Devemos ter: $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$

3.º) Quando duas frações têm *numeradores* e *denominadores diferentes*, a comparação é feita *reduzindo-as ao mesmo denominador* (ou ao mesmo numerador). Exemplo:

$$\frac{4}{5} \text{ e } \frac{2}{3}$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador:

m.m.c. (5, 3) = 15 $\quad \frac{12}{15}, \ \frac{10}{15}$

onde $\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$ ou seja $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$.

Reduzindo-as ao mesmo numerador:

m.m.c. (4, 2) = 4 $\quad \frac{4}{5}, \ \frac{4}{6}$

onde $\frac{4}{5} > \frac{4}{6}$ ou seja $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$.

APLICAÇÕES:

1.ª) Dispor em ordem de valor decrescente as frações:

$$\frac{7}{12}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2}$$

Esta disposição significa que em primeiro lugar deve vir a maior fração, em seguida a que lhe é logo menor e assim sucessivamente.

Reduzindo-se as frações ao mesmo denominador:

$$\frac{7}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{6}{12}$$

Em ordem decrescente será:

$$\frac{9}{12} > \frac{7}{12} > \frac{6}{12} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4} > \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$$

2.ª) Transformar a fração $\frac{15}{20}$ em uma outra equivalente tendo por denominador 28.

Reduz-se, primeiramente, a fração $\frac{15}{20}$ à forma mais simples:

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Tôdas as frações equivalentes a $\frac{3}{4}$ devem ser obtidas a partir desta multiplicando os dois têrmos por um mesmo número e portanto devem ter o denominador múltiplo de 4. Como 28 é múltiplo de 4, *existe* a fração equivalente a $\frac{3}{4}$ e que tem para denominador 28. Essa fração será:

$$28 \ \underline{|\ 4\ } \qquad \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$$
$$0 \quad 7$$

EXERCÍCIOS SÔBRE FRAÇÕES

1. Nas frações que se seguem, dizer quais são as próprias, as impróprias, as aparentes e as decimais:

$$\frac{4}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{7}{10}, \ \frac{14}{2}, \ \frac{95}{94}, \ \frac{100}{9}, \ \frac{6}{6}, \ \frac{9}{100}, \ \frac{8}{20}, \ \frac{36}{12}$$

2. Escrever sob forma de frações aparentes os números: 3, 5, 12 e 18.
3. Que fração do ano (12 meses) representam 7 meses?
4. Que fração do mês (30 dias) representam 3 dias?
5. Um pacote de balas foi dividido para 3 meninos cabendo ao primeiro 5 balas, ao segundo 7 e ao terceiro 4 balas. Que fração do pacote de balas recebeu cada menino?
6. Extrair os inteiros das frações:

1.º) $\frac{18}{7}$, 2.º) $\frac{12}{4}$, 3.º) $\frac{8}{5}$, 4.º) $\frac{179}{21}$,

5.º) $\frac{4\,315}{2\,716}$, 6.º) $\frac{10\,039}{8}$, 7.º) $\frac{381}{3}$.

7. Transformar em frações impróprias os números mistos:

1.º) $4\frac{1}{3}$; 2.º) $21\frac{2}{3}$; 3.º) $7\frac{1}{2}$; 4.º) $8\frac{4}{5}$;

5.º) $43\frac{11}{13}$; 6.º) $83\frac{1}{9}$; 7.º) $4\,315\frac{2\,012}{2\,115}$.

8. O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu numerador por 3? E quando se divide o numerador por 2?

9. O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o seu denominador por 5? E quando se divide o denominador por 3?

10. O que acontece com o valor de uma fração quando se multiplica o numerador por 2 e se divide o denominador por 3?

11. Qual é a alteração que sofre uma fração quando se multiplicam ambos os têrmos por 3? E quando se dividem ambos por 2?

12. Simplificar as seguintes frações, reduzindo-as às suas formas mais simples:

1.º) $\frac{18}{24}$; 2.º) $\frac{80}{104}$; 3.º) $\frac{180}{243}$; 4.º) $\frac{150}{100}$; 5.º) $\frac{81}{729}$; 6.º) $\frac{1\,512}{1\,620}$; 7.º) $\frac{504}{672}$;

8.º) $\frac{1\,200}{1\,680}$; 9.º) $\frac{105}{147}$; 10.º) $\frac{3\,456}{5\,400}$; 11.º) $\frac{11\,760}{20\,160}$; 12.º) $\frac{192\,843}{835\,653}$.

13. Reduzir ao mesmo denominador as frações:

1.º) $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 2.º) $\frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}$ 3.º) $\frac{1}{9}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}$ 4.º) $\frac{11}{24}, \frac{3}{11}, 2$

14. Reduzir ao mínimo denominador comum as frações:

1.º) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ 5.º) $\frac{1}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}$

2.º) $\frac{16}{48}, \frac{30}{15}, \frac{1}{30}, \frac{7}{96}$ 6.º) $\frac{16}{25}, \frac{1}{7}, \frac{4}{14}, \frac{3}{5}, 4$

3.º) $\frac{1}{6}, \frac{7}{3}, \frac{2}{9}$ 7.º) $\frac{28}{18}, \frac{4}{15}, \frac{36}{225}$

4.º) $\frac{2}{13}, \frac{1}{39}, 4$ 8.º) $\frac{1}{12\,315}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$

15. Qual a maior das duas frações:

1.º) $\frac{3}{5}$ ou $\frac{4}{5}$ 4.º) $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$

2.º) $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{7}$ 5.º) $\frac{12}{17}$ ou $\frac{5}{8}$

3.º) $\frac{12}{6}$ ou $\frac{12}{3}$ 6.º) $\frac{1\,234}{4\,567}$ ou $\frac{3\,456}{6\,789}$

16. Dispor em ordem de valor decrescente as frações:

1.º) $\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$ 2.º) $\frac{4}{7}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}$

3.º) $\frac{4}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \frac{3}{4}$ 5.º) $\frac{12}{14}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{13}{28}$

4.º) $\frac{5}{2}, \frac{14}{5}, \frac{7}{4}, \frac{11}{3}$ 6.º) $3, \frac{15}{3}, \frac{7}{2}$

17. Dispor em ordem de valor crescente as frações:

1.º) $\frac{4}{9}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}$ 2.º) $\frac{132}{144}, \frac{34}{72}, \frac{12}{36}, \frac{1}{3}$

18. Transformar as seguintes frações:

1.º) $\frac{5}{6}$ numa equivalente de denominador 12;

2.º) $\frac{30}{40}$ numa equivalente de denominador 24;

3.º) $3\frac{4}{5}$ numa equivalente de denominador 15.

19. Considerando o número inteiro como fração de denominador 1, transformar:

1.º) 7 em fração equivalente de denominador 15;
2.º) 4 em fração equivalente de denominador 9;
3.º) 11 em fração equivalente de denominador 12.

20. Colocar no lugar da letra x um número de modo que resulte duas frações equivalentes:

1.º) $\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$ 3.º) $\frac{108}{144} = \frac{6}{x}$

2.º) $\frac{x}{3} = \frac{9}{27}$ 4.º) $\frac{4}{x} = \frac{76}{95}$

RESPOSTAS:

1. Impróprias: $\frac{4}{3}, \frac{95}{94}, \frac{100}{9}$; Próprias: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{8}{20}, \frac{109}{100}$;

Decimais: $\frac{7}{10}, \frac{9}{100}$ Aparentes: $\frac{14}{2}, \frac{6}{6}, \frac{36}{12}$

2. $3 = \frac{12}{4}$; $5 = \frac{10}{2}$; $12 = \frac{24}{2}$; $18 = \frac{54}{3}$ (uma das maneiras de se escrever).

3. $\frac{7}{12}$

4. $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

5. 1.º) $\frac{5}{15}$; 2.º) $\frac{7}{16}$; 3.º) $\frac{4}{16}$

6. 1.º) $2\frac{4}{7}$; 2.º) 3; 3.º) $1\frac{3}{5}$; 4.º) $8\frac{11}{21}$; 5.º) $1\frac{1\,599}{2\,716}$; 6.º) $1\,254\frac{7}{8}$; 7.º) 127.

7. 1.º) $\frac{13}{3}$; 2.º) $\frac{65}{3}$; 3.º) $\frac{15}{2}$; 4.º) $\frac{44}{5}$; 5.º) $\frac{570}{13}$; 6.º) $\frac{748}{9}$; 7.º) $\frac{9\,128\,237}{2\,115}$.

8. O valor da fração fica multiplicado por 3. O seu valor fica dividido por 2.

9. O valor da fração fica dividido por 5. O seu valor fica multiplicado por 3.

10. O valor da fração fica multiplicado por 6 (primeiro por 2 e depois por 3).

11. O valor da fração não se altera em nenhum dos casos.

12. 1.º) $\frac{3}{4}$; 2.º) $\frac{10}{13}$; 3.º) $\frac{7}{9}$; 4.º) $\frac{3}{2}$; 5.º) $\frac{1}{9}$; 6.º) $\frac{14}{15}$; 7.º) $\frac{3}{4}$; 8.º) $\frac{5}{7}$;

9.º) $\frac{5}{7}$; 10.º) $\frac{16}{25}$; 11.º) $\frac{7}{12}$; 12.º) $\frac{3}{13}$;

13. 1.º) $\frac{16}{40}, \frac{30}{40}, \frac{20}{40}$; 3.º) $\frac{90}{810}, \frac{486}{810}, \frac{540}{810}, \frac{540}{810}$;

2.º) $\frac{120}{210}, \frac{175}{210}, \frac{84}{210}$; 4.º) $\frac{121}{264}, \frac{72}{264}, \frac{528}{264}$

14. 1.º) $\frac{9}{12}, \frac{10}{12}$; 5.º) $\frac{1}{36}, \frac{4}{36}, \frac{12}{36}, \frac{2}{36}$;

2.º) $\frac{160}{480}, \frac{960}{480}, \frac{16}{480}, \frac{35}{480}$ 6.º) $\frac{224}{350}, \frac{50}{350}, \frac{100}{350}, \frac{210}{350}, \frac{1\,400}{350}$

3.º) $\frac{3}{18}, \frac{42}{18}, \frac{4}{18}$; 7.º) $\frac{700}{450}, \frac{120}{450}, \frac{72}{450}$

4.º) $\frac{6}{39}, \frac{1}{39}, \frac{156}{39}$; 8.º) $\frac{1}{12\,315}, \frac{2\,463}{12\,315}, \frac{4\,105}{12\,315}$

15. 1.º) $\frac{4}{5}$; 2.º) $\frac{1}{5}$; 3.º) $\frac{12}{3}$; 4.º) $\frac{4}{5}$; 5.º) $\frac{12}{17}$; 6.º) $\frac{3\,456}{6\,789}$

16. 1.º) $\frac{8}{5} > \frac{4}{5} > \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$; 2.º) $\frac{4}{2} > \frac{4}{3} > \frac{4}{7} > \frac{4}{9}$; 3.º) $\frac{4}{5} > \frac{2}{4} > \frac{5}{11} > \frac{3}{8}$;

4.º) $\frac{11}{3} > \frac{14}{5} > \frac{5}{2} > \frac{7}{4}$; 5.º) $\frac{12}{14} > \frac{1}{2} > \frac{13}{28} > \frac{3}{7}$; 6.º) $\frac{15}{3} > \frac{7}{2} > 3$

17. 1.º) $\frac{1}{10} < \frac{2}{5} < \frac{4}{9} < \frac{3}{4}$; 2.º) $\frac{1}{3} = \frac{12}{36} < \frac{34}{72} < \frac{132}{144}$

18. 1.º) $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$; 2.º) $\frac{30}{40} = \frac{18}{24}$; 3.º) $3\frac{4}{5} = \frac{57}{15}$

19. 1.º) $7 = \frac{105}{15}$; 2.º) $4 = \frac{36}{9}$; 3.º) $11 = \frac{132}{12}$

20. 1.º) $x = 6$; 2.º) $x = 1$; 3.º) $x = 8$; 4.º) $x = 5$

§ 2. Operações fundamentais com as frações.

São possíveis com as frações as mesmas operações estudadas com os números inteiros. Valem, também, as respectivas propriedades.

1. Adição. Temos os seguintes casos:

1.º) ***As frações têm o mesmo denominador.***

Regra: *Somam-se os numeradores e conserva-se o denominador comum.* Exemplo:

Efetuar: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{3}{9}$.

Temos: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4+1+3}{9} = \frac{8}{9}$

2.º) ***As frações têm denominadores diferentes.***

Regra: *Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra do primeiro caso.* Exemplo:

Efetuar: $\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$,

reduzindo ao mesmo denominador, m.m.c. (5,3,6) = 30

$$\frac{24}{30} + \frac{20}{30} + \frac{5}{30} = \frac{24+20+5}{30} = \frac{49}{30} = 1\frac{19}{30}$$

No caso da adição envolver números mistos ou números inteiros, a operação pode ser feita transformando-se os números mistos em frações impróprias e os números inteiros em frações aparentes de denominador 1. Exemplo:

Efetuar: $\frac{3}{4} + 2\frac{1}{5} + 6.$

$$\text{Temos: } \frac{3}{4} + \frac{11}{5} + \frac{6}{1} = \frac{15 + 44 + 120}{20} = \frac{179}{20} = 8\,\frac{19}{20}$$

Ou também, pode-se reduzir as frações ao mesmo denominador sem transformar os números mistos em frações impróprias. Assim:

$$\frac{3}{4} + 2\,\frac{1}{5} + 6 = \frac{15}{20} + 2\,\frac{4}{20} + 6 = 8\,\frac{19}{20}$$

2. Subtração. Temos os seguintes casos:

1.º) ***As frações têm o mesmo denominador.***

REGRA: *Subtraem-se os numeradores e conserva-se o denominador comum.* Exemplo:

$$\text{Efetuar: } \frac{13}{21} - \frac{5}{21}.$$

$$\text{Temos: } \frac{13}{21} - \frac{5}{21} = \frac{8}{21}$$

2.º) ***As frações têm denominadores diferentes.***

REGRA: *Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra do primeiro caso.* Exemplo:

$$\text{Efetuar: } \frac{6}{7} - \frac{3}{4},$$

reduzindo ao mesmo denominador, m.m.c. (7, 4) = 28

$$\frac{6}{7} - \frac{3}{4} = \frac{24}{28} - \frac{21}{28} = \frac{3}{28}$$

Caso a subtração contenha números mistos ou números inteiros, valem as mesmas observações feitas para a adição. Exemplos:

1) $\text{Efetuar: } 3\,\frac{2}{5} - \frac{3}{10}.$

$$\text{Temos: } \frac{17}{5} - \frac{3}{10} = \frac{34}{10} - \frac{3}{10} = \frac{31}{10} = 3\,\frac{1}{10}$$

2) $\text{Efetuar: } 1 - \frac{3}{4}.$

$$\text{Temos: } \frac{1}{1} - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

3) $\text{Efetuar: } \frac{11}{3} - 2$

$$\text{Temos: } \frac{11}{3} - \frac{2}{1} = \frac{11}{3} - \frac{6}{3} = \frac{5}{3} = 1\,\frac{2}{3}$$

4) $\text{Efetuar: } 5\,\frac{3}{4} - 2\,\frac{1}{8}$

$$\text{Temos: } \frac{23}{4} - \frac{17}{8} = \frac{46}{8} - \frac{17}{8} = \frac{29}{8} = 3\,\frac{5}{8}$$

Da mesma forma, pode-se como na adição, efetuar também da seguinte maneira:

$$5\,\frac{3}{4} - 2\,\frac{1}{8} = 5\,\frac{6}{8} - 2\,\frac{1}{8} = 3\,\frac{5}{8}$$

OBSERVAÇÃO: Quando num conjunto de adições e subtrações figuram parênteses, deve-se efetuar primeiramente as operações indicadas entre os parênteses, a partir dos mais interno. Exemplos:

1) $\text{Efetuar: } \left(6 + \frac{2}{3}\right) - \left(3 - \frac{2}{5}\right)$

$$\text{temos: } \left(\frac{18+2}{3}\right) - \left(\frac{15-2}{5}\right) = \frac{20}{3} - \frac{13}{5} = \frac{100-39}{15} = \frac{61}{15} = 4\,\frac{1}{15}$$

2) $\text{Efetuar: } \frac{23}{5} - \left[3 - \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right)\right]$

$$\text{temos: } \frac{23}{5} - \left[3 - \left(\frac{12+14}{21}\right)\right] =$$

$$= \frac{23}{5} - \left[3 - \frac{26}{21}\right] =$$

$$= \frac{23}{5} - \left[\frac{63-26}{21}\right] = \frac{23}{5} - \frac{37}{21} = \frac{483 - 185}{105} = \frac{298}{105} = 2\,\frac{88}{105}$$

3. Multiplicação. Para a multiplicação de duas ou mais frações, temos a seguinte

REGRA: *Multiplicam-se os numeradores das frações entre si, assim como os seus denominadores.* Exemplos:

1) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

2) $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} \times 10 = \frac{120}{40} = 3$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Sempre que possível, deve-se simplificar as frações que figuram num produto, eliminando-se para isso os fatôres comuns a qualquer numerador e a qualquer denominador.

No exemplo acima temos:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{3}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{8}}} \times \overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{10}} = \boxed{3}$$

2.ª) No caso de figurarem números mistos no produto efetua-se a operação transformando-os em frações impróprias. Exemplo:

Efetuar: $4\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{4}$

$$\frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{\cancel{4}} = \frac{7 \times 1 \times 5}{3 \times 8 \times 2} = \frac{35}{48}$$

3.ª) Não se deve confundir um número misto com o produto de um número inteiro por uma fração.

Assim, não se deve confundir, por exemplo, o número misto $8\frac{3}{7}$ com o produto $8 \times \frac{3}{7}$, pois,

$$8\frac{3}{7} = \frac{59}{7} \quad \text{e} \quad 8 \times \frac{3}{7} = \frac{24}{7}$$

4.ª) Quando se multiplica uma fração por outra fração, costuma-se também usar a expressão *fração de fração.*

Assim para se obter os $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{7}$ basta efetuar o produto dessas frações, ou seja:

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$$

4. Potenciação. Temos a seguinte

REGRA: *Para se elevar uma fração a uma potência elevam-se os seus dois têrmos a essa potência.*

OBSERVAÇÃO: Se a base fôr um *número misto* reduz-se primeiramente a uma fração imprópria. Exemplos:

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

3) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

4) $\left(4\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{21}{5}\right)^3 = \frac{9\,261}{125}$

5. Divisão. Inicialmente, diz-se que uma fração é *inversa* ou *recíproca* de outra fração, quando os seus termos figuram trocados em relação aos termos dessa outra, isto é, o numerador de uma é o denominador da outra e vice-versa. Assim:

$\frac{3}{4}$ é a fração inversa de $\frac{4}{3}$

$\frac{1}{5}$ é a fração inversa de $\frac{5}{1}$ ou 5

REGRA: *Multiplica-se a primeira fração pela inversa da segunda.*

Exemplos:

1) Efetuar $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$

Temos: $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10}$

2) Efetuar $8 : \frac{3}{4}$

Temos: $8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

3) Efetuar $\frac{2}{7} : 3$

Temos: $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Caso se dividam números mistos, reduzímo-los primeiramente a frações impróprias. Exemplo:

Efetuar $3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{7}$

temos: $\frac{19}{5} : \frac{15}{7} = \frac{19}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{133}{75}$

2.ª) Pode-se também indicar o quociente de duas frações com uma nova fração a têrmos fracionários. Exemplo:

A divisão de $\frac{2}{5}$ por $\frac{4}{7}$ pode ser indicada

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}}$$

Vice versa temos: $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{14}{20}$

7. Expressões aritméticas fracionárias. O cálculo de expressões aritméticas fracionárias, que são conjuntos de frações ligadas por sinais de operações, é feito na seguinte ordem:

1.ª) as potências;

2.ª) as multiplicações e as divisões, e

3.ª) as adições e subtrações, respeitadas as ordens dos parênteses, colchetes e chaves. Exemplos:

1) *Calcular o valor da expressão:*

$$\left[\left(2 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{6} : 3\right] \times \frac{4}{5} + 2$$

Efetuando:

$2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$\frac{1}{6} : 3 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ $\qquad \left[\frac{7}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{18}\right] \times \frac{4}{5} + 2 =$

Efetuando:

$\frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ $\qquad = \left[\frac{7}{4} + \frac{1}{18}\right] \times \frac{4}{5} + 2 =$

Efetuando:

$\frac{7}{4} + \frac{1}{18} = \frac{63 + 2}{36} = \frac{65}{36}$ $\qquad = \frac{65}{36} \times \frac{4}{5} + 2 =$

Efetuando:

$\frac{\overset{13}{\cancel{65}}}{\underset{9}{\cancel{36}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{13}{9}$ $\qquad = \frac{13}{9} + 2 =$

Efetuando:

$\frac{13}{9} + 2 = \frac{13 + 18}{9} = \frac{31}{9}$ $\qquad = \frac{31}{9} = 3\frac{4}{9}$

2) *Calcular o valor da expressão:*

$$\left\{2 \times \left[\frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} : 2\right] \times \frac{40}{19}\right.$$

Efetuando:

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$

$1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ $\qquad \left\{2 \times \left[\frac{9}{4} \times \frac{1}{9} - \frac{1}{5}\right] + \frac{3}{4} : 2\right\} \times \frac{40}{19} =$

Efetuando:

$\frac{\cancel{9}}{4} \times \frac{1}{\cancel{9}} = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ $\qquad = \left\{2 \times \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right] + \frac{3}{8}\right\} \times \frac{40}{19} =$

Efetuando:

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ $\qquad = \left\{2 \times \frac{1}{20} + \frac{3}{8}\right\} \times \frac{40}{19} =$

Efetuando:

$\overset{1}{\cancel{2}} \times \frac{1}{\underset{10}{\cancel{20}}} = \frac{1}{10}$ $\qquad = \left\{\frac{1}{10} + \frac{3}{8}\right\} \times \frac{40}{19} =$

Efetuando:

$\frac{1}{10} + \frac{3}{8} = \frac{19}{40}$ $\qquad = \frac{19}{40} \times \frac{40}{19} = 1$

Efetuando:

$\frac{\overset{1}{\cancel{19}}}{\underset{1}{\cancel{40}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{40}}}{\underset{1}{\cancel{19}}} = 1$

