado um ângulo agudo, construir o seu complemento.*

Seja *DAC* o ângulo agudo (fig. 44). Levantemos com o esquadro e a régua, pelo vértice, uma perpendicular *AM*. O ângulo *MAD* é o complemento do ângulo *DAC*.

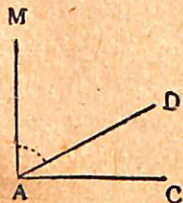


Fig. 44

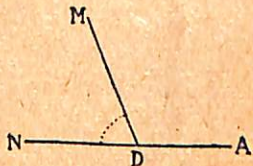


Fig. 45

Problema 6. — *Dado um ângulo, achar o seu suplemento.*

Seja *MDA* o ângulo (fig. 45). Prolonguemos o lado *DA* para além do vértice e acharemos o ângulo *MDN* suplemento de *MDA*.

Problema 7. — *Dividir um ângulo em duas partes iguais sem auxílio do compasso.* Seja *V* o ângulo (fig. 46).

Marquemos, a partir do vértice sôbre um lado, as distâncias *VM* e *MF* e reproduzamo-las no outro lado do ângulo em *VN* e *NE*. Tracemos *ME* e *NF*. A semi-reta *VP* divide o ângulo *V* em duas partes iguais.

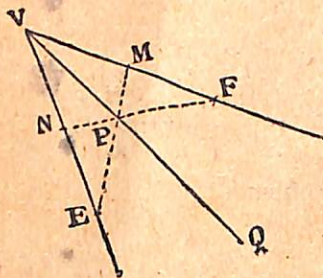


Fig. 46



Fig. 47

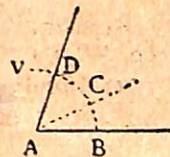


Fig. 48

Problema 8. — *Construir um ângulo igual à soma de dois ângulos dados.*

Sejam *M* e *N* os ângulos dados (fig. 47).

Tracemos a semi-reta *A*. Com o mesmo raio, fazendo centro em *N*, *M* e *A*, tracemos os arcos *EF*, *GH* e *BV* (fig. 48).

Reproduzamos em *BC*, o arco *EF* e em *CD* o arco *GH*. O ângulo *DAB* resolve o problema.

Problema 9. — *Construir um ângulo igual à diferença de dois ângulos dados.*

Sejam *A* e *B* os dois ângulos dados (fig. 49).

Façamos um ângulo MCN igual ao maior dos ângulos dados (fig. 50) e com o mesmo raio descrevamos os arcos DE , FG e MV .

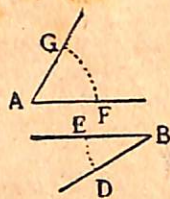


Fig. 49

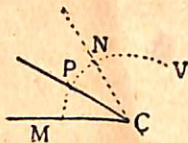


Fig. 50

Reproduzamos em MN (fig. 50) a partir de N , o arco NP igual ao arco DE .

O ângulo PCM resolve o problema.

CAPÍTULO III

Perpendiculares e oblíquas. — Mediatriz.

Duas retas são *perpendiculares* quando se encontram formando ângulos adjacentes iguais (figura 51).

Duas retas são *oblíquas* quando se encontram formando ângulos adjacentes desiguais (fig. 52). De um ponto tomado fora de uma reta ou sôbre ela podemos traçar uma infinidade de oblíquas a essa reta, mas só podemos traçar uma perpendicular.

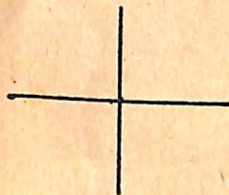


Fig. 51 -- Retas perpendiculares



Fig. 52 — Retas oblíquas

Demonstra-se que: *de um ponto dado sôbre uma reta ou fóra dela, pode-se traçar uma perpendicular a essa reta e só uma.*

Demonstra-se ainda que, se de um ponto situado fora de uma reta, traçarmos uma perpendicular e várias oblíquas a essa reta, I) a perpendicular é menor que qualquer oblíqua; II) as oblíquas que se afastam igualmente de pé da perpendicular são iguais; III) as oblíquas que se afastam desigualmente do pé da perpendicular são desiguais e a que mais se afasta é a maior.

Assim, a menor distância do ponto *A* à reta *MN* é a perpendicular *AB*; as distâncias *AR* e *AS* são iguais porque estas duas oblíquas se afastam igualmente (*BR = BS*) de *B*; finalmente, a distância *AE* é a maior, porque esta oblíqua é a que a mais se afasta do pé da perpendicular (fig. 53).

Diz-se que *AB* é a distância do ponto *A* à reta *MN*. Fica entendido, portanto, que, sempre que quisermos obter a distância de um ponto a uma

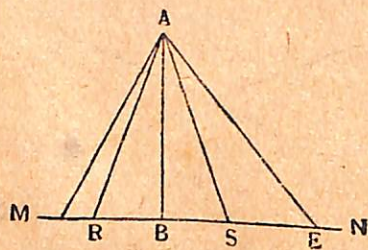


Fig. 53

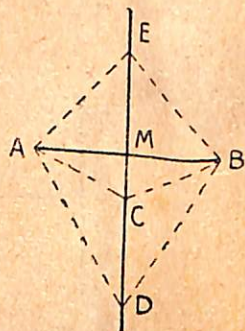


Fig. 54

reta, teremos de traçar desse ponto à reta uma perpendicular e tomar desta o segmento compreendido entre o ponto dado e o pé da perpendicular.

Mediatriz de um segmento de reta — Chama-se *mediatriz* de um segmento de reta à perpendicular ao meio desse segmento. Assim, a mediatriz do segmento *AB* (fig. 53) é a perpendicular a *AB* tirada do ponto *M* que divide o segmento ao meio.

A propriedade da mediatriz é *ter todos os seus pontos a igual distância das extremidades do segmento*. Com efeito, na fig. 53, *CA = CB*, *DA = DB*, *EA = EB*, etc.

Esquadros — Para o traçado de perpendiculares usam-se os *esquadros*: são peças com forma de triângulo retângulo (*), feitas em madeira, borracha, celulóide, galalite, etc. Geralmente usa-se um par de esquadros, sendo um isósceles, isto é, com os ângulos agudos iguais a 45 graus, e outro em que os ângulos agudos medem 60° e 30°.

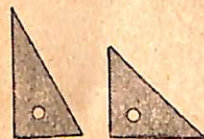


Fig. 55 — Par de esquadros.



Fig. 56 — Esquadros perfeitos e esquadros defeituosos.

Antes de usar um esquadro devemos nos certificar de que os seus catetos formam exatamente um ângulo reto. Para isto, aplicamos contra a régua um dos catetos (*AC*, por exemplo) e com um lapis damos um traço ao longo do outro cateto (*AB*); fazendo girar o esquadro em torno do traço dado

(*) Veja às págs. 53 e seguintes as propriedades do triângulo retângulo.



Fig. 57

e ajustando bem, novamente, o cateto AC contra a régua, o cateto AB deve coincidir, com o traço dado. Em caso contrário, o esquadro está defeituoso.

Os desenhistas também usam, para traçar ângulos retos, o instrumento chamado T e formado por duas régua que se ajustam perpendicularmente (fig. 57).

QUESTIONÁRIO

1. Quando se diz que duas retas são perpendiculares?
2. Que relações existem entre a perpendicular e as oblíquas à mesma reta tiradas de um ponto?
3. Que é *distância* de um ponto a uma reta?
4. Que é mediatriz de um segmento?
5. Qual a propriedade da mediatriz?
6. Que são esquadros?
7. Como se verifica a perfeição de um esquadro?
8. Que outro instrumento se usa no traçado de perpendiculares?

PROBLEMAS

Problema 10. — *Dividir um segmento de reta em duas partes iguais ou fazer passar uma perpendicular pelo meio de um segmento de reta.*

Façamos centro em A e B (fig. 58), e com um raio maior que a metade de AB determinemos os pontos C e D pelos quais passa a reta CD , isto é, a perpendicular que divide AB ao meio (mediatriz).

Observação: Para dividir um segmento de reta em quatro, oito, dezesseis, trinta e duas partes iguais, etc., bastará dividir cada metade, quarta parte, oitava parte, etc., sucessivamente, ao meio.

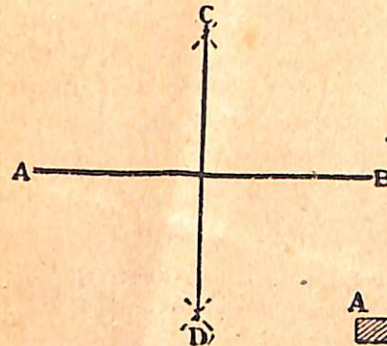


Fig. 58

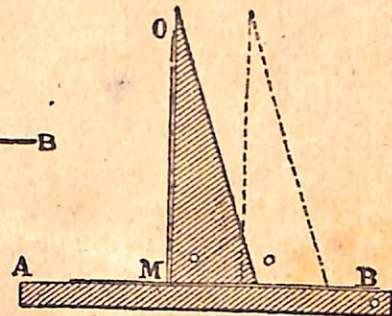


Fig. 59

Problema 11. — *De um ponto situado fora de uma reta traçar uma perpendicular à mesma reta.*

1.ª Solução (com a régua e o esquadro): Sejam o ponto O e a reta AB .

Façamos coincidir a aresta da régua com a reta AB (fig. 59), e escorreguemos o cateto menor do esquadro pela régua até o cateto maior encontrar o ponto O . Traçemos a reta OM e teremos resolvido o problema.

