Série 2.ª LIVROS DIDÁTICOS *Vol. 113*
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

PRIMEIRO VOLUME

para a

Primeira Série do Curso Ginasial

660 exercícios orais e de classe
660 exercícios escritos e problemas

Savoir, c'est connaître une chose d'une manière évidente et certaine; c'est, de plus, en connaître la raison.
PORT-ROYAL

3.ª edição – 15 milheiros

BPB

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO - RIO DE JANEIRO - RECIFE - PÔRTO ALEGRE
1943

Itauna, 30 de dezembro de 1936.

Ilmo. Sr. Prof. Jacomo Stávale

Prezado Mestre

Manuseando diariamente os seus livros, no preparo das lições, na escolha dos exercícios para as aulas, cresce cada vez mais o meu entusiasmo, aumenta o meu interesse pelas suas lições, reunidas nos seus quatro volumes de Matemática.

Pode estar orgulhoso, caro professor — a orientação perfeitamente pedagógica, clara, prática, de suas lições, a paciência verdadeiramente beneditina na escolha, exposição e resolução dos exercícios — fazem do seu trabalho a obra didática mais perfeita que já se produziu no Brasil.

Não é uma opinião minha, particular, mas de todos os colegas, de todos os professores de Matemática. Todos tecem, sem favor, os melhores encômios ao seu esforço, ao seu trabalho, à sua paciência, à sua orientação de mestre perfeito, conhecedor das dificuldades dos discípulos, procurando vencê-las e não ladeá-las como fazem os demais livros didáticos que possuimos.

Os seus livros constituem um guia seguro para o aluno, um auxiliar precioso para o mestre.

E', pois, com a máxima satisfação que acuso o recebimento de sua carta-circular de 8 do corrente, anunciando a saida do prelo do Quinto Ano de Matemática.

Não é preciso ser profeta para prever um êxito sem limites, aliás merecido, a este novo volume que vem enriquecer a biblioteca matemática da pedagogia brasileira. Terei o máximo prazer em receber um exemplar, se o caro mestre se dignar enviar-m'o.

Com um abraço despede-se o

Col. Amo. Admor.

(*a*) PROF. JOSÉ DRUMMOND

Lente de Matemática da Escola Normal
Oficial de Itauna - Minas Gerais

Prefácio

Julio Tannery, o eminente matemático francês, em seu livro **Lições de Aritmética**, 9.ª edição revista, de 1926, interpretando as frações decimais, diz:

"*Appelons* **mètre** *l'unité de longueur, et ne craignons pas d'employer les mots* **décimètre, centimètre, millimètre,** *avec la signification à laquelle le lecteur est certainement habitué*". (pag. 231)

Como interpretar estas palavras? Por que *não recear* o emprego das palavras *decímetro, centímetro, milímetro?*

A explicação é simples. O ilustre autor ainda não iniciou o capítulo relativo ao sistema métrico o qual, em seu livro modelar, começa na pag. 345. Mas, *seus leitores devem estar certamente habituados à significação das palavras decímetro, centímetro, milímetro.* E o mestre não hesita em recorrer a estas noções, para facilitar aos seus leitores a aquisição das noções relativas às frações decimais.

Escrevendo este livro, seguí a orientação do grande matemático francês. Nossos alunos da primeira série ginasial passaram pelo crivo do exame de admissão aos ginasios; portanto, **devem ter boas noções** relativas às operações com números inteiros e fracionários, sistema métrico, etc.. Eis por que não vacilei em recorrer a estas noções, sempre que assim o julguei necessário para maior clareza da exposição.

*
* *

De acordo com a portaria ministerial n.º 170, de 11 de julho de 1942, o ensino de Aritmética na primeira série ginasial deve ser prático. Nada mais acertado.

Entretanto, escrevendo este livro, não renunciei às minhas idéias expostas no prefácio da segunda edição do meu **Primeiro Ano de Matemática.** Como conciliar os dois pontos de vista?

Nada mais simples.

Preliminarmente, obedecí à referida portaria, procurando dar às minhas lições uma feição inteiramente prática. Mas, aqui e ali, apresentei alguns teoremas. Desobediência à portaria já citada? Em absoluto! Erro de metodologia? De modo algum!

E' preciso semear para colher. Os teoremas apresentados neste livro, em número aliás muito reduzido, são de demonstração facílima, e sua finalidade principal é exercitar melhor os estudantes na arte de raciocinar para que, mais tarde, na terceira série ginasial, possam aprender, com facilidade, o método dedutivo que é o método por excelência, da Matemática.

* * *

Os prezados colegas que se dedicam ao ensino da Matemática devem ter observado a frequência com a qual os estudantes cometem certos erros.

Por exemplo, para simplificar a fração $\frac{3\times4}{3+5}$, cancelam o fator 3 (?) e escrevem este absurdo:

$$\frac{3 \times 4}{3+5} = \frac{4}{5} \text{ (?)}$$

Para evitar erros tão graves seria indispensavel o conhecimento dos teoremas relativos às quatro primeiras operações fundamentais. Tais teoremas não figuram, porem, no programa do curso ginasial. Resolvi, então, fazer uma pequena experiência, apresentando neste livro *alguns* deles. Peço agora aos meus colegas a fineza de verificarem, em suas aulas, a viabilidade do ensino desses teoremas.

Das observações que me forem enviadas deduzirei um critério seguro para que, numa próxima edição deste livro, possa reduzir ou ampliar o número desses mesmos teoremas.

* * *

Como sempre espero que os srs. professores se dignem dar a sua opinião a respeito deste livro, com toda a sinceridade, apontando sem rebuços os senões que nele, por ventura, encontrarem.

S. Paulo, janeiro de 1943.

O AUTOR

Rua Safira, 9.

Prefácio da Segunda Edição

do

Primeiro Ano de Matemática

NESTA segunda edição do meu "Primeiro Ano de Matemática" ampliei consideravelmente os *exercícios orais* cuja eficiência é realmente admiravel. Consideremos, por exemplo, os exercícios orais do parágrafo 43. (*) Todos os alunos abrem os livros na página em que estão estes exercícios, e o professor diz à classe que reflita sobre o exercício n.º 11. Ao cabo de poucos segundos chama um dos alunos para que faça a leitura da expressão aritmética dada neste exercício, *eliminando os parênteses*. E o aluno lerá: $8+7-10+6$. E se não acertar, *o professor fará a necessária correção no mesmo instante em que o erro foi cometido*. Uma vez feitos os 23 exercícios orais do parágrafo 43, é muitíssimo provavel que os estudantes nunca mais errem nesta espécie de exercícios e façam os seguintes (série VII), com a necessária segurança, alcançando assim boas notas nos trabalhos diários e nas provas mensais, parciais e finais.

* * *

Já o disse na primeira edição: é muito util o uso dos gráficos, mas é necessário evitar-lhes o abuso. Não me é possivel concordar com a interdição do método dedutivo no primeiro ano ginasial. Os meninos que constituem esta classe não são anormais; não são incapazes de raciocinar, como geralmente se supõe. São criaturas que têm cérebro; que ainda não sabem pensar com acerto, mas às quais devemos ensinar a pensar. O nosso dever

(*) Neste volume, o exercício indicado está na página 108, §84.

é adextrá-las na arte de raciocinar, e a Matemática é uma excelente escola para desenvolver o raciocínio. Eis por que, nestas noções elementares de Matemática, há algumas aplicações simples do método dedutivo.

Aos que me chamarem de retrógado ou antiquado ou cousa que o valha responderei que, compreendendo perfeitamente que os métodos antigos para o ensino da Matemática devem ser profundamente modificados, não há, entretanto, razão para exagerar a nova orientação e fazer do ensino da Matemática um verdadeiro caos. Eu prefiro ficar entre as duas correntes, aproveitando o que há de bom na escola antiga e na moderna. IN MEDIO VIRTUS.

Receberei com vivo prazer quaisquer pedidos de informações ou explicações, assim como *críticas, sugestões, correções*, etc., verbalmente ou por carta, em minha residência, rua Safira, 9, Aclimação.

Em relação à distribuição da matéria contida neste livro, recomendo vivamente a leitura do índice-sumário.

São Paulo, outubro de 1931.

O AUTOR

Índice-Sumário

GEOMETRIA INTUITIVA

CAP. I — Noções fundamentais de Geometria.

CAP. II — Figuras geométricas.

ARITMÉTICA PRÁTICA

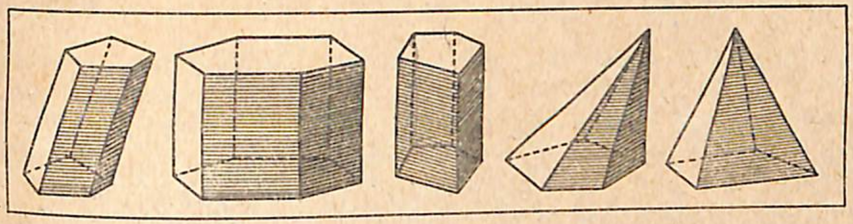
Cap. III — Operações fundamentais.

Cap. IV — Múltiplos e divisores.

Cap. V — Frações ordinárias.

Cap. VI — Frações decimais.

Cap. VII — Números complexos.



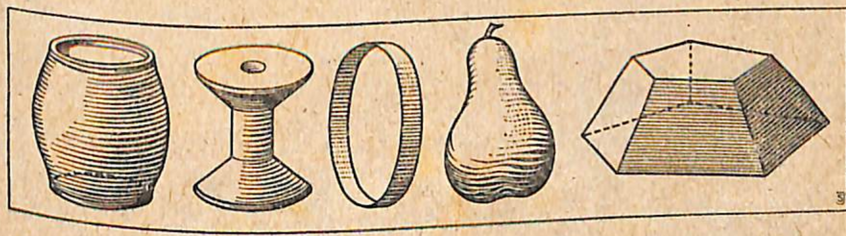
GEOMETRIA INTUITIVA

Capítulo I

Noções Fundamentais de Geometria

1. Os corpos e o espaço. *Corpo é tudo aquilo que ocupa lugar no espaço.* Portanto, os animais, os vegetais e os minerais que existem na terra; a própria terra e o sol, e a lua, e todos os planetas que giram em redor do sol; e as estrelas que, aos milhões, brilham à noite na amplidão do céu, tudo são corpos. O *espaço* é o meio em que vivemos; nele estão situados todos os corpos; extende-se em todos os sentidos, e não tem fim; *é infinito.*

2. A forma. O que representam as figuras desta página? Um barril, um anel, um bloco de granito, um pedaço de coluna, a base de uma estátua, as pirâmides do Egito, uma caixa, um carretel, uma pera? As respostas a estas perguntas não interessam à Geometria; a Geometria não se preocupa com a natureza desses



corpos, com a substância de que são feitos, com as suas propriedades físicas ou químicas, com a sua cor, peso, preço, dureza, resistência, etc., etc.; a Geometria preocupa-se, porem, com a *forma* desses corpos. Os corpos têm *forma*, esta coisa que não é preciso dizer o que seja, porque nós todos temos a noção do que é a *forma* de um corpo. *E um dos objetivos da* **Geometria** *é estudar a* **forma** *dos corpos.*

3. A extensão. Um corpo, qualquer que ele seja, ocupa sempre um lugar no espaço. Observando dois corpos quaisquer, podemos comparar as porções de espaço que ambos ocupam, e concluir que estas duas porções de espaço são iguais, ou mais ou menos iguais, ou diferentes; somos impressionados pelo tamanho dos dois corpos. Pois bem; o tamanho de um corpo, isto é, *a sua extensão,* é tambem um dos objetivos da Geometria; a Geometria tambem estuda a extensão dos corpos.

Extensão de um corpo é a porção de espaço ocupada por este corpo.

4. O sólido geométrico. A *forma* e a *extensão* de um corpo não podem existir, evidentemente, sem o corpo. Olhemos para aquela chaminé; se ela desaparecer, o mesmo acontecerá, sem duvida alguma, com a sua forma e a sua extensão. Pois bem; a Geometria estuda a forma e a extensão desta chaminé, como se esta forma e esta extensão pudessem existir independentemente da chaminé à qual pertencem. Em outras palavras: *a* **Geometria** *estuda todos os corpos, como se eles tivessem apenas* **forma** *e* **extensão,** *e nada mais.*

Aos corpos assim considerados dá-se o nome de *corpos geométricos* ou *sólidos geométricos* ou simplesmente *sólidos.*

Sólido geométrico é o corpo do qual se suprimem todas as suas propriedades, exceto duas: a forma e a extensão.

O sólido geométrico é, pois, uma coisa que não tem existência real; é uma porção de espaço; é uma coisa abstrata; *é um ente*

ideal; **é um dos quatro conceitos fundamentais da Geometria.**

5. Quais são os fins da Geometria? A palavra **Geografia** signfiica exatamente *descrição da Terra.* A palavra **Geometria** significa exatamente *medida da Terra.* E foi este, provavelmente, o primeiro objetivo da Geometria, o fim que deu nome a esta ciência. Foram talvez as inundações do rio Nilo, no Egito, que, modificando constantemente os terrenos marginais, obrigaram os governadores desse país a mandar *medir*, com frequência, as *terras* de seus vassalos, para que a cobrança dos impostos se fizesse com a maior equidade possivel. Pouco a pouco, porem, o dominio da Geometria se foi alargando, até constituir o que ela é atualmente: ***a ciência que tem por fim estudar a forma e a extensão dos corpos.***

6. A superfície. Examinemos os sólidos geométricos apresentados na pág. 1. Sólidos geométricos são pequenas porções do espaço, isto é, *são porções limitadas do espaço.* E quais são os limites de um sólido geométrico? Qual a separação, a parede divisória, entre um sólido e o resto do espaço? *E' a superfície do sólido;* o limite de um sólido geométrico é a sua superfície.

Superfície de um corpo é a parte exterior deste corpo.

Em rigor, nós não escrevemos no quadro negro; escrevemos na sua superfície. E' correto dizer que *estamos vendo uma parede* mas, na verdade, o que estamos vendo é a sua superfície.

Em geral, a superfície de um sólido se subdivide em varias porções, distintas umas das outras. Às vezes, porem, pode ser única ou *una*, como acontece, por exemplo, com a superfície da esfera.

Exercícios. Dizer de quantas porções distintas é constituida a superfície de cada um dos sólidos apresentados na pág. 1. Mostrar aos alunos os sólidos geométricos que devem existir na sala de aula (poliedros e corpos redondos) e fazer com estes sólidos o mesmo exercício.

Evidentemente, a superfície de um corpo não pode existir sem o corpo do qual ela é a parte exterior, o limite, a parede divisória entre a porção de espaço ocupada pelo corpo, e o resto do espaço. Entretanto, a Geometria, estudando a forma e a extensão de um sólido geométrico, tem necessidade, frequentemente, de estudar a superfície deste mesmo sólido, isoladamente, isto é, como se ela pudesse existir independentemente do sólido à qual pertence. A superfície, assim considerada, é mais uma abstração do nosso espirito; é uma coisa que não tem existência real; *é um ente ideal.* Imaginemos uma folha de papel de seda, extremamente fina, tão fina que se torne invisivel, e teremos a noção de que é a superfície, em Geometria. A superfície dos sólidos, assim considerada, **é um dos quatro conceitos fundamentais da Geometria.**

7. A linha. Consideremos um sólido geométrico qualquer. (fig. 1) A superfície deste sólido não é uma superfície única, como a de uma esfera; é uma superfície dividida em seis porções distintas, às quais podemos denominar *faces*, e distinguir umas das outras chamando-as respectivamente de *face anterior, face posterior, face inferior, face superior, face lateral direita e face lateral esquerda.*

A face anterior é a face ABFE, a face superior é a face EFGH, etc..

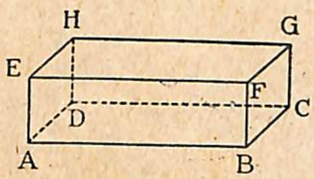


Fig. 1

Examinemos uma qualquer destas faces, por exemplo, a face anterior ABFE. Esta face é uma porção determinada de superfície, isto é, uma superfície fechada, limitada em todos os sentidos. E quais são os seus limites? Quais são as divisas da face ABFE?

São os riscos ou traços em cujas extremidades estão as letras A, B, F e E. Assim é que o traço AB separa a face ABFE da face ABCD; o traço BF separa a face ABFE da face BCGF; etc.. Em Geometria, estes traços ou riscos são chamados *linhas.*

As linhas são os limites de uma porção determinada de superfície.

Observemos mais que a linha EF é um dos limites da face ABFE, assim como da face EFGH; as porções de superfície ABFE e EFGH *se encontram ou se cortam, e este encontro ou corte é a linha* EF.

A linha é a intersecção de duas superfícies.

Evidentemente, uma linha não pode existir sem a superfície da qual representa um dos limites, ou sem as duas superfícies das

quais representa o *encontro*, a *intersecção.* Entretanto, a Geometria, estudando uma superfície limitada, tem necessidade, frequentemente, de estudar as linhas, separando-as, destacando-as da superfície, isolando-as, por assim dizer, no espaço. A linha, considerada assim separadamente do sólido e da superfície à qual pertence, é mais uma abstração do nosso espírito, é uma coisa que não tem existência real; *é um ente ideal.* Imaginemos um fio de linha, extremamente fino, tão fino que se torne invisivel, e teremos a noção do que é a linha, em Geometria. Qualquer traço, por muito fino que seja, sempre tem alguma largura sendo, portanto, uma representação exagerada da linha geométrica. A linha, assim considerada, **é um dos quatro conceitos fundamentais da Geometria.**

Exercício. Ler as faces da fig. 1. Ler as quatro linhas que limitam cada uma das faces. Dizer a linha que separa duas faces dadas. Reproduzir a figura no quadro negro e no papel. Mostrar, na sala de aula, objetos que tenham a forma representada pela fig. 1. Mostrar a necessidade de pontilhar as linhas DA, DC e DH. *Construir a fig.* 1 *em cartolina.*

8. O ponto. Consideremos um sólido geométrico qualquer. (fig. 1) A face anterior deste sólido é a face ABFE. Esta face é uma porção de superfície limitada pelas linhas AB, BF, FE e EA. Estas linhas se encontram duas a duas; por exemplo, as linhas AB e BF se encontram. O encontro destas duas linhas é o que se chama, em Geometria, um *ponto.* Portanto, *o ponto é o encontro ou a intersecção de duas linhas.* No sólido geométrico que estamos considerando (fig. 1) temos diversos pontos: A, B, F, E, etc.. O ponto A é a intersecção das linhas AB e AD ou AB e AE ou AD e AE; o ponto B é a intersecção das linhas BA e BC ou BA e BF ou BC e BF; etc..

Evidentemente, um ponto não pode existir sem as duas linhas das quais ele representa o encontro ou a intersecção. Entretanto, a Geometria tem necessidade, frequentemente, de considerar um ponto qualquer, separando-o das linhas a que pertence, isolando-o, por assim dizer, no espaço. O ponto, considerado assim separadamente das linhas a que pertence, é uma abstração do nosso espírito, é uma coisa que não tem existência real, *é um ente ideal.* Imaginemos o sinal imperceptivel que a ponta extremamente aguçada de um lapis deixa em uma folha de papel, tocando-a muito de leve, e teremos a imagem muito exagerada do que é um ponto, em Geometria. O ponto, assim considerado, **é um dos quatro conceitos fundamentais da Geometria.**

Em uma linha existem infinitos pontos, *isto é, tantos pontos quantos quisermos.*

Exercício. Ler os pontos indicados por letras, na fig. 1, dizendo as linhas das quais eles representam as intersecções. Depois de reproduzir a figura, no quadro negro, pedir aos estudantes que mostrem, com a ponta de um lapis, cada um destes pontos.

9. Representação gráfica dos conceitos fundamentais da Geometria. Os conceitos fundamentais da Geometria são quatro: *o sólido geométrico, a superfície, a linha e o ponto.*

> **O sólido geométrico é o corpo do qual se suprimem todas as propriedades, exceto a forma e a extensão.**
> **A superfície é a parte exterior de um corpo.**
> **A linha é a intersecção de duas superfícies.**
> **O ponto é a intersecção de duas linhas.**

E' evidente que, tomando um corpo qualquer, e suprimindo todas as suas propriedades, exceto a forma e a extensão, este corpo assim considerado, *este sólido geométrico*, deixa de ter existência real, *transforma-se num ente ideal*, o mesmo acontecendo, portanto, com as suas superfícies, linhas e pontos. Ora, é manifesta a dificuldade de estudar estas coisas irreais, *estes entes ideais*, raciocinar sobre elas, descobrir-lhes as propriedades, afim de conseguir os fins colimados pela Geometria. Daí a necessidade de torná-las visiveis, isto é, *de representá-las graficamente.*

Um ponto será representado pela intersecção de duas linhas pequeninas, *e designado por uma letra maiúscula;* por exemplo, ponto A. (fig. 2)

Uma linha será representada por um traço ou risco; nesta linha escolheremos dois pontos, que marcaremos com um pequeno risco direito, e que designaremos por duas letras maiúsculas; por exemplo, linha BC.