Observação : No caso de uma fração ter os seus têrmos indicando operações, efetuam-se primeiramente as operações indicadas no numerador e as indicadas no denominador e em seguida faz-se a divisão entre as duas frações obtidas. Exemplos :

1) *Calcular o valor da expressão:*

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{4\times\frac{2}{5}}$$

Efetuando :

$$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$$

$$\frac{1-\frac{2}{3}}{4\times\frac{2}{5}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{5}}=\frac{1}{3}:\frac{8}{5}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{24}\cdot$$

2) *Calcular o valor da expressão:*

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 4+\frac{3}{4}:\frac{1}{6}}{\left(\frac{2}{3}+5\right)\times\left(4-\frac{1}{3}\right)}$$

Efetuando :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{4}:\frac{1}{6}=\frac{3}{4}\times\frac{6}{1}=\frac{9}{2}$$

temos para o numerador :

$$\frac{1}{\cancel{8}_{2}}\times\cancel{4}^{2}+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Efetuando :

$$\frac{2}{3}+5=\frac{17}{3}$$

$$4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$

temos para o denominador :

$$\frac{17}{3}\times\frac{11}{3}=\frac{187}{9}$$

e para o valor da expressão : $5:\frac{187}{9}=\frac{5}{1}\times\frac{9}{187}=\frac{45}{187}$

3) *Calcular o valor da expressão:*

$$\frac{4\times\frac{2}{3}}{1+\frac{3}{2\times\frac{1}{4}}}$$

Efetuando o numerador :

$$4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

Efetuando o denominador :

$$1+\frac{3}{\frac{1}{2}}=1+3:\frac{1}{2}=$$

$$=1+3\times\frac{2}{1}=$$

$$=1+6=$$

$$=7.$$

e para o valor da expressão :

$$\frac{\frac{8}{3}}{7}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{8}{21}$$

4) *Calcular o valor da expressão:*

$$\frac{\dfrac{5-\frac{2}{3}:\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}+\frac{7}{10}}}{2-\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{3}+1\right)}$$

Efetuando o numerador :

$$\frac{5-\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}}{\frac{10}{10}}=\frac{5-\frac{4}{3}}{1}=\frac{\frac{11}{3}}{1}=\frac{11}{3}$$

Efetuando o denominador :

$$2-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{4}_{2}}\times\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{3}}=2-1=1$$

e o valor da expressão :

$$\frac{\frac{11}{3}}{1}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$$

EXERCÍCIOS SÔBRE OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

1. Efetuar as seguintes *adições*:

1.º) $\frac{5}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12}$ 4.º) $\frac{19}{24} + \frac{11}{15} + \frac{13}{18} + \frac{7}{12}$

2.º) $2\frac{1}{3} + \frac{4}{6} + 5$ 5.º) $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{1}{3}$

3.º) $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{9}{8} + \frac{3}{8}$ 6.º) $8 + 7\frac{12}{13} + 9\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}$

2. Efetuar as seguintes *subtrações*:

1.º) $\frac{8}{11} - \frac{3}{11}$ 3.º) $\frac{1}{12} - \frac{1}{13}$ 5.º) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

2.º) $3\frac{4}{5} - \frac{1}{8}$ 4.º) $8 - \frac{4}{7}$ 6.º) $\frac{114}{216} - \frac{11}{264}$

3. Efetuar as seguintes *somas* e *subtrações*:

1.º) $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12}$ 2.º) $12 - \frac{8}{5} + 3\frac{1}{4}$

4. Calcular o valor das expressões aritméticas:

1.º) $\left(4 + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}\right)$ 3.º) $\left(3\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{5} + 1\frac{1}{3}\right)$

2.º) $4 - \left[\left(\frac{21}{10} + \frac{7}{12}\right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{8}{12}\right)\right]$ 4.º) $\frac{12}{5} - \left(\frac{61}{40} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right)$

5. Efetuar os produtos:

1.º) $3 \times \frac{4}{5}$ 3.º) $\frac{1}{8} \times 8$ 5.º) $\frac{21}{12} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{6}$

2.º) $\frac{3}{8} \times 16 \times \frac{2}{2}$ 4.º) $2\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ 6.º) $\frac{126}{324} \times 243 \times \frac{17}{21}$

6. Calcular:

1.º) Os $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ 4.º) O $\frac{1}{3}$ dos $\frac{4}{5}$ de $3\frac{1}{4}$

2.º) Os $\frac{3}{4}$ dos $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ 5.º) O $\frac{1}{5}$ de 10

3.º) Os $\frac{3}{4}$ de $1\frac{3}{5}$ 6.º) Os $\frac{3}{5}$ dos $\frac{2}{3}$ de 5

7. Calcular o valor de:

1.º) $\left(5 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{17}$ 3.º) $\left(4 - \frac{5}{8}\right) \times \frac{2}{9}$

2.º) $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)$ 4.º) $\left(3\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{7}\right)$

8. Calcular o valor de:

1.º) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 2.º) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ 3.º) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$ 4.º) $\left(\frac{11}{12}\right)^2$

5.º) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \times \frac{11}{16}$

6.º) $\left[4 + \left(2\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{25}{121}\right] + \left[1^5 - \left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$

9. Quais são as frações inversas das frações:

1.º) $\frac{4}{5}$ 2.º) $3\frac{1}{4}$ 3.º) $\frac{1}{8}$ 4.º) 3

10. Efetuar as divisões:

1.º) $\frac{4}{7} : \frac{2}{3}$ 3.º) $\frac{3}{5} : 4$ 5.º) $8 : \frac{1}{2}$

2.º) $3\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$ 4.º) $2\frac{1}{7} : 4\frac{2}{5}$ 6.º) $316 : 1\frac{1}{3}$

11. Calcular o valor de:

1.º) $\left(3 + \frac{4}{5}\right) : \frac{2}{3}$ 3.º) $\left(\frac{14}{30} - \frac{3}{10}\right) : \frac{10}{24}$

2.º) $\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{5} - \frac{1}{12}\right) : \left(2 + \frac{1}{3}\right)$ 4.º) $\left(3 - \frac{12}{10}\right) : \left(\frac{3}{5}\right)^2$

12. Calcular o valor das expressões:

1.º) $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{8}\right) \times \left(1 - \frac{1}{79}\right)$

2.º) $\left[\left(3 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{4}{11} + 3 : \frac{1}{2}\right] \times \frac{3}{22} + 5$

3.º) $\left\{3\frac{74}{120} - \left[\left(4 - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] + \frac{3}{8} : \frac{1}{16}\right\} : 6\frac{2}{120}$

4.º) $\dfrac{3 \times \frac{2}{5} + 1}{2 - \frac{3}{4} : 2}$

5.º) $$\frac{\left(7+\frac{1}{2}\right) : \left(2-\frac{27}{81}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}\times\left(5-\frac{35}{10}\right)+\frac{15}{7}} : \left(\frac{111}{23}-4\right)$$

6.º) $$\frac{\left(2-\frac{1}{3}\right)^2+1\frac{1}{8} : \left(\frac{1}{2}\right)^3}{3-\frac{1}{\frac{4}{7}+\frac{1}{5}}} : \frac{\frac{228}{23}-3}{\frac{1}{2}}$$

7.º) $$5\times\left[\frac{\left(4-\frac{1}{3}\right)^2\times 1\frac{1}{11}+\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \frac{1}{25}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3} : 9\right)\times 1\frac{25}{29}}\right] : \frac{71}{3}$$

8.º) $$\left(1-\frac{\frac{1}{3} : 4}{1+\frac{1}{6}}\right)^2\times\frac{2\times\left(\frac{1}{5}\right)^3}{\frac{66}{125}-\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}$$

9.º) $$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{8} : 2}{1+\frac{1}{2-\frac{1}{3}}}-\left(\frac{611}{192}-3\right)$$

10.º) $$\frac{5-\left[\frac{1}{5}+\left(2\frac{1}{5}-1\right)^2\right]}{4+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 9}$$

RESPOSTAS:

1. 1.º) $\frac{5}{6}$; 2.º) 8; 3.º) $2\frac{1}{4}$; 4.º) $2\frac{299}{360}$; 5.º) $1\frac{23}{24}$; 6.º) $28\frac{131}{156}$.

2. 1.º) $\frac{5}{11}$; 2.º) $3\frac{27}{40}$; 3.º) $\frac{1}{156}$; 4.º) $7\frac{3}{7}$; 5.º) $\frac{7}{20}$; 6.º) $\frac{35}{72}$.

3. 1.º) $\frac{5}{24}$; 2.º) $\frac{13}{20}$.

4. 1.º) $3\frac{19}{24}$; 2.º) $2\frac{19}{60}$; 3.º) $\frac{19}{24}$; 4.º) 0.

5. 1.º) $\frac{12}{5}$; 2.º) 6; 3.º) 1; 4.º) $\frac{11}{10}$; 5.º) 1; 6.º) $76\frac{1}{2}$.

6. 1.º) $\frac{8}{15}$; 2.º) 6; 3.º) $\frac{6}{5}$; 4.º) $\frac{13}{15}$; 5.º) 2; 6.º) 2.

7. 1.º) 1; 2.º) $\frac{11}{15}$; 3.º) $\frac{3}{4}$; 4.º) $\frac{949}{560}$.

8. 1.º) $\frac{1}{4}$; 2.º) $\frac{8}{27}$; 3.º) $\frac{256}{81}$; 4.º) $\frac{121}{144}$; 5.º) $\frac{121}{256}$; 6.º) $\frac{161}{27}$.

9. 1.º) $\frac{5}{4}$; 2.º) $\frac{4}{13}$; 3.º) 8; 4.º) $\frac{1}{3}$.

10. 1.º) $\frac{6}{7}$; 2.º) $\frac{64}{15}$; 3.º) $\frac{3}{20}$; 4.º) $\frac{75}{154}$; 5.º) 16; 6.º) 237.

11. 1.º) $\frac{57}{10}$; 2.º) $\frac{137}{280}$; 3.º) $\frac{2}{5}$; 4.º) 5.

12. 1.º) $\frac{78}{160}$; 2.º) 6; 3.º) 1; 4.º) $\frac{88}{65}$; 5.º) $\frac{322}{141}$; 6.º) $\frac{1}{2}$; 7.º) 5;

8.º) $\frac{169}{196}$; 9.º) $\frac{35}{128}$; 10.º) $\frac{84}{125}$.

§ 3. Métodos de resolução de problemas típicos sôbre frações.

Daremos nos exemplos que se seguem, os raciocínios que devem prevalecer para a resolução de problemas que envolvam números fracionários. Devemos sempre, nos problemas, efetuar as operações com as frações entre si, assim como efetuar as operações com os seus valores correspondentes e sòmente entre êsses valores. Não podemos, por exemplo, num problema, "somar" fração (número) com dinheiro, ou "subtrair" vinho de fração (número), etc. e sim, somar *fração* com *fração*, *dinheiro* com *dinheiro*, etc., estabelecendo em seguida a equivalência entre as frações de um lado e dinheiro de outro lado, por exemplo:

1) Um objeto custa Cr$ 18,00. Quanto custa $\frac{1}{3}$ dêsse objeto?

Raciocínio: Como queremos saber o preço de $\frac{1}{3}$ do objeto, êste objeto poderá ser representado por $\frac{3}{3}$ (unidade). Logo $\frac{1}{3}$ deverá ser equivalente à têrça parte de Cr$ 18,00, isto é, Cr$ 6,00.

Representação prática:

$$\frac{3}{3} \longrightarrow 18{,}00$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{18{,}00}{3} = \text{Cr\$ } 6{,}00$$

Resposta: $\frac{1}{3}$ do objeto custa Cr$ 6,00.

Prova: Se a têrça parte de um objeto custa Cr$ 6,00, o objeto todo custará três vêzes mais, isto é,

$$3 \times 6{,}00 = 18{,}00$$

2) No problema anterior, quanto custam $\frac{2}{3}$ do objeto?

Raciocínio: Conhecido o preço de $\frac{1}{3}$, que é Cr$ 6,00 o preço de $\frac{2}{3}$ será o dôbro, isto é, Cr$ 12,00.

Representação prática:

$$\frac{3}{3} \rightarrow 18{,}00$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow \frac{18{,}00}{3} = 6{,}00$$

$$\frac{2}{3} \rightarrow 2 \times 6{,}00 = 12{,}00$$

Resposta: $\frac{2}{3}$ do objeto custa Cr$ 12,00.

3) No problema 1), quanto custam $\frac{4}{5}$ do objeto?

Raciocínio: Sendo Cr$ 18,00 o preço de todo o objeto e como queremos o valor de seus $\frac{4}{5}$, segue-se que Cr$ 18,00 representa $\frac{5}{5}$ do objeto. Determinamos primeiramente o valor de $\frac{1}{5}$ (quinta parte) e em seguida os $\frac{4}{5}$.

Representação prática:

$$\frac{5}{5} \rightarrow 18{,}00$$

$$\frac{1}{5} \rightarrow \frac{18{,}00}{5} = 3{,}60$$

$$\frac{4}{5} \rightarrow 4 \times 3{,}60 = 14{,}40$$

Resposta: $\frac{4}{5}$ do objeto custa Cr$ 14,40.

4) Se $\frac{2}{3}$ do pêso de uma pessoa é igual a 60kg quanto pesará esta pessoa?

Ora, se: $\frac{2}{3} \rightarrow 60\text{kg}$

$\frac{1}{3}$ será a metade: $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{60\text{kg}}{2} = 30\text{kg}$

e $\frac{3}{3}$ serão o triplo: $\frac{3}{3} \rightarrow 3 \times 30\text{kg} = 90\text{kg}$

Resposta: A pessoa pesa 90kg.

5) Uma fortuna de Cr$ 360 000,00 foi repartida entre dois herdeiros cabendo ao primeiro a importância equivalente a $\frac{3}{4}$ da fortuna. Quanto recebeu cada um?

Fortuna tôda: $\frac{4}{4} \rightarrow 360\,000{,}00$

Parte correspondente ao 1.º: $\frac{3}{4}$

Parte correspondente ao 2.º: $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Logo: $\frac{4}{4} \rightarrow 360\,000{,}00$

$$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{360\,000{,}00}{4} = 90\,000{,}00$$

$$\frac{3}{4} \rightarrow 3 \times 90\,000{,}00 = 270\,000{,}00$$

Resposta: O primeiro herdeiro recebeu Cr$ 270 000,00 e o segundo Cr$ 90 000,00.

6) Um barril com a capacidade de 42 litros está cheio de vinho, que deve ser repartido entre três pessoas. A primeira pessoa deve receber a fração equivalente a $\frac{2}{3}$ do vinho contido no barril, a segunda a fração equivalente a $\frac{1}{7}$ e a terceira o restante. Quanto deve receber cada pessoa?

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ} \rightarrow \frac{2}{3} \\ 2.^{\circ} \rightarrow \frac{1}{7} \end{array}\right\rangle \text{logo: } 1.^{\circ} + 2.^{\circ} \rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{7} = \frac{14+3}{21} = \frac{17}{21}$$

$$\text{vinho todo: } \rightarrow \frac{21}{21}$$

$$\text{parte do } 3.^{\circ} \rightarrow \frac{21}{21} - \frac{17}{21} = \frac{4}{21}$$

Portanto:

$$\frac{21}{21} \rightarrow 42l$$

$$\frac{1}{21} \rightarrow 2l$$

$$\frac{4}{21} \rightarrow 8l \text{ (parte que cabe à 3.ª pessoa);}$$

e,

$$\frac{3}{3} \rightarrow 42l$$

$$\frac{1}{3} \rightarrow 14l$$

$$\frac{2}{3} \rightarrow 28l \text{ (parte que cabe à 1.ª pessoa);}$$

e,

$$\frac{7}{7} \rightarrow 42l$$

$$\frac{1}{7} \rightarrow 6l \text{ (parte que cabe à 2.ª pessoa).}$$

Resposta: A primeira pessoa recebe 28 litros de vinho, a segunda 6 litros e a terceira pessoa 8 litros.

7) A diferença entre os $\frac{4}{5}$ e os $\frac{2}{3}$ do preço de um automóvel é de Cr\$ 12 000,00. Qual é o preço do automóvel?

A diferença $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$

corresponde à importância de Cr\$ 12 000,00.

Logo:

$$\frac{2}{15} \rightarrow 12\,000{,}00$$

$$\frac{1}{15} \rightarrow 6\,000{,}00$$

$$\frac{15}{15} \rightarrow 90\,000{,}00$$

Resposta: O automóvel custa Cr\$ 90 000,00.

8) Qual é o número cujos $\frac{2}{3}$ mais os $\frac{3}{4}$ dão 51.

A soma $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}$

corresponde ao valor 51.

Logo:

$$\frac{17}{12} \rightarrow 51$$

$$\frac{1}{12} \rightarrow \frac{51}{17} = 3$$

$$\frac{12}{12} \rightarrow 12 \times 3 = 36$$

Resposta: O número procurado é 36.

Prova:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} \text{ de } 36 = \frac{2}{\cancel{3}} \times \overset{12}{\cancel{36}} = 24 \\ \frac{3}{4} \text{ de } 36 = \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \overset{36}{\cancel{36}} = 27 \end{array}\right\} \textit{Soma: } 51$$

9) Duas torneiras despejam água num mesmo tanque. A primeira sòzinha o enche em $\frac{1}{5}$ de hora e a segunda sòzinha em $\frac{1}{6}$ de hora. Em quanto tempo encherão o tanque as duas torneiras juntas?

1.ª torneira

$$\begin{cases} \text{Enche o tanque em } \frac{1}{5} \text{ de hora ou } \frac{60}{5} \text{ min.} = 12 \text{ min.} \\ 12 \text{ min.} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ tanque} \\ 1 \text{ min.} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{12} \text{ do tanque} \end{cases}$$

2.ª torneira

$$\begin{cases} \text{Enche o tanque em } \frac{1}{6} \text{ de hora ou } \frac{60}{6} \text{ min.} = 10 \text{ min.} \\ 10 \text{ min.} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ tanque} \\ 1 \text{ min.} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{10} \text{ do tanque} \end{cases}$$

1.ª+2.ª

$$\begin{cases} 1 \text{ min.} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{12} + \frac{1}{10} = \frac{5+6}{60} = \frac{11}{60} \\ \text{Logo:} \\ \quad \frac{11}{60} \text{ do tanque} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ min.} \\ \quad \frac{1}{60} \text{ do tanque} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{11} \text{ do min.} \\ \quad \frac{60}{60} \text{ do tanque} \quad \rightarrow \quad \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11} \text{ min.} \end{cases}$$

Resposta: As duas torneiras enchem o tanque em $5\frac{5}{11}$ minutos.

PROBLEMAS SÔBRE FRAÇÕES

1. Quanto valem $\frac{3}{4}$ do preço de um objeto que custou Cr$ 56,00?
2. Um avião percorre 850 quilômetros em 2 horas. Quantos quilômetros percorrerá em $3\frac{1}{5}$ horas?

3. Qual o número que multiplicado por $\frac{1}{5}$ dá $7\frac{3}{4}$?
4. Um operário pode fazer num dia $\frac{3}{4}$ de um trabalho. Quanto tempo levará para fazer todo trabalho?
5. Quantas vêzes está contido exatamente $\frac{1}{4}$ em 4?
6. Quando se obtém mais: tomando os $\frac{5}{13}$ de uma coisa ou os $\frac{3}{8}$ dos $\frac{7}{12}$ da mesma?
7. A metade de um número mais os seus $\frac{2}{3}$ valem 14. Qual êsse número?
8. Uma senhora gasta Cr$ 900,00 do que possui e ainda lhe restam ¼. Quanto possuia inicialmente?
9. Um alpinista percorre 2/7 de uma montanha e em seguida mais 3/5. Quanto falta para atingir o cume?
10. Qual o número que aumenta 1/8 de seu valor quando se acrescentam 3 unidades?
11. São decorridos 4/5 do dia, que horas são?
12. Um trem percorre 1/6 do caminho entre duas cidades em 1 hora e 30 minutos. Quanto tempo leva de uma cidade a outra uma viagem de trem?
13. Lia comeu 21/42 de uma maçã e Léa comeu os 37/74 dessa mesma maçã. Qual das duas comeu mais e quanto sobrou?
14. Dividindo os 2/5 de certo número por 2/7 dá para quociente 49. Qual é êsse número?
15. A soma de dois números é 143 e o menor é 2/11 do maior. Quais são êsses números?
16. Um pacote com 27 balas é dividido igualmente entre três meninos. Quantas balas coube a cada um, se o primeiro deu 1/3 do que recebeu ao segundo e o segundo deu 1/2 do que possuia ao terceiro?
17. Uma herança de Cr$ 70 000,00 é distribuída entre três herdeiros. O primeiro recebe 1/2, o segundo 1/5 e o terceiro o restante. Qual recebeu a maior quantia?
18. Uma torneira leva 7 horas para encher um tanque. Em quanto tempo enche 3/7 dêsse tanque?
19. Os 4/7 de uma caixa de frutas é igual a 100 frutas. Quantas frutas tem a caixa tôda?
20. Quais os 1 ¼ de um número cujos 2/3 valem 168?
21. Uma criada gasta três pedaços de sapólio para lavar uma escada com 22 degraus. Com um sapólio, que parte da escada poderá lavar?
22. Cr$ 120,00 são distribuídos entre 5 pobres. O primeiro recebe ½, o segundo 1/5 do que recebeu o primeiro e os restantes recebem partes iguais. Quanto recebeu cada pobre?
23. Em um combate morrem 2/9 de um exército, em novo combate morrem mais 1/7 e restam 30 000 homens. Quantos soldados estavam lutando?
24. Um carroceiro transporta em dois dias 539 sacas de arroz de um armazém para outro. No primeiro dia transporta 2/7. Quantas sacas deve transportar no dia seguinte?
25. 2/5 dos 3/7 de um pomar são laranjeiras; 4/5 dos 3/4 dão pereiras; há ainda mais 24 árvores diversas. Quantas árvores há no pomar?

