uma das pontas no polo, gira-se o compasso até que a outra ponta complete a circumferencia.

Para o traçado de um circulo maximo basta tomar para distancia polar a corda de um quadrante, cujo valor é $r\sqrt{2}$.

Determina-se praticamente o diametro de uma esphera solida, comprimindo a esphera entre dois planos parallelos; a distancia entre estes planos será o diametro.

Quando se corta uma esphera por dois planos parallelos, a porção da superficie da esphera comprehendida entre os planos chama-se *zona*, e a porção do volume da esphera limitada pelos mesmos planos recebe o nome de *segmento espherico*; a distancia entre os dois planos parallelos é a *altura* commum da zona e do segmento espherico.

Cortando-se a esphera por dois planos que passem pelo mesmo diametro, a porção da superficie da espherica comprehendida entre elles chama-se *fuso espherico*, e a parte do volume da esphera limitada por esses planos tem o nome de *cunha espherica*. Assim, tomando-se uma laranja para representar a esphera, um gommo corresponde á cunha espherica, e a casca do gommo ao fuso espherico.

217. Applicações. — Innumeros objectos redondos, vulgarmente chamados bolas, têm a fórma da esphera. Consideram-se, em astronomia, o globo terrestre e os astros como sendo espheras que se movem no espaço.

Em geographia faz-se uso da consideração de zonas e de fusos; a superficie do globo terrestre está dividida em cinco zonas principaes e em vinte e quatro fusos horarios.

Theorema

218. *A area de uma zona espherica é egual ao producto da circumferencia de um circulo maximo pela altura da zona.*

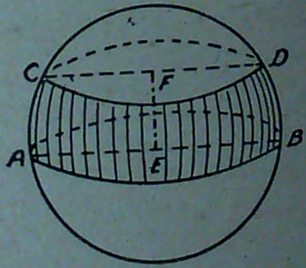

Fig. 125

Assim, na zona espherica da fig. 125, designando o raio da esphera por r e a altura EF por a, tem-se:

$$Z = 2\pi r \times a.$$

219. Corollario. — *A area da esphera é egual a quatro vezes a area de um circulo maximo.*

Com effeito, suppondo que os planos das bases da zona se afastam até que passem pelas extremidades de um diametro, a zona cresce e torna-se egual á superficie da esphera; mas então a altura da zona é egual a $2r$, e, designando por E a area da esphera de raio r, vem:

$$E = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2.$$

Exemplo. — Qual é a area de uma esphera de 1,m20 de raio?

$$E = 4 \times 3{,}14 \times 1{,}20 \times 1{,}20 = 18^{m^2}{,}0864.$$

Theorema

220. *A area de um fuso espherico é egual ao producto da area da esphera pela razão entre o numero de graus do fuso e 360°* (fig. 126).

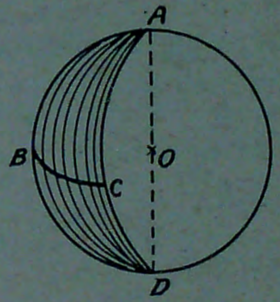

Fig. 126

Seja o fuso $ABDCA$; o numero de graus é dado pelo arco BC de circulo maximo descripto do ponto A como polo. Si dividirmos a superficie da esphera em 360 fusos eguaes, cada um terá um grau e sua area será $4\pi r^2 \times \frac{1}{360}$; tendo o fuso n graus, a area F do mesmo terá por expressão:

$$F = 4\pi r^2 \times \frac{n}{360}.$$

Exemplo. — Calcular a area de um fuso de 72°, numa esphera de 2 m. de raio.

$$F = 4 \times 3{,}14 \times 2 \times 2 \times \frac{72}{360} = 10^{m^2}{,}05.$$

THEOREMA

221. *O volume da esphera é egual ao producto da terça parte de sua area pelo raio.*

Admittindo como certo o theorema, temos, designando por r o raio da esphera e por V o seu volume:

$$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

222. **Corollario.** — *O volume de uma cunha espherica é egual ao producto do volume da esphera pela razão entre o numero de graus da cunha e 360°*, isto é:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \times \frac{n}{360},$$

designando por n o numero de graus da cunha espherica, o qual se obtem como para o fuso.

EXEMPLO. — Qual é o volume de uma esphera de madeira, tendo o raio 30 cm.?

$$V = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 30^3 = 113040 \text{ cm.}^3.$$

223. **Observação.** — As caldeiras, cisternas, etc. têm ás vezes a fórma de meia-esphera; a sua medida é evidentemente egual á metade do volume da esphera de mesmo raio. Outras são formadas de um cylindro terminado inferiormente por meia-esphera, e neste caso a somma destes dois volumes dará a medida das mesmas.

Em geral, quando um corpo póde ser decomposto em partes que se pódem medir pelos processos geometricos, effectua-se esta decomposição, e a somma dos volumes parciaes dará o volume do corpo considerado.

Exercicios

146. — Calcular a area de uma zona de 1m.50 de altura, pertencente a uma esphera de 2 m. de raio.

147. — Qual é a area de uma zona de 1 m. de altura situada numa esphera de 12m.²56 de area?

148. — Sendo o raio da esphera egual a 0m.60, qual é a area de um fuso de 30.º?

149. — Qual é a area da esphera, sabendo-se que uma zona de 0m.50 de altura tem de area 6m.²28?

150. — Numa esphera de 10 m². de area, quanto vale um fuso de 72°?

151. — Numa esphera de 15 m.² de area, qual é a area de uma zona de 0m.20 de altura?

152. — Partindo da definição do metro, calcular a area do globo terrestre.

153. — Qual é a area de uma esphera de madeira que tem 0m.30 de raio?

154. — Qual é o raio de uma esphera que tem 1m.² de area?

155. — Qual é, numa esphera de 5 m. de raio, a altura de uma zona equivalente a um circulo maximo?

156. — Tendo uma zona 10 m.² de area e sua altura 1 m., qual será o diametro da esphera?

157. — Calcular a circumferencia maxima da esphera que tem 10 m.² de area.

158. — Qual é o volume de uma esphera de 1m.80 de raio?

159. — Calcular o volume de uma esphera que tem 0m.60 de diametro.

160. — Calcular o volume da esphera cuja area é egual a 12m.²56.

161. — Calcular o volume da esphera equivalente ao volume de um cubo de 2 m. de aresta.

162. — Qual é o raio da esphera que tem 4m.³188 de volume?

163. — Calcular o volume de uma cunha espherica de 120°, pertencente a uma esphera de 10 m. de raio.

164. — Calcular o volume da esphera na qual o volume da cunha de 72° é egual a 0m.³036.

165. — Quantos litros poderão encher uma esphera ôca, cujo diametro interior é egual a 0m.20?

166. — Qual é o volume de gaz necessario para encher um balão de borracha de 0m.40 de raio?

167. — Qual é o volume de uma esphera cuja circumferencia maxima tem 12m.56?

168. — Calcular o volume da esphera cuja area é egual a 62m.²80.

169. — Calcular o volume de um tubo de ferro de 5 m. de comprimento e 0m.50 de diametro interno, fechado nas extremidades por meio de hemispherios.

170. — Qual é o raio de uma esphera cuja capacidade é de 4188 litros?

CAPITULO V

CUBATURA DE MADEIRA, VOLUMES DE TONEIS E DE MONTÕES DE AREIA. PESO ESPECIFICO.

224. Cubatura de madeira. — A medida dos tóros de madeira é obtida com relativa approximação.

Toma-se a metade da circumferencia média *AB* (que é a que fica a egual distancia dos extremos), e o qua-

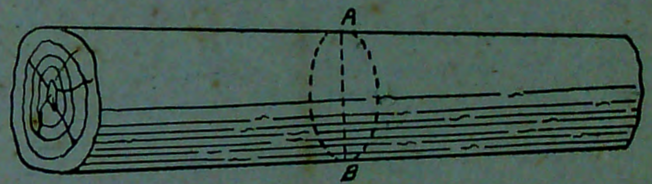

Fig. 127

drado deste valor multiplica-se pelo comprimento do tóro; este producto dividido por 3,14 dá o volume approximado, sem deducção.