Uma certa porção de superfície será representada por três ou mais linhas que se encontrem duas a duas; *nas intersecções ou*

encontros destas linhas escreveremos letras maiúsculas; por exemplo, superfície DEFG.

Em relação ao sólido geométrico imaginaremos sempre que estamos colocados em frente a este corpo; supondo-o opaco, teremos o cuidado de pontilhar as linhas invisiveis, *escreveremos letras maiúsculas nos encontros de todas as linhas,* e diremos: *sólido* VMNRS.

As denominações *superfície* e *sólido* serão substituidas oportunamente por outras denominações particulares dadas às superfícies e aos sólidos, de acordo com a sua forma.

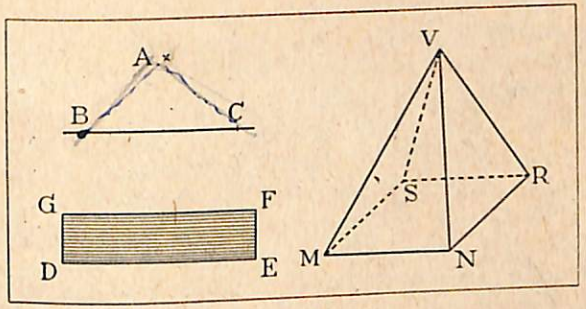


Fig. 2

E' necessário lembrar sempre que o ponto não tem extensão. Considerando o ponto A (fig. 2) lembremo-nos sempre de que a sua extensão é nula, em Geometria. O ponto geométrico é um ente ideal; qualquer sinal com o qual representemos um ponto é sempre uma imagem muito exagerada deste mesmo ponto. Um ponto tem apenas situação ou *posição* no espaço. *Dois pontos se distinguem um do outro, pela sua posição,* e nada mais. Um ponto está determinado quando se conhece a sua posição.

Não esqueçamos tambem que a linha, sob o ponto de vista geométrico, é como um fio de linha, extremamente fino, tão fino que se torne invisivel. Se a linha BC (fig. 2) tem uma largura bastante apreciavel, talvez de uns dois ou três décimos de milímetro, lembremo-nos sempre de que, em nossas considerações de ordem geométrica, esta largura será considerada como inexistente, isto é, nula.

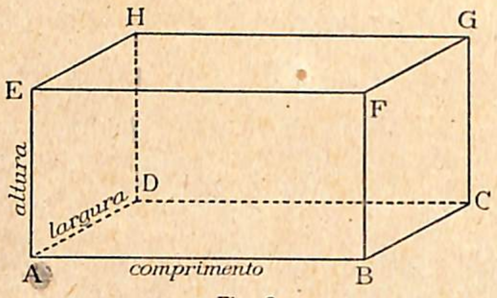


Fig. 3

10. Dimensões. *Um sólido geométrico tem tres* **dimensões** *chamadas, respectivamente,* **comprimento, largura e altura.** Não é necessário, por enquanto, definir o comprimento, a largura e a altura de um sólido geométrico, porque estamos certos de que os estudantes, observando um sólido geométrico qualquer, por exemplo, a sala de aula, um tijolo, uma caixa de papelão, etc., distinguirão imediatamente o comprimento, a largura e a altura de qualquer um destes sólidos. Mas estas denominações são relativas à posição do sólido. Com efeito, se levantarmos o sólido (fig. 3) de modo que a face ADHE fique sendo a face inferior, os estudantes dirão de pronto que a altura do sólido é AB, etc..

Conforme o caso, a altura pode ser chamada tambem *espessura* ou *profundidade.*

Na maioria dos casos, porem, será bastante dificil ou mesmo impossivel, determinar as três dimensões de um sólido. Por exemplo, em se tratando de uma esfera, onde estão o comprimento, a largura e a altura? Eis uma pergunta à qual, por enquanto, não é possivel responder.

A superfície tem duas dimensões : o comprimento e a largura. A superfície ABCD (fig. 3) tem *comprimento*, AB, e *largura*, AD.

A linha tem somente uma dimensão : o comprimento. A linha AB (fig. 3) tem apenas *comprimento.*

O ponto não tem dimensões.

11. Elementos geométricos e sua geração. Os quatro conceitos fundamentais da Geometria são tambem chamados *elementos geométricos.* Portanto, *os elementos geométricos são o* **ponto,** *a* **linha,** *a* **superfície** *e o* **sólido.**

O elemento geométrico mais simples é o ponto. Podemos tambem imaginar que um ponto em movimento gera uma linha, uma linha em movimento gera uma superfície, e uma superfície em movimento gera um sólido.

Suponhamos que um ponto qualquer A se desloca de um modo qualquer no espaço. O caminho por ele percorrido, o vestígio da sua passagem, *a sua trajetória,* é uma linha. Assim, **um ponto em movimento gera uma linha.** Uma estrela cadente, ao sulcar a amplidão do espaço, deixa no céu um risco luminoso; a estrela é o ponto e o risco luminoso é a linha.

Uma linha em movimento gera uma superfície. Imaginemos um bastão luminoso, com um comprimento qualquer e com uma grossura suficiente para que seja visivel. Se este bastão se desloca de um certo modo, em plena escuridão, com a velocidade de uma estrela cadente, o vestígio da sua passagem, a faixa luminosa que ele deixa no espaço, é uma superfície.

Uma porção de superfície em movimento gera um sólido geométrico. Coloquemos uma moeda sobre um pedaço de cera; fazendo pressão sobre a moeda, para que ela penetre na cera, formar-se-á uma cavidade que é a imagem de um sólido geométrico.

A geração dos elementos geométricos tambem pode ser considerada em ordem inversa. Consideremos o sólido representado pela fig. 3. Se a altura, AE, diminuir progressivamente até anular-se, o sólido ficará reduzido à superfície ABCD. Se a largura, AD, desta superfície, diminuir progressivamente até anular-se, a superfície ficará reduzida à linha AB. Finalmente, se o comprimento, AB, desta linha, diminuir progressivamente até anular-se, a linha ficará reduzida ao ponto A.

A figura geométrica é um conjunto de elementos geométricos, isto é, pontos, linhas, superficies e sólidos.

12. A linha reta e suas propriedades. A linha reta é a mais simples de todas as linhas. Um fio de linha, bem esticado, nos mostra claramente em que consiste uma linha reta.

Por dois pontos dados, A e B, podemos traçar sempre uma linha reta, e somente uma. (fig. 4)

Esta é a propriedade característica da linha reta. Para verificá-la experimentalmente, marquemos dois pontos, D e E,

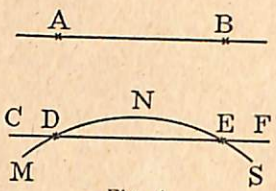


Fig. 4

(fig. 4) sobre a superfície de uma mesa e, nestes dois pontos, cravemos dois alfinetes. Em seguida, façamos passar por estes dois pontos, duas linhas (dois fios de linha) CDEF e MDNES. Esticando convenientemente os dois fios de linha, verificaremos que eles se confundem, formando um unico fio.

Observação. Esta experiência pode ser feita no quadro negro, substituindo alfinetes e linhas por pregos e cordeis.

Em lugar de *linha reta*, dizemos habitualmente, *reta*.

As retas são traçadas com a régua. Sendo a régua um instrumento destinado ao traçado de retas, um desenhista, antes de utilizar-se dela, deve verificar se a régua está realmente em condições de traçar retas. Ora, esta verificação é facílima, graças à propriedade característica da linha reta.

Em uma folha de papel marcam-se dois pontos A e B. (fig. 5) Depois, com o auxílio da regua MN, traça-se a reta AB, tendo o cuidado de colocar as extremidades M e N da régua, respectivamente à esquerda e à direita dos pontos A e B. Em seguida, mudando-se a posição da régua, de modo que as extremidades M e N fiquem respectivamente à direita e à esquerda dos pontos B e A, traça-se uma segunda reta AB. As duas retas devem coincidir, em virtude da propriedade caracteristica da linha reta. Se as duas retas não coincidirem, se se apresentarem como o indica a fig. 5, é porque a regua é defeituosa.

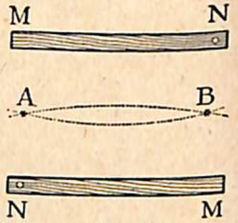


Fig. 5

Da propriedade característica da reta resultam mais as seguintes:

1.ª Duas retas AB e A'B', tendo dois pontos comuns, coincidem em toda a sua extensão. (fig. 6)

Assim, se o ponto A *coincide* com o ponto A', e o ponto B *coincide* com o ponto B', isto é, se os pontos A e A' constituem um unico ponto, assim como os pontos B e B', *as retas* AB e A'B' *coincidem em toda a sua extensão;* as duas retas constituem, na realidade, uma unica reta.

2.ª Duas retas distintas não podem ter senão um ponto comum. (fig. 6)

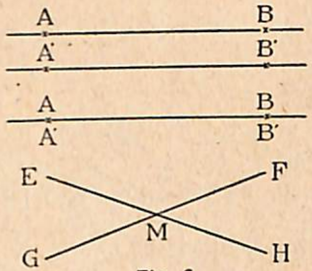


Fig. 6

As duas retas distintas EH e FG têm um ponto comum, o ponto M. (fig. 6) Este ponto está situado nas duas retas; pertence às duas retas; *é a sua intersecção.*

3.ª Por um ponto dado podemos traçar uma infinidade de retas.

Seja a reta EH (fig. 6) da qual conhecemos somente o ponto M. Então nós não sabemos qual a *posição* da reta EH, porque há uma infinidade de retas que passam pelo ponto M. Entretanto, se alem do ponto M, conhecermos tambem o ponto E, teremos a *posição* da reta EH porque, por dois pontos dados, E e H, só é possivel traçar uma reta.

13. Retas verticais, horizontais e inclinadas. E' muito conhecido o *fio de pumo*, instrumento com o qual o pedreiro verifica se a parede que está construindo é *vertical*. Assim, o fio de prumo nos mostra em que consiste *a posição ou direção vertical*. (*)

Ponhamos água dentro de um bacia e, depois que a água estiver completamente parada, coloquemos um lapis sobre ela. A posição do lapis nos mostra em que consiste *a posição ou direção horizontal*. (**)

Uma reta é vertical quando segue a direção do fio de prumo. E' horizontal quando segue a direção das aguas em repouso. E' inclinada, quando não é nem horizontal, nem vertical.

14. Semirretas e segmentos. Em uma folha de papel marquemos dois pontos, A e B. (fig. 7) Em seguinda, tracemos uma reta, XY, que passe pelos pontos A e B. A retá XY não tem começo nem fim porque, com o auxílio da régua, podemos prolongá-la para um lado e para o outro, ou para a direita e para

(*) E' conveniente mostrar aos alunos um fio de prumo, e verificar, com o mesmo, a *verticalidade* das paredes da sala de aula.

(**) Esta afirmação não é válida para as grandes massas líquidas.

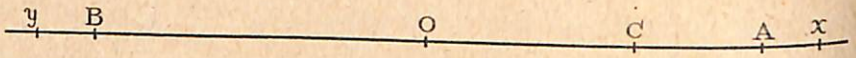


Fig. 7

a esquerda, enfim, em dois sentidos opostos, a saber, de BA para X ou de AB para Y. Os pontos X e Y são pontos da reta XY, *mas não são as suas extremidades.* Embora as dimensões do quadro negro ou da folha de papel em que desenhamos, nos obriguem a *limitar* uma reta, lembremo-nos sempre de que, em Geometria, *a reta é ilimitada nos dois sentidos;* não tem começo nem fim; *não tem origem nem extremidade.*

Sobre a reta XY tomemos um ponto qualquer O; este ponto divide a reta XY em duas porções distintas chamadas **semirretas:** a *semirreta* OX e a *semirreta* OY. A semirreta distingue-se da reta por ter começo, princípio, *origem;* as semirretas OX e OY têm *origem;* é o ponto O. Mas não têm fim, não têm *extremidade.*

Semirretas opostas são duas semirretas que, tendo a mesma origem, constituem uma única reta. E' o que acontece com as semirretas OX e OY. (fig. 7)

> **Segmento retilíneo é a porção de reta compreendida entre dois pontos desta mesma reta.**

Assim, AO, OB, BC, AB, OC, AC (fig. 7) são segmentos retilíneos. Um segmento retilíneo tem começo e tem fim; *tem origem e tem extremidade.* Em relação ao segmento AC (fig. 7) a origem é o ponto A, e a extremidade é o ponto C. Pode ser o contrário.

Em lugar de *segmento retilíneo* podemos dizer *segmento de reta;* se não houver possibilidade de confusão, basta dizer *segmento.*

De acordo com a propriedade característica da linha reta, se tomarmos um segmento qualquer AC (fig. 7) e colocarmos suas extremidades sobre uma reta qualquer XY (fig. 7) todos os pontos do segmento ficarão colocados sobre a reta XY.

15. Comparação de segmentos. Consideremos os segmentos AB e CD. (fig. 8) Coloquemos o segmento CD sobre o segmento AB, de modo que o ponto C coincida com o ponto A. Se o ponto D

coincidir com o ponto B, então os dois segmentos coincidirão em toda a sua extensão (§ 12), diremos que *os dois segmentos são iguais*, e escrevemos AB = CD. Portanto, **dois segmentos são iguais quando é possivel colocá-los um sobre o outro, de modo que suas extremidades coincidam.** E diremos, neste caso, que *os dois segmentos têm o mesmo* **comprimento.**

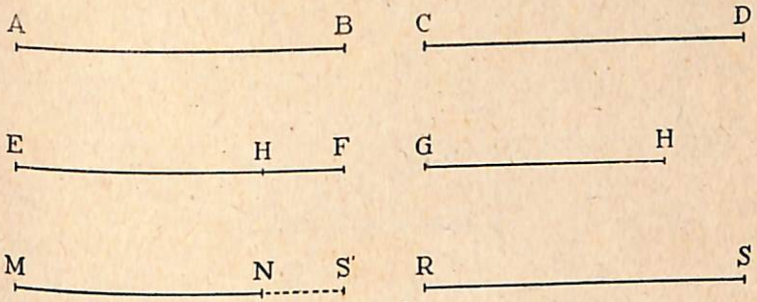


Fig. 8

Consideremos os segmentos EF e GH. Coloquemos o segmento GH sobre o segmento EF, de modo que o ponto G coincida com o ponto E. Se o ponto H não coincidir com o ponto F, mas coincidir com um ponto H', situado entre os pontos E e F, diremos que *o segmento* EF *é maior que o segmento* GH, e escreveremos EF > GH. (EF *é maior que* GH.) (*) E diremos, neste caso, que *o segmento* EF *tem* **comprimento** *maior que o segmento* GH.

Consideremos os segmentos MN e RS. Coloquemos o segmento RS sobre o segmento MN, de modo que o ponto R coincida com o ponto M. Se o ponto S não coincidir com o ponto N, mas coincidir com um ponto S', situado à direita do ponto N, diremos que *o segmento* MN *é menor que o segmento* RS e escreveremos MN < RS. (MN *é menor que* RS.) E diremos, neste caso, que *o segmento* MN *tem* **comprimento** *menor que o segmento* RS.

Em resumo; dados dois segmentos AB e A'B' existe entre ambos uma e somente uma, das três relações seguintes:

$$AB = A'B' \qquad AB > A'B' \qquad AB < A'B'$$

(*) Para indicar que um número (ou um segmento) é maior ou menor que outro número (ou outro segmento) colocaremos entre ambos um pequeno ângulo com a abertura voltada para o maior.

16. A medida de um segmento. Medir ou avaliar uma grandeza (*) é verificar quantas vezes esta grandeza contem uma outra da mesma espécie, e que recebe o nome de *unidade*. O resultado da avaliação de uma grandeza é sempre indicado por um número.

Para medir um segmento AB (fig. 9) toma-se como unidade, um outro segmento CD e aplica-se o segmento CD sobre o segmento AB, tantas vezes quantas for possivel. Se o segmento CD couber exatamente 3 vezes no segmento AB, diremos que a medida

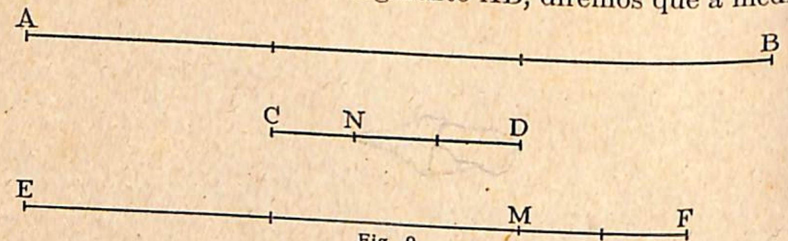


Fig. 9

do segmento AB é **três CD,** isto é, *o comprimento do segmento AB é três* CD.

> **Comprimento de um segmento de reta é o número que exprime quantas vezes este segmento contem um outro segmento tomado como unidade.**

Pode acontecer que o segmento CD, tomado como unidade, não esteja contido em um segmento dado EF (fig. 9) um número exato de vezes. Suponhamos que o segmento CD esteja contido duas vezes no segmento EF, havendo um resto, o segmento MF. Neste caso, divide-se o segmento unidade CD, em um número qualquer de partes iguais, por exemplo, em três, e aplica-se uma

(*) Não há inconveniente em falar, desde já, em *grandezas* porque *a noção de grandeza é intuitiva*. Mas é indispensavel exemplificar, mostrando aos estudantes as numerosas grandezas existentes na sala de aula; o conjunto dos alunos, o das carteiras, as pilhas de livros, o comprimento ou a largura do quadro-negro, a superfície e o volume da sala do aula, o peso de cada um dos alunos, a intensidade das lâmpadas elétricas, etc..

destas partes, o segmento CN, no resto MF, tantas vezes quantas for possivel. Se o segmento CN couber duas vezes exatamente no segmento MF, diremos então que *a medida ou e comprimento do segmento* EF *é* **dois e dois terços,** isto é, duas vezes o segmento CD, mais duas vezes a terça parte do segmento CD. (*)

O segmento CD, tomado como unidade para medir segmentos quaisquer, pode ser um segmento qualquer. Entretanto, por motivos bem faceis de compreender, o segmento tomado como unidade, **a unidade de comprimento** adotada pela maioria das nações, é o ***metro.*** E, quando é necessário dividir o metro em um certo número de partes iguais, este número é **10, 100 ou 1000,** e as divisões resultantes são chamadas **decímetros, centímetros ou milímetros.**

Exercícios em classe

1. Desenhar um segmento AB, com 12cm.
2. » » » CD, » 85mm.
3. » » » EF, » 1dm e 3cm.
4. » » » GH, » 74mm.
5. » » » MN, » 8cm e 4mm.
6. Desenhar um segmento AB com 32mm. Em seguida, traçar segmentos iguais ao duplo, ao triplo, ao quádruplo, etc., do segmento AB.
7. Desenhar dois segmentos quaisquer, AB e CD. Em seguida, desenhar um terceiro segmento MN, que represente a *soma* dos segmentos AB e CD, e um quarto segmento OP, que represente a *diferença* dos mesmos segmentos.
8. Medir o comprimento de alguns segmentos existentes na sala de aula.

17. Linhas quebradas, curvas, mixtas. *Dois segmentos retilíneos são chamados* **colineares,** *quando pertencem à mesma reta.* Os segmentos AO e CB (fig. 7) são **colineares.**

Dois segmentos retilíneos são **consecutivos** *quando, sendo distintos, têm uma extremidade comum.* Os segmentos OC e CA (fig. 7) são consecutivos.

Dois segmentos colineares podem ser consecutivos; os segmentos BO e OC (fig. 7) são consecutivos. Entretanto, nem sempre dois segmentos colineares, são consecutivos; é o caso dos segmentos AC e OB. (fig. 7)

(*) Não é possível, por enquanto, falar em grandezas comensuraveis ou incomensuraveis com a unidade.

