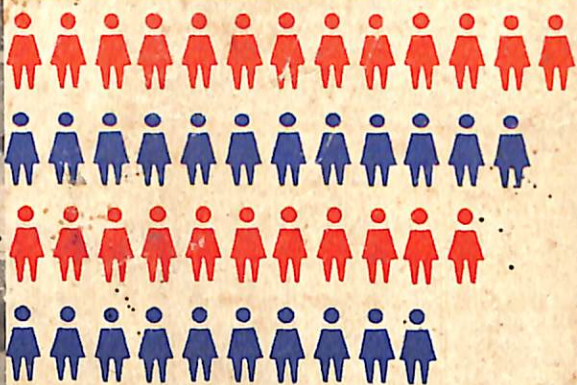


OSVALDO  
SANGIORGI



ca

e estatística

Para os Institutos  
de Educação e  
Escolas Normais



GH00154

01196

7

Ar. Rec.

3.º Jano

1.º 2

1. 3. 200,0

3.º 4

Mad 100  
Duro 200

Pl. 3 - 200,0

H.º 1

3x10 -- 120  
2x10 -- 80

12 - 200,0  
600,0

50.2

500,00

*[Handwritten signature]*

*[Handwritten signature]*

MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

*[Large handwritten signature]*

5215m

5195

De acôrdo com os novos programas, conforme Portaria N.º 49, de 4/12/54, do Diretor Geral do Dep. de Educação do Estado de São Paulo.

Exemplar Nº 2427

1956

Obra executada nas oficinas da  
São Paulo Editora S/A. — Rua Barão de Ladário, 228  
Fones: 9-9087 e 9-9932 — São Paulo, Brasil.

OSVALDO SANGIORGI

Licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo. Professor do Instituto Feminino de Educação "Padre Anchieta". Professor de Geometria Analítica da Faculdade de Filosofia, da Universidade Mackenzie.

★

# MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

*para os*  
INSTITUTOS DE EDUCAÇÃO  
E  
ESCOLAS NORMAIS

◆

3.<sup>a</sup> EDIÇÃO

COMPANHIA EDITORA NACIONAL  
SÃO PAULO

-94100154-

DO MESMO AUTOR

- Matemática*, primeira série ginásial.
- Matemática*, segunda série ginásial.
- Matemática*, terceira série ginásial.
- Matemática*, quarta série ginásial.



EDIÇÕES DA  
 COMPANHIA EDITORA NACIONAL  
 Rua dos Gusmões, 639 — São Paulo

ÍNDICE

*Programa oficial*..... 13  
*Prefácio*..... 15

CAPÍTULO PRIMEIRO  
 ARITMÉTICA PRÁTICA

I) **Número inteiro. Operações fundamentais. Problemas típicos. Divisibilidade.**

*Introdução*..... 17

§1. NÚMERO INTEIRO:

    Sucessão dos números naturais. Sucessão dos números inteiros. Confronto. Sistemas de numeração, decimal e romana. Representação geométrica dos números. Representação literal dos números. Exercícios sobre numeração..... 18

§2. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS:

    1. *Adição*: Definição e propriedades. Cálculo mental. Regra prática. Prova. Soma de grandezas. Erros mais comuns. Exercícios sobre a adição..... 25

    2. *Subtração*: Definição. Condição de possibilidade. Propriedades. Regra prática. Prova. Diferença entre grandezas. Erros mais comuns. Expressões aritméticas. Uso de parênteses, colchêtes e chaves. Exercícios sobre a adição e subtração..... 29

    3. *Multiplicação*: Definição. Observações. Propriedades. Regras práticas. Prova. Produto de vários fatores. Múltiplos de um número. Expressões aritméticas contendo adições, subtrações e multiplicações. Produto de um número por uma grandeza. Erros mais comuns. Exercícios sobre adição, subtração e multiplicação..... 33

    4. *Divisão*: Definição de divisão exata. Condições de possibilidade. Propriedades. Divisão aproximada. Regras práticas. Prova. Expressões aritméticas contendo as quatro operações. Quociente e resto de uma grandeza por um número. Erros mais comuns. Exercícios sobre as quatro operações..... 40

    5. *Problemas típicos sobre as quatro operações*: Problemas típicos (8 tipos). Problemas para serem resolvidos..... 46

    6. *Potenciação*: Definição. Observações. Tábua das primeiras potências sucessivas. Propriedades. Regras práticas. Cálculo de expressões aritméticas contendo potências. Erros mais comuns. Exercícios sobre potências..... 52

## §3. DIVISIBILIDADE ARITMÉTICA :

Definição. Critérios de divisibilidade. Divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, e 12. Justificações dos critérios de divisibilidade. Propriedades elementares dos restos. Provas por um divisor. Exercícios sobre a divisibilidade aritmética..... 56

## §4. NÚMEROS PRIMOS :

Definição. Tábua dos números primos (Crivo de Eratóstenes). Reconhecimento. Decomposição de um número em fatores primos. Determinação de todos os divisores de um número. Total dos divisores de um número. Divisibilidade de um número por outro mediante seus fatores primos. Tábua dos números primos menores que 1 000. Exercícios sobre números primos..... 64

## §5. MÁXIMO DIVISOR COMUM :

Divisor comum de dois, ou mais, números. Máximo divisor comum de dois, ou mais, números. Determinação do m.d.c. de dois ou mais números. Propriedades. Problemas de aplicação do m.d.c. Exercícios sobre o máximo divisor comum..... 71

## §6. MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM :

Múltiplo comum de dois, ou mais, números. Mínimo múltiplo comum de dois, ou mais, números. Determinação do m.m.c. de dois, ou mais números. Propriedades. Propriedade entre o m.d.c. e o m.m.c. de dois números. Problemas de aplicação do m.m.c. Exercícios sobre o mínimo múltiplo comum..... 76

## II) Número fracionário. Operações fundamentais. Problemas típicos. Número decimal.

## §1. NÚMEROS FRACIONÁRIOS :

Noção intuitiva de fração. Definição. Frações próprias, impróprias e aparentes. Extração de inteiros. Números mistos. Propriedades das frações. Simplificação. Frações irredutíveis. Erros mais comuns. Redução ao mesmo denominador. Redução de frações ao mínimo denominador comum. Comparação de frações. Aplicações. Exercícios sobre frações..... 81

## §2. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS COM AS FRAÇÕES :

Adição de frações de mesmo denominador e de denominadores diferentes. Subtração de frações de mesmo denominador e de denominadores diferentes. Uso de parênteses. Multiplicação. Observações. Potenciação. Divisão. Erros mais comuns. Expressões aritméticas fracionárias. Exercícios sobre operações com frações..... 95

## §3. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS TÍPICOS SOBRE FRAÇÕES :

Método de resolução de nove problemas. Problemas sobre frações..... 107

## § 4. FRAÇÕES DECIMAIS COMO NÚMEROS DECIMAIS :

1. *Noção intuitiva e operações*: Noção intuitiva e definição. Leitura de um número decimal. Transformação de uma fração decimal em um número decimal e vice-versa. Propriedades dos números decimais. Operações com os números decimais. Observações. Quocientes aproximados. Exemplos de aplicação.... 116

2. *Conversão de fração ordinária a número decimal e vice-versa*: Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata. Condição para que uma fração ordinária se converta numa dízima periódica. Geratrizes. Observação. Expressões aritméticas envolvendo dízimas periódicas. Exercícios sobre números decimais..... 123

## III) Número racional e número irracional.

## Prática de raiz quadrada.

## §1. GRANDEZAS COMENSURÁVEIS E GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS :

Grandezas comensuráveis. Número racional..... 133  
Grandezas incomensuráveis. Número irracional..... 134

## §2. PRÁTICA DE RAIZ QUADRADA :

Regras práticas. Exercícios..... 136

## IV) Aplicações com uso da álgebra: métodos aritmético e algébrico de resolução de problemas típicos. Jogos e recreações matemáticas.

Preliminares. Críticas sobre os diversos métodos de resolução de um mesmo problema..... 144  
Jogos e recreações matemáticas..... 148

## V) Sistemas de medidas decimais e não decimais. Nomenclatura e notações oficiais.

Grandezas. Medida de uma grandeza. Sistemas de unidades de medir. Sistema métrico decimal. Sistema de medidas não decimais..... 151  
Unidades legais de medidas. Nomenclatura e notações oficiais 152

## VI) Noções de aritmética comercial.

§1. GRANDEZAS PROPORCIONAIS. REGRAS DE TRÊS. APLICAÇÕES.... 156  
§2. PORCENTAGEM. TAXA MILESIMAL. JUROS SIMPLES. DESCONTO. MOEDA E CÂMBIO. APLICAÇÕES..... 167

## CAPÍTULO SEGUNDO

## GEOMETRIA PRÁTICA

<i>Introdução</i> .....	181
I) <b>Equivalência entre figuras geométricas planas. Áreas. Teorema de Pitágoras e suas aplicações.</b>	
§1. GENERALIDADES.....	182
§2. ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango, polígono regular polígono qualquer.....	183
§3. TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS APLICAÇÕES.....	185
II) <b>Comprimento da circunferência. Área do círculo.</b>	
Comprimento da circunferência.....	187
Área do círculo.....	188
III) <b>Equivalência entre figuras geométricas sólidas. Definições. Áreas das superfícies lateral e total. Volumes.</b>	
§1. GENERALIDADES. POLIEDROS. EQUIVALÊNCIA ESPACIAL.....	189
§2. PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS POLIÉDRICOS. Desenvolvimento das respectivas superfícies. VOLUMES.....	190
Paralelepípedo retângulo, cubo, prisma reto, pirâmide reta....	191
§3. PRINCIPAIS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS REDONDOS. Desenvolvimento das respectivas superfícies e volumes. Cilindro circular reto, cone circular reto, esfera.....	195

## CAPÍTULO TERCEIRO

## NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

*Introdução:*

Origem e natureza dos dados estatísticos. Definição de Estatística. Séries ou distribuições estatísticas.....	202
§1. LEVANTAMENTO ESTATÍSTICO:	
Definição. Fases de um levantamento.....	206
Exemplo-modélo.....	208
Ponto-médio. Freqüências acumuladas e relativas. Freqüência relativa percentual.....	210
Análise das distribuições de freqüência. Conclusões sobre os resultados obtidos.....	212

## §2. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS:

*Gráficos de informação:* barras ou colunas; setores; cartogramas; pictóricos..... 214

*Gráficos de análise:* diagramas cartesianos e polares; diagrama de curvas..... 215

*Representação gráfica das distribuições:* polígonos de freqüência; histogramas; curvas de freqüência (em sino, moderadamente assimétricas, em J, em U); ogiva de Galton..... 219

## §3. ELEMENTOS TÍPICOS DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA: MEDIDAS DE POSIÇÃO, DE DISPERSÃO E DE ASSIMETRIA..... 226

*Medidas de posição:*

Média aritmética simples e ponderada. Cálculos pelos processos longo e breve..... 227

A mediana e o seu cálculo. Quartis. Decis. Centis. Interpretação gráfica..... 232

A moda e o seu cálculo. Interpretação gráfica..... 237

Uso das medidas de posição. Região central..... 240

*Medidas de dispersão:*

Dispersão ou variabilidade de uma distribuição de freqüência 241

Amplitude semi-quartil..... 242

O desvio médio e o seu cálculo..... 243

O desvio padrão e o seu cálculo..... 244

O coeficiente de variação e o seu cálculo..... 249

*Medida de assimetria:*

Generalidades. O índice de assimetria e o seu cálculo..... 250

*Resumo sobre o exemplo-modélo*..... 251

Algumas considerações sobre a Curva Normal de Gauss.... 252

# PROGRAMA DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES PRIMÁRIOS\*

### I) ARITMÉTICA PRÁTICA

- 1) NÚMERO INTEIRO: a) Sucessão dos números. Confronto. Sistema de numeração. Representações geométricas e literais. b) Operações fundamentais. Propriedades respectivas. c) Estabelecimento de problemas típicos. d) Potenciação. Propriedades. e) Divisibilidade aritmética, múltiplos e divisores. Critérios de divisibilidade. Números primos. Máximo divisor comum. Mínimo múltiplo comum. f) Aplicações.
- 2) NÚMERO FRACIONÁRIO: a) Noção intuitiva de fração. Frações próprias, impróprias e aparentes. Propriedades das frações. Simplificação e reduções. Confronto. b) Operações fundamentais. Expressões aritméticas fracionárias. c) Estabelecimento de problemas típicos. d) Frações decimais. Operações. Conversões. Números decimais periódicos. Geratrizes. e) Aplicações.
- 3) NÚMERO RACIONAL E NÚMERO IRRACIONAL: a) Grandezas comensuráveis. Números racionais. b) Grandezas incommensuráveis. Números irracionais. Prática de raiz quadrada.
- 4) APLICAÇÕES COM USO DA ÁLGEBRA: Métodos aritmético e algébrico, de resolução de problemas típicos.
- 5) SISTEMAS DE MEDIDAS DECIMAIS E NÃO DECIMAIS. Nomenclatura e nota-
- 6) NOÇÕES DE ARITMÉTICA COMERCIAL: a) Grandezas proporcionais. b) Regras de três. c) Porcentagem, taxa milesimal. d) Juros simples. Operações com o montante. Divisor fixo. Desconto. Moeda e Câmbio. Aplicações.

### II) GEOMETRIA PRÁTICA

- 1) Noção de equivalência entre figuras geométricas planas. Áreas das principais figuras planas. Teorema de Pitágoras e suas aplicações.
- 2) Noção de equivalência entre figuras geométricas sólidas. Generalidades sobre os principais sólidos geométricos; definições, áreas das superfícies lateral e total, volumes respectivos.

### III) NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

- 1) Origem e natureza dos dados estatísticos.
- 2) Levantamento estatístico.
- 3) Distribuições de frequência.
- 4) Processos básicos de representações gráficas. Curvas de frequência.
- 5) Medidas de posição: a média aritmética simples e ponderada; a mediana, os quartis, decis e percentis; a moda.
- 6) Medidas de dispersão: a amplitude semi-quartil, desvio médio e desvio padrão.
- 7) Medida de assimetria. Algumas aplicações à Educação. Simbolismo estatístico usual.

---

(\*) Para os Institutos de Educação e Escolas Normais Oficiais, de acordo com a Portaria N.º 49, de 4/12/54, do Diretor Geral do Dep. de Educação do Estado de São Paulo.

## P R E F Á C I O

A missão do professor primário, entre as mais nobres, é das mais delicadas e das mais difíceis. São êstes os principais motivos que a fazem, merecidamente, ser tomada como fundamental na vida de qualquer nação. Não é fácil tornar-se bom mestre quando se não traz o espírito de abnegação e de grande paciência. É com o tempo, com o exercício, com a auto-crítica que se formam bons professores.

Uma tarefa das mais penosas do professor primário é iniciar as crianças, em idade escolar, nos primeiros rudimentos da aritmética e da geometria práticas, cujas noções são importantíssimas em tôda a nossa vida.

Pretendemos, tanto quanto possível, com êste livro, fornecer aos futuros professores do ensino primário de nosso País os subsídios necessários para a realização de tal empreendimento. A última parte desta obra — *Noções de Estatística*, destina-se aos que se iniciam neste belo campo da matemática aplicada. Na simples exposição feita, tem-se em vista primordialmente, o campo educacional, de acôrdo com o novo programa.

Seremos gratos aos prezados colegas do magistério que apresentarem sugestões no sentido do aperfeiçoamento cada vez maior de nosso ensino.

O AUTOR

*Oswaldo Sangiorgi*  
Rua Dona Inácia Uchôa, 370.  
SÃO PAULO.



## CAPÍTULO PRIMEIRO

# Aritmética Prática

---

## INTRODUÇÃO

*Aritmética*, palavra de origem grega (\*), etimologicamente, quer dizer *ciência dos números*. Juntamente com a *Geometria*, que objetiva estudar a extensão e as propriedades das figuras planas e sólidas, constitui a essência da *Matemática*.

Esta não ensina somente a contar, a fazer operações, a medir, a resolver problemas, como à primeira vista se poderia supor, mas — e principalmente, *disciplina a exatidão e a simplicidade do pensamento e da linguagem*. Outrossim, *possibilita a precisão nos raciocínios, a esperteza nas ações*, e, sobretudo, *o alcance da verdade*.

Não é unicamente nas coisas mais elementares da vida, como as despesas, os pagamentos, etc., que se faz sentir a necessidade da aritmética no que ela apresenta de mais simples, porém imprescindível, — as *quatro operações*. Também a interpretação do texto de um livro, matéria prima para todo o estudante, pode aferir-se por u'a maior, ou menor, *matematização* do leitor. E o que dizer de tôdas as maravilhas do mundo moderno, impossíveis sem a contribuição constante da matemática? Em particular, para o ensino normal, não padece dúvida que *a melhor exercitação da faculdade de compreender se obtém através da vivência contínua com a aritmética*. Com tal preocupação iniciamos a aritmética prática.

No final de cada parte, encontraremos as aplicações necessárias ao seu desenvolvimento, e ressaltaremos os erros mais comumente cometidos. Em seguida, apresentaremos também jogos e recreações curiosas com o objetivo de agradar e atrair os principiantes na matéria.

---

(\*) *Αριθμητική*

## I) Número inteiro. Operações fundamentais. Problemas típicos. Divisibilidade

### § 1. Número inteiro.

**1. Sucessão dos números naturais.** Sempre que se, considera um conjunto de objetos da mesma espécie, como por exemplo, uma coleção de figurinhas, uma coleção de livros, um grupo de pessoas ou de animais, surge espontaneamente a idéia de *contá-los*. Recordemos que a *operação de contar* os objetos de uma coleção, ou os indivíduos de um grupo, deu origem aos números

*um, dois, três, quatro, cinco, seis, ...*

que se representam, no sistema de numeração decimal, respectivamente, com os símbolos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

que constituem, nessa ordem, a *sucessão dos números naturais*.

Cada objeto isolado, recebe, na operação de contar, o nome de *unidade*.

Chama-se *sucessivo de um número*, o número que contém uma unidade mais que esse outro. Por exemplo: 5 é sucessivo de 4; 6 é sucessivo de 5.

Como cada número da sucessão natural tem um sucessivo, diz-se que essa sucessão é *infinita*, ou também, que existem *infinitos números naturais*.

É por esse motivo que, ao se representar a sucessão dos números naturais, escrevemos reticências à direita do último número escrito para indicar que existem outros números que o seguem.

**2. Sucessão dos números inteiros.** No caso de não se possuir figurinhas ou livros, ou de não existirem mais pessoas ou animais num determinado lugar, o nome usado para indicar essas ausências de objetos ou indivíduos é *zero*, e o símbolo

correspondente 0. Acrescentando aos números naturais o número 0, obtém-se a sucessão:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

denominada *sucessão dos números inteiros*.

**3. Confronto de números inteiros.** É imediato que:

1.º) Dois números são *iguais* quando ocupam a *mesma posição* na sucessão dos números inteiros. Exemplo:

cinco é *igual* a cinco

Indicação:

$5 = 5$  (O sinal lê-se: *igual a*).

2.º) Um número é *maior* que outro quando *segue* esse outro na sucessão dos números inteiros. Caso contrário diz-se *menor*. Exemplos:

sete é *maior* que quatro (sete *vem depois* do quatro na sucessão);

três é *menor* que oito (três *vem antes* do oito).

Indicações:

$7 > 4$  (O sinal  $>$  lê-se: *maior que*).

$3 < 8$  (O sinal  $<$  lê-se: *menor que*).

Quando um número é *maior* ou *menor* que outro, costuma-se também dizer que eles são *desiguais* ou *diferentes*, usando-se a indicação  $\neq$ . Exemplo:

$7 \neq 4$  (7 *diferente de* 4).

Chama-se *igualdade* a relação expressa pelo sinal  $=$ . Exemplo:  $a = b$ . Os dois números  $a$  e  $b$  dizem-se *membros* da igualdade, sendo  $a$  o primeiro membro e,  $b$  o segundo. São óbvias as seguintes propriedades da igualdade:

1.º) REFLEXIVA: todo número é igual a si mesmo. Ex.:  $a = a$ .

2.º) SIMÉTRICA: se um número é igual a um segundo, este é igual ao primeiro. Ex.: se  $a = b$ , é também  $b = a$ .

3.º) TRANSITIVA: se dois números são iguais a um terceiro, esses dois números são iguais entre si. Ex.: se  $a = b$  e  $b = c$ , é também  $a = c$ .

**4. Numeração.** Do fato de existirem infinitos números inteiros (que são o zero e os números naturais) segue-se que não se pode dar a cada número um *nome especial*, nem representar cada um deles com um *símbolo especial* diferente, pois, seria

impossível imaginar e recordar infinitas palavras e infinitos símbolos. Daí a necessidade de certas regras fixas que permitam ler e escrever um número qualquer com poucas palavras e símbolos.

Chama-se *sistema de numeração* o conjunto de regras por meio das quais se pode ler e representar com poucas palavras e símbolos todos os números.

Nos sistemas de numeração, destacam-se duas partes: a *numeração escrita* e a *numeração falada*, que dão respectivamente métodos para escrever ou falar qualquer número.