Para esquadriar um tóro de madeira, inscreve-se um quadrado *ABCD* (fig. 128) numa de suas extremidades, e depois se desbasta a madeira exterior a este quadrado: a parte desbastada do tronco corresponde ás *costaneiras*.

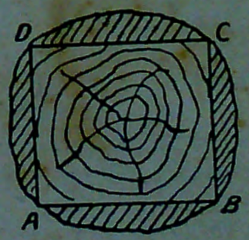

Fig. 128

Calcula-se, no emtanto, o volume da madeira obtida pela esquadría de um tronco ainda bruto, pelo processo seguinte; *multiplica-se o quadrado da quinta parte da circumferencia média pelo comprimento da peça de madeira.*

Exemplo. Qual é o volume de um tóro de madeira de 4,^{m}40 de comprimento, tendo 1,^{m}80 de circumferencia média?

Solução. — O volume, sem deducção das costaneiras, é o seguinte:

$$V = \left(\frac{1,80}{2}\right)^2 \times \frac{4,40}{3,14} = 1,^{m^3}132$$

Deduzindo as costaneiras, teriamos:

$$V = \left(\frac{1,80}{5}\right)^2 \times 4,40 = 0,^{m^3}570$$

Para a medida da madeira já esquadriada, tendo portanto a fórma de um prisma recto, applica-se a formula do volume do prisma (n.° **187**).

225. Volume de toneis. — Os toneis têm as mais variadas fórmas, o que impede de haver uma formula conveniente para todos os casos. O meio pratico para a escolha das formulas, consiste em medir por *trasfego* um certo numero de toneis de fórma e proveniencia conhecidas, e depois comparar os resultados do calculo com o volume exacto dado pela medida directa.

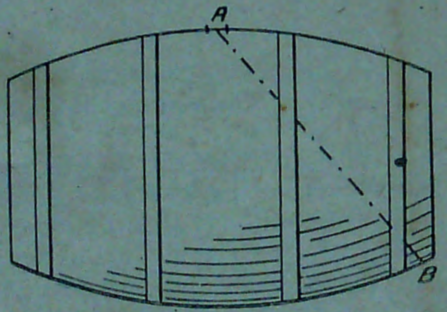

Fig 129

Considera-se, geometricamente, um tonel ou um barril como um cylindro de egual altura, e cujo diametro valha a terça parte da somma do pequeno diametro com o dobro do grande diametro do tonel.

Para avaliar-se approximadamente a capacidade de um tonel, pipa, etc. ha o seguinte processo pratico:

Mede-se a distancia, em decimetros, desde o **batoque** *A até o ponto B mais distante do mesmo. O producto do cubo deste comprimento por 0,625 dará em* **litros** *a capacidade procurada.*

Exemplo. Qual é, em litros, a capacidade de uma pipa, sendo de 9 dm. a distancia do batoque até o ponto mais afastado do fundo?

$$V = 9^3 \times 0,625 = 455 \text{ litros}, 625$$

Si a fórma do tonel approxima-se da cylindrica, diminue-se 1 °/o do resultado obtido; e si a fórma é muito recurvada, augmenta-se 1 °/o ao mesmo resultado obtido pelo processo anterior.

Outra formula de facil applicação é a de *Béziers*: seja a a altura interna do tonel, d o diametro maximo do bojo, e d' o diametro do fundo; o volume, em *hectolitros*, será:

$$V = (d + d')^2 \times 2a.$$

226. Volume de montões de areia.—Os montões de areia têm, commumente, plano o limite superior, como se vê na fig. 130.

O volume é dado do modo seguinte:

Fazem-se os productos da somma do dobro do comprimento inferior com o superior pela largura inferior, e da somma do dobro do comprimento superior com o inferior pela largura superior. O volume é egual a um sexto do producto da somma dos dois resultados precedentes pela altura do montão.

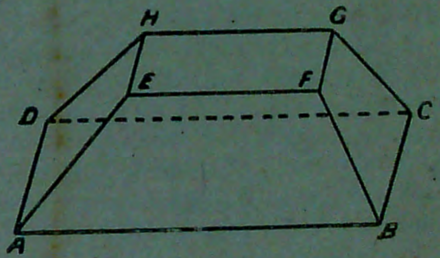

Fig. 130

Exemplo.—Calcular o volume de um montão de areia cuja base inferior tem 3 m. por 2 m., e a superior tem 1^{m}.80 por 1 m., e cuja altura é de 1^{m}.20.

$$V = \frac{1}{6}\left[(2 \times 3 + 1,80)\,2 + (2 \times 1,80 + 3)\,1\right] \times 1,20 =$$

$$= \frac{1}{6}(15,6 + 6,6) \times 1,20 = 4,^{m^3}440$$

Quando não se requer muito rigor, emprega-se o processo pratico, que consiste em multiplicar pela altura o producto do comprimento pela largura média do montão.

Applica-se a mesma formula anterior para a determinação do volume dos tanques de pedra, amassadouros, caixas de carroças, para os taludes, etc.

227. **Peso especifico dos corpos.**—Todos os corpos não têm o mesmo peso sob o mesmo volume. Pesando-se successivamente um decimetro cubico de agua, madeira e ferro, encontram-se pesos differentes para estes corpos. Representando por *1* o peso da unidade de volume da agua, achamos que o peso da unidade de volume do ferro é *7,8*.

Si fosse conhecido o *peso da unidade de volume* dos corpos usuaes na pratica, vê-se que o peso de um corpo bastaria para fazer conhecer o seu volume, procurando-se quantas vezes o peso desse corpo contém o peso da unidade de volume.

Sabe-se, por exemplo, que um litro de agua distillada, a 4°, pesa um kilogrammo. Supponhamos que um vaso, cuja capacidade não póde ser avaliada geometricamente, pesa 2 Kg. quando vasio, e 7 Kg. quando cheio de agua pura; conclúe-se que o peso da agua contida nesse vaso será 5 Kg., e que o seu volume, ou a capacidade do vaso, será 5 litros ou 5 dm.^{3}.

Reciprocamente: conhecendo-se o volume de um corpo, isto é, o numero de unidades de volume que elle contém, multiplicando-se este numero pelo peso da unidade de volume, ter-se-á o peso total do corpo.

O peso da unidade de volume de cada corpo é o que se chama o *peso especifico* desse corpo.

Designando por p o peso especifico de um corpo, V o volume e P o peso, tem-se:

$$p = \frac{P}{V}, \text{ donde } P = p \times V.$$

O peso de um corpo é pois, egual ao producto do seu volume pelo peso especifico.