26. Determinar uma fração equivalente a 2/5, cuja soma dos têrmos seja igual a 217.
27. Determinar uma fração equivalente a 280/210, cuja diferença entre os têrmos seja igual a 5.
28. João possuía 75 laranjas. Deu a seu irmão $\frac{1}{3}$ delas, à irmã $\frac{2}{5}$ do resto e ao primo $\frac{1}{6}$ do segundo resto. Com quantas laranjas ficaram João e essas pessoas?
29. Uma bola pula cada vez que bate no chão $\frac{2}{3}$ da altura de onde caiu. Deixando-a cair da altura de 12 metros, pergunta-se: 1.º) qual será a altura do terceiro pulo?; 2.º) quanto percorreu ao bater no chão pela terceira vez?
30. Um negociante pagou $\frac{3}{5}$ de sua dívida e ainda ficou devendo Cr$ 2 400,00. Quanto devia êsse negociante?
31. Para construir os $\frac{3}{7}$ de uma estrada gastou-se Cr$ 285 300,00. Quanto custará uma estrada que é os $\frac{2}{5}$ daquela?
32. Os $\frac{3}{4}$ de um número aumentados de seus $\frac{5}{8}$ dão para resultado 121. Qual é o número?
33. Por $3\frac{2}{9}$ metros de uma peça de fazenda de 12 metros, pagou-se Cr$ 58,00. Qual é o preço da peça?
34. Um operário depois de receber o seu ordenado pagou no empório uma quantia igual a $\frac{1}{4}$ do que recebeu, no açougue uma quantia igual a $\frac{1}{9}$ do resto e ainda ficou com Cr$ 2 400,00. Qual o seu ordenado?
35. Um corredor depois de ter percorrido os $\frac{3}{7}$ de uma estrada faz mais 5 quilômetros e assim corre $\frac{2}{3}$ do percurso que deve fazer. Quanto percorreu o corredor e qual o total do percurso, em quilômetros?
36. Do vinho contido numa pipa, vendeu-se os $\frac{3}{7}$, a seguir $\frac{1}{4}$ do resto e finalmente os $\frac{2}{3}$ dos 120 litros que sobram. Quantos litros de vinho continha a pipa e quantos ficaram depois da venda?
37. Sabendo-se que de uma herança no valor de Cr$ 420 000,00, $\frac{1}{3}$ coube ao primeiro filho; $\frac{1}{4}$ ao segundo e que o resto foi distribuído a hospitais, determinar as quantias recebidas por cada filho, hospitais e a fração da herança que coube a êstes últimos.
38. Se um menino gasta por dia $\frac{2}{7}$ de um lápis, quantos dias durará meia dúzia de lápis?
39. Três rádios custaram Cr$ 37 245,00. Sabendo-se que o preço do segundo é os $\frac{2}{3}$ do primeiro e os $\frac{4}{5}$ do terceiro, qual o preço de cada um dos rádios?

40. Um fazendeiro comprou gado no valor de Cr$ 192 000,00, pagando $\frac{1}{3}$ dêles a Cr$ 1 800,00 por cabeça; $\frac{1}{4}$ a Cr$ 2 000,00 e o resto a Cr$ 1 200,00. Quantas cabeças de gado comprou o fazendeiro?

RESPOSTAS:

1. Cr$ 42,00.
2. 1 360 quilômetros.
3. $\frac{155}{4}$.
4. 1 dia e $\frac{1}{3}$ de dia.
5. 16.
6. Ao tomar $\frac{5}{13}$.
7. 12.
8. Cr$ 1 200,00.
9. 4/35.
10. 24.
11. 19h 12min.
12. 9h.
13. Cada uma comeu $\frac{1}{2}$. Não sobrou nada.
14. 35.
15. 121 e 22.
16. 6, 6 e 15.
17. O 1.º) Cr$ 35 000,00.
18. 3h.
19. 175.
20. 252.
21. 7 1/3 degraus.
22. 1.º) Cr$ 60,00.
    2.º) Cr$ 12,00.
    3.º), 4.º) e 5.º) Cr$ 16,00.
23. 45 000.
24. 385.
25. 105.
26. 62/155.
27. 20/15.
28. João ficou com 25; o irmão com 25, a irmã com 20 e o primo com 5.
29. 1.º) $3\frac{5}{9}$ metros; 2.º) $38\frac{2}{3}$ metros.
30. Cr$ 6 000,00.
31. Cr$ 266 280,00.
32. 88.
33. Cr$ 216,00.
34. Cr$ 3 600,00.
35. 14 quilômetros e 21 quilômetros.
36. 280 e 40 litros.
37. Cr$ 140 000,00 – 1.º filho; Cr$ 105 000,00 – 2.º filho; Cr$ 175 000,00 $\left(\frac{5}{12}\right)$ – Hospitais.
38. 21 dias.
39. Cr$ 14 898,00; Cr$ 9 932,00; Cr$ 12 415,00.
40. 120 cabeças.

§ 4. Frações decimais como números decimais.

NOÇÃO INTUITIVA E OPERAÇÕES

1. Noção intuitiva. Já vimos que *fração decimal é tôda fração cujo denominador é uma potência de* 10. Assim, por exemplo:

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{17}{100}, \quad \frac{3\,856}{1\,000}, \quad \ldots$$

são frações decimais.

O fato do denominador dessas frações ser uma potência de 10 (base do sistema de numeração que empregamos) facilita uma representação análoga à usada para os números inteiros.

Dêsse modo, chamando:

a fração $\frac{1}{10}$ (um décimo) de unidade decimal de 1.ª ordem;

a fração $\frac{1}{100}$ (um centésimo) de unidade decimal de 2.ª ordem;

a fração $\frac{1}{1\,000}$ (um milésimo) de unidade decimal de 3.ª ordem;

a fração $\frac{1}{10\,000}$ (um décimo milésimo) de unidade decimal de 4.ª ordem;

e assim por diante, podemos representar uma fração decimal de outra forma.

Seja, por exemplo, a fração decimal

$$\frac{3\,856}{1\,000}$$

que pode ser decomposta em:

$$\frac{3\,856}{1\,000} = \frac{3000+800+50+6}{1\,000} = \frac{3\,000}{1\,000} + \frac{800}{1\,000} + \frac{50}{1\,000} + \frac{6}{1\,000}$$

$$\frac{3\,856}{1\,000} = 3 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1\,000}$$

Fixando-se a posição que deve ocupar o algarismo que representa as unidades simples da parte inteira mediante uma *vírgula* e a seguir os décimos, centésimos e milésimos, teremos:

$$\frac{3\,856}{1\,000} = 3{,}856$$

e dizemos que a fração decimal $\frac{3\,856}{1\,000}$ está escrita sob forma de *número decimal*.

Os algarismos que vêm depois da vírgula chamam-se algarismos decimais (ou casas decimais) e o seu conjunto constitui a *parte decimal* do número decimal. Logo, temos a definição:

Número decimal é um conjunto de unidades inteiras e decimais.

2. Leitura de um número decimal. Lê-se primeiramente a parte inteira seguida do nome de *unidades* e depois a parte decimal dando-se a designação da unidade representada pelo *último algarismo da direita*. Se a parte inteira fôr nula, lê-se sòmente a parte decimal. Exemplos:

4,87 lê-se: *quatro unidades e oitenta e sete centésimos.*

unidades
décimos
centésimos

0,00312 lê-se: *trezentos e doze centésimos milésimos.*

unidades
décimos
centésimos
milésimos
décimos milésimos
centésimos milésimos

32,010939 lê-se: *trinta e duas unidades e dez mil novecentos e trinta e nove milionésimos.*

unidades
décimos
centésimos
milésimos
décimos milésimos
sécentimos milésimos
milionésimos

3. Transformação de uma fração decimal em um número decimal e vice-versa.

Primeira regra : *Uma fração decimal é igual ao número decimal que se obtém escrevendo o numerador e separando com uma vírgula* (a partir da direita), *tantas casas decimais quantos são os zeros do denominador. No caso do número de algarismos do numerador ser inferior ao número de algarismos do denominador, pode-se escrever à sua esquerda o número de zeros necessários para igualá-los.* Exemplos :

$$\frac{487}{100} = 4{,}87$$

$$\frac{32}{10000} = \frac{00032}{10000} = 0{,}0032$$

$$\frac{9}{1\,000} = \frac{0\,009}{1\,000} = 0{,}009$$

Segunda regra : *Um número decimal é igual à fração decimal que se obtém escrevendo para numerador o número sem a vírgula e dando para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais.* Exemplos :

$$0{,}0389 = \frac{389}{10000}$$

$$12{,}05 = \frac{1\,205}{100}$$

$$0{,}0001 = \frac{1}{10000}$$

4. Propriedades dos números decimais. 1.ª) Um número decimal não se altera quando se colocam ou se retiram zeros à sua direita. Exemplos :

0,3 = 0,30 (três décimos é o mesmo que trinta centésimos, pois, cada décimo vale dez centésimos).

12,02 = 12,020

2.ª) Deslocando-se a vírgula para a *direita* de um, dois, três, etc., algarismos, o número decimal fica *multiplicado* por 10, 100, 1 000, etc.. Exemplos :

0,623 × 10 = 6,23 (a mudança da vírgula para uma casa da direita fêz com que o algarismo dos décimos se transformasse no algarismo das unidades).

718,005 × 100 = 71800,5

3.ª) Deslocando-se a vírgula para a *esquerda* de um, dois, três, etc., algarismos, o número decimal fica *dividido* por 10, 100, 1 000, etc.. Exemplos :

456,38 : 10 = 45,638

0,028 : 1 000 = 0,000028

5. Operações com os números decimais.

Adição

Regra : *Escrevem-se os números decimais uns sob os outros de modo que as vírgulas se correspondam; somam-se os números como se fôssem inteiros, e, coloca-se a vírgula na soma, em correspondência com as parcelas.* Exemplos :

13,8 + 0,052 + 2,9

$$\begin{array}{r} 13{,}8 \\ +\,0{,}052 \\ +\,2{,}9 \\ \hline 16{,}752 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 13{,}800 \\ 0{,}052 \\ 2{,}900 \\ \hline 16{,}752 \end{array}$$

Subtração

Regra : *Escreve-se o subtraendo sob o minuendo de modo que as vírgulas se correspondam; subtraem-se os números como se fôssem inteiros, e, coloca-se a vírgula no resultado em correspondência com as dos têrmos.* Exemplo :

Efetuar : 5,08 − 3,4852.

$$\begin{array}{r} 5{,}08 \\ 3{,}4852 \\ \hline 1{,}5948 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 5{,}0800 \\ 3{,}4852 \\ \hline 1{,}5948 \end{array}$$

Multiplicação

Regra: *Multiplicam-se dois números decimais como se fôssem inteiros e separam-se no resultado, a partir da direita, tantas casas decimais quantos forem os algarismos decimais dos números dados.* Exemplo:

Efetuar: $5{,}32 \times 3{,}8$.

$$\begin{array}{r} 5{,}32 \\ \underline{3{,}8} \\ 4\,256 \\ \underline{1\,596} \\ 20{,}216 \end{array}$$

Observação: O cálculo da potência de um número decimal, que é um caso particular de produto, pode ser efetuado transformando-o em fração decimal. Exemplo:

$$0{,}9^3 = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1\,000} = 0{,}729$$

$$3{,}01^2 = \left(\frac{301}{100}\right)^2 = \frac{90\,601}{10\,000} = 9{,}0601$$

Divisão

Regra: *Reduzem-se o dividendo e o divisor ao mesmo número de casas decimais; desprezam-se as vírgulas de ambos, e, efetua-se a divisão como se fôssem inteiros. Obtido o quociente, coloca-se, ao mesmo tempo, uma vírgula à sua direita e um zero à direita do resto, a fim de continuar a divisão. Os demais algarismos do quociente serão sempre obtidos colocando-se um zero à direita de cada resto.* Exemplo:

Efetuar: $72{,}2379 : 5{,}873$.

Igualando-se as casas decimais do dividendo e do divisor, temos $72{,}2379 : 5{,}8730$

Efetua-se a divisão como se fôssem inteiros:

$$\begin{array}{r|l} 722\,379 & \underline{587\,30} \\ 135\,079 & 12{,}3 \\ 17\,6190 & \\ 0\,0000 & \end{array}$$

Observações:

1.ª) Se depois de reduzidos o dividendo e o divisor ao mesmo número de casas decimais, o dividendo fôr *menor* que o divisor, coloca-se no quociente um zero, seguido de uma vírgula e ao mesmo tempo um zero no dividendo e efetua-se, a seguir, a divisão de acôrdo com a regra enunciada. Exemplo:

Efetuar: $4{,}3 : 12{,}153$

Igualando-se as casas decimais:

$4{,}300 : 12{,}153$

e dividindo-se como se fôssem inteiros, depois de acrescentar um zero no dividendo e, um zero seguido de vírgula no quociente, temos:

$$\begin{array}{r|l} 4\,300\,0 & \underline{12\,153} \\ 0\,654\,10 & 0{,}353 \\ 046\,450 & \\ 09\,991 & \end{array}$$

Nota: A continuação das divisões vai depender da aproximação desejada, assunto êsse que será estudado no próximo item.

2) Efetuar: $3 : 25$

$$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{25} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & \underline{25} \\ 50 & 0{,}12 \\ 00 & \end{array}$$

3) Efetuar: $0{,}056 : 8$

$0{,}056 : 8{,}000$ (desprezando-se as vírgulas).

ou $56 : 8\,000$

$$\begin{array}{r|l} 56\,000 & \underline{8\,000} \\ 0\,000 & 0{,}007 \end{array}$$

6. Quocientes aproximados. Pode-se sempre, ampliando o estudo das divisões, quer de números inteiros, quer de números decimais, determinar o quociente da divisão com uma aproximação desejada. Essa aproximação, pode ser por falta ou por excesso.

Seja, por exemplo, a divisão de 73 por 14. Tomando-se por quociente o número 5, temos que êsse *quociente é por falta* ($5 \times 14 = 70$). Tomando-se o número 6, temos que êsse *quociente é por excesso* ($6 \times 14 = 84$). Quer se tome o quociente por falta 5 ou por excesso 6, comete-se um *êrro menor que uma unidade*, pois, o quociente verdadeiro está entre 5 e 6. Logo, podemos escrever:

$$5 < \frac{73}{14} < 6$$

e dizemos:

5 é o *quociente por falta* a menos de uma unidade.

6 é o *quociente por excesso* a menos de uma unidade.

Seja agora a divisão de 730 por 14, temos:

$$52 < \frac{730}{14} < 53$$

Ou dividindo todos os números por 10:

$$5{,}2 < \frac{73}{14} < 5{,}3$$

isto é, 5,2 e 5,3 são os *quocientes aproximados* por falta e por excesso, agora a menos de $\frac{1}{10}$ (ou seja o êrro cometido é menor que um décimo). Temos a seguinte regra para a obtenção de quocientes aproximados:

REGRA: *Para se obter o quociente de dois números inteiros aproximados por falta a menos de* $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}$, *etc., acrescenta-se ao dividendo, um, dois, três, etc., zeros e faz-se a divisão. No quociente obtido separa-se com uma vírgula respectivamente uma, duas, três, etc., casas decimais.* Exemplos:

1) Calcular a menos de $\frac{1}{100}$ por falta, o quociente de 43 por 15.

Como a aproximação é de $\frac{1}{100}$ acrescentamos ao dividendo dois zeros

$$\begin{array}{l|l} 4\,300 & 15 \\ \cline{2-2} 1\,30 & 286 \\ \;\;100 & \end{array}$$

e o quociente será: 2,86

Resposta: O quociente aproximado a menos de $\frac{1}{100}$, por falta, é 2,86.

2) Calcular a menos de 0,001, por falta, o quociente de 3 por 7.

Acrescentam-se agora três zeros à direita do dividendo, isto é,

$$\begin{array}{l|l} 3\,000 & 7 \\ \cline{2-2} \;20 & 428 \\ \;\;60 & \\ \;\;\;4 & \end{array}$$

e o quociente será: 0,428.

Resposta: O quociente a menos de 0,001, por falta, é 0,428.

NOTA: No caso da divisão de dois números decimais, reduzem-se antes o dividendo e o divisor ao mesmo número de casas decimais e procede-se como na divisão de dois inteiros. Exemplos:

1) Calcular a menos de $\frac{1}{10}$, por falta, o quociente de 4,3 por 8,25.

Reduzindo-se as casas decimais, temos: 4.30 e 8,25, e efetuando-se a divisão:

$$\begin{array}{l|l} 4\,3008 & 25 \\ \cline{2-2} \;\;175 & 5 \end{array}$$

(acrescenta-se um zero no dividendo por causa da aproximação que é $\frac{1}{10}$)

segue-se que o quociente será 0,5.

Resposta: O quociente aproximado a menos de $\frac{1}{10}$, por falta, é 0,5.

2) Calcular a menos de 0,01, por falta, o quociente de 52,18 por 0,859.

Reduzindo-se as casas decimais:

52,180 : 0,859 e

$$\begin{array}{r|l} 5\,218\,000 & 859 \\ \cline{2-2} 064\,00 & 6\,074 \\ 3\,870 & \\ 434 & \end{array}$$

(acrescentam-se dois zeros no dividendo por causa da aproximação de 0,01).

o quociente será: 60,74.

Resposta: O quociente aproximado a menos de 0,01, por falta, de 52,18 por 0,759 é 60,74.

CONVERSÃO DE FRAÇÃO ORDINÁRIA A UM NÚMERO DECIMAL E VICE-VERSA

1. Conversão de fração ordinária em um número decimal. Para se converter uma fração ordinária em um número decimal divide-se o numerador pelo denominador da fração.

Dois casos podem ocorrer:

1.º) *a divisão é exata, isto é, o resto é igual a zero;*

2.º) *a divisão não é exata, isto é, o resto não é zero e o quociente vai tendo um número ilimitado de algarismos.*

Do primeiro caso dizemos que a fração ordinária se converteu em um *número decimal exato* ou numa *decimal exata*, e, no segundo caso, que a fração ordinária se converteu em um *número decimal periódico* ou numa *dízima periódica*. Exemplos:

Converter as frações: $\frac{3}{25}, \frac{47}{20}, \frac{8}{11}$ e $\frac{308}{90}$ em números decimais.

1) $\frac{3}{25} = 0{,}12 \rightarrow$ *decimal exata*

$$\begin{array}{l|l} 30 & 25 \\ \cline{2-2} 50 & 0{,}12 \\ 00 & \end{array}$$

2) $\frac{47}{20} = 2{,}35 \rightarrow$ *decimal exata*

$$\begin{array}{l|l} 47 & 20 \\ \cline{2-2} 70 & 2{,}35 \\ 100 & \\ 000 & \end{array}$$

3) $\frac{8}{11} = 0{,}7272\ldots \rightarrow$ *dízima periódica*

$$\begin{array}{l|l} 80 & 11 \\ \cline{2-2} 30 & 0{,}7272\ldots \\ 30 & 80 \\ 80 & \\ \vdots & \end{array}$$

4) $\frac{308}{90} = 3{,}4222\ldots \rightarrow$ *dízima periódica*

$$\begin{array}{l|l} 308 & 90 \\ \cline{2-2} 380 & 3{,}4222\ldots \\ 200 & \\ 200 & \\ 200 & \\ \vdots & \end{array}$$

2. Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata. Como a fração decimal é aquela cujo denominador é uma potência de 10, segue que tôda fração cujo denominador possa ser transformado numa potência de 10, resulta na conversão numa decimal exata. Sendo 2 e 5, com determinados expoentes, os únicos fatôres das potências de 10, temos a seguinte regra, que permite saber a espécie da conversão sem efetuar a divisão:

Regra : *Uma fração ordinária se converte numa* ***decimal exata*** *quando, reduzida à sua forma mais simples, o denominador contém sòmente os fatôres 2 e 5. O número de casas decimais é igual ao maior dos expoentes de 2 e 5.* Exemplos :

1) Converter a fração : $\frac{27}{120}$

Reduzindo-se à sua forma mais simples, temos :

$$\frac{27}{120} = \frac{9}{40}$$

e como o denominador $40 = 2^3 \times 5$ só contém fatôres 2 e 5, segue-se que a fração $\frac{9}{40}$ se converte numa *decimal exata* com 3 casas decimais (que é o expoente de 2).

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo : $\frac{27}{120} \rightarrow$ decimal exata com 3 casas.

Verificação :

$$\begin{array}{r|l} 270 & 120 \\ \cline{2-2} 300 & 0{,}225 \\ 600 & \\ 000 & \end{array}$$

(decimal exata com 3 casas).

2) Converter a fração $\frac{13}{4}$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

logo : $\frac{13}{4} \rightarrow$ decimal exata com 2 casas.

Verificação :

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \cline{2-2} 10 & 3{,}25 \\ 20 & \\ 00 & \end{array}$$

(decimal exata com 2 casas).

Nota : O fato de aparecer no denominador sòmente o fator 2 ou 5, a regra ainda é válida, pois a ausência de um dêles significa que no produto êsse fator figura com o expoente zero, que, como sabemos (§ 2. Potências), vale 1. Em nosso exemplo temos :

$$4 = 2^2 \times 5^0$$

3) Converter a fração $\frac{1}{100}$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$100 = 2^2 \times 5^2$, logo :

$\frac{1}{100} \rightarrow$ decimal exata com 2 casas.

Verificação :

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{100} & 100 \\ \cline{2-2} 000 & 0{,}01 \end{array}$$

3. Condição para que uma fração ordinária se converta numa dízima periódica. Seja a fração $\frac{8}{11}$. Dividindo-se 8 por 11, observaremos que o resto nunca é zero. Como os restos que se vão obtendo devem ser menores que 11, depois de um certo número de vêzes êles se repetirão, provocando no quociente os mesmos algarismos sempre na mesma ordem.

Assim :

$$\begin{array}{l|l} 80 & 11 \\ \hline 30 & 0{,}727272\ldots \\ \quad 80 & \\ \quad 30 & \\ \quad\; 80 & \\ \quad\; 30 & \\ \quad\;\; 80 & \\ \quad\;\; \vdots & \end{array}$$

Obtém-se, dêsse modo, um número decimal ilimitado, que se diz *dízima periódica*, porque existe um grupo de algarismos, chamado *período*, que se repete indefinidamente.

Se o período vier *logo depois da vírgula*, a dízima periódica diz-se *simples* e em caso contrário *dízima periódica composta*. A parte decimal entre a vírgula e o período, existente nas dízimas periódicas compostas, é denominada parte *não periódica*. Exemplos :

1) 0,727272...... que também se representa por $0,\overline{72}$ é uma dízima periódica simples de período 72.

2) 8,513513513.. ou $8,\overline{513}$ é uma dízima periódica simples de período 513.