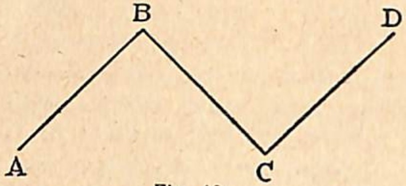


Fig. 10

Finalmente, dois segmentos podem ser consecutivos e não ser colineares; é o caso dos segmentos AB e BC. (fig. 10)

Linha quebrada ou **poligonal** *é uma linha que, não sendo reta, é formada de segmentos retilíneos consecutivos.* (fig. 10) A origem, A, do primeiro segmento, AB, é a *origem da linha poligonal;* a extremidade, D, do último segmento, CD, é a *extremidade da linha poligonal.* Entretanto, podemos tomar o ponto D como origem, e o ponto A como extremidade da mesma linha.

Aos diferentes segmentos retilíneos que constituem uma linha poligonal, podemos dar o nome de *elementos* da linha poligonal.

Se o número de elementos de uma linha poligonal aumenta indefinidamente e, se o comprimento de cada um destes elementos diminue indefinidamente, *a linha poligonal se transforma em uma linha curva.*

A linha curva é a linha que não é reta, nem formada de porções de retas.

Uma linha mixta é uma linha formada de porções de retas e curvas.

Exercícios. Traçar no quadro negro uma linha reta, uma curva, uma quebrada e uma mixta. Mostrar na sala de aula algumas destas linhas. Com o auxílio de sólidos geométricos, poliedros e corpos redondos, mostrar aos estudantes as quinas ou arestas destes sólidos, fazer-lhes ver que as arestas ou quinas são linhas, e classificar estas linhas.

Sejam dois pontos fixos A e B. (fig. 11) Liguemos o ponto A ao ponto B, com três linhas distintas; o segmento AB, a linha quebrada ACDB, e a linha curva AMONB. Admitiremos como evidente que o comprimento do segmento retilíneo AB é menor que o comprimento da linha quebrada ACDB ou da linha curva AMONB. *O comprimento do segmento retilíneo*

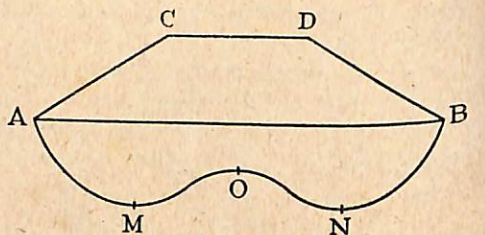


Fig. 11

AB representa a menor distância do ponto A ao ponto B. Portanto, a menor distância entre dois pontos dados, A e B, ou simplesmente, a distância entre dois pontos dados A e B, é o comprimento do segmento retilíneo AB. (*) Esta verdade é enunciada, geralmente, assim:

> **A linha reta é o caminho mais curto entre dois pontos.**

18. O plano. A superfície de um quadro negro, de uma mesa, de um lago cujas águas estejam em completo repouso, é chamada *superfície plana* ou, abreviadamente, *plano.*

O plano não se define porque qualquer pessoa, mesmo sem conhecer Geometria, sabe dizer se uma superfície é ou não é plana. Os trabalhadores do campo, os sertanejos, dizem, sem hesitar, se um terreno é ou não é *plaino;* se é preciso, ou não, *aplainá-lo* para, em seguida, utilizá-lo de um modo qualquer. Entretanto, devemos conhecer *a propriedade característica de um plano,* e que serve para distinguí-lo das demais superfícies. Esta propriedade é a seguinte:

> **Se traçarmos uma reta que passe por dois pontos situados em um plano, toda a reta ficará situada neste plano, *sejam quais forem os dois pontos escolhidos.***

E' desta propriedade característica do plano que se utiliza o marcineiro para verificar se a superfície que ele quer *aplainar,* istò é, tornar *plana,* já está realmente plana. Sobre a superfície suposta plana, o marcineiro aplica, em todas as direções, a quina de uma regua perfeita. (§ 12) Chamamos quina da régua ao lado da mesma regua destinado ao traçado de retas. Se a quina da régua se adaptar completamente à superfície suposta plana, isto é, se não passar luz entre a quina da régua e a superfície, *e se este fato se verificar depois de variar uma porção de vezes a posição*

(*) E' permitido dizer que a distância entre dois pontos A e B é o segmento de reta AB. (Severi) *da régua*, é de supor que a superfície esteja bem aplainada, isto é, seja realmente plana.

Exercício. Os estudantes devem verificar se as superfícies de suas carteiras escolares são realmente planas.

Já vimos o que é superfície, em Geometria. (§6) Vimos tambem qual a sua representação gráfica. (§9) Acrescentaremos agora que *uma superfície plana deve ser considerada sempre* **ilimitada** *em todas os sentidos.* Embora representemos um plano por uma porção de superfície limitada em todas os sentidos e digamos, por exemplo, plano ABCD (fig. 12) é necessário não esquecer que *este plano se extende alem de suas divisas* AB, BC, CD e DA, *em todos os sentidos, e ilimitadamente.*

Dado um plano qualquer ABCD, se neste plano traçarmos uma reta qualquer MN, este plano ficará dividido em duas porções distintas chamadas *semiplanos.* Estes dois semiplanos poderão ser denominados *semiplano direito e semiplano esquerdo.* Se a divisão do plano em dois semiplanos é feita pela reta RS, os dois semiplanos poderão ser denominados *semiplano superior e semiplano inferior.*

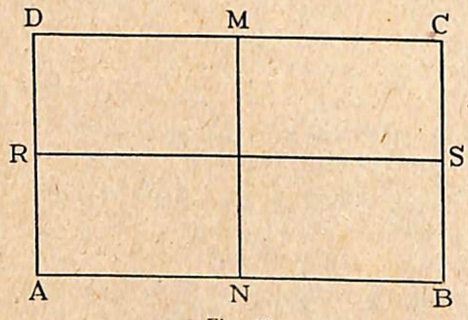


Fig. 12

Duas retas situadas em um mesmo plano são chamadas **complanares.**

Em um plano existem infinitos pontos e infinitas retas. Isto quer dizer que, em um plano, existem tantos pontos e tantas retas quantos quisermos.

Exercícios em classe

1. Colocar uma régua em posição vertical; em **diferentes** posições horizontais; em **diferentes** posições inclinadas.

2. Segurar um caderno ou um livro de modo que as quatro linhas marginais fiquem em posição horizontal. E' possivel?

3. Segurar um caderno de modo que as quatro linhas marginais fiquem em posição vertical. E' possivel?

4. Segurar um caderno de modo que as quatro linhas marginais fiquem em posição inclinada. E' possivel?

5. Traçar em uma folha de papel uma reta qualquer. Depois, segurando convenientemente esta folha, apresentar a reta traçada, sucessivamente, em posição horizontal, vertical e inclinada.

6. Traçar no papel um segmento horizontal com 12cm, um segmento vertical com 8cm e de modo que os dois se dividam reciprocamente em partes iguais.

7. A mesa dos estudantes é inclinada. Sobre a mesa cada um dos estudantes coloca a sua folha de papel de desenho, na posição habitual. Depois traça uma horizontal AB e uma vertical CD. A vertical CD é **realmente** uma vertical? Como colocar a folha de papel para que a vertical CD seja **realmente** uma vertical?

8. Traçar um segmento AB com 8cm. Prolongar este segmento no sentido AB e de modo que o prolongamento BC meça 5cm. Prolongar este mesmo segmento no sentido BA e de modo que o prolongamento AD meça 6cm.

9- Em uma estrada reta XY toma-se um ponto fixo O, o qual divide a mesma estrada em duas semirretas OX e OY. Dois meninos partem do ponto O, às 6 horas da manhã, dispostos a chegarem ao **fim** da semirreta OX. E' possivel? Sejam Pedro e Paulo os dois meninos. Pedro anda 48 metros por minuto e Paulo anda 42 metros. Às 9 horas da manhã, a que distância se acham um do outro? E às 9 horas e três quartos? Suponhamos agora que Pedro resolve caminhar até chegar ao fim da semirreta OX e Paulo até o fim da semirreta OY. Se ambos partirem do ponto O, isto é, da origem das duas semirretas, às 6 horas da manhã, a que distância se acharão um do outro, às 8 horas da manhã? E às 8 horas e 32 minutos?

19. Ângulo. *Ângulo é a figura formada por duas semirretas que têm a mesma origem.*

O ponto O é a origem das duas semirretas OA e OB. Estas têm a mesma origem, o ponto O, **seguem em geral, direções diferentes,** e a figura que elas formam é chamada **ângulo.** As duas semirretas são os **lados** do ângulo e a origem das mesmas é o **vértice.** Para ler um ângulo, (fig. 13) é necessário dizer **ângulo** AOB ou **ângulo** BOA, colocando a letra do vértice entre as outras duas. E' erro dizer ângulo ABO ou ângulo BAO.

No decorrer destas lições, em lugar de escrever **ângulo** AOB ou **ângulo** BOA, escreveremos frequentemente: $\hat{AOB}$, $\hat{BOA}$.

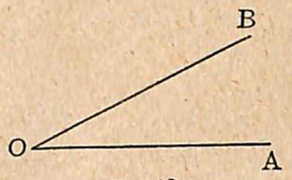


Fig. 13

Os lados de um ângulo são duas semirretas, as quais têm comprimento indeterminado; portanto, o **comprimento dos**

lados de um ângulo em nada influe sobre a grandeza do mesmo ângulo.

Mas, se o comprimento dos lados de um ângulo em nada influe sobre a grandeza deste ângulo, **o que é que vamos medir em um ângulo?** Em que consiste a grandeza de um ângulo? Quando é que dois ângulos são iguais? E diferentes?

A grandeza de um ângulo consiste simplesmente na sua abertura.

Observemos este compasso. Suponhamos que os dois ramos deste compasso são semirretas. Então este compasso é a imagem de um ângulo, representa um ângulo. Se o compasso está fechado, os dois ramos do mesmo, e que estamos supondo que são duas semirretas, *formam um ângulo nulo.* Se afastarmos lentamente um do outro, os dois ramos do compasso, teremos diante dos olhos um ângulo cuja grandeza vai aumentando pouco a pouco; se os aproximarmos lentamente, um do outro, teremos diante dos olhos um ângulo cuja grandeza vai diminuindo pouco a pouco. E é nisto que consiste a grandeza de um ângulo; **na sua abertura.**

Sejam duas semirretas Ox e Oy, tendo a mesma origem, o ponto O, e o mesmo sentido. (fig. 14*a*) Estando as duas semirretas nesta posição, diremos que elas formam *um ângulo nulo.* Façamos a semirreta Oy girar em torno do ponto O, no plano em que estão situadas, como se fosse um ponteiro de relogio, mas em sentido oposto; o ângulo xOy, das duas semirretas, que era nulo, começa a aumentar. (fig. 14*b*)

Quando as duas semirretas Ox e Oy ficam opostas, formando uma reta, dizemos, em Geometria, que elas estão formando *um ângulo raso ou ângulo direito.* (fig. 14*c*)

O ângulo raso ou ângulo direito é tambem chamado **ângulo de meia volta.**


Fig. 14*a*

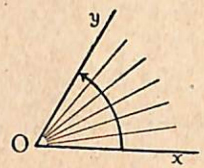


Fig. 14*b*

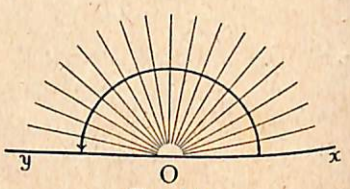


Fig. 14*c*

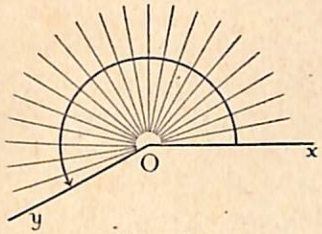


Fig. 14*d*

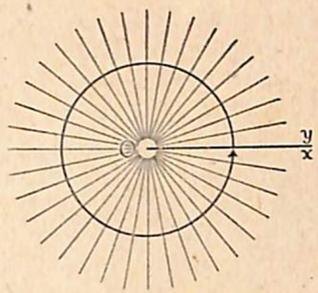


Fig. 14*e*

Continuando a semirreta Oy em seu movimento de rotação, voltará novamente a coincidir com a semirreta Ox. E diremos, neste caso, que as semirretas Ox e Oy estão formando *um ângulo de uma volta,* tambem chamado *ângulo giro* ou *perígono.* (fig. 14*e*)

Ângulos convexos são os ângulos menores que o ângulo raso; ângulos côncavos são os ângulos maiores que o ângulo raso. O ângulo xOy (fig. 14*b*) é convexo; o ângulo xOy (fig. 14*d*) é côncavo.

Observação. Em tudo o que se segue, quando falarmos em *ângulos,* fica entendido que estamos nos referindo sempre aos ângulos convexos, isto é, aos ângulos menores que o ângulo raso ou ângulo de meia volta.

20. O ângulo reto. Consideremos o ângulo raso xOy (fig. 15) e seja Oz uma semirreta movel.

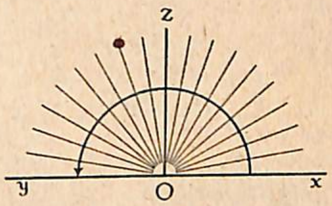


Fig. 15

E' evidente que a semirreta Oz, executando o movimento de rotação indicado no parágrafo anterior, haverá um momento em que esta semirreta formará com a reta xOy, dois ângulos iguais. O ângulo xOz (ou yOz) é *um ângulo de um quarto de volta,* e é chamado *ângulo reto.*

O ângulo reto é a metade de um ângulo raso ou ângulo de meia volta.

21. Igualdade de ângulos. *Dois ângulos são iguais quando é possivel fazê-los coincidir.* Dados dois ângulos AOB e A'O'B', (fig. 16) para fazê-los coincidir temos de colocar o ângulo A'O'B' sobre o ângulo AOB, de modo que os vertices O e O' coincidam,

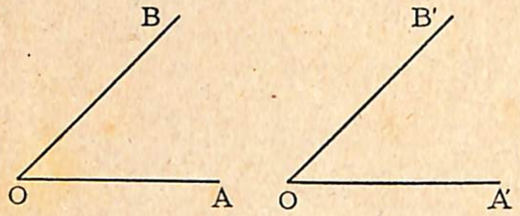


Fig. 16

a semirreta O'A' coincida com a semirreta OA, e as semirretas O'B' e OB fiquem do mesmo lado de OA (ou O'A').

Observação. Notemos desde já que duas semirretas podem coincidir somente em direção.

Isto posto, podem dar-se três casos distintos.

Primeiro caso. *A semirreta* O'B' *coincide, em direção, com a semirreta* OB. (fig. 16*a*) Neste caso, os dois ângulos são iguais, e escreveremos:

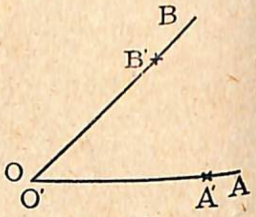


Fig. 16*a*

$$A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$$

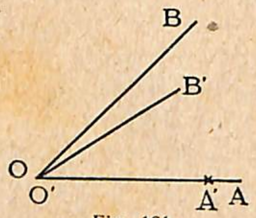


Fig. 16*b*

Segundo caso. *A semirreta* O'B' *fica situada no interior do ângulo* AOB. (fig. 16*b*) Neste caso, o ângulo AOB é maior que o ângulo A'O'B', e escreveremos:

$$A\hat{O}B > A'\hat{O}'B'$$

Terceiro caso. *A semirreta* O'B' *fica situada no exterior do ângulo* AOB. (fig. 16*c*) Neste caso, o ângulo AOB é menor que o ângulo A'O'B', e escreveremos:

$$A\hat{O}B < A'\hat{O}'B'$$

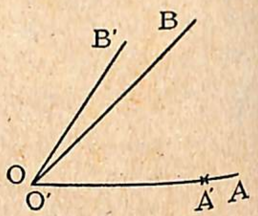


Fig. 16*c*

Em resumo, dados dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$, existe entre ambos uma, e somente uma, das três relações seguintes:

$$\hat{A} = \hat{A}' \qquad \hat{A} > \hat{A}' \qquad \hat{A} < \hat{A}'$$

Todos os ângulos rasos são iguais.

Com efeito, um ângulo raso é constituido por duas semirretas opostas, isto é, duas semirretas que formam uma unica reta. (§ 19) Ora, sendo possivel fazer coincidir duas retas, é sempre possivel fazer coincidir dois ângulos rasos. Portanto, *todos os ângulos rasos são iguais.*

Todos os ângulos retos são iguais. Com efeito, desde que o ângulo reto é a metade de um ângulo raso (§ 20), se todos os ângulos rasos são iguais, resulta imediatamente que *todos os ângulos retos são iguais.*

22. Medida dos ângulos. Já vimos que a grandeza de um ângulo consiste na sua abertura. (§ 19)

O segmento retilíneo é uma grandeza que se pode medir; o ângulo é tambem uma grandeza que pode ser medida.

Assim como a unidade para medir um segmento deve ser outro segmento, a unidade para medir um ângulo deve ser outro ângulo. Já vimos que todos os ângulos não são iguais. (§§ 19 e 21) Entretanto, existe um ângulo invariavel, um ângulo que pode ser tomado como unidade, para medir outros ângulos; é o ângulo reto, porque todos os ângulos retos são iguais.

Uma das unidades para medir ângulos é o ângulo reto.

O ângulo reto se divide em 90 partes iguais chamadas *graus.* Portanto, *um grau é a nonagésima parte de um ângulo reto.*

Os ângulos são medidos com um instrumento chamado *transferidor* ou *goniômetro.* (*) O transferidor é um ângulo raso (fig. 14*c*) dividido em dois ângulos retos, cada um dos quais, por sua vez, está subdividido em 90 ângulos iguais, isto é, em 90 ângulos de um grau cada um.

O grau se subdivide em 60 partes iguais chamadas *minutos;* o minuto se subdivide em 60 partes iguais chamadas *segundos.*

(*) Palavra grega que significa *medidor de ângulos.* E' inutil apresentar num compêndio, a representação gráfica de um transferidor; é indispensavel, porem, que cada estudante disponha deste instrumento e aprenda a manejá-lo com a maior brevidade possivel.

Se um ângulo mede 35 graus, escreveremos abreviadamente 35°; medindo 46 graus e 33 minutos, escreveremos abreviadamente 46°33′; se medir 52 graus, 42 minutos e 48 segundos, será bastante escrever 52°42′48″.

> **Amplitude de um ângulo é o número que exprime a grandeza deste mesmo ângulo.**

Ângulo agudo *é o ângulo menor que o ângulo reto.*

Ângulo obtuso *é o ângulo maior que o ângulo reto e menor que o ângulo raso.*

Observação. Existem outras unidades para medir ângulos, e que serão conhecidas oportunamente.

N. B. E' necessário que os alunos façam numerosos exercícios relativos à medida dos ângulos. A leitura será feita somente em graus, não se falando, por enquanto, em **minutos e segundos.**

Exercícios em classe

1. Traçar ângulos de 30°, 38°, 45°, 54°, 82°, 110°, 135°, 150°, 164°, etc.

2. Traçar dois ângulos, cada um com 40°, mas de modo que os lados de um deles meçam 4cm cada um, e os lados do outro tenham um comprimento igual ao dobro dos lados do primeiro. Estes dois ângulos são iguais? Por que?

3. Traçar dois ângulos AMB e CND. O ângulo AMB deve medir 60° e o ângulo CND deve medir 45°. Os comprimentos dos lados devem ser os seguintes: MA = 4cm; MB = 5cm; NC = 8cm; ND = 10cm. Os dois ângulos são iguais? Por que? Qual é o maior? Por que?

4. Mostrar alguns ângulos na sala de aula e nos objetos que ela contem; compará-los com o transferidor.

5. Desenhar um ângulo de 80°. Recortá-lo com uma tesoura. Em seguida, com uma simples dobradura, dividí-lo em duas partes iguais. Separar os dois ângulos assim obtidos e verificar, pela **justaposição dos mesmos**, que eles **coincidem** e são, portanto, **iguais.**

N. B. Antes de separar os dois ângulos, é conveniente traçar uma semirreta que coincida com a dobradura. Tendo os estudantes separado os dois ângulos e verificado que são iguais, poderão então aprender que esta semirreta se chama **bissetriz.** Portanto,

Bissetriz de um ângulo é a semirreta que, tendo por origem o vértice do mesmo ângulo, o divide em duas partes iguais.

A bissetriz é uma semirreta porque tem origem, que é o vértice do ângulo, mas não tem extremidade, tal qual como os lados do mesmo ângulo.

6. Traçar ângulos de 40°, 50°, 64°, 75°, 115°, etc.. Em seguida, traçar a bissetriz destes mesmos ângulos com o auxílio do transferidor.

7. Desenhar dois ângulos, com 65° cada um. Recortá-los. Em seguida, verificar sua igualdade, fazendo-os coincidir. Os comprimentos dos lados deverão ser diferentes.