Exemplo I. — Qual é o peso de uma esphera de chumbo de 1 m. de raio, sendo o peso especifico do chumbo 11,3?

$$P = \frac{4}{3}\pi r^3 \times p = \frac{4}{3} \times 3,14 \times 1 \times 11,3 = 47309 \text{ Kgs.}$$

Exemplo II.— Calcular o peso de uma pyramide de granito, cuja base tem 1$^{m^2}$,30 e a altura mede 0^m,90, sabendo-se que o peso especifico do granito é egual a 2,7.

$$P = V \times p = \frac{0,90 \times 1,30}{3} \times 2,7 = 1053 \text{ Kgs.}$$

TABELLA

Peso especifico de algumas materias

MATERIAS	Peso especifico	MATERIAS	Peso especifico
Aço commum.	7,6	Grés	2,3
Bronze	8,8	Marmore	2,6
Cobre	8,8	Pedras de construcção .	2,5
Chumbo	11,3	Tijolo commum	1,8
Estanho	7,3	» prensado	1,6
Ferro batido	7,7	» refractario. . . .	2,1
» fundido.	7,2	Argamassa (cal e arêa) .	1,6
» em arame. . . .	7,6	» de cimento .	1,5
Zinco fundido.	6,9	» » prensada .	1,7
» laminado	7,1	Concreto	1,7
Areia fina e secca . . .	1,6	Muros de pedras c/arg. . .	2,4
» » » humida . .	2,0	» » tijolos » . .	1,6
» grossa e secca . .	1,4	Carvão de pedra. . . .	1,4
Cal queimada.	1,6	Pinho secco	0,5
Cimento.	2,9	Madeira secca	0,7
Granito	2,7	» humida. . . .	1,1

Exercicios

171. — Calcular o volume de um tóro de madeira de 4m.20 de comprimento e cuja circumferencia média vale 1m.50.

172. — Qual é o volume de uma viga de madeira de 5m 10 de comprimento e cuja secção é um rectangulo de 0m.40 por 0m.30 ?

173. — Quanto vale um tóro de peróba de 4m.50 de comprimento e cuja circumferencia média é egual a 1m.70, â razão de 60$000 o m.^{3} ?

174. — Calcular a capacidade de um tonel, sendo de 1m.50 a distancia do batoque até o ponto mais distante do fundo.

175. — Calcular, em hectolitros, a capacidade de uma pipa, cuja altura interna é 1m.20; e os diametros do bojo e do fundo são respectivamente 0m.90 e 0m.60.

176. — Calcular o volume de um montão de areia de 1m.50 de altura, sabendo-se que a base inferior tem 3 m. por 2m.40, e a base superior tem 1m.80 por 1m.20.

177. — Calcular approximadamente o volume de um montão de pedra britada, sabendo-se que a secção média tem 2m.50 por 2 m. e que a altura é egual a 1m.10.

178. — Quantos kilogrammas pesa uma columna de ferro macisso de 5 m. de comprimento e 0m.20 de diametro ?

179. — Qual é o peso approximado de uma pilha de tijolos communs, tendo 1m.30 de comprimento, 0m.80 de largura e 1m.50 de altura ?

180. — Quanto pesa uma viga de pinho secco de 3m.80 de comprimento, e cuja esquadria vale 0m.25 por 0m.12 ?

181. — Determinar o peso de uma bola de chumbo de 0m.10 de raio.

182. — Quanto vale uma esphera de cobre que tem 0m.30 de raio, á razão de 6$000 o Kg. ?

183. — Qual é o peso de uma pedra marmore de 0m.10 de espessura, 1m.50 de comprimento e 0m.80 de largura ?

184. — Quanto pesa um cubo de granito que tem 0m.40 de aresta ?

185. — Quantos kilogrammos pesa um metro cubico de terra, sendo a densidade da terra 5,5 ?

186. — Uma gondola de estrada de ferro está carregada de carvão de pedra; calcular o peso do carvão, sabendo-se que a gondola tem 6 m. de comprimento, 2m.20 de largura e 0m.60 de altura.

187. — Quanto pesa uma parede de tijolos de 4 m. de altura, 0m.30 de espessura e 3m.50 de comprimento ?

188. — Um involucro espherico de cobre de 0m.12 de raio exterior e 0m.10 de raio interior, está cheio de mercurio. Qual é o seu peso total ?

Exercicios

(Revisão geral sobre areas e volumes)

189. — Calcular a area cultivada de um jardim rectangular de 24 m. de comprimento por 12m.50 de largura, existindo ao redor do mesmo uma álea de 1m.20 de largura.

190. — Quantos ladrilhos de 0m.20 de lado são precisos para o ladrilhamento de um quarto que mede 3m.60 de comprimento e 2m.80 de largura?

191. — Deseja construir-se um passeio, em frente de um predio, com 48m.20 de extensão e dando-se ao mesmo 1m.80 de largura. Quanto custará esse passeio a 7$000 o metro quadrado?

192. — Quantas taboas de 0m.12 de largura e 4m.20 de comprimento são necessarias para assoalhar uma sala quadrada de 6m.40 de lado?

193. — Qual é o preço de um terreno rectangular de 180 m. de base por 96 m. de largo, á razão de 300$000 o hectaro? (Um hectaro = 10000 m.^{2}).

194. — Para percorrer o perimetro de um campo rectangular de 180 m. de comprimento fazem-se 900 passos de 0m.70 cada um. Qual é a largura do campo e a sua area?

195. — Quantos metros de muro são precisos para fechar um terreno quadrado de 5625 m.^{2} de area?

196. — Uma placa metalica, que tem a fórma de um parallelogrammo com 0m.75 de base por 0m.44 de altura, custou 25$000. A como sahiu o preço do decimetro quadrado?

197. — Um hectaro de terra contém em média 800 cafeeiros; quantos cafeeiros comporta um terreno rectangular cujas dimensões são 250 m. e 120 m.?

198. — Um jardim triangular tem 12 m. de base e 15m.20 de altura. Qual é a sua area em aros? (Um aro = 100 m.^{2}).

199. — No interior de um campo rectangular de 100 m. de comprimento e 45 m. de largura, construiu-se um fosso triangular de 8m.50 de base e 6m.80 de altura. Que area ficou para o campo?

200. — Quanto custa o revestimento do fundo de um tanque de fórma hexagonal regular, cujo perimetro é egual a 21 m., á razão de 4$500 o metro quadrado?

201. — Qual é a area de um recinto circular rodeado por uma grade de 43m.96 de comprimento?

202. — No centro de uma praça quadrada de 10 m. de lado construiu-se um tanque circular de 3m.60 de diametro. Que area ficou para essa praça?

203. — Qual é a area do circulo de uma roda que em 10 voltas percorreu 376m.8?

204. — Um campo rectangular tem 330 m. de perimetro, e o comprimento é duplo da largura. Quanto vale este campo a 800$000 o hectaro?

205. — Um quarto de 4m.80 de comprimento por 4m.20 de largura deve ser assoalhado com taboas de 3m.60 de comprimento por 0m.08 de largura. Qual é o preço total das taboas á razão de 22$000 a duzia?

206. — Um jardim circular foi rodeado de um gradil que, á razão de 12$000 o metro quadrado, custou 180$000. Calcular o perimetro e a area do jardim.

207. — Um terreno rectangular tem 480 m. de perimetro; o comprimento excede em 60 m. a largura. Qual é o valor desse terreno a 300$000 o hectaro?

208. — Quanto custarão os vidros necessarios para serem collocados em 8 bandeiras de porta, de fórma semi-circular com 0m.60 de raio, á razão de 9$000 o metro quadrado de vidro?

209. — Um blóco cubico de pedra tem 0m.60 de aresta. Quanto custará o talho do mesmo, a 4$000 por metro quadrado?

210. — Quantos rolos de papel de 8 m. de comprimento e 0m.50 de largura são precisos para empapelar uma sala de 5 m. de comprimento, 4 m. de largura e 4m.50 de altura, dando-se o desconto de $\frac{1}{5}$ para as portas e janellas?

211. — Uma viga de madeira tem 5 m. de comprimento, 0m.30 de altura e 0m.20 de largura. Qual é a sua area total?

212. — Um reservatorio dagua, de fórma cubica com 1m.20 de lado, está cheio até aos $\frac{3}{4}$ da altura. Quantos litros dagua contém o reservatorio?

213. — Um muro de 25 m. de comprimento, 2 m. de altura e 0m.45 de espessura, foi construido a 30$000 o metro cubico. Em quanto ficou o muro?

214. — Para o calçamento de uma rua de 250 m. de comprimento por 12 m. de largura, empregaram-se pedras de 8$000 o metro cubico. Quanto custou o calçamento, sabendo-se que o mesmo tem 0m.20 de espessura, e que o m.^{2} de calçamento é collocado a 4$000.