### 5. Sistema de numeração decimal: escrito e falado.

O sistema de numeração decimal que usamos é denominado decimal e emprega somente dez símbolos diferentes para a representação de todos os números. Baseia-se nas seguintes regras:

**PRIMEIRA REGRA:** Representa-se por um símbolo e atribui-se um nome diferente a cada um dos dez primeiros números. Estes símbolos e nomes são, respectivamente:

0 (zero); 1 (um); 2 (dois); 3 (três); 4 (quatro); 5 (cinco); 6 (seis); 7 (sete); 8 (oito); 9 (nove),

chamados *algarismos significativos*, com exceção do 0 (zero) que é denominado *não significativo* (\*). Os números representados só por um algarismo são chamados *dígitos* e os representados por vários algarismos *polidígitos*.

**SEGUNDA REGRA:** Denominam-se *unidade simples* ao número **um**; *dezena* ao grupo de dez unidades simples; *centena* ao grupo de dez dezenas; *unidade de milhar* ao grupo de dez centenas; *dezena de milhar* ao grupo de dez unidades de milhar, e assim por diante atribuindo-se **novo nome** toda vez que se tenha **dez unidades de uma ordem imediatamente anterior**. As várias ordens se reagrupam por sua vez de três em três e cada grupo é denominado **classe**. Tem-se assim a **classe das unidades simples** (que compreende as unidades simples, dezenas e centenas), a **classe dos milhares**, a **classe dos milhões**, etc.

**TERCEIRA REGRA:** Para escrever-se um número superior a nove, conhecidas as unidades de cada ordem, escreve-se de modo que figurem, a partir da direita, em primeiro lugar, as

(\*) Sendo de origem árabe os símbolos empregados na representação desses algarismos, costuma-se usar a designação *arábico* quando nos referimos a eles.

*unidades simples, a seguir as dezenas, depois as centenas, e assim por diante. Caso o número não contenha unidades de uma determinada ordem, escreve-se no lugar correspondente das mesmas o algarismo zero.*

O princípio fundamental da numeração escrita no sistema de numeração decimal é:

Todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior à que este representa.

Cada algarismo significativo de um número tem dois valores: o *valor absoluto*, que é o valor atribuído ao algarismo isolado do número; e o *valor relativo*, que é o valor recebido pelo algarismo de acordo com o lugar que ocupa no número.

Exemplo:

Representar, no sistema de numeração decimal, o número que contenha 4 unidades de milhar, 6 centenas, nenhuma dezena, 2 unidades simples.

Segundo as regras estudadas, temos: 4 6 0 2  
onde

2 — representa as <i>unidades simples</i> .	{	valor absoluto: 2 valor relativo: 2
0 — representa as <i>dezenas</i>		
6 — representa as <i>centenas</i> .....	{	valor absoluto: 6 valor relativo: 600
4 — representa as <i>unidades de milhar</i>	{	valor absoluto: 4 valor relativo: 4 000

Outros nomes usados na *numeração falada*, do sistema de numeração decimal, são:

*onze* (ao invés de se dizer *uma dezena e uma unidade*).

*doze* (ao invés de se dizer *uma dezena e duas unidades*),

e a seguir:

*treze, quatorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove;*

*vinte* (ao invés de se dizer *duas dezenas*).

*trinta* (ao invés de se dizer *três dezenas*), e a seguir:

*quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa.*

*cem* ou *cento* (ao invés de se dizer *uma centena*),  
*duzentos* (ao invés de se dizer *duas centenas*), e a seguir:  
*trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos,*  
*oitocentos e novecentos.*

*mil* (ao invés de se dizer *uma unidade de milhar*), e a  
 a seguir *dois mil, três mil, etc.*, até *mil mil* que é  
 substituído pela palavra *milhão*.

*bilhão, trilhão, quatrilhão, ...* são os nomes seguintes,  
 atribuídos às classes que se seguem.

O princípio fundamental da numeração falada no sistema  
 decimal é:

Decompõe-se o número em grupos de três algarismos (se o número possuir mais de três algarismos) e, em seguida, a partir da esquerda lê-se cada grupo acrescentando-lhe o nome da classe a que pertence.

A decomposição de um número em classes de três algarismos é feita com um pequeno intervalo entre os algarismos que separam as classes, não se devendo usar qualquer sinal, como o ponto ou a vírgula. Exemplos:

85 307 que se lê: *oitenta e cinco mil e trezentos e sete* (unidades).

9 666 201 que se lê: *nove milhões, seiscentos e sessenta e seis mil e duzentos e um* (unidades).

3 567 908 315 que se lê: *três bilhões, quinhentos e sessenta e sete milhões, novecentos e oito mil, e trezentos e quinze* (unidades) (\*).

**6. Numeração romana.** Um outro sistema de numeração, hoje de emprêgo limitadíssimo (paginação de livros, mostradores de relógios, etc.) é o que foi introduzido pelos romanos. Os símbolos usados para representar os números dêsses sistema, com os seus respectivos valores nos sistemas de numeração decimal, são:

(\*) Não se deve confundir o *bilhão* português que vale mil milhões com o *bilhão* espanhol que vale um milhão de milhões. Assim, no exemplo citado, o número 3 567 908 315 seria lido como três mil e quinhentos e sessenta e sete milhões novecentos e oito mil e trezentos e quinze unidades.

I (um); V (cinco); X (dez); L (cinquenta); C (cem); D (quinhentos); M (mil).

As regras para se escrever (nesse sistema) são:

- 1.<sup>a</sup>) As letras I, X, C e M podem ser repetidas no máximo três vêzes consecutivamente e são as únicas que se repetem.
- 2.<sup>a</sup>) Uma letra escrita à direita de outra, de maior valor, aumenta o valor desta última e se fôr escrita à esquerda (sendo de classe imediatamente inferior), diminui.
- 3.<sup>a</sup>) Para aumentar o número mil vêzes o seu valor, coloca-se um traço sobre a letra; para aumentar um milhão de vêzes, colocam-se dois traços, e assim sucessivamente. Exemplos:

XX vale 20    IX vale 9     $\overline{\text{IVDVII}}$  vale 4 507  
 CCC vale 300    XI vale 11     $\overline{\text{MCM}}$  vale 1 955

**7. Outros sistemas de numeração.** Um dos sistemas mais usado pelas populações primitivas é o *sistema binário*, que utiliza somente dois sinais (talvez pelo fato do corpo humano apresentar vários exemplos de pares: braços, pernas, olhos, etc.) e tendo à sua disposição unicamente *duas palavras*. Tomando, por exemplo, nesse sistema os sinais 0 e 1, e seguindo princípio semelhante ao usado na numeração decimal, os números dois e três serão representados por: 10 (lê-se *um-zero*), 11 (lê-se *um-um*), respectivamente. Outro sistema de numeração usado é o *sistema quinário*, que dispõe somente de *cinco sinais* (pelo confronto com os cinco dedos da mão) e de *cinco palavras*. Na Babilônia, foi adotado o *sistema sexagesimal*, usado ainda hoje nas medidas de ângulo e de tempo.

**8. Representação geométrica dos números.** É de muita conveniência associar a cada número um *segmento de reta*. Para isso considera-se um segmento qualquer  $\overline{AB}$  como *unidade* para representar o número 1; o número 2 será representado por um segmento  $\overline{CD}$ , *duplo* da unidade  $\overline{AB}$ ; o número 3 por um segmento  $\overline{EF}$ , *triplo* da unidade, e, assim por diante (fig. 1).

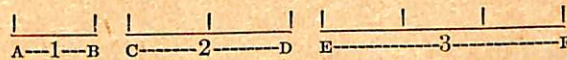


FIG. 1

**9. Representação literal dos números.** Sempre é possível, para facilidade de cálculos futuros, usar *símbolos* que possam representar *números quaisquer*. Assim podemos representar por *a* (ou qualquer outra letra) um número (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...).

### EXERCÍCIOS SÔBRE NUMERAÇÃO

- Determinar os sucessivos dos números: 69; 8 000 000; 5 009 e 443.
- Escrever, com algarismos arábicos, no sistema de numeração decimal, os seguintes números: três mil e trinta; quatro milhões, duzentos e cinquenta e seis mil e trezentos e trinta e oito; três bilhões e uma unidade.
- Qual, o maior, e o menor, número que se pode escrever com os algarismos 5, 3, 2 e 8?
- Quantos números da sucessão dos inteiros estão compreendidos entre 13 e 39?
- Com os algarismos 7, 1 e 3, escrever seis números dispostos em ordem decrescente.
- O que acontece com o valor relativo de 6, no número 639, quando, entre os algarismos da centena e o das dezenas, se intercala um zero?
- Representar geomêtricamente os números 3, 4 e 5.
- Qual o maior número de cinco algarismos significativos diferentes que se pode escrever no sistema de numeração decimal? Qual o menor?
- Quando é que, trocando a ordem de todos os algarismos de um número, este não muda de valor?
- Escrever, em algarismos romanos, os números: 732, 1 409, 8 913, e 6 632 000.
- Escrever em algarismos arábicos: DCCCIX,  $\overline{\text{XICXXVIII}}$ ,  $\overline{\text{IVCCCLX}}$  e MMCCII.
- Qual o sucessivo do maior número de sete algarismos no sistema de numeração decimal?
- Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os inteiros de 1 a 68.  
(NOTA: de 1 a 9 temos 9 números de 1 alg. ou  $9 \times 1 = 9$  (alg.).  
de 10 a 68 temos 59 números de 2 algs. ou  $59 \times 2 = 118$  (alg.).  
Total de algarismos escritos..... 127 (alg.).
- Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os inteiros de 32 a 176.  
(NOTA: de 32 a 99 temos 68 números de 2 algs. ou  $68 \times 2 = 136$  (alg.).  
de 100 a 176 temos 77 números de 3 algs. ou  $77 \times 3 = 231$  (alg.).  
Total de algarismos escritos..... 367 (alg.).
- Para numerar as páginas de um livro foram necessários 258 tipos. Quantas páginas tem esse livro?

(NOTA: para paginar as 9 primeiras usou: .....  $9 \times 1 = 9$  (tipos).  
para paginar as 90 seguintes usou: .....  $90 \times 2 = 180$  (tipos).  
n.º de tipos usado para as 99 1.as págs..... 189 (tipos).  
O restante:  $258 - 189 = 69$  (tipos) será empregado para numerar páginas de três algarismos, isto é,  $69 : 3 = 23$  (págs).  
Logo, o livro conterá:  $99 + 23 = 122$  (páginas).

- Determinar o número de algarismos necessários para escrever todos os inteiros de 1 a 78, de 1 a 756, de 1 a 2507, de 50 a 2000.
- Para numerar as páginas de um livro foram necessários 171 tipos. Quantas páginas tem o livro?
- Uma pessoa, escrevendo a série dos inteiros, parou num certo número. Em que número parou se escreveu 1 506 algarismos?

#### RESPOSTAS:

- 70; 8 000 001; 5 010 e 444.
- 3 030; 4 256 338; 3 000 000 001.
- 8 532 e 2 358.
- 25.
- 731, 713, 371, 317, 173 e 137.
- Fica dez vezes maior.
- Fig. 2.
- 98 765 e 12 345.
- Quando os algarismos forem todos iguais entre si.
- DCCXXXII, MCDIX,  $\overline{\text{VIII}}\overline{\text{CM}}\overline{\text{XIII}}$  e  $\overline{\text{VID}}\overline{\text{CXXXII}}$ .
- 809, 11 128, 4 300 060 e 2 202.
- 10 000 000 ( $9\,999\,999 + 1$ ).
- 127.
- 367.
- 122.
- 145; 2 160; 9 002; 6 804.
- 453.
- 538.

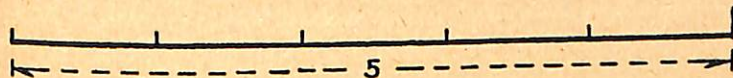


FIG. 2

## § 2. Operações fundamentais com os números inteiros.

### ADIÇÃO

**1. Definição.** Adição é a operação que tem por fim reunir em um só número todas as unidades de dois, ou mais, números dados.

O resultado da operação chama-se *soma* ou *total*, e os números que se somam, *parcelas* ou *têrmos*. A indicação da adição é feita com o sinal + que se lê: *mais*. Exemplos:

$$\underbrace{3 + 5 + 2}_{\text{(parcelas)}} = 10 \quad (\text{soma ou total})$$

(parcelas)

$$a + b + c = s \quad (\text{onde } a, b \text{ e } c \text{ representam números quaisquer e } s \text{ a soma deles}).$$

**2. Propriedades.** 1.<sup>a</sup>) UNIFORME. *A adição conduz sempre a um só resultado.* Exemplo:

4 + 9 apresenta só um resultado, que é 13.

2.<sup>a</sup>) COMUTATIVA. *A ordem das parcelas não altera a soma.* Exemplos:

$$5 + 3 = 3 + 5$$

$$6 + 8 + 1 = 8 + 6 + 1 = 1 + 8 + 6 = \dots$$

e de um modo geral:

$$a + b + c = b + c + a = c + a + b = \dots$$

3.<sup>a</sup>) ASSOCIATIVA. *A soma de vários números não se altera se se substituem algumas de suas parcelas pela sua soma efetuada.* Os sinais empregados para as associações das parcelas de uma adição são:

( ) denominado *parêntese*.

[ ] denominado *colchete*.

{ } denominado *chave*.

Exemplos:  $8 + 3 + 5 = (8 + 3) + 5 = 11 + 5$

$$13 + 5 + 2 + 7 = (13 + 5) + (2 + 7) = 18 + 9$$

e, de um modo geral:  $a + b + c = (a + b) + c$

4.<sup>a</sup>) DISSOCIATIVA. *Em toda soma pode-se substituir uma parcela por outras cuja soma seja igual a ela.* Esta propriedade é de sentido contrário da anterior. Exemplos:

$$9 + 3 + 8 = (5 + 4) + 3 + 8$$

$$(a + b) + c = a + b + c$$

OBSERVAÇÕES:

1.<sup>a</sup>) Os parênteses são colocados numa adição graças à propriedade associativa, e retirados pela propriedade dissociativa.

2.<sup>a</sup>) O zero como parcela não altera a soma e por isso pode ser retirado. Exemplo:  $20 + 7 + 0 + 3 = 20 + 7 + 3$

**3. Cálculo mental.** É o que permite efetuar as operações sem necessidade de se escrever. No caso da adição usam-se as propriedades estudadas. Exemplo:

$$\text{Efetuar a soma:} \quad 315 + 23$$

Pela propriedade dissociativa, calcula-se mentalmente pela decomposição:

$$\begin{aligned} & 310 + 5 + 20 + 3 = \\ \text{ou} \quad & = 310 + 20 + 5 + 3 = \quad (\text{propriedade comutativa}) \\ & = 330 + 8 = \quad (\text{propriedade associativa}) \\ & = 338 \end{aligned}$$

**4. Regra prática para efetuar a adição.** Para somar diversos números inteiros, escrevem-se uns em baixo dos outros, de modo que fiquem dispostos em colunas os algarismos da mesma ordem; somam-se em seguida os algarismos da última coluna, à direita, escrevendo-se em baixo desta coluna o algarismo que representa as unidades simples desta soma e as dezenas, caso existam, somam-se com os algarismos da coluna das dezenas. Procedem-se da mesma forma até à última coluna à esquerda quando se obtém o resultado total. Exemplo:

Efetuar a soma:

$$3\ 415 + 817 + 28\ 012$$

$$\begin{array}{r} \text{Disposição do cálculo:} \\ 3\ 415 \\ 817 \\ 28\ 012 \\ \hline 32\ 244 \end{array}$$

**5. Prova.** Consiste em verificar a exatidão da operação. A prova da adição está baseada na propriedade comutativa, por meio da qual se refaz a operação, depois de se ter trocado a ordem das parcelas (na prática isto equivale a fazer a adição debaixo para cima). Se a adição estiver certa, deve-se encontrar o mesmo resultado. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 1\ 024 \\ 20\ 132 + \\ 89 \\ \hline 21\ 245 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 89 \\ 20\ 132 + \\ 1\ 024 \\ \hline 21\ 245 \end{array}$$

**6. Soma de grandezas(\*).** Dadas duas, ou mais, grandezas referidas à mesma unidade, por ex., 3m, 7m, 6m, a sua soma é a grandeza

(\*) Ver *Elementi di aritmetica razionale*, de CIPOLLA-AMATO.

constituída de tantas unidades quantas são aquelas das grandezas dadas (\*), ou seja:

$$3m + 7m + 6m = (3 + 7 + 6)m = 16m.$$

Naturalmente só as grandezas homogêneas podem ser somadas. No caso de homogêneas, porém não referidas à mesma unidade, é necessário reduzi-las primeiramente. Por exemplo:

$$4\text{km} + 850\text{m} = 4\,000\text{m} + 850\text{m} = 4\,850\text{m}.$$

7. Erros mais comuns. As expressões:

$$8m + 5m = 13 \quad (?).$$

$$8 + 5 = 13m \quad (?).$$

$$8m + 5 = 13m \quad (?).$$

são erradas. O certo é:  $8m + 5m = 13m$ .

Outro erro muito usual, ao efetuar a soma

$$12 + 34 + 5$$

é o seguinte:

$$12 + 34 = 46 + 5 = 51 \quad (?)$$

Deve-se, ao invés, proceder do seguinte modo:

$$12 + 34 + 5 = 46 + 5 = 51.$$

### EXERCÍCIOS SÔBRE A ADIÇÃO

1. Aplicar as três primeiras propriedades da adição na soma:  $218 + 34 + 13$ .
2. Usando a propriedade comutativa, de quantos modos podem somar-se os números  $x$ ,  $y$  e  $z$ ?
3. O que acontece a uma adição de três parcelas quando se soma 2 à primeira parcela, 3 à segunda e 4 à terceira?
4. Somando um certo número a outro obtém-se como soma esse outro. Qual o número somado?
5. Dada uma adição de cinco parcelas, de quanto aumenta a soma, acrescentando 6 a cada parcela?
6. Calcular a soma dos cinco primeiros números sucessivos de 18.
7. De quanto aumenta uma soma de três números adicionando 5 aos algarismos das unidades e 4 aos algarismos das dezenas, de cada parcela?
8. Calcular a soma de quatro números, sabendo que o primeiro é 13 e os seguintes valem o dobro do anterior.
9. Um homem aos 28 anos torna-se pai. Quantos anos terá o pai quando o seu filho tiver 31?
10. Qual o número que tem 483 unidades a mais que o número 26?

(\*) O conceito de grandeza será dado no capítulo relativo às medidas (V).

11. Uma loja foi adquirida por Cr\$ 380 000,00. Gastou-se em consertos Cr\$ 36 000,00 e a loja foi revendida com um lucro de Cr\$ 52 000,00. Por quanto foi vendida a loja?
12. Quantos dias existem entre 10 de março e 15 de junho, inclusive os dias extremos?

RESPOSTAS:

1. *Uniforme*:  $218 + 34 + 13 = 265$  (resultado único);  
*Comutativa*:  $218 + 34 + 13 = 34 + 13 + 218 = 13 + 218 + 34 = 13 + 34 + 218$ ;  
*Associativa*:  $218 + 34 + 13 = (218 + 34) + 13$ .
2. 6 modos.
3. Aumenta de 9.
4. 0 (zero).
5. Aumenta de 30.
6. 105 ( $19 + 20 + 21 + 22 + 23$ ).
7. 135.
8. 195.
9. 59 anos.
10. 509.
11. Cr\$ 468 000,00.
12. 98 dias.

### SUBTRAÇÃO

1. **Definição.** Chama-se *diferença* de dois números, dados numa certa ordem, um *terceiro número* que, somando ao segundo, dá para resultado o primeiro.

O primeiro número chama-se *minuendo*, o segundo *subtraendo*, e a operação que permite encontrar a diferença dos dois *subtração*; e é *inversa* da adição.

O minuendo e o subtraendo dizem-se também *termos* da subtração, e a diferença é chamada *resto* ou *excesso*. A subtração é indicada com o sinal  $-$  que se lê: *menos*. Exemplos:

$$8 - 5 = 3 \quad \text{pois} \quad 3 + 5 = 8$$

$$a - b = c \quad \text{quando} \quad c + b = 8$$

2. **Condição de possibilidade.** Como o minuendo é a soma do subtraendo com a diferença, segue-se que o minuendo deve ser maior ou igual ao subtraendo. Logo: *a subtração de dois números só é possível se o minuendo for igual ou maior que o subtraendo.*

3. **Propriedades.** 1.<sup>a</sup>) UNIFORME. *A subtração conduz a um único resultado.*

2.<sup>a</sup>) Somando, ou subtraindo, um mesmo número aos termos de uma subtração, a diferença não se altera. Exemplo:

Seja a diferença:  $15 - 8 = 7$

Somando 4 aos seus dois termos, teremos:

$$(15 + 4) - (8 + 4) = 19 - 12 = 7$$

ou, subtraindo 5 aos dois termos:

$$(15 - 5) - (8 - 5) = 10 - 3 = 7$$

Em ambos os casos, notamos que a diferença não se alterou.