8. Desenhar dois ângulos, com 50° e 80° respectivamente. Recortá-los e verificar que a coincidência destes dois ângulos não é possivel. Os comprimentos dos lados deverão ser iguais.

23. Ângulos adjacentes; perpendiculares e obliquas. *Dois ângulos são adjacentes quando têm o mesmo vertice, um lado comum, e estão situados de um lado e do outro do lado comum.*

Consideremos os ângulos AOB e BOC (fig. 17)

Ambos têm o mesmo vertíce, o ponto O, e um lado comum, o lado OB. Entretanto, estão situados de um lado e do outro do lado comum OB. São, portanto, ângulos adjacentes.

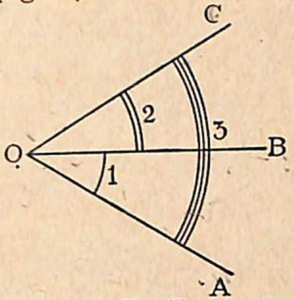


Fig. 17

Observação. Em virtude da definição de ângulos adjacentes, *os ângulos* AOB *e* AOC *não são adjacentes.* Quando dois ângulos são adjacentes, os lados não comuns, OA e OC (fig. 17) são chamados *lados exteriores.*

Na fig. 17 temos três ângulos distintos: $\hat{AOB}$, $\hat{BOC}$ e $\hat{AOC}$. O ângulo AOC é a soma dos ângulos AOB e AOC, e podemos escrever:

$$A\hat{O}B + B\hat{O}C = A\hat{O}C$$

Na mesma figura, o ângulo BOC é a diferença entre os ângulos AOC e AOB, e podemos escrever:

$$B\hat{O}C = A\hat{O}C - A\hat{O}B$$

O ângulo AOB é, por sua vez, a diferença entre os ângulos AOC e BOC, isto é:

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C - B\hat{O}C$$

Já vimos como se lê um ângulo. (§ 19) Podemos designar um ângulo, enunciando apenas a letra do vértice. Mas, este modo de designar um ângulo pode produzir confusão, como no caso da fig. 17. Com efeito, temos aí três ângulos com o mesmo vértice, o ponto O e, se dissermos apenas, *ângulo* O, os estudantes não saberão se estamos falando do ângulo AOB, do ângulo BOC ou do ângulo AOC.

Para evitar estas confusões, é conveniente assinalar cada um dos três ângulos com um ou mais arcos e um número. E diremos: ângulo 1 (é o ângulo AOB); ângulo 2 (é o ângulo BOC); ângulo 3 (é o ângulo AOC). Em lugar de *ângulo* 1 escreveremos frequentemente: $\hat{1}$. (fig. 17)

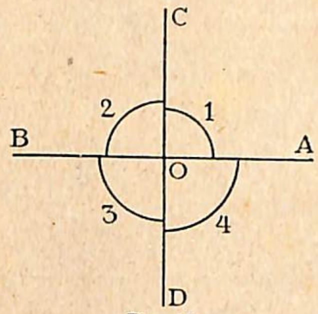


Fig. 18

Consideremos as retas AB e CD, que se cortam em um ponto O. (fig. 18) Suponhamos que o ângulo 1 é reto. (§ 20) Ora, o ângulo A$\hat{O}$B ($\hat{1}+\hat{2}$) é um ângulo raso. E, se o ângulo 1 é reto, isto é, *se ele representa a metade do ângulo raso* AOB, conclue-se de pronto que o ângulo 2 tambem é reto. Logo, os ângulos 1 e 2 são iguais. Pelas mesmas razões, o ângulo 2 é igual ao ângulo 3, e o ângulo 3 é igual ao ângulo 4. Em resumo:

$$\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$$

Duas retas são perpendiculares entre si, quando se cortam formando quatro ângulos retos.

Uma semirreta OC *é perpendicular a uma reta* AB, *quando forma com* AB *dois ângulos adjacentes iguais.* Já sabemos que estes dois ângulos são chamados *ângulos retos.*

O ponto O é chamado *pé da perpendicular* OC.

A semirreta OB é tambem perpendicular à reta CD, sendo O, o pé desta perpendicular. Igualmente, a semirreta OD é perpendicular à reta AB, etc..

Do exposto neste parágrafo podemos dizer do ângulo reto, alem do que já dissemos anteriormente: (§ 20)

Angulo reto é o ângulo cujos lados são perpendiculares entre si.

As perpendiculares são traçadas com o auxilio do esquadro, instrumento que tambem serve para desenhar ângulos retos. (*)

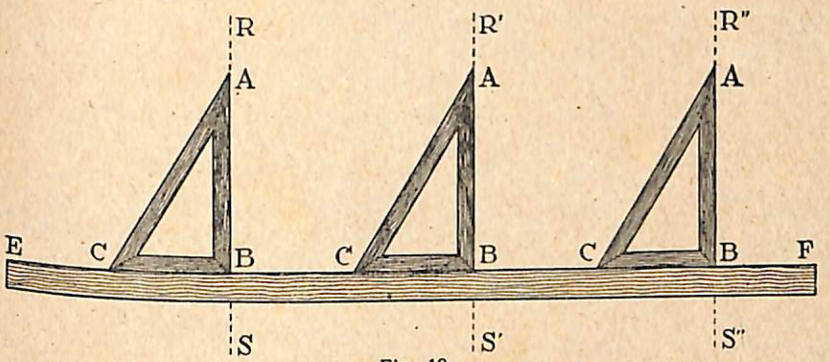


Fig. 19

Seja EF uma régua. Apoiemos sobre esta regua um ângulo reto ABC, representado por um esquadro, de modo que um dos lados, BC, do ângulo reto, se ajuste perfeitamente com a aresta EF da régua. Fazendo o esquadro escorregar ao longo da régua, sempre na posição indicada, o lado AB do ângulo reto (do esquadro) nos permitirá traçar quantas perpendiculares quisermos, RS, R'S', R"S", à reta EF.

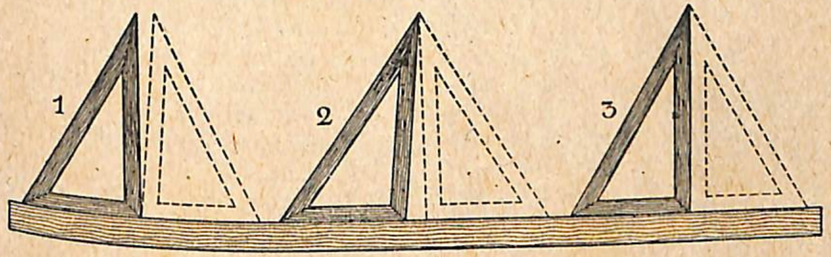


Fig. 20

(*) Cada um dos estudantes deve ter um esquadro, cujo manejo ser-lhes-á ensinado pelo professor. Este poderá falar, se o julgar conveniente, sobre a forma do esquadro e outros detalhes inerentes ao mesmo.

Assim como a régua, um esquadro pode ser defeituoso, isto é, *pode ser um falso esquadro.* Para verificar se um esquadro é ou não é defeituoso, é bastante fazer as experiências indicadas na fig. 20, e que dispensam explicações. Os esquadros 1 e 2 são falsos; o n.º 3 está perfeito.

Uma semirreta, OC, *é oblíqua a uma reta* AB, *quando forma com esta reta, dois ângulos adjacentes desiguais.* O ponto O é chamado *pé da oblíqua.* Os dois ângulos adjacentes AOC e BOC, ou ângulos 1 e 2 são chamados *angulos oblíquos.* Pelo ponto O tracemos OM perpendicular à reta AB; já sabemos que os ângulos AOM e BOM ou ângulos 3 e 4 são iguais e são retos. O ângulo 1, menor que o ângulo 3, é um ângulo agudo; o ângulo 2, maior que o ângulo 4, é um ângulo obtuso. (§ 22)

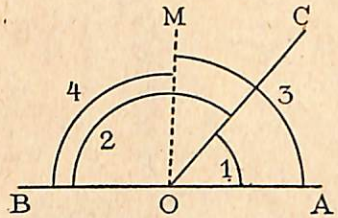


Fig. 21

Exercícios em classe

1. Mostrar na sala de aula e nos objetos que ela contem, retas que sejam perpendiculares entre si.

2. Traçar um segmento horizontal e, em seguida, uma reta que lhe seja perpendicular e que passe pela extremidade ou pelo meio do mesmo segmento.

3. Exercício análogo ao anterior, sendo o segmento vertical.

4. Exercício análogo ao anterior, sendo o segmento inclinado.

5. Traçar uma reta horizontal AB; por um ponto C, situado fora da reta AB, traçar uma segunda reta que seja perpendicular à primeira.

6. Exercício análogo ao anterior, sendo a reta AB vertical.

7. Exercício análogo ao anterior, sendo a reta AB inclinada

8. Uma reta horizontal pode ser perpendicular? E uma reta vertical? E uma reta inclinada? Mostre com o auxílio de duas réguas.

N. B. As perpendiculares devem ser traçadas primeiramente a mão livre e depois com o esquadro.

9. Mostrar ângulos retos nos objetos da sala de aula. Verificar com o esquadro se são realmente ângulos retos. Verificar com o transferidor se medem realmente 90°.

10. Traçar ângulos retos com os lados inclinados.

11. Mostrar um ângulo reto com o auxilio de duas varetas.

12. Mostrar com o compasso um ângulo reto, dois ângulos agudos diferentes, dois ângulos obtusos diferentes.

13. Traçar um ângulo de 30°, outro de 45°, outro de 70°.

14. Traçar um ângulo de 100°, outro de 120°, outro de 150°.

15. Desenhar um ângulo de 160°. Recortá-lo. Repartí-lo, por meio de duas dobraduras, em 4 partes iguais. Quanto mede cada um destes ângulos? Verificar com o transferidor.

24. Distância de um ponto a uma reta. Suponhamos que a reta MN é a linha marginal de um rio que atravessa um campo perfeitamente plano. (fig. 22) Nós estamos no ponto P, situado a uma distância qualquer deste rio, por exemplo, a 4km. Queremos atingir a margem, fazendo o nosso percurso em linha reta. Quantos caminhos podemos percorrer? Uma infinidade, evidentemente: PA, PB, PC, PD, PE, etc.. Qual será o mais curto?.

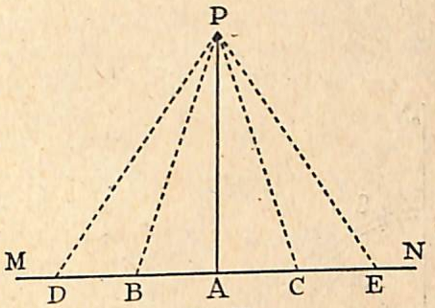


Fig. 22

Tracemos um segmento MN, com 10cm de comprimento. Pelo meio deste segmento tracemos uma perpendicular PA com 7cm; em seguida, marquemos os pontos B, C, D e E, de modo que tenhamos AB = AC = 2cm, e AD = AE = 4cm. Depois tracemos os segmentos PB, PC, PD e PE. E verificaremos com o compasso que PA é menor que PB ou PC; que PB ou PC é menor que PD ou PE. Podemos então concluir que o caminho mais curto entre o ponto P e o segmento MN é representado pelo segmento PA, perpendicular à MN.

A menor distância de um ponto a uma reta, ou simplesmente a distância de um ponto a uma reta, é o segmento retilíneo perpendicular a esta reta, tendo por origem o ponto dado, e por extremidade o pé da mesma perpendicular.

Os segmentos PB, PC, PD e PE são **oblíquos,** em relação à reta MN. O ponto A é o **pé** da perpendicular PA; o ponto B é o **pé** da oblíqua PB. E é facil verificar que, *à medida que o pé da oblíqua se afasta do pé da perpendicular,* o comprimento da oblíqua aumenta continuamente. Assim é que PE > PC, PD > PB, etc..

Exercícios em classe

1. Traçar uma reta MN e determinar um ponto situado a 45mm de MN. (Este problema tem uma infinidade de soluções, isto é, há uma infinidade de pontos situados a 45mm da reta MN.)

2. Traçar uma reta MN; escolher, à vontade, pontos A, B, C, D, E, etc., situados fora da reta; em seguida, determinar a distância de cada um destes pontos à mesma reta. (Empregar o esquadro e o duplo decímetro.)

25. Ângulos complementares e suplementares. *Dois ângulos são complementares, quando sua soma é igual a um ângulo reto.* (90 graus) Portanto, o complemento de um ângulo é um segundo ângulo que, somado com o primeiro, forma um ângulo reto, isto é, um ângulo de 90°.

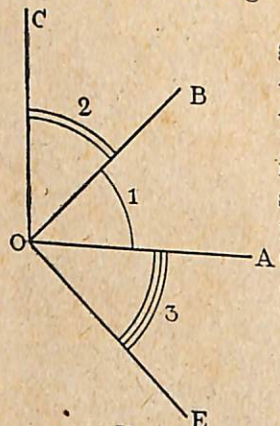


Fig. 23

Sejam os ângulos AOB e BOC ou ângulos 1 e 2. (fig. 23) Sua soma é o ângulo AOC. Se este ângulo é reto, os ângulos AOB e BOC são complementares.

Dado um ângulo AOB, para *construir*, isto é, desenhar um segundo ângulo que seja o seu complemento, é bastante traçar, pelo ponto O, uma semirreta OC, perpendicular à semirreta OA, *e do mesmo lado que a semirreta* OB. O ângulo AOC será um ângulo reto e, portanto, o ângulo BOC será o complemento do ângulo AOB.

Podemos tambem traçar, pelo ponto O, uma semirreta OE, perpendicular à semirreta OB, *e do mesmo lado que a semirreta* OA. O ângulo BOE será um ângulo reto e, portanto, o ângulo AOE será o complemento do ângulo AOB.

Dois ângulos são suplementares quando sua soma é igual a um ângulo raso ou ângulo de meia volta. (180° graus) Portanto, o suplemento de um ângulo é um segundo ângulo que, somado com o primeiro, forma um ângulo raso, isto é, um ângulo de 180°.

Sejam os ângulos AOB e AOC ou ângulos 1 e 2. (fig. 24) Sua soma é o ângulo BOC. Se este ângulo é um ângulo raso, os ângulos AOB e AOC são suplementares.

Dado um ângulo AOB, para *construir*, isto é, desenhar um segundo ângulo que seja o seu suplemento, é bastante prolongar

a semirreta OB em sentido oposto, isto é, traçar a semirreta OC em sentido contrário ao da semirreta OB. O ângulo BOC será um ângulo raso e, portanto, o ângulo AOC será o suplemento do ângulo AOB.

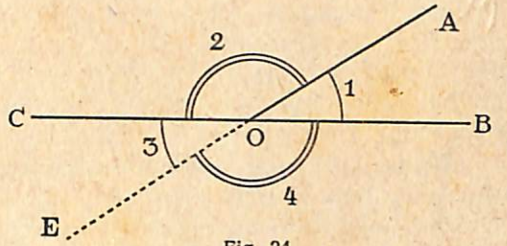


Fig. 24

Podemos traçar tambem a semirreta OE, oposta à semirreta OA. O ângulo AOE será um ângulo raso e, portanto, o ângulo BOE será o suplemento do ângulo AOB.

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um são os prolongamentos dos lados do outro, alem do vértice. Por exemplo, dado o ângulo AOB (fig. 24) se prolongarmos seus lados OA e OB, alem do vértice, isto é, se traçarmos as semirretas OC e OE, formaremos o ângulo COE, e diremos que os ângulos AOB e COE são opostos pelo vértice.

Os ângulos 2 e 4 tambem são opostos pelo vértice.

Dois ângulos opostos pelo vértice, por exemplo, os ângulos 1 e 3, são iguais. Com efeito, assim deve ser, porque eles têm o mesmo suplemento, que é o ângulo 2 ou o ângulo 4.

Exercícios orais (*)

Dizer o complemento e o suplemento dos ângulos que se seguem.

1. 20°	5. 70°	9. 45°	13. 23°	17. 67°
2. 30°	6. 80°	10. 55°	14. 34°	18. 78°
3. 40°	7. 25°	11. 75°	15. 45°	19. 81°
4. 50°	8. 35°	12. 85°	16. 56°	20. 86°

21. Quanto medem dois ângulos complementares, se o maior é o dobro do menor?

22. Dois ângulos são suplementares, e o maior é o dobro do menor. Quanto mede cada um deles?

23. Dois ângulos são complementares. Sua diferença é de 20°. Quanto mede cada um deles? (Exercícios, série VIII, n.° 1)

24. Dois ângulos são suplementares. Sua diferença é de 40°. Quanto mede cada um deles?

(*) Os exercícios para trabalhos escritos, provas mensais e parciais serão dados no capítulo relativo aos números complexos. (Exercícios, série LIV)

26. Paralelas. *Duas retas situadas em um mesmo plano são chamadas* **complanares.** Duas retas distintas não podem ter dois pontos comuns. (§ 12) Portanto, duas retas complanares, ou têm um ponto comum, ou nenhum. No primeiro caso, elas se cortam; no segundo, são paralelas.

Duas retas são paralelas quando, sendo complanares, não têm um ponto comun.

Podemos tambem dizer que: *duas retas são paralelas quando estão situadas em um mesmo plano e, por mais que se prolonguem, nunca se encontram.*

Sejam MN e RS duas retas paralelas. Tracemos AB e CD perpendiculares à MN. Se prolongarmos AB e CD até encontrarem RS, verificaremos com o esquadro que as retas AE e CF são tambem perpendiculares à reta RS. Portanto,

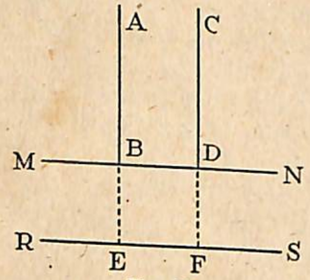


Fig. 25

Quando duas retas são paralelas, uma reta perpendicular à primeira, é tambem perpendicular à segunda.

A distância entre duas paralelas é representada pelo segmento retilíneo perpendicular às duas e por elas limitado. A distância entre as paralelas MN e RS é o segmento BE ou DF. Ora, estes segmentos são iguais, como é facil verificar; portanto, *duas paralelas são equidistantes.*

Exercícios em classe

1. Mostrar retas paralelas na sala de aula.
2. Com o auxílio de duas réguas, mostrar duas paralelas horizontais, verticais ou inclinadas.
3. Traçar duas retas paralelas cuja distância seja de 32mm.
4. Traçar três retas paralelas AB, CD e EF. Entre as duas primeiras, a distância deve ser de 18mm e, entre as duas ultimas, 27mm.
5. Repetir o exercício n.º 1 do § 24 e dizer onde estão situados todos os pontos cuja distância à reta MN é igual a 45mm.
5. Aprender a traçar paralelas com o auxílio de uma régua e de um esquadro, ou de dois esquadros.

Capítulo II

Figuras Geométricas

27. A circunferência. Em um plano qualquer, e que pode ser uma folha de papel de desenho, escolhemos um ponto, O, e nele cravamos um alfinete. Amarramos um fio de linha no alfinete, de modo que este fio, estanto esticado, possa girar em torno do alfinete, sem enrolar-se nele. Na outra ponta do fio amarramos um lapis, cuja ponta, bem aguçada, representará um ponto M. O ponto O será um ponto fixo do plano, e o ponto M, um ponto movel do mesmo plano. Isto feito, esticamos o fio de linha, de modo que a porção de fio, OM, seja a imagem de um segmento retilíneo de comprimento invariavel. Depois, conservando o fio de linha bem esticado, fazemos o ponto movel, M (a ponta do lapis), caminhar sobre o plano (a folha de papel). Ao cabo de alguns instantes, o ponto M chega ao ponto de partida, e *a linha curva que ele descreve é a circunferência.* (*)

A circunferência é uma linha curva e fechada; todos os seus pontos estão situados em um mesmo plano e distam igualmente de um ponto fixo, situado no mesmo plano. Podemos, pois, dizer que:

A circunferência é o caminho percorrido por um ponto que se desloca em um plano, conservando-se sempre a uma mesma distância de um ponto fixo situado no mesmo plano.

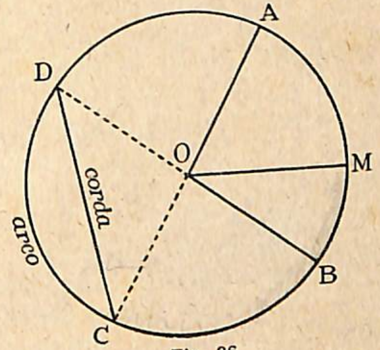


Fig. 26

(*) À medida que o professor explica aos seus alunos a geração de uma circunferência, vai reproduzindo no quadro-negro o movimento do ponto M; em seguida, mostra o compasso e o seu emprego.