2.ª Solução (com a régua e o compasso):

Façamos centro no ponto O e com um raio evidentemente maior que a distância deste ponto à reta AB (fig. 60) descrevamos um arco que corte essa reta em dois pontos E e F , dos quais, como centros e com um raio evidentemente maior do que a metade de EF , determinemos o ponto G , o qual, ligado ao ponto O , nos dá a perpendicular pedida.

3.^a Solução. — Sejam o ponto A e a reta MN . Tome-mos sôbre a reta MN (fig. 61) um ponto qualquer B e liguemo-lo ao ponto A .

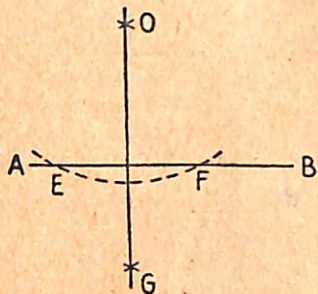


Fig. 60

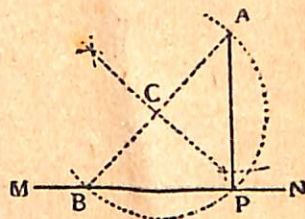


Fig. 61

Dividamos BA ao meio e fazendo centro em C (meio de BA), com um raio CA , descrevamos o arco APB que corta MN no ponto P .

A reta AP é a perpendicular pedida.

Problema 12. — Por um ponto tomado sôbre uma reta, levantar uma perpendicular a esta reta.

1.^a Solução (com a régua e o compasso).

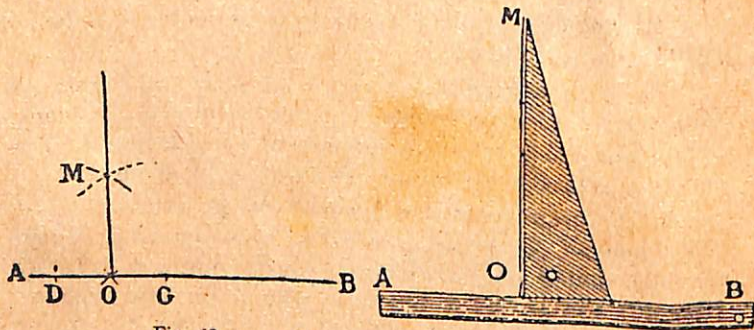


Fig. 62



Fig. 63

A partir do ponto O (fig. 62) marquemos duas distâncias iguais, OD e OG .

Dos pontos D e G , como centros, e com um raio maior que OD ou OG , descrevamos dois arcos que determinem o ponto M . A reta OM resolve o problema.

2.^a Solução (com a régua e o esquadro):

Façamos coincidir uma aresta da régua com a reta AB (fig. 63), apliquemos o lado menor do mesmo esquadro contra a régua, fazendo-o deslizar até que o vértice do ângulo reto coincida com o ponto O ; tracemos, então OM , que resolve o problema.

Problema 13. — Levantar uma perpendicular pela origem de uma semi-reta ou pela extremidade de um segmento que não podemos ou não queremos prolongar.

1.^a Solução. — Seja a semi-reta BA (fig. 64) e, pela origem, B , tracemos BX oblíqua a BA ; num ponto qualquer,

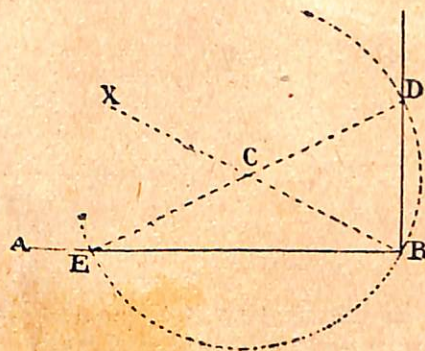


Fig. 64

C , desta oblíqua façamos centro e tracemos um arco de circunferência que passe por B e corte a reta AB em um ponto E .

Liguemos o ponto E ao ponto C , prolonguemos EC até encontrar o arco no ponto D . A reta BD é a perpendicular pedida.

2.^a Solução. — Seja V a semi-reta dada (fig. 65). Fazendo centro na origem, com um raio qualquer, VM , descrevamos o arco MX .

A partir do ponto M , com o mesmo raio VM determinemos o ponto B e, a partir d'êste último, o ponto C .

Unamos o ponto B ao ponto C e façamos passar pelo meio de BC uma perpendicular (VE), a qual é a perpendicular pedida.

3.^a Solução. — Seja M a origem da semi-reta (Fig. 66).

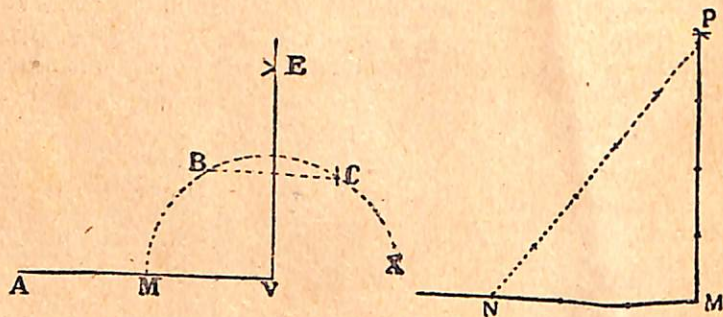


Fig. 65

Fig. 66

Apliquemos, de M até N , três medidas iguais a uma unidade qualquer (o centímetro, por exemplo). Fazamos centro em M e com raio igual a quatro vezes a mesma unidade, descrevamos um arco, e do ponto N , como centro e com um raio igual a cinco vezes a mesma unidade determinemos o ponto P .

PM é a perpendicular pedida.

Problema 14. — *Sobre uma reta dada, determinar um ponto equidistante de dois outros situados fora dessa reta.*

Sejam M e N os pontos situados fóra da reta AB (figs. 67 e 68).

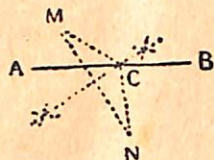


Fig. 67

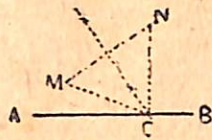


Fig. 68

Tracemos MN e façamos passar pelo meio uma perpendicular que, prolongada, determinará na reta AB o ponto C , pedido, porquanto $MC = NC$.

Problema 15. — *Os proprietários de duas casas situadas, nas proximidades das margens de um rio, querem fazer uma ponte que fique equidistante das duas moradas: pede-se o lugar em que deverá ser construída a referida ponte.*

P e R são as duas casas (fig. 69).

Tracemos PR e em seguida a sua mediatriz. Esta determinará o ponto M , equidistante de P e de R , e onde devem construir a ponte.

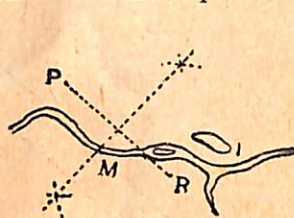


Fig. 69

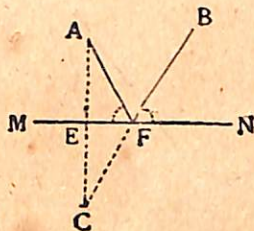


Fig. 70

Problema 16. — *Por dois pontos dados A e B fazer passar duas retas que encontrem uma terceira reta, MN , e com esta formem ângulos iguais.*

Abaixemos do ponto A (fig. 70) uma perpendicular à reta MN e façamos $EC = AE$.

Liguemos C a B e A a F .

AF e BF formam com MN ângulos iguais.

CAPÍTULO IV

Paralelas. — Postulado de Euclides.

Duas retas distintas, situadas no mesmo plano, podem ser *concorrentes* ou *paralelas*. São concorrentes quando têm um ponto comum, de modo que, devidamente prolongadas, elas se encontram

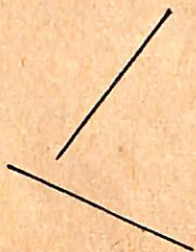


Fig. 71

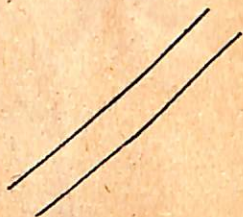


Fig. 72

(fig. 71). São paralelas quando não têm ponto comum, de sorte que, por mais que se prolonguem, nunca se encontram (fig. 72).

Duas retas paralelas conservam-se equidistantes, em toda a sua extensão, isto é, a distância de qualquer ponto de uma à outra é sempre a mesma.

Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si.

Tracemos duas perpendiculares à mesma reta *AB*. É fácil demonstrar que *duas perpendiculares à mesma reta são paralelas*.

Com efeito, se não fossem paralelas, as duas perpendiculares a *AB* se encontrariam em algum ponto e nesse caso teríamos duas perpendiculares a uma reta tiradas do mesmo ponto, o que é impossível (fig. 73).

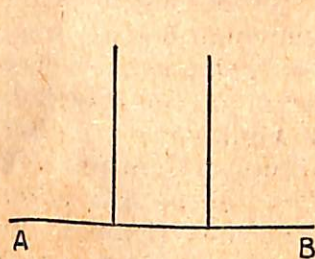


Fig. 73

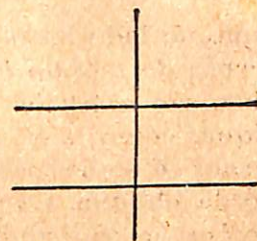


Fig. 74

É evidente que se uma reta for perpendicular a outra, será também perpendicular a qualquer reta paralela a essa outra. Por isso, quando duas paralelas são cortadas por uma perpendicular, os ângulos que se formam são todos retos (fig. 74).