3.<sup>a</sup>) A subtração é não-comutativa. Exemplo:

$$7 - 4 \neq 4 - 7$$

4.<sup>a</sup>) Querendo subtrair de um número, sucessivamente, dois ou mais outros pode-se subtrair do número dado a soma destes outros. Exemplo:

$$17 - 5 - 2 = 17 - (5 + 2).$$

OBSERVAÇÕES:

1.<sup>a</sup>) Se o minuendo for igual ao subtraendo a diferença é zero.  
Exemplo:  $6 - 6 = 0$

2.<sup>a</sup>) Se o subtraendo for zero, a diferença é igual ao minuendo.  
Exemplo:  $8 - 0 = 8$

4. Regra prática para efetuar a subtração. Para efetuar a subtração de dois números, escreve-se o subtraendo por baixo do minuendo, de modo que fiquem dispostos em colunas os algarismos de mesma ordem. Em seguida subtrai-se de cada algarismo do minuendo, a partir da direita, o algarismo correspondente do subtraendo. Se o algarismo do minuendo for menor que o do subtraendo tomamos uma unidade de ordem imediatamente superior e juntamo-la ao algarismo da ordem em questão, podendo assim continuar a operação. Exemplo:

Efetuar a subtração:

$$8\ 563 - 3\ 928$$

Operações:

Disposição do cálculo:

$$\begin{array}{r} 8\ 563 \\ 3\ 928 \\ \hline 4\ 635 \end{array}$$

$13 - 8 = 5$  (tomando 1 de 6, que se reduz a 5);  
logo  $5 - 2 = 3$

$15 - 9 = 6$  (tomando 1 de 8 que se reduz  
logo  $7 - 3 = 4$   
o resultado será 635. : 4

5. Prova. É feita somando o resto ao subtraendo. Se a operação estiver certa, deve obter-se o minuendo.

6. Diferença entre grandezas. Diferença entre duas grandezas homogêneas, caso exista, é a grandeza homogênea que, somada à segunda, dá para resultado a primeira. Exemplo:

$$7m - 4m = 3m \text{ porque } 3m + 4m = 7m.$$

7. Erros mais comuns. Os mesmos apontados para a adição. Assim, não devemos escrever:

$$7m - 4m = 3 \quad (?), \text{ e sim } 7m - 4m = 3m.$$

## Expressões Aritméticas

1. Definição. Expressão aritmética é um conjunto de números reunidos entre si por sinais de operações. O cálculo de uma expressão aritmética, que envolve adições e subtrações, é feito efetuando as várias operações na ordem em que são indicadas, devendo notar-se que são feitas primeiramente as operações indicadas entre parênteses, em seguida as operações indicadas entre colchetes, depois as indicadas entre chaves, assim por diante. Exemplos:

1. Calcular o valor da expressão aritmética:

$$35 - [4 + (5 - 3)]$$

Temos:  $35 - [4 + 2] =$  (efetuando:  $5 - 3 = 2$ ).

$$35 - 6 =$$
 (efetuando:  $4 + 2 = 6$ ).

$$29.$$

2. Calcular o valor da expressão aritmética:

$$86 - \{26 - [8 - (2 + 5)]\}$$

Temos:  $86 - \{26 - [8 - 7]\} =$  (efetuando:  $2 + 5 = 7$ )

$$= 86 - \{26 - 1\} =$$
 (efetuando:  $8 - 7 = 1$ )

$$= 86 - 25 =$$
 (efetuando:  $26 - 1 = 25$ )

$$= 61.$$

3. Calcular o valor da expressão aritmética:

$$53 - \{[48 + (7 - 3) - [(27 - 2) - (7 + 8 + 10)]]\}$$



$$\begin{aligned} \text{Temos: } & 53 - \{ [48 + 4] - [25 - 25] \} = \\ & = 53 - \{ 52 - 0 \} = \\ & = 53 - 52 = \\ & = 1. \end{aligned}$$

### EXERCÍCIOS SÔBRE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

- Que número representam as expressões :
  - $a - b$  se  $a = 40$  e  $b = 12$
  - $a - [(b + c) + d]$  se  $a = 52$ ,  $b = 12$ ,  $c = 8$  e  $d = 5$
  - $[m + (n + p)] - [(p + m) - n]$  se  $m = 4$ ,  $n = 3$  e  $p = 10$
- Nas subtrações que se seguem, colocar no lugar das letras um número tal que o resultado indicado seja verdadeiro :
 

1.º $a - 326 = 154$	3.º $0 = y - 32$
2.º $10\ 001 - x = 839$	4.º $x - 5 = 12 - 5$
- Calcular o valor das seguintes expressões aritméticas :
  - $(12 + 3) - (4 + 8)$
  - $14 + \{ 8 - [(48 - 3) - (38 + 1 + 5)] \} - 1$
  - $\{ 213 - [(14 + 7) - (11 - 3)] \} - \{ (8 + 5) - [6 - (10 - 9)] \}$
- Qual o número que somado com 1 836 resulta 18 001 003 ?
- Em que ano completou 32 anos uma pessoa que tem 75 anos atualmente (1955) ?
- Se Antônio der a João Cr\$ 28,00, ambos ficam com Cr\$ 70,00. Quantos tinha cada um ?
- Se Pedro der a Rubens Cr\$ 50,00, ambos ficam com a mesma quantia. Se Rubens der a Pedro Cr\$ 50,00 acaba ficando sem nada. Quanto possuía cada um ?
- Deve-se repartir Cr\$ 14 030,00 por três pessoas. A primeira recebe Cr\$ 4 315,00, a segunda recebe Cr\$ 2 400,00 mais que a primeira. Quanto deve receber a terceira ?
- Em uma adição se subtrai 8 de duas parcelas e se soma 5 a uma outra. Que alteração sofre a adição ?
- Expressar por meio de símbolos os dois primeiros números inteiros sucessivos de um número inteiro qualquer  $a$ . Qual a diferença entre eles ?

#### RESPOSTAS:

- 1.º 28; 2.º 27; 3.º 6.
- 1.º  $a = 480$ ; 2.º  $x = 9\ 162$ ; 3.º  $y = 32$ ; 4.º  $x = 12$ .
- 1.º 3; 2.º 20; 3.º 192.
- 17 999 167.
- 1912.

- Antônio Cr\$ 98,00 e João Cr\$ 42,00.
- Pedro Cr\$ 150,00 e Rubens Cr\$ 50,00.
- Cr\$ 3 000,00.
- Diminui de 11.
- $a + 1$  e  $a + 2$ . A diferença é 1.

### MULTIPLICAÇÃO

- Multiplicar é somar parcelas iguais.* Seja por exemplo :

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Nessa adição, a parcela que se repete ou multiplica (4) é chamada *multiplicando*, o número de vêzes que aparece (3) é chamado *multiplicador* e o resultado *produto* (12 no exemplo).

**2. Definição.** *Multiplicação é a operação que tem por fim, dados dois números, um chamado multiplicando e outro multiplicador, formar um terceiro somando o primeiro tantas vêzes quantas forem as unidades do segundo.*

A multiplicação é indicada com o sinal  $\times$  que se coloca entre os dois números, que se dizem *fatôres*, e se lê: *multiplicado por*. Exemplo :

$$4 \times 3 \quad \text{que se lê: } \textit{quatro multiplicado por três.}$$

Costuma-se, também, indicar a multiplicação de dois números por um ponto colocado entre os fatôres. Assim, no exemplo acima, temos:  $4 \cdot 3$ .

**3. Observações:** 1.ª) Quando o multiplicando é 0 o produto é nulo. Exemplo :

$$0 \times 5 = 0, \quad \text{pois } 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

2.ª) Quando o multiplicando é 1, o produto é igual ao multiplicador. Exemplo :

$$1 \times 4 = 4, \quad \text{pois } 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

**4. Propriedades.** 1.ª) UNIFORME. *A multiplicação conduz a um só resultado.*

2.ª) COMUTATIVA. *A ordem dos fatôres não altera o produto.*

$$\text{De fato: } 4 \times 3 = 12 \quad \text{e} \quad 3 \times 4 = 12$$

e, portanto, sendo iguais os dois resultados, temos :

$$4 \times 3 = 3 \times 4$$

3.<sup>a</sup>) **DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO À SOMA E À DIFERENÇA.**  
 Para multiplicar uma soma ou uma diferença indicada por um número, multiplica-se cada uma de suas parcelas ou termos por esse número, e em seguida somam-se, ou subtraem-se, os resultados. Exemplos:

$$1.^{\circ} \quad (4 + 5) \times 3 = 4 \times 3 + 5 \times 3$$

$$2.^{\circ} \quad (7 - 4) \times 5 = 7 \times 5 - 4 \times 5$$

Esta propriedade é chamada *distributiva* porque o multiplicador se distribui por todos os termos.

4.<sup>a</sup>) Para multiplicar uma soma por outra, pode-se multiplicar cada parcela da primeira por cada parcela da segunda e somar os produtos obtidos. Exemplo:

$$(6 + 3) \times (2 + 5) = 6 \times 2 + 6 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 5$$

### 5. Regras práticas para se efetuar a multiplicação.

1.<sup>a</sup>) A multiplicação de dois números de um só algarismo é feita de memória. Os resultados destas multiplicações encontram-se na *Tábua de multiplicar de Pitágoras* (fig. 3).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

FIG. 3

2.<sup>a</sup>) A multiplicação de um número qualquer por um outro de um só algarismo é feita multiplicando esse algarismo por cada algarismo daquele, a partir da direita. De cada produto parcial escreve-se o algarismo das unidades enquanto as dezenas se juntam ao produto parcial sucessivo. O último produto obtido escreve-se por completo.

$$\begin{array}{r} \text{Disposição prática:} \quad 8\ 329 \\ \quad \quad \quad \times 7 \\ \hline 58\ 303 \end{array}$$

3.<sup>a</sup>) A multiplicação de um número por 10, 100, 1 000, etc., é feita escrevendo-se à sua direita 1, 2, 3, etc., zeros. Exemplos:

$$5 \times 10 = 50$$

$$5 \times 100 = 500$$

$$5 \times 1\ 000 = 5\ 000$$

4.<sup>a</sup>) A multiplicação de um número por um algarismo acompanhado de zeros é feita multiplicando o número pelo algarismo, escrevendo os zeros à direita do resultado. Exemplo:

$$218 \times 400 = 87\ 200 \quad (218 \times 4 \text{ e colocam-se dois zeros})$$

5.<sup>a</sup>) A multiplicação de dois números quaisquer é feita multiplicando um deles por cada algarismo do outro, a partir da direita (de acordo com a segunda regra), e dispondo os vários produtos parciais em colunas, de modo que cada algarismo das unidades desses produtos parciais esteja debaixo do algarismo das dezenas do produto precedente. Em seguida somam-se os resultados dos vários produtos parciais obtidos.

$$\begin{array}{r} \text{Disposição prática:} \quad 56\ 387 \\ \quad \quad \quad \times 158 \\ \hline 451\ 096 \\ 2\ 819\ 35 \\ 5\ 638\ 7 \\ \hline 8\ 090\ 146 \end{array}$$

6. **Prova.** A prova da multiplicação é feita refazendo a operação depois de trocada a ordem dos fatores. Pela propriedade comutativa, deve encontrar-se o mesmo resultado se a operação estiver certa.

**7. Produto de vários fatores.** Dados vários números, reunidos pelos sinais de multiplicação, chama-se *produto de vários fatores* o resultado que se obtém multiplicando o primeiro fator pelo segundo, o resultado pelo terceiro, e assim por diante. Exemplo:

$$5 \times 3 \times 2 \times 6 = 15 \times 2 \times 6 = 30 \times 6 = 180$$

Num produto de vários fatores, temos as seguintes propriedades:

1.<sup>a</sup>) A ordem com que os fatores figuram no produto não altera o resultado (propriedade comutativa). Exemplo:

$$8 \times 3 \times 5 \times 7 = 5 \times 3 \times 8 \times 7 = 7 \times 5 \times 3 \times 8$$

2.<sup>a</sup>) Podem substituir-se dois ou mais fatores pelo seu produto (propriedade associativa). Exemplo:

$$3 \times 5 \times 4 \times 7 = 3 \times 20 \times 7$$

3.<sup>a</sup>) Se um dos fatores é zero, o produto será nulo (propriedade do anulamento). Exemplo:

$$7 \times 5 \times 0 \times 8 = 0$$

De fato:

$$7 \times 5 \times 0 \times 8 = 35 \times 0 \times 8 = 0 \times 8 = 0$$

4.<sup>a</sup>) Se um dos fatores é 1, pode-se desprezá-lo no produto. Exemplo:

$$8 \times 5 \times 1 \times 4 = 8 \times 5 \times 4$$

**8. Múltiplos de um número.** Chama-se *múltiplo de um número* o produto deste número por outro número inteiro qualquer. Exemplo:

$$5 \times 4 = 20, \text{ e portanto } 20 \text{ é múltiplo de } 5 \text{ (ou de } 4).$$

Todos os múltiplos de um número são obtidos multiplicando-o pelos números que constituem a sucessão dos números inteiros. Assim, por exemplo, os múltiplos de 5 são:

$$5 \times 0 = 0; 5 \times 1 = 5; 5 \times 2 = 10; 5 \times 3 = 15; \dots$$

... e de um modo geral  $5 \times m$ , onde  $m$  é um número inteiro qualquer. Dessa forma, é fácil ver que qualquer número tem uma *infinitude de múltiplos*.

Os múltiplos de 2:

$$2 \times 0 = 0; 2 \times 1 = 2; 2 \times 2 = 4; 2 \times 3 = 6; \dots$$

e de um modo geral  $2 \times m$ , são chamados *pares*, e os demais múltiplos que, necessariamente terminam em:

$$1, 3, 5, 7 \text{ e } 9$$

são denominados *ímpares*.

Observando que cada um dos números ímpares é o *sucessivo* de um número par na *sucessão dos números inteiros*, conclui-se que a forma geral dos números ímpares é  $2 \times m + 1$ .

Notamos ainda que:

1.<sup>o</sup>) O zero é múltiplo de todos os números.

De fato: 0 é múltiplo de 2 ( $2 \times 0 = 0$ ).

0 é múltiplo de 3 ( $3 \times 0 = 0$ ).

etc.

2.<sup>o</sup>) Todo número é múltiplo de si próprio e da unidade.

De fato: 2 é múltiplo de 2 ( $2 \times 1 = 2$ ).

2 é múltiplo de 1 ( $2 \times 1 = 2$ ).

**9. Expressões aritméticas contendo adições, subtrações e multiplicações.** O cálculo dessas expressões é feito efetuando, *primeiramente* as *multiplicações*, depois as *adições* e *subtrações*.

Assim, na expressão:

$$4 + 7 \times 3$$

efetua-se primeiramente a multiplicação ( $7 \times 3 = 21$ ), e, em seguida, a adição ( $4 + 21 = 25$ ).

Logo:

$$4 + 7 \times 3 = 25$$

No caso da expressão conter operações indicadas entre parênteses, colchetes ou chaves, efetuam-se inicialmente as operações indicadas nos parênteses mais internos, em seguida as contidas entre colchetes e depois as que estiverem entre chaves. Exemplos:

1) Calcular o valor da expressão:

$$5 \times (8 + 3) + 4 \times 2$$

Temos:

$$\begin{aligned} 5 \times 11 + 8 &= \\ = 55 + 8 &= \\ = 63. & \end{aligned}$$

2) Calcular o valor da expressão:

$$\begin{aligned} & 51 - [(7 - 3) \times 4 + 5 \times (4 + 3)] \\ \text{Temos: } & 51 - [4 \times 4 + 5 \times 7] = \\ & = 51 - [16 + 35] = \\ & = 51 - [16 + 35] = \\ & = 51 - 51 = \\ & = 0. \end{aligned}$$

3) Calcular o valor da expressão:

$$\begin{aligned} & 18 - \{6 + [9 \times (5 - 2) - (10 - 3) \times 3]\} \\ \text{Temos: } & 18 - \{6 + [9 \times 3 - 7 \times 3]\} = \\ & = 18 - \{6 + [27 - 21]\} = \\ & = 18 - \{6 + 6\} = \\ & = 18 - 12 = \\ & = 6. \end{aligned}$$

4) Calcular o valor da expressão:

$$\begin{aligned} & 26 + 5 \times [14 + 7 \times (8 - 2 \times 3) - (3 + 5 - 2) \times 4] \\ \text{Temos: } & 26 + 5 \times [14 + 7 \times (8 - 6) - (8 - 2) \times 4] = \\ & = 26 + 5 \times [14 + 7 \times 2 - 6 \times 4] = \\ & = 26 + 5 \times [14 + 14 - 24] = \\ & = 26 + 5 \times [28 - 24] = \\ & = 26 + 5 \times 4 = \\ & = 26 + 20 = \\ & = 46. \end{aligned}$$

**10. Produto de um número por uma grandeza.**  
*Produto de um número por uma grandeza (ou de uma grandeza por um número) é a grandeza, referida à mesma unidade, que tem por medida o produto do número dado pela medida da grandeza considerada. A grandeza resultante diz-se grandeza múltipla da grandeza considerada, segundo o número dado.*

$$\begin{aligned} 3 \times 5m &= (3 \times 5)m = 15m. \\ 4 \times 7l &= (4 \times 7)l = 28l. \end{aligned}$$

**11. Erros mais comuns.** Os produtos de duas grandezas, como, por exemplo:

$$\begin{aligned} 5m \times 7l &= 35m (?) \\ 5m \times 7l &= 35l (?) \end{aligned}$$

não têm sentido. No caso da resolução, por exemplo, da expressão

$$3 \times 8 \times 5$$

nunca se devem escrever:

$$\begin{aligned} \text{e, sim, } & 3 \times 8 = 24 \times 5 = 120 (?) \\ & 3 \times 8 \times 5 = 24 \times 5 = 120. \end{aligned}$$

### EXERCÍCIOS SÔBRE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

- Aplicando as propriedades da multiplicação, efetuar, *mentalmente*, as multiplicações:
 

1. <sup>a</sup> ) $150 \times 40$	3. <sup>a</sup> ) $9 \times 2 \times 5 \times 7$
2. <sup>a</sup> ) $20 \times 32\,000$	4. <sup>a</sup> ) $12 \times 50 \times 2$
- Aplicar a propriedade distributiva no cálculo das seguintes expressões:
 

1. <sup>a</sup> ) $(18 + 3) \times 7$	3. <sup>a</sup> ) $(9 + 6) \times (3 + 2)$
2. <sup>a</sup> ) $(7 + 11 - 6) \times 5$	4. <sup>a</sup> ) $(2 + 3 + 5) \times (4 + 2 + 1)$
- Calcular o valor das seguintes expressões:
  - 1.<sup>a</sup>)  $(25 - 3 \times 8) + 5 \times 2$
  - 2.<sup>a</sup>)  $36 + 3 \times [(15 + 7 \times (3 + 2) - 12 \times (9 - 7))] + 4 \times (5 + 1 \times 4)$
  - 3.<sup>a</sup>)  $(25 - 3 \times 7) \times [14 + 3 \times (12 - 3 \times 3) - 4 \times 2] - 3 \times (12 - 2 \times 6)$
  - 4.<sup>a</sup>)  $5 + 3 \times \{11 + 6 \times [11 + 4 \times (8 - 3)] - 2 \times (7 - 5)\} - 7 \times 2$
  - 5.<sup>a</sup>)  $(8 + 5 \times 3) \times \{103 + 5 \times [37 - 3 \times (5 + 4)] - 53 \times (7 - 3 \times 2)\}$
- Num produto de dois fatores um deles é 12. Aumentando outro de 6 unidades, que alteração sofre o produto?
- A soma de dois números é 15. Multiplicando esses números por 4, o que acontece a essa soma?
- Num produto de vários fatores, multiplicando um deles por 3 e outro por 5, por quanto vem multiplicando o produto?
- Qual o número que se deve somar a 69 para se ter 10 vezes o valor de 69?
- Quantos segundos tem um ano, sabendo que um ano tem 365 dias, o dia tem 24 horas, a hora tem 60 minutos e o minuto 60 segundos?
- Um comerciante comprou 85 metros de fazenda a Cr\$ 48,00 o metro. Revende 30 metros dessa fazenda ao preço de Cr\$ 62,00 o metro e o restante a Cr\$ 65,00 o metro. Quanto ganhou o comerciante nesse negócio?
- Cai um raio e depois de 6 segundos ouve-se o estrondo. A que distância caiu o raio, sabendo que o som percorre 340 metros por segundo?
- Tem o mesmo número de letras uma página de 38 linhas de 60 letras cada linha e outra de 60 linhas de 38 letras cada linha. Por quê?

12. Um recipiente tem a capacidade de 10 000 litros. Uma torneira despeja 30 litros de água por minuto e uma outra 28 litros. Pergunta-se: Quantos litros de água faltam para encher esse reservatório, se a primeira torneira ficou aberta 120 minutos e a segunda 150?

RESPOSTAS:

2. 1.<sup>a</sup>)  $18 \times 7 + 3 \times 7$ ; 2.<sup>a</sup>)  $7 \times 5 + 11 \times 5 - 6 \times 5$ ;
- 3.<sup>a</sup>)  $9 \times 3 + 9 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 2$ ;
- 4.<sup>a</sup>)  $2 \times 4 + 2 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 4 + 3 \times 2 + 3 \times 1 + 5 \times 4 + 5 \times 2 + 5 \times 1$ .
3. 1.<sup>a</sup>) 11; 2.<sup>a</sup>) 150; 3.<sup>a</sup>) 60; 4.<sup>a</sup>) 570; 5.<sup>a</sup>) 2 300.
4. Aumenta de  $6 \times 12 = 72$ .
5. Passa a valer 60.
6. Por 15.
7. 621.
8. 31 536 000 segundos.
9. Cr\$ 1 355,00.
10. 2 040 metros.
11. Sim. Porque  $38 \times 60 = 60 \times 38$ .
12. 2 200 litros.