215. — Uma columna cylindrica tem 4 m. de altura e 0m.30 de diametro. Qual é a sua area lateral?

216. — Uma cisterna cylindrica tem interiormente 2m.40 de diametro e 5 m. de altura. Em quanto ficára o revestimento das paredes desta cisterna, á razão de 6$000 por metro quadrado?

217. — Calcular a capacidade de um reservatorio cylindrico de 1m.20 de raio e 3 m. de altura.

218. — Uma caixa rectangular tem as seguintes dimensões interiores: 2 m., 1m.50 e 0m.80. Qual é a sua capacidade em hectolitros? (1 Hl = 0m.^{3}100).

219. — Em quanto fica o revestimento das paredes lateraes e do fundo de uma cisterna cylindrica de 2 m. de raio e 12 m. de profundidade, a 5$000 o m.^{2}?

220. — Uma caixa vasia pesa 20 Kg.; cheia de agua fica pesando cinco vezes mais. Qual é a capacidade desta caixa?

221. — Um barril vasio pesa 6 Kg.5; cheio dagua pesa 48 kg. Quanto pesaria este barril cheio de oleo, sendo a densidade do oleo 0,92?

222. — Um tanque circular tem 1250 litros de capacidade; a profundidade é de 0m.60. Calcular a sua circumferencia.

223. — Um monolitho conico tem 12m.56 de circumferencia na base e 1m.80 de geratriz. Calcular a sua area total.

224. — Calcular a area lateral de uma chaminé de tijolos, de fórma tronco-conica, tendo 16 m. de lado com 1m.20 e 0m.70 de diametro nas bases.

225. — Qual é o volume de um cone de 1m.20 de altura e 6m.28 de circumferencia na base?

226. — Qual é a capacidade de um globo de vidro, cujo diametro interno vale 0m.60?

227. — Calcular a area de uma zona de 0m.25 de altura e pertencente a uma esphera de 1 m. de raio.

228. — Uma pilha de tijolos tem a fórma de uma pyramide regular quadrangular com 2 m. de lado e 3m.60 de altura. Quantos tijolos tem a pilha, á razão de 400 tijolos por metro cubico?

229. — Que altura deve dar-se a um cylindro de 0m.30 de raio, para que tenha 150 litros de capacidade?

230. — Um tanque tem as paredes em talúde; o fundo é um quadrado de 20 m. de lado, os bordos formam tambem um quadrado de 22 m. de lado, e a profundidade do tanque é egual a 3 m.; qual é a sua capacidade em hectolitros?

231. — Calcular a capacidade de uma cuba cujo fundo tem 1m.10 de raio, o bordo superior 1m.40 de raio, e cuja profundidade é egual a 1m.62.

232. — Calcular a area total de um corpo cylindrico terminado por dois hemispherios de egual raio, sabendo-se que o comprimento total desse corpo é egual a 7m.40 e que o raio vale 1m.20.

233. — Calcular, em hectolitros, a capacidade de uma caixa cylindrica fechada por um hemispherio na parte inferior, sendo o raio do cylindro egual a 0m.60 e a sua altura 1m.80.

APPENDICE

BREVES NOÇÕES DE AGRIMENSURA

I. — Traçado e medida dos alinhamentos

228. Traçar um *alinhamento* é marcar no terreno uma serie de pontos situados em linha recta.

Os problemas mais communs, sobre traçado dos alinhamentos, são os seguintes :

PROBLEMA

229. *Traçar o alinhamento determinado por dois pontos A e B* (fig. 131).

Em cada um dos pontos A e B colloca-se verticalmente uma estaca. Fica-se depois a uma pequena distancia de A, de maneira que a estaca deste ponto esconda

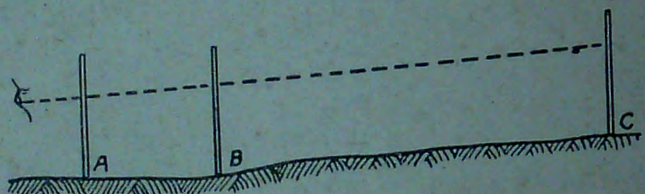

FIG. 131

completamente a que está em B; manda-se, em seguida, um ajudante cravar uma estaca C que fique nessa direcção. Repetindo a mesma operação, obtém-se um numero qualquer de pontos pertencentes ao alinhamento que se deseja traçar.

PROBLEMA

230. *Prolongar um alinhamento traçado no terreno* (fig. 131).

Seja AC o alinhamento que se deve prolongar.

Estacionando-se á pequena distancia, e operando como no problema anterior, mandam-se cravar estacas na direcção determinada pelas duas estacas verticaes plantadas nos pontos A e C. Obtém-se, assim, o prolongamento procurado.

PROBLEMA

231. *Traçar um alinhamento determinado por dois pontos A e B, que não podem ser vistos, a não ser de um ponto intermediario C* (fig. 132).

Colloca-se uma estaca em C, procurando-se a direcção do alinhamento a traçar. Depois, no alinhamento CA,

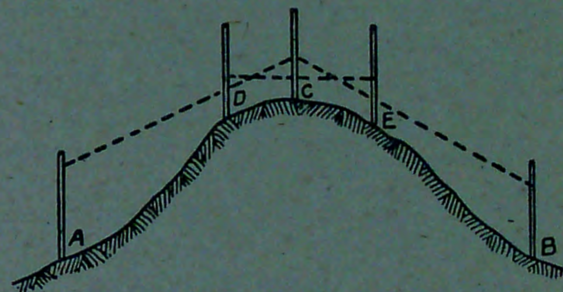

FIG. 132

crava-se uma estaca D, e no prolongamento do alinhamento DC colloca-se outra estaca E. Verifica-se, em seguida, si a estaca cravada em B se acha no mesmo alinhamento CE ; em caso contrario, muda-se convenientemente a estaca intermediaria C, e renova-se a operação, até que B fique na direcção dada pelas estacas C e E.

PROBLEMA

232. *Medir um alinhamento proximamente horizontal* (fig. 133).

Applica-se um dos punhos da corrente de agrimensor contra a primeira estaca cravada no ponto origem A do alinhamento; um ajudante, levando a outra extremidade da corrente e as *fixas* (hastes de ferro recurvadas numa das extremidades e terminadas em ponta na outra), caminha na direcção do alinhamento, até que a corrente fique bem esticada, e crava no terreno uma fixa B que seja tan-

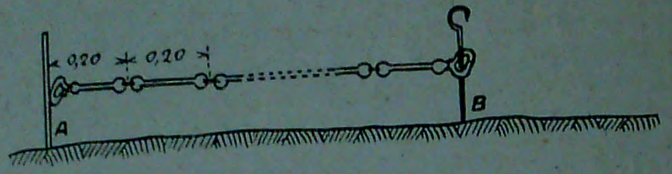

Fig. 133

gente ao interior do punho da corrente, como se vê na figura. Depois disso, ambos tornam a caminhar na mesma direcção do alinhamento, até que o de traz chegue á fixa B, renovando então a mesma operação.

Ao deixarem uma estação, o primeiro medidor arranca a fixa e leva-a comsigo, e quando chegarem ao fim do alinhamento, o numero de fixas usadas multiplicado pelo comprimento da corrente, que é ordinariamente de 20 metros, dará a medida do alinhamento.

Problema

233. *Medir um alinhamento não horizontal* (fig. 134).

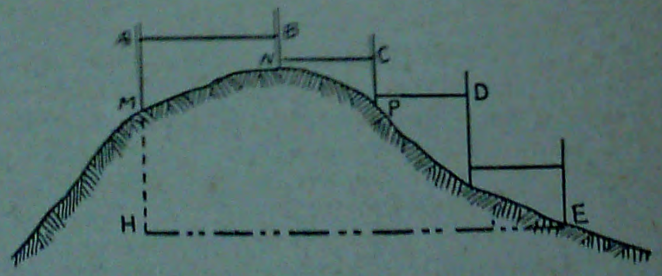

Fig. 134.