Duas paralelas cortadas por uma oblíqua, formam com esta oito ângulos, sendo quatro agudos

iguais entre si e quatro obtusos também iguais entre si (fig. 75).

Os ângulos m , b , c e n chamam-se *internos*, porque têm as aberturas para dentro da figura; os ângulos a , e , r , d chamam-se *externos*, porque têm as aberturas para fora da figura.

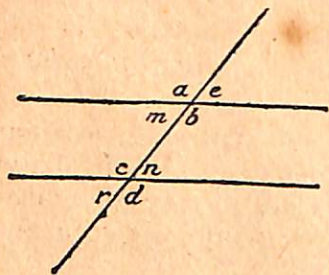


Fig. 75

Estes ângulos, considerados dois a dois, tomam as seguintes denominações: *internos do mesmo lado* ou *colaterais internos* se são ambos internos e estão

do mesmo lado da oblíqua, como b e n , ou c e m ; *externos do mesmo lado* ou *colaterais externos* se ambos são externos e ficam do mesmo lado da oblíqua, como a e r , ou, ainda, e e d ; *alternos-internos* se ambos são internos, porém um de cada lado da oblíqua, como b e c , ou m e n ; *alternos-externos* se são ambos externos ficando um de cada lado da oblíqua, como a e d , ou e e r ; finalmente, chamam-se *correspondentes* aqueles que, sem ser adjacentes, ficam ambos do mesmo lado da oblíqua, um interno e outro externo; são correspondentes na fig. 75: a e c , m e r , e e n , b e d .

Demonstra-se que duas paralelas cortadas por uma oblíqua formam ângulos alternos-externos iguais; alternos-internos iguais; correspondentes iguais; externos do mesmo lado suplementares e internos do mesmo lado também suplementares.

Postulado de Euclides — Chama-se *postulado* a uma proposição que, embora não seja evidente por si mesma, é aceita sem demonstração.

Um dos postulados mais célebres da Geometria é o de Euclides, grande geômetra grego: *por um ponto de um plano sempre se pode traçar uma paralela a uma reta desse plano e uma só.*

QUESTIONÁRIO

1. Como podem ser duas retas distintas situadas no mesmo plano?
2. Qual a propriedade relativa às perpendiculares à mesma reta?
3. Que relação geral existe entre os ângulos formados por paralelas cortadas por uma oblíqua?
4. Trace duas paralelas cortadas por uma oblíqua, e mostre os ângulos externos, os internos, os alternos-internos, alternos-externos, os externos do mesmo lado, os internos do mesmo lado, os correspondentes.
5. Que relação há entre os ângulos alternos-internos, alternos-externos, e correspondentes?
6. Que relação há entre os ângulos internos do mesmo lado e externos do mesmo lado?
7. Que é postulado?
8. Enuncie o postulado de Euclides.

PROBLEMAS

Problema 17. — *Traçar uma paralela a uma reta dada, por um ponto dado.*

1.^a Solução (com o compasso e a régua):

Do ponto dado M (fig. 76) descrevemos um arco de circunferência NG ; do ponto N e com o mesmo raio MN descrevemos o arco MC ; tomemos NG igual MC e liguemos o ponto M ao ponto G .

A reta MG é a paralela pedida.

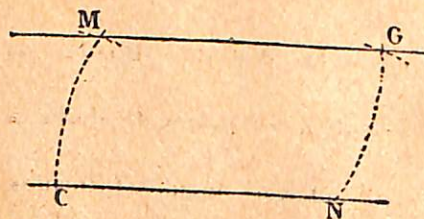


Fig. 76

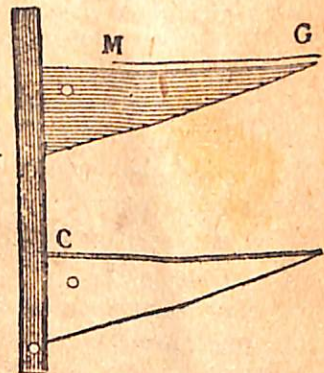


Fig. 77

2.^a Solução (com a régua e o esquadro):

Apliquemos firmemente um dos catetos do esquadro sobre a reta CN (fig. 77); em seguida, façamo-lo escorregar pela régua até o ponto M ficar sobre outro cateto; tracemos a reta MG , que é paralela a CN .

Problema 18. — Dadas duas retas concorrentes, traçar a bissetriz sem recorrer ao ponto de concorrência.

1.^a Solução. — Sejam AB e CD (fig. 78) as retas.

Tracemos o segmento MN e depois a bissetriz de cada um dos ângulos AMN , CNM , BMN , DNM e liguemos o ponto E ao ponto F e teremos a bissetriz pedida.

2.^a Solução. — Sejam BA e DC as retas (fig. 79). Do ponto B levantemos uma perpendicular à reta BA e do ponto D uma perpendicular à reta DC . Sobre cada uma destas perpendiculares marquemos a partir dos pontos

B e D duas distâncias iguais BN e DM . Pelo ponto N tracemos uma paralela a BA e pelo ponto M uma outra a DC . Dividamos o ângulo MPN em duas partes iguais; a bissetriz PQ prolongada é a bissetriz pedida.

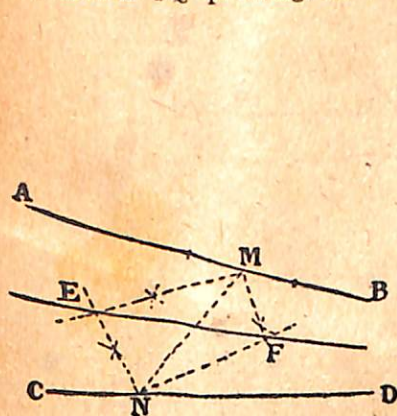


Fig. 78

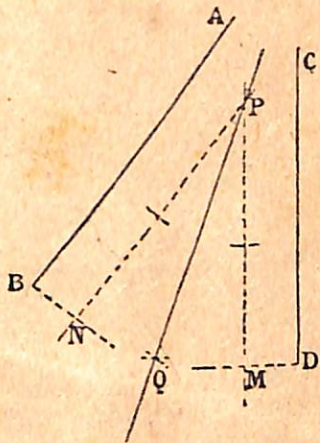


Fig. 79

Problema 19. — De um ponto dado traçar uma reta que forme com outra um ângulo dado.

Seja AB a reta dada, M o ponto e N o ângulo (fig. 80). Tracemos do ponto M uma paralela a AB e do mesmo

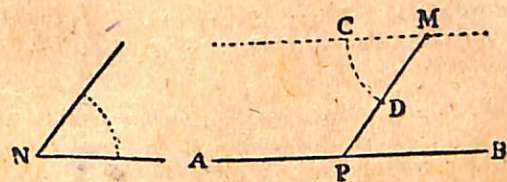


Fig. 80

ponto tracemos MP formando com esta paralela um ângulo CMP igual ao ângulo N . A reta MP forma com AB o ângulo $MPB = CMP$ e portanto igual ao ângulo N .

Problema 20. — De um ponto dado fora da porção do plano compreendida entre duas paralelas, traçar uma reta sobre a qual as mesmas paralelas determinem um segmento de comprimento dado.

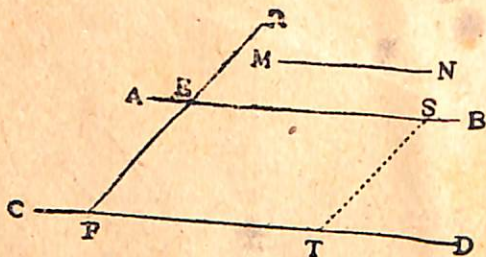


Fig. 81

Seja R o ponto dado, AB e CD as paralelas, e MN a medida do segmento (fig. 81).

Tomemos sobre AB um ponto qualquer S e, com o centro nesse ponto e raio igual a MN , cortemos a reta CD em T . Do ponto R tiremos RF paralela a ST . O segmento $EF = MN$.

Observação — O problema não tem solução quando MN é menor do que a distância entre as paralelas.

Problema 21. — Entre duas retas concorrentes, traçar um segmento de reta que fique dividido ao meio por um ponto dado.

Seja M o ponto situado entre as retas EF e GH (fig. 82). Abaixemos do ponto M sobre GH a perpendicular MC e prolonguemo-la além de M de uma distância MD igual a MC .

Do ponto D tracemos uma paralela a GH ; liguemos o ponto A (interseção dessa paralela com a reta EF) ao ponto M prolongando até encontrar a reta GH . O segmento AB resolve o problema.

Problema 22. — De um ponto dado traçar uma reta que forme ângulos iguais com duas outras retas não paralelas.

Seja M o ponto dado, AB e CD as retas dadas não paralelas (fig. 83).

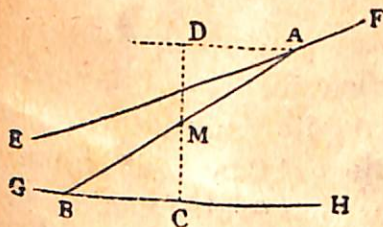


Fig. 82

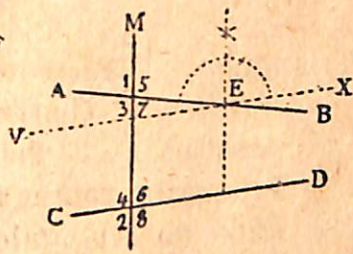


Fig. 83

Tracemos uma reta VX paralela a CD . Tracemos a bissetriz do ângulo AEX e do ponto M tracemos uma paralela a esta bissetriz.