## DIVISÃO

**1. Divisão exata. Definição.** *Divisão exata é a operação que tem por fim, dados dois números, numa certa ordem, determinar um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro.*

A indicação dessa operação é feita com os sinais : ou  $\div$  que se lê: *dividido por*. O primeiro número chama-se *dividendo*, o segundo *divisor* e o resultado da operação, *quociente*. Exemplo:

$$15 : 3 = 5 \text{ pois } 5 \times 3 = 15 \text{ onde: } \begin{cases} 15 \text{ é o dividendo.} \\ 3 \text{ é o divisor.} \\ 5 \text{ é o quociente.} \end{cases}$$

Para a *divisão exata*, temos, portanto, a seguinte *relação fundamental*:

$$\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor}$$

**2. Condições de possibilidade.** 1.<sup>a</sup>) Sendo o dividendo igual ao produto do divisor pelo quociente, segue-se que o *dividendo deve ser múltiplo do divisor*;

2.<sup>a</sup>) O *divisor* deve ser *maior que zero*, em virtude de não ter sentido dividir-se um número dado por 0, pois, não existe

nenhum número (portanto quociente) que, multiplicado por 0, reproduza o número dado. Assim, por exemplo:  $7 : 0 = ?$  (*impossível*), pois, não existe número algum que, multiplicado por 0, dê 7. No caso de  $0 : 0$ , qualquer número, poderia figurar como quociente, em virtude de ser nulo o produto de qualquer número por zero.

OBSERVAÇÕES:

1.<sup>a</sup>) Quando o dividendo é zero, o quociente será zero. Exemplo:

$$0 : 5 = 0 \quad \text{pois} \quad 0 \times 5 = 0$$

2.<sup>a</sup>) Quando o dividendo e o divisor são iguais entre si, o quociente será igual a 1. Exemplo:

$$7 : 7 = 1 \quad \text{pois} \quad 1 \times 7 = 7$$

3.<sup>a</sup>) Quando o divisor é igual a 1, o quociente será igual ao dividendo. Exemplo:

$$9 : 1 = 9 \quad \text{pois} \quad 9 \times 1 = 9$$

**3. Propriedades da divisão exata.** 1.<sup>a</sup>) UNIFORME. Isto é, a divisão conduz sempre a um único resultado.

2.<sup>a</sup>) É NÃO-COMUTATIVA. De fato,  $15 : 3 = 5$ ; trocando o dividendo pelo divisor, temos:  $3 : 15$ , que não tem sentido, com os números inteiros, pois, 3 não é múltiplo de 15. Logo:

$$15 : 3 \neq 3 : 15$$

3.<sup>a</sup>) DISTRIBUTIVA. Para dividir uma soma, ou diferença, por um número, pode-se dividir cada um dos termos pelo número, e, em seguida, somar, ou subtrair, os quocientes obtidos, desde que cada um desses termos seja *múltiplo do divisor*. Exemplos:

$$(18 + 12 + 15) : 3 = 18 : 3 + 12 : 3 + 15 : 3$$

$$(42 - 14) : 7 = 42 : 7 - 14 : 7$$

**4. Divisão aproximada.** No caso de se querer dividir, por exemplo, 53 por 6, observa-se que não se encontra um número inteiro que, multiplicado por 6, reproduza 53, pois,

$$8 \times 6 = 48 \quad \text{é menor que } 53$$

$$9 \times 6 = 54 \quad \text{é maior que } 53$$

O número 8, que é o maior número que multiplicado por 6 não ultrapassa o dividendo 53, é denominado *quociente aproximado a menos de uma unidade por falta*, porque o erro que se comete, quando se toma o número 8 para quociente, é menor que uma unidade. Temos, assim, a seguinte definição:

Divisão aproximada de um número por outro, dados numa certa ordem, é a operação que tem por fim determinar o maior número que, multiplicado pelo segundo, dê um resultado menor que o primeiro.

Chama-se *resto* de uma *divisão aproximada* a diferença entre o dividendo e o produto do quociente aproximado pelo divisor.

A indicação dessa operação é feita :

dividendo  $\left| \begin{array}{l} \text{divisor} \\ \text{quociente apr.} \end{array} \right.$  e o exemplo acima  $53 \left| \begin{array}{l} 6 \\ 8 \end{array} \right.$

onde :

$$\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}$$

$$53 = 8 \times 6 + 5$$

que é a *relação fundamental* entre o dividendo, o divisor, o quociente aproximado e o resto para as *divisões aproximadas*.

Do estudo feito, observamos que :

1.º) O resto de uma divisão aproximada é sempre menor que o divisor.

2.º) O resto de uma divisão exata é zero. Exemplos :

$$\begin{array}{r} 39 \left| \begin{array}{l} 5 \\ 7 \end{array} \right. \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \left| \begin{array}{l} 7 \\ 1 \end{array} \right. \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \left| \begin{array}{l} 8 \\ 3 \end{array} \right. \\ 0 \end{array}$$

5. **Regras práticas para efetuar as divisões.** 1.ª) Lembrando a tábua de multiplicar de Pitágoras, podem fazer-se de memória as divisões em que o divisor tem um só algarismo e o quociente é menor que 10. Assim, por exemplo, na divisão de 30 por 4, o quociente é 7 e o resto 2, porque  $30 = 7 \times 4 + 2$ .

2.ª) Para dividir um número qualquer por outro, separa-se no dividendo, a partir da esquerda, um número que contenha o divisor no mínimo uma vez, e, no máximo, nove vezes. A parte separada é o primeiro dividendo parcial. Divide-se este pelo divisor, obtendo o primeiro algarismo do quociente. A se-

guir multiplica-se esse algarismo pelo divisor e subtra-se o produto do primeiro dividendo parcial. À direita do resto obtido, escreve-se (ou se baixa) o algarismo seguinte do dividendo, e obtém-se assim o *segundo dividendo parcial*. Divide-se este pelo divisor e encontra-se o segundo algarismo do quociente, que de novo se multiplica pelo divisor, subtraindo-se a seguir o produto do segundo dividendo parcial. Proceda-se a seguir da mesma forma até baixar todos os algarismos do dividendo. O último resto obtido é o resto da divisão. Exemplo :

Dividir 5 639 por 15.

A disposição prática é a seguinte :

$$\begin{array}{r} 5\ 639 \left| \begin{array}{l} 15 \\ 375 \text{ (quociente)} \end{array} \right. \\ 45 \\ \hline 113 \\ 105 \\ \hline 0\ 089 \\ 75 \\ \hline 14 \text{ (resto)} \end{array}$$

6. **Prova.** A prova da divisão é feita multiplicando o quociente pelo divisor e somando este produto com o resto. Se a operação estiver certa, deve encontrar-se o dividendo. Exemplo :

Prova da divisão do exemplo acima :

$$\begin{aligned} 375 \times 15 &= 5\ 625 \\ 5\ 625 + 14 &= 5\ 639 \text{ (dividendo)} \end{aligned}$$

7. **Expressões aritméticas contendo as quatro operações.** O cálculo das expressões aritméticas contendo as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) é feito obedecendo à seguinte ordem :

Em primeiro lugar, as multiplicações e divisões, e, em seguida, as adições e subtrações, respeitando-se a ordem de se iniciar com os parênteses mais internos, a seguir os colchetes e depois as chaves, se os houver. Exemplo :

Calcular o valor das seguintes expressões :

1.ª)  $54 - 3 \times [(7 + 6 : 2) - (4 \times 3 - 5)]$

Temos :

$$\begin{aligned} 54 - 3 \times [(7 + 3) - (12 - 5)] \\ = 54 - 3 \times [10 - 7] = \\ = 54 - 9 = \\ = 45. \end{aligned}$$

$$2.^a) [36 : 2 \times (3 + 3 \times 5)] : \{27 - [3 + (8 - 4 : 2)]\}$$

$$\text{Temos: } [18 \times (3 + 15)] : \{27 - [3 + (8 - 2)]\} =$$

$$= [18 \times 18] : \{27 - [3 + 6]\} =$$

$$= 324 : \{27 - 9\} =$$

$$= 324 : 18 =$$

$$= 18.$$

$$3.^a) \{[(8 \times 4 + 3) : 7 + (3 + 15 : 5) \times 3] \times 2 - (19 - 7) : 6\} \times 2 + 12$$

$$\text{Temos: } \{[(32 + 3) : 7 + (3 + 3) \times 3] \times 2 - 12 : 6\} \times 2 + 12 =$$

$$= \{[35 : 7 + 6 \times 3] \times 2 - 2\} \times 2 + 12 =$$

$$= \{[5 + 18] \times 2 - 2\} \times 2 + 12 =$$

$$= \{23 \times 2 - 2\} \times 2 + 12 =$$

$$= \{46 - 2\} \times 2 + 12 =$$

$$= 44 \times 2 + 12 =$$

$$= 88 + 12 =$$

$$= 100.$$

**8. Quociente e resto de uma grandeza por um número.** *Quociente de uma grandeza por um número* (diferente de zero) é a grandeza, referida à mesma unidade, que tem por medida o quociente da medida da grandeza considerada pelo número dado. A diferença entre a grandeza e o produto do número pelo quociente definido diz-se *resto* da divisão da grandeza por aquele número. Indicações (exemplos):

$$\text{Quoc. } (100m : 5) = 20m \quad \text{e} \quad \text{resto } (100m : 5) = 0.$$

$$\text{Quoc. } (8l : 5) = 1l \quad \text{e} \quad \text{resto } (8l : 5) = 3l.$$

**9. Quociente e resto de uma grandeza por outra.** *Quociente de uma grandeza por outra* (homogênea e não nula), referidas à mesma unidade, é o quociente das medidas dessas grandezas na ordem em que foram consideradas. A diferença entre a primeira grandeza e o produto da segunda pelo quociente entre elas chama-se *resto* da divisão da primeira grandeza pela segunda. Indicações (exemplos):

$$\text{Quoc. } (20m : 5m) = 4 \quad \text{e} \quad \text{resto } (20m : 5m) = 0m.$$

$$\text{Quoc. } (25l : 8l) = 3 \quad \text{e} \quad \text{resto } (25l : 8l) = 1l.$$

**10. Erros mais comuns.** Não tem sentido a expressão:

$$30m : 5l = 6m (?).$$

Por outro lado, enquanto é verdadeira a relação:

$$50 : 5 = 10,$$

está errada esta outra:

$$52 : 5 = 10 (?),$$

pois,  $10 \times 5$  não é evidentemente, 52. Devemos, ainda, frizar que

$$\frac{5}{5} \text{ não é zero,}$$

mas 1, pela 2.<sup>a</sup> obs. sobre a divisão. Também não confundir a *divisão impossível*  $5 : 0$  com a divisão possível  $0 : 5 = 0$  (porque  $0 \times 5 = 0$ ) ou com a divisão  $5 : 1 = 5$  (porque  $5 \times 1 = 5$ ).

## EXERCÍCIOS SÔBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

- Efetuar mentalmente as divisões:
  - $37\ 000 : 500$
  - $420\ 000 : 70\ 000$ .
- Aplicar a propriedade distributiva nas expressões aritméticas:
  - $(36 + 42 - 64) : 6$
  - $(99 - 55) : 11$ .
- Calcular o valor das expressões aritméticas:
  - $(1 + 3 \times 5) \times (15 - 6 : 2)$
  - $\{[32 - (11 - 5) \times 2] + 12\} : [4 + 4 \times (7 - 2 \times 3)]$
  - $[3 \times (7 - 5) \times (1 + 3 \times 8)] : [25 \times 3 \times (17 - 3 \times 5)]$
  - $\{130 - 2 \times [24 - 6 \times (10 - 2 \times 3)] : (15 \times 2 - 3)\} - 130$
  - $\{18 + 7 \times [28 - (4 \times 3) : (1 + 5)] - 48 : 6\} : [28 - 4 \times 5]$
- Determinar o número que, dividido por 213, dá para quociente 401 e resto 127.
- Numa divisão, o dividendo é 17 648, o quociente 82 e o resto 18. Determinar o valor do divisor.
- Pensei em certo número. Multipliquei-o por 72 e resultou 1 080. Qual o número pensado?
- João e seu pai fizeram um trato: cada vez que João acertasse um problema, receberia de seu pai Cr\$ 3,00 e cada vez que errasse daria Cr\$ 2,00. Tendo João recebido Cr\$ 21,00, depois de resolver 12 problemas, pergunta-se quantos acertou.
- Uma lesma sobe, durante o dia, 3 metros numa parede e, durante a noite, o seu próprio peso faz descer 1,20 metros. Quanto tempo levará para atingir o cimo da parede que tem 5,4 metros?
- Um comerciante comprou 180 pares de sapatos. Vendeu 60 pares por Cr\$ 9 000,00 ganhando Cr\$ 35,00 em cada par. Quanto lhe custaram os pares de sapato?
- Sabendo que um corredor vai de um lugar a outro em 9 horas, fazendo 16 quilômetros por hora, quer-se conhecer quantas horas empregaria para percorrer o mesmo caminho se fizesse 18 quilômetros por hora.

## RESPOSTAS:

- |  |                    |
|--|--------------------|
| 2. 1. <sup>a</sup> ) 36 : 6 + 42 : 6 - 64 : 6; | 4. 85 540.         |
| 2. <sup>a</sup> ) 99 : 11 - 55 : 11.           | 5. 215.            |
| 3. 1. <sup>a</sup> ) 192;                      | 6. 15.             |
| 2. <sup>a</sup> ) 4;                           | 7. 9.              |
| 3. <sup>a</sup> ) 1;                           | 8. 3 dias.         |
| 4. <sup>a</sup> ) 0;                           | 9. Cr\$ 20 700,00. |
| 5. <sup>a</sup> ) 24.                          | 10. 8 horas.       |

### PROBLEMAS TÍPICOS SOBRE AS QUATRO OPERAÇÕES

Estudaremos alguns processos resolutivos de problemas de aritmética que envolvam as quatro operações. São esses problemas que dão a ginástica mental indispensável àquelles que se destinam à arte de ensinar. Existe uma série de problemas, chamados *típicos*, cujos processos de resolução se aplicam na solução de outros problemas de aritmética. Vejamos alguns deles

**PRIMEIRO TIPO:** A soma de dois números é 76 e o maior deles é 18 vezes o outro. Quais os dois números?

Representando o menor dos números por 1 (1 vez), o maior deles será representado por... 18 (18 vezes o menor); E a soma desses números será representada por..... 19 (19 vezes o menor)

Valendo a soma 76 (que representa 19 vezes o menor). o menor desses números será obtido dividindo 76 por 19.  
Logo:

$$76 : 19 = 4 \text{ (menor) e o maior, será: } 18 \times 4 = 72.$$

**SEGUNDO TIPO:** Dois chapéus custaram Cr\$ 366,00. Um deles custou Cr\$ 36,00 mais do que o outro. Qual é o preço de cada um?

Se, do total de Cr\$ 366,00, subtrairmos Cr\$ 36,00, que é a diferença entre os preços, obteremos Cr\$ 330,00 que representaria o valor dos dois chapéus, caso custassem o mesmo preço, isto é, Cr\$ 330,00 : 2 = Cr\$ 165,00 cada um. Logo: um chapéu custa Cr\$ 165,00

$$\text{e o outro..... } Cr\$ 165,00 + Cr\$ 36,00 = Cr\$ 201,00$$

**TERCEIRO TIPO:** Repartir Cr\$ 4 317,00 entre três pessoas, de modo que a segunda receba Cr\$ 528,00 mais que a primeira e a terceira Cr\$ 315,00 mais que a segunda.

Faremos a seguinte representação:

$$\begin{aligned} 1.^a &\rightarrow 1.^a \\ 2.^a &\rightarrow 1.^a + Cr\$ 528,00 \\ 3.^a &\rightarrow 1.^a + Cr\$ 528,00 + Cr\$ 315,00 \end{aligned}$$

Logo:

$$1.^a + \underbrace{1.^a + Cr\$ 528,00}_{2.^a} + \underbrace{1.^a + Cr\$ 528,00 + Cr\$ 315,00}_{3.^a}$$

equivale à importância de Cr\$ 4 317,00, que deve ser repartida.

Essa distribuição equivale também à seguinte:

$$1.^a + 1.^a + 1.^a + \underbrace{Cr\$ 528,00 + Cr\$ 528,00 + Cr\$ 315,00}_{Cr\$ 1 371,00} \rightarrow Cr\$ 4 317,00$$

ou 3 vezes a 1.<sup>a</sup> + Cr\$ 1 371,00..... → Cr\$ 4 317,00  
e 3 vezes a 1.<sup>a</sup>..... (4 317,00 - 1 371,00) → Cr\$ 2 946,00  
e, portanto, a 1.<sup>a</sup>..... (2 946,00 : 3)..... → Cr\$ 982,00

Logo:

$$\begin{aligned} 1.^a &\rightarrow Cr\$ 982,00 \\ 2.^a &\rightarrow Cr\$ 982,00 + Cr\$ 528,00 = Cr\$ 1 510,00 \\ 3.^a &\rightarrow Cr\$ 1 510,00 + Cr\$ 315,00 = Cr\$ 1 825,00 \end{aligned}$$

**QUARTO TIPO:** Um aluno recebe Cr\$ 3,00 por problema que acerta e paga Cr\$ 2,00 por problema que erra. Fez 50 problemas e recebeu Cr\$ 85,00. Quantos acertou?

Se o aluno acertasse todos os 50 problemas, receberia Cr\$ 150,00 (50 × 3,00). Como só recebeu Cr\$ 85,00, a diferença 150,00 - 85,00 = 65,00 representa a quantia que o aluno deixou de ganhar por ter errado alguns problemas. Como cada problema errado acarreta um prejuízo de: Cr\$ 5,00, pois

$$\begin{aligned} Cr\$ 3,00 &\text{ (que deixou de ganhar)} \\ Cr\$ 2,00 &\text{ (que deve pagar)} \\ \hline Cr\$ 5,00 & \end{aligned}$$

segue-se que, dividindo Cr\$ 65,00 por Cr\$ 5,00 teremos o número dos problemas errados, isto é, Cr\$ 65,00 : Cr\$ 5,00 = 13.  
Portanto: o aluno errou 13 problemas e acertou 37 (50 - 13).



Prova:

Acertando 37 problemas recebeu, Cr\$ 111,00 (37 × Cr\$ 3,00)  
errando 13 problemas pagou Cr\$ 26,00 (13 × Cr\$ 2,00)

Quantia recebida..... Cr\$ 85,00

QUINTO TIPO: Um negociante inescrupuloso compra 450 litros de vinho a Cr\$ 5,00 o litro. Junta ao vinho 50 litros de água e quer ganhar na venda Cr\$ 1 200,00. Por quanto deve vender o litro?

O vinho custou para esse negociante:  $450 \times \text{Cr\$ } 5,00 = \text{Cr\$ } 2\,250,00$ . Para ter um lucro de Cr\$ 1 200,00 o cálculo será feito sobre:

$$\text{Cr\$ } 2\,250,00 + \text{Cr\$ } 1\,200,00 = \text{Cr\$ } 3\,450,00$$

Tendo acrescentado 50 litros de água, para saber o preço do litro da mistura (500 litros), basta dividir Cr\$ 3 450,00 por 500, isto é,

$$\text{Cr\$ } 3\,450,00 : 500 = \text{Cr\$ } 6,90$$

Logo: o negociante deve vender o litro por Cr\$ 6,90 para lucrar Cr\$ 1 200,00.

SEXTO TIPO: Tenho que distribuir entre alguns pobres uma certa quantia. Se der Cr\$ 2,00 a cada pobre, ficarei com Cr\$ 25,00; e se der Cr\$ 3,00, faltam-me Cr\$ 15,00. Quantos são os pobres e qual a quantia que tenho?

Dando Cr\$ 2,00 a cada pobre sobram → Cr\$ 25,00

Dando Cr\$ 3,00 a cada pobre faltam → Cr\$ 15,00

Logo: uma diferença de Cr\$ 1,00 (3,00 - 2,00) acarreta uma despesa de Cr\$ 40,00 (25,00 + 15,00), pois, deixa de sobrar Cr\$ 25,00 e ainda faltam Cr\$ 15,00. Portanto, o número de pobres será dado pela divisão:

$$\text{Cr\$ } 40,00 : \text{Cr\$ } 1,00 = 40$$

A quantia que tenho será dada pelo produto:

número de pobres × Cr\$ 2,00 + Cr\$ 25,00 (sobra)  
ou  $40 \times \text{Cr\$ } 2,00 + \text{Cr\$ } 25,00 = \text{Cr\$ } 80,00 + \text{Cr\$ } 25,00 = \text{Cr\$ } 105,00$ .

Prova:

$40 \times \text{Cr\$ } 2,00 = \text{Cr\$ } 80,00$   
sobram..... Cr\$ 25,00  
tenho..... Cr\$ 105,00

$40 \times \text{Cr\$ } 3,00 = \text{Cr\$ } 120,00$   
faltam..... Cr\$ 15,00  
tenho..... Cr\$ 105,00

SÉTIMO TIPO: Uma pessoa tem Cr\$ 4 679,00 e outra tem Cr\$ 3 415,00. A primeira economiza Cr\$ 438,00 e a segunda Cr\$ 754,00 por mês. No fim de quantos meses terão quantias iguais?