3) 0,82646464.... ou $0,82\overline{64}$ é uma dízima periódica composta de período 64 e parte não periódica 82.

4) 67,0333...... ou $67,0\dot{3}$ é uma dízima periódica composta de período 3 e parte não periódica 0.

É possível prever-se a espécie da dízima periódica, quando se divide o numerador pelo denominador de uma fração ordinária, com a seguinte

REGRA : *Uma fração ordinária se converte numa* ***dízima periódica simples****, quando, reduzida à sua forma mais simples, o denominador não contém os fatôres primos* 2 *e* 5 *; caso contenha um dêsses fatôres e outros, a dízima periódica será* ***composta****.* Exemplos :

1) Seja a fração $\frac{4}{11}$

Como o denominador 11 não contém os fatôres 2 e 5, esta fração se converterá numa dízima periódica simples.

Logo : $\frac{4}{11} \rightarrow$ dízima periódica simples

Verificação :

$$\begin{array}{l|l} 40 & 11 \\ \hline \;70 & 0{,}3636\ldots \\ \;40 & \\ \quad 70 & \\ \quad 40 & \\ \quad \vdots & \end{array}$$

2) Seja a fração $\frac{21}{45}$

Simplificando-se, antes, a fração : $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Como o denominador 15 = 3 × 5, contém o fator 5, além do fator 3, a fração se converterá numa dízima periódica composta.

Logo : $\frac{21}{45} \rightarrow$ dízima periódica composta.

Verificação :

$$\begin{array}{l|l} 210 & 45 \\ \hline \;300 & 0{,}4666\ldots \\ \;\;300 & \\ \;\;\;300 & \\ \;\;\;\;300 & \\ \;\;\;\;\vdots & \end{array}$$

3) Seja a fração $\frac{191}{60}$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ além dos fatôres 2 e 5, ainda entra o fator 3, logo:

$$\frac{191}{60} \rightarrow \text{dízima periódica composta}$$

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 191 & 60 \\ \hline 110 & 3{,}18333\ldots \\ \ \ 500 & \\ \ \ 500 & \\ \ \ \ 500 & \\ \ \ \ \ 200 & \\ \vdots & \end{array}$$

4. Geratrizes. Chama-se *geratriz* de uma dízima periódica a fração ordinária que a gera.

A geratriz de uma dízima periódica simples é determinada pela seguinte

REGRA: *Constrói-se uma fração que tenha para numerador o período e para denominador um número formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período.* Exemplos:

Construir a geratriz da dízima periódica 0,525252...

Devemos ter: $0{,}525252\ldots = \frac{52}{99}$

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 520 & 99 \\ \hline 250 & 0{,}525252\ldots \\ \ 520 & \\ \ \ 250 & \\ \vdots & \end{array}$$

NOTA: No caso da dízima apresentar parte inteira diferente de zero, soma-se a parte inteira com a geratriz da dízima periódica. Exemplo:

Construir a geratriz da dízima periódica 3,444......

Devemos ter: $3{,}444\ldots\ldots = 3 + 0{,}444\ldots\ldots =$

$$= 3 + \frac{4}{9} =$$

$$= \frac{31}{9} = 3\,\frac{4}{9}.$$

A geratriz de uma dízima periódica composta é determinada pela seguinte

REGRA: *Constrói-se uma fração que tenha para numerador a diferença entre o número formado pela parte não periódica acompanhada de um período e a parte não periódica, e, para denominador, um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.*

Exemplos:

Construir a geratriz da dízima 0,3484848...

Devemos ter: $0{,}3484848\ldots = \frac{348-3}{990} = \frac{345}{990}$

Verificação:

$$\begin{array}{l|l} 3450 & 990 \\ \hline 4800 & 0{,}3484848\ldots \\ \ 8400 & \\ \ \ 4800 & \\ \ \ \ 8400 & \\ \vdots & \end{array}$$

NOTA: Caso exista a parte inteira, procede-se como no exemplo abaixo. Exemplo:

Construir a geratriz da dízima 5,27333......

Devemos ter: $5{,}27333\ldots. = 5\,\frac{273-27}{900}$

$$= 5\,\frac{246}{900}$$

OBSERVAÇÃO: As dízimas periódicas de período 9, como, por exemplo:

0,9999........ denominada *pura*,

e 17,34999....... denominada *mista*,

não têm geratrizes no sentido até agora estudado.

5. Expressões aritméticas envolvendo dízimas periódicas. O cálculo dessas expressões é feito substituindo-se as dízimas pelas respectivas geratrizes. Exemplos:

1) Efetuar: $0,\overline{42} + 3,2\dot{1}$.

Construindo as respectivas geratrizes, temos:

$$0,\overline{42} = \frac{42}{99} \quad \text{e} \quad 3,2\dot{1} = 3\,\frac{21-2}{90} = 3\,\frac{19}{90} = \frac{289}{90}$$

$$\therefore\ 0,\overline{42} + 3,2\dot{1} = \frac{42}{99} + \frac{289}{90} =$$

$$= \frac{420 + 3\,179}{990} =$$

$$= \frac{3\,599}{990} = 3\,\frac{629}{990}$$

2) Efetuar: $5,\overline{34} : 0,\dot{8}$.

$$\text{Como: } 5,34 = 5\,\frac{34}{99} \text{ temos: } 5\,\frac{34}{99} : 0,\dot{8} = \frac{529}{99} : \frac{8}{9} =$$

$$= \frac{529}{99} \times \frac{9}{8} =$$

$$= \frac{529}{88} =$$

$$= 6\,\frac{1}{88}.$$

3) Efetuar: $1,\overline{21} + 0,\dot{3} \times \dfrac{1}{0,\dot{1}}$

$$\text{Temos: } 1\,\frac{21}{99} + \frac{1}{3} \times 9 = \frac{120}{99} + 3 = \frac{120 + 297}{99} =$$

$$= \frac{417}{99} = 4\,\frac{21}{99}.$$

EXERCÍCIOS SÔBRE NÚMEROS DECIMAIS

1. Representar com algarismos arábicos os seguintes números decimais:
   1.º) três unidades e cinqüenta e oito centésimos;
   2.º) duzentos e trinta e seis centésimos milésimos;
   3.º) quarenta e uma unidades e duzentos e vinte mil e treze milionésimos.
2. Fazer a leitura dos seguintes números:
   1.º) 0,0101; 2.º) 32,53; 3.º) 0,00500001.
3. Transformar em números decimais as frações:
   1.º) $\dfrac{541}{1\,000}$; 2.º) $\dfrac{832}{100}$; 3.º) $\dfrac{23}{10\,000\,000}$; 4.º) $\dfrac{8}{100\,000}$.

4. Multiplicar por 10, 100 e 1 000, respectivamente, os seguintes números decimais:
   1.º) 43,2; 2.º) 0,0391; 3.º) 1,21.
5. Dividir por 10, 100 e 1 000, respectivamente, os seguintes números decimais:
   1.º) 398,251; 2.º) 0,0391; 3.º) 2,39.
6. Efetuar as seguintes *adições:*
   1.º) $12,1 + 0,0039 + 1,98$;
   2.º) $432,391 + 0,01 + 8 + 22,39$;
   3.º) $0,003 + 101,6 + 0,5$.
7. Efetuar as seguintes *subtrações:*
   1.º) $6,03 - 2,9456$; 2.º) $1 - 0,34781$; 3.º) $142,2 - 0,9988765$.
8. Calcular o valor das *expressões:*
   1.º) $(4,3 + 0,912) - (10 - 9,813)$;
   2.º) $\left(3,069 + \dfrac{32}{1\,000}\right) - \left(3\,\dfrac{1}{10} + 0,001\right)$.
9. Efetuar as seguintes *multiplicações:*
   1.º) $4,31 \times 0,012$; 2.º) $1,2 \times 0,021 \times 4$; 3.º) $\dfrac{41}{100} \times 3,01$.
10. Calcular o valor das *potências:*
    1.º) $(0,04)^3$; 2.º) $(2,31)^2$; 3.º) $(0,001)^4$; 4.º) $\left(\dfrac{11}{100}\right)^2$.
11. Calcular os seguintes *quocientes aproximados por falta:*
    1.º) 56 por 17 a menos de $\dfrac{1}{100}$;
    2.º) 3,9 por 2,5 a menos de $\dfrac{1}{10}$;
    3.º) 5 por 7 a menos de $\dfrac{1}{1\,000}$;
    4.º) 42,7 por 0,315 a menos de $\dfrac{1}{100}$;
    5.º) 0,0321 por 1,27 a menos de $\dfrac{1}{1\,000}$.
12. Converter em frações decimais exatas, ou periódicas, as seguintes frações:
    1.º) $\dfrac{3}{4}$; 3.º) $\dfrac{5}{11}$; 5.º) $\dfrac{27}{75}$; 7.º) $\dfrac{13}{125}$; 9.º) $\dfrac{7}{6}$;
    2.º) $\dfrac{8}{3}$; 4.º) $\dfrac{11}{200}$; 6.º) $\dfrac{50}{99}$; 8.º) $\dfrac{1}{50}$; 10.º) $\dfrac{18}{74}$.
13. Indicar,sem efetuar as oper ações, qais são entre as seguintes frações ordinárias, as redutíveis adecimaius exatas ou periódicas:

1.º) $\frac{10}{24}$; 2.º) $\frac{7}{15}$; 3.º) $\frac{36}{48}$; 4,º) $\frac{9}{64}$; 5.º) $\frac{4}{50}$; 6.º) $\frac{3}{11}$.

14. Construir as *geratrizes* das seguintes dízimas periódicas:

1.º) $0,\dot{7}$; 3.º) $0,85\overline{34}$; 5.º) $5,14\overline{321}$; 7.º) $22,3\overline{001}$; 9.º) $1,20\dot{2}$;
2.º) $3,\overline{45}$; 4.º) $2,0\dot{3}$; 6.º) $0,00\overline{16}$; 8.º) $0,01001\overline{002}$; 10.º) $0,0\overline{415}$.

15. Calcular o valor das *expressões*:

1.º) $0,\overline{31} + 0,0\dot{1}$;

2.º) $0,3\overline{45} + 3,\dot{2} \times \frac{4}{0,3\dot{1}}$;

3.º) $\left[(0,\overline{30} - 0,\overline{16}) : 0,\dot{7} + 1,\dot{4} \times \frac{9}{13}\right] : \frac{13}{11}$;

4.º) $\dfrac{3,25 - 2,0\dot{1}}{5,6\overline{23} - 0,\overline{32} \times \frac{99}{16}}$

RESPOSTAS:

1. 1.º) 3,58; 2.º) 0,00236; 3.º) 41,220013.
2. 1.º) cento e um décimos milésimos; 2.º) 32 unidades e 53 centésimos;
3.º) 500 mil e 1 centésimo milionésimo.
3. 1.º) 0,541; 2.º) 8,32; 3.º) 0,0000023; 4.º) 0,00008.
4. 1.º) 432; 2.º) 3,91; 3.º) 1 210.
5. 1.º) 39,8251; 2.º) 0,000391; 3.º) 0,00239.
6. 1.º) 14,0839; 2.º) 462,791; 3.º) 102,103.
7. 1.º) 3,0844; 2.º) 0,65219; 3.º) 141,2011235.
8. 1.º) 5,025; 2.º) 0.
9. 1.º) 0,05172; 2.º) 0,1008; 3.º) 1,2341.
10. 1.º) 0,000064; 2.º) 5,3361; 3.º) 0,000000000001; 4.º) 0,0121.
11. 1.º) 3,29; 2.º) 1,5; 3.º) 0,714; 4.º) 135,55; 5.º) 0,025.
12. 1.º) 0,75; 3.º) $0,\overline{45}$; 5.º) 0,36; 7.º) 0,104; 9.º) $0,1\dot{6}$; 10.º) $0,\overline{243}$.
2.º) $2,\dot{6}$; 4.º) 0,055; 6.º) $0,\overline{50}$; 8.º) 0,02;
13. 1.º) periódica; 2.º) periódica; 3.º) exata; 4.º) exata; 5.º) exata;
6.º) periódica.
14. 1.º) $\frac{7}{9}$; 3.º) $\frac{8\,449}{9\,900}$; 5.º) $5\frac{14\,178}{99\,000}$; 7.º) $22\frac{1\,499}{4\,995}$; 9.º) $1\frac{91}{450}$;
2.º) $3\frac{45}{99}$; 4.º) $2\frac{1}{30}$; 6.º) $\frac{4}{2\,475}$; 8.º) $\frac{1\,000\,001}{99\,900\,000}$; 10.º) $\frac{83}{1\,998}$.
15. 1.º) $\frac{107}{330}$; 2.º) $41\frac{1\,804}{2\,331}$; 3.º) 1; 4.º) $\frac{1\,229}{3\,587}$.

III) Número racional e número irracional. Prática de raiz quadrada

§ 1. Grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis.

1. Grandezas comensuráveis. ***Números racionais.*** Duas grandezas são *comensuráveis* quando *admitem uma medida comum.* Assim, os comprimentos dos segmentos (fig. 8):

$$\overline{AB} = 21\text{cm} \quad \text{e} \quad \overline{CD} = 15\text{cm}$$

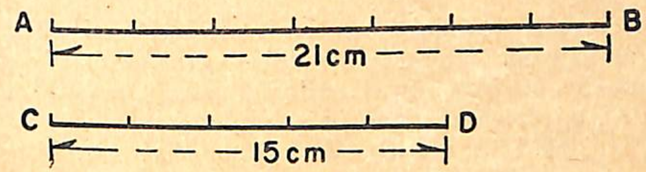


FIG. 8

constituem um exemplo de grandezas comensuráveis, pois, admitem a *medida comum* 3cm que está contida 7 vêzes em $\overline{AB}$ e 5 vêzes em $\overline{CD}$.

Outro exemplo: as áreas dos quadrados $ABCD$ (16cm²) e $MNPQ$ (4cm²) são grandezas comensuráveis pelo fato de admitirem *medida comum* (a maior é 4cm², que cabe *quatro* vêzes em $ABCD$ e *uma* vez em $MNPQ$) (fig. 9).

A relação entre duas grandezas comensuráveis é expressa mediante um número denominado *racional.* Os *números racionais* compreendem os *números inteiros* e os *números fracionários.*

Nos exemplos dados, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{21\text{ cm}}{15\text{ cm}} = \frac{7}{5} \text{ (fracionário)};$$

$$\frac{\text{área } ABCD}{\text{área } MNPQ} = \frac{16\text{cm}^2}{4\text{ cm}^2} = 4 \text{ (inteiro)}.$$

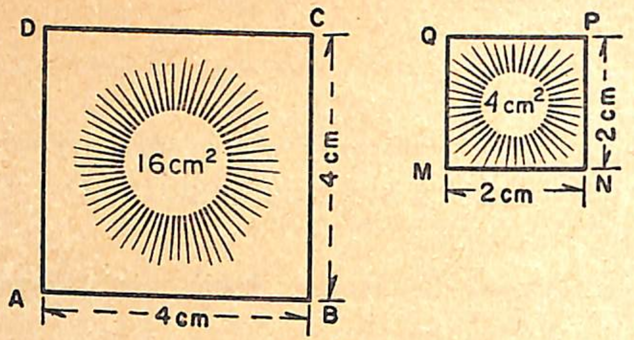


FIG. 9

Exemplos de *números racionais:*

$$2; \ \frac{3}{7}; \ 0; \ 215; \ 0{,}31; \ 3{,}555\ldots\ldots; \ 2\frac{1}{9}$$

A consideração dos números inteiros e fracionários relativos permite as denominações de *números racionais relativos* aos números inteiros e fracionários relacionados com os sinais $+$ ou $-$, e, *racionais absolutos* aos números inteiros e fracionários que não estão relacionados com sinal algum. Exemplos:

$$\frac{3}{4}; \ 12; \ 5; \ 0; \ 3\,413; \ 3\frac{2}{7}; \ 0{,}444\ldots\ldots; \ 2{,}39;$$

são números *racionais absolutos*, enquanto que:

$$-4; \ +\frac{11}{35}; \ +13; \ -1\frac{1}{2}; \ -0{,}8; \ +2; \ -19{,}424\,242\ldots$$

são *números racionais relativos.*

2. Grandezas incomensuráveis. ***Números irracionais.*** Duas grandezas são *incomensuráveis* quando *não admitem medida comum.* Assim, por exemplo, os comprimentos da *diagonal* e do *lado* de um quadrado (fig. 10) são grandezas incomensuráveis, pois, escolhida uma unidade de medida, ela *nunca estará* contida um número exato de vêzes na diagonal e no lado do quadrado. Êsse fato significa também que podemos ter uma medida que esteja contida exatamente na diagonal, porém a mesma medida nunca estaria contida exatamente no lado e vice-versa.

Já encontramos na primeira série ginasial um outro exemplo clássico de grandezas incomensuráveis: os comprimentos de *uma circunferência* e o de *seu diâmetro* (fig. 11).

A relação entre duas grandezas incomensuráveis é expressa mediante um *número irracional* (*).

No primeiro exemplo, a relação entre as grandezas incomensuráveis: *diagonal* e *lado* de um *quadrado* é o número irracional $\sqrt{2}$, que no estudo da raiz quadrada vimos não ser possível exprimir-se com uma representação decimal exata

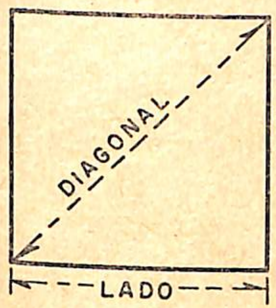


FIG. 10

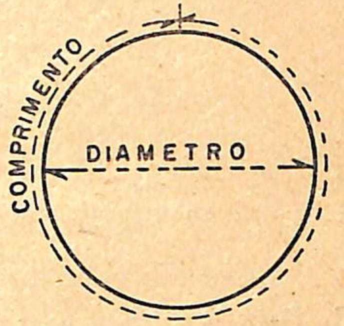


FIG. 11

e sim com uma aproximação desejada que é simbolizada pelos primeiros algarismos que se escrevem. A indicação que a $\sqrt{2}$ é um *número irracional* é feita colocando-se reticências a seguir os primeiros algarismos da aproximação. Assim:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,2\ldots\ldots\ldots$$

No segundo exemplo, a relação entre os comprimentos de uma circunferência e o de seu diâmetro é o *número irracional* "pi":

$$\pi = 3{,}14\,159\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que não podendo se exprimir com uma representação decimal exata é também representado com os primeiros algarismos (de acôrdo com a aproximação desejada) colocando-se a seguir reticências para indicar a existência de infinitos outros algarismos.

Outros exemplos de *números irracionais:*

$$\sqrt{3} = 1{,}7321\ldots\ldots\ldots \qquad \sqrt{7} = 2{,}6458\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{21} = 4{,}5826\ldots\ldots\ldots \qquad \sqrt{480} = 89{,}9120\ldots\ldots\ldots$$

(*) Do latim *irrationalis* que significa "contrário à razão".

Da mesma forma que nas raízes quadradas, encontramos raízes de outras ordens (cúbicas, quartas, quintas, etc....) de números que não são potências perfeitas do grau que indica o seu índice e que são exemplos de *números irracionais*.

Assim, por exemplo, são números irracionais:

$$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt[5]{5} = 1{,}3195\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt[3]{12} = 2{,}2894\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt[4]{126} = 3{,}3503\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Via de regra, operam-se com os números irracionais sob a forma que se apresentam de radicais de raízes não exatas ao invés de seus valores aproximados.

§ 2. Prática de raiz quadrada.

1. Raiz quadrada exata. Quando se tem um quádrado perfeito, como, por exemplo:

$$64 = 8^2$$

diz-se que o número 8 é a *raiz quadrada exata* ou a *raiz quadrada* de 64 e se indica:

$$\sqrt{64} = 8$$

O sinal $\sqrt{\ }$, é chamado *radical* ou *sinal de raiz* e o número que está sob êsse sinal (64 no exemplo) é denominado *radicando*.

Daí a *definição*:

> **Raiz quadrada de um número é o número cujo quadrado é igual ao número dado.**

Exemplos:

$$\sqrt{36} = 6\,, \text{ pois, } 6^2 = 36$$
$$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}, \text{ pois, } \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$$
$$\sqrt{1} = 1\,, \text{ pois, } 1^2 = 1$$
$$\sqrt{0{,}81} = 0{,}9, \text{ pois, } (0{,}9)^2 = 0{,}81$$

A operação que permite encontrar a raiz quadrada de um número é chamada *extração de raiz quadrada* sendo inversa da operação de *elevar ao quadrado*. Por essa razão só tem sentido procurar raiz quadrada exata dos números que são *quadrados perfeitos*.

2. Raiz quadrada aproximada a menos de uma unidade. Consideremos o caso de um número que não seja quadrado perfeito, como, por exemplo, o número 54. Podemos dizer que a raiz quadrada de 54 está compreendida entre 7 e 8, pois,

$$7^2 = 49, \text{ é menor de } 54,$$
$$\text{e} \quad 8^2 = 64, \text{ é maior de } 54.$$

Diremos, então, que:

7 é a *raiz quadrada aproximada, por falta*, de 54, *a menos de uma unidade;*

e 8 é a *raiz quadrada aproximada, por excesso*, de 54, *a menos de uma unidade.*

A expressão *a menos de uma unidade por falta ou por excesso*, é justificada pelo fato de se cometer um *êrro menor do que* 1, quando se toma o 7 ou o 8 para a raiz quadrada de 54.

Logo, para um número que não seja quadrado perfeito, chama-se:

1.º) *Raiz quadrada aproximada,* ***por falta****, a menos de uma unidade, ao maior número cujo quadrado esteja contido em o número dado.*

2.º) *Raiz quadrada aproximada,* ***por excesso****, a menos de uma unidade, ao menor número cujo quadrado contém o número dado.*

Exemplos:

$\sqrt{38} = 6$ (aproximada, por falta, a menos de uma unidade).

$\sqrt{38} = 7$ (aproximada, por excesso, a menos de uma unidade).

3. Resto da raiz quadrada. Nas raízes quadradas aproximadas, por falta, chama-se *resto da raiz quadrada* a diferença entre o número dado e o maior quadrado nele contido. Assim, como $\sqrt{54} = 7$ (aproximada, por falta, a menos de uma unidade) o *resto* dessa extração será:

$$54 - 49 = 5$$

pois, 49 é o maior quadrado contido em 54.