Essa última reta forma, com AB e CD , ângulos iguais:
 $1 = 7 = 2 = 6$; $3 = 5 = 4 = 8$.

CAPÍTULO V

Triângulos. — Elementos principais e secundários. — Classificação. — Triângulo isósceles. — Triângulo equilátero. — Triângulo retângulo. — Casos de igualdade de triângulos. — Problemas.

Chama-se polígono à porção do plano limitada por uma linha quebrada fechada. Os lados da linha poligonal são também *lados* do polígono e dois lados consecutivos formam um *ângulo* do polígono, o qual também se chama *ângulo interno* do polígono.

Um polígono tem tantos ângulos e tantos vértices quantos lados.

Designa-se um polígono colocando uma letra em cada vértice e enunciando estas letras na ordem em que elas seriam encontradas por um ponto móvel que percorresse a linha poligonal no mesmo sentido.

Assim, o polígono da fig. 84 denomina-se *ABCDE*, ao passo que o da fig. 85 denomina-se *ADBCE*.

Chama-se *ângulo externo* de um polígono a todo ângulo formado por um lado e pelo prolongamento do lado consecutivo. Na fig. 86 o ângulo *BAS* é um ângulo externo do polígono *ABCDE*.

Perímetro de um polígono é a soma dos comprimentos dos lados do polígono.

TRIÂNGULOS

Triângulo é o polígono de três lados. Um triângulo tem, portanto, três ângulos e três vértices (fig. 87).

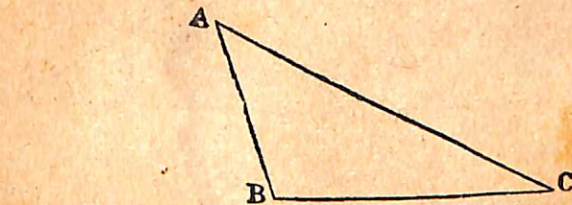


Fig. 87

Os lados e os ângulos são os *elementos principais* do triângulo.

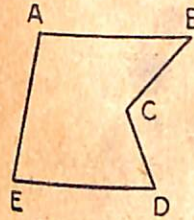


Fig. 84

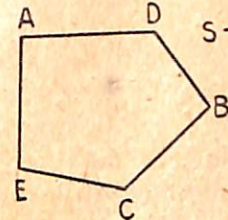


Fig. 85

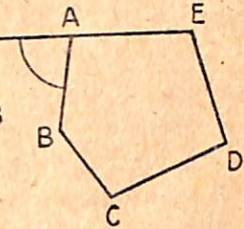


Fig. 86

Relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo — *Num triângulo, qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois e maior do que a sua diferença.*

Esta propriedade se deduz imediatamente daquela que diz ser a reta a menor distância entre dois pontos.

Assim, ao contrário do que poderia parecer, três segmentos quaisquer não servem para lados de um triângulo. Si, por exemplo, um medir 8 e outro 5, o terceiro há de ser menor do que 13 e maior do que 3.

Soma dos ângulos internos de um triângulo — O perímetro de um triângulo, isto é, a soma dos comprimentos de seus lados, pode variar à vontade; mas o mesmo já se não dá com a soma dos seus ângulos internos. Com efeito, demonstra-se que *a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante, isto é, sempre a mesma, e igual a dois retos.*

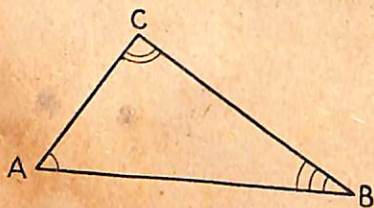


Fig. 88

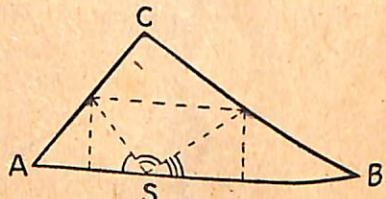


Fig. 89

Esta lei conhecida por “lei angular de Tales” se pode verificar praticamente do seguinte modo: tracemos sôbre cartão ou papel o triângulo ABC (fig. 88) e dobremos os seus ângulos, como se vê

na fig. 89, de sorte a fazer os três vértices coincidirem num mesmo ponto, S, do lado AB. Veremos, então, que os três ângulos se dispõem consecutivamente em torno de um ponto e do mesmo lado da reta AB: sua soma é, por conseguinte, igual a dois retos.

Elementos secundários do triângulo — *Os elementos secundários do triângulo são: as alturas, as medianas e as bissetrizes dos ângulos.*

Altura de um triângulo é a perpendicular baixada de um vértice sôbre o lado oposto ou sôbre o seu prolongamento. Este lado se chama, então, base do triângulo.

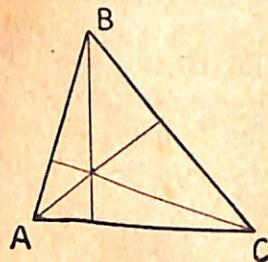


Fig. 90

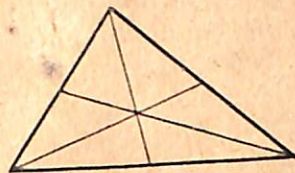


Fig. 91

Mediana é o segmento de reta que liga um vértice ao meio do lado oposto.

Em qualquer triângulo podemos traçar três alturas (fig. 90) e três medianas (fig. 91); assim, qualquer lado de um triângulo pode servir-lhe de base.

Classificação dos triângulos quanto aos lados — Os triângulos quanto à grandeza relativa de seus

lados são (fig. 92), *escalenos*, se os lados são desiguais; *isósceles* ou *simétricos* se dois de seus lados são iguais; *equiláteros* se os três lados são iguais.

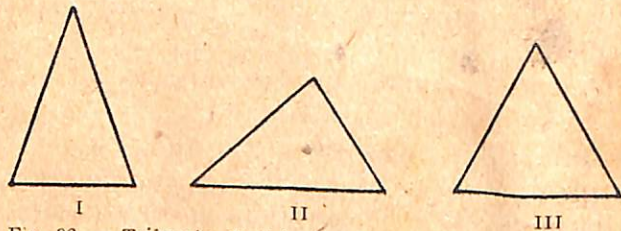


Fig. 92 — Triângulo: I) isósceles; II) escaleno; III) equilátero

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

— Um triângulo tem sempre dois ângulos agudos, mas o terceiro pode variar, isto é, ser agudo também, reto ou obtuso. Por isto, classificamos os triângulos em *acutângulos*, *retângulos* e *obtusângulos*.

Triângulo acutângulo é o que tem os três ângulos agudos (fig. 93); triângulo retângulo é o que

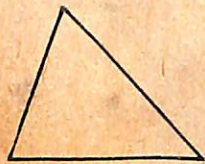


Fig. 93

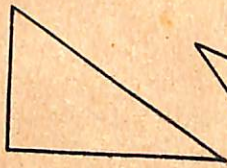


Fig. 94



Fig. 95

têm um ângulo reto (fig. 94); triângulo obtusângulo é o que tem um ângulo obtuso (fig. 95).

Triângulo isósceles — No triângulo isósceles chama-se *base* ao lado diferente; *altura do triân-*

gulo isósceles é a altura relativa a esse lado; *vértice do triângulo isósceles* é o vértice do ângulo oposto à base.

Demonstra-se que no triângulo isósceles são iguais os ângulos opostos aos lados iguais. Assim, na fig. 96 os ângulos A e B são iguais.

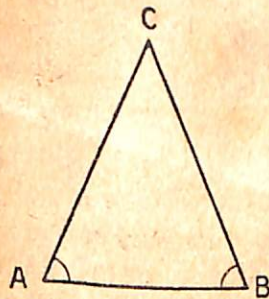


Fig. 96

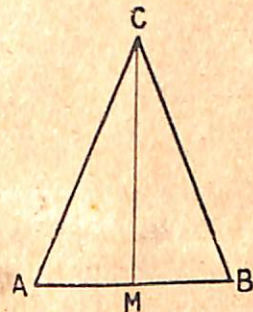


Fig. 97

No triângulo isósceles a altura, a bissetriz do ângulo do vértice e a mediana relativa à base coincidem (fig. 97).

Triângulo equilátero — O triângulo equilátero sendo um caso particular do triângulo isósceles, em que cada lado pode ser considerado como base, conclue-se facilmente: que o triângulo equilátero é também equiângulo, isto é, o triângulo que tem os lados iguais também tem os ângulos iguais (figura 98-I).

Triângulo retângulo — No triângulo retângulo, os lados do ângulo reto se chamam *catetos* e o lado que se opõe ao ângulo reto é a *hipotenusa*. Na

fig. 98-II, que representa um triângulo retângulo, AC e AB são os catetos; BC é a hipotenusa.