Diferença das quantias:

$$\text{Cr\$ } 4\,679,00 - \text{Cr\$ } 3\,415,00 = \text{Cr\$ } 1\,264,00$$

Diferença das economias:

$$\text{Cr\$ } 754,00 - \text{Cr\$ } 438,00 = \text{Cr\$ } 316,00$$

Dividindo-se Cr\$ 1 264,00 por Cr\$ 316,00, obteremos o quociente 4, que representa o número de meses necessários para que as quantias sejam iguais.

OTAVO TIPO: Pensei em certo número, a seguir acrescentei 7 a esse número e multipliquei o resultado por 4. Subtraí depois 6 e obtive o número 310. Que número pensei?

Basta, para resolver o problema, partir do resultado encontrado (310) e fazer as operações inversas das que foram indicadas. Assim:

$$310 + 6 = 316; \quad 316 : 4 = 79; \quad 79 - 7 = 42$$

Logo: o número pensado foi 72.

Prova:  $72; \quad 72 + 7 = 79; \quad 79 \times 4 = 316; \quad 316 - 6 = 310$

## PROBLEMAS PARA SEREM RESOLVIDOS

- Dois números têm por soma 120 e o maior vale 11 vezes o menor. Quais os números?
- Determinar dois números, sabendo que a sua diferença é 128 e que o maior é 5 vezes o menor.
- Uma pessoa tem Cr\$ 6 800,00 e outra Cr\$ 4 200,00. A primeira economiza Cr\$ 4 500,00 por ano e a segunda Cr\$ 5 800,00. No fim de quantos anos terão quantias iguais?
- Um operário ganha Cr\$ 96,00 por dia de trabalho e paga a multa de Cr\$ 24,00 por dia de falta injustificada. Depois de 25 dias recebe Cr\$ 2 040,00. Quantos dias trabalhou?
- Se eu tivesse Cr\$ 9 804,00 mais do que tenho no momento, poderia comprar um terreno que custa Cr\$ 32 154,00 e me sobriariam ainda Cr\$ 3 491,00. Quanto possuo?
- Achar três números tais que a soma do primeiro com o segundo seja 200, a do primeiro com o terceiro seja 208 e a do segundo com o terceiro 216.

7. A soma de dois números é 366 e a sua diferença é 86. Determinar esses números.
8. Antônio comprou dois frangos, pagando pelo primeiro Cr\$ 6,00 mais que pelo segundo. Dizer quanto custou cada frango, sabendo que duas vezes o preço do segundo menos uma vez o preço do primeiro é igual a Cr\$ 22,00.
9. Uma herança de Cr\$ 132 000,00 foi dividida entre três pessoas, de modo que a segunda e a terceira receberam, respectivamente, o dobro e o triplo do que recebeu a primeira. Quanto recebeu cada pessoa?
10. Dois recipientes podem conter juntos 3 415 litros de água. Qual a capacidade de cada um deles, sabendo que a capacidade do primeiro é quatro vezes a do segundo?
11. Uma pessoa comprou galinhas e coelhos num total de 48 cabeças e 130 pés. Quantas galinhas e quantos coelhos comprou?
12. Pensei em um número, multipliquei-o por 2 e subtraí 13 desse resultado, obtendo 45. Qual o número pensado?
13. A soma das idades de três pessoas é 75 anos. Juntando-se 6 anos à idade da primeira, 12 anos à idade da terceira e tirando-se 3 anos da idade da segunda, obtém-se três números iguais. Qual a idade de cada pessoa?
14. De uma estação parte um trem que faz 50 quilômetros por hora. Depois de duas horas, parte um outro trem no mesmo sentido alcança o primeiro depois de 5 horas. Quantos quilômetros por hora faz o segundo trem?
15. Um negociante comprou um certo número de metros de fazenda, contando revendê-la a Cr\$ 156,00 o metro, a fim de ganhar Cr\$ 6 120,00. Como somente foi possível revender a Cr\$ 138,00 o metro, ficou ganhando nessa transação Cr\$ 3 960,00. Quantos metros comprou esse negociante?
16. Multiplicando um número por 8 e aumentando esse produto de 1 215, obtém-se 1 575. Qual o número?
17. A diferença entre dois números é 144 e o maior deles vale 7 vezes o menor. Determinar esses números.
18. A soma de dois números é 242 e a sua diferença contém 9 vezes o menor. Qual o maior?
19. A soma de dois números é 392 e o quociente entre eles 13. Determinar esses números.
20. Dividir 12 em duas partes tais que uma, mais o triplo da outra, dê um total igual a 24.
21. Tem-se quatro números: a soma dos três primeiros é 843; a soma dos três últimos é 1 217; a soma dos dois primeiros e o último 941 e a do primeiro e os dois últimos 1 028. Quais os números?
22. Dividir Cr\$ 1 300,00 entre três pessoas de modo que a primeira tenha Cr\$ 10,00 mais que a segunda e esta Cr\$ 120,00 mais que a terceira.
23. Repartir Cr\$ 630 000,00 entre três pessoas de modo que a segunda tenha quatro vezes mais que a primeira e a terceira quatro vezes mais que a segunda.

24. Uma pessoa dá esmolas a um certo número de pobres. Dando Cr\$ 5,00 a cada um, sobram-lhe Cr\$ 12,00 e, dando Cr\$ 8,00 faltam-lhe Cr\$ 6,00. Quanto tem a pessoa e quantos são os pobres?
25. Um negociante comprou 20 metros de linho e 30 metros de casimira, pagando por tudo Cr\$ 12 800,00. Um metro de casimira custa o dobro do custo do metro de linho. Qual o preço do metro de cada espécie de tecido?
26. A idade de um pai e a de seu filho somam 90 anos. Tirando 15 anos da idade do pai e acrescentando-os à idade do filho, ambas as idades ficam iguais. Qual é a idade de cada um?
27. Dois entregadores ganham juntos Cr\$ 24,00 por dia. No fim de 18 dias o primeiro recebe Cr\$ 162,00 e o segundo Cr\$ 270,00. Quanto recebe cada um deles por dia?
28. Com vinho de Cr\$ 15,00 o litro e vinho de Cr\$ 20,00 o litro, encheu-se uma pipa que contém 50 litros. Quantos litros há de cada espécie, se a pipa cheia de vinho vale Cr\$ 900,00?
29. Um ciclista persegue outro. A distância que os separa é de 6 quilômetros. Pergunta-se em quanto tempo o segundo alcança o primeiro, se o segundo corre 48 quilômetros por hora e o outro 36 quilômetros por hora.
30. Um barbeiro cortou 13 cabelos e fez 21 barbas num dia. Cada barba custou Cr\$ 10,00 e sabe-se que ele recebeu ainda, nesse dia, Cr\$ 90,00 de gorjeta. Tendo ganho no fim do dia a quantia total de Cr\$ 560,00, pergunta-se o preço do corte de cabelo.

## RESPOSTAS:

- |   |   |
|---|---|
| 1. 110 e 10.  | 17. 168 e 24.                               |
| 2. 160 e 32.  | 18. 220 e 22.                               |
| 3. 2 anos.  | 19. 364 e 28.                               |
| 4. 22 dias.   | 20. 6 cada parte.                           |
| 5. Cr\$ 25 841,00.                                  | 21. 126, 315, 402 e 500.                    |
| 6. 96, 104 e 112.                                   | 22. Cr\$ 350,00; Cr\$ 470,00 e Cr\$ 480,00. |
| 7. 226 e 140.                                       | 23. 1.ª) Cr\$ 3 000,00;                     |
| 8. Cr\$ 34,00 e Cr\$ 28,00.                         | 2.ª) Cr\$ 12 000,00 e                       |
| 9. Cr\$ 22 000,00; Cr\$ 44 000,00 e Cr\$ 66 000,00. | 3.ª) Cr\$ 48 000,00.                        |
| 10. 683 litros e 2 732 litros.                      | 24. Cr\$ 42,00 e 6 pobres.                  |
| 11. 31 galinhas e 17 coelhos.                       | Cr\$ 160,00 e Cr\$ 320,00.                  |
| 12. 29.   | 26. 60 anos e 30 anos.                      |
| 13. 24, 33 e 18 anos.                               | 27. Cr\$ 9,00 e Cr\$ 15,00.                 |
| 14. 70 quilômetros por hora.                        | 28. 20l e 30l.                              |
| 15. 120 metros.                                     | 29. ½ h.                                    |
| 16. 45  | 30. Cr\$ 20,00.                             |

## POTENCIAÇÃO

1. Se num produto, todos os fatores são iguais, como por exemplo em

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

pode indicar-se este produto, abreviadamente, escrevendo o fator igual *uma só vez*, e, a seguir, um pouco mais acima, em *tamanho menor*, o número de fatores que se toma, e que se denomina *expoente*. Assim:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

que se lê; "3 elevado à quarta potência".

Estes produtos especiais dão lugar a uma nova operação denominada *potenciação* e cujo resultado se chama *potência*. O fator que se repete é chamado *base*; e o número de vezes que a base é escrita, como fator, chama-se *grau da potência*, que é representado pelo *expoente*.

**2. Definição.** Chama-se *potência* de um número a um produto de fatores iguais a esse número.

A segunda potência de um número é também denominada *quadrado* e a terceira *cubo*. Exemplos:

$4^2$  que se lê: "quatro ao quadrado" e se calcula  $4^2 = 4 \times 4 = 16$   
 $2^3$  que se lê: "dois ao cubo" e se calcula  $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Em particular:  $5^1 = 5$

isto é, um número pode ser considerado como potência de expoente 1.

Chama-se *potência zero* de um número qualquer (diferente de zero), ao número 1. Exemplo:

$$8^0 = 1 \quad \text{e de um modo geral:} \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

OBSERVAÇÕES:

1.<sup>a</sup> As potências de 0 são todas iguais a zero. Exemplo:

$$0^3 = 0 \times 0 \times 0 = 0$$

2.<sup>a</sup> As potências de 1 são todas iguais a 1. Exemplo:

$$1^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

3.<sup>a</sup> As potências de 10 são iguais à unidade seguida de tantos zeros quantas são as unidades do expoente. Exemplos:

$$10^2 = 100; \quad 10^3 = 1\,000; \quad 10^4 = 10\,000$$

**3. Tábua das primeiras potências sucessivas dos números dígitos.** É muito útil, para os cálculos que se seguem, guardar de memória as primeiras potências sucessivas.

Assim:  $2^2 = 4; \quad 2^3 = 8; \quad 2^4 = 16; \quad 2^5 = 32; \quad \dots$   
 $3^2 = 9; \quad 3^3 = 27; \quad 3^4 = 81; \quad \dots$   
 $4^2 = 16; \quad 4^3 = 64; \quad \dots$   
 $5^2 = 25; \quad 5^3 = 125; \quad \dots$   
 $6^2 = 36; \quad 6^3 = 216; \quad \dots$   
 $7^2 = 49; \quad 7^3 = 343; \quad \dots$   
 $8^2 = 64; \quad 8^3 = 512; \quad \dots$   
 $9^2 = 81; \quad 9^3 = 729; \quad \dots$   
 $10^2 = 100; \quad 11^2 = 121; \quad 12^2 = 144; \quad \dots$

**4. Propriedades.** 1.<sup>a</sup>) UNIFORME. Conduz, a potenciação, a um só resultado.

2.<sup>a</sup>) É NÃO-COMUTATIVA, isto é,  $2^3 \neq 3^2$ , pois  $2^3 = 8$  e  $3^2 = 9$ .

3.<sup>a</sup>) DISTRIBUTIVA EM RELAÇÃO AO PRODUTO. Para elevar um produto indicado a uma potência, pode-se elevar cada um dos fatores a essa potência e depois efetuar o produto das potências obtidas. Exemplo:

$$(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2 \quad \text{que, efetuado, é igual a } 9 \times 16 = 144$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido, efetuando primeiramente o produto indicado entre parênteses. Assim:

$$(3 \times 4)^2 = (12)^2 = 144$$

Com relação à soma (ou diferença) não vale a propriedade distributiva. Assim:

$$(4 + 3)^2 \quad \text{não é igual a } 4^2 + 3^2$$

pois, enquanto

$$(4 + 3)^2 = 7^2 = 49 \quad \text{temos que } 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

**5. Regras das operações sobre potências de mesma base.**

1.<sup>a</sup>) O produto de potências da mesma base é uma potência de mesma base, que tem por expoente a soma dos expoentes. Exemplo:

$$4^3 \times 4^2 = 4^{3+2} = 4^5$$

2.<sup>a</sup>) O quociente de duas potências da mesma base é uma potência de mesma base, que tem expoente a diferença dos expoentes. Exemplo:

$$4^5 : 4^2 = 4^{5-2} = 4^3$$

Se as potências têm o mesmo expoente, temos:

$$3^2 : 3^2 = 3^0 = 1 \text{ (como já vimos)}$$

3.<sup>a</sup> Para elevar uma potência a uma potência, multiplicam-se entre si os expoentes. Exemplos:

$$(5^2) = 5^6;$$

$$(2^4)^2 = 2^8$$

6. Cálculo de expressões aritméticas contendo potências. É feito na seguinte ordem:

1.<sup>o</sup> as potências;

2.<sup>o</sup> as multiplicações e divisões;

3.<sup>o</sup> as adições e subtrações,

respeitando-se a ordem de se iniciar com os parênteses, a seguir os colchetes e depois as chaves. Exemplos:

$$1.<sup>o</sup> [3^2 + (5 - 2)^3] : (4 - 1)^2$$

$$\text{Temos: } [9 + 3^3] : 3^2 =$$

$$= [9 + 27] : 9 =$$

$$= 36 : 9 =$$

$$= 4.$$

$$2.<sup>o</sup> 7 + (2^3 \times 3 + 4^2 : 8) : 13 - 3^2$$

$$\text{Temos: } 7 + (8 \times 3 + 16 : 8) : 13 - 9 =$$

$$= 7 + (24 + 2) : 13 - 9 =$$

$$= 7 + 26 : 13 - 9 =$$

$$= 7 + 2 - 9 =$$

$$= 9 - 9 =$$

$$= 0.$$

$$3.<sup>o</sup> \{5 + [4^3 : (3^2 - 1) + 1^5 \times 3]\} : (6 - 2)^2$$

$$\text{Temos: } \{5 + [64 : (9 - 1) + 1 \times 2]\} : 4^2 =$$

$$= \{5 + [64 : 8 + 2]\} : 16 =$$

$$= \{5 + [8 + 2]\} : 16 =$$

$$= \{5 + 10\} : 16 =$$

$$= 16 : 16 =$$

$$= 1.$$

7. Erros mais comuns. É preciso atenção para não escrever

que é igual a 8; nem escrever que:

$$2^3 = 6 \quad (?)$$

$$1^3 = 3 \quad (?)$$

que é 1. Nem tão pouco que

$$2^3 \times 2^4 = 2^{12} \quad (?)$$

pois, êsse produto é igual a 27. Também são diferentes as expressões:

pois,

$$(2^3)^2 \text{ e } 2^{3^2}$$

$$(2^3)^2 = 2^6 \text{ e } 2^{3^2} = 2^9.$$

## EXERCÍCIOS SÔBRE POTÊNCIAS

- Escrever, sob a forma de multiplicação, as seguintes potências:  
1.<sup>o</sup>  $2^3$ ; 2.<sup>o</sup>  $8^2$ ; 3.<sup>o</sup>  $1^5$ ; 4.<sup>o</sup>  $10^4$ ; 5.<sup>o</sup>  $100^3$ .
- Escrever, sob a forma de potências, os produtos seguintes:  
1.<sup>o</sup>  $5 \times 5 \times 5$ ; 2.<sup>o</sup>  $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$ ; 3.<sup>o</sup>  $1 \times 1$ ;  
4.<sup>o</sup>  $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$ ; 5.<sup>o</sup>  $8 \times 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 11 \times 11$ .
- Calcular as potências:  $1^8$ ;  $2^3$ ;  $3^2$ ;  $4^5$ ;  $6^2$ ;  $7^1$ ;  $8^0$ ;  $9^2$ ;  $10^0$ .
- Calcular os quadrados e os cubos dos números compreendidos entre 5 e 10.
- Qual a diferença entre o cubo de 12 e o quadrado de 13?
- Qual o resultado de:  
1.<sup>o</sup>  $(5 + 3)^2$ ; 2.<sup>o</sup>  $(12 - 8)^3$ ; 3.<sup>o</sup>  $(4 + 3 + 5)^2$ ;  
4.<sup>o</sup>  $(5 + 2)^2 - (9 - 7)^4$ .
- Escrever as quatro primeiras potências de 5.
- Efetuar: 1.<sup>o</sup>  $2^3 \times 2^2$ ; 3.<sup>o</sup>  $6^3 \times 6 \times 6^2$ ; 5.<sup>o</sup>  $8^3 : 8^2$ ;  
2.<sup>o</sup>  $3 \times 3^2 \times 3^5$ ; 4.<sup>o</sup>  $a^m \times a^n$ ; 6.<sup>o</sup>  $5^4 : 5^2$ .
- Aplicar as propriedades da potenciação em:  
1.<sup>o</sup>  $(2 \times 3 \times 4)^2$ ; 2.<sup>o</sup>  $(3^2 \times 2^3 \times 4)^3$ ; 3.<sup>o</sup>  $(4^3 \times 2^2)^2 : (4^5 \times 2^4)$ .
- Calcular o valor das expressões aritméticas:  
1.<sup>o</sup>  $2^3 + 5 \times (4 \times 3^2 - 6^2 : 12)$   
2.<sup>o</sup>  $\{3^4 : (5 - 2)^3 \times [15 - 2 \times (9 - 2^3)] - 6^2\} : 3^0$   
3.<sup>o</sup>  $\{(7^2 - 5 \times 3^2 + 1)^3 : [(2^3 - 6)^2 + 7 \times 3]\}^2 : [2^2 + (5 - 4)^3]$ .

### RESPOSTAS:

- 1.<sup>o</sup>  $2 \times 2 \times 2$ ; 3.<sup>o</sup>  $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$ ; 5.<sup>o</sup>  $100 \times 100 \times 100$   
2.<sup>o</sup>  $8 \times 8$ ; 4.<sup>o</sup>  $10 \times 10 \times 10 \times 10$ ;
- 1.<sup>o</sup>  $5^3$ ; 2.<sup>o</sup>  $9^7$ ; 3.<sup>o</sup>  $1^2$ ; 4.<sup>o</sup>  $3^2 \times 2^3$ ; 5.<sup>o</sup>  $8^2 \times 5^3 \times 11^2$ .
- 1; 8; 9; 1024; 36; 7; 1; 81; 1000000.
- Quadrados: 36, 49, 64, 81; Cubos: 216, 343, 512, 729.
- 1559.
- 1.<sup>o</sup> 64; 2.<sup>o</sup> 64; 3.<sup>o</sup> 144; 4.<sup>o</sup> 33.
- 5,  $5^2$ ,  $5^3$ ,  $5^4$ .
- 1.<sup>o</sup>  $2^5$ ; 2.<sup>o</sup>  $3^8$ ; 3.<sup>o</sup>  $6^6$ ; 4.<sup>o</sup>  $a^{m+n}$ ; 5.<sup>o</sup> 8; 6.<sup>o</sup>  $5^2$ .
- 1.<sup>o</sup>  $2^2 \times 3^2 \times 4^2$ ; 2.<sup>o</sup>  $3^6 \times 2^9 \times 4^3$ ; 3.<sup>o</sup> 4.
- 1.<sup>o</sup> 173; 2.<sup>o</sup> 3; 3.<sup>o</sup> 5.

### § 3. Divisibilidade aritmética.

**1. Definição.** Um número é *divisível* por outro quando a sua divisão por esse outro é exata, isto é, o resto é zero. Quando um número é divisível por outro, diz-se também que êle é *múltiplo* dêsse outro, que passa a ser seu *divisor* ou *sub-múltiplo*.

Assim, por exemplo, o número 20 é *divisível* por 5, pois

$$20 : 5 = 4$$

5 é *divisor* de 20 ou *divide* 20.

**2. Critérios de divisibilidade.** A verificação de que um número é divisível por outro é feita, geralmente, efetuando a divisão para se ter conhecimento de sua exatidão ou não. Existem, porém, alguns *divisores especiais*, que permitem reconhecer se um número é divisível por outro *sem efetuar a divisão*, bem como determinar o valor do *resto*, caso contrário. Para isso temos diversas regras que constituem os *critérios* ou *caracteres de divisibilidade*. Os critérios mais importantes serão *justificados* no fim dêsse parágrafo.

**1.º Divisibilidade por 2.** Um número é divisível por 2 quando é *par*. Exemplos :

324 é divisível por 2 porque é par.

84 105 não é divisível por 2 porque não é par.

NOTA : O resto da divisão de um número por 2 pode ser obtido dividindo o *último* algarismo da direita por 2. Exemplo :

3 853 que não é divisível por 2, deixa na divisão por 2, o resto 1, que é o mesmo resto da divisão por 2 do último algarismo (3).

**2.º Divisibilidade por 3.** Um número é divisível por 3 quando a *soma* dos valores absolutos dos seus algarismos fôr divisível por 3. Exemplos :

7 536 é divisível por 3 porque a soma  $7 + 5 + 3 + 6 = 21$  é divisível por 3.

893 não é divisível por 3 porque a soma  $8 + 9 + 3 = 20$  não é.

NOTA : O resto da divisão de um número por 3 pode ser obtido dividindo a soma dos valores absolutos dos seus algarismos por 3 : Exemplo.