Na $\sqrt{38} = 6$ (aproximada, por falta, a menos de uma unidade) o *resto* é igual a $38 - 36 = 2$.

4. Limite do resto na extração da raiz quadrada. Para o *resto* da raiz quadrada aproximada de um número, vale a seguinte *propriedade:*

> **O resto da raiz quadrada de um número não pode ser maior que o dôbro da raiz.**

De fato, o resto da $\sqrt{54}$ não pode ser maior que 14 (que é o dôbro da raiz aproximada 7), pois, caso fôsse 15, por exemplo, a diferença $54 - 15 = 39$, estaria indicando que não foi tomado, como devia ser, o maior quadrado contido em 54 (que é 49).

É evidente que para as *raízes quadradas exatas* o resto é *nulo.*

5. Regras práticas para a extração da raiz quadrada exata ou aproximada, por falta, de um número inteiro, a menos de uma unidade.

a) ***O número não ultrapassa* 100.** Neste caso, a extração deve ser feita de *memória,* pois, basta lembrar que os quadrados dos números:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, são, respectivamente:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100. Exemplos:

$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{71} = 8$ (por falta); $\sqrt{100} = 10$;

$\sqrt{13} = 3$ (por falta); $\sqrt{65} = 8$ (por falta); $\sqrt{81} = 9$.

e) ***O número é maior que* 100.** Para êsse caso, vale a seguinte regra que será exposta em partes, num exemplo, a fim de facilitar o seu conhecimento. Seja extrair a raiz quadrada do número 79 956.

Procederemos da seguinte forma:

1.º) Decompomos o número em grupos de dois algarismos, a partir da direita, podendo o último grupo conter um único algarismo. A *cada grupo separado corresponde um algarismo na raiz.*
Assim, temos:

$\sqrt{7\,.\,99\,.\,56} \rightarrow$ a raiz deve possuir três algarismos (um para cada grupo)

2.º) Extraímos a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de uma unidade, do último grupo (no exemplo é 7, que se compõe só de um algarismo), obtendo-se assim o primeiro algarismo da raiz.

Logo, $\sqrt{7\,.\,99\,.\,56}\ \big|\ 2$

3.º) Subtraímos do primeiro grupo o quadrado do algarismo encontrado ($2^2 = 4$) e à direita do resto (3), escrevemos o segundo grupo (99) separando com um ponto o *último* algarismo da direita.

$$\begin{array}{ll|l} \text{Portanto:} & \sqrt{7\,.\,99\,.\,56} & 2 \\ & 4 & \\ \text{Primeiro resto:} & 39\,.\,9 & \end{array}$$

4.º) *Duplicamos* o algarismo da raiz ($2 \times 2 = 4$), escrevendo-o na linha logo abaixo da raiz e dividimos, por êsse número, o número que permaneceu à esquerda do ponto (39). O quociente aproximado obtido (9), escreve-se à *direita* daquêle dôbro e, a seguir, multiplicamos o número assim formado (49) pelo mesmo quociente (9).
Temos, assim:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{7\,.\,99\,.\,56} & 2 \\ 4 & 2 \times 2 = 4; \\ 39\,.\,9 & \end{array} \quad 39 \ \underline{|\ 4\ }\ ; \quad 49 \times 9 = 441$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad 9$$

Nota: Se o quociente fôr igual ou maior que 10, escreve-se 9; se fôr menor que 1, escreve-se 0.

5.º) Se fôr possível subtrair o produto obtido (441) do número formado pelo primeiro resto e o segundo grupo (399), o quociente encontrado será o segundo algarismo da raiz. Caso contrário, diminuímos o quociente de uma unidade até que se encontre um produto que torne possível tal subtração. No exemplo considerado, o produto obtido (441) não pode ser subtraído de 399, e por isso, ao invés do algarismo 9, usamos como quociente aproximado o algarismo 8. Temos agora: $48 \times 8 = 384$, produto que pode ser subtraído de 399. Logo, 8 é o segundo algarismo da raiz, que escrito ao lado do primeira algarismo da raiz (2) origina 28 para a raiz.

$$\begin{array}{ll|l} \text{Disposição prática:} & \sqrt{7\,.\,99\,.\,56} & \mathbf{28} \\ & \underline{4} & 48 \times 8 = 384 \\ & \underline{39\,.\,9} & \\ & \underline{38\ \ 4} & \\ \text{Segundo resto: } 15 & 1\ \ 5 & \end{array}$$

6.º) A seguir fazemos um traço horizontal separando êsses cálculos dos que ainda se vão efetuar. Ao lado do segundo resto (15) escrevemos o terceiro grupo (56, que é o último), e calculamos o terceiro algarismo da raiz da mesma forma que foi calculado o segundo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7\,.\,99\,.\,56} & 28 \\ \underline{4} & \underline{48 \times 8 = 384} \\ 39\,.\,9 & 28 \times 2 = \ \ 56\,; \\ \underline{38\ \ 4} & \\ 1\ \ 55\,.\,6 & \\ \text{resto final: } \underline{1\ \ 12\ \ 4} & \\ 43\ \ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 155 & 56 \\ \cline{2-2} & 2 \end{array}\ ; \qquad 562 \times 2 = 1\,124$$

O produto 1 124 pode ser subtraído, e, portanto, **2** é o terceiro algarismo da raiz que passa a ser 282. O último resto (432) é o resto da raiz quadrada. Se o *último resto* fôr *zero* a raiz encontrada é *exata* e o número proposto é um *quadrado perfeito*.

Logo: a raiz quadrada aproximada, por falta, a menos de uma unidade, do número 79 956 é 282 e o resto 432.

Indicação: $\sqrt{79\,956} = 282$ (por falta) ; resto : 432

Disposição prática:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7\,.\,99\,.\,56} & 282 \\ \underline{4} & \underline{48 \times 8 = 384} \\ 39\,.\,9 & 562 \times 2 = 1\,124 \\ \underline{38\ \ 4} & \\ 1\ \ 55\,.\,6 & \\ \underline{1\ \ 12\ \ 4} & \\ 43\ \ 2 & \end{array}$$

6. Prova. A prova da extração da raiz quadrada de um número é feita em duas partes:

1.º) Verificando se o resto *não é maior que o dôbro da raiz;*

2.º) Verificando se *a soma do quadrado da raiz com o resto é igual ao número dado.*

Para o nosso exemplo, temos:

1) O resto 432 é menor que $2 \times 282 = 564$ (dôbro da raiz).

2) $282^2 + 432 = 79\,524 + 432 = 79\,956$ (número dado), isto é, foram verificadas as duas condições e concluímos que a operação está certa.

NOTA: Não se pode, na prova da extração da raiz quadrada de um número, prescindir da primeira parte da prova, pois, mesmo para os números cujos restos na extração da raiz quadrada não verificam a primeira parte, verificam necessàriamente a segunda. Assim, no exemplo acima, se ao invés de 282 tivéssemos, por engano, encontrado 281, o resto seria 995, que apesar de satisfazer a segunda parte da prova, isto é,

$$281^2 + 995 = 78\,961 + 995 = 79\,956$$

não satisfaz à 1.ª parte, pois, 995 *não é menor* que o dôbro da raiz ($2 \times 281 = 562$).

Outros exemplos: Extrair, a menos de uma unidade, por falta, a raiz quadrada dos números: 497 025 e 1 081.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{49\,.\,70\,.\,25} & 705 \\ \underline{49} & \underline{140 \times 0 = 0} \\ 0\ 7\,.\,0 & 1\,405 \times 5 = 7\,025 \\ 702\,.\,5 & \\ \underline{702\,.\,5} & \\ 000\ \ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{10\,.\,81} & 32 \\ \underline{9} & 62 \times 2 = 124 \\ 18\,.\,1 & \\ \underline{12\ \ 4} & \\ 5\ \ 7 & \end{array}$$

Prova: 1.º) O resto é nulo.
2.º) $705^2 = 497\,025$
(quadrado perfeito)

Prova: $57 < 64$ (dôbro da raiz)
$32^2 + 57 = 1\,081$

7. Raiz quadrada dos números decimais. Para a extração da raiz quadrada dos números decimais, *faz-se com que o número tenha duas, quatro, seis, ... casas decimais,* conforme a aproximação desejada seja a menos de 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... e extrai-se a raiz quadrada como se a vírgula não existisse. No resultado separam-se, com uma vírgula, respectivamente, uma, duas, três, etc., casas decimais. Exemplos:

1) Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a menos de 0,01, do número 0,941.

O número deve possuir 4 casas decimais depois da vírgula pois, a aproximação é de centésimos.

$$0{,}9\,410 \rightarrow \begin{array}{r|l} \sqrt{94\,.\,10} & 97 \\ \underline{81} & 187 \times 7 = 1\,309 \\ 131\,.\,0 & \\ \underline{130\ \ 9} & \\ 000\ \ 1 & \end{array}$$

Logo: $\sqrt{0{,}941} = 0{,}97$ (por falta a menos de 0,01).

2) Extrair a raiz quadrada de 3,25 143, por falta, a menos de 0,1.

A raiz deverá ter uma casa decimal (aproximação de um décimo), e, portanto, é suficiente considerar as duas primeiras casas decimais.

$$3{,}25\,143 \rightarrow \begin{array}{r|l} \sqrt{3\,.\,25} & 18 \\ \underline{1} & 28 \times 8 = 224 \\ 22\ \ 5 & \\ \underline{22\ \ 4} & \\ 00\ \ 1 & \end{array}$$

Logo: $\sqrt{3{,}25\,143} = 1{,}8$ (por falta a menos de 0,1).

8. **Raiz quadrada das frações.** Se ambos os têrmos de uma fração são quadrados perfeitos, obtém-se a raiz quadrada *extraindo-se as raízes dos dois têrmos.* Exemplo:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Se um, ou ambos os têrmos de uma fração, não forem quadrado perfeito só podemos calcular a raiz quadrada aproximada por falta, a menos de uma unidade ou a menos de uma unidade fracionária decimal (0,1; 0,01; 0,001;...) Exemplos:

1) Calcular $\sqrt{\frac{42}{57}}$, por falta, a menos de 0,01.

Convertemos a fração $\frac{42}{57}$ em decimal com 4 casas decimais pois, a aproximação é de um centésimo.

$$\begin{array}{l|l} 420 & 57 \\ \hline & 0{,}736701\ldots \end{array} \quad \text{ou} \quad \frac{42}{57} = 0{,}7\,367$$ (quociente aproximado a menos de 0,000 1).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{73\,.\,67} & 85 \\ \cline{2-2} 64 & 165 \times 5 = 825 \\ \cline{1-1} 96\,.\,7 & \\ 82\;\;5 & \\ \cline{1-1} 14\;\;2 & \end{array}$$

Logo: $\sqrt{\frac{42}{57}} = 0{,}85$ (por falta a menos de 0,01).

2) Calcular $\sqrt{\frac{141}{23}}$, por falta, a menos de *uma unidade*.

Temos: $\begin{array}{l|l} 141 & 23 \\ \hline & 6 \end{array}$ ou $\frac{141}{23} = 6$ (quociente aproximado a menos de uma unidade)

Logo: $\sqrt{\frac{141}{23}} = \sqrt{6} = 2$ (por falta a menos de *uma unidade*).

EXERCÍCIOS

1. Extrair a raiz quadrada exata dos seguintes quadrados perfeitos:

1.º) 64	4.º) 2 401	7.º) 36 100	10.º) 998 001
2.º) 289	5.º) 7 225	8.º) 88 209	11.º) 1 002 001
3.º) 1 024	6.º) 11 664	9.º) 651 249	12.º) 4 937 284

2. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a *menos de uma unidade*, dos números:

1.º) 120	4.º) 9 712	7.º) 163 516	10.º) 11 594 026
2.º) 315	5.º) 16 130	8.º) 654 482	11.º) 4 084 444
3.º) 6 245	6.º) 57 164	9.º) 774 480	12.º) 1 234 321

3. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a *menos de* 0,01, dos números:

1.º) 5; 2.º) 11; 3.º) 219; 4.º) 608; 5.º) 35,04; 6.º) 167,036; 7.º) 1,3

4. Extrair a raiz quadrada das frações:

1.ª) $\frac{36}{49}$; 2.ª) $\frac{1}{16}$; 3.ª) $\frac{25}{324}$; 4.ª) $\frac{1}{10\,000}$

5. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a *menos de* 0,01, dos seguintes números decimais:

1.º) 0,52; 2.º) 3,214; 3.º) 33,8; 4.º) 0,00 781

6. Extrair a raiz quadrada aproximada por falta, a *menos de* 0,001, das frações:

1.ª) $\frac{5}{9}$; 2.ª) $\frac{144}{166}$; 3.ª) $\frac{16}{3}$; 4.ª) $\frac{1}{8}$

7. O produto de dois números iguais é 973,44. Qual é o valor de cada um?
8. Qual é o número cujo quadrado é 0,012 544?
9. Qual é o número cujo quadrado aumentado de 199 dá 10 000?
10. O quadrado de um número diminuído de 161 resulta 17 000. Qual é êsse número?
11. A área de um quadrado é igual a 75,69m². Qual é o valor do seu lado (em m)?
12. Qual é o valor de x que verifica as igualdades:

1.ª) $x^2 = 144$; 2.ª) $x^2 = 184{,}96$; 3.ª) $3x^2 = 1\,323$

RESPOSTAS:

1.	1.º) 8	4.º) 49	7.º) 190	10.º) 999
	2.º) 17	5.º) 85	8.º) 297	11.º) 1 001
	3.º) 32	6.º) 108	9.º) 807	12.º) 2 222
2.	1.º) 10	4.º) 98	7.º) 404	10.º) 3 405
	2.º) 17	5.º) 127	8.º) 809	11.º) 2 021
	3.º) 79	6.º) 239	9.º) 880	12.º) 1 111
3.	1.º) 2,23	3.º) 14,79	5.º) 5,91	7.º) 1,14
	2.º) 3,31	4.º) 24,65	6.º) 12,92	
4.	1.ª) $\frac{6}{7}$;	2.ª) $\frac{1}{4}$;	3.ª) $\frac{5}{18}$;	4.ª) $\frac{1}{100}$
5.	1.º) 0,72;	2.º) 1,79;	3.º) 5,81;	4.º) 0,08
6.	1.ª) 0,745;	2.ª) 0,931;	3.ª) 2,309;	4.ª) 0,353

7. 31,2; 8. 0,12; 9. 99; 10. 131; 11. 8,7m

12. 1.ª) $x=12$ · 2.ª) $x=13{,}6$; 3.ª) $x=21$

IV) Aplicações com uso da Álgebra: Métodos aritmético e algébrico de resolução de problemas típicos. Jogos e recreações matemáticas

1. Preliminares. Não existem regras fixas para a resolução de problemas. Evidentemente, o trato aritmético de um problema exige raciocínios que a resolução algébrica do mesmo transfere para a mecanização de equações. Daí o fato da resolução aritmética de um problema, que possa ser resolvido com menos esfôrço mental por álgebra, ter poucos adeptos.

Embora seja oportuno ao professor normalista o uso para si da solução algébrica de um problema é imprescindível que êsse professor tenha os elementos necessários para dominar a solução aritmética do mesmo, pois, além da vantagem de apurar a inteligência, é esta a solução que será levada às crianças do curso primário no seu primeiro estágio em matemática. Convenhamos, outrossim, que a solução aritmética é mais pura, por ser despida de qualquer artificialismo, atingindo com precisão o intelecto em formação.

Exemplos:

PRIMEIRO PROBLEMA: *A soma das idades de um pai e de seu filho é igual a 45 anos. A idade do pai é quatro vêzes a idade do filho. Calcular a idade de cada um.*

Resolução algébrica

Primeiro modo: Usando *duas* incógnitas e *duas* equações.

incógnitas $\begin{cases} x, \text{ representa a idade do pai.} \\ y, \text{ representa a idade do filho.} \end{cases}$

sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas $\begin{cases} x + y = 45 \\ x = 4y \end{cases}$

Resolvendo o sistema (o melhor método para êsse exemplo é o da substituição), temos:

$4y+y=45$, donde $5y=45$ $\therefore$ $y=9$ e, portanto, $x=36$.

Logo: a idade do pai é 36 anos e a do filho 9 anos.

Segundo modo: Usando *uma* incógnita e *uma* equação.

incógnita $\begin{cases} x, \text{ representa a idade do pai } \therefore\ 45-x \text{ representa a idade do filho.} \end{cases}$

equação: $x = 4(45-x)$ (a idade do pai é quatro vêzes a do filho).

Resolvendo-a, vem

$x = 180 - 4x$

ou $5x = 180$ $\therefore$ $x = 36$ (representa a idade do pai),

e $45 - 36 = 9$ (representa a idade do filho).

Resolução aritmética

Raciocínio: Se a idade do pai é *quatro vêzes* a idade do filho a *soma* das duas idades representa, nesse instante, *cinco vêzes* a idade do filho. Como essa soma vale 45 anos, segue-se que a idade do filho será dada pela divisão $45 : 5 = 9$ (anos) e a do pai pelo produto $4 \times 9 = 36$ (anos).

Êste raciocínio pode ser auxiliado por *gráficos* que facilitam a compreensão dos alunos. Assim, temos:

|—| (representando a idade do pai)
|—|+|—|+|—|+|—| (representando a idade do filho)
|—|+|—|+|—|+|—|+|—| → 45 (soma das idades)

ou $45 : 5 = 9$ (idade do filho)

e $4 \times 9 = 36$ (idade do pai).

CRÍTICA:

Resolução algébrica. – 1.º modo: *pouco raciocínio e bastante trabalho mecânico* (resolução de um sistema de equações).

Resolução algébrica. – 2.º modo: *mais raciocínio e menos trabalho mecânico* (resolução de uma equação).

Resolução aritmética — *só raciocínio.*

Segundo problema: Diz um pastor: *se multiplico por 18 o número de minhas ovelhas obtenho para produto* $\frac{1}{3}$ *do quadrado do número delas. Quantas ovelhas tem o pastor?*

Resolução algébrica

Seja x o número de ovelhas. A equação resultante do problema será:

$$18x = \frac{1}{3}x^2$$

Resolvendo-a, vem

$$54x = x^2$$

ou

$$x^2 - 54x = 0 \qquad x' = 0 \quad x'' = 54.$$

Resposta: o pastor tem 54 ovelhas.

Resolução aritmética

Raciocínio: Se 18 vêzes o número de ovelhas dá $\frac{1}{3}$ do quadrado dêsse número, temos que 54 vêzes (3 vêzes mais) o número de ovelhas dará o quadrado *inteiro* do próprio número de ovelhas. Logo, o número de ovelhas é o próprio 54.

Terceiro problema: *Ao redor de uma praça de forma quadrada, de área igual a* 126 736m², *quer se plantar um certo número de árvores com a distância de* 2m *uma da outra e de modo que cada vértice do quadrado contenha uma árvore. Qual o número de árvores necessárias?*

Resolução algébrica

x, representa o número de árvores procuradas,
$2x$, representa o perímetro do quadrado,
$\frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$, representa o comprimento de cada lado,

A equação resultante será, pois:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 126\,736 \quad \text{(área do quadrado)}$$

cuja resolução, $\frac{x^2}{4} = 126\,736$

ou $x^2 = 506\,944 \therefore x = \sqrt{506\,944} = 712,$

dá o número de árvores (712).

Resolução aritmética

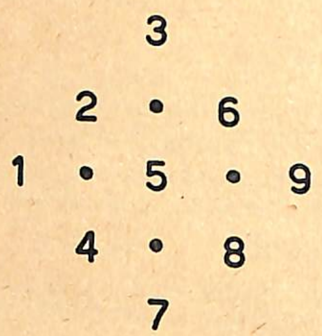
Raciocínio: Se 126 736m² é a área da praça de forma quadrada, o comprimento de seu lado será $\sqrt{126\,736\text{m}^2} = 356\text{m}$ e o perímetro: $4 \times 356\text{m} = 1\,424\text{m}$. O *número de árvores* plantadas com a distância de 2m deverá ser necessàriamente dado por $1\,424 : 2 = 712$.

Nota: Resolver, como aplicação dos métodos estudados, os problemas que figuram nos *Exercícios* sôbre os números inteiros e números fracionários, nos capítulos respectivos.

JOGOS E RECREAÇÕES MATEMÁTICAS (*)

1. Quadrados mágicos.

1.°) Dispor os números de 1 a 9 num quadrado de três filas e três colunas de modo que a soma dos números de qualquer fila, coluna ou diagonal, seja sempre 15.



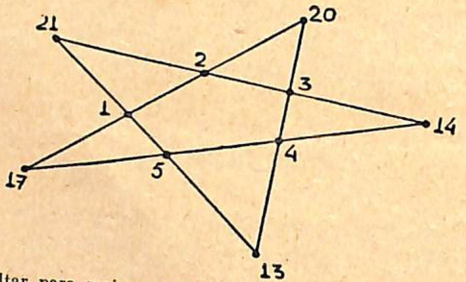
2	7	6
9	5	1
4	3	8

Para isso basta escrever os números na ordem abaixo, trazendo os números que estão fora do quadrado 2–6–8–4 no lugar ocupado pelos pontos, contando três casas.

2.°) Construir, da mesma forma, o quadrado mágico com os números 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19, tal que a soma dos números de qualquer linha (fila, coluna ou diagonal) seja 33.

2. Estrêla de 5 pontas.

A soma dos quatro números situados em linha reta é sempre a mesma (40).



(*) Consultar para maiores conhecimentos *Matematica Dilettevole e Curiosa* de I. Ghersi (Manual Hoepli).

3. Completamento de operações.

Completar a *soma*

```
 888
 ...
   8
   8
   8
1 000
```

a *subtração*

```
987654321
.........
123456789
```

4. Todos os números são iguais.

Demonstremos (por um instante, bem entendido) que 3 é "igual" a 7. Temos:

$$3 - 3 = 7 - 7 \quad \text{(ambas as diferenças são nulas)}$$

ou

$$3(1 - 1) = 7(1 - 1) \quad \text{(pondo 3 e 7 em evidência respectivamente).}$$

Dividindo, agora, ambos os membros da igualdade por $(1 - 1)$ (?), vem

$$3 = 7.$$

Por que êsse absurdo?