Em agrimensura, nunca se mede o comprimento da linha sinuosa $MNPE$ do terreno, mas sempre a sua *projecção horizontal* EH.

E' preciso pois, manter a corrente esticada e na posição horizontal, sem attender ás ondulações do terreno.

Assim, em lugar da curva MN do terreno, toma-se a recta horizontal AB; egualmente BC substitue a linha NP do terreno. Quanto ao mais, segue-se um processo analogo ao do problema precedente, podendo empregar-se na medida partes da corrente, quando o terreno tem muita inclinação.

II. — Medida dos angulos no terreno.

234. Existem muitos instrumentos, chamados *goniometros*, que medem numericamente a grandeza dos angulos no terreno. Um dos mais simples e praticos é a *bússola de agrimensor*.

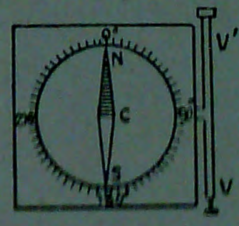

Fig. 135

A bussola de agrimensor é constituida por uma agulha imantada (fig. 135) equilibrada por um pivot O, ao redor do qual ella gira, percorrendo um circulo graduado. A ponta da agulha que se dirige para o Norte é azul. Num dos lados da caixa da bussola está collocada uma luneta VV'. O apparelho todo está montado sobre uma tripeça, ao redor da qual elle gira quando se trata de medir um angulo.

Problema

235. *Determinar o azimuth de um alinhamento AB* (fig. 136).

Chama-se *azimuth* de um alinhamento o angulo que faz este alinhamento com a direcção *NS* da agulha.

Assenta-se a bussola num ponto *C* do alinhamento, mantendo vertical o eixo do instrumento. Girando depois a caixa da bussola ao redor deste eixo, visa-se com a luneta *L* o ponto *B*, e faz-se a leitura no circulo graduado do numero de graus indicado pela ponta azul da agulha: é o azimuth procurado.

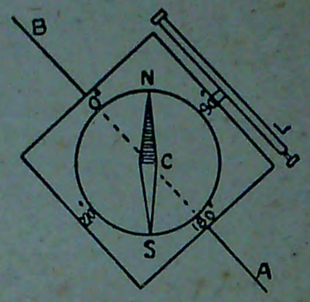

Fig. 136

Problema

236. *Medir um angulo no terreno* (fig. 137).

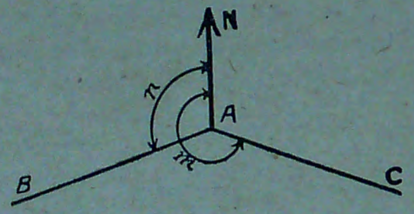

Fig. 137

Seja o angulo *BAC* que se trata de medir. Assenta-se a bussola no vertice *A* do angulo, e visando os pontos *B* e *C*, determinam-se os azimuths *n* e *m* dos alinhamentos que formam os lados do angulo. A differença *m—n* dos dois azimuths é a medida do angulo *BAC*.

III. — Levantamento de plantas.

237. Escala. — Chama-se *escala* de uma planta a razão que ha entre uma linha da planta e a linha correspondente do terreno. Assim, na escala 1:1000 (um por mil), cada millimetro da planta corresponde a um metro no terreno.

Problema

238. *Levantar a planta de um terreno, empregando o processo de caminhamento* (fig. 138).

Seja o terreno polygonal *ABCDEF*, cuja planta se quer levantar.

Percorre-se o perimetro deste terreno, medindo com a corrente (ou mesmo com uma trena) os lados *AB*, *BC*, etc. do contorno do terreno. Ao passar pelos cantos ou vertices *A*, *B*, *C*, etc. medem-se, por meio da bussola, os angulos *FAB*, *ABC*, *BCD*, etc. Têm-se, assim, os elementos necessarios para a confecção da planta.

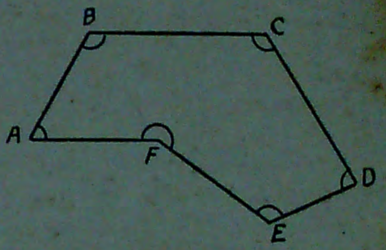

Fig. 138

Problema

239. *Desenhar a planta de um terreno* (fig. 139).

Supponhamos que no levantamento, do problema precedente, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$AB = 50\ m.\,;\ BC = 80\ m.\,;\ CD = 75\ m.\,;$$
$$DE = 40\ m.\,;\ EF = 60\ m.\ \text{e}\ FA = 48\ m.\,;$$
$$A = 48^\circ\,;\ B = 120^\circ\,;\ C = 135^\circ\,;\ D = 86^\circ\,;\ E = 105^\circ\ \text{e}\ F = 210^\circ\,;$$

e se trate de fazer a planta na escala 1:500.

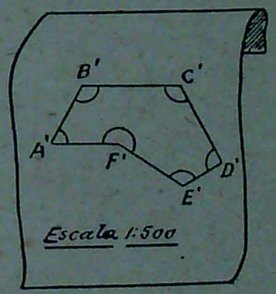

Fig. 139

Traça-se sobre o papel uma recta *A'B'* egual a $\frac{50^m}{500} = 0^m{,}1$, e na extremidade *B'* faz-se, com o transferidor, o angulo *A'B'C'* egual a 120°. Sobre o lado *B'C'* leva-se o comprimento $\frac{80^m}{500} = 0^m{,}16$, e na extremidade *C'* constróe-se, com o transferidor, o angulo *B'C'D'* egual a 135°. Assim se continúa até fechar o perimetro, ao traçar o ultimo lado *F'A'* da figura, a qual é semelhante á figura do terreno, porque tem seus angulos eguaes cada um a cada um, e os lados respectivamente proporcionaes (n.º 92) a esta, sendo a razão de semelhança egual a $\frac{1}{500}$.

240. Observações sobre o uso da bussola. — Póde traçar-se um alinhamento por meio da bussola, fazendo-se o estaqueamento na direcção dada pelas visadas que se fazem com a luneta deste instrumento, o que muito facilita a operação.

Não se deve contar com grande precisão nos levantamentos feitos com a bussola; mas pela sua simplicidade, que permitte muita rapidez no trabalho, e pela facilidade de transporte, é este instrumento de muito valor nos levantamentos.

A bussola dá a medida do angulo até a approximação de 10 minutos, e deve ter-se o cuidado de afastal-a dos objectos de ferro e das arvores de pau d'alho, que provocariam desvios da agulha, causando erros na leitura dos angulos.

241. Observações sobre a construcção de angulos no desenho. — Por meio dos goniometros modernos determina-se com grande precisão a medida de um angulo no

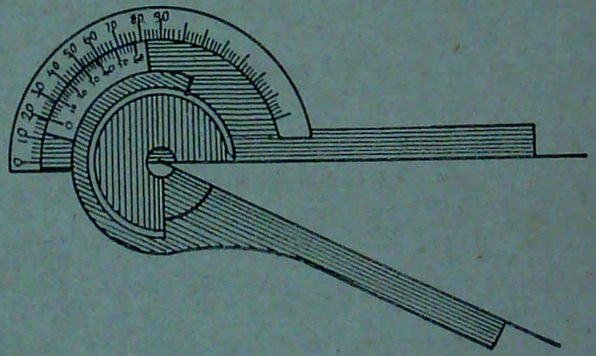

FIG. 140

terreno. O transporte dos angulos no papel, quando é feito por meio do transferidor, apresenta muito menor precisão.