893 que não é divisível por 3, deixa na sua divisão por 3 o resto 2 (resto da divisão da soma 20 por 3).

**3.º Divisibilidade por 4.** Um número é divisível por 4 quando o número formado pelos seus *dois últimos* algarismos da direita fôr divisível por 4. Exemplos :

1 916 é divisível por 4 porque 16, que é o número formado pelos dois últimos algarismos da direita, é divisível por 4.

46 335 não é divisível por 4, pois, 35 não é.

NOTA : O resto da divisão de um número por 4 pode ser obtido dividindo o número formado pelos seus *dois últimos algarismos* da direita por 4. Exemplo :

46 335 que não é divisível por 4, deixa na sua divisão por 4, o resto 3 (resto da divisão de 35 por 4).

**4.º Divisibilidade por 5 (\*)**. Um número é divisível por 5 quando termina em *zero* ou *cinco*. Exemplos :

12 385 é divisível por 5 porque termina em 5.

218 430 é divisível por 5 porque termina em 0.

723 não é divisível por 5 porque não termina em 5 ou 0.

NOTA : O resto da divisão de um número por 5 pode ser obtido dividindo o *último* algarismo da direita por 5. Exemplo :

723 que não é divisível por 5 deixa, na sua divisão por 5, o resto 3 (resto da divisão do último algarismo por 5).

**5.º Divisibilidade por 6.** Um número é divisível por 6 quando fôr *divisível* por 2 e por 3. Exemplos :

384 é divisível por 6, porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma 15).

1 412 não é divisível por 6, porque apesar de par não é divisível por 3 (soma 8).

**6.º Divisibilidade por 7.** Destacamos três casos :

1) O número é formado *somente* de dois algarismos. O número é divisível por 7 se o número formado pela unidade mais três vêzes o algarismo das dezenas fôr divisível por 7. Exemplos :

84 é divisível por 7, pois, 4 (alg. das unidades).  
24 (3 vêzes alg. dezenas).

28 que é divisível por 7.  
5 (unidades).

95 não é divisível por 7, pois, 27 (3 × 9)

32 que não é divisível.

(\*) *Divisibilidade por 25* : Um número é divisível por 25 quando o número formado pelos seus *dois últimos* algarismos da direita fôr divisível por 25. Exemplos :

4 275 é divisível por 25 (pois, 75 é divisível por 25) ;  
12 315 não é divisível por 25 (pois, 15 não é divisível por 25).

2) O número é formado somente de três algarismos. O número é divisível por 7 se o número formado pelo algarismo das unidades, mais três vezes o algarismo das dezenas e mais duas vezes o algarismo das centenas for divisível por 7.

Exemplos:

504 é divisível por 7, pois,

$$\begin{array}{r} 4 \text{ (unidades).} \\ 0 \text{ (} 3 \times 0 \text{)} \\ \underline{10 \text{ (} 2 \times 5 \text{)}} \\ 14 \text{ que é divisível por 7.} \end{array}$$

817 não é divisível por 7, pois,

$$\begin{array}{r} 7 \text{ (unidades).} \\ 3 \text{ (} 3 \times 1 \text{)} \\ \underline{16 \text{ (} 2 \times 8 \text{)}} \\ 26 \text{ que não é divisível.} \end{array}$$

3) O número é formado por mais de três algarismos. O número é divisível por 7 se, separando-o em classes de três algarismos, a partir da direita, o número formado pela diferença entre as somas das classes de ordem ímpar e as das de classe par for divisível por 7. São de classe ímpar o 1.º, 3.º, 5.º, ... grupos e de classe par o 2.º, 4.º, 6.º, ... grupos, a partir da direita. Exemplos:

10 451 é divisível por 7, pois,

$$\begin{array}{r} 451 \text{ (classe ímpar, 1.º grupo).} \\ - 10 \text{ (classe par, 2.º grupo).} \\ \hline 441 \text{ que é divisível por 7.} \\ \text{(regra anterior)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \text{ (unidade)} \\ 12 \text{ (} 3 \times 4 \text{)} \\ \underline{8 \text{ (} 2 \times 4 \text{)}} \\ 21 \text{ (é divisível por 7)} \end{array}$$

12 345 678 não é divisível por 7, pois,

$$\begin{array}{r} 678 \\ \underline{12} \\ 690 \text{ (soma das classes ímpares); } 345 \text{ (classe par).} \\ \underline{690} \\ -345 \\ \hline 345 \text{ que não é divisível por 7 (regra anterior).} \end{array}$$

NOTA: No caso da primeira soma (classes de ordem ímpar) ser menor que a segunda (classes de ordem par), acrescenta-se à primeira soma um múltiplo de 7 oportuno, a fim de tornar possível a subtração.

7.º) **Divisibilidade por 8.** Um número é divisível por 8, quando o número formado pelos seus três últimos algarismos da direita for divisível por 8. Exemplos:

6 104 é divisível por 8 porque 104, que é o número formado pelos seus três últimos algarismos, é divisível por 8.  
21 417 não é divisível por 8 porque 417 não é.

NOTA: O resto da divisão de um número por 8 pode ser obtido dividindo por 8 o número formado pelos seus três últimos algarismos. Exemplo:

21 417 que não é divisível por 8, deixa na sua divisão por 8 o resto 1 (resto da divisão de 417 por 8).

8.º) **Divisibilidade por 9.** Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 9. Exemplos:

738 é divisível por 9 porque a soma  $7+3+8=18$  é divisível por 9.  
44 319 não é divisível por 9 porque a soma  $4+4+3+1+9=21$  não é.

NOTA: O resto da divisão de um número por 9 pode ser obtido dividindo por 9 a soma dos valores absolutos dos seus algarismos. Exemplo:

44 319 que não é divisível por 9, deixa na sua divisão por 9 o resto 3 (resto da divisão da soma 21 por 9).

9.º) **Divisibilidade por 10.** Um número é divisível por 10 quando termina em zero. Exemplos:

8 530 é divisível por 10 porque termina em 0.  
39 726 não é divisível por 10.

NOTA: O resto da divisão de um número por 10 é igual ao algarismo das unidades desse número. Exemplo:

39 726 que não é divisível por 10, deixa na sua divisão por 10 o resto 6 (que representa o algarismo das unidades).

Generalização: Um número é divisível por 100 quando termina em dois zeros; por 1 000 quando termina em três zeros; etc..

10.º) **Divisibilidade por 11.** Um número é divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par, for divisível por 11.

Os algarismos de ordem ímpar são os que ocupam o 1.º, 3.º, 5.º, ... lugares e os de ordem par o 2.º, 4.º, 6.º, ... lugares, a partir da direita. Exemplos:

95 568 é divisível por 11, pois, a soma dos algarismos de ordem ímpar (1.º, 3.º, 5.º) vale:  $8 + 5 + 9 = 22$ ; a soma dos algarismos de ordem par (2.º, 4.º), vale  $6 + 5 = 11$

e a diferença entre essas somas: 
$$\begin{array}{r} 22 \\ -11 \\ \hline 11 \end{array}$$
 que é divisível por 11.

735 não é divisível por 11 porque:  
soma dos algar. de ordem ímpar:  $5 + 7 = 12$   
soma dos algar. de ordem par:  $3$   
diferença:  $\frac{3}{9}$  que não é divisível por 11.

## NOTAS:

1.ª) O resto da divisão de um número por 11, pode ser obtido dividindo por 11 a diferença entre aquelas duas somas. Exemplo:

735 que não é divisível por 11, deixa na sua divisão por 11 o resto 9 (resto da divisão da diferença entre as somas por 11).

2.ª) No caso da primeira soma (algarismos de ordem ímpar) ser menor do que a segunda (algarismos de ordem par) acrescenta-se à primeira soma um múltiplo de 11 conveniente, a fim de tornar possível a subtração (aritmética) entre elas. Exemplo:

419 085 não é divisível por 11 porque resta 7 da divisão.  
De fato: soma dos algarismos ordem ímpar:  $5 + 0 + 1 = 6$

soma dos algarismos ordem par:  $8 + 9 + 4 = 21$

diferença entre as somas:  $6 - 21 = ?$

acrescentando um conveniente múltiplo de 11 à primeira soma (22 por exemplo), temos:

$$6 + 22 = 28$$

e a diferença:  $28 - 21 = 7$  já é possível.

11.º) **Divisibilidade por 12.** Um número é divisível por 12 quando for divisível por 3 e por 4. Exemplo:

324 é divisível por 12 porque é divisível por 3 (soma 9) e por 4 (os dois últimos algarismos formam o número 24).

4 618 não é divisível por 12 porque não é divisível por 3 (e nem por 4).

3. **Justificações dos critérios de divisibilidade.** Das propriedades estudadas na divisão decorre que:

PRIMEIRA RELAÇÃO: Se dois, ou mais, números são divisíveis por um mesmo número também a soma (ou a diferença) será divisível por esse número.

Assim, por exemplo, sendo  $12 : 3$  e  $18 : 3$ , temos  $(12+18) : 3$ .

SEGUNDA RELAÇÃO: Se um número é divisível por um segundo número, todo múltiplo do primeiro também é divisível pelo segundo.

De fato,  $9 : 3$  e, portanto, um seu múltiplo, por ex., 36 também é.

**Divisibilidade por 2, 5 e 10:** Consideremos, por exemplo, o número 2 348, que pode ser escrito sob a forma:

$$\begin{array}{l} \text{ou} \quad 2\ 348 = 2\ 340 + 8 \\ \text{ou} \quad 2\ 348 = 234 \times 10 + 8 \\ \quad \quad 2\ 348 = 234 \times 2 \times 5 + 8. \end{array}$$

isto é, 2 340 é divisível por 10 e, portanto, por 2 e 5 (2.ª Relação). Resta saber se o último algarismo da direita (8) também é, pois, sendo as parcelas ( $234 \times 2 \times 5$  e 8) divisíveis por um mesmo número, a soma também será. (1.ª Relação). Logo, os critérios de divisibilidade enunciados separadamente por 2, 5 e 10, podem ser sintetizados num único: *um número é divisível por 2, 5 e 10 se o último algarismo da direita (o das unidades) for divisível por 2, 5 e 10.*

**Divisibilidade por 4, 25 e 100:** Considerando o mesmo exemplo, 2 348, que também pode ser escrito sob a forma:

$$\begin{array}{l} \text{temos} \quad 2\ 348 = 2\ 300 + 48 \\ \text{ou} \quad 2\ 348 = 23 \times 100 + 48 \\ \quad \quad 2\ 348 = 23 \times 4 \times 25 + 48, \end{array}$$

isto é, 2 348 é divisível por 100 e, portanto, por 4 e 25 (2.ª Relação). Do mesmo modo a divisibilidade de 2 348 por 4, 25 e 100 vai depender do segundo número da decomposição (48) (1.ª Relação). Logo: *um número é divisível por 4, 25 e 100 se o número formado pelos dois últimos algarismos da direita for divisível por 4, 25 e 100.*

**Divisibilidade por 9 e por 3:** Dado o exemplo 2 348, que poderá ser ainda escrito sob a forma:

$$\begin{array}{l} \text{vem} \quad 2\ 348 = 2\ 000 + 300 + 40 + 8 \\ \text{ou} \quad 2\ 348 = 2 \times 1\ 000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 8 \\ \quad \quad 2\ 348 = 2 \times (999 + 1) + 2 \times (99 + 1) + 4 \times (9 + 1) + 8 \end{array}$$

e pela propriedade distributiva do produto em relação à soma, temos:

$$2\ 348 = 2 \times 999 + 2 + 3 \times 99 + 3 + 4 \times 9 + 4 + 8$$

e pela propriedade associativa da soma:

$$2\ 348 = (2 \times 999 + 3 \times 99 + 4 \times 9) + (2 + 3 + 4 + 8).$$

Observamos, assim, que 2 348 (ou qualquer outro número) pode ser sempre decomposto em duas partes, das quais a primeira é sempre divi-

sível por 9 (e, portanto, por 3) e a segunda parte é formada pela soma dos valores absolutos de seus algarismos (2+3+4+8). O critério respectivo é, então: *um número é divisível por 9 (ou por 3) quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por 9 (ou por 3).*

OBSERVAÇÃO: Todo número divisível por 9 é também divisível por 3, mas *nem todo número divisível por 3 é por 9.*

**4. Propriedades elementares dos restos. Provas por um divisor.** Podemos resumir as propriedades elementares dos restos nas seguintes:

1.<sup>a</sup>) O resto que se obtém na divisão de uma soma por um número é igual ao resto que se obtém na divisão da soma dos restos das parcelas pelo mesmo número.

2.<sup>a</sup>) O resto que se obtém na divisão de um produto por um número é igual ao resto que se obtém na divisão do produto dos restos dos fatores pelo mesmo número.

Como aplicação dessas propriedades, costuma-se verificar a exatidão das operações fundamentais mediante as provas por um divisor, de critério de divisibilidade já estudado. Pelas vantagens que oferecem, os divisores mais empregados são 9 e 11.

Deve-se, contudo, notar que estas provas oferecem uma probabilidade de acerto das operações, sem todavia garantir que estejam absolutamente certas, como veremos adiante.

Exemplos:

1. Prova da *adição* usando o divisor 9 (Prova dos nove).

4 318	(soma 16 : 9) → resto 7	}	→ (soma 12 : 9) → resto 3
2 593	(soma 19 : 9) → resto 1		
1 876	(soma 22 : 9) → resto 4		
8 787	(soma 30 : 9) → resto 3		

NOTA: Não podemos com essa prova garantir que a operação esteja absolutamente certa, pois, caso no resultado da soma figurasse, por engano, 7 887, ainda assim a prova pelo divisor 9 daria certa (a ordem das parcelas não altera a soma).

2. Prova da *subtração*, usando o divisor 11. (Prova dos 11).

4 531	o resto da divisão por 11 é 10	}	→ 9 + 1 = 10
2 982	o resto da divisão por 11 é 1		
1 549	o resto da divisão por 11 é 9		

3. Prova da *multiplicação* usando o divisor 9.

$\begin{array}{r} 5713 \\ \times 32 \\ \hline 11426 \\ 1739 \\ \hline 182816 \end{array}$	o resto da divisão por 9 é 7	$\begin{array}{r} 7 \\ \times 5 \\ \hline 35 \end{array}$	o resto por 9 é 8
	o resto da divisão por 9 é 5		
	o resto da divisão por 9 é 8		

4. Prova da *divisão* usando o divisor 11.

$\begin{array}{r} 62\ 452 \\ 2\ 153 \\ \hline 04\ 4 \\ 1\ 55 \\ 102 \\ 15 \end{array}$	ou $62\ 452 = 29 \times 2\ 153 + 15$	$\begin{array}{r} 29 \\ \times 2\ 153 \\ \hline 57 \\ 468 \\ 58 \\ \hline 62\ 452 \end{array}$	$\begin{array}{r} 29 \\ \times 2\ 153 \\ \hline 57 \\ 468 \\ 58 \\ \hline 62\ 452 \end{array}$	$\begin{array}{r} 29 \\ \times 2\ 153 \\ \hline 57 \\ 468 \\ 58 \\ \hline 62\ 452 \end{array}$	$\begin{array}{r} 29 \\ \times 2\ 153 \\ \hline 57 \\ 468 \\ 58 \\ \hline 62\ 452 \end{array}$
	resto por 11	resto por 11	resto por 11	resto por 11	resto por 11
	↓	↓	↓	↓	↓
	5	1	1	4	4
	5	=	=	+	4

## EXERCÍCIOS SÔBRE A DIVISIBILIDADE ARITMÉTICA

1. Verificar se são divisíveis por: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 os números: 21 540; 8 433; 7 777; 194 180; 1 001; 397; 3 600; 12 349
2. Que restos pode dar na divisão por 5, um número que não seja divisível por 5?
3. Escrever à direita de 36 um algarismo tal que o número formado seja divisível por 3 e por 11.
4. Indicar quais os algarismos de menor valor absoluto que devem ser colocados no lugar dos pontos para que:
 

532. seja divisível por 3 e por 9;	1.89 seja divisível por 11;
143.5 seja divisível por 3 e por 5;	892.6 seja divisível por 4;
512. seja divisível por 8;	6.724 seja divisível por 2 e por 11.
5. Qual o menor número que se deve somar a 4 831 para que resulte um número divisível por 3?
6. Qual o menor número que se deve somar a 12 318 para que resulte um número divisível por 5?
7. Sem efetuar a divisão, escrever os restos das divisões dos números:
 

1.º) 81 345 786	por 9 e por 11;
2.º) 18 315	por 4, 5 e 8;
3.º) 303 171	por 2, 3 e 10.
8. Verificar que a diferença entre dois números constituídos pelos mesmos algarismos, mas escritos em ordem inversa, é divisível por 9.
9. Verificar que a soma de dois números pares é um número par, que a soma de dois números ímpares é um número par e que a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.



10. Numa caixa existem menos de 60 bolinhas. Se elas forem contadas de 9 em 9 não sobra nenhuma e se forem contadas de 11 em 11 sobra uma. Quantas são as bolinhas?
11. Verificar a exatidão, usando os divisores 9 e 11, das seguintes operações:
- 1.<sup>a</sup>)  $8503 + 7128 + 456 = ; 16387$     3.<sup>a</sup>)  $4301 \times 45 = 192145$ ;  
 2.<sup>a</sup>)  $4018 - 3297 = 721$ ;    4.<sup>a</sup>)  $11414 : 26 = 439$ .

## RESPOSTAS:

1. 21540 é por 2, 3, 4, 5, 6, 10 e 12; 8433 é por 3 e 9; 7777 é por 7 e 11; 194180 é por 2, 4, 5, 7, 10; 1001 é por 7 e 11; 397 por nenhum; 3600 é por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 e 12; 12349 por nenhum.
2. Os restos podem ser: 1, 2, 3 e 4.
3. Deve ser escrito o algarismo 3.
4. Os números, depois de colocados os algarismos, são: 5328; 1089; 14325; 89216; 5120; 64724.
5. O menor número é 2.
6. O menor número é 2.
7. 1.<sup>o</sup>) O resto por 9 é 6 e por 11, 5. 2.<sup>o</sup>) O resto por 4 é 3, por 5 é 0 e por 8, 3. 3.<sup>o</sup>) O resto por 2 é 1, por 3 é 0 e por 10 é 1.
10. São 45 bolinhas.
11. 1.<sup>a</sup>) Errada; 2.<sup>a</sup>) Certa; 3.<sup>a</sup>) Errada; 4.<sup>a</sup>) Certa.

## § 4. Números primos.

1. **Definição.** Um número é *primo* quando é divisível somente por si e pela unidade. Exemplo:  
 O número 13 é primo porque só é divisível por 13 e por 1.  
 Os primeiros números primos dispostos em ordem crescente, isto é,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

formam a *série dos números primos* que é *ilimitada* ou seja é sempre possível encontrar novos números primos.

2. **Tábua dos números primos.** Para a construção de uma tábua de números primos até um número qualquer, usa-se um processo atribuído a Eratóstenes, denominado *Crivo de Eratóstenes*.

Aplicamos esse processo na construção da tábua dos números primos até 50.

Riscam-se todos os múltiplos de 2, a partir de 2;	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Riscam-se todos os múltiplos de 3, a partir de 3;	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Riscam-se todos os múltiplos de 5, a partir de 5;	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

e assim por diante até o número 29 (que não foi riscado) e cujo primeiro múltiplo 58 ultrapassa 50.

Os números que não foram riscados:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47

são os números primos existentes até 50. No fim deste parágrafo encontra-se uma *tábua* de todos os números primos menores que 1000.

3. **Reconhecimento de um número primo.** É sempre possível saber se um dado número é primo com a seguinte

REGRA: *Divide-se o número dado, sucessivamente, pelos números que compõem a série dos números primos (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...)* até encontrar um quociente menor ou igual ao divisor. Se nenhuma dessas divisões fôr exata, o número dado é primo. Exemplos:

1) Reconhecer se o número 173 é primo.

Divide-se 173, respectivamente, pelos números primos 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... Algumas dessas divisões podem ser evitadas com a aplicação dos critérios de divisibilidade. Assim, não serão feitas as divisões por 2, 3, 5, 7 e 11, pois, é fácil reconhecer que 173 não é divisível por eles. As outras divisões serão:

$$\begin{array}{r|l} 173 & 13 \\ 43 & 13 \\ \hline & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 173 & 17 \\ 03 & 10 \\ \hline & \end{array}$$

Como já foi encontrado um quociente (13) igual ao divisor, e a divisão não é exata (resto 4) conclui-se que 173 é primo.

2) Reconhecer se o número 641 é primo.

$$\begin{array}{r|l} 641 & 13 \\ 121 & 49 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 641 & 17 \\ 131 & 37 \\ 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 641 & 19 \\ 71 & 33 \\ 14 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 641 & 23 \\ 181 & 27 \\ 20 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 641 & 29 \\ 61 & 22 \\ 3 & \end{array}$$

Observamos, nessas divisões, que enquanto os divisores vão aumentando (13, 17, 19, 23 e 29) os quocientes vão diminuindo (49, 37, 33, 27 e 22). Como foi encontrado um quociente (22) menor que o divisor (29) e a divisão não é exata, concluímos ser 641 um número primo.

3) Reconhecer se 5277 é primo.

Sendo esse número divisível por 3, segue-se que não é primo.