> **A circunferência é uma linha curva, plana e fechada, cujos pontos distam todos igualmente de um ponto fixo situado no mesmo plano.**

Centro de uma circunferência é o ponto fixo do qual distam igualmente todos os pontos da circunferência.

Raio de uma circunferência é o segmento retilíneo que une o centro da circunferência a qualquer um dos seus pontos. Os segmentos OA, OB, OC, OD e OM (fig. 26) são raios da circunferência. Todos os raios de uma mesma circunferência são iguais em virtude da própria definição da circunferência.

Diâmetro de uma circunferência é o segmento retilíneo que une dois pontos da mesma circunferência, *passando pelo centro*. AC e BD são diâmetros da circunferência. (fig. 27) Todos os diâmetros de uma mesma circunferência são iguais, porque um diâmetro qualquer vale dois raios.

Arco é uma porção da circunferência. Suponhamos que a fig. 26 representa um lago. A circunferência não é o lago; é a linha marginal do lago. Alguns meninos estão passeando ao longo desta linha marginal. Uns vão do ponto A ao ponto M, e voltam; **estão percorrendo o arco** AM. Outros vão do ponto C ao ponto D e voltam; **estão percorrendo o arco** CD.

Corda é o segmento retilíneo que une dois pontos de uma circunferência ou as extremidades de um arco. O segmento retilíneo CD (fig. 26) é uma corda. Dizemos em Geometria que *a corda* CD **subtende** *o arco* CD. Uma corda subtende dois arcos em geral desiguais: a corda CD subtende o arco CD e o arco CBMAD. Salvo aviso em contrário, *o arco correspondente a uma corda dada, ou subtendido por uma corda dada,* **é o menor dos dois arcos.**

Duas circunferências com raios iguais, são iguais.

Verificação. Traça-se uma circunferência com um raio qualquer OA, e uma segunda circunferência *em papel transparente*, com um raio O'A' igual ao raio OA. Depois coloca-se a segunda circunferência sobre a primeira, de modo que os dois centros coincidam. Ver-se-á que as duas circunferências *coincidem* e são, portanto, *iguais*.

Um diâmetro divide a circunferência em duas partes iguais.

Verificação. Traça-se uma circunferência em papel transparente, e um diâmetro qualquer, AC. (fig. 26) Em seguida, dobrando-se a figura ao longo do diâmetro AC, *ver-se-á o arco* AC, *situado de um lado do diâmetro* AC, *coincidir com o arco* AC, *situado do outro lado do diâmetro* AC. E se estes dois arcos *coincidem*, são iguais.

As duas metades de uma circunferência são chamadas *semi-circunferências*.

Uma circunferência, seja qual for o comprimento do raio, divide-se em 360 partes iguais chamadas **graus.** A semicircunferência tem 180 graus. Cada grau se divide por sua vez em 60 partes iguais chamadas **minutos.** Cada minuto se divide por sua vez em 60 partes iguais chamadas **segundos.**

Consideremos o arco BM. (fig. 26) Este arco pode ter, por exemplo, 42° (42 graus), ou 42°13' (42 graus e 13 minutos), ou 42°13'24'' (42 graus, 13 minutos e 24 segundos).

Exercícios em classe

1. Traçar circunferências cujos raios meçam 5cm, 8cm, 10cm, etc..
2. Marcar no papel um ponto A e determinar um ponto B situado a 45mm do ponto A. Quantos pontos existem, situados a 45mm do ponto A?
3. Marcar no papel dois pontos A e B cuja distância seja igual a 10cm. Em seguida, determinar um ponto C situado a 7cm do ponto A e a 8cm do ponto B. Quantos pontos existem nas condições pedidas? E o que acontece se o segmento AB mede 15cm? E se mede 20cm?

Círculo *é a porção de superfície plana limitada por uma circunferência.* Portanto, há uma diferença essencial entre a circunferência e o círculo; *a* **circunferência** *é uma linha;* o **círculo** *é a porção de plano limitada pela circunferência.*

Podemos dizer, indiferentemente, *circunferência* ou *círculo*, quando nos referimos à circunferência; *isto, porem, não é permitido, quando nos referimos ao* **círculo.**

M **28. A medida da circunferência.** A circunferência é uma linha. Sendo uma linha, tem somente comprimento. Entretanto, como medir o comprimento de uma circunferência? E' claro que não é possivel aplicar o metro na circunferência. Vejamos, pois, como determinar o comprimento de uma circunferência.

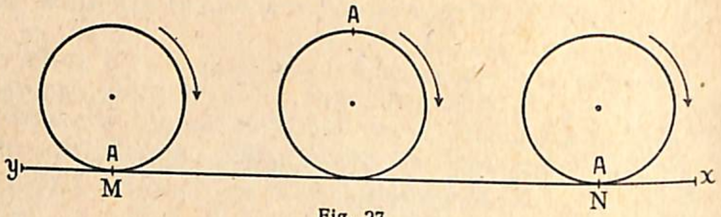


Fig. 27

Tomemos um círculo com 30 cm de diâmetro. Coloquemos o círculo sobre uma reta XY, de modo que um ponto qualquer A, da circunferência, coincida com um ponto qualquer M, da mesma reta XY. Em seguida, façamos o círculo rolar sobre a reta XY, no sentido indicado pelas setas, até que o ponto A da circunferência toque novamente na reta XY. Seja N o ponto da reta XY, com o qual coincide o ponto A da circunferência. Então o segmento retilíneo MN representa o comprimento da circunferência com 30 cm de diâmetro; o segmento retilíneo MN é a **circunferência retificada; é a retificação da circunferência.** Medindo MN acharemos 0,942 m. Portanto, o comprimento da circunferência com 30 cm de diâmetro é 0,942 m.

Entretanto, este processo para medir o comprimento de uma circunferência é, evidentemente, pouco prático. O processo geométrico, cuja razão de ser aprenderemos mais tarde, consiste na seguinte:

> **Regra. Para determinar o comprimento de uma circunferência, é bastante medir o diâmetro, e multiplicar o número resultante pelo número 3, 14.**

Exemplo. Qual é o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 12 metros?

Solução. O raio mede 12 metros; o diâmetro mede o dobro do raio, isto é, 2×12 ou 24 metros. Portanto, a circunferência mede $24 \times 3{,}14 = 75{,}36$ metros. (*)

(*) Sobre este assunto não é possível ir alem, numa primeira série ginasial. Cabe aos srs. professores desenvolvê-lo, se a classe o permitir.

Exercícios em classe

1. Calcular o comprimento de circunferencias cujos raios medem respectivamente 15m, 36dm, 45cm, 316mm; etc..
2. Calcular o comprimento de circunferencias cujos diâmetros medem respectivamente 642mm, 75cm, 84dm, 36m, etc.
3. Medir o raio ou o diâmetro de alguns objetos de forma circular, existentes na sala de aula, e calcular o comprimento da circunferência respectiva. Verificar o cálculo pela retificação da circunferência.

29. A divisão de um segmento em duas partes iguais. Vamos dividir o *segmento* AB, em duas partes iguais, com o compasso e uma regua. Fazendo centro, respectivamente, nos pontos A e B, tracemos quatro arcos, *que se cortem*, dois a dois, nos pontos M e N. O *raio destes quatro arcos deve ser o mesmo*, tendo, porem, um comprimento à vontade do desenhista: 3cm, 8cm, 12cm, etc..

Como todos os raios de uma circunferência são iguais, resulta que *os pontos* M e N *são equidistantes dos pontos* A *e* B.

Tracemos a reta MN e, em seguida, *decalquemos* toda a figura, isto é, tiremos uma cópia da mesma, com papel transparente. Depois, dobremos a cópia ao longo da reta MN. *E veremos que o ponto* A *coincide com o ponto* B. Donde resulta que *o segmento* OA *é igual ao segmento* OB. O ângulo MOA coincide com o ângulo MOB. Logo, estes dois ângulos são iguais e, sendo AB um segmento retilíneo, conclue-se que *a reta* MN *é perpendicular ao segmento* AB. (§23)

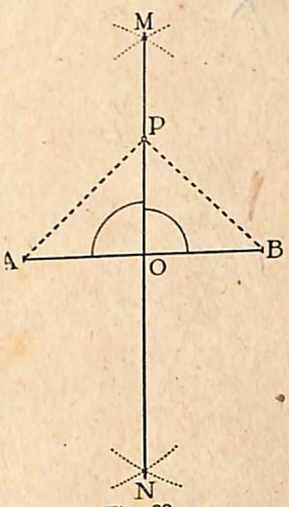


Fig. 28

E assim resolvemos dois problemas de Geometria:

1.º *Dividir um segmento em duas partes iguais.*
2.º *Traçar uma reta perpendicular a um segmento dado, e que passe pelo meio do mesmo segmento.*

> **Mediatriz de um segmento dado é a reta perpendicular ao segmento dado, e que o divide em duas partes iguais.**

Seja P, um ponto qualquer da mediatriz, MN, de um segmento dado, AB. (fig. 28) As distâncias respectivas do ponto P aos pontos A e B são os segmentos PA e PB. Ora, se decalcarmos novamente toda a figura, e a dobrarmos ao longo da reta MN, *veremos que o segmento* PA *coincide com o segmento* PB. Logo,

Um ponto qualquer situado na mediatriz de um segmento AB, dista igualmente dos pontos A e B.

Observações. AB é um segmento; sua mediatriz, MN, é uma reta, isto é, ilimitada nos dois sentidos.

O ponto O *não é a* **metade** *de* AB; *é o* **meio** *de* AB.

30. Polígonos. Consideremos três ou mais pontos, A, B, C, D, E, ... situados em um mesmo plano, e de modo que, na ordem em que estão sendo considerados, três pontos consecutivos quaisquer não estejam em linha reta. (fig. 29) Tracemos os segmentos retilíneos que unem o ponto A ao ponto B, o ponto B ao ponto C, o ponto C ao ponto D e, finalmente, o ultimo ponto, E, ao primeiro, A. A figura assim construida é chamada *polígono*. (*)

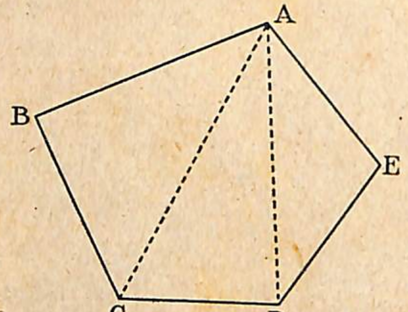


Fig. 29

Os segmentos AB, BC, CD, etc., são os **lados** do polígono; os pontos A, B, C, etc., são os *vértices* do poligono; os ângulos BAE, AED, EDC, etc., são os *ângulos* do polígono.

Um polígono tem tantos vértices e tantos ângulos, quantos são os seus lados.

Diagonal *de um polígono é o segmento retilíneo que une dois vértices não consecutivos do mesmo polígono.* Os segmentos AC e AD (fig. 29) são diagonais do poligono, assim como os segmentos BE, BD e CE, que os estudantes podem traçar na mesma figura.

(*) Parece-nos ser esta a única noção relativa ao polígono, que pode ser dada em uma primeira série ginasial, cujos alunos, em geral, têm 11 anos incompletos. Deixemos para mais tarde as noções de poligomos convexos e côncavos, planos e reversos, estrelados, entrelaçados, etc..

Contorno *de um polígono é o conjunto de seus lados.*

Perímetro *de um polígono é a soma de seus lados.*

Observação. *Polígono* significa *numerosos ângulos ; perímetro* significa *medida em torno.* São palavras de origem grega.

A superfície de um poligono é a porção de superfície plana, limitada pelo contorno do polígono.

Com a palavra *polígono* tanto podemos designar o seu contorno, como a porção de superfície plana limitada por este mesmo contorno. E diremos, de um modo bastante simples que:

> **Polígono é uma porção de superfície plana limitada por três ou mais segmentos retilíneos e consecutivos.**

Os polígonos têm nomes particulares, de acordo com o número de seus lados.

O polígono	*com*	*três*	*lados*	*é*	*chamado*	**triângulo.**
»	»	» *quatro*	»	»	»	**quadrilátero.**
»	»	» *cinco*	»	»	»	**pentágono.**
»	»	» *seis*	»	»	»	**hexágono.**

E assim por diante.

31. Triângulos. O triângulo é um poligono com três lados. Tem, portanto, três ângulos e três vértices. (fig. 30) Para ler um triângulo é bastante ler as letras que designam os vértices: triângulo ABC. Cada um dos lados de um triângulo é designado pelas letras maiúsculas colocadas nas suas extremidades, *ou pela minúscula que designa o vértice oposto a este mesmo lado.* E diremos: lado AB ou lado *c*; lado BC ou lado *a*; lado AC ou lado *b*.

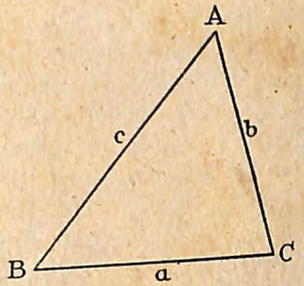


Fig. 30

Cada um dos lados de um triângulo é sempre menor que a soma dos outros dois. Com efeito, sendo a linha reta, o caminho mais curto entre dois pontos (§ 17) teremos $BC < AB + AC$, $AB < AC + BC$ e $AC < AB + BC$.

Os triângulos, de acordo com a grandeza relativa de seus lados, podem ser *equiláteros, isósceles ou escalenos.*

Triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais.
Triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais.
Triângulo escaleno é o que tem os três lados diferentes.

Veremos adiante como se constroem estes triângulos. (§ 33)

Um triângulo tem base e altura. **Base** *de um triângulo é qualquer um de seus lados.* **Altura** *de um triângulo é um segmento perpendicular à base, traçado pelo vértice oposto à mesma base.*

No triângulo ABC (fig. 31), tomando como base o lado BC, a altura é o segmento AM, perpendicular à BC. No triângulo ABC (fig. 32) vemos que a altura AM, devendo ser uma perpen-

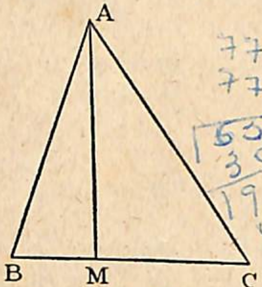


Fig. 31

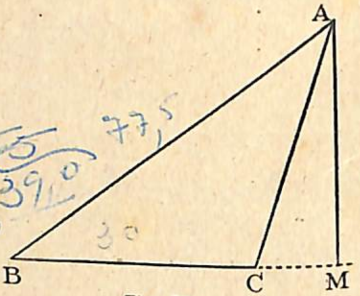


Fig. 32

dicular à BC, traçada pelo ponto A, *nem sempre o pé da perpendicular fica situado na base.* Acontece, como neste caso, que *o pé da perpendicular fica situado no prolongamento da base.*

Adiante aprenderemos a traçar a altura de um triângulo. (§ 33, problema III)

Mediana *de um triângulo é o segmento retilíneo que une um vértice qualquer do triângulo ao meio do lado oposto.*

Portanto, para traçar a mediana de um triângulo, é bastante dividir um dos lados do mesmo triângulo em duas partes iguais (§ 29) e unir o meio deste lado ao vértice oposto.

Um triângulo tem três medianas.

Bissetriz *de um triângulo é a bissetriz de cada um dos seus ângulos.* Um triângulo tem três bissetrizes.

32. Soma dos ângulos de um triângulo. *A soma dos três ângulos de um triângulo é igual a um ângulo raso.* (dois retos ou 180°) E' o que podemos verificar com uma experiência bastante simples.

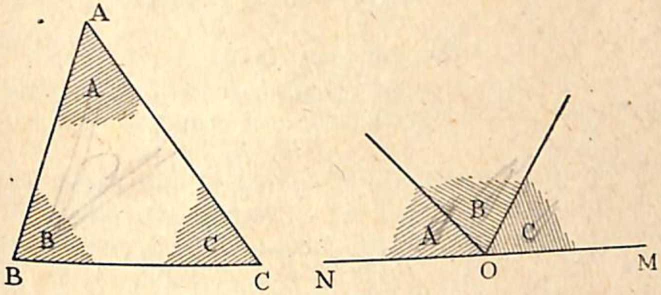


Fig. 33

Desenhamos um triângulo qualquer ABC. Destacamos os três ângulos e colocamo-los na posição de adjacentes, como está indicado na figura. E verificaremos que a soma dos ângulos A, B e C é o ângulo raso MON. Chegaremos sempre ao mesmo resultado, seja qual for o triângulo dado. (*)

De acordo com a verdade que acabámos de aprender resulta que :

1.° *Um triângulo pode ter apenas um ângulo reto; os outros dois serão agudos.*

2.° *Um triângulo pode ter apenas um ângulo obtuso; os outros dois serão agudos.*

3.° *Um triângulo pode ter três ângulos agudos.*

Em relação à natureza de seus ângulos, um triângulo pode ser retângulo ou obliquângulo.

Triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto.

(*) Os estudantes devem fazer esta verificação, desenhando um triângulo ABC com lados bastante grandes, por exemplo, com 13 ou 14 ou 16cm cada um. (§ 33)

Triângulo obliquângulo é o que tem somente ângulos oblíquos. (§ 23)

Por sua vez, os triângulos obliquângulos podem ser acutângulos ou obtusângulos.

São acutângulos quando os três ângulos são agudos.

São obtusângulos quando um dos ângulos é obtuso.

No triângulo retângulo, os lados do ângulo reto são chamados *catetos;* o lado oposto ao ângulo reto é chamado *hipotenusa.*

Exercícios em classe

Desenhar triângulos retângulos, acutângulos e obtusângulos. Em relação aos triângulos retângulos, indicar na figura, por escrito, os catetos e a hipotenusa.

33. Problemas gráficos. São assim chamados, em Geometria, os problemas de desenho. Já resolvemos um destes problemas, quando aprendemos a traçar a mediatriz de um segmento retilíneo. (§ 29)

Os instrumentos usados para a resolução de problemas gráficos são a régua e o compasso; a régua para traçar retas, semirretas e segmentos, e o compasso para traçar circunferências e arcos, para transportar ou construir segmentos iguais, etc..

Podemos traçar perpendiculares com o esquadro (§ 23); entretanto, é mais correto traçá-las com a regua e o compasso, obtendo-se resultados mais rigorosos, quanto à exatidão.

Problema I. *Traçar uma semirreta perpendicular a uma reta dada, por um ponto dado nesta mesma reta.*

Seja AB a reta dada, e O, um ponto dado nesta mesma reta. (fig. 34) Determinamos na reta AB, dois pontos, M e N, equidistantes do ponto O. Em seguida, fazendo centro nos pontos M e N, *e com o mesmo raio,* traçamos dois arcos que se cortem, determinando o ponto P. A semirreta OP é a perpendicular pedida.

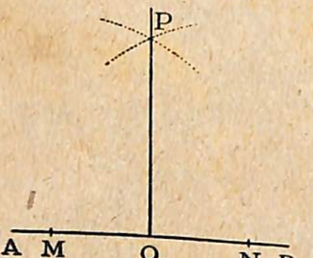


Fig. 34

Problema II. *Traçar uma perpendicular a um segmento dado, pela extremidade deste mesmo segmento.*

Seja AO o segmento dado. (fig. 34) Queremos traçar uma perpendicular ao segmento AO, pelo ponto O. Prolongamos o segmento AO, de um comprimento arbitrário, OB. Em seguida, procedemos como no primeiro problema.

Problema III. *Traçar uma perpendicular a uma reta dada, por um ponto dado fora da reta.*

Seja AB a reta dada, e O, o ponto dado. (fig. 35) Fazendo centro no ponto O, traçamos um arco que corte a reta AB em dois pontos M e N. Depois, fazendo centro nos pontos M e N, *e com o mesmo raio,* traçamos dois arcos que se cortem, determinado o ponto P. A semirreta OP é a perpendicular pedida.

Observação. Neste problema está indicada a regra para traçar a altura de um triângulo.