Em lugar do transferidor em fórma de semi-circulo (fig. 46), emprega-se com vantagem o transferidor de *Leneveu*, que reúne excellentes condições (fig. 140).

O modo de usar este transferidor nol-o indica a figura.

IV. — Avaliação da area dos terrenos

242. Para a *avaliação da area* de um terreno, devem-se primeiramente conhecer os limites do terreno, afim de facilitar o levantamento da respectiva planta. Sobre o desenho da planta do terreno fazem-se depois as operações para o calculo da area, obtendo-se as diversas medidas conforme a escala adoptada no mesmo desenho.

243. Limites naturaes. — Os principaes *limites naturaes* são constituidos pelos cursos d'agua, pelos espigões, caminhos, valles, etc.

Em falta de um titulo que estabeleça o contrario, os fossos, os vallos e os muros são considerados como pertencentes por metade aos dois proprietarios visinhos. Quando os limites são rios e estradas publicas, cada margem do rio ou da estrada indica o contorno das propriedades visinhas.

Na ausencia de limite natural, estabelece-se a recta que une dois marcos que indicam a linha de separação de duas propriedades visinhas.

PROBLEMA

244. *Avaliar a area de um terreno polygonal qualquer ABCDEFG* (fig. 141).

Traça-se a maior diagonal *AE*, chamada *directriz*, e sobre ella baixam-se perpendiculares de todos os vertices do polygono. Decompõe-se assim o polygono em triangulos rectangulos e em trapezios rectangulos; avalia-se a area de cada uma destas figuras, e a somma das areas parciaes dará a area total do polygono.

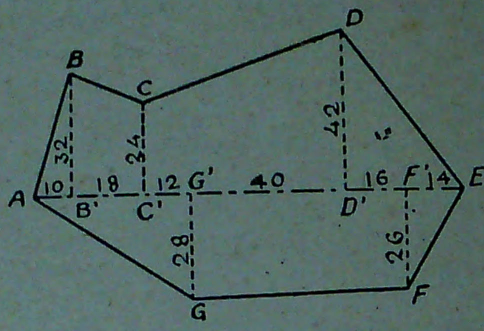

Fig. 141

Quadro dos calculos

DESIGNAÇÃO	BASES	Alturas	SOLUÇÕES	AREAS
Triangulo *ABB'*	*10*	*32*	$\frac{10\times32}{2}$	*160*$^{m^2}$
Trapezio *BB'CC'*	*32* e *24*	*18*	$\frac{32+24}{2}\times18$	*504* „
» *CC'DD'*	*24* e *42*	*52*	$\frac{24+42}{2}\times52$	*1716* „
Triangulo *DD'E*	*30*	*42*	$\frac{30\times42}{2}$	*630* „
» *AGG'*	*40*	*28*	$\frac{40\times28}{2}$	*560* „
Trapezio *GG'FF'*	*28* e *26*	*56*	$\frac{28+26}{2}\times56$	*1512* „
Triangulo *FF'E*	*14*	*26*	$\frac{14\times26}{2}$	*182* „
Area total do terreno	. . . . .	. . .	. . . .	*5264*$^{m^2}$

245. Observação. — O traçado das perpendiculares sobre a directriz faz-se recorrendo a dois bons esquadros de desenhista, e os comprimentos destas perpendiculares e dos segmentos da directriz obtêm-se por meio de uma regua graduada, fazendo-se a conversão na escala do desenho. A fig. 141 está desenhada na escala 1:2000, e medindo-se a perpendicular *DD'*, por exemplo, achamos 21 mm. que convertidos na escala correspondem ao seguinte comprimento natural $0^m,021 \times 2000 = 42$ metros.

Problema

246. *Avaliar a area de um terreno cujo perimetro apresenta uma parte curvilinea* (fig. 142).

Seja a figura *ABCDE* de um terreno que apresenta uma parte do perimetro em linha sinuosa.

Transforma-se a linha sinuosa *CD* do perimetro em uma outra rectilinea, traçando-se uma recta *FG* de *compensação*, de maneira que as porções excluidas da figura sejam compensadas pelas que são incluidas.

Avalia-se depois, pelo processo do problema precedente, a area do polygono *ABGFE*, e tem-se assim proximamente a area que se deseja.

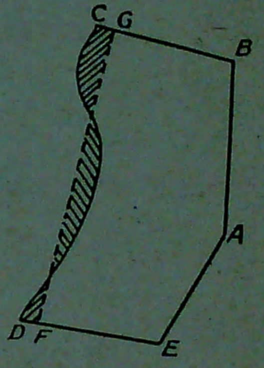

Fig. 142

Obtém-se com maior precisão o traçado da *recta de compensação*, desenhando-se a planta em papel quadriculado ou millimetrado.

Problema

247. *Avaliar a area de um terreno de perimetro curvilineo* (fig. 143).

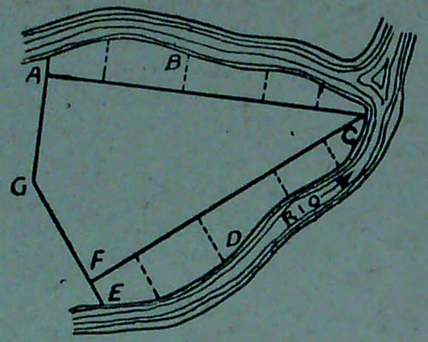

Fig. 143

Seja $ABCDE$ um terreno limitado por dois rios.

Traçam-se as directrizes AC e FC que fiquem proximas do perimetro, e dos diversos pontos do mesmo perimetro baixam-se perpendiculares ou *ordenadas* sobre as directrizes.

Obtêm-se assim figuras que se consideram como sendo trapezios e triangulos rectangulos; avaliam-se as areas destas figuras, e a somma destas mais a area do polygono $ACFG$ é a area sufficientemente approximada da figura considerada.

Resumo historico da Geometria Elementar

Não se póde determinar de maneira precisa a origem da geometria. Desde que se procurou a commodidade ou o embellezamento nas construcções, e desde que o sentimento da propriedade levou o homem á demarcação e medida das terras, a *geometria pratica* devia nascer.

A principio eram processos desconnexos, os quaes constituiam uma *arte* e não uma *sciencia;* ao genio dos gregos devemos a constituição da geometria como sciencia, pelas suas innumeras descobertas sobre as propriedades das figuras.

Mas si os antigos tiveram a gloria de constituir a sciencia geometrica num corpo de doutrina perfeitamente logico, os modernos tiveram o grande merito de realisar a união da geometria e da algebra, união essa que acarretou as mais importantes descobertas no dominio mathematico.

Hoje, a todos os ramos de applicação, tributarios da mathematica, o methodo geometrico traz o seu efficaz concurso. Quer se trate, atravéz das representações planas, de attingir os factos do espaço, que é o objecto da *perspectiva;* de reduzir a simples épuras a determinação dos elementos necessarios á realisação de objectos a tres dimensões, de que trata a *stereotomia,* ou de reduzir a simples leituras sobre quadros graphicos um calculo numerico referente a qualquer numero de dados, como nos ensina a *nomographia;* quer se procure conhecer a grandeza dos esforços aos quaes deverão resistir as peças de uma construcção, que é o objecto da *estatica graphica*, ou de obter por simples traçados lineares os valores das raizes de certas equações, como nos ensina o *calculo graphico*, o methodo geometrico está sempre ahi, offerecendo as mais variadas e as mais commodas soluções.

Egypcios e Chaldeus

GEOMETRIA PRATICA

Egypcios. — No dizer dos historiadores gregos, a geometria teve como berço o Egypto. Um dos historiadores antigos, Heródoto, que viveu no sec. V antes da éra christan, conta que o rei Sesostris fez a divisão das terras, designando a cada egypcio uma porção quadrada de terra, sob condição de pagar-lhe um tributo annual. Quando o rio Nilo inundava as porções de terras marginaes, que eram as mais ferteis, os seus possuidores iam ter com o rei, o qual encarregava então os *agrimensores* de avaliar o damno, afim de ser cobrado o tributo sómente da parte aproveitavel do terreno.