O triângulo retângulo goza de muitas propriedades importantes, das quais destacaremos as duas seguintes:

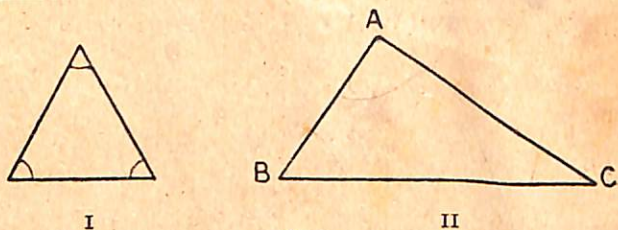


Fig. 98

1.º) *Os ângulos agudos são complementares.* Com efeito, desde que um dos ângulos do triângulo é reto, a soma dos outros dois dá outro reto.

2.º) *O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.* Esta proposição notável atribuída a Pitágoras, exprime que, se a hipotenusa medir a e os catetos medirem, respectivamente, b e c , teremos sempre

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Desta igualdade, podemos tirar

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

isto é, o quadrado de um cateto é igual ao quadrado da hipotenusa menos o quadrado do outro cateto.

Igualdade de triângulos — Quando dois polígonos podem ser levados a coincidir ponto por ponto, diz-se que eles são *iguais*. Si considerarmos

o caso particular de dois triângulos, é evidente que um só poderá coincidir ponto por ponto com outro, si tiverem os três lados respectivamente iguais e, bem assim, os três ângulos. Então, chamando ABC e $A'B'C'$ os triângulos iguais, devemos ter

$$\begin{aligned} AB = A'B' \quad BC = B'C' \quad AC = A'C' \\ \angle A = \angle A' \quad \angle B = \angle B' \quad \angle C = \angle C' \end{aligned}$$

Entretanto, três dessas seis condições, escolhidas convenientemente, bastam para garantir a igualdade dos dois triângulos. As proposições que exprimem estas condições são chamadas *casos* de igualdade de triângulos. Os casos mais simples de igualdade de triângulos são os seguintes:

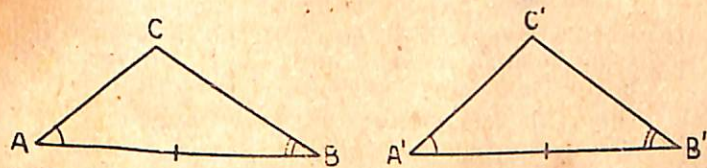


Fig. 99 — 1.º caso de igualdade: $AB = A'B'$; $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$

1.º) *Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual e os ângulos adjacentes a esse lado respectivamente iguais;*

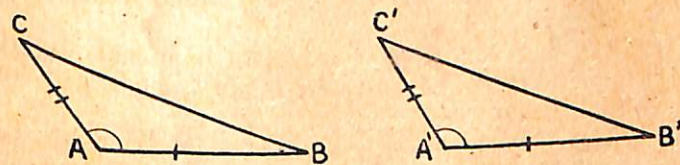


Fig. 100 — 2.º caso de igualdade: $\angle A = \angle A'$; $AB = A'B'$; $AC = A'C'$

2.º) Dois triângulos são iguais quando têm um ângulo igual compreendido entre lados respectivamente iguais;

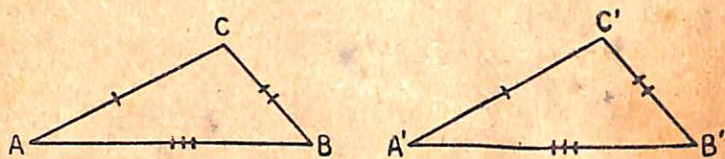


Fig. 101 — 3.º caso de igualdade: $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $BC = B'C'$

3.º) Dois triângulos são iguais quando têm os três lados respectivamente iguais.

QUESTIONÁRIO

1. Que é polígono?
2. Como se designa um polígono?
3. Que são ângulos interno e externo de um polígono?
4. Como se chama a soma dos comprimentos dos lados de um polígono?
5. Que é um triângulo?
6. Quais os elementos principais de um triângulo?
7. A que é igual a soma dos ângulos internos de um triângulo (lei angular de Tales)?
8. Quais são os elementos secundários de um triângulo?
9. Classifique os triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.
10. Que é um triângulo isósceles e qual a sua propriedade?
11. Como se chamam os lados do triângulo retângulo?
12. Que relação há entre os ângulos agudos do triângulo retângulo?
13. Que relação há entre os lados do triângulo retângulo?
14. Enuncie os casos de igualdade de triângulos.

PROBLEMAS

Problema 23. — Determinar o centro de um triângulo.

Seja ABD o triângulo (fig. 102).

Tiremos as medianas relativas aos lados AD e BD .

Essas medianas cortam-se em C que é o centro do triângulo.

Nota: A mediana relativa ao lado AB também passa por C .

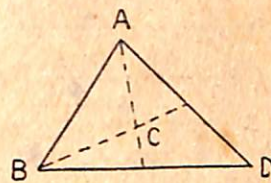


Fig. 102

Problema 24. — Traçar as alturas de um triângulo.

Basta tirar de cada vértice a perpendicular ao lado oposto.

Se o triângulo for acutângulo, as três alturas caem sobre os lados (fig. 103).

Se o triângulo for retângulo, só haverá uma altura por traçar: a relativa à hipotenusa; a altura relativa a cada cateto é o outro cateto (fig. 104).

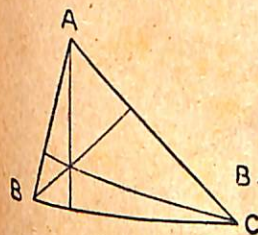


Fig. 103

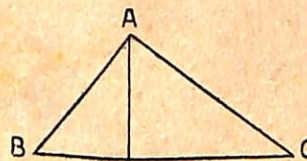


Fig. 104

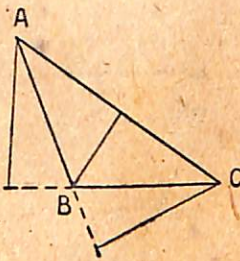


Fig. 105

Se o triângulo for obtusângulo, as alturas relativas aos dois menores lados caem fora destes, isto é, nos seus prolongamentos. (fig. 105).

Problema 25. — Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e o ângulo por eles formados. *B* (fig. 108)

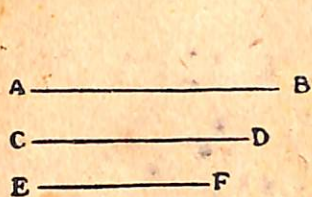


Fig. 106

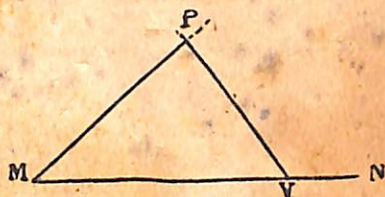


Fig. 107

Sobre a reta *MN*, (fig. 107) marquemos $MV = AB$; do ponto *M*, com um raio igual a *EF*, tracemos um pequeno arco e de *V* com raio igual a *CD* tracemos outro arco que corte o primeiro. Determinamos, assim, o ponto *P*. Este ligado a *M* e *V* forma o triângulo pedido.

Problema 26. — Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e o ângulo por eles formado. *B* (fig. 108) é o ângulo; *EF* e *GH* (fig. 108) são os lados conhecidos.

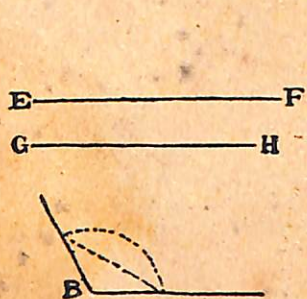


Fig. 108

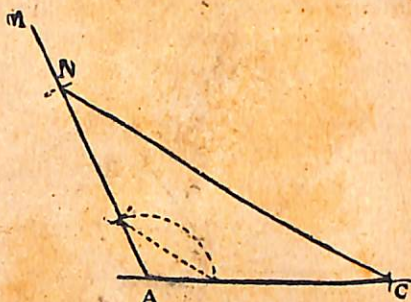


Fig. 109

No ponto *A* (fig. 109), façamos um ângulo *A* igual ao ângulo *B*; sobre um lado, a partir do vértice, mar-

quemos *AN* igual a *GH*; e sobre o outro lado marquemos $AC = EF$. Liguemos o ponto *N* ao ponto *C* e teremos construído o triângulo pedido.

Problema 27. — Construir um triângulo conhecendo-se um lado e os ângulos adjacentes a esse lado.

AB (fig. 110) é o lado; *G* e *H* (fig. 111) os ângulos adjacentes. Sobre a reta *MN* (fig. 112) marquemos $MD = AB$. Tomando para vértice o ponto *M*, façamos um



Fig. 110



Fig. 111

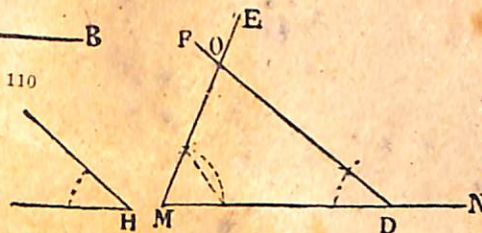


Fig. 112

ângulo igual a *G* e no ponto *D*, um ângulo igual a *H*. Os lados não comuns cortam-se no ponto *O*; *MDO* é o triângulo pedido.

Problema 28. — Construir um triângulo conhecendo-se um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado.

RS é o lado (fig. 113); *N*, (fig. 114) um ângulo adjacente a esse lado e *M* (fig. 115) o ângulo oposto.



Fig. 113



Fig. 114

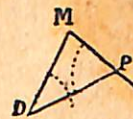


Fig. 115

Por um ponto *D* tomado sobre um lado do ângulo *M* façamos um outro ângulo igual a *N*.