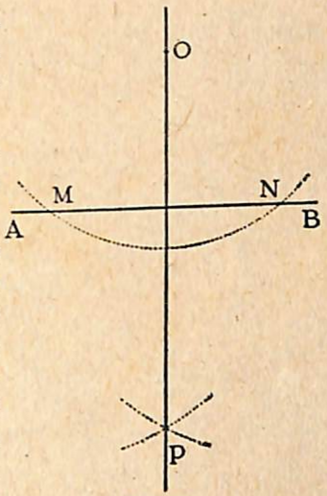


Fig. 35

Problema IV. *Dividir um ângulo em duas partes iguais.*

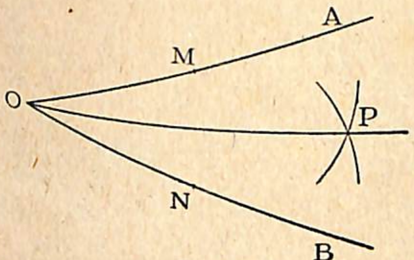


Fig. 36

Seja AOB o ângulo dado. (fig. 36) Determinamos nas semirretas OA e OB, com o compasso, dois pontos, M e N, equidistantes do ponto O. Depois, fazendo centro nos pontos M e N, *e com o mesmo raio,* traçamos dois arcos que se cortem, determinando o ponto P. A semirreta OP é a bissetriz do ângulo AOB.

Problema V. *Desenhar um triângulo equilátero cujo lado meça 3 cm.*

Traça-se um segmento AB, com 3 cm. (fig. 37) Depois, fazendo centro nos pontos A e B, *e com um raio igual ao segmento AB,* traçam-se dois arcos que se cortem, determinando o ponto C. O triângulo ABC é o triângulo equilátero pedido.

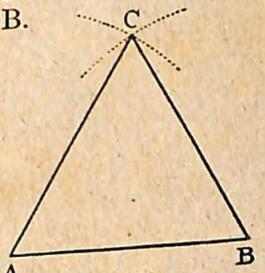


Fig. 37

Observação. Os estudantes devem desenhar numerosos triângulos equiláteros, maiores que os da fig. 37. Depois, devem verificar que, *no triângulo equilátero, os três ângulos são iguais*. Eis por que *o triângulo equilátero é tambem chamado triângulo equiângulo.*

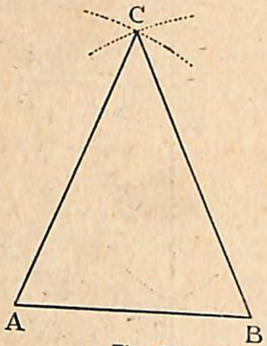


Fig. 38

Problema VI. *Desenhar um triângulo isósceles, no qual cada um dos lados iguais meça 4cm, e o lado diferente, 3cm.*

Traça-se um segmento AB, com 3cm. (fig. 38) Depois, fazendo centro nos pontos A e B, *e com um raio de 4cm*, traçam-se dois arcos que se cortem, determinando o ponto C. O triângulo ABC é o triângulo pedido.

Em um triângulo isósceles, é habitual tomar como base, o lado que não tem igual.

Observação. Os estudantes devem desenhar numerosos triângulos isósceles, maiores que os da fig. 38. Em seguida, devem verificar que, *no triângulo isósceles, os ângulos opostos nos lados iguais*, **são iguais**, isto é, $\hat{A} = \hat{B}$. E o terceiro ângulo, C, é sempre diferente dos dois primeiros.

Problema VII. *Desenhar um triângulo escaleno.*

Traça-se um segmento retilíneo AB. (fig. 39) Fazendo centro no ponto A, *e com um raio diferente de AB, traça-se um arco*. Fazendo centro no ponto B, *e com um raio diferente de AB, e do raio do primeiro arco*, traça-se um segundo arco que corte o primeiro, determinando o ponto C. O triângulo ABC é o triângulo pedido.

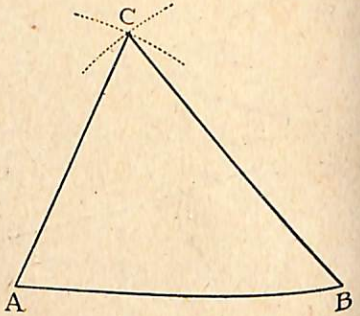


Fig. 39

Observação. E' conveniente que os estudantes desenhem numerosos triângulos maiores que os da fig. 39, e verifiquem que, *no triângulo escaleno, os três ângulos são diferentes.*

Exercícios em classe

1. Traçar um triângulo equilátero cujo lado tenha 8cm; em seguida, traçar as três alturas.
2. Traçar um triângulo isósceles no qual o lado diferente tenha 8cm, e cada um dos lados iguais, 10cm; em seguida, traçar as três alturas.

3. Traçar um triângulo escaleno ABC, sendo AB com 10cm, AC com 9cm e BC com 7cm; em seguida, traçar as três alturas.
4. Repetir o primeiro exercício, traçando, porem, as três medianas, em lugar das três alturas.
5. Repetir o segundo exercício, traçando, porem, as três medianas, em lugar das três alturas.
6. Repetir o terceiro exercício, traçando, porem, as três medianas, em lugar das três alturas.
7. Repetir o primeiro exercício, traçando, porem, as três bissetrizes, em lugar das três alturas.
8. Repetir o segundo exercício, traçando, porem, as três bissetrizes, em lugar das três alturas.
9. Repetir o terceiro exercício, traçando, porem, as três bissetrizes em lugar das três alturas.
10. Traçar um triângulo isósceles ABC cuja base BC meça 5cm e cujos lados iguais AC e AB meçam 7cm cada um. Verificar com o transferidor a igualdade dos ângulos opostos aos lados AC e AB. Medir os três ângulos e somar os três resultados.
11. Traçar um triângulo equilátero cujo lado meça 8cm. Quanto mede cada um dos três ângulos? A quanto é igual a soma dos três ângulos?
12. Traçar um triângulo escaleno cujos lados meçam respectivamente 7cm, 9cm e 12cm. Quanto mede cada um dos três ângulos? A quanto é igual a soma dos três ângulos?
13. Construir um ângulo ABC com 60°, e de modo que os lados BA e BC sejam iguais. Unir o ponto A ao ponto C. Que espécie de triângulo resulta desta construção? Medir os três ângulos e somar.
14. Construir um ângulo BAC com 50°, e de modo que os lados AB e AC sejam iguais. Unir o ponto B ao ponto C. Que espécie de triângulo resulta desta construção? Medir os três ângulos e somar.
15. Traçar um segmento retilíneo AB com 10cm. Construir dois ângulos BAM e ABM com 75° cada um. Que espécie de triângulo resulta desta construção? Medir os três ângulos e somar.
16. Traçar um segmento retilíneo AB com 10cm. Construir dois ângulos BAM e ABN com 60° cada um. Que espécie de triângulo resulta desta construção? Medir os três ângulos e somar.
17. Traçar um segmento retilíneo AB com 10cm. Construir dois ângulos BAM e ABM, o primeiro com 80° e o segundo com 65°. Que espécie de triângulo resulta desta construção? Medir os três ângulos e somar.
18. Construir um triângulo retângulo cujos catetos meçam respectivamente 7cm e 10cm.
19. Construir um triângulo retângulo cuja hipotenusa BC meça 10cm, e um dos catetos, AB, 7cm.
20. Construir um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa meça 8cm.
21. Construir um triângulo retângulo cuja hipotenusa, BC, meça 10cm, e com um ângulo B de 36°.
22. Construir um triângulo equilátero com 6cm de altura.
23. Construir um triângulo isósceles com 4cm de base e 8cm de altura.

24. A base de um triângulo isósceles mede 6cm. Um dos ângulos da base tem 70°. Construir este triângulo.

25. Um triângulo isósceles tem 8cm de altura. O ângulo oposto à base tem 64°. Construir este triângulo.

26. Construir um triângulo retângulo no qual a hipotenusa seja o dobro de um dos catetos. Verificar em seguida com o transferidor que um dos ângulos é o dobro do outro.

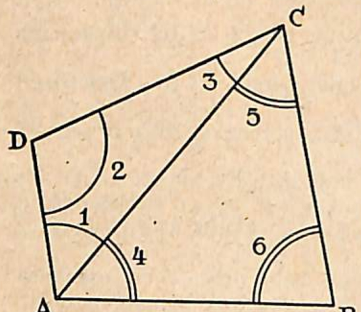


Fig. 40

34. O quadrado. (*) O quadrilátero é um polígono de quatro lados. (§ 30) Tem, portanto, quatro vértices e quatro ângulos; tem duas diagonais.

A soma dos ângulos de um quadrilátero é igual a quatro ângulos retos. Com efeito, se a soma dos ângulos 1, 2 e 3 do triângulo ADC (fig. 40) é igual a dois ângulos retos, e se a soma dos ângulos 4, 5, e 6 do triângulo ABC é tambem igual a dois ângulos retos, torna-se claro que a soma dos quatro ângulos do quadrilátero ABCD é igual a quatro ângulos retos.

Observação. Os estudantes podem verificar esta propriedade, de um modo concreto, adotando o processo indicado no § 32. Formarão, no caso do quadrilátero, um ângulo giro ou ângulo de uma volta, isto é, um perígono.

Tracemos um segmento retiilneo AB. (fig. 41) Em seguida, tracemos os segmentos AD e BC, perpendiculares ao segmento AB, e cujo comprimento seja igual ao comprimento do segmento AB. Finalmente, unamos os pontos C e D. Formaremos assim um quadrilátero. Neste quadrilátero, os ângulos A e B são retos por construção e, com o esquadro ou o transferidor, verificaremos que os ângulos C e D tambem são retos. Portanto, o nosso quadrilátero tem 4 ângulos retos.

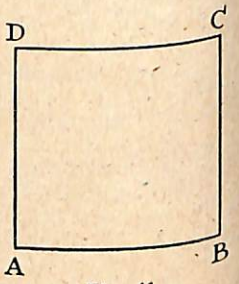


Fig. 41

Os segmentos AB, AD e BC são iguais por construção. Ora, se nós compararmos o segmento CD com o segmento AB, o que

(*) Preferimos iniciar o estudo dos quadriláteros, pelo *quadrado*, devido à grande importância desta figura geométrica.

podemos fazer com o auxílio de um compasso, verificaremos que estes dois segmentos são iguais. Portanto, os 4 segmentos retilíneos que constituem o nosso quadrilátero são iguais.

Finalmente, se medirmos a distância que separa os segmentos AB e CD, assim como a distância que separa os segmentos AD e BC, verificaremos que os segmentos AB e CD guardam entre si a mesma distância, assim como os segmentos AD e BC. Logo, os segmentos AB e CD são paralelos, assim como os segmentos AD e BC. O quadrilátero que acabámos de construir e analisar chama-se **quadrado.**

Quadrado é o quadrilátero que tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos. Os lados opostos de um quadrado são paralelos.

Perímetro de um quadrado é a soma dos comprimentos de seus quatro lados. Se o lado de um quadrado mede, por exemplo, 7 metros, o perímetro deste quadrado será igual a 7m. + 7m. + + 7m. + 7m., isto é, 28 metros. Mas 7m. + 7m. + 7m. + 7m. = = 7m. × 4. Portanto, para calcular o perímetro de um quadrado é bastante multiplicar o comprimento de um de seus lados pelo número 4.

Semiperímetro de um quadrado é a metade do perímetro do mesmo quadrado. Se o lado de um quadrado mede 15 metros, seu perímetro é igual a 15 × 4, isto é, 60 metros, e seu semiperímetro é igual a 60 ÷ 2, isto é, 30 metros.

Exercícios orais

1. O lado de um quadrado mede 11m. Quanto mede o perímetro?
2. » » » » » » 12m. » » » »
3. » » » » » » 15m. » » » »
4. » » » » » » 17m. » » » »
5. » » » » » » 13m. » » » »
6. » » » » » » 18m. » » » »
7. » » » » » » 14m. » » » »
8. » » » » » » 19m. » » » »
9. O perímetro de um quadrado mede 19m. Quanto mede o lado?
10. » » » » » 50cm. » » » »
11. » » » » » 96mm. » » » »
12. » » » » » 42dm. » » » »
13. A Cr. $3,00 o metro (*), quanto custa a cerca de um terreno quadrado cujo lado mede 8m?

(*) A expressão Cr. $3,00 deve ser lida 3 *cruzeiros e zero centavos*; Cr. $7,00 significa 7 *cruzeiros e zero centavos*; Cr. $6,40 significa 6 *cruzeiros e 40 centavos*.

14. Qual será o custo da cerca, a Cr. $4,00 o metro, se o lado medir 8m?
15. E se o lado medir 15m., quanto custará a cerca, a Cr. $7,00 o metro?
16. Um quadrado tem 7cm de lado. Aumentando 2cm em cada lado, qual será o perímetro do novo quadrado?
17. O lado de um quadrado mede 17m. Diminuindo 3 metros de cada lado, qual será o perímetro do novo quadrado?

Exercícios em classe

1. Medir o perímetro e o semiperímetro de alguns quadrados existentes na sala de aula.
2. Para cercar um terreno quadrado cujo lado mede 78m, fez-se um muro cuja construção custou Cr. $6,40 por metro linear. Quanto custou todo o muro? R. Cr. $1 996,80
3. Construir um quadrado cujo perímetro seja igual a 36cm.
4. Construir um quadrado cujo semiperímetro seja igual a 15cm.
5. Em um salão quadrado cujo lado mede 48 metros, extende-se um tapete cujos bordos ficam a 2 metros de distância das paredes. Quanto mede o perímetro deste tapete? (Fazer a figura.) R. 176m.
6. Para proteger um reservatório de água, quadrado, e com 145 metros de lado, construiu-se uma cerca a 3 metros de distância dos bordos do reservatório. Pagaram-se Cr. $4,70 por metro de cerca. Calcular o custo de toda a cerca. (Fazer a figura.) R. Cr. $2 838,80

35. O retângulo. Tracemos um segmento retilíneo AB. Em seguida, tracemos, pelos pontos A e B, duas perpendiculares à AB, isto é, AD e BC, **iguais entre si, porem diferentes de AB, ou maiores ou menores do que AB.** E unamos o ponto C ao ponto D.

Fig. 42

Examinemos o quadrilátero que acabámos de desenhar. Os ângulos A e B são retos por construção e um esquadro ou um transferidor nos permite verificar que os ângulos C e D tambem são retos. Os segmentos AD e BC são iguais por construção e com o auxílio de um compasso podemos verificar que os segmentos AB e CD são tambem iguais. Finalmente, os segmentos AD e BC são paralelos, assim como os segmentos AB e CD.

O quadrilátero que acabámos de construir e analisar chama-se **retângulo.**

Retângulo é o quadrilátero que tem os lados opostos iguais, e os quatro ângulos retos. Os lados opostos são paralelos.

Exercícios em classe

1. Os estudantes vão reproduzindo em papel de desenho e com o maior rigor possível, a figura 42 que o professor vai traçando no quadro-negro.
2. Desenhar um retângulo com 10cm de comprimento e 8cm de largura.
3. Desenhar um retângulo com 12cm de comprimento e 5cm de largura. Em seguida, traçar dentro deste retângulo, paralelas no sentido do comprimento e no sentido da largura. A distância entre duas paralelas consecutivas deve ser de 1 centímetro. Quais as conclusões que os estudantes podem tirar deste desenho?
4. Mostrar nos objetos da sala de aula alguns retângulos, e verificar se são realmente retângulos.
5. Traçar um segmento inclinado AB com 8cm de comprimento. Em seguida, construir sobre AB um retângulo com 5cm de largura.

Perímetro de um retângulo é a soma dos comprimentos de seus quatro lados. Se o comprimento de um retângulo mede, por exemplo, 15 metros, e se a largura mede 7 metros, podemos calcular o seu perímetro do seguinte modo:

$$\text{perímetro} = 15m + 7m + 15m + 7m = 44m$$
$$\text{perímetro} = 15m \times 2 + 7m \times 2 = 30m + 14m = 44m$$
$$\text{perímetro} = (15m + 7m) \times 2 = 22m \times 2 = 44m$$

O comprimento e a largura de um retângulo são chamados *dimensões do retângulo.*

Exercícios orais

N. B. Em lugar de escrevermos que um retângulo tem 15m de comprimento por 8m de largura escreveremos apenas 15m por 8m

1. Qual é o perímetro de um retângulo que mede 8cm por 5cm?
2. » » » » » » » » 10dm por 7dm?
3. » » » » » » » » 13m por 8m?
4. » » » » » » » » 15mm por 13mm?
5. Um retângulo mede 36m por 24m. Em relação a este retângulo, o que significa a expressão $36 \times 2 + 24 \times 2$?
6. Um retângulo mede 48dm por 31dm. Em relação a este retângulo, o que significa a expressão $(48 + 31) \times 2$?
7. Um retângulo tem 60m de perímetro e 18m de comprimento. Qual é a largura?
8. Um retângulo tem 7dm de largura e 50dm de perímetro. Qual é o comprimento?
9. O perímetro de um retângulo mede 42m. Determinar o comprimento e a largura, sabendo que a primeira dimensão é o dobro da segunda.

N. B. Em relação a este exercício, é conveniente que o professor desenhe a figura no quadro-negro com o rigor e vagar suficientes para que a classe veja imediatamente quantas vezes a largura está contida no perímetro.

10. O perímetro de um retângulo mede 80m. Determinar o comprimento e a largura, sabendo que a primeira dimensão é o triplo da segunda.

11. O perímetro de um retângulo mede 120m. Determinar o comprimento e a largura, sabendo que a primeira dimensão é o quádruplo da segunda.

12. Um retângulo mede 8dm por 5dm. Se somarmos 2dm ao comprimento e 2dm à largura, qual será o perímetro do novo retângulo?

13. A Cr. \$3,00 o metro, quando custará a cerca de um terreno retangular de 7m por 4m.?

14. A Cr. \$2,00 o metro, quanto custará a cerca de um terreno retangular de 17m por 13m.?

15. A Cr. \$4,00 o metro, quanto custará a cerca de um terreno retangular de 17m por 8m.?

Exercícios em classe

1. Medir o perímetro e o semiperímetro de alguns retângulos existentes na sala de aula.

2. Para cercar um terreno retangular com 126m de comprimento por 84m de largura, fez-se um muro cuja construção custou Cr. \$7,50 por metro linear. Quanto custou todo o muro? R. Cr. \$3 150,00

3. Construir um retângulo cujo perímetro meça 30cm. (Há muitas soluções.)

4. Em um salão retangular com 43m de comprimento por 36m de largura, extende-se um tapete, cujos bordos ficam a 2 metros de distância das paredes. Quanto mede o perímetro deste tapete? (Fazer a figura.) R. 142m.

5. Para proteger um campo de futeból de forma retangular e medindo 148m de comprimento por 74m de largura, fez-se uma cerca a 3 metros de distância do campo. Pagaram-se Cr. \$13,80 por metro de cerca. Calcular o custo de toda a cerca. (Fazer a figura.) R. Cr. \$6 458,00

6. Um terreno retangular mede 2 348m de comprimento e 1 388m de largura. Abrem-se duas ruas neste terreno, perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura, e de modo que o terreno fica dividido em 4 retângulos iguais. Se a largura das ruas abertas é de 12m, quanto mede o perímetro de cada um dos quatro retângulos parciais? (Fazer a figura.) R. 3 712m.

7. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, sabendo que o perímetro mede 3 496 metros e que o comprimento é o triplo da largura. R. 1 311m e 437m.

36. O paralelogramo. *O paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.*

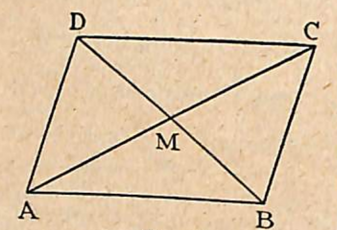


Fig. 43

Tracemos duas paralelas AB e CD; em seguida, tracemos outras duas paralelas, AD e BC, que cortem as duas primeiras. (fig. 43) O quadrilátero assim formado, ABCD, é um paralelogramo,

porque seus lados opostos são paralelos. Em um paralelogramo qualquer ABCD

a) Os lados opostos são iguais.

b) Os ângulos opostos são iguais.

c) As diagonais se dividem reciprocamente em partes iguais.

Para provar estas três propriedades do paralelogramo, copia-se a figura com papel transparente. Em seguida, coloca-se a cópia sobre o original e imobilizam-se as duas figuras com o auxílio de um alfinete cravado no ponto M. Depois faz-se a copia rodar sobre o original, até que o ponto C coincida com o ponto A. Ver-se-á então que BC coincide com AD; AB coincide com CD; o ângulo A coincide com o ângulo C; o ângulo B coincide com o ângulo D; MA coincide com MC; MD coincide com MB.

E' conveniente não esquecer que: *em um* **paralelogramo qualquer,** *os ângulos opostos são iguais, sendo dois agudos e os outros dois obtusos;* estes ângulos não podem ser retos, a não ser em certos paralelogramos particulares. (§ 37) A soma dos quatro ângulos de um paralelogramo é igual a quatro ângulos retos ou 360 graus; os ângulos A e B são suplementares. Analogamente, os ângulos A e D são suplementares.