A versão de Diodoro de Sicilia (— I seculo) e de Proclo (V sec.) é um pouco differente: os agrimensores eram encarregados de *restabelecer* os limites destruidos pelas inundações do rio Nilo.

Si se interpreta a palavra *geometria* no sentido etymologico, *medição de terra*, é fóra de duvida que os egypcios foram relativamente habeis neste officio; os seus *harpedonaptas* (esticadores de corda), que eram incumbidos de proceder á orientação dos templos segundo o meridiano, empregavam certos traçados praticos que são hoje ignorados.

Entre os documentos que permittem avaliar o grau de cultura geometrica dos egypcios, cita-se o celebre *papyro* de Rhind, composto cerca de 2000 annos antes da nossa éra, e que contém a resolução de problemas praticos sobre as areas de figuras planas e de alguns corpos simples. Assignalaremos ainda, além das figuras geometricas que se encontram nos monumentos, o conhecimento que possuiam do processo chamado das quadriculas (n.º **113**), para ampliar ou reduzir uma figura.

CHALDEUS. — Os Chaldeus foram, como os Egypcios, habeis architectos e agrimensores; os seus planos de edificios e de terrenos, não deixam duvida sobre isso.

Possuiam um systema de pesos e medidas repousando, como o systema metrico decimal, sobre bases scientificas, e tinham a noção de semelhança das figuras. A divisão sexagesimal da circumferencia (n.º **57**) é attribuida aos chaldeus.

Os gregos

ESCOLAS JONICA E PYTHAGORICA.— O primeiro geometra grego conhecido foi Thales de Mileto (— VI sec.), que se apresentou como um pesquizador de problemas praticos. Em viagem pelo Egypto, causou admiração ao rei Amasis quando mediu a altura de uma pyramide, sem o emprego de instrumento algum.

De volta do Egypto fundou em Mileto a *Escola Jonica*, onde se iniciaram os primeiros progressos da geometria. A Thales são devidas as seguintes proposições:

1.º Os angulos oppostos pelo vertice são eguaes (n.º **21**);

2.º Os angulos na base de um triangulo isosceles são eguaes (n.º **66**);

3.º O diametro divide o circulo em duas partes eguaes;

4.º O angulo inscripto numa semi-circumferencia é recto (n.º **58**, *in fine*).

Um dos seus continuadores foi o seu discipulo Anaxágoras, que foi o primeiro a se occupar da quadratura do circulo. Segue-se Enópidas, que resolveu as duas questões seguintes: Baixar uma perpendicular sobre uma recta de um ponto tomado fóra da recta (n.º **32**), e construir um angulo egual a outro (n.º **42**).

E', porém, á *Escola Pythagorica*, que se devem as descobertas das proposições fundamentaes da geometria. Pythagoras descobriu o famoso theorema do quadrado da hypotenusa (n.º **156**), e, segundo Proclo, demonstrou que a somma dos tres angulos de um triangulo vale dois angulos rectos (n.º **64**), theorema este conhecido pelo nome de relação angular de Thales.

O problema da média e extrema razão (chamado naquelle tempo da *secção de ouro*) tambem se deve á escola de Pythagoras.

Nessa mesma ordem de idéas, Proclo diz-nos que os cinco polyedros regulares (n.º **198**) pertencem ao mesmo geometra; entre os pythagoricos o tetraedro representava o fogo; o cubo, a terra; o octaedro, o vento; o icosaedro, a agua; e o dodecaedro, o involucro do mundo.

No tempo de um dos mais illustres geometras antigos, Hippocrates de Chios, foram propostos tres famosos problemas, cujo estudo foi extremamente fecundo para a sciencia: *a quadratura do circulo, a duplicação do cubo e a trisecção do angulo.* Hippocrates occupou-se das figuras semelhantes, e descobriu as seguintes propriedades relativas ao circulo:

1.º Todos os angulos inscriptos num mesmo segmento são eguaes;

2.º Um angulo inscripto é recto, agudo ou obtuso, conforme o arco é egual, menor ou maior do que uma semi-circumferencia (n.º **58**, *in fine)*;

3.º Dois circulos estão entre si como os quadrados dos raios (n.º **155**).

A ACADEMIA.— A Academia, fundada por Platão, representa o periodo mais brilhante da philosophia grega. Ao fundador da Academia, em cujo frontespicio estava gravada a legenda «Que não entre aqui quem não é geometra», são attribuidas as importantes theorias sobre as curvas chamadas *secções conicas*, sendo a ellipse (n.º **54**) uma dessas curvas, sobre os *logares geometricos* (n.º **31**) e sobre a *analyse*. Estas descobertas fizeram da geometria uma sciencia nova, de uma ordem mais elevada do que a que era cultivada até então, e foi designada *geometria transcendente* pelos discipulos de Platão.

ESCOLA DE ALEXANDRIA. — Fundada no anno 331 antes da éra christan pelo grande conquistador de que ella tomou o nome, Alexandria tornou-se rapidamente, sob a protecção esclarecida dos Ptolomeos, o centro intellectual do mundo antigo.

E' a idade de ouro da geometria grega, sendo Euclides, Archimedes e Apollonio os seus mais brilhantes representantes.

Euclides, que estabeleceu o élo entre a Academia e a nascente escola, é principalmente celebre por ter composto os *Elementos*, onde no dizer de Proclo «elle poz em ordem os trabalhos dos seus predecessores, e deu demonstrações irrefutaveis ás questões que ainda não tinham sido sufficientemente provadas».

Os Elementos de Euclides comprehendem 13 livros, dos quaes apenas os seis primeiros, o 11.º e o 12.º se tornaram materia do ensino. O seu rigor scientifico fez com que, durante vinte seculos, constituissem a obra classica por excellencia para o ensino da geometria.

Archimedes (— III seculo) é considerado o maior geometra da antiguidade; a elle se deve o primeiro exemplo da quadratura rigorosa da extensão comprehendida entre uma curva e a corda. Archimedes estabeleceu que a razão entre a circumferencia e o diametro está comprehendida entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$, sendo este ultimo valor $\frac{22}{7}$ ordinariamente adoptado (n.º **131**); demonstrou ainda que a area da esphera é egual ao quadruplo da area de um circulo maximo (n.º **219**).

Com Archimedes, a *geometria elementar*, tal como é considerada hoje, constituiu-se definitivamente.

Emfim Apollonio, ao qual os gregos deram o nome de *geometra por excellencia*, viveu em Alexandria no fim do III seculo e no começo do II antes da éra christan. A sua obra capital foi um grande tratado sobre as *Conicas*, onde elle reuniu os trabalhos dos seus predecessores num todo homogeneo, e depois expoz as suas proprias pesquizas com uma profundeza de vistas que excitou a admiração dos geometras da Renascença.

Em seguida a esta phase tão brilhante da geometria grega, os sabios volveram suas vistas para as mathematicas applicadas, principalmente a astronomia. Entre outros, citaremos Herão, que se notabilisou no dominio da geometria pratica; compoz uma obra intitulada *Metricas*, que comprehende tres livros, sendo o

1.º consagrado á medida das superficies planas e curvas, o 2.º á medida dos volumes e o 3.º a problemas sobre divisão de superficies e de volumes.

Os arabes

TRANSMISSÃO DAS OBRAS GREGAS

Os arabes nada accresceram de essencial ás descobertas dos geometras gregos; cultivaram de preferencia outros ramos da sciencia mathematica, fazendo porém uso de considerações geometricas. Foi a cidade de *Bagdad* o centro scientifico mais importante, sob a dynastia dos Abassidas.