4) Reconhecer se 1 027 é primo.  
 Por 2, 3, 5, 7 e 11 não é divisível. Por 13, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1\ 027 & 13 \\ 117 & 79 \\ \hline 00 & \end{array}$$

isto é, 1 027 é múltiplo de 13, portanto não é primo.

**4. Decomposição de um número em fatores primos.**

Todo número, que não é primo, pode ser *decomposto* num produto de fatores primos. Assim, por exemplo, o número 60, que não é primo, pode ser decomposto primeiramente em

$$60 = 2 \times 30$$

Por sua vez o número 30, que não é primo, pode ser decomposto em  $2 \times 15$ .

Logo:  $60 = 2 \times 2 \times 15$

O número 15 pode ser ainda decomposto em  $3 \times 5$  e teremos assim a decomposição final:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \text{ (todos os fatores são primos)}$$

ou pelas propriedades da potenciação (produto de potências de mesma base):

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

A decomposição de um número em fatores primos, obedece à seguinte

**REGRA:** Divide-se o número pelo seu menor divisor (que deve ser necessariamente primo), em seguida divide-se o quociente pelo seu menor divisor e assim por diante até se encontrar o quociente 1. O número dado será igual ao produto de todos os divisores encontrados, que são números primos.

Na prática dispõem-se os quocientes e os divisores respectivos em duas colunas separadas por um traço vertical. Dêsse modo a decomposição de 60 em seus fatores primos terá a seguinte disposição:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Escrevendo-se a seguir:  $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$   
 ou  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Exemplos:

1) Decompor os números 1 144 e 2 532 em seus fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 144 & 2 \\ 572 & 2 \\ 286 & 2 \\ 143 & 11 \text{ (Ver nota)} \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\ 532 & 2 \\ 1\ 266 & 2 \\ 633 & 3 \\ 211 & 211 \text{ (Ver nota)} \\ 1 & \end{array}$$

$$1\ 144 = 2^3 \times 11 \times 13$$

$$2\ 532 = 2^2 \times 3 \times 211$$

NOTA: É necessário verificar, com as regras já estudadas, se os números 143 ou 211 são ou não primos, pois, à primeira vista podem enganar.

**5. Determinação de todos os divisores de um número.** A decomposição de um número em seus fatores primos permitiu que se determinassem alguns de seus divisores. Assim, o número 60 que, decomposto em seus fatores primos, apresentou como seus divisores somente os fatores primos 1, 2, 3 e 5 *admite outros divisores* tais como 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

Todos os divisores de um número, que são em *número limitado*, pois, devem ser *menores* que o número dado e o maior deles é o próprio número, podem ser obtidos com a seguinte

**REGRA:** *Decompõe-se o número em fatores primos e faz-se à direita desses fatores um traço vertical. A seguir o traço escreve-se a unidade um pouco acima da direção do primeiro fator primo do número dado. Os demais divisores do número são obtidos a partir da unidade, multiplicando-se cada um dos fatores primos (que estão à esquerda do traço) pelos números que vêm à direita do traço e situados acima dele. Os divisores obtidos mais de uma vez não são repetidos.*

Exemplos:

1) Determinar os divisores de 60.

$$\begin{array}{r|l|l} 60 & 2 & 1 \\ 30 & 2 & 2 - \\ 15 & 3 & 3 - 6 - 12 \\ 5 & 5 & 5 - 10 - 20 - 15 - 30 - 60 \end{array}$$

Os cálculos efetuados para obter os divisores do quadro acima foram feitos na seguinte ordem:

Produto do primeiro fator primo 2 com o único número que vem à direita e acima dêle (1) .....	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 1 = 2 \\ 2 \times 2 = 4 \end{array} \right.$
Produtos do segundo fator primo 2 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1 e 2 .....	
Produtos do fator primo 3 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1, 2 e 4 .....	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \times 1 = 3 \\ 3 \times 2 = 6 \\ 3 \times 4 = 12 \end{array} \right.$
Produtos do fator primo 5 com os números que vêm à direita e acima dêle: 1, 2, 4, 3, 6 e 12 .....	
	$\left\{ \begin{array}{l} 5 \times 1 = 5 \\ 5 \times 2 = 10 \\ 5 \times 4 = 20 \\ 5 \times 3 = 15 \\ 5 \times 6 = 30 \\ 5 \times 12 = 60 \end{array} \right.$

Logo, os divisores de 60 são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

2) Determinar os divisores de 144.

		1
144	2	2
72	2	4
36	2	8
18	2	16
9	3	3 - 6 - 12 - 24 - 48
3	3	9 - 18 - 36 - 72 - 144

Os divisores de 144 são: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 e 144.

6. **Total de divisores de um número.** Mesmo não se conhecendo todos os divisores de um número, pode-se determinar o total dêles com a seguinte:

REGRA: O número total de divisores de um número é igual ao produto dos expoentes dos seus fatores primos aumentados cada expoente de 1. Exemplos:

1) Determinar o total dos divisores de 60.

Temos:  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Os expoentes de seus fatores primos são, respectivamente: 2, 1, 1

aumentando-se 1 em cada um dêles temos:

$$3, 2, 2$$

e, efetuando-se o produto desses números:

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

que é o total de divisores de 60.

(Esses divisores já foram determinados em exercícios anteriores).

2) Determinar o total dos divisores de 180.

Decompondo primeiramente em fatores primos, temos:

180	2	
90	2	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
45	3	expoentes: 2, 2, 1
15	3	aumentando 1: 3, 3, 2
5	5	n.º de divisores: $3 \times 3 \times 2 = 18$

7. **Divisibilidade de um número por outro, mediante seus fatores primos.** Dados dois números é possível saber se um dêles é divisível pelo outro usando as decomposições desses números em seus fatores primos. Basta aplicar o seguinte

CRITERIO: Decompostos dois números em seus fatores primos, o primeiro é divisível pelo segundo, se contiver, pelo menos, os fatores primos do segundo com expoentes iguais ou maiores.

Exemplos:

1) Verificar se 1 008 é divisível por 24.

Decompondo esses números em seus fatores primos, temos:

$$1\ 008 = 2^4 \times 3^2 \times 7 \quad 24 = 2^3 \times 3$$

Logo, 1 008 é divisível por 24, pois, contém todos os fatores primos de 24 com expoentes maiores.

2) Verificar se 360 é divisível por 108.

Como:  $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$  e  $108 = 2^2 \times 3^3$

segue-se que 360 não é divisível por 108, pois, embora 360 contenha todos os fatores primos de 108, possui um dêles (3) com expoente menor (3<sup>2</sup>).

3) Determinar qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 540 para se obter um número divisível por 126?

Decompondo esses números em seus fatores primos:

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \quad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Como o único fator que consta de 126 e não consta de 540 é o 7, basta multiplicar 540 por 7 para se obter um número divisível por 126.

TÁBUA DOS NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 1 000

1	43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887
2	47	109	191	269	353	439	533	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	997

## EXERCÍCIOS SÔBRE NÚMEROS PRIMOS

1. Construir uma tábua dos números primos até 100.
2. Sem usar a tábua dos números primos, dizer entre os números 109, 197, 283, 267, 373, 641, 761, 863, 957, 1 181, 4 313 e 12 349 quais os primos.
3. Decompor em fatores primos os seguintes números: 210, 312, 540, 750, 1 001, 1 331, 5 250, 7 007, 14 157, 28 413, 256 000 e 12 349.
4. Decompor 144<sup>2</sup> em fatores primos, sem efetuar a potência.
5. Usando a decomposição em fatores primos efetuar a divisão de 1 280 por 32.

6. Determinar todos os divisores (e o total) dos números: 68, 114, 148, 306, 581, 1 200, 1 331 e 4 332.
7. Achar todos os divisores comuns aos números 630 e 990 (são os divisores ao mesmo tempo de 630 e 990).
8. Mediante a decomposição em fatores primos, verificar se: 2 016 é divisível por 48; 360 é divisível por 54; 1 890 é divisível por 108; 5 250 é divisível por 1 320.
9. Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 1 080 para se obter um número divisível por 252?
10. Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 2 205 para se obter um número divisível por 1 050?

## RESPOSTAS:

1. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.
2. São primos: 109, 197, 373, 641, 761, 863 e 1 181.
3.  $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ ;  $312 = 2^3 \times 3 \times 13$ ;  $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ ;  $750 = 2 \times 3 \times 5^3$ ;  
 $1\ 331 = 11^3$ ;  $5\ 250 = 2 \times 3 \times 5^3 \times 7$ ;  $7\ 007 = 7^2 \times 11 \times 13$ ;  
 $14\ 157 = 3^2 \times 11^2 \times 13$ ;  $1\ 001 = 7 \times 11 \times 13$ ;  
 $28\ 413 = 3^2 \times 7 \times 11 \times 41$ ;  $256\ 000 = 2^{11} \times 5^3$   $12\ 349 = 53 \times 233$ .
4.  $144^2 = (2^4 \times 3^2)^2 = 2^8 \times 3^4$ .
5.  $2^3 \times 5 = 8 \times 5 = 40$ .
6. 68 - 6 divisores (1, 2, 4, 17, 34, 68); 114 - 8 divisores (1, 2, 3, 6, 19, 38, 57, 114); 148 - 6 divisores (1, 2, 4, 37, 74, 148); 306 - 12 divisores (1, 2, 3, 6, 9, 17, 18, 34, 51, 102, 153, 306); 580 - 4 divisores (1, 7, 83, 581); 1 200 - 30 divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 30, 40, 48, 50, 60, 75, 80, 100, 120, 150, 200, 240, 300, 400, 600, 1 200); 1 331 - 4 divisores (1, 11, 121, 1 331); 4 332 - 18 divisores (1, 2, 3, 4, 6, 12, 19, 38, 57, 76, 114, 228, 361, 722, 1 083, 1 444, 2 166 e 4 332).
7. Os divisores comuns são: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 e 90.
8. Somente 2 016 é divisível por 48.
9. O número é 7.
10. O número é  $10 = 2 \times 5$ .

## § 5. Máximo divisor comum.

1. **Divisor comum de dois ou mais números.** Chama-se *divisor comum* de dois ou mais números a um número que seja *divisor*, ao mesmo tempo, de todos os números dados.  
Exemplo:

Determinar os divisores comuns dos números 42 e 70.  
Os divisores de 42 são: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 e 42.  
Os divisores de 70 são: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 e 70.

Os *divisores comuns* de 42 e 70 são os que figuram ao mesmo tempo em 42 e 70, isto é: 1, 2, 7 e 14.

É evidente que a *unidade* é divisor comum de todos os números. Quando dois ou mais números têm *somente* a unidade para divisor comum eles são chamados de *primos entre si*. Assim, por exemplo, os números 12 e 7, cujo único divisor comum é 1, são primos entre si.

## 2. Máximo divisor comum de dois, ou mais, números.

Chama-se *máximo divisor comum de dois, ou mais, números* ao maior dos divisores comuns a esses números.

No exemplo anterior, o número 14, que é o maior dos divisores comuns de 42 e 70, é o seu máximo divisor comum.

Indicação: m.d.c. (42, 70) = 14

## 3. Determinação do m.d.c. de dois, ou mais, números.

Temos dois métodos:

- 1.º Método da decomposição em fatores primos;
- 2.º Método das divisões sucessivas.

**Método da decomposição em fatores primos:** O m.d.c. de dois ou mais números, decompostos em seus fatores primos, é dado pelo produto dos fatores primos comuns tomados como seus menores expoentes. Exemplo:

Determinar o m.d.c. dos números 168, 180 e 300.

168	2	180	2	300	2	Temos:	
84	2	90	2	150	2	$168 = 2^3 \times 3 \times 7$	
42	2	45	3	75	3	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$	
21	3	15	3	25	5	$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$	
7	7	5	5	5	5		
1		1		1			

Os *fatores primos comuns*, isto é, que entram ao mesmo tempo nos três números, são: 2 e 3.

Esses fatores com seus menores expoentes são:  $2^2$  e  $3$ .

Logo: m.d.c. (168, 180, 300) =  $2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$ .

**Método das divisões sucessivas:** Divide-se o maior número pelo menor, em seguida o menor pelo resto, depois o resto pelo novo resto e assim por diante até chegar a uma divisão exata. O último divisor será o m.d.c. procurado. Exemplo:

Determinar o m.d.c. dos números 216 e 624.

Efetuem-se as seguintes divisões:

$$\begin{array}{r|l} 624 & 216 \\ 192 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 216 & 192 \\ 24 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 192 & 24 \\ 00 & 8 \end{array}$$

O último divisor 24 é o m.d.c. procurado.

Costuma-se usar a seguinte disposição prática:

$$\begin{array}{r|l|l|l} 624 & 216 & 192 & 24 \\ 192 & 24 & 00 & \end{array} \qquad \text{m.d.c. (216, 624) = 24}$$

Para o caso de *mais de dois números*, determina-se, inicialmente, o m.d.c. dos dois primeiros, depois o m.d.c. entre o terceiro e o resultado que já foi encontrado e assim sucessivamente. Exemplo:

Determinar o m.d.c. dos números 168, 216 e 372.

Primeiramente determina-se o m.d.c. dos dois primeiros:

$$\begin{array}{r|l|l|l} 216 & 168 & 48 & 24 \\ 48 & 24 & 00 & \end{array} \qquad \text{m.d.c. (168, 216) = 24}$$

em seguida determina-se o m.d.c. entre 372 e 24:

$$\begin{array}{r|l|l} 372 & 24 & 12 \\ 12 & 00 & \end{array} \qquad \text{Logo: m.d.c. (168, 216, 372) = 12}$$

## 4. Propriedades do m.d.c. de dois números.

1.º O m.d.c. de dois números primos entre si é a unidade. Exemplo:

$$\text{m.d.c. (12, 7) = 1} \qquad \begin{array}{r|l|l|l|l} 12 & 7 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

2.º O m.d.c. de dois números em que o maior é divisível pelo menor, é o menor deles. Exemplos:

$$\text{m.d.c. (8, 4) = 4} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ 0 & \end{array}$$

$$\text{m.d.c. (3 486, 2) = 2} \qquad \begin{array}{r|l} 3\ 486 & 2 \\ 0\ 000 & \end{array}$$

3.ª) Multiplicando ou dividindo dois números por um outro número, diferente de zero, o m.d.c. dos dois primeiros aparece multiplicado ou dividido por êsse outro. Exemplo:

$$\text{Sendo o m.d.c. } (18, 12) = 6$$

Multiplicando 18 e 12 por 2, tem-se:

$$\text{m.d.c. } (18 \times 2, 12 \times 2) = 6 \times 2.$$

No caso de se *dividir* os dois números pelo seu próprio m.d.c., os quocientes obtidos são *primos entre si*. Exemplo:

$$\text{Sendo o m.d.c. } (18, 12) = 6$$

Dividindo 18 e 12 por 6 (que é o m.d.c.), tem-se:

$$\text{m.d.c. } (18 : 6, 12 : 6) = 6 : 6$$

$$\text{ou m.d.c. } (3, 2) = 1$$

isto é, os quocientes obtidos 3 e 2 são primos entre si.

### PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DO M.D.C.

1. Determinar os dois *menores* números pelos quais devemos dividir 144 e 160, a fim de obter quocientes iguais.

Primeiramente, determina-se o m.d.c.  $(144, 160) = 16$ .

Como  $144 : 16 = 9$  e sendo 16 o *maior* divisor de 144 o *menor* quociente será 9.

$160 : 16 = 10$  também 16 é o *maior* divisor de 160 e 10 o *menor* quociente.

Logo, os números procurados são: 9 e 10, pois,

$$144 : 9 = 16$$

$$160 : 10 = 16$$

2. Na procura do m.d.c. de dois números, pelo método das divisões sucessivas, encontram-se os quocientes 1, 2 e 6 e os restos 432, 72, 0. Determinar os dois números.

Do problema, tem-se o seguinte quadro:

		1	2	6
?	?	432	72	72
			0	

Procedendo inversamente do modo que se emprega no método das divisões sucessivas, temos que 72, por ser o penúltimo resto (o último é 0), é o m.d.c. dos dois números procurados.

Logo:

$$2 \times 432 + 72 = 936 \text{ (segundo número procurado),}$$

$$1 \times 936 + 432 = 1368 \text{ (primeiro número procurado).}$$

3. Um terreno de forma retangular tem as dimensões: 24 metros de frente e 56 metros de fundo. Qual deve ser o comprimento do *maior cordel* que sirva para medir exatamente as duas dimensões?

Determinando-se o m.d.c.  $(56, 24) = 8$ , segue-se que o maior cordel que pode ser usado na medida das dimensões do terreno deve ter 8 metros de comprimento, pois, 8 é o *maior* dos divisores comuns de 56 e 24.

### EXERCÍCIOS SÔBRE O M.D.C.

- Dos divisores comuns aos números 48 e 72, determinar: 1.º o maior deles (m.d.c.); 2.º os pares; 3.º os que são divisíveis por 3.
- Calcular: 1.º m.d.c. (120, 384); 2.º m.d.c. (3 600, 4 050); 3.º m.d.c. (185, 222, 259); 4.º m.d.c. (128, 136, 256, 440); 5.º m.d.c. (3 234, 4 158); 6.º m.d.c. (504, 672, 882, 546); 7.º m.d.c. (6 804, 47 952, 228 456).
- Usando as propriedades do m.d.c., calcular: 1.º m.d.c. (7, 9, 12); 2.º m.d.c. (2, 48 384); 3.º m.d.c. (36, 18, 6); 4.º m.d.c. (13, 26, 29).
- Encontrar todos os números compreendidos entre 100 e 500 que tenham 102 por m.d.c..
- Na procura do m.d.c. de dois números, pelo método das divisões sucessivas, encontram-se os quocientes 1, 3 e 2 e os restos 48, 24 e 0. Determinar os dois números.
- Calcular os dois menores números pelos quais devemos dividir 180 e 204, a fim de que os quocientes sejam iguais.
- Determinar os divisores comuns aos números 80 e 130 múltiplos de 5.
- Dados os dois números: 182 e 238, verificar que o m.d.c. entre eles é também o m.d.c. entre o menor (182) e a sua diferença  $(238 - 182 = 56)$ .
- Quer-se dividir três peças de fazenda que medem, respectivamente, 90, 108 e 144 metros, em partes iguais e do *máximo tamanho possível*. Determinar o número das partes de cada peça e os comprimentos de cada uma.
- Quer-se circundar de árvores, plantadas à *máxima distância comum*, um terreno de forma quadrilátera. Quantas árvores são necessárias, se os lados do terreno têm 3 150, 1 980, 1 512 e 1 890 metros?

RESPOSTAS:

- 1.º) 24 (m.d.c.); 2.º) 2, 4, 6, 8, 12, 24; 3.º) 3, 6, 12, 24.
- 1.º) 24; 2.º) 450; 3.º) 37; 4.º) 8; 5.º) 462; 6.º) 42; 7.º) 36.

3. 1.º 1; 2.º 2; 3.º 6; 4.º 1.
4. 102 (102×1), 204 (102×2), 306 (102×3) e 408 (102×4).
5. 216 e 168.
6. 15 e 17.
7. 5 e 10.
8. O m.d.c. (14) é o mesmo.
9. 8, 6 e 5 partes, valendo cada uma 18 metros.
10. São necessárias 474 árvores, distanciando-se 18 metros uma da outra.

## § 6. Mínimo múltiplo comum.

**1. Múltiplo comum de dois, ou mais, números.** Chama-se *múltiplo comum* de dois, ou mais, números a um número que seja *divisível*, ao mesmo tempo, por todos os números dados.

Exemplo :

Determinar os múltiplos comuns dos números 2 e 3.

Excluindo-se o zero, que é múltiplo de todos os números, temos :

múltiplos de 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...

múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...

Os múltiplos comuns de 2 e 3 são :

6, 12, 18, ...

isto é, esses números são *divisíveis* tanto por 2 como por 3. Os demais múltiplos são denominados *não comuns*.

Os múltiplos comuns de dois ou mais números são *infinitos*. Daí o fato de não existir o máximo múltiplo comum. Existe, porém, o *menor* dos múltiplos comuns denominado *mínimo múltiplo comum*.

**2. Mínimo múltiplo comum de dois, ou mais, números.** Chama-se *mínimo múltiplo comum de dois, ou mais, números ao menor dos múltiplos* (diferente de zero) *comuns* desses números.

No exemplo dado, o número 6 é o menor dos múltiplos comuns dos números 2 e 3.

Indicação: m.m.c. (2, 3) = 6.

**3. Determinação do m.m.c. de dois, ou mais, números.** O m.m.c. de dois, ou mais, números, decompostos em seus fatores primos, é dado pelo produto dos fatores primos *comuns* e *não comuns* tomados com os seus *maiores* expoentes.

Exemplo :

Determinar o m.m.c. dos números 90, 150 e 168.

90	2	150	2	168	2
45	3	75	3	84	2
15	3	25	5	42	2
5	5	5	5	21	3
1		1		7	7
				1	

Temos :

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$160 = 2^3 \times 3 \times 7$$

Os fatores primos *comuns*, tomados com os seus *maiores* expoentes são :

$$2^3 \text{ e } 3^2$$

Os fatores primos *não comuns*, tomados com os seus *maiores* expoentes são :

$$5^2 \text{ e } 7$$

Multiplicando esses fatores, temos :

$$\text{m.m.c. (90, 150, 168)} = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 25 \times 7 = 12\,600$$

Esse cálculo pode ser feito rapidamente com a seguinte disposição prática, onde os fatores primos comuns e não comuns são dispostos à direita de um traço vertical até à obtenção de quocientes iguais a 1.