5. Como adivinhar a idade de uma pessoa.

Peça ao seu colega para fazer os seguintes cálculos sôbre o dia, mês e ano de seu nascimento:

1.°) multiplicar por 2 o número que indica o dia de seu nascimento;
2.°) somar 4 e multiplicar o resultado por 50;
3.°) somar o número que indica a ordem do mês que nasceu;
4.°) multiplicar por 100;
5.°) subtrair do resultado a idade que possuía um ano atrás e mande dizer o resultado. Então subtraia dêsse resultado 20 001 (ou 19 901 se a pessoa tiver nascida entre 1800 e 1899, e, junte o número formado pelos dois últimos algarismos do ano em que estamos. O número obtido dará, em pares de algarismos, da esquerda para a direita o *dia*, o *mês* e o *ano* do nascimento de seu colega. (Se por ex., fôr obtido o número 90 521 isto significa que o nascimento foi a 9 de maio de 1921).

6. Resultado curioso.

Peça a um colega para escolher três algarismos diferentes e formar com êles todos os números inteiros possíveis (que são 6). Em seguida mande somá-los e finalmente dividir a soma obtida pela soma dos valores absolutos dos três algarismos escolhidos. Pode depois dizer que o resultado é **222**. Por que?

7. Como adivinhar um número pensado por uma pessoa.

Peça a uma pessoa para pensar em um número qualquer. Mande multiplicá-lo por 3, somar a seu prazer um dos números 1, 2 ou 3; multiplicá-lo ainda por 3 e juntar depois o número pensado. Dividindo êsse resultado por 10 (que é o mesmo que suprimir do resultado a última cifra o resultado obtido é o número pensado pela pessoa. (É fácil justificar esta "adivinhação", desde que se substitua o número pensado por x e se efetuem as operações).

8. Problemas curiosos.

1.º) Carlos quer atravessar um rio levando um lobo, uma cabra e uma grande couve-flor. Sendo a barca muito pequena êsse transporte só pode ser feito com Carlos e uma daquelas unidades. Como deverá fazer para evitar que o lobo coma a cabra e esta a couve-flor? (Transporta-se a cabra, depois o lobo e traz-se a cabra; depois a couve-flor e, finalmente, a cabra).

2.º) Dois gatos comem dois ratos em dois minutos. Quantos gatos são necessários para comer 60 ratos em 30 minutos? (NOTA: mais que 3 e menos que 5...).

3.º) Uma corda tem 28m de comprimento. Cortando 2m por dia no fim de quantos dias se terminará de cortá-la? (NOTA: não são 14!)

4.º) Um tijolo pesa um quilo e mais meio tijolo. Quanto pesa tijolo e meio? (NOTA: 3 000g !).

5.º) Um árabe deixou 17 camelos aos seus três filhos de modo que ao primeiro deveria caber metade dêsse número, ao segundo, um têrço e ao terceiro, um nono. Quantos camelos coube a cada um? (NOTA: 9 ao 1.º, 6 ao 2.º e 2 ao 3.º).

V) Sistemas de medidas decimais e não decimais. Nomenclatura e notações oficiais

§ 1. Medida de grandezas.

1. Grandezas. Todos sabemos o que seja uma grandeza. Desde o curso primário estamos lidando com grandezas como, os comprimentos, as áreas, os volumes, um grupo de objetos, etc..

As grandezas de mesma espécie são chamadas *homogêneas* e as de espécies diferentes *heterogêneas*. Exemplos:

Dois *comprimentos* constituem grandezas homogêneas.

Um *comprimento* e uma *área* constituem grandezas heterogêneas.

Para se ter uma idéia precisa de uma dada grandeza costumamos compará-la com uma outra grandeza conhecida, *da mesma espécie*, denominada *unidade de medida*. Entre as unidades de medidas são escolhidas algumas como principais, das quais derivam outras maiores ou menores.

As unidades de medidas tomadas como principais são chamadas *unidades fundamentais* ou *padrões* e os seus múltiplos e submúltiplos são denominados *unidades secundárias* ou *derivadas*.

2. Medida de uma grandeza. *Medir* uma grandeza significa procurar *quantas vêzes* a unidade de medida escolhida como fundamental está contida na grandeza dada. Caso essa unidade não esteja contida exatamente na grandeza que se quer medir, a medida diz-se *aproximada*. A medição de uma grandeza pode ser *direta* ou *indireta*, conforme se compare a grandeza, que se quer medir, direta ou indiretamente com a grandeza escolhida como unidade.

3. Sistema de unidades de medir. O conjunto de unidades fundamentais e de suas unidades secundárias constitui um *sistema de unidades de medir*.

4. **Sistema métrico decimal.** Entre os sistemas de unidades de medir destaca-se, pela importância e facilidade de uso, o *sistema métrico decimal*, que tem para unidade fundamental de comprimento o *metro* e para unidades secundárias os múltiplos e submúltiplos do metro, em *relações decimais*.

Dêsse sistema, as unidades de superfície, volume e massa (pêso) estão em relações com o metro. Daí o seu uso quase universal, adotado, inicialmente na França, em 1799, e, no Brasil, a partir de 20 de junho de 1862 (*).

O sistema métrico decimal é o único legal e de uso obrigatório entre nós, devido aos graves inconvenientes decorrentes do uso dos velhos sistemas de medidas que escolhiam arbitràriamente os múltiplo e submúltiplos das unidades tomadas como fundamentais.

Escolhendo múltiplos e submúltiplos nas relações 10, 100, 1 000, etc. o sistema métrico decimal facilitou enormemente os cálculos que assim se enquadraram no mesmo critério decimal usado na própria representação dos números.

5. **Sistemas de medidas não decimais.** Quando num sistema de medir, a unidade fundamental e as unidades secundárias *não estão em relação decimal*, o sistema é denominado *não decimal* ou *complexo*.

Chama-se *número complexo* ao número que representa a medida de uma grandeza num sistema complexo.

Assim, por exemplo, o *sistema inglês de medidas é complexo*, pois, a relação entre a unidade fundamental de comprimento (jarda) e as unidades secundárias (pé, polegada, etc.) *não são decimais*. Nas *medidas de tempo*, a unidade fundamental, que é o *segundo*, e os seus múltiplos (minuto, hora, dia, etc.) constituem também um sistema complexo e os números que exprimem essas medidas são complexos.

§ 2. Nomenclatura e notações oficiais.

6. **Unidades legais de medida.** São consideradas legais, no Brasil, as unidades baseadas no sistema métrico decimal e nas resoluções das Conferências Gerais de Pesos e Medidas, reunidas por fôrça da Convenção Internacional do Metro, de 20 de maio de 1875, bem como as que se derivem das referidas

(*) *Legislação Metrológica* — I. P. T. — São Paulo!

unidades. Para as grandezas, adiante indicadas, são legais as seguintes unidades fundamentais:

COMPRIMENTO: o ***metro*** (m), que é o comprimento aproximadamente igual à fração $\frac{1}{10\,000\,000}$ da distância do equador ao polo;

MASSA: o ***quilograma*** (kg), que é a massa aproximada de um decímetro cúbico de água distilada;

TEMPO: o ***segundo*** (s), que é o intervalo de tempo igual à fração $\frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio.

As *definições legais* das unidades de medir, bem como as observações acêrca de seus múltiplos e submúltiplos usuais, constam do quadro seguinte (págs. 154 e 155), que faz parte do *Regulamento do sistema legal de unidades de medir* (Decreto n.° 4 257, de 16/6/39).

OBSERVAÇÕES:

1.ª) A primeira medida do comprimento do meridiano terrestre entre as cidades de Dunkerque e Barcelona foi efetuada pelos engenheiros franceses Méchain e Delambre. Êsse resultado dividido por 10 000 000 deu o comprimento padrão denominado *metro*. Todavia, refeitos os cálculos da medida do meridiano terrestre, pelos astrônomos Boit e Arago, foi encontrada uma pequena diferença em relação ao primeiro resultado enunciado, ou seja, a décima milionésima parte do quadrante terrestre era um *pouco maior* (cêrca de dois milésimos de milímetro) do metro determinado por Méchain e Delambre. Manteve-se, contudo, por conveniência, o primitivo padrão encontrado que, a partir dêsse instante, passou a ser uma *medida convencional*, e, cuja definição legal consta do quadro a seguir.

2.ª) Os países que adotaram obrigatòriamente o sistema métrico decimal são: Alemanha, Argentina, Afghanistan, Áustria, Brasil, Bélgica, Bolívia, Bulgaria, Chile, Colômbia, Congo Belga, Costa Rica, Cuba, Dinamarca, Equador, Espanha, França, Finlândia, Grécia, Guatemala, Haiti, Holanda, Honduras, Hungria, Itália, Iugoslávia, Islândia, Japão, Luxemburgo, Marrocos, México, Nicarágua, Noruega, Panamá, Peru, Pérsia, Portugal, Polônia, Rumânia, Salvador, Sião, Suécia, Suíça, Tchecoslováquia, Tunísia, Turquia, U.R.S.S. Uruguai, Venezuela.

GRANDEZA	UNIDADES — Nomes	UNIDADES — Definições	UNIDADES — Símbolos	OBSERVAÇÕES	MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS USUAIS — Nomes	MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS USUAIS — Símbolos	MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS USUAIS — Valores
COMPRIMENTO	METRO (*)	Distância, à temperatura de 0ºC, dos eixos dos dois traços médios, gravados sôbre a barra de platina iridiada depositada na Repartição Inteênacional de Pesos e Medidas e considerada como protótipo do metro pela 1.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, estando submetida à pressão atmosférica normale suportada por dois rolos com um diâmetro mínimo de 1 centímetro, situados simètricamente num mesmo plano horizontal e à distância de 571 milímetros um do outro	*m*	Seus múltiplos e submúltiplos decimais designam-se de acôrdo com o quadro se guinte, exceto o *mícron*. Para o decimilimícron podem-se usar a denominação "angström", e o símbolo especial *Å*, empregados de preferência nas medidas espectométricas. Nas medidas referentes à Navegação poderá ser utilizada a *milha marítima internacional*, considerada equivalente a 1852 metros. Poderão ser adotadas as denominações *milha marítima* ou simplesmente *milha*, quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.	quilômetro hectômetro decâmetro metro decímetro centímetro milímetro mícron milimícron decimilimícron micromícron milha marítima ou internacional	*km* *hm* *dam* *m* *dm* *cm* *mm* μ *m*μ $\mu\mu$ ou *Å* *M* ou′	1 000 m 100 m 1 m 0,1 m 0,1 m 0,01 m 0,001 m 0,000 001 m 0,000 000 001 m 0,000 000 000 1 m 0,000 000 000 001 m 1 852 m
ÁREA	metro quadrado	Área de um quadrado cujo lado tem o comprimento de um metro,	m^2	Outras unidades de área podem ser obtidas substituindo-se no nome, na definição e no símbolo acima mencionados, o metro por qualquer unidade legal de comprimento. Para o decâmetro quadrado podem-se usar a denominação *are* e o símbolo *a* quando utilizado nas medidas agrárias.	quilômetro quadrado hectômetro quadrado decâmetro quadrado metro quadrado decímetro quadrado centímetro quadrado milímetro quadrado hectare are centiare	km^2 hm^2 hm^2 m^2 dm^2 cm^2 mm^2 *ha* *a* *ca*	10 000 000 m² 10 000 m² 100 m² 1 m² 0,01 m² 0,000 1 m² 0,000 001 m² 10 000 m² 100 m² 1 m²
VOLUME	metro cúbico	Volume de um cubo cuja aresta tem o comprimento de um metro	m^3	Outras unidades de volume podem ser obtidas substituindo-se no nome, na definição e no símbolo acima mencionados, o metro por qualquer unidade legal de comprimento.	quilômetro cúbico metro cúbico decímetro cúbico centímetro cúbico milímetro cúbico	km^3 m^3 um^3 cm^3 mm^3	1 000 000 000 m³ 1 m³ 0,001 m³ 0,000 001 m³ 0,000 000 001 m³
	litro	Volume de 1 quilograma de água destilada e isenta de ar, a temperatura de 4ºC e sob a pressão atmosférica normal.		Unidade utilizável para medidas de capacidade, bem como para pedidas de volume de gases e líquidos, cereais e materiais pulverulentos ou granulosos. Seus múltiplos e submúltiplos decimais designam-se de acôrdo com o quadro seguinte. Para	hectolitro decalitro litro decilitro centilitro mililitro	*hl* *dal* *l* *dl* *cl* *ml*	100 *l* 10 *l* 1 *l* 0,1 *l* 0,01 *l* 0,001 *l*
				fins legais o litro pode ser considerado como eqüivalente a 1 decímetro cúbico. Para o metro cúbico podem-se usar a denominação *estéreo* e o símbolo *st*, quando utilizado nas medidas de volume aparente de lenha. Os múltiplos e submúltiplos decimais do estéreo designam-se de acôrdo com o quadro seguinte.	decastéreo estéreo decistéreo	*dast* *st* *dst*	10 m³ 1 m³ 0,1 m³
MASSA	quilograma	Massa do protótipo internacional do quilograma de platina iridiada que foi sancionado pela 1.ª Conferência Geral de Pesos e Medidas e que se acha depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas.	*kg*	Seus múltiplos e submúltiplos decimais designam-se de acôrdo com o quadro seguinte, tomando-se como base para formação dos múltiplos e submúltiplos o *grama* que é igual à fração 0,001 da massa do protótipo internacional do quilograma. A massa de 2 decigramas pode ser denominada *quilate* quando utilizada nas medidas relativas a pedras preciosas e metais preciosos.	tonelada quilograma hectograma decagrama grama decigrama centigrama miligrama quilate	*t* *kg* *hg* *dag* *g* *dg* *cg.* *mg*	1 000 000 g 1 000 g 100 g 10 g 1 g 0,1 g 0,01 g 0,001 g 0,2 g
TEMPO	segundo	Intervalo de tempo igual à fração $\frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio, definido de acôrdo com as convenções de Astronomia.	*s* ou *seg*	Seus múltiplos e submúltiplos decimais não têm designação própria. Os símbolos *s*, *d* e *m*, serão usados quando não possa haver dúvidas quanto ao seu significado. Serão admitidas também as unidades de tempo estabelecidas pelas convenções usuais do calendário civil e da Astronomia.	dia hora minuto segundo	*d* ou *da* *h* *m* ou *min* *s* ou *seg*	86 400 s 3 500 s 60 s 1 s
ÂNGULO PLANO	ângulo reto	Qualquer dos menores ângulos determinados por duas retas concorrentes que formam entre si ângulos adjacentes iguais.	*r*	Seus múltiplos e submúltiplos decimais não têm designação própria, exceto o *grado*. Os múltiplos e submúltiplos decimais do grado designam-se de acôrdo com o quadro seguinte. O símbolo *g* será usado quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.	ângulo reto grado decigrado centigrado miligrado	*r* *g* ou *gr* *dgr* *cgr* *mgr*	1 r 0,01 *r* 0,001 *r* 0,000 1 r 0,000 01 *r*
	grau sexagesimal ou grau	Ângulo eqüivalente a $\frac{1}{90}$ de 1 ângulo reto.	°	Seus múltiplos e submúltiplos decimais não têm designação própria. As denominações *grau*, *minuto* e *segundo* podem ser usadas quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.	grau sexagesimal ou grau minuto de ângulo ou minuto segundo de ângulo ou segundo	° ′ ″	$\frac{1}{90}$ r $\frac{1°}{60}$ $\frac{1'}{60}$

(*) É visível a dificuldade encontrada pelos alunos na definição legal do metro, pois, nessa definição faz-se alusão a uma distância entre os rolos suportes de 571 milímetros ou seja 571 milésimos do *metro*, que é precisamente a medida que se quer definir. Também na referência à pressão atmosférica normal, que corresponde à pressão exercida por uma coluna de mercúrio de 760 milímetros de altura a 0ºC, já se pressupõe conhecido o metro.
A mesma crítica pode ser feita com relação à definição legal do quilograma.

VI) Noções de aritmética comercial

§ 1. Grandezas proporcionais. Regras de três. Aplicações.

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

1. **Grandezas diretamente proporcionais.** ***Propriedade característica.*** Duas grandezas variáveis (*) dizem-se *diretamente proporcionais* ou simplesmente *proporcionais* quando *aumentando* (ou diminuindo) uma delas de *duas, três, quatro,* etc. ... vêzes o seu valor, a outra *também aumenta* (ou diminui) de *duas, três, quatro,* etc. ... vêzes o respectivo valor. Exemplo:

Consideremos as grandezas variáveis:

	Comprimento de uma fazenda		*Quantia em dinheiro*
Se	**3m**	custam	***Cr$* 18,00**
temos que	**6m**	custarão	***Cr$* 36,00**
e	**9m**	custarão	***Cr$* 54,00**

Logo, quando o comprimento da fazenda torna-se duplo, triplo, etc. ... o *mesmo acontece* com o respectivo custo é as duas grandezas *comprimento da fazenda* e *quantia de dinheiro* são *diretamente proporcionais.*

A propriedade que caracteriza a existência de grandezas diretamente proporcionais é a seguinte:

> **Em duas grandezas diretamente proporcionais a razão entre dois valores de uma delas é igual à razão entre os dois valores correspondentes da outra.**

(*) *Grandeza variável* é aquela que pode assumir infinitos valores.

Assim, no exemplo citado, temos:

$$\downarrow \frac{3}{6} = \frac{18}{36} \downarrow \quad \text{e} \quad \downarrow \frac{6}{9} = \frac{36}{54} \downarrow$$

indicando as flechas do mesmo sentido, que as razões resultaram de grandezas diretamente proporcionais.

2. **Grandezas inversamente proporcionais.** ***Propriedades caraterísticas.*** Duas grandezas variáveis, dizem-se *inversamente proporcionais* quando *aumentando* (ou diminuindo) uma delas de *duas, três, quatro,* etc. ... vêzes o seu valor, a outra *diminui* (ou aumenta) de *duas, três, quatro,* etc. ... vêzes o respectivo valor. Exemplo:

Sejam as grandezas variáveis:

	Número de operários		*Tempo*
Se	**5 *operários***	fazem um certo trabalho em	**12 *dias*,**
temos que,	**10 *operários***	farão o mesmo trabalho em	**6 *dias*,**
e	**15 *operários***	farão o mesmo trabalho em	**4 *dias*.**

Logo, quando o *número de operários* torna-se *duplo, triplo,* etc. ..., o *tempo* empregado para realizar o mesmo trabalho, torna-se a *metade,* um *têrço,* etc. ... e as duas grandezas são *inversamente proporcionais.*

A propriedade que caracteriza a existência de grandezas inversamente proporcionais é a seguinte:

> **Em duas grandezas inversamente proporcionais a razão entre dois valores de uma delas é igual ao inverso da razão entre os dois valores correspondentes da outra.**

Assim, no exemplo considerado, temos:

$$\downarrow \frac{5}{10} = \frac{6}{12} \uparrow \quad \text{e} \quad \downarrow \frac{10}{15} = \frac{4}{6} \uparrow,$$

tendo agora as flechas, sentido contrário.

Observação. Para a caracterização da proporcionalidade de duas grandezas não basta verificar se o aumento de uma delas acarreta o aumento da outra. É necessário que duplicando o valor de uma delas, por exemplo, o valor correspondente da outra também duplique.

Assim: o *lado de um quadrado* e a sua *área* não são grandezas proporcionais, pois, quando o lado *duplica* de valor a área *quadruplica*; a *aresta de um cubo* e o seu volume, também não são grandezas proporcionais, pois, se a aresta *duplica*, o volume do cubo torna-se *oito vêzes maior.*

3. Grandezas proporcionais a várias outras. *Propriedade característica.* Diz-se que uma grandeza variável é *proporcional a várias outras*, se é diretamente ou inversamente proporcional a cada uma delas, *quando as demais não variam.* Exemplos:

1.º) A *área de um retângulo* é diretamente proporcional tanto à *base* como à *altura* dêste retângulo.

De fato, seja o retângulo: base = 4cm, altura = 3cm e área = $12cm^2$.

Duplicando a base, conservada a *altura fixa*, a *área também duplicará*, pois, agora temos: base = 8cm, altura = 3cm e área = $24cm^2$.

2.º) O *tempo* empregado para se efetuar a escavação de um buraco é diretamente proporcional ao *volume de terra extraída* e inversamente proporcional ao *número de homens* empregados.

De fato, basta observar que:

se	4 homens em 12 dias extraem	$100m^3$ de terra,
temos que	8 homens em 6 dias extrairão	$100m^3$ de terra,
e	8 homens em 12 dias extrairão	$200m^3$ de terra,

isto é, não variando, nas duas primeiras linhas, a grandeza *volume* ($100m^3$), as grandezas *número de homens* e *tempo* são *inversamente proporcionais* e não variando, na terceira linha, a grandeza *número de homens* (8), as grandezas *tempo* e *volume* são *diretamente proporcionais.*

A propriedade que caracteriza a existência de uma grandeza diretamente proporcional a várias outras é a seguinte:

> **Se uma grandeza é diretamente proporcional a várias outras os valores que exprimem sua medida são diretamente proporcionais aos produtos dos valores correspondentes das outras.**

No caso das grandezas serem inversamente proporcionais a mesma propriedade, será aplicada em relação aos *inversos* dos valores correspondentes às medidas das outras.

REGRAS DE TRÊS

4. Regra de três simples. Chama-se *regra de três simples* ao processo de cálculo mediante o qual são resolvidos problemas que envolvem *duas grandezas direta ou inversamente proporcionais.* Conhecidos *um par de valores correspondentes* das duas grandezas, procura-se *um segundo valor de uma delas* que corresponda a um segundo valor assinalado a outra.

Se as grandezas são diretamente proporcionais a regra de três diz-se *direta.* Sendo as grandezas inversamente proporcionais a regra de três é denominada *inversa.*

5. Resolução de problemas de regra de três simples. Temos dois métodos:

1.º) das proporções;

2.º) da redução à unidade.

Método das proporções. Consiste em obter com os três dados e a incógnita procurada uma *proporção* e dela tirar o valor desejado. Exemplos:

1. Se 15m de certa fazenda custam Cr$ 90,00, quanto custarão 32m dessa fazenda?

Indicando por x o preço dos 32m de fazenda, temos a seguinte *disposição prática*:

$$\begin{array}{c|lcr|c} \downarrow & 15m & \text{———} & 90{,}00 & \downarrow \\ & 32m & \text{———} & x & \end{array}$$

Como nesse exemplo as grandezas *comprimento de fazenda* e *quantia em dinheiro* são diretamente proporcionais, assinalamos essa variação na disposição prática mediante flechas no *mesmo sentido.*

A proporção resultante é:

$$\frac{15}{32} = \frac{90}{x},$$

donde,

$$x = \frac{32 \times 90}{15} = 192.$$

Logo, os 32m de fazenda custarão Cr$ 192,00.