Mohammed ben Musa publicou no anno 820 a primeira obra conhecida sobre a algebra, a qual contém um capitulo referente á geometria da medida.

Aboul Wafa (sec. X), é autor de um trabalho sobre construcções geometricas. Outro geometra arabe, desse seculo, foi Mahomet de Bagdad, que compoz um tratado sobre a divisão de superficies. A bem dizer, os arabes não produziram trabalhos originaes em geometria; limitaram-se propriamente a traduzir e a commentar as obras gregas.

A partir do seculo XIII, as mathematicas, e particularmente a geometria, cairam em decadencia no Oriente.

Os modernos

UNIÃO DA GEOMETRIA E DA ALGEBRA, E MUDANÇA DA GEOMETRIA GREGA

Após a tomada de Constantinopla pelos turcos, os bysantinos foram refugiar-se no Occidente, transportando comsigo os trabalhos dos geometras gregos, principalmente de Archimedes e de Apollonio. Os estudos mathematicos tomaram assim um grande impulso pelo seculo XV, em seguida ao longo periodo de estagnação em que se mantiveram durante a idade média. Ao geometra italiano Commandino é que, mais de qualquer outro, a Europa deve as preciosas traducções das obras gregas, acompanhadas de notaveis commentarios.

A verdadeira caracteristica deste periodo reside, porém, na *união entre a algebra e a geometria*, surgindo dahi a geometria analytica e o calculo infinitesimal, que elevaram a sciencia ao mais alto grau de perfeição.

Ao grande algebrista francez Francisco Vieta (fim do sec. XVI), é devida a creação da algebra literal, que permittiu realisar a união completa da geometria e da algebra.

Durante a Renascença os mathematicos italianos occuparam-se mais de construcções geometricas approximadas, e publicaram muitos trabalhos de geometria pratica, entre os quaes convém assignalar os que são devidos ao genial artista Leonardo da Vinci.

No seculo XVII operou-se uma *mudança de fórma na geometria antiga*. Descartes lança as bases da geometria analytica; Newton e Leibniz inventam o calculo superior, inaugurando dest'arte uma nova éra na historia das mathematicas, fecunda nas mais importantes descobertas.

O calculo superior supplanta os estudos de geometria pura; todavia, alguns sabios como Pascal, Desargues, Huyghens e Lahire, com os seus trabalhos mathematicos, prepararam o grande surto do seculo passado, com o apparecimento da *geometria superior*, na qual muito se illustraram Monge, Carnot, Poncelet e Chasles.

Desde então, já não se trata, como na geometria dos gregos, de considerar as verdades isoladamente; a construcção e a *generalisação* das quantidades, tanto numericas como geometricas, tornam-se o fim superior dos geometras da éra brilhante que data do seculo XVII e se extende até aos nossos dias.

PRINCIPAES FORMULAS

DE

GEOMETRIA

DESIGNAÇÕES	Paginas	FORMULAS
Somma dos angulos do triangulo	36	$A+B+C=2$ *rectos* ou 180°
Somma dos angulo de um polygono	42	$S=180^\circ\times(n-2)$
Angulo de um polygono regular	43	$A=\frac{S}{n}$
Somma dos angulos exteriores do polygono . .	43	$S'=4$ *rectos* ou 360°
Perpendicular sobre a hypotenusa	52	$\overline{AD}^2=BD\times DC$
Lados do triangulo rectangulo.	52	$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$
Lado e apothema do quadrado	61	$l_4=r\sqrt{2}$; $a_4=\frac{r\sqrt{2}}{2}$
Lado e apothema do hexagono.	62	$l_6=r$; $a_6=\frac{r\sqrt{3}}{2}$
Lado e apothema do triangulo.	62	$l_3=r\sqrt{3}$; $a_3=\frac{r}{2}$
Lado do decagono reg.ar .	63	$l_{10}=\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$
Medida da circumferencia	67	$C=2\pi r$

DESIGNAÇÕES	Paginas	FORMULAS
Comprim.to de um arco. .	68	$l = \frac{\pi r n}{180}$
Area de um rectangulo. .	73	$R = b \times a$
» » » quadrado . .	73	$Q = l^2$
» » » parallelog.mo	74	$P = b \times a$
» » » triangulo. . .	74	$T = \frac{b \times a}{2}$
» » » triang.o equilatero	74	$T = \frac{l^2}{4} \times \sqrt{3}$
Area do triangulo (dados os lados)	75	$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Area de um trapezio . . .	75	$T_r = \frac{b + b'}{2} \times a$
» » » polyg.o reg.ar	76	$P_r = p \times a$
» do circulo	77	$C = \pi r^2$
» » sector circular . .	77	$S = \frac{\pi r^2 \times n}{360}$
» da corôa circular . .	78	$C_r = \pi \left(r^2 - r'^2\right)$
Razão das areas de fig. semelhantes	81	$\frac{S}{S'} = \frac{l^2}{l'^2}$
Diagonal do parallelepip.o	97	$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
» » cubo.	97	$d = a\sqrt{3}$
Area lateral do prisma . .	98	$Al = P \times a$
» total do prisma . . .	98	$At = Al + 2b$

DESIGNAÇÕES	Paginas	FORMULAS
Volume do parallelepipedo	99	$V = a \times b \times c$
» » cubo	100	$V = a^3$
Volume do prisma	100	$V = b \times a$
Area lateral da pyramide.	103	$Al = p \times a$
» total da pyramide. .	103	$At = Al + b$
» lateral do tronco pyramide.	104	$Al = (p + p') \times a$
Area total do tronco pyramide.	104	$At = Al + b + b'$
Volume da pyramide. . .	105	$V = \frac{b \times a}{3}$
» do tronco de pyramide.	105	$V = \frac{a}{3}\left(b + b' + \sqrt{b \times b'}\right)$
Area lateral do cylindro .	109	$Al = 2\pi r \times a$
» » tronco cylind.	109	$Al = 2\pi r \times e$
» total do cylindro . .	109	$At = 2\pi r\,(a + r)$
Volume do cylindro. . . .	110	$V = \pi r^2 \times a$
Area lateral do cone . . .	112	$Al = \pi r g$
» total do cone	112	$At = \pi r\,(g + r)$
» lateral do tronco de cone.	113	$Al = \pi\,(r + r')\,g$
Area tot. do tronco de cone	113	$At = \pi\left[(r + r')\,g + r^2 + r'^2\right]$
Volume do cone.	114	$V = \frac{\pi r^2 \times a}{3}$
» » tronc. de cone	114	$V = \frac{\pi a}{3}\,(r^2 + r'^2 + rr')$

DESIGNAÇÕES	Paginas	FORMULAS
Distancia polar do circulo maximo	118	$d = r\sqrt{2}$
Area de uma zona	118	$Z = 2\pi r \times a$
» da esphera	119	$E = 4\pi r^2$
» de um fuso	119	$F = \frac{\pi r^2 \times n}{90}$
Volume da esphera	120	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
» » cunha espherica	120	$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{n}{360}$
Volume de um tóro de madeira	123	$V = \left(\frac{2\pi r}{2}\right)^2 \times \frac{l}{\pi}$
Volume de um tonel (em litros)	124	$V = d^3 \times 0{,}625$
Volume de um tonel (em Hl)	125	$V = (d + d')^2 \times 2a$
Peso especifico	126	$p = \frac{P}{V}$
Peso de um corpo	126	$P = p \times V$

INDICE

CAPITULO IV

Polygonos inscriptos e circumferencia

CAPITULO V

Areas

Segunda parte

Geometria no espaço

CAPITULO I

CAPITULO II

Corpos terminados por planos

CAPITULO III

Corpos redondos

CAPITULO IV

Corpos redondos (cont.)

CAPITULO V

APPENDICE

Breves noções de agrimensura