Os lados dos ângulos D e M determinam o ponto P , formando um ângulo que vai ser no triângulo pedido o outro ângulo adjacente ao lado conhecido. Recaimos assim no problema anterior, pois já estão conhecidos um lado e os dois ângulos adjacentes.

Problema 29. — Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e o ângulo oposto a um deles. Sejam m e n os lados e V o ângulo dado (fig. 116).

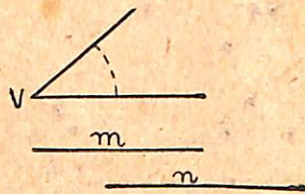


Fig. 116

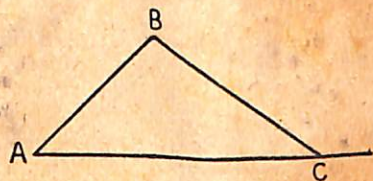


Fig. 117

Façamos um ângulo A igual ao ângulo V e aplique-mos em AB (fig. 117) a medida m .

Com o centro em B e raio igual a n determinemos o ponto C . Unamos B a C e obteremos o triângulo pedido ABC .

OBSERVAÇÃO — Com os elementos fornecidos, o problema teve uma solução e uma só. Entretanto, esta construção (em que se dão um ângulo, um lado deste e o lado oposto, para se obter o triângulo) nem sempre tem solução e, às vezes, pode ter duas soluções. Examinemos alguns casos que podem surgir, conservando o mesmo ângulo dado.

1.º O lado oposto ao ângulo dado é igual ou maior do que o outro lado conhecido. É o caso resolvido acima e em que há sempre uma solução e só uma (fig. 117), pois, fazendo centro em B , com raio igual ou maior do que AB , sempre podemos encontrar AF uma vez e só uma.

2.º O lado oposto ao ângulo A é exatamente a distância de B ao lado desconhecido. Neste caso, temos ainda uma solução: o triângulo retângulo ABC (fig. 118).

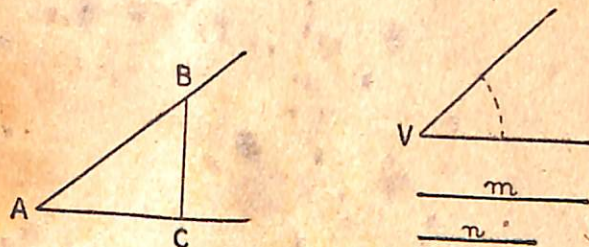


Fig. 118

3.º O lado oposto ao ângulo A é maior do que a referida distância (de B ao lado desconhecido) porém menor do que m (lado AB). Neste caso há duas soluções. Com efeito: se fizermos centro em B e, com raio igual a n , procurarmos determinar o terceiro vértice do

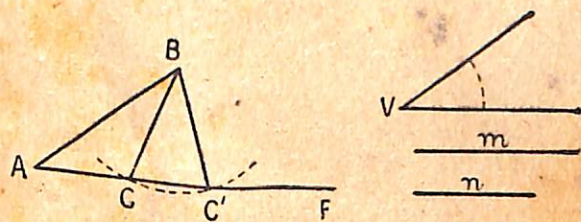


Fig. 119

triângulo, veremos que o arco de raio n corta AF em dois pontos, C e C' donde resultam dois triângulos, ABC e ABC' , que resolvem o problema (fig. 119).

4.º o lado oposto a A é menor do que a distância de B ao lado desconhecido. Desta vez o problema não tem

solução, pois, fazendo centro em B , com um tal raio não conseguimos cortar AF (fig. 120).

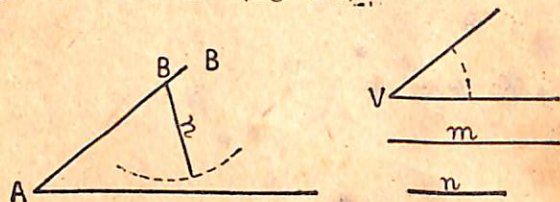


Fig. 120

Problema 30. — Construir um triângulo conhecendo-se dois lados e uma altura.

1.º Caso. — A altura é relativa a um dos lados conhecidos.

a e b são os dois lados e m a altura (fig. 121).

Sobre uma reta marquemos $EF = a$ e por um ponto R (fig. 122) levantemos-lhe uma perpendicular; sobre esta marquemos $RS = m$.

Façamos passar por S uma paralela a EF e com o centro em F e raio igual a b determinemos G ; deste ponto, e com o raio EF , determinemos D .

Qualquer dos triângulos, EFG , GDF , EFD ou GDE , resolve o problema.

2.º caso. — A altura é relativa ao lado desconhecido.

a e b são os dois lados e m a altura relativa ao 3.º lado (fig. 121). Marquemos sobre uma reta a medida

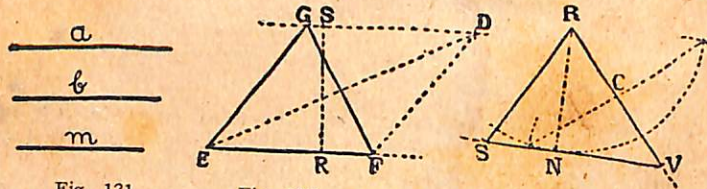


Fig. 121

Fig. 122

Fig. 123

$RV = a$ (fig. 123) e do ponto R , com um raio igual a m descrevamos um arco de círculo.

Dividamos RV ao meio e do ponto C , com um raio CV ou CR determinemos o ponto N no arco de círculo. Tiremos por VN uma reta.

Centro em R e com um raio igual a b marquemos o ponto S , o qual, unido a R , resolve o problema. RN é a altura.

Problema 31. — Construir um triângulo conhecendo-se os meios dos três lados.

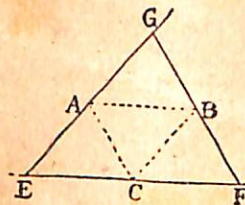


Fig. 124

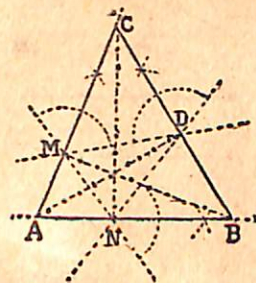


Fig. 125

Unamos entre si os três pontos A , B e C . Resulta o triângulo ABC . (fig. 124) pelos vértices do qual tracemos paralelas aos lados opostos.

As três retas se cortam formando o triângulo pedido EFG .

Problema 32. — Construir um triângulo conhecendo-se os pés das três alturas.

Sejam M , N e D os pés das alturas (fig. 125).

Liguemos estes pontos entre si e prolonguemos as retas além dos pontos dados.

Tracemos as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo MND e elas darão a solução do problema: o triângulo ABC .

Problema 33. — Construir um triângulo conhecendo-se um ângulo, um lado deste e a altura relativa a esse lado.

V é o ângulo, m o lado e h a altura. (fig. 126).

Sobre uma reta apliquemos $AB = m$ e tomando A para vértice, (fig. 127) façamos um ângulo igual a V ; de um ponto E qualquer de AB levantemos, uma perpendicular; sobre esta, a partir do pé, marquemos $EC = h$.

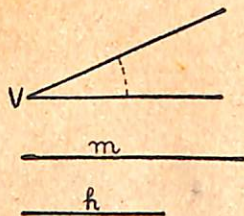


Fig. 126

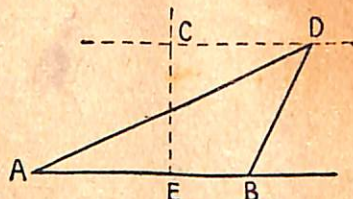


Fig. 127

Do ponto C tracemos uma paralela a AB , a qual vai determinar o ponto D , terceiro vértice do triângulo pedido ABD .

Problema 34. — Construir um triângulo conhecendo-se os ângulos adjacentes ao mesmo lado e a altura relativa a este lado.

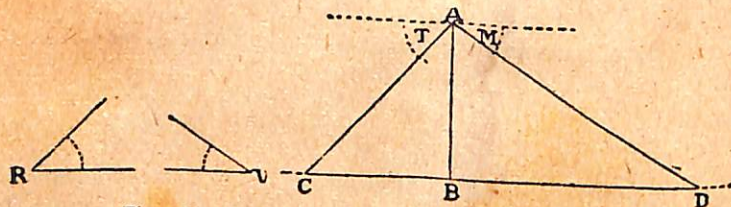


Fig. 128

Fig. 129

R e V são os ângulos da base (fig. 128) e AB é a altura (fig. 129). Fazamos passar, por A e por B , retas perpendiculares a AB .

Tomando A como vértice, façamos dois ângulos $M = V$ e $T = R$.

Os lados desses ângulos, vão determinar os pontos C e D e completam o triângulo pedido CDA .

Problema 35. — Construir um triângulo conhecendo-se um ângulo e as alturas relativas aos lados desse ângulo.

Façamos um ângulo A igual ao ângulo dado (fig. 130) e do vértice levantemos duas perpendiculares: uma a cada lado do ângulo.

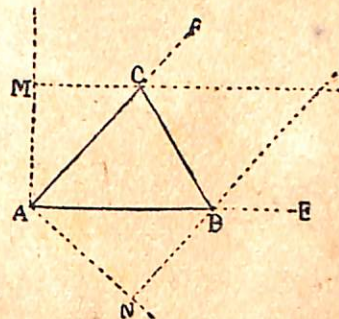


Fig. 130

Em uma destas perpendiculares marquemos AM igual a uma das alturas, e, na outra, AN igual à segunda altura dada.