Alguns paralelogramos apresentam certas particularidades notaveis; podemos chamá-los *paralelogramos particulares.* (*)

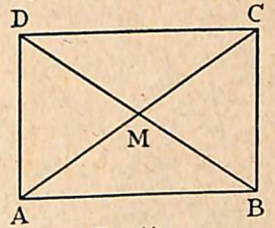


Fig. 44

Tracemos um *ângulo reto* BAD, *cujos lados sejam diferentes.* (fig. 44) Em seguida, pelos pontos B e D tracemos paralelas a AD e AB. Estas duas paralelas se cortam em um ponto C, formando-se assim um quadrilátero ABCD. Mas, neste quadrilátero, os lados opostos AB e CD são paralelos, assim como os lados opostos AD e BC. Este quadrilátero é, então, um paralelogramo.

Mas o ângulo A é um ângulo reto, por construção; logo o ângulo C tambem é reto, porque os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais. Os ângulos A e D são suplementares; ora o ângulo A sendo reto, o ângulo D tambem é reto. Finalmente, se o ângulo D é reto, o ângulo B tambem é reto. Logo, se quiser-

(*) Francisco Severi, *Elementos de Geometria*, 4.ª edição, vol. 1.°, pág. 129.

mos desenhar um paralelogramo no qual o ângulo A seja reto, os outros três serão forçosamente retos. Ao paralelogramo no qual todos os ângulos são retos, dá-se o nome de *retângulo*. Portanto,

O retângulo é um paralelogramo particular no qual todos os ângulos são retos.

O retângulo tem todas as propriedades do paralelogramo e mais a seguinte: *as duas diagonais de um retângulo são iguais.* Para prová-lo, aplica-se o processo indicado para o paralelogramo.

Exercícios em classe

1. Desenhar um paralelogramo no qual dois lados consecutivos meçam respectivamente 8cm e 4cm, e formem um ângulo de 65°.
2. Desenhar um paralelogramo cujas diagonais meçam respectivamente 10cm e 7cm, e formem um ângulo de 58°.
3. Um dos ângulos agudos de um paralelogramo mede 47°. Calcular os outros três ângulos.
4. Em um paralelogramo ABCD, a diferença entre dois ângulos consecutivos A e B é de 23°. Calcular os quatro ângulos do paralelogramo.

37. O losango. Tracemos um ângulo BAD, *agudo* ou *obtuso*, cujos lados AB e AD *sejam iguais*. Em seguida, pelos pontos B e D, tracemos paralelas a AD e AB. Estas duas paralelas se cortam em um ponto C, formando-se assim um quadrilátero ABCD. Mas, neste quadrilátero, os lados opostos AB e CD são paralelos, assim como os lados opostos AD e BC. Este quadrilátero é, portanto, um paralelogramo.

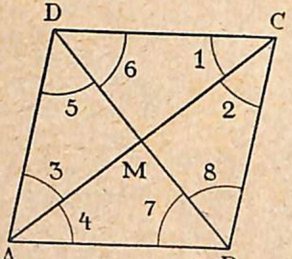


Fig. 45

Ora, já sabemos que AB = CD e AD = BC. Mas, quando traçámos o ângulo BAD, nós fizemos AB = AD. Logo,

$$AB = BC = CD = DA.$$

Portanto, o paralelogramo ABCD tem os *quatro lados iguais*. Dá-se a este paralelogramo o nome de *losango*.

Losango é um paralelogramo particular no qual os quatro lados são iguais.

O losango tem todas as propriedades do paralelogramo e mais as seguintes:

a) As diagonais de um losango são perpendiculares.

b) As diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos do losango.

Para demonstrar estas duas propriedades, traçam-se as diagonais do losango e copia-se a figura com papel transparente. Dobrando-se a cópia ao longo da diagonal AC, o ângulo 1 coincidirá com o ângulo 2, e o ângulo 3 com o ângulo 4; então AC é bissetriz dos ângulos A e C. Dobrando-se a cópia ao longo da diagonal BD, o ângulo 5 coincidirá com o ângulo 6, e o ângulo 7 com o ângulo 8; logo, BD é bissetriz dos ângulos B e D. Dobrando-se a cópia ao longo da diagonal AC, o ângulo AMD coincidirá com o ângulo AMB; logo, estes dois ângulos são iguais. Mas, se AM está formando com BD dois ângulos adjacentes iguais, AM é perpendicular à BD. (§23)

O quadrado é um losango no qual os quatro ângulos são retos.

Tracemos *um ângulo reto* BAD, cujos lados AB e AD *sejam iguais*. (fig. 46) Em seguida, pelos pontos B e D, tracemos paralelas a AD e AB. Estas duas paralelas se cortam em um ponto C, formando um quadrilátero ABCD. Mas, neste quadrilátero, os lados opostos AB e CD são paralelos, assim como os lados opostos AD e BC. Este quadrilátero é, então, um paralelogramo.

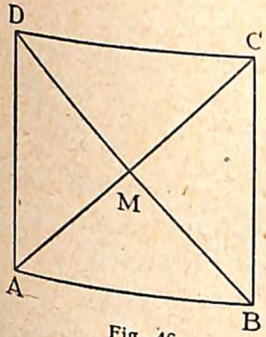


Fig. 46

Se o ângulo A é reto, os outros três ângulos são tambem ângulos retos (§36); logo, o paralelogramo ABCD é tambem um retângulo. Se os lados AB e AD são iguais, os quatro lados são iguais (§37); logo, o paralelogramo ABCD é tambem um losango. Ao paralelogramo ABCD, que é tambem um retângulo e um losango, dá-se o nome de quadrado. Em um quadrado, os quatro lados são iguais e os quatro ângulos são iguais. Portanto,

O quadrado é um paralelogramo particular que tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos iguais.

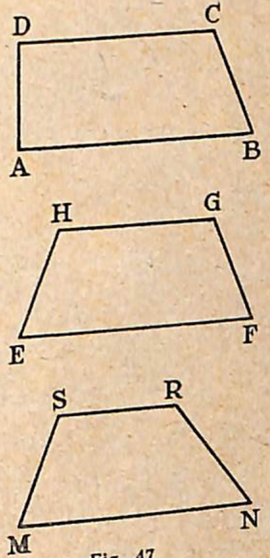


Fig. 47

O quadrado tem todas as propriedades do paralelogramo, do retângulo e do losango.

38. O trapézio. *O trapézio é um quadrilátero no qual somente dois lados opostos são paralelos.*

Os quadriláteros ABCD, EFGH e MNRS (fig. 47) são trapézios porque têm somente dois lados opostos paralelos.

O trapézio ABCD é chamado *trapézio retângulo* porque um dos lados não paralelos, AD, é perpendicular aos lados paralelos.

O trapézio EFGH é chamado *trapézio simétrico* ou *isósceles*, porque os dois lados não paralelos são iguais.

O trapézio MNRS é chamado *trapézio escaleno*, porque os dois lados não paralelos são diferentes.

Em resumo; há seis espécies de quadriláteros; o paralelogramo, o retângulo, o losango, o quadrado, o trapézio e o quadrilátero qualquer.

39. Retas e planos no espaço. A nessa figura representa uma sala. O que nos interessa nesta sala é a sua forma e a sua extensão. Portanto, esta sala é, para nós, um sólido geométrico. (fig. 48)

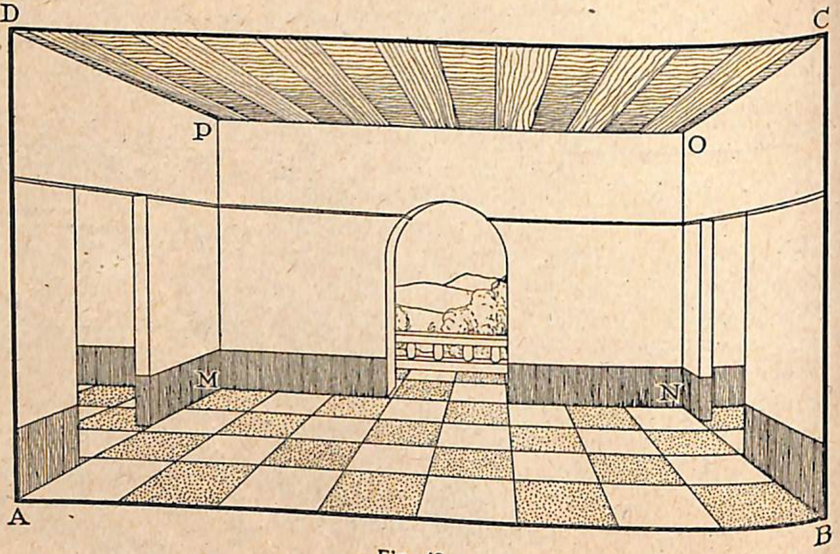


Fig. 48

Nesta sala podemos observar cinco planos distintos, a saber: o plano do assoalho, AMNB; o plano do forro, POCD; o plano da parede do fundo, MNOP; o plano da parede lateral direita, BCON; o plano da parede lateral esquerda, AMPD. Para ver melhor a posição relativa de retas e planos, no espaço, estamos supondo que a parede anterior desta sala, isto é, o plano ABCD, não existe.

As paredes são planos verticais. Uma parede não ofereceria muita segurança, se não fosse vertical. Eis por que os pedreiros, quando levantam uma parede, verificam, de quando em quando, a sua *verticalidade*, com o fio de prumo. (§ 13)

Um plano é vertical quando, aplicando-se o fio de prumo em qualquer um de seus pontos, ele coincide inteiramente com o plano.

O assoalho e o forro são planos horizontais. A imagem mais simples de um plano horizontal é a superfície de uma pequena porção de água, em repouso.

Um plano é horizontal quando pode coincidir com a superfície de uma pequena porção de água, em repouso.

A nossa sala nos mostra *doze arestas: quatro verticais e oito horizontais.* (Os estudantes devem ler todas as arestas.)

A aresta PM forma um ângulo reto com a aresta MA; também forma um ângulo reto com a aresta MN; dizemos, neste caso, que *a aresta PM é perpendicular ao plano do assoalho.*

Uma reta é perpendicular a um plano, quando é perpendicular a duas quaisquer retas deste plano.

As arestas PO e MN estão situadas num mesmo plano, que é o plano da parede do fundo. Este plano é um retângulo; logo, as arestas PO e MN são paralelas. Então a aresta PO, por mais que seja prolongada, não pode encontrar a aresta MN; portanto, não pode encontrar o plano do assoalho. E dizemos neste caso, que *a aresta* PO *é paralela* ao plano do assoalho.

> **Uma reta é paralela a um plano quando, não estando situada neste plano, é paralela a uma reta deste mesmo plano.**

Sendo a aresta PM, perpendicular ao plano do assoalho, a parede AMPD é tambem perpendicular ao plano do assoalho.

> **Um plano, P, é perpendicular a um plano, P', quando o plano P contem uma reta perpendicular ao plano P'.**

Em um sala (de forma comum) duas paredes consecutivas e o plano do assoalho representam tres planos perpendiculares entre si, dois a dois.

O forro e o assoalho de uma sala são dois planos que, por mais que se prolonguem, não podem encontrar-se.

> **Dois planos são paralelos quando não podem ter um ponto comum.**

40. Poliedros e corpos redondos. Os sólidos geométricos podem ser classificados em dois grandes grupos: **poliedros** e **corpos redondos.** (*)

Todas as faces de um poliedro são **poligonais** *e* **planas.**

A intersecção de duas faces é chamada **aresta.**

Entre os poliedros devemos mencionar, em primeiro lugar, os prismas e as piramides.

As figuras 49*a*, 49*b*, 49*c*, 49*d*, 49*e* e 49*f* representam prismas.

Um **prisma** *é um poliedro formado por duas faces poligonais opostas, iguais e paralelas,* ABCDE *e* A'B'C'D'E' (fig. 49*c*) *ligadas*

(*) E' conveniente que os srs. professores disponham de uma coleção completa de poliedros e corpos redondos, para mostrá-los aos seus alunos. Isto será muito mais eficiente que a descrição pelo desenho dos mesmos.

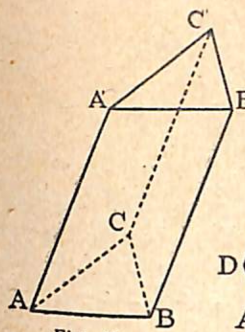


Fig. 49*a*

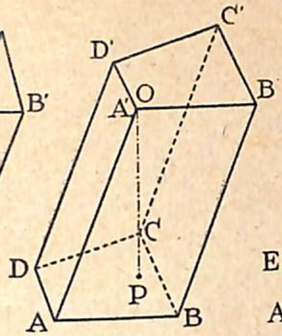


Fig. 49*b*

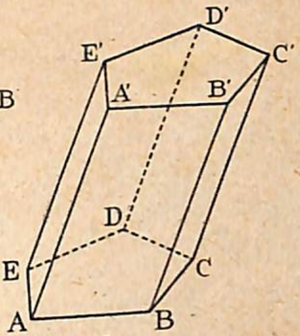


Fig. 49*c*

por tantos paralelogramos, ABA'B', BCB'C', *etc., quantos são os lados de uma das faces poligonais,* ABCDE.

As duas faces poligonais são chamadas *bases* do prisma, sendo habitual supor que elas são horizontais; os paralelogramos são chamados *faces laterais* do prisma.

As arestas laterais de um prisma são os segmentos retilíneos AA', BB', CC', DD' e EE'. (fig. 49*c*)

Altura de um prisma é o segmento retilíneo perpendicular a uma das bases, e traçado por qualquer ponto da base oposta. O segmento A'P (fig. 49*b*) representa a altura do prisma. (*) E' a distância entre os planos paralelos das duas bases.

Os prismas podem ser retos ou oblíquos.

São retos, quando as arestas laterais são perpendiculares às bases. (figs. 49*d*, 49*e*, 49*f*)

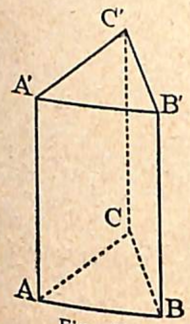


Fig. 49*d*

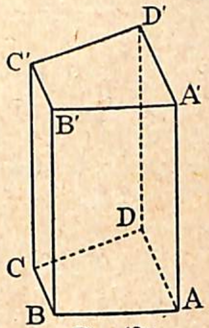


Fig. 49*e*

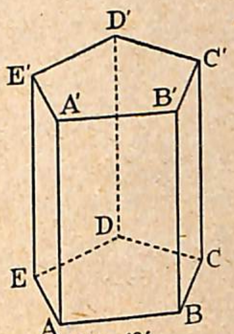


Fig. 49*f*

(*) Convem imaginar que este prisma está inclinado para trás.

São oblíquos, quando as arestas laterais são oblíquas às bases. (figs. 49*a*, 49*b* e 49*c*)

Nos prismas retos, uma aresta lateral qualquer representa a altura do prisma. Assim, na fig. 49*e*, a altura do prisma é a aresta AA'. *As faces laterais de um prisma reto são retângulos.*

Os prismas se classificam de acordo com as respectivas bases. *Um prisma é* **triangular,** quando tem *por base um* **triângulo;** (figs 49*a* e 49*d*); *é* **quadrangular,** *quando tem por base um* **quadrilátero** (figs. 49*b* e 49*e*); *é* **pentagonal,** *quando tem por base um pentagono* (figs. 49*c* e 49*f*), *etc.*.

Entre os prismas quadrangulares devemos mencionar o **paralelepípedo.** *E' assim chamado o prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos.*

O paralelepípedo pode ser reto ou oblíquo, como qualquer prisma.

Quando as bases de um paralelepípedo reto são **retângulos,** *temos o chamado* **paralelepípedo retângulo** *ou* **bloco retangular.** (*)

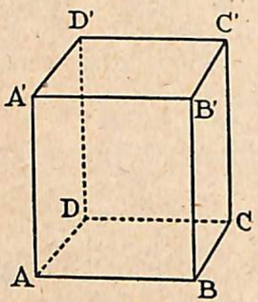


Fig. 50*a*

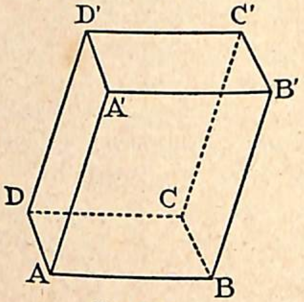


Fig. 50*b*

A fig. 50*a* representa um paralelepípedo reto; a fig. 50*b* representa um paralelepípedo oblíquo.

A fig. 50*a* tanto pode representar um paralelepípedo reto como um bloco retangular. Se a base ABCD é um paralelogramo, a

(*) De acordo com modernos autores americanos, adotamos a denominação *bloco retangular*, muito mais simples e expressiva do que *paralelepípedo retângulo*.

figura representa um paralelepípedo reto; se é um retângulo, a mesma figura representa um bloco retangular.

No bloco retangular, os comprimentos de três arestas contíguas, isto é, que partem de um mesmo vértice, são chamados *dimensões do bloco*. Assim, as arestas AB, AD e AA' do bloco retangular representado pela figura 50*a*, são as dimensões do mesmo bloco. O lado maior da base, isto é, AB, é chamado, em geral, *comprimento;* o lado menor da mesma base, isto é, AD, é chamado *largura;* a aresta AA' é chamada *altura*. Entretanto, estas denominações são relativas; façamos repousar o bloco sobre a face ABB'A', isto é, tomemos esta face, como base do bloco, e teremos de mudar os nomes das três dimensões.

Para ler um prisma, é bastante enunciar uma letra da base inferior e outra da base superior, e de modo que estas duas letras se refiram a pontos não situados na mesma face. Assim, diremos: prisma AC'. (fig. 49*b*) Entretanto, tratando-se de um prisma triangular, convem dizer: prisma ABCA'B'C'. (fig. 49*a*)

Quando as doze arestas de um bloco retângular são iguais, este toma o nome de **cubo.**

O cubo é um sólido geométrico que conhecemos desde o curso primario; todas as suas faces são iguais e são quadrados. (*)

A **pirâmide** (figs. 51*a*, 51*b*, 51*c*) *é um poliedro no qual uma das faces é um polígono qualquer; as outras são triângulos cujas bases são os lados do polígono, e que têm um vertice comum,* V.

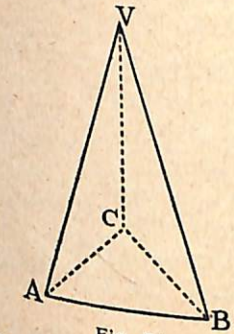


Fig. 51*a*

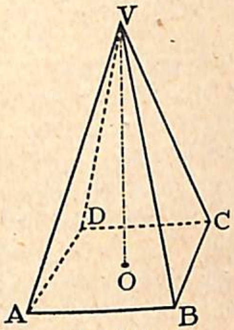


Fig. 51*b*

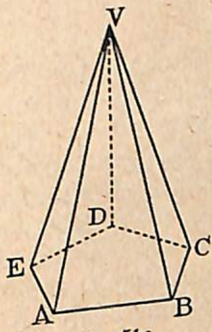


Fig. 51*c*

(*) Deixamos de apresentar a figura que representa um cubo, porque em todas as salas de aula deve existir este sólido em madeira ou cartolina para ser mostrado aos alunos.

A *base* de uma pirâmide é o polígono qualquer ABCD (fig. 51*b*); as *faces* são os triângulos VAB, VBC, VCD e VDA, cujas bases são os lados do polígono ABCD; as *arestas laterais* são as arestas que concorrem no mesmo ponto V; o *vértice* da pirâmide é o ponto V; a altura é o segmento VO perpendicular ao plano da base, e traçado pelo vértice V.

Uma pirâmide pode ser *triangular*, *quadrangular*, *pontagonal*, etc., de acordo com o polígono que lhe serve de base.

Entre os principais corpos redondos podemos mencionar o *cilindro de revolução*, o *cone de revolução* e a *esfera*.

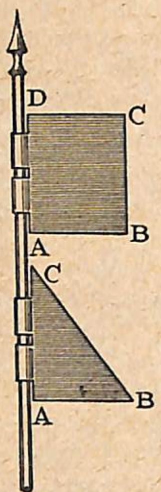


Fig. 52

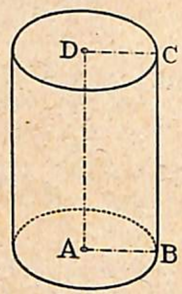


Fig. 53

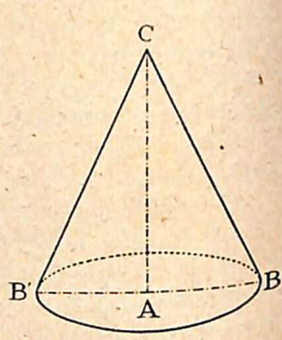


Fig. 54

Suponhamos que um retângulo e um triângulo retângulo estão presos em um haste, de modo que possam girar com a maior rapidez possivel em torno desta mesma haste. (fig. 52) Se estes dois polígonos forem feitos de madeira ou de um papelão resistente, e pintados com uma cor bastante viva, e se os fisermos girar rapidamente em torno da haste, teremos a ilusão de ver dois sólidos geométricos bastante conhecidos: o **cilindro de revolução** ou, simplesmente, *cilindro*, e o **cone de revolução** ou, simplesmente, o *cone*.