2. Se 6 operários levam 10 dias para levantar um muro ao redor de um campo de futebol, quantos operários seriam necessários para levantar o mesmo muro em 3 dias?

Como o *tempo* necessário para efetuar uma obra é *inversamente proporcional* ao *número de operários* empregados, temos a seguinte disposição prática, agora assinalada com flechas de *sentidos contrários:*

$$\begin{array}{lcr} \downarrow\ 6 \text{ op.} & \text{———————} & 10 \text{ dias}\ \uparrow \\ \ x & \text{———————} & 3 \text{ dias} \end{array}$$

Invertendo a segunda razão $\left(\frac{10}{3}\right)$, resultará a seguinte proporção

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{10},$$

onde,

$$x = \frac{6 \times 10}{3} = 20.$$

Portanto, são necessários 20 operários para levantar o muro em 3 dias.

Método de redução à unidade. Neste método reduz-se o valor conhecido de uma grandeza à *unidade*, e, a seguir, da unidade determina-se o *valor procurado* da grandeza. Resolvamos, como exemplos, os dois problemas anteriores por êste método:

1. Se 15m de certa fazenda custam Cr$ 90,00, quanto custarão 32m desta fazenda?

Temos o seguinte raciocínio:

Se 15m custam.................... 90,00

$\boxed{\text{1m}}$ custará 15 *vêzes menos*, ou $\frac{90,00}{15} = 6,00$

e 32m custarão 32 *vêzes mais*, ou . $32,00 \times 6,00 = 192,00.$

2. Se 6 operários levam 10 dias para levantar um muro ao redor de um campo de futebol, quantos operários seriam necessários para levantar o mesmo muro em 3 dias?

Temos:

Se o muro é levantado

em 10 dias por................................. 6 op.

em $\boxed{\text{1 dia}}$ será por um n.º de op. 10 *vêzes maior*, ou 10×6 op. $= 60$ op.

e em 3 dias será por um n.º de op. 3 *vêzes menor*, ou $\frac{60 \text{ op.}}{3} = 20$ op.

6. Regra de três composta. Enquadram-se sob êste nome os problemas que envolvem *mais de duas grandezas variáveis.* A grandeza cujo valor é procurado pode ser diretamente ou inversamente proporcional a tôdas as outras ou ainda diretamente proporcional a umas e inversamente proporcional a outras.

7. Resolução de problemas de regra de três composta. Usam-se os métodos já estudados na regra de três simples: o das proporções e o da redução à unidade.

Método das proporções. Exemplo:

Em 6 dias de trabalho aprontam-se 720 uniformes escolares fazendo funcionar 16 máquinas de costura. Em quantos dias se podem aprontar 2 160 uniformes escolares, fazendo funcionar sòmente 12 máquinas iguais às primeiras?

Temos a seguinte disposição prática:

$$\begin{array}{lll} 6 \text{ dias} & 720 \text{ unif.} & 16 \text{ máq.} \\ x & 2\,160 & 12\,. \end{array}$$

Fixando a 3.ª grandeza (*n.º de máquinas*), vemos que a 1.ª grandeza (*n.º de dias*) e a 2.ª (*n.º de uniformes*) são *diretamente proporcionais*, pois, *duplicando* o valor de uma delas *duplicará* também o valor da outra. Fixando, agora, a 2.ª grandeza, observamos que a 1.ª e a 3.ª são *inversamente proporcionais*, pois, *duplicando* o número de máquinas, o número de dias (tempo) empregado para fazer a mesma quantidade de uniformes reduz-se *à metade.*

Assim sendo, a disposição prática passará a ser:

$$\begin{array}{llll} \downarrow\ 6 & \downarrow\ 720 & \uparrow\ 16 \\ \ x & \ 2\,160 & \ 12 \end{array}$$

ou, invertendo os correspondentes valores da 3.ª grandeza:

$$\begin{array}{lll} 6 & 720 & 12 \\ x & 2\,160 & 16\,. \end{array}$$

Lembrando a propriedade que caracteriza a existência de uma grandeza diretamente proporcional a várias outras (os valores que exprimem sua medida são diretamente proporcionais aos *produtos* dos valores correspondentes das outras), vem:

$$\begin{array}{ll} 6 & 720 \times 12 \\ x & 2\,160 \times 16\,. \end{array}$$

Construindo a respectiva proporção, temos:

$$\frac{6}{x} = \frac{720 \times 12}{2\,160 \times 16},$$

ou,

$$x = \frac{6 \times 2160 \times 16}{720 \times 12} = 24\,.$$

Logo, serão necessários 24 dias para se aprontarem 2 160 uniformes, fazendo funcionar 12 máquinas.

Método de redução à unidade. (O mesmo exemplo).

Se com 16 máqs. se fazem 720 unifs. em 6 dias,

com 1 máq. se fazem 720 unifs. em 6×16 dias,

e, com $\boxed{\text{1 máq.}}$ se faz $\boxed{\text{1 unif.}}$ em $\dfrac{6 \times 16}{720}$ dias.

Logo, 12 máqs. farão 1 unif. em $\dfrac{6 \times 16}{12 \times 720}$ dias,

e, 12 máqs. farão 2 160 unifs. em $\dfrac{2\,160 \times 6 \times 16}{12 \times 720} = 24$ *dias*.

Observação. Na resolução de problemas de regra de três composta, em qualquer dos dois métodos, pode-se usar a seguinte *regra prática*:

a) colocam-se na disposição prática, já conhecida, as diversas grandezas que figuram no problema;

b) invertem-se as posições dos dois valores correspondentes das diversas grandezas que são inversamente proporcionais (16 e 12 foram os valores trocados no exemplo dado), em relação à grandeza, cuja variação incógnita x se procura;

c) o valor de x é dado pela fração que tem para *numerador* os seguintes valores da disposição prática: o oposto a x (6 no exemplo) e os pertencentes à mesma linha de x (2 160 e 12 no exemplo) e para *denominador* o produto dos valores pertencentes à outra linha (720 e 12 no exemplo).

Assim, no exemplo já estudado, temos com a aplicação da *regra prática:*

a)
$$\begin{array}{c|l|l} \downarrow\ 6d & 720 \text{ unif.} & \uparrow\ 16 \text{ máq.} \\ x & \downarrow\ 2\,160 & 12 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccc} 6 & 720 & 12 \\ x & 2\,160 & 16 \end{array}$$

c) $$x = \frac{6 \times 2160 \times 16}{720 \times 12} = 24 \text{ (dias)}.$$

Outros exemplos:

1. Foram empregados 24kg de fio para tecer 120m de fazenda de 0,82m de largura. Quantos metros de fazenda de 1,23m de largura serão tecidos com 30kg do mesmo fio?

a)
$$\begin{array}{c|c|c} 24\text{kg} & \downarrow\ 120\text{m} & \uparrow\ 0{,}82\text{m} \\ \downarrow\ 30 & x & 1{,}23 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccc} 24 & 120 & 1{,}23 \\ 30 & x & 0{,}82 \end{array}$$

c) $$x = \frac{120 \times 30 \times 0{,}82}{24 \times 1{,}23} = 100.$$

Resposta: 100m.

2. Quantos dias levarão 18 operários, que trabalham 7 horas por dia, para construir um canal de 42m de comprimento, 5m de largura e 2m de profundidade, num certo terreno A, sabendo-se que 10 operários trabalhando 9 horas por dia, levaram 21 dias para construir um canal de 15m de comprimento, 3m de largura e 4m de profundidade, num terreno que apresentou *metade* das dificuldades das que estão sendo apresentadas pelo terreno A?

a)
$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \downarrow\ x \text{ dias} & \uparrow\ 18 \text{ Op.} & \uparrow\ 7\text{h/d} & 42\text{m} \times 5\text{m} \times 2\text{m} & 1 \text{ dificuld.} \\ 21 & 10 & 9 & \downarrow\ 15\text{m} \times 3\text{m} \times 4\text{m} & \downarrow\ \frac{1}{2} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} x & 10 & 9 & 420 & 1 \\ 21 & 18 & 7 & 180 & \frac{1}{2} \end{array}$$

c) $$x = \frac{21 \times 10 \times 9 \times 420 \times 1}{18 \times 7 \times 180 \times \frac{1}{2}} = 70.$$

Resposta: 70 dias.

EXERCÍCIOS

Grandezas proporcionais :

1. A *soma* de dois números é diretamente proporcional a cada uma das parcelas?
2. Verificar se a *diferença* entre dois números é inversamente proporcional ao subtraendo.
3. Como é o *produto* de dois números em relação a cada um de seus fatôres? E o *quociente* em relação ao divisor?
4. Como é a variação de uma *fração* em relação ao seu numerador, e ao seu denominador?
5. Como são as grandezas variáveis: *velocidade* de um automóvel e *tempo* necessário para percorrer a via Presidente Dutra (S. Paulo-Rio de Janeiro)?
6. Exprimir, em símbolos, que a *densidade* de um corpo é diretamente proporcional à sua massa e inversamente proporcional ao seu volume.

Regra de três simples :

7. Se 4kg de uma certa substância custam Cr$ 72,00, quanto custarão 5,5kg desta substância?
8. Se um corte de 2,80m de casimira custa Cr$ 840,00, quanto custará 20,50m desta casimira?
9. Cem quilogramas de trigo fornecem 85 de farinha. Que quantidade de farinha se obterá com 150 sacas de trigo de 75 quilogramas cada uma?
10. Se 14 pedreiros levam 180 dias para construir uma casa, quanto tempo levarão para fazê-la 10 pedreiros?
11. Um automóvel percorre 240km em 3 horas. Quanto tempo levará para percorrer 400km?
12. Um trem, com a velocidade de 60km/h, faz o percurso entre as cidades A e B, em 2 horas. Quanto tempo levará o trem para fazer êste mesmo percurso se a sua velocidade passa a ser de 80km/h?
13. Uma roda dá 2 376 voltas em 9 minutos. Quantas voltas dará em 1h 27min?
14. Duas rodas dentadas que estão engrenadas uma na outra têm, respectivamente, 12 e 54 dentes. Quantas voltas dará a menor enquanto a maior dá 8?
15. Calcular a altura de um edifício que projeta uma sombra de 19,60m no mesmo instante em que um bambu, de 3,8m, plantado verticalmente, projeta uma sombra de 4,9m?
16. Se um relógio adianta 18 minutos em 1 dia, quanto adiantará em $6\frac{3}{4}$ horas?
17. De duas fontes, a primeira jorra 18*l* por hora e a segunda 80*l*. Qual é o tempo necessário para esta última jorrar a mesma quantidade de água que a primeira jorra em 25 minutos?

18. Num acampamento 30 homens dispõem de víveres para 2 mêses. Tendo chegado ao acampamento mais 90 homens, pergunta-se por quanto tempo o acampamento disporá de víveres?
19. Um avião comercial, com a velocidade de 450km por hora, efetua a viagem entre São Paulo e Pôrto Alegre em 2h. Em quanto tempo, um avião a jacto, de velocidade igual a 1 200km por hora, faria a mesma viagem?
20. Um negociante pagou Cr$ 330,00 por uma peça de fazenda e Cr$ 264,00 por outra de mesma qualidade. Qual é o comprimento de cada uma das peças se a primeira tem 12m mais que a segunda?

Regra de três composta :

21. Num internato, 35 alunos gastam Cr$ 1 540,00 pelas refeições de 22 dias. Quanto gastariam 100 alunos pelas refeições de 83 dias neste internato?
22. Empregaram-se 27,4kg de lã para tecer 24m de fazenda de 60cm de largura. Qual será o comprimento da fazenda que se poderia tecer com 3,425 toneladas de lã para se obter uma largura de 0,90m?
23. Os 2/5 de um trabalho foram feitos em 10 dias por 24 operários, que trabalharam 7 horas por dia. Em quantos dias se poderá terminar êsse trabalho, sabendo que foram licenciados 4 operários e que se trabalha agora 6 horas por dia? (Nota: lembrar que faltam 3/5 do trabalho).
24. Se com 36kg de fio foram tecidos 126m de fazenda de 0,60m de largura, pergunta-se, quantos metros de fazenda de 0,72m de largura se podem tecer com 48kg do mesmo fio?
25. Uma adega de vinho abastece 24 homens por um mês dando a cada um dêles 3/5 de litro por dia. Se os homens ficassem reduzidos a 20 e se cada um dêles recebesse 3/4 de litro, quantos dias a adega poderia abastecer êstes homens? (Nota: lembrar que 3/5 é menor que 3/4).
26. Um automobilista percorre certa distância em 2d 22h caminhando 10 horas por dia. Aumentando a velocidade de seu automóvel em 2/5, quantas horas diárias deverá fazer para percorrer a mesma distância sòmente em 2d 2h? (Nota: a nova velocidade será representada por 7/5 (5/5 + 2/5).
27. Uma equipe de mineiros composta de 15 homens extraiu, em 30 dias, 3,5 toneladas de carvão. Se esta equipe fôr aumentada para 20 homens, em quanto tempo será extraída a mesma quantidade de carvão?
28. Dois cavalos, cujos valores têm sido apreciados como diretamente proporcionais às suas fôrças e inversamente proporcionais às suas idades, têm: o primeiro 3a 9me e o segundo 5a 4me, sendo que suas fôrças estão entre si (1.º para o 2.º), assim como 3 está para 4. Se o primeiro foi vendido por Cr$ 2 400,00, qual deve ser o preço de venda do segundo?
29. Um andarilho percorre certa distância em 2d 8h, andando 10 horas por dia. Aumentando a sua velocidade em 2/5, pergunta-se, quantas horas diárias deve andar para vencer a mesma distância em 2d?
30. Para alimentar 15 cavalos durante 11 dias são necessários 2 200kg de alfafa. Retirando-se 7 cavalos, em quanto tempo serão consumidos 1 280kg de alfafa?

31. Se 8 homens recebem £-11, por 5 dias de trabalho de 9h diárias, quantas horas diárias deverão trabalhar 5 homens para ganhar £-13-15 em 9 dias?

32. Se três homens podem arar um campo de 8ha em 5 dias, trabalhando 8 horas diárias, em quantos dias 8 homens poderão arar 192ha trabalhando 12 horas diárias?

33. Com 16 máquinas de costura aprontaram-se 720 uniformes em 6 dias de trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para confeccionarem 2 160 uniformes em 24 dias?

34. Se 54 operários trabalhando 5 horas por dia levaram 45 dias para construir uma praça de forma retangular de 225m de comprimento por 150m de largura, quantos operários serão necessários para construir em 18 dias, trabalhando 12 horas por dia, outra praça retangular de 195m de comprimento por 120m de largura?

35. Para construir um canal de 104m de comprimento por 5m de profundidade e 7m de largura, 100 operários, trabalhando 7 horas por dia, levaram 2 mêses e meio. Aumentando de 40 o número de operários e fazendo-os trabalhar 10 horas por dia, pergunta-se: em quanto tempo os operários construiriam um segundo canal, com o mesmo comprimento do primeiro, porém de profundidade e largura duplas das do primeiro?

36. Se com 1 000m³ de água se rega um campo de 450 hectares durante 20 dias, qual é a quantidade de água necessária para se regar outro campo de 200 hectares, durante 30 dias?

37. Para o piso de uma sala empregaram-se 750 tacos de madeira de 45cm de comprimento por 8cm de largura. Quantos tacos de 40cm de comprimento por 7,5cm de largura são necessários para um piso cuja superfície é dupla da anterior?

38. Se 10 operários, trabalhando 8 horas diárias, levantam em $5\frac{1}{2}$ dias uma parede de 22m de comprimento por 0,45m de espessura, em quanto tempo 16 operários, trabalhando também 8 horas por dia, levantam outra parede de 18m de comprimento, 0,30m de espessura e de altura duas vêzes maior que a primeira?

39. Um bloco de mármore de 3m de comprimento, 1,50m de largura e 0,60 de altura pesa 4 350kg. Quanto pesará um outro bloco do mesmo mármore cujas dimensões são: comprimento 2,20m, largura 0,75m e altura 1,20m?

40. Para a construção de um atêrro 18 operários trabalhando 10 horas por dia, durante 6 dias, conduziram 1 680m³ de terra a 30 metros de distância. Qual o volume de terra que seria transportado a 35m de distância, se êstes operários trabalhassem 11 dias de 12 horas de trabalho?

RESPOSTAS:

1. Não (duplicando só uma parcela não duplica a soma).
2. Não é.
3. O produto é diretamente proporcional aos fatôres e o quociente inversamente proporcional ao divisor.

4. Diretamente proporcional em relação ao numerador e inversamente proporcional em relação ao denominador.
5. Inversamente proporcionais.
6. $d = \frac{m}{v}$.
7. Cr$ 99,00.
8. Cr$ 6 150,00.
9. 9 562,5kg.
10. 252 dias.
11. 5h.
12. 1h 30m.
13. 22 968 voltas.
14. 36.
15. 15,20m.
16. 5,062 5min.
17. 5min 37,5seg.
18. 15 dias.
19. 45 min.
20. 60m e 48m.
21. Cr$ 16 600,00.
22. 2 000m.
23. 21 dias.
24. 140m.
25. 20 dias.
26. 10 horas.
27. $22\frac{1}{2}$ dias.
28. Cr$ 2 250,00.
29. 8h 20m.
30. 12 dias.
31. 10 horas.
32. 30 dias.
33. 12.
34. 39 op.
35. 5 mêses.
36. 666,666m³.
37. 1 800.
38. $3\frac{3}{4}$d = 3d 18h
39. 3 190kg.
40. 3 168m³.

§ 2. Porcentagem. Taxa milesimal. Juros simples. Desconto. Moeda e Câmbio.

8. Cálculos por cento e por mil. Os *descontos* que geralmente são concedidos nas compras e nos pagamentos assim como os *confrontos* de um conjunto de unidades com um conjunto maior de unidades, da mesma espécie, são calculados, comumente, tomando por *base* os fatôres 100 e 1 000 sob os nomes de ***tanto por cento*** (ou *porcentagem*) e ***tanto por mil***.

O valor que se toma em cada 100 unidades é chamado *taxa centesimal* e o valor que se toma em cada 1 000 unidades, *taxa milesimal*. Exemplos:

1. *Taxa de* 5 *por cento* significa que para cada 100 unidades se calculam 5. Indicação: 5 %.
2. *Taxa de* 12 *por mil* significa que para cada 1 000 unidades se calculam 12. Indicação: 12‰.

Usando os seguintes símbolos:

i para *taxa*;

C para o número que se opera, também denominado *principal*;

p para indicar *tanto por cento* ou *porcentagem*;

P para indicar *tanto por mil*;

já consagrados nesses problemas, que ***são de regra de três***, podemos estabelecer certas fórmulas para facilidade do cálculo. Assim, empregando o raciocínio já conhecido, temos:

se a 100 corresponde i ou $\begin{array}{c|c} 100 & i \\ \downarrow C & \downarrow p \end{array}$
a C corresponderá p

Armando a proporção:

$$\frac{100}{C} = \frac{i}{p}$$

e tirando os valores, respectivamente, de p, i e C, vem as *fórmulas*:

$$\boxed{p = \frac{C \times i}{100}} \text{ (dá a } \textit{porcentagem}) \qquad \boxed{i = \frac{100 \times p}{C}} \text{ (dá a } \textit{taxa}) \qquad \boxed{C = \frac{100 \times p}{i}} \text{ (dá o } \textit{capital})$$

Da mesma forma:

se a 1 000 corresponde i ou $\begin{array}{c|c} 1\,000 & i \\ \downarrow C & \downarrow P \end{array}$
a C corresponderá P

donde:

$$\frac{1\,000}{C} = \frac{i}{P}$$

e as fórmulas:

$$\boxed{P = \frac{C \times i}{1\,000}} \text{ (dá } \textit{tanto por mil}) \qquad \boxed{i = \frac{1000 \times P}{C}} \text{ (dá a } \textit{taxa}) \qquad \boxed{C = \frac{1000 \times P}{i}} \text{ (dá o } \textit{capital})$$

Aplicações.

1.ª) Calcular 5% de Cr\$ 720,00.

Aplicando a fórmula: $p = \frac{C \times i}{100}$ onde $\begin{cases} C = 720,00 \\ i = 5 \end{cases}$

temos:
$$p = \frac{720,00 \times 5}{100} = 36,00.$$

Logo, 5% de Cr\$ 720,00 são Cr\$ 36,00.

2.ª) Sabendo-se que 2‰ da população de uma cidade de 120 000 habitantes são paraquedistas, pede-se o número de paraquedistas dessa cidade.

Aplicando a fórmula: $P = \frac{C \times i}{1\,000}$ onde $\begin{cases} C = 120\,000 \\ i = 2 \end{cases}$

temos:
$$P = \frac{120\,000 \times 2}{1\,000} = 240.$$

Logo, nessa cidade existem 240 paraquedistas.

3.ª) Em um negócio de Cr\$ 48 000,00 perdeu-se a importância de Cr\$ 2 400,00. Determinar a *taxa por cento* (porcentagem) da perda.

De $i = \frac{100 \times p}{C}$, temos: $i = \frac{100 \times 2\,400,00}{48\,000,00} = 5.$

Portanto, a perda foi de 5%.

4.ª) Numa forma houve um lucro de Cr\$ 36 000,00 à taxa de 6%. Determinar o capital inicial (principal).

De $C = \frac{100 \times p}{i}$, temos: $C = \frac{100 \times 36\,000,00}{6} = 600\,000,00.$

Portanto, o capital inicial foi de Cr\$ 600 000,00.

9. Juros simples. Chama-se *juro* ou *interêsse* a compensação, em dinheiro, que se recebe emprestando uma certa quantia por um determinado tempo. O *juro* (j) é diretamente proporcional à quantia emprestada, que se denomina *capital* (c), ao *tempo* (t) de duração do empréstimo e é estabelecido sob a forma de *porcentagem* (i) por um ano. Assim, a taxa de 5% ao ano significa que o capital 100 produz 5 em um ano. Exemplo:

A importância de Cr\$ 100,00 com a taxa de 5% produzirá Cr\$ 5,00 em um ano.