Por M tracemos uma paralela ao lado AE e por N outra paralela ao lado AF .

As paralelas determinam os pontos B e C , que são os outros dois vértices do triângulo pedido ABC . Basta então, ligar B a C .

Problema 36. — Construir um triângulo conhecendo-se as três medianas.

Formemos um triângulo ABC (fig. 132) cujos lados sejam respectivamente iguais a dois terços de cada mediana, isto é:

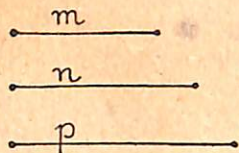


Fig. 131

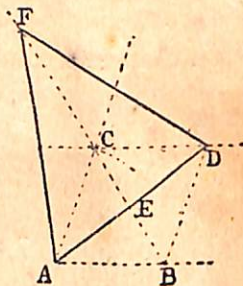


Fig. 132

$$AB = \frac{2}{3} \text{ de } m; \quad AC = \frac{2}{3} \text{ de } n \text{ e } BC = \frac{2}{3} \text{ de } p$$

Reproduzamos o triângulo ABC em CDB , traçando as paralelas aos lados CA e AB .

Prolonguemos DC , AC e BC ; tracemos AD e do ponto E apliquemos $EF = p$.

Liguemos F a A e a D . O triângulo pedido é ADF .

Problema 37. — Construir um triângulo conhecendo-se o perímetro e dois ângulos.

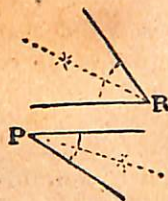


Fig. 133

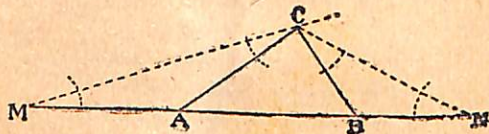


Fig. 134

Sejam P e R os ângulos dados (fig. 133) e MN (fig. 134) o perímetro.

Na extremidade M façamos um ângulo igual à metade de P ; no ponto N façamos um ângulo igual à metade de R .

Achamos, o ponto C ; em seguida façamos o ângulo $MCA = \angle M$ e $\angle NCB = \angle N$.

O triângulo ABC resolve o problema.

Problema 38. — Construir um triângulo equilátero dado o lado. Seja AB (fig. 135) o lado.

Sobre uma reta tomemos MN (fig. 136) igual a AB .

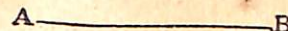


Fig. 135

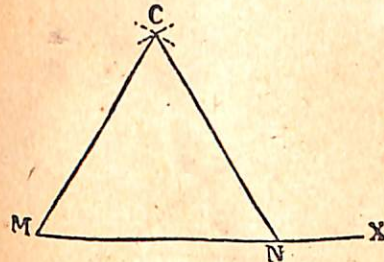


Fig. 136

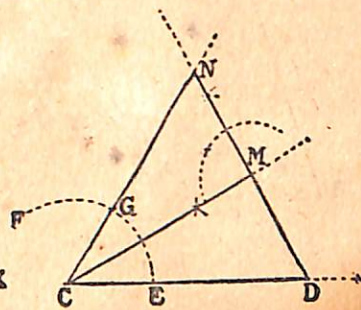


Fig. 137

Façamos centro em M e N e com raio igual a AB determinemos o ponto C , que, ligado aos pontos M e N , resolverá o problema.

Problema 39. — Traçar um triângulo equilátero conhecendo-se-lhe a altura.

Tracemos uma reta e, num ponto arbrário C tomado sobre ela (fig. 137) façamos centro, descrevendo com um raio qualquer o arco EF .

Centro em E e com o mesmo raio, determinemos o ponto G ; liguemos C a G ; depois tracemos bissetriz do ângulo GCE .

Apliquemos em CM a medida da altura dada e pelo ponto M façamos passar uma perpendicular a CM . O triângulo CDN resolve o problema.

Problema 40. — Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e a altura.

Seja b a base e a a altura (fig. 138).

Sobre uma reta tomemos AB igual à base e façamos passar pelo meio de AB uma perpendicular; a partir do pé desta marquemos DC igual a a .

Liguemos os pontos A e B ao ponto C e teremos resolvido o problema.

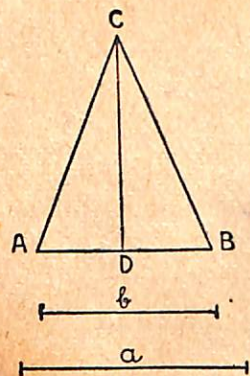


Fig. 138

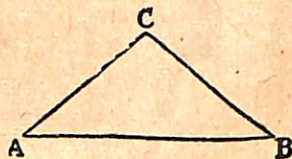


Fig. 139

Problema 41. — Construir um triângulo isósceles conhecendo a base e o lado.

Tracemos AB (fig. 139), igual à base conhecida.

Dos pontos A e B , como centros, e com um raio igual ao lado, determinemos o ponto C .

Liguemos C a A e a B e obteremos o triângulo pedido ABC .

Problema 42. — Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a base e um ângulo adjacente a esta base.

Seja m a base e E o ângulo adjacente (fig. 140).
Tracemos AB (fig. 141) igual a m e em cada extremidade façamos um ângulo igual ao ângulo dado.
O triângulo ABC resolve o problema.

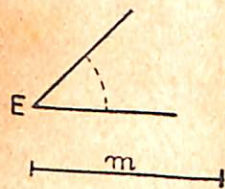


Fig. 140

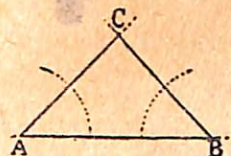


Fig. 141

Problema 43. — Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a altura e o perímetro.

Seja MN perímetro conhecido (fig. 142) e, pelo seu meio, tracemos uma perpendicular; apliquemos em CB a medida da altura dada e liguemos M e N a B .

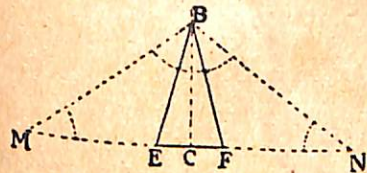


Fig. 142

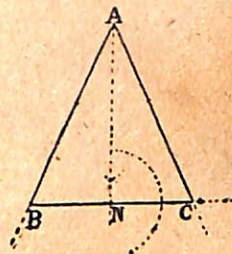


Fig. 143

Façamos os ângulos MBE e NBF iguais, cada um, ao ângulo M ou N .
 EFB é o triângulo pedido.

Problema 44. — Construir um triângulo isósceles conhecendo-se a altura e o ângulo do vértice.

Tracemos a bissetriz do ângulo dado A e sobre ela (fig. 143) apliquemos AN igual à altura conhecida. Fazemos passar por N uma perpendicular a AN , a qual determinará nos lados do ângulo os pontos B e C ; o triângulo ABC resolve o problema.

Problema 44 bis. — Construir um triângulo isósceles, conhecendo-se a base e o ângulo do vértice (ângulo oposto à base).

Seja n a base e V o ângulo do vértice.

Sobre uma reta tomemos AB igual a n (fig. 144) e no seu prolongamento façamos um ângulo igual a V (fig. 144), tomando B para vértice.

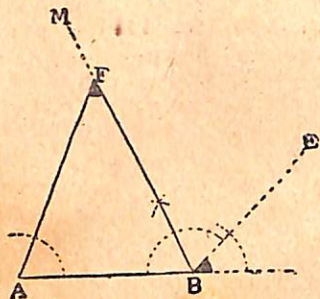


Fig. 144

Tracemos a bissetriz BM do ângulo ABE . O ângulo ABM é o ângulo adjacente à base. O problema se reduz então ao do número 42, pois conhecemos a base e o ângulo adjacente.

Problema 45. — Construir um triângulo isósceles conhecendo-se o lado e o ângulo da base.

Seja A o ângulo da base e BC o lado (fig. 145).

Façamos em V (fig. 146) um ângulo igual ao ângulo A e tomemos sobre um de seus lados, a partir do vértice, a medida $VD = BC$.

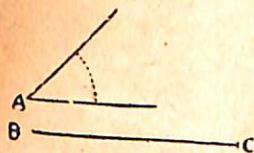


Fig. 145

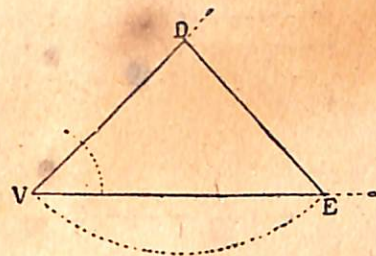


Fig. 146

Com o centro em D e o raio igual a DV , determinemos o ponto E , o qual é ligado ao ponto D . O triângulo VDE resolve o problema.

Problema 46. — Construir um triângulo retângulo conhecendo-se um ângulo agudo e a hipotenusa. Sobre uma reta marquemos MD (fig. 147) igual à hipotenusa; no ponto M façamos um ângulo igual ao ângulo dado, e do ponto D tracemos DE perpendicular a MG .

MDE é o triângulo pedido.

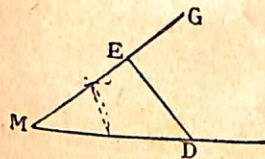


Fig. 147

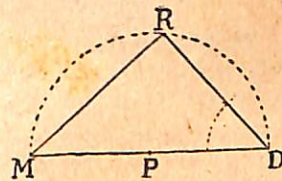


Fig. 148

Outro processo. — Dividamos a hipotenusa MD (fig. 148) ao meio e com o centro em P descrevamos a semi-circunferência de raio PM ; isto é, tracemos uma semi-circunferência cujo diâmetro seja a hipotenusa dada.