O **cilindro de revolução** *é o sólido geométrico gerado por um retângulo,* ABCD (fig. 53) *que gira em torno de um de seus lados,* AD, *suposto imovel.*

O lado AD, do retângulo, é a *altura* do cilindro; os círculos gerados, respectivamente, pelos lados AB e DC do retângulo, são as *bases* do cilindro.

O **cone de revolução** *é o sólido geométrico gerado por um triângulo retângulo,* ABC (fig. 54) *que gira em torno de um dos catetos,* AC, *suposto imovel.*

O cateto AC, do triângulo retângulo, é a *altura* do cone; o círculo gerado pelo outro cateto, AB, do mesmo triângulo, é a *base* do cone.

A esfera é um sólido geométrico, cuja forma é por demais conhecida.

ARITMÉTICA PRÁTICA

CAPÍTULO III

Operações Fundamentais

41. Grandeza, unidade, número. Várias *pilhas de livros*, algumas *porções de laranjas*, os *comprimentos* das linhas, as *larguras* das ruas, as *alturas* das torres, as *profundidades* dos rios, os *volumes* das caixas, os *pesos* dos corpos, as *temperaturas* de ambientes diferentes, as *intensidades* das correntes elétricas ou dos focos luminosos, as *áreas* das salas de aula, eis aí muitas coisas que se podem comparar entre si, isto é, verificar se uma pilha de livros tem mais ou menos livros do que outra; se uma rua é mais ou menos larga do que outra; se um corpo pesa mais ou menos do que outro; se uma linha é mais ou menos comprida do que outra, etc.. Referindo-nos a esta possibilidade, diremos que as *pilhas* de livros, os *comprimentos*, as *alturas*, os *volumes*, as *temperaturas*, etc., são **grandezas.** (*)

A noção de grandeza é intuitiva, não se define.

As grandezas podem ser classificadas em dois grupos: *grandezas contínuas* e *grandezas descontínuas*.

Grandeza contínua *é um todo cujas partes não são distintas uma das outras.* Os comprimentos, as larguras, as alturas, as espessuras, as profundidades, etc., são grandezas contínuas.

Grandeza descontínua ou **discreta** *é um todo cujas partes são distintas umas das outras.* Um grupo de estudantes, uma pilha de livros, uma porção de laranjas, uma fileira de automóveis, etc., são grandezas descontínuas.

(*) S. Pincherle, Algebra Elementar, Manuais Hoepli, Milão, 15.ª edição, 1913, pag. 1.

Medir ou **avaliar** uma grandeza é compará-la com outra da mesma espécie, porem conhecida, definida ou determinada. Medir, por exemplo, o comprimento de uma fita, significa verificar quantas vezes outro **comprimento** pode ser aplicado ao longo do comprimento desta fita. Admitamos que este outro comprimento está contido **sete vezes** no comprimento da fita. A este resultado dá-se o nome de **número.**

Portanto, **número é o resultado da avaliação de uma grandeza,** ou, então, **é a relação que existe entre uma grandeza qualquer e outra da mesma espécie, tomada como termo de comparação.** *(Definição de Newton)*

A grandeza definida, determinada, conhecida, por meio da qual se mede outra grandeza da mesma espécie, chama-se **unidade.** Portanto, **unidade é a grandeza perfeitamente determinada, por meio da qual se avalia ou se mede outra grandeza da mesma espécie.**

A **unidade** é **arbitrária** ou **determinada.** E' **arbitrária,** quando a grandeza que se quer medir é **contínua;** é **determinada,** quando a grandeza que se quer medir é **descontínua.** Suponhamos que se quer medir uma pilha de livros; a unidade se impõe: **é um livro.** Entretanto, para medir o comprimento de uma sala, a unidade pode ser qualquer; uma fita, um cordel, uma vara, o metro, o decímetro, o centímetro, etc..

A avaliação de uma grandeza descontínua não oferece dificuldade. Medir, por exemplo, uma pilha de livros, significa **contar** os livros que formam esta pilha. **Contar** é uma operação que aprendemos nos primeiros anos da escola primária, e da operação de contar resulta a primeira noção do **número.** A grande dificuldade está na avaliação das grandezas contínuas.

A Matemática é a ciência que tem por fim determinar as relações que existem entre as diferentes grandezas, de modo que se possam medir umas por intermédio das outras.

42. Os números inteiros ou naturais. Suponhamos que, medindo um segmento retilíneo, se verifica que ele contem a unidade exatamente **oito** vezes. **Oito** é um **número inteiro** ou **número natural.**

Portanto, *número inteiro ou natural é o número que resulta da avaliação de uma grandeza que contem a unidade, exatamente uma ou mais vezes.*

Pode acontecer que a grandeza que se quer medir não contenha a unidade, *exatamente, uma ou mais vezes.* Resultará então da avaliação desta grandeza uma outra espécie de número, que estudaremos mais tarde.

O número pode ser **concreto** ou **abstrato.** E' **concreto** quando se menciona o nome da unidade, por exemplo, **oito livros.** E' **abstrato** quando não se menciona o nome da unidade, por exemplo: **oito.** (*)

Os números concretos são quantidades. Por exemplo, 8 livros, 5 flores, 7 metros, etc., são *quantidades.*

43. Formação dos números e sua representação gráfica. O primeiro número inteiro resulta da avaliação de uma grandeza igual à unidade adotada. Chama-se *unidade* ou *um.* O numero inteiro seguinte resulta da avaliação de uma grandeza que contem a unidade, *uma vez e mais uma.* Chama-se *dois.* O número inteiro seguinte resulta da avaliação de uma grandeza que contem a unidade, *duas vezes e mais uma.* Chama-se *três.* O número inteiro seguinte resulta da avaliação de uma grandeza que contem a unidade, *três vezes e mais uma.* Chama-se *quatro.* Donde se conclue que, alem dos *números um, dois, três, quatro,* há uma infinidade de números. Portanto, a **série dos números naturais é ilimitada.**

A *unidade* ou o número *um* pode ser representada por um objeto qualquer e, graficamente, por um *segmento retilíneo.* Uma vez fixado o comprimento do segmento retilíneo que deve representar a unidade ou o número *um,* claro é que o número *dois* deverá ser representado por *dois* segmentos iguais ao primeiro; o número *três* por *três* segmentos iguais ao primeiro; o número *quatro* por *quatro* segmentos iguais ao primeiro, e assim por diante.

(*) A classificação dos números em *concretos* e *abstratos,* embora condenada por alguns autores, é adotada pelo insigne matemático J. Rey Pastor. (Aritmética, primeira parte, Buenos Aires, 1937) E, ainda de acordo com o mesmo autor (Aritmética, segunda parte, Buenos Aires, 1938) um número concreto é uma quantidade.

Sobre uma reta XY, tomemos um ponto fixo, **0** (zero) e à direita (por convenção) do ponto **0** (zero) marquemos uma série de segmentos iguais. O primeiro segmento será a representação gráfica do número *um;* este segmento e o seguinte representarão o número *dois;* os dois primeiros segmentos e o seguinte representarão o número *três;* e assim por diante. Donde se conclue, mais uma vez, que a série dos números inteiros é ilimitada em sentido crescente, e tem para limite inferior o número **zero.**

A figura acima representa a **série dos números inteiros ou naturais.** Ao conjunto destes números chamaremos, na frase elegante de P. Crantz, o nosso **campo numérico.** Mais tarde, este campo será ampliado de acordo com os problemas que a Matemática nos apresentar.

Observação. Na figura acima o símbolo ∞ que se lê *infinito,* significa que a série dos números naturais é *infinita* isto é, por muito grande que seja um número natural dado, podemos juntar-lhe sempre uma unidade, formando assim mais um número natural.

44. Numeração falada ou nomenclatura dos números. Vimos que a série dos números é ilimitada. (§ 43) Entretanto, como dar a cada número um nome que o distinguisse de todos os outros?

Inventar nomes completamente distintos para cada número, como foram inventadas, por exemplo, as palavras *um, dois, três,* etc., era impossivel. E mesmo que este impossivel fosse conseguido, não haveria memória capaz de reter esta série formidavel de palavras. Entretanto, conseguiu-se dar um nome distinto a cada número, mediante o artifício conhecido pelo nome de numeração falada.

Chama-se numeração falada ou nomenclatura dos números, *a um modo simples e regular de denominar todos os números. Os nomes dos números devem ser formados de modo que só se empregue um limitado número de palavras, para que se possa retê-las na memória e, alem disso, que cada nome, pelo modo mesmo por que ele foi formado, dê ideia da ordem de grandeza do número e do lugar que ele ocupa na série dos números naturais.* (Euclides Roxo)

45. Os elementos da numeração falada. A série dos números naturais é ilimitada. Entretanto, para dar um nome distinto a cada número, e de acordo com a definição da numeração falada, foram necessários, apenas, *três elementos*:

a) inventaram-se as palavras *um, dois três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, cem* e *mil;*

b) inventaram-se duas terminações: *enta* e *lhão;*

c) estabeleceu-se a seguinte convenção: *dez unidades de uma mesma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior.*

46. Princípio fundamental da numeração falada. A convenção a que nos referimos no parágrafo anterior é denominada *princípio fundamental da numeração falada.*

De acordo com este princípio, *drz* coisas quaisquer supostas da mesma espécie, e que chamaremos de *unidades simples*, formam uma nova espécie de unidade que se denomina *dezena;* por sua vez *dez dezenas* formam uma nova espécie de unidade que se denomina *centena; dez centenas* formam uma nova espécie de unidade que se denomina *unidade de milhar;* e assim por diante.

47. Unidades simples, dezenas e centenas.

1.º QUADRO

1.ª CLASSE OU CLASSE DAS UNIDADES SIMPLES		
CENTENAS OU UNIDADES DE 3.ª ORDEM	DEZENAS OU UNIDADES DE 2.ª ORDEM	UNIDADES SIMPLES OU UNIDADES DE 1.ª ORDEM
cem	dez	um
duzentos	vinte	dois
trezentos	trinta	três
quatrocentos	quarenta	quatro
quinhentos	cincoenta	cinco
seiscentos	sessenta	seis
setecentos	setenta	sete
oitocentos	oitenta	oito
novecentos	noventa	nove

A primeira coluna, à direita, contem os nomes das unidades simples ou unidades de primeira ordem. Estes nomes foram

inventados. A segunda coluna contem os nomes das dezenas ou unidades de segunda ordem. Estes nomes são derivados dos nomes das unidades simples, aos quais se juntou o sufíxo *enta.* Excetua-se a palavra *dez* que é primitiva, isto é, inventada. A terceira coluna contem os nomes das centenas ou unidades de terceira ordem. Estes nomes foram constituidos pelos nomes das unidades de primeira ordem, ligados à palavra *centos.* A palavra *cem, centena* ou *cento* é palavra primitiva.

O quadro acima contem vinte e sete palavras que, combinadas convenientemente, permitem denominar novecentos e noventa e nove números. E' claro que, para designar uma coleção de objetos, que contem *oitocentos* objetos mais *cincoenta* e mais *sete*, não é necessário inventar uma palavra nova; é bastante dizer *oitocentos e cincoenta e sete.*

As unidades simples, as dezenas e as centenas constituem a **primeira classe ou classe das unidades simples.**

Observação. Em lugar de *dez e um, dez e dois, dez e três, dez e quatro, dez e cinco*, dizemos *onze, doze, treze, quatorze* e *quinze.* Os estudantes aprenderão, nas aulas de latim, a razão de ser destas irregularidades.

48. Unidades, dezenas e centenas de milhar.

2.º QUADRO

2.ª CLASSE OU CLASSE DAS UNIDADES DE MILHAR		
CENTENAS DE MILHAR OU UNIDADES DE 6.ª ORDEM	DEZENAS DE MILHAR OU UNIDADES DE 5.ª ORDEM	UNIDADES DE MILHAR OU UNIDADES DE 4.ª ORDEM
cem mil	dez mil	um mil
duzentos mil	vinte mil	dois mil
trezentos mil	trinta mil	três mil
quatrocentos mil	quarenta mil	quatro mil
quinhentos mil	cincoenta mil	cinco mil
seiscentos mil	sessenta mil	seis mil
setecentos mil	setenta mil	sete mil
oitocentos mil	oitentamil	oito mil
novecentos mil	noventa mil	nove mil

De acordo com o princípio fundamental da numeração falada, *dez centenas* formam *uma unidade de milhar* ou *unidade de quarta ordem; dez unidades de milhar* formam *uma dezena de milhar* ou *unidade de quinta ordem; dez centenas de milhar* formam *uma centena de milhar* ou *unidade de sexta ordem.*

A primeira coluna, à direita (2.° quadro) contem os nomes das unidades de milhar ou unidades de quarta ordem. A segunda coluna contem os nomes das dezenas de milhar ou unidades de quinta ordem. A terceira coluna contem os nomes das centenas de milhar ou unidades de sexta ordem.

As unidades, dezenas e centenas de milhar constituem a **segunda classe** ou **classe das unidades de milhar.**

Os nomes das unidades de segunda classe são os nomes das unidades correspondentes da primeira classe, ligados com a palavra *mil*, que é primitiva ou inventada. E, reunindo convenientemente as vinte e sete palavras do 2.° quadro com as vinte e sete do 1.°, podemos denominar novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove números diferentes.

49. Unidades, dezenas e centenas de milhão.

3.° QUADRO

3.ª CLASSE OU CLASSE DAS UNIDADES DE MILHÃO		
CENTENAS DE MILHÃO OU UNIDADES DE 9.ª ORDEM	DEZENAS DE MILHÃO OU UNIDADES DE 8.ª ORDEM	UNIDADES DE MILHÃO OU UNIDADES DE 7.ª ORDEM
cem milhões	dez milhões	um milhão
duzentos milhões	vinte milhões	dois milhões
trezentos milhões	trinta milhões	três milhões
quatrocentos milhões	quarenta milhões	quatro milhões
quinhentos milhões	cincoenta milhões	cinco milhões
seiscentos milhões	sessenta milhões	seis milhões
setecentos milhões	setenta milhões	sete milhões
oitocentos milhões	oitenta milhões	oito milhões
novecentos milhões	noventa milhões	nove milhões

De acordo com o princípio fundamental da numeração falada, *dez centenas de milhar* formam *uma unidade de milhão* ou *unidade de sétima ordem; dez unidades de milhão* formam *uma dezena de milhão* ou *unidade de oitava ordem; dez dezenas de milhão* formam *uma centena de milhão* ou *unidade de nona ordem.*

A primeira coluna, à direita (3.° quadro) contem os nomes das unidades de milhão ou unidades de sétima ordem. A segunda coluna contem os nomes das dezenas de milhão ou unidades de oitava ordem. A terceira coluna contem os nomes das centenas de milhão ou unidades de nona ordem.

As unidades, dezenas e centenas de milhão constituem a **terceira classe** ou **classe das unidades de milhão.**

Os nomes das unidades de terceira classe são os nomes das unidades correspondentes da primeira classe, ligados com a palavra *milhão*. Esta palavra foi constituida pela palavra *mil*, reunida com o sufíxo *lhão*. E, reunindo convenientemente as vinte e sete palavras do terceiro quadro, com as vinte e sete do segundo e com as vinte e sete do primeiro, podemos denominar novecentos e noventa e nove milhões, novecentos e noventa e nove mil, novecentos e noventa e nove números diferentes.

50. As classes de unidades. As classes de unidades que receberam até o presente, denominações especiais, são onze, a saber:

1.	Classe	das	unidades	simples.
2.	»	»	»	de milhar.
3.	»	»	»	» milhão.
4.	»	»	»	» bilhão.
5.	»	»	»	» trilhão.
6.	»	»	»	» quatrilhão.
7.	»	»	»	» quintilhão.
8.	»	»	»	» sextilhão.
9.	»	»	»	» septilhão.
10.	»	»	»	» octilhão.
11.	»	»	»	» nonilhão. (*)

(*) As classes que se seguem, em número ilimitado, não receberam, por desnecessário, denominações especiais.

Já vimos de que modo se denominaram as unidades das três primeiras classes. Facil é, portanto, denominar as unidades das oito classes seguintes.

Cada classe é constituida, invariavelmente, por **três ordens de unidades,** a saber: *unidades, dezenas* e *centenas.*

51. As ordens de unidades. Desde que as classes em uso são *onze,* e que cada classe contem *três ordens* de unidades, conclue-se que existem *trinta e três ordens de unidades.* As *unidades de primeira ordem* são *as unidades simples; as unidades de nona ordem* são *as centenas de milhão;* as *unidades de trigésima terceira ordem* são *as centenas de nonilhão.* Quais serão as unidades de *décima quarta ordem?* Constituindo cada três ordens uma classe, as *doze primeiras ordens* constituem as *quatro primeiras classes,* as três ordens seguintes constituem a quinta classe, isto é, a classe das unidades de trilhão. Portanto, as **unidades de décima quarta ordem são as dezenas de trilhão.**

52. Base de um sistema de numeração. De acordo com o princípio fundamental da numeração falada, *dez unidades de uma ordem qualquer formam uma unidade de ordem imediatamente superior.* Ao número *dez* dá-se o nome de base da numeração falada, ou melhor *base* do sistema de numeração que expusemos nos parágrafos anteriores.

Portanto, *base de um sistema de numeração é o número de unidades de uma ordem qualquer, necessário para formar uma unidade da ordem imediatamente superior.*

Parece que a humanidade adotou a **base dez** por influência dos dez dedos das nossas mãos. Entretanto, a base do sistema poderia ser **oito** ou **nove** ou **onze** ou **seis,** etc.. Donde se conclue que há uma infinidade de sistemas de numeração, conforme a base adotada. Mas o sistema universalmente adotado é o sistema decimal, isto é, **de base igual a dez.**

Estudaremos mais tarde outros sistemas de numeração.

Os dez primeiros números são chamados **dígitos.**

53. Os defeitos da numeração falada. Todos os povos da terra não falam a mesma língua. Portanto, nós, os brasileiros, não temos obrigação de entender o número **three hundred and sixty-five,** escrito em inglês. Tambem os ingleses não têm obrigação de entender o número **trezentos e sessenta e cinco.** Logo, a numeração falada tem este primeiro defeito: **não é universal.** Mas este defeito é inevitavel.

O segundo defeito da numeração falada é tornar quasi impossiveis as operações sobre os números, que precisariam ser feitas mentalmente.

Para evitar estes dois inconvenientes convencionou-se representar todos os números por meio de *sinais gráficos* chamados *algarismos.*

Algarismos são sinais gráficos por meio dos quais se representam todos os números. Os algarismos são nove: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Estes algarismos são chamados **arábicos,** porque se admite que foram inventados pelos árabes. Veremos adiante (§ 54) que foi necessário inventar mais um algarismo.

54. Numeração escrita ou escritura dos números. Inventaram-se **nove** algarismos porque, em uma ordem qualquer, há, no máximo, **nove** unidades, visto ser *dez* a base do nosso sistema de numeração. Entretanto, se a série dos números inteiros é infinita, como representá-los todos, apenas, com **nove** algarismos? Estabelecendo a seguinte convenção, à qual chamaremos **princípio fundamental da numeração escrita:** *um algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vezes mais do que valeria se estivesse no lugar deste outro.*

1.º *exemplo.* Escrever com algarismos o número *quatro mil setecentos e sessenta e três.* Este número é constituido por quatro espécies de unidades, a saber: *três* unidades simples, *seis* dezenas, *sete* centenas e *quatro* unidades de milhar. Então representaremos as *três* unidades pelo algarismo 3, as *seis* dezenas pelo algarismo 6 à esquerda do 3, as *sete* centenas pelo algarismo 7 à esquerda do 6, e as *quatro* unidades de milhar pelo algarismo 4 à esquerda do 7. Portanto, o número *quatro mil setecentos e sessenta e três* ficará representado de um modo simples e universal, da seguinte maneira: 4 763. (*)

(*) A comissão de Metrologia do Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio, recomenda:

1. A vírgula ou o ponto são empregados em um número, para separar a parte inteira da parte decimal.

2. A parte inteira dos números deve ser separada em classes de três algarismos, da direita para a esquerda; a separação será feita exclusivamen-