A época em que finda a duração do empréstimo é denominada *vencimento*.

Chama-se *montante* ou *capital acumulado* a soma de um certo capital com os próprios juros.

O juro é *simples* quando não é somado ao capital para o cálculo de novos juros nos tempos seguintes. Caso contrário, diz-se *juro composto*. Estudaremos em nosso curso, sòmente o juro simples.

10. Fórmulas sôbre juros simples. Sejam:

c — ***capital***
i — ***taxa*** por ano
t — ***tempo*** expresso em anos
j — ***juro simples*** produzido.

O cálculo dos juros simples reduz-se a um problema de *regra de três composta*, pois, se:

o capital 100 em 1 ano produz i
o capital c em t anos produzirá j

ou

$$\begin{array}{ccc} 100 & 1 & i \\ \downarrow c & \downarrow t & \downarrow j \end{array}$$

Armando a proporção:

$$\frac{i}{j} = \frac{100 \times 1}{c \times t},$$

tiramos o valor de j para a obtenção da *fórmula do juro*, isto é:

$$\boxed{j = \frac{c \times i \times t}{100} = \frac{cit}{100}}$$

Desta fórmula podemos tirar os valores de c, i, t, pois, escrita sob a forma:

$$cit = 100j$$

encontramos fàcilmente:

$$\boxed{c = \frac{100j}{it}} \text{ (dá o } \textit{capital}) \qquad \boxed{i = \frac{100j}{ct}} \text{ (dá a } \textit{taxa}) \qquad \boxed{t = \frac{100j}{ci}} \text{ (dá o } \textit{tempo})$$

Observação. No emprêgo das fórmulas deve-se sempre referir i e t à mesma unidade, isto é, a taxa sendo ao *ano*, ao *mês* ou ao *dia*, o tempo deve ser reduzido, respectivamente, a *ano*, a *mês* ou a *dia*. Para facilidade do cálculo prefere-se, às vêzes, o emprêgo das fórmulas de juros já tendo i e t reduzidos à mesma unidade.

Assim, se m designa o tempo em mêses e d em dias, as fórmulas correspondentes, levando em conta que:

$$1\text{m} = \frac{1}{12} \text{ do ano e } 1\text{d} = \frac{1}{360} \text{ do ano (*)}$$

(*) Ano *comercial:* 360 dias.

serão

$$j = \frac{c \times i \times \frac{1}{12} m}{100} \quad \text{ou} \quad \boxed{j = \frac{cim}{1\,200}}$$

$$j = \frac{c \times i \times \frac{1}{360} d}{100} \quad \text{ou} \quad \boxed{j = \frac{cid}{36\,000}}$$

Aplicações.

1.ª) Qual é o *juro* produzido por um capital de Cr$ 8 500,00 emprestado a 10 % ao ano, durante 4 *anos*?

Temos: $c = 8\,500{,}00$
$i = 10\ \%$ (ao ano)
$t = 4$ anos
$j = ?$

Fórmula a ser empregada: $j = \frac{cit}{100}$.

Portanto: $j = \frac{8\,500{,}00 \times 10 \times 4}{100} = 3\,400{,}00.$

Logo: o *juro* produzido é de Cr$ 3 400,00.

2.ª) Que *juro* rendeu um capital de Cr$ 12 000,00, empregado a 9 % ao ano, durante 2a 3me?

Temos: $c = 12\,000{,}00$
$i = 9\ \%$ (ao ano)
$t = 2\text{a } 3\text{m2} = 24\text{me} + 3\text{me} = 27\text{me}$ (meses)
$j = ?$

Fórmula a ser empregada: $j = \frac{cim}{1\,200}$, onde $m = 27$.

Portanto: $j = \frac{12\,000{,}00 \times 9 \times 27}{1\,200} = 2\,430{,}00.$

Logo: o *juro* rendido foi de Cr$ 2 430,00.

3.ª) Um certo *capital* à taxa de 11 % ao ano, rendeu Cr$ 22 000,00 de juro durante 5 anos. Determinar êsse capital.

Temos: $i = 11\ \%$ (ao ano)
$j = 22\,000{,}00$
$t = 5$ anos
$c = ?$

Fórmula a ser empregada: $c = \frac{100j}{it}$.

Portanto: $c = \frac{100 \times 22\,000,00}{11 \times 5} = 40\,000,00.$

Logo: o *capital* foi de Cr\$ 40 000,00.

4.ª) A que *taxa* foi empregado um capital de Cr\$ 90 000,00 que, em 150 dias, rendeu um juro de Cr\$ 4 500,00?

Temos:

$$c = 90\,000,00$$
$$t = 150\text{d (dias)}$$
$$j = 4\,500,00$$
$$i = ?$$

Fórmula a ser empregada:

a partir de $j = \frac{cid}{36\,000}$, onde $36\,000j = cid$ e $i = \frac{36\,000j}{cd}$.

Portanto: $i = \frac{36000 \times 4\,500,00}{90\,000 \times 150} = 12.$

Logo: a *taxa* foi de 12% ao ano.

5.ª) Determinar o *tempo* em que foi empregado o capital de Cr\$ 18 000,00 que a $9\frac{1}{2}\%$ ao ano produziu um juro de Cr\$ 3 800,00.

Temos:

$$c = 18\,000,00$$
$$i = 9\frac{1}{2}\% = \frac{19}{2}\% \text{ (ao ano)}$$
$$j = 3\,800,00$$
$$t = ?$$

Fórmula a ser empregada: $t = \frac{100j}{ci}$.

Portanto: $t = \frac{100 \times 3800,00}{18000,00 \times \frac{19}{2}} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}.$

Logo, o *tempo* foi de $2\frac{2}{9}$ anos ou reduzindo: 2a 2me 20d.

11. Operações com o montante. Indicando por M o *montante*, devemos ter por definição:

$$M = c + j,$$

onde, c é o capital primitivo e j o juro rendido por tal capital.

Substituindo, na expressão do montante o valor de $j = \frac{cit}{100}$, vem:

$$M = c + \frac{cit}{100} = \frac{100c + cit}{100} = \frac{c\,(100 + it)}{100},$$

onde, podemos ressaltar as duas fórmulas:

$\boldsymbol{M = \frac{c(100 + it)}{100}}$ (dá o *montante*)	e	$\boldsymbol{c = \frac{100M}{100 + it}}$ (dá o *capital primitivo*)

Aplicação. Sabendo-se que o montante no fim de 2a 3m, à taxa de 6% ao ano, é de Cr\$ 13 620,00, calcular o *capital primitivo* e o *juro*.

Aplicando a fórmula $c = \frac{100M}{100 + it}$, temos:

$$c = \frac{100 \times 13\,620,00}{100 + 6 \times \frac{27}{12}} \qquad \left(t = 2 + \frac{3}{12} = \frac{27}{12}\right)$$

$$c = \frac{1\,362\,000,00 \times 2}{227} = 12\,000,00.$$

Sendo c = Cr\$ 12 000,00, o juro será: Cr\$ 13 620,00 – – Cr\$ 12 000,00 = Cr\$ 1 620,00.

12. Divisor fixo. Nas Caixas Econômicas, nos bancos e nas demais emprêsas comerciais onde os movimentos de depósitos e retiradas de dinheiro é bastante intenso, usam-se métodos mais rápidos para o cálculo de juros. Um dêles é o método chamado do *divisor fixo*, para cálculo de juros, por dia, de um capital c a uma taxa i. Deve-se usar a fórmula do juro, expressa em dias, isto é, $j = \frac{cid}{36000}$.

Chamando de *divisor fixo em relação à taxa i* ao quociente da divisão de 36 000 por i, e indicando-o com a notação:

$$D = \frac{36000}{i},$$

temos, substituindo êste valor na fórmula $j = \dfrac{cid}{36\,000}$ $\left(\text{onde } \dfrac{i}{36\,000} = \dfrac{1}{D}\right)$:

$$\boxed{j = \frac{cd}{D}}$$

Aplicação. Na Caixa Econômica do Estado de São Paulo, que paga juro de 5% ao ano, o *divisor fixo* é $D = \dfrac{36\,000}{5} = 7\,200$.

Logo, se alguém quiser saber o juro que o capital de Cr$ 64 800,00 rendeu, em 13 dias, nesta Caixa, basta aplicar a fórmula acima usando para D o valor 7 200, isto é:

$$j = \frac{cd}{7\,200} = \frac{64\,800 \times 13}{7\,200} = 117{,}00.$$

Portanto, o juro procurado é de Cr$ 117,00.

Os divisores fixos mais usados, para as diferentes taxas existentes, constam do quadro:

i	5%	6%	8%	9%	10%	12%
D	7 200	6 000	4 500	4 000	3 600	3 000

13. Desconto comercial. Desconto é o abatimento feito sôbre uma quantia que irá ser paga antes do prazo de seu vencimento. Geralmente os descontos são feitos sôbre *faturas* (relação de mercadorias vendidas com os respectivos preços) e *papéis de comércio*, tais como lêtras, notas promissórias, etc. ... que são documentos pelos quais uma pessoa se compromete a pagar uma certa importância num determinado prazo.

Aplicado *às faturas*, o desconto é um simples abatimento e o seu cálculo se reduz a um simples *cálculo de porcentagem*. Assim, dizer que uma fatura de Cr$ 9 120,00 tem 120 dias (ou 4 mêses) de prazo para pagamento líquido ou 30 dias com desconto de 3% significa que essa fatura sofrerá um abatimento de $\dfrac{9\,120{,}00}{100} \times 3 = 273{,}60$, caso seja paga nos primeiros 30 dias.

Já o desconto nos *papéis comerciais* é proporcional à quantia e ao tempo e é calculado pela forma conhecida dos *juros*. Chamando *valor nominal* de uma letra de comércio ao valor da quantia escrito na mesma e de *valor atual*, ao valor que ela tem no dia em que é descontada, podemos dizer que o *desconto é igual à diferença entre os valores nominal e atual da letra*. Exemplo:

É descontada em um banco, 4 mêses antes do vencimento, uma letra cujo valor nominal é de Cr$ 30 000,00. Qual a importância líquida recebida sabendo que a taxa de desconto é de 12% ao ano?

Temos, indicando o desconto por d:

$$d = \frac{30\,000{,}00 \times 12 \times 4}{1\,200} = 1\,200{,}00$$

e, portanto, pela letra se receberão: Cr$ 30 000,00 − − Cr$ 1 200,00 = Cr$ 28 800,00, que é o seu valor atual.

14. Moeda e câmbio. *Moeda* é uma peça de metal (ou de outro material), com valor marcado por lei, que em tôdas as transações representa o valor dos objetos permutados. A moeda além da sua função de *medida dos valores* tem a função de *intermediário na troca*.

A palavra *câmbio*, derivada do italiano, significa num sentido geral *troca*. Num sentido mais restrito, como aliás vamos sempre entender neste curso, é a *troca de moedas entre dois países*. Dêsse modo, se um comerciante da praça do Rio de Janeiro quiser pagar £ 2 000 a um seu credor da praça de Londres e não dispuser de moeda inglêsa, necessitará de fazer uma *troca*, dando em moeda nacional uma quantia equivalente. Essa troca é o *câmbio*.

Se precisarmos, por exemplo, dar Cr$ 52,69 para pagar uma libra esterlina em Londres, diremos que o *câmbio do Brasil sôbre Londres é de* 52,69. Todo o comércio, de exportação e de importação, é feito geralmente por casas bancárias, cujas transações consistem em remeter dinheiro de umas praças a outras por meio de letras ou *cambiais*. Atualmente no Brasil o *câmbio oficial* é controlado e fiscalizado pelo Banco do Brasil S/A. Existe também o chamado *câmbio livre* que é transacionado tanto pelo Banco do Brasil como pelos bancos particulares.

O câmbio de uma praça está *ao par* quando se dá em moeda nacional um valor igual ao valor que em moeda estrangeira deve receber o portador de uma letra, e, está *abaixo* ou *acima do par* quando se dá em moeda nacional um valor maior ou menor que o da letra em moeda estrangeira. As unidades monetárias de alguns países, bem como as subdivisões, constam do quadro abaixo:

PAÍSES	UNIDADES MONETÁRIAS	SÍMBOLOS	SUBDIVISÕES	À VISTA (*)
Alemanha	Marco	*Mk*	100 pfennige	
Áustria	Corôa	*Kr*	100 hellers	
Argentina	Peso	$	100 centavos	Cr$ 1,35
Brasil	Cruzeiro	*Cr$*	100 centavos	
Bélgica	Franco	*Fr*	100 centésimos	Cr$ 0,36
Chile	Peso	$	100 centavos	
Dinamarca	Corôa	*Kr*	100 ores	Cr$ 2,63
Estados Unidos	Dólar	*US.$*	100 cents	Cr$ 18,82
Espanha	Peseta	*P*	100 centésimos	
Egito	Libra	£	100 piastras	
França	Franco	*Fr*	100 centésimos	Cr$ 0,05
Grécia	Drachma	*Dr*	100 leptos	
Holanda	Florin	*Fl*	100 centésimos	
Inglaterra	Libra ester.	£	20sh ou 240d	Cr$ 52,69
Itália	Lira	*L*	100 centésimos	Cr$ 0,105
Japão	Yen	*Y*	100 sen	
Noruega	Corôa	*Kr*	100 ores	
Portugal	Escudo	$	100 centavos	Cr$ 0,66
Rússia	Rublo	*Rb*	100 kopecks	
Suíça	Franco	*Fr*	100 centésimos	Cr$ 4,42
Uruguai	Peso	$	100 centésimos	Cr$ 5,74

Outras moedas: o *boliviano* (Bolívia); o *sucre* (Equador); o *venezuelano* (Venezuela); o *sol* (Peru); o *tael* (China).

Dois principais problemas surgem entre as relações das casas bancárias: 1.°) as transações são feitas *diretamente* entre elas (*câmbio direto*); 2.°) as transações são feitas com a intervenção de praças intermediárias (*câmbio indireto*).

(*) Taxas fixadas pelo Banco do Brasil, no mercado oficial, para saques nas praças de São Paulo e Rio de Janeiro — de acôrdo com publicação feita pela Parte Comercial, do jornal "O Estado de São Paulo", de 25/7/1954.

As questões de câmbio direto são resolvidas por uma regra de três simples e as de câmbio indireto, por uma regra de três composta.

PROBLEMAS DE APLICAÇÃO

1.°) *Reduzir* Cr$ 10 538,00 (*moeda nacional*) *à moeda inglêsa, ao câmbio de* 52,69.

Ora, se cada Cr$ 52,69 valem uma libra, temos que Cr$ 10 538,00 valerão 10 538,00 : 52,69 = 200 (libras).

2.°) *Quanto valerão, no Rio de Janeiro, 36 libras, 9 shillings e 3 pence, ao câmbio de 52?*

Reduzindo, temos: £-36-9-3 = 8 751d. Como cada 240d (uma libra) vale Cr$ 52,00, segue-se que £-36-9-3 = = Cr$ 1 896,00.

3.°) *Um livreiro de São Paulo quer remeter a favor de outro em Roma a importância de 9 600 liras. Que quantia deve pagar em moeda brasileira ao câmbio de* 0,105, *isto é, custando a lira* Cr$ 0,105 *de nossa moeda?*

Se uma lira vale Cr$ 0,105, 9 600 liras valerão Cr$ 1 008,00.

4.°) *Devendo remeter para Lisboa a importância de* Cr$ 19 780,00, *estando o câmbio a* 1 978, *isto é, custando o escudo* Cr$ 1,978 *de nossa moeda, qual a importância recebida lá?*

Sendo Cr$ 1,978 o preço de um escudo em..... Cr$ 19 780,00 haverá:

$$19\,780{,}00 : 1{,}978 = 10\,000 \text{ (escudos)}.$$

5.°) *Reduzir 450 dólares à moeda brasileira no câmbio de* 66, *isto é, custando um dólar* Cr$ 66,00 (câmbio livre).

Custando 1 dólar Cr$ 66,00, 450 dólares custarão Cr$ 29 700,00.

EXERCÍCIOS

PORCENTAGENS E TAXA MILESIMAL:

1. Calcular:

1.°) 6 % de Cr$ 1 210,00.

2.°) $9\frac{1}{2}$ % de Cr$ 500,00.

3.°) 0,5 % de 146 gramas.

4.°) 3 ‰ de 25 000 toneladas.

5.°) 1,5 ‰ de 3 000 000 habitantes

2. Determinar *quanto por cento* é:
   1.º) Cr$ 500,00 de Cr$ 2 500,00.
   2.º) 12 gramas de 96 gramas.
   3.º) 1 200m² de 60km².
3. Determinar *quanto por mil* é:
   1.º) 5kg de uma tonelada.
   2.º) 250 000km² de 8 000 000km².
4. Dizer: 1.º) Cr$ 50,00 é 8 % de que importância?
   2.º) 120 habitantes é 3‰ de que população?
5. Uma casa é comprada por Cr$ 345 000,00 e vendida por Cr$ 386 400,00. Qual é a taxa do lucro?
6. Quanto pago por um terreno que, comprando à vista, ganho um desconto de 10 % eqüivalente a Cr$ 2 000,00?
7. Num colégio 32 % dos alunos são meninas e os meninos somam 340. Quantos são os alunos?
8. Em certa fábrica trabalham 648 homens e sabe-se que 46 % dos operários são mulheres. Qual é o total de operários dessa fábrica?
9. Sabendo-se que 12 ‰ dos habitantes de uma cidade representam pessoas com idade superior a 85 anos e que os demais habitantes somam 49 400, pergunta-se qual é a população dessa codade?
10. Uma pessoa entrou numa firma comercial com Cr$ 78 000,00 e saiu com um capital de Cr$ 105 300,00. De quanto por cento foi o seu lucro?
11. Um escritório emprestou a mesma quantia em dinheiro a três pessoas. Com a primeira ganhou 15 % e com as demais perdeu 6 %. Quanto lucrou com êstes empréstimo?
12. O material de construção comprado numa casa comercial importa em Cr$ 12 136,00. A despesa do transporte dêste material é de 6 % sôbre o valor da compra e o pagamento à vista dá ao comprador um desconto de 3 % sôbre o gasto total. Quanto se gastou ao adquirir êste material?
13. Em uma cidade de 676 000 habitantes os católicos são em número de 671 268. Calcular a taxa milesimal dos habitantes não católicos?
14. Uma certa qualidade de vinho tem a graduação de 13 % de álcool. Sabendo-se que na distilação dêste vinho obteve-se 55,64*l* de álcool, determinar a quantidade de vinho empregada?
15. Em 448kg de água salgada a 15 % (mistura de 100kg de água e 15kg de sal) leva-se a evaporar 128kg de água. Determinar a taxa de porcentagem do sal que restou.

Juros simples. Montante. Divisor fixo.

16. Calcular o juro produzido por Cr$ 3 600,00, em 3 anos, à taxa de 6 %.
17. Qual é o juro de Cr$ 24 600,00 a 3,6 % (*) por 10 mêses?

(*) A taxa é sempre referida ao ano.

18. Qual é o juro de Cr$ 1 200 000,00, à taxa de 10 %, por 2 anos e 3 mêses?
19. Calcular o juro de Cr$ 4 000,00, a $9\frac{1}{2}$ %, durante 1a 11m 12d.
20. Determinar o juro produzido por Cr$ 36 000,00 em 150 dias a 12 %.
21. Qual é o capital que empregado a 10 %, durante 2 anos, rendeu Cr$ 19 200,00 de juro?
22. Um capital empregado a 12 % rende, no fim de 36 dias, o juro de Cr$ 3 600,00. Qual foi êsse capital?
23. Determinar qual foi a quantia em dinheiro que, empregada a $10\frac{1}{2}$ % ao ano, rendeu, em 6 mêses, Cr$ 6 300,00?
24. Qual é a taxa que foi empregada para que um capital de Cr$ 50 000,00, em 2 anos, rendesse um juro de Cr$ 10 000,00?
25. Calcular o capital que rende Cr$ 612,00 de juro em 100 dias, à taxa de 12 %.
26. Um capital emprestado a $3\frac{3}{5}$ % rendeu, em 1a 1m 10d, o juro de Cr$ 367,20. Qual foi êsse capital?
27. Uma pessoa tomou Cr$ 15 000,00 emprestados pelo prazo de 60 dias e pagou Cr$ 300,00 de juro. Qual foi a taxa dessa transação?
28. Um capital de Cr$ 2 700,00 rendeu em 13 mêses e 10 dias o juro de Cr$ 243,75. Qual foi a taxa empregada?
29. Qual é o tempo em que um capital de Cr$ 9 648,00, a 5 %, rendeu Cr$ 1 588,70?
30. Durante quantos mêses esteve emprestada a importância de Cr$3 030,00 a fim de render o juro de Cr$ 155,54 à taxa de 5,6 %?
31. Por quanto tempo um capital deve ser empregado a 8 % para que juro obtido seja os $\frac{4}{5}$ do capital? $\left(j = \frac{4}{5}c\right)$.
32. Sabendo-se que um certo capital foi duplicado em 20 anos a juros simples, pergunta-se, a que taxa foi empregado êsse capital? ($j=c$).
33. Em quanto tempo um capital triplica de valor à taxa de 12%? ($j=2c$).
34. Coloca-se 1/3 de um capital a 7 % e o restante a 9 %, obtendo-se assim um ganho anual de Cr$ 36 000,00. Qual é o valor dêsse capital?
35. É mais vantajoso empregar: Cr$ 18 000,00 a 6 % ou Cr$ 12 500,00 a 3,5 %, e o restante a 5,6 %?
36. Qual é o montante de um capital de Cr$ 20 000,00 durante 1a 2me à taxa de 12 %?
37. Qual é o capital que depois de 8 mêses, à taxa de $11\frac{1}{2}$ %, dá um montante de Cr$ 12 920,00?
38. Qual é o divisor fixo de um Banco cuja taxa é $5\frac{1}{3}$ %?
39. O *D* de uma casa bancária é igual a 3 789. Qual é a taxa cobrada por essa casa bancária?
40. Por quantos dias ficou depositada a importância de Cr$ 126 000,00 num estabelecimento bancário de divisor fixo igual a 3 000, sabendo-se que rendeu durante êsse tempo um juro de Cr$ 2 100,00?