Assim, para o exemplo que está sendo estudado, a disposição prática é :

90,	150,	168	2
45,	75,	84	2
45,	75,	42	2
45,	75,	21	3
15,	25,	7	3
5,	25,	7	5
1,	5,	7	5
1,	1,	7	7
1,	1,	1	

e o

$$\text{m.m.c. (90, 150, 168)} = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 25 \times 7 = 12\,600$$

**4. Propriedades do m.m.c. de dois números.** 1.º) O m.m.c. de dois números primos entre si é o produto deles.

Exemplo :

$$\text{m.m.c. (6, 11)} = 66$$

6,	11	2
3,	11	3
1,	11	11
1,	1	<hr/> 2×3×11 = 66

2.<sup>a</sup>) O m.m.c. de dois números em que o maior é divisível pelo menor é o maior dêles. Exemplo:

$$\begin{array}{r|l} \text{m.m.c. (8, 4) = 8} & \begin{array}{l} 8, \quad 4 \\ 4, \quad 2 \\ 2, \quad 1 \\ 1, \quad 1 \end{array} \\ & \hline & 2^3 = 8 \end{array}$$

3.<sup>a</sup>) Multiplicando ou dividindo dois números por um outro número, diferente de zero, o m.m.c. aparece multiplicado ou dividido por êsse outro. Exemplo:

Sendo o m.m.c. (12, 18) = 36

Multiplicando 12 e 18 por 2, tem-se:

$$\text{m.m.c. (12} \times 2, 18 \times 2) = 36 \times 2$$

**5. Propriedades entre o m.d.c. e o m.m.c. de dois números.** Multiplicando o m.d.c. de dois números dados pelo m.m.c. dêsses dois números, obtém-se o produto dos números dados.

Assim, dados os números 18 e 90, onde

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline & 18 = 2 \times 3^2 \\ & 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \end{array}$$

temos:

$$\text{m.d.c. (18, 90) = } 2 \times 3^2$$

e o produto:

$$\text{m.m.c. (18, 90) = } 2 \times 3^2 \times 5$$

como:

$$18 \times 90 = 2 \times 3^2 \times 2 \times 3^2 \times 5$$

$$\text{m.d.c. (18, 90) } \times \text{m.m.c. (18, 90) = } 2 \times 3^2 \times 2 \times 3^2 \times 5$$

segue-se que os produtos são iguais, isto é:

$$\text{m.d.c. (18, 90) } \times \text{m.m.c. (18, 90) = } 18 \times 90.$$

APLICAÇÕES:

1.<sup>a</sup>) Sabendo-se que o produto de dois números é 120 e que o m.d.c. entre êles é 4, pergunta-se qual o valor do m.m.c. dêsses números.

Como:

$$\text{m.d.c. } \times \text{m.m.c. = } 120$$

e sendo o m.d.c. igual a 4, segue-se que:  $\text{m.m.c.} = 120 : 4 = 30$

2.<sup>a</sup>) Determinar o m.m.c. dos números 12 e 18, usando o m.d.c. entre êles.

$$\text{Como: } \text{m.d.c. } \times \text{m.m.c.} = 12 \times 18 = 216$$

e sendo o m.d.c. (12, 18) = 6 segue-se que:  $\text{m.m.c.} = 216 : 6 = 36$ .

### PROBLEMAS DE APLICAÇÃO DO M.M.C.

1. Determinar os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 24 e 36, a fim de obter produtos iguais.

Sendo o m.m.c. (24, 36) = 72, e as divisões  $72 : 24 = 3$  e  $72 : 36 = 2$ , segue-se que 2 e 3 são os menores números que, multiplicados, respectivamente, por 24 e 36, dão produtos iguais (72).

2. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 3 000 e que sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 48, 60 e 72.

O primeiro múltiplo comum de 48, 60 e 72 é 720 (que é o m.m.c.) e portanto o problema estará resolvido procurando-se os múltiplos de 720 compreendidos entre 1 000 e 3 000, isto é,  $720 \times 2 = 1\,440$ ;  $720 \times 3 = 2\,160$ ;  $720 \times 4 = 2\,880$ . (Os demais múltiplos de 720 ultrapassam 3 000).

3. Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro cada 4 dias, o segundo, cada 6 e o terceiro cada 9 dias. Tendo êsses navios partido juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos novamente?

O primeiro múltiplo dêsses números 4, 6 e 9, é 36 (que é o m.m.c.). Logo, depois de 36 dias êsses navios partirão juntos novamente.

### EXERCÍCIOS SÔBRE O M.M.C.

- Calcular: 1.<sup>o</sup> m.m.c. (45, 12); 2.<sup>o</sup> m.m.c. (96, 144); 3.<sup>o</sup> m.m.c. (36, 96, 112); 4.<sup>o</sup> m.m.c. (4 320, 6 480); 5.<sup>o</sup> m.m.c. (48, 120, 96, 144); 6.<sup>o</sup> m.m.c. (123, 205, 287); 7.<sup>o</sup> m.m.c. (61, 306, 189, 252).
- Usando as propriedades do m.m.c., determinar: 1.<sup>o</sup> m.m.c. (4, 5); 2.<sup>o</sup> m.m.c. (12, 3); 3.<sup>o</sup> m.m.c. (4, 1 853 916); 4.<sup>o</sup> m.m.c. (6, 11, 12).
- Qual é a diferença entre o m.m.c. e o m.d.c. dos números 101 e 337?
- O m.m.c. de dois números é 11 352 e o m.d.c. é 6. Se um dos números é 264 qual é o outro?



5. Qual o produto de dois números se o m.d.c. é 8 e o m.m.c. é 48?
6. Determinar todos os números compreendidos entre 1 000 e 4 000 que sejam divisíveis ao mesmo tempo, por 75, 150 e 180.
7. Calcular os dois menores números pelos quais devemos multiplicar os números 60 e 78, a fim de obter produtos iguais.
8. Numa república o presidente deve permanecer 4 anos em seu cargo, os senadores 6 anos e os deputados 3. Se em 1929 houve eleições para os três cargos, em que ano deverão se realizar novamente as eleições para esses cargos?
9. Duas rodas de uma engrenagem tem 14 e 21 dentes respectivamente. Cada roda tem um dente estragado. Se num dado instante estão em contato os dois dentes estragados, depois de quantas voltas repete-se novamente esse encontro?
10. Dois ciclistas percorrem uma pista circular no mesmo sentido. O primeiro a percorre em 36 segundos e o segundo em 30 segundos. Tendo os ciclistas partido juntos, pergunta-se depois de quanto tempo se encontrarão novamente no ponto de partida e quantas voltas dará cada um.

## RESPOSTAS:

1. 1.º) 180; 2.º) 288; 3.º) 2 016; 4.º) 12 960; 5.º) 1 440; 6.º) 4 305; 7.º) 783 972.
2. 1.º) 20; 2.º) 12; 3.º) 1 853 916; 4.º) 132.
3. A diferença é 34 036.
4. 258.
5. 384.
6. 1 800, 2 700 e 3 600.
7. 10 e 13.
8. 1941.
9. 2 voltas da maior ou 3 voltas da menor.
10. Encontrar-se-ão depois de 180 segundos. O primeiro ciclista dará 5 voltas e o segundo 6 voltas.

## II) Número fracionário. Operações fundamentais. Problemas típicos.

### Número decimal

#### § 1. Números fracionários.

1. **Noção intuitiva de fração.** A primeira idéia de fração nos é dada quando se divide um objeto (que nesse instante representa uma unidade) em um número qualquer de partes iguais e se considera uma ou algumas dessas partes.



FIG. 4

Assim, por exemplo, dividindo-se um tablete de chocolate (fig. 4) em três partes iguais, temos que:

- 1) uma dessas partes representa uma fração do chocolate que chamaremos *um terço* e indicamos por  $\frac{1}{3}$ ;
- 2) duas dessas partes representam outra fração que chamaremos *dois terços* e indicamos por  $\frac{2}{3}$ ;

#### 2. Definição.

Número fracionário ou fração é um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais.

Essa representação é feita mediante dois números inteiros numa certa ordem, sendo o segundo diferente de zero, chamados respectivamente de *numerador* e *denominador*.

O *denominador* indica em quantas partes foi dividida a unidade e o *numerador* quantas dessas partes foram tomadas.

Numerador e denominador constituem os *termos* da fração e são escritos o primeiro por cima do segundo separados por um traço horizontal.

**3. Leitura de um número fracionário.** Lê-se primeiramente o numerador e em seguida o denominador acrescido da palavra *avos*. Exemplo:

$\frac{5}{12}$  lê-se: cinco doze avos

Se o denominador fôr: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, lê-se o numerador e, em seguida, na mesma ordem, as palavras: *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *sétimos*, *oitavos*, e *nonos*. Exemplos:

$\frac{2}{3}$  lê-se: dois terços.

$\frac{4}{5}$  lê-se: quatro quintos.

$\frac{1}{2}$  lê-se: um meio ou simplesmente meio.

Se o denominador fôr uma potência de 10, isto é, 10, 100, 1 000, ... lê-se o numerador acompanhado das palavras: *décimos*, *centésimos*, *milésimos*, ... Exemplos:

$\frac{3}{10}$  lê-se: três décimos.

$\frac{7}{100}$  lê-se: sete centésimos.

A essas frações, cujos denominadores são potências de 10 chamamos de *frações decimais* e as demais frações de *frações ordinárias*. Exemplos:

$\frac{2}{19}$ ,  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{4}{5}$  ... são frações ordinárias.

$\frac{3}{10}$ ,  $\frac{9}{100}$ ,  $\frac{1}{1000}$  ... são frações decimais.

**4. Frações próprias, impróprias e aparentes.** Se no exemplo que demos do chocolate considerarmos *tôdas* as 3 partes da divisão obteremos o chocolate inteiro (unidade).

Esse fato poderá também ser representado pelo símbolo:  $\frac{3}{3}$ .

Se além desse chocolate considerarmos *mais a têrça parte* de um outro chocolate que lhe seja igual (fig. 5), representaremos esse total de 4 partes (3 do primeiro e uma do segundo)

com o símbolo:  $\frac{4}{3}$ .



FIG. 5

Podemos, por extensão, chamar aos símbolos  $\frac{3}{3}$  ou  $\frac{4}{3}$  também de fração ou número fracionário, acrescentando-lhe porém o qualificativo de *imprópria*, visto não ter aquêle primeiro significado dado na definição que era o de dividir a unidade e considerar somente partes que, reunidas, não a ultrapassem. Acrescentaremos o qualificativo de *própria* às frações que têm o sentido dado na definição, isto é, o numerador sempre menor que o denominador.

Logo, destacamos para as frações os dois casos:

1.º) O numerador se apresenta *menor* que o denominador.

Nesse caso a fração é *menor* que a *unidade* e é chamada *fração própria*. Exemplos:

$$\frac{2}{3} < 1 \quad \frac{4}{7} < 1 \quad \frac{122}{453} < 1$$

2.º) O numerador se apresenta *igual* ou *maior* que o denominador.

Nesse caso a fração é *igual* ou *maior* que a unidade e é chamada de *fração imprópria*. Exemplos:

$$\frac{3}{3} = 1 \quad \frac{4}{3} > 1 \quad \frac{217}{12} > 1$$

Entre as frações impróprias existem aquelas que têm o numerador *divisível* pelo denominador e que são chamadas de *frações aparentes* porque são iguais aos números inteiros que se obtêm dividindo o numerador pelo denominador. Exemplos:

$$\frac{14}{7} = 2 \quad \frac{20}{5} = 4 \quad \frac{196}{28} = 7$$

**5. Extração de inteiros. Números mistos.** Pode-se sempre *extrair os inteiros* de uma fração imprópria, bastando para isso dividir o numerador pelo denominador. O quociente obtido é a parte inteira da fração imprópria, enquanto que a parte fracionária, menor do que 1, tem o mesmo denominador e para numerador o resto da divisão.

O número composto de um número inteiro e de uma fração própria é chamado *número misto*. Exemplos:

1) A fração imprópria  $\frac{19}{5}$  dá origem ao número misto  $3\frac{4}{5}$

$$\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} \quad \text{pois} \quad 19 \left| \frac{5}{3} \right.$$

2) A fração imprópria  $\frac{7}{3}$  dá origem ao número misto  $2\frac{1}{3}$

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \quad \text{pois} \quad 7 \left| \frac{3}{1} \right.$$

Inversamente, pode-se transformar um *número misto* numa *fração imprópria*, construindo-se para isso uma fração de mesmo denominador e de numerador igual ao produto do inteiro pelo denominador somado com o numerador. Exemplo:

$$4\frac{2}{3} = \frac{14}{3} \quad \begin{array}{l} \text{numerador: } 3 \times 4 + 2 = 14 \\ \text{denominador: } 3 \end{array}$$

**6. Propriedades das frações.** 1.<sup>a</sup>) *Multiplicando* (ou dividindo) o *numerador* de uma fração por um certo número, diferente de zero, o valor da fração fica *multiplicado* (ou dividido) por esse número. Exemplo:

Seja a fração  $\frac{4}{9}$

Multiplicando o numerador por 2, temos a fração  $\frac{8}{9}$

Ora,  $\frac{8}{9}$  é uma *fração duas vezes maior* que  $\frac{4}{9}$ , pois, enquanto em  $\frac{8}{9}$  tomam-se 8 das 9 divisões da unidade, em  $\frac{4}{9}$  tomam-se somente 4 (fig. 6).

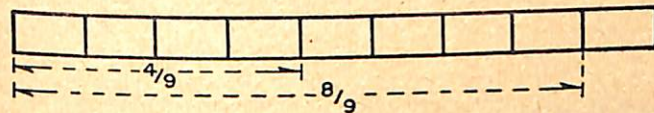


FIG. 6

Por essa propriedade as operações efetuadas com o numerador de uma fração refletem *diretamente* no valor da fração, isto é,  *aumentando* o valor do numerador, o valor da fração  *aumenta* (ou diminuindo o valor do numerador, o valor da fração diminui).

2.<sup>a</sup>) *Multiplicando* (ou dividindo) o *denominador* de uma fração por um certo número, diferente de zero, o *valor* da fração fica *dividido* (ou multiplicado) por esse número. Exemplo:

Seja a fração  $\frac{3}{4}$

Multiplicando o denominador por 2, temos a fração  $\frac{3}{8}$

Ora,  $\frac{3}{8}$  é uma *fração duas vezes menor* que  $\frac{3}{4}$ , pois, em  $\frac{3}{4}$  dividimos a unidade em 4 partes iguais e tomamos 3 e em  $\frac{3}{8}$  dividimos a *mesma unidade* em 8 partes iguais e tomamos *também* 3 partes (fig. 7).

Por essa propriedade as operações efetuadas com o denominador de uma fração refletem *inversamente* no valor da fração, isto é,  *aumentando* o valor do denominador, o valor

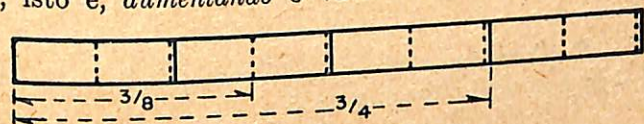


FIG. 7

da fração *diminui* (ou diminuindo o valor do denominador o valor da fração aumenta).

3.ª) *Multiplicando* (ou dividindo) *ambos os termos* de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, o valor da fração *não se altera*. Exemplo:

Seja a fração  $\frac{2}{7}$

Multiplicando o numerador e o denominador por 3, temos:

$$\frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{6}{21}$$

Essas frações  $\frac{2}{7}$  e  $\frac{6}{21}$  têm o mesmo valor, pois, quando multiplicamos o numerador da fração  $\frac{2}{7}$  por 3, o valor da fração ficou multiplicado por 3 (pela primeira propriedade) e quando multiplicamos o denominador por 3, o valor da fração ficou dividido por 3 (segunda propriedade). Logo, tendo sido o valor da fração multiplicado e dividido por 3, *êle não se alterou*.

As frações de igual valor, como  $\frac{2}{7}$  e  $\frac{6}{21}$ , dizem-se *equivalentes* e podem ser igualadas  $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$ .

**7. Simplificação de frações.** *Simplificar* uma fração significa dividir ambos os termos por um divisor comum. Assim, dada a fração:

$$\frac{48}{56}$$

dividindo os dois termos por 2 (que é um divisor comum), teremos

$$\frac{24}{28};$$

dividindo os dois termos ainda por 2, teremos:

$$\frac{12}{14};$$

dividindo, finalmente, ambos os termos por 2 (que continua sendo fator comum), obteremos:

$$\frac{6}{7}$$

As frações  $\frac{24}{28}$ ,  $\frac{12}{14}$  e  $\frac{6}{7}$  são *equivalentes* à fração  $\frac{48}{56}$  e evidentemente mais simples.

Na prática, a simplificação de frações é disposta da seguinte maneira:

$$\frac{48}{56} = \frac{24}{28} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \cancel{12} \\ \cancel{24} \\ \cancel{48} \\ \cancel{56} \\ \cancel{28} \\ \cancel{14} \\ 7 \end{array} = \frac{6}{7}$$

ou

**8. Frações irredutíveis.** Caso uma fração não possa ser mais simplificada, diz-se que ela é *irredutível* ou está reduzida à sua *forma mais simples*.

Como nesse caso os dois termos devem ser *primos entre si*, isto é, não têm mais nenhum divisor comum, a redução de uma fração à sua forma mais simples é feita dividindo os seus termos pelo seu m.d.c. (terceira propriedade do m.d.c. de dois números) Exemplo:

Reduzir à forma mais simples a fração

$$\frac{36}{54}$$

Como o m.d.c. (36, 54) = 18

$$\frac{54}{18} \left| \frac{36}{0} \right| \frac{18}{0}$$

temos:  $\frac{36 : 18}{54 : 18} = \frac{2}{3}$  que é uma fração irredutível.

É lógico que se pode chegar a êsse mesmo resultado, simplificando sucessivamente os fatores comuns aos termos da fração. Assim:

$$\frac{36}{54} = \frac{18}{27} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$(: 2) (: 3) (: 3)$$

9. **Erros mais comuns.** É erro imperdoável "simplificar" a fração por exemplo :

$$\frac{12+5}{3+5} = \frac{12}{3} \quad (?),$$

"eliminando" o 5 dos dois termos, pois, só podemos transformá-la em :

$$\frac{12+5}{3+5} = \frac{17}{8}.$$

10. **Redução de frações ao mesmo denominador.** Reduzir frações ao mesmo denominador é transformá-las em outras equivalentes do mesmo denominador. Temos a seguinte

REGRA : Para reduzir frações ao mesmo denominador basta multiplicar os dois termos de cada fração pelos denominadores de todas as outras. Exemplo :

Seja reduzir ao mesmo denominador as frações :

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{6}$$

Multiplicando os dois termos de  $\frac{2}{3}$  por 5 e 6 (denominadores das outras);

multiplicando os dois termos de  $\frac{4}{5}$  por 3 e 6;

e, multiplicando os dois termos de  $\frac{1}{6}$  por 3 e 5;

obteremos :

$$\frac{2 \times 5 \times 6}{3 \times 5 \times 6}, \quad \frac{4 \times 3 \times 6}{5 \times 3 \times 6}, \quad \frac{1 \times 3 \times 5}{6 \times 3 \times 5}$$

ou

$$\frac{60}{90}, \quad \frac{72}{90}, \quad \frac{15}{90}$$

NOTA : Embora não tendo a mesma aplicação, pode-se, da mesma maneira, reduzir frações ao mesmo numerador.

11. **Redução de frações ao mínimo denominador comum.** A fim de se evitar frações com termos muito grandes, procura-se nas reduções usar o denominador menor possível, e em tais casos diz-se que *reduzimos as frações ao mínimo denominador comum*.

Para essa redução procede-se do seguinte modo :

1.º reduzem-se as frações à forma irredutível ;  
2.º determina-se o m.m.c. dos denominadores dessas frações :

3.º multiplica-se o numerador de cada fração pelo quociente da divisão do m.m.c. pelo denominador correspondente e dá-se para denominador o m.m.c.. Exemplo :

Reduzir ao *mínimo denominador comum* as frações :

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{6}$$

Como as frações já estão sob a forma irredutível, podemos determinar o m.m.c. (3, 5, 6) que é igual a 30.

Dividimos 30 pelo denominador 3 e o quociente, que é 10, multiplicamos pelo numerador 2. Ou seja

$$\frac{2 \times 10}{30}$$

Procedendo da mesma maneira com as frações  $\frac{4}{5}$  e  $\frac{1}{6}$ , teremos :

$$\frac{4 \times 6}{30}, \quad \frac{1 \times 5}{30}$$

e, finalmente :

$$\frac{20}{30}, \quad \frac{24}{30}, \quad \frac{5}{30}$$

12. **Comparações de frações.** Dadas duas frações, para se saber qual é a maior ou menor, é necessário ter conhecimento de que :

1.º Quando duas frações têm o *mesmo denominador*, a maior é a que tem o *maior numerador*. Exemplo :

Sejam as frações :  $\frac{2}{7}$  e  $\frac{5}{7}$ .

Devemos ter :  $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$

2.º Quando duas frações têm o *mesmo numerador*, a maior é a que tem o *menor denominador*. Exemplo :

Sejam as frações :  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{2}{5}$ .