Tomemos para vértice um dos pontos (M ou D) e façamos um ângulo igual ao ângulo dado, prolongando o lado até alcançar a curva no ponto R . Liguemos R a M e teremos o triângulo pedido, MDR .

Problema 47. — Construir um triângulo retângulo, conhecendo-se a hipotenusa e um cateto.

AB (fig. 150) é a hipotenusa e CD (fig. 151) é o cateto.



Fig. 150



Fig. 151

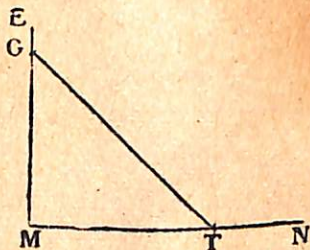


Fig. 152

Sobre uma reta marquemos $MT = CD$ (fig. 152); pelo ponto M levantemos uma perpendicular ME ; façamos centro em T e com um raio igual a AB cortemos a perpendicular ME no ponto G o qual, ligado ao ponto T , resolve o problema.

Problema 48. — Construir um triângulo retângulo, conhecendo-se um cateto e o ângulo agudo adjacente a esse cateto.

Sobre uma reta apliquemos AB (fig. 153) igual ao cateto; pela extremidade A levantemos uma perpendicular e na outra extremidade reproduzamos o ângulo agudo conhecido. O lado desse ângulo determinará, na perpendicular, o ponto D . O triângulo ABD resolve o problema.

Problema 49. — Construir um triângulo retângulo isósceles conhecendo-se a hipotenusa.

Seja AB (fig.154) igual à hipotenusa dada; tracemos-lhe a mediatriz.

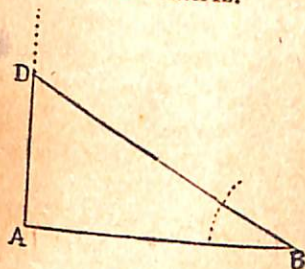


Fig. 153

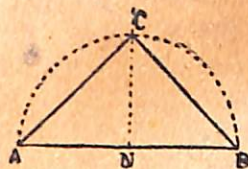


Fig. 154

Com um raio NA (metade de AB) descrevamos a semi-circunferência ACB .

Liguemos os pontos A e B ao ponto C e obteremos o triângulo pedido.

Problema 50. — Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a hipotenusa e a altura.

Sobre a hipotenusa AB , como diâmetro, descrevamos uma semi-circunferência (fig. 155) e de um ponto qualquer desse diâmetro (A por exemplo) levantemos-lhe uma perpendicular, sobre a qual marquemos AM igual à altura dada.

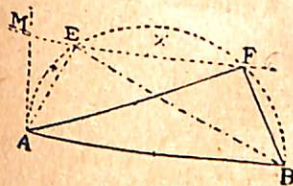


Fig. 155

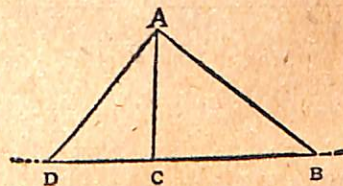


Fig. 156

De M tracemos uma paralela a AB , a qual determinará E e F na semi-circunferência.

Qualquer dos triângulos, AEB ou AFB , resolve o problema.

Nota. — Este problema só terá solução quando a altura for igual ou menor do que a metade da hipotenusa.

Problema 51. — Construir um triângulo retângulo conhecendo-se um cateto e a altura.

Por um ponto, C , de uma reta, levantemos-lhe uma perpendicular e marquemos sobre esta CA igual à altura dada (fig. 156).

Fazendo centro em A , com um raio igual ao cateto, marquemos o ponto B e tracemos AB .

Pelo ponto A levantemos AD perpendicular a AB . DAB é o triângulo pedido.

Problema 52. — Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a altura e a diferença dos ângulos agudos.

Seja MN a altura (fig. 157) e V a diferença entre os ângulos agudos (fig. 158).

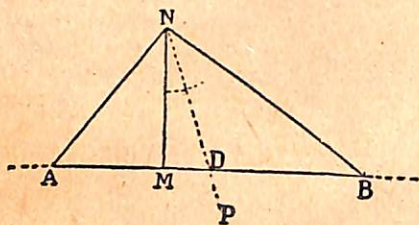


Fig. 157



Fig. 158

Façamos um ângulo $MNP = V$ e pela extremidade M tracemos uma perpendicular a MN ; esta perpendicular determina o ponto D no lado NP .

Reproduzamos em DB e DA a medida DN e unamos N a A e a B ; obteremos o triângulo pedido ANB .

Problema 53. — Construir um triângulo retângulo conhecendo-se a altura e a mediana relativas à hipotenusa.

Tracemos o triângulo retângulo APR em que o cateto AP é igual à altura dada e a hipotenusa AR é a mediana dada (fig. 159).

Prolonguemos PR em ambos os sentidos e marquemos RB e RC iguais a RA .

Tracemos AB e AC .

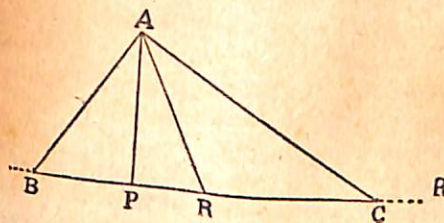


Fig. 159

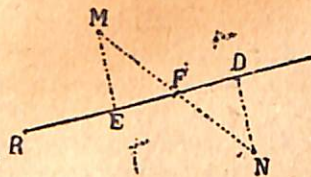


Fig. 160

BAC é o triângulo que resolve o problema.

Problema 54. — Por um ponto dado, R , traçar uma reta da qual dois outros pontos, M e N , também dados, fiquem equidistantes:

Tracemos MN e determinemos o seu meio E (figura 160). A reta RF resolve a problema.

Com efeito: os triângulos retângulos MEF e NDF são iguais por terem as hipotenusas iguais e os ângulos em F também iguais; logo $ME = ND$.

Nota — O problema não tem solução quando R, M e N estiverem sobre a mesma reta.

EXERCÍCIOS

1. Construir o triângulo cujos lados medem, respectivamente, 8,5cm, 7cm e 5,2cm. (Problema n.º 25).
2. Construir o triângulo em que um ângulo mede 42° e os lados que o formam medem, respectivamente, 5cm e 6,3cm (Problema n.º 26).

3. Construir o triângulo onde um lado mede 8,2cm e os ângulos adjacentes medem 36° e 48° , respectivamente. (Problema n° 27).
4. Construir o triângulo ABC em que AB tem 7cm; AC , 10cm e a altura relativa a AB mede 6cm. (Problema n° 30 — 1° caso).
5. Construir um triângulo em que um lado mede 6,5cm e a altura relativa a esse lado mede 4,3cm. (Problema n° 33).
6. Construir o triângulo ABC onde os ângulos B e C medem, respectivamente, 35° e 62° e a altura relativa a BC mede 7cm. (Problema n° 34).
7. Construir o triângulo ABC em que o ângulo $A = 40^\circ$ e as alturas relativas aos lados desse ângulo medem, respectivamente, 5,2cm e 6,3cm. (Problema n° 35).
8. Construir o triângulo cujas medianas medem 6cm, 7,2cm e 4,8cm. (Problema n° 36).
9. Construir o triângulo que tem 22cm de perímetro e em que um ângulo mede 30° e outro 48° (Problema n° 37).
10. Construir o triângulo equilátero de 5,8cm de lado (Problema n° 38).
11. Construir o triângulo equilátero de 4,5cm de altura. (Problema n° 39).
12. Construir o triângulo isósceles de 6cm de base e 4,8cm de altura. (Problema n° 40).
13. Construir o triângulo isósceles de 5cm de base e 8cm de lado. (Problema n° 41).
14. Construir o triângulo isósceles de 7cm de lado e cujo ângulo da base mede $42^\circ 30'$. (Problema n° 42).
15. Construir o triângulo isósceles de 18cm de perímetro e 5cm de altura. (Problema n° 43).
16. Construir o triângulo isósceles tendo 40° no ângulo do vértice e 8cm. de altura. (Problema n° 44).
17. Construir o triângulo isósceles cujo lado mede 9cm. e o ângulo da base mede 46° . (Problema n° 45).

18. Construir o triângulo retângulo em que a hipotenusa mede 7,5cm e um ângulo mede 62° . (Problema n° 46).
19. Construir o triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6cm e um cateto 3,6cm. (Problema n° 47).
20. Construir o triângulo retângulo em que um cateto é igual a 5,4cm e o ângulo agudo que lhe é adjacente mede 53° . (Problema n° 48).
21. Construir o triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa mede 6cm. (Problema n° 49).
22. Construir um triângulo retângulo com 8cm. de hipotenusa e 2,8cm. de altura. (Problema n° 50).
23. Construir o triângulo retângulo em que um cateto mede 5,2cm e a altura mede 4cm. (Problema n° 51).
24. Construir o triângulo retângulo onde a altura mede 3,8cm. e a diferença entre os ângulos agudos é 12° . (Problema n° 52).
25. Construir o triângulo retângulo em que a altura mede 4cm e a mediana relativa à hipotenusa mede 5cm. (Problema n° 53).