

7. No centro de uma praça, que tem 2 312 metros quadrados de área, quer-se construir um abrigo de forma quadrada ocupando $\frac{1}{8}$ de sua área. Que comprimento deve ser dado ao lado do abrigo?

R: 17 m

8. Qual o menor número que se deve subtrair de 8 560, para obter um quadrado?

R: 96

9. Qual o menor número que se deve somar a 3 009 para obter um quadrado?

R: 16

10. A área de um quadrado tem 1,96 dam². Determinar o comprimento do lado, em metros.

R: 14 m

7. Raiz quadrada das frações ordinárias.

Consideramos dois casos na extração da raiz quadrada.

1.º CASO. O denominador é quadrado.

a) Para elevar uma fração ao quadrado, elevamos ao quadrado cada um de seus termos; assim:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{7^2}{8^2} = \frac{49}{64};$$

logo, para determinar a fração cujo quadrado é $\frac{49}{64}$, isto é, para extrair a raiz quadrada de $\frac{49}{64}$, devemos extrair a raiz quadrada de cada um de seus termos:

$$\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}.$$

Exemplos.

$$1.º \quad \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}.$$

$$2.º \quad \sqrt{\frac{169}{225}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}} = \frac{13}{15}.$$

$$3.º \quad \sqrt{\frac{18}{32}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Neste caso a raiz é exata.

b) Seja extrair a raiz quadrada de $\frac{7}{25}$.

A fração dada fica compreendida entre $\frac{4}{25}$ e $\frac{9}{25}$; logo, sua raiz quadrada ficará compreendida entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$, isto é,

$$\frac{2}{5} < \sqrt{\frac{7}{25}} < \frac{3}{5}$$

e, portanto, a raiz quadrada de $\frac{7}{25}$ diferirá de cada uma dessas frações de menos de $\frac{1}{5}$.

Assim, a raiz pedida é $\frac{2}{5}$ por falta e $\frac{3}{5}$ por excesso, a menos de $\frac{1}{5}$, ou com êrro menor que $\frac{1}{5}$.

Exemplos.

$$1.º \quad \sqrt{\frac{33}{49}} = \frac{5}{7} \text{ a menos de } \frac{1}{7}.$$

$$2.º \quad \sqrt{\frac{83}{121}} = \frac{9}{11} \text{ a menos de } \frac{1}{11}.$$

$$3.º \quad \sqrt{\frac{34}{98}} = \sqrt{\frac{17}{49}} = \frac{4}{7} \text{ a menos de } \frac{1}{7}.$$

REGRA. Para extrair a raiz quadrada de uma fração, em que o denominador é quadrado, extrai-se a raiz quadrada do numerador a menos de uma unidade e a exata do denominador. Quando o numerador não é quadrado a raiz é aproximada, com êrro menor que uma unidade fracionária, cujo denominador é igual à raiz quadrada do denominador.

2.º CASO. O denominador não é quadrado.

Seja extrair a raiz quadrada de $\frac{35}{72}$.

Neste caso transformamos a fração numa igual, cujo denominador seja quadrado, o que reduz a pesquisa ao caso anterior. Decompondo o denominador em fatores, temos:

$$72 = 2^3 \times 3^2,$$

e verificamos que, multiplicando-o por 2 (fator de expoente ímpar), obteremos um quadrado. Então a fração igual será $\frac{35 \times 2}{72 \times 2}$, ou $\frac{35 \times 2}{2^4 \times 3^2}$. Assim, temos:

$$\sqrt{\frac{35}{72}} = \sqrt{\frac{70}{2^4 \times 3^2}} = \frac{8}{2^2 \times 3} = \frac{8}{12} \text{ a menos de } \frac{1}{12}.$$

Observamos que, quando o numerador não é quadrado, extrai-se sua raiz aproximada; e, entretanto, torna-se o denominador quadrado, quando não é. Assim se procede, afim de obter a raiz com êrro menor que uma unidade fracionária determinada.

Exemplos.

$$1.º \quad \sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{7 \times 3}{12 \times 3}} = \sqrt{\frac{21}{36}} = \frac{4}{6} \text{ a menos de } \frac{1}{6}.$$

$$2.º \quad \sqrt{\frac{5}{13}} = \sqrt{\frac{5 \times 13}{13^2}} = \sqrt{\frac{65}{13^2}} = \frac{8}{13} \text{ a menos de } \frac{1}{13}.$$

$$3.º \quad \sqrt{\frac{20}{32}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{3}{4} \text{ a menos de } \frac{1}{4}.$$

REGRA. Para extrair a raiz quadrada de uma fração, cujo denominador não é quadrado, transforma-se numa equivalente de denominador quadrado, e aplica-se a regra do primeiro caso.

8. Raizes aproximadas a menos de uma unidade fracionária.

A regra de extração da raiz quadrada das frações ordinárias permite obter a raiz de um número qualquer, com êrro menor que uma unidade fracionária.

Seja, por exemplo, extrair a raiz quadrada de 7 a menos de $\frac{1}{5}$.

Transformando o número 7 em fração com denominador 5, obteremos:

$$7 = \frac{7 \times 5}{5} = \frac{35}{5}$$

Aplicando a regra do segundo caso, tornaremos o denominador quadrado:

$$\frac{35}{5} = \frac{35 \times 5}{5 \times 5} = \frac{175}{25}$$

Assim:

$$\frac{169}{25} < \frac{175}{25} < \frac{196}{25},$$

logo, a raiz quadrada de $\frac{175}{25}$ ou 7, fica compreendida entre $\frac{13}{5}$ e $\frac{14}{5}$ isto é:

$$\frac{13}{5} < \sqrt{7} < \frac{14}{5}$$

sendo, portanto, $\frac{13}{5}$ por falta e $\frac{14}{5}$ por excesso, a menos de $\frac{1}{5}$. Obtivemos a raiz $\frac{13}{5}$, extraíndo a raiz a menos de uma unidade do produto 7×25 ou 175, e dando o denominador 5. As operações podem ser indicadas do seguinte modo:

$$\sqrt{7} \text{ a menos de } \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{7 \times 5^2}}{5} \text{ (a menos de 1)} = \frac{\sqrt{175}}{5} = \frac{13}{5}$$

Exemplos.

$$1.º \quad \sqrt{15} \text{ a menos de } \frac{1}{7} = \frac{\sqrt{15 \times 7^2}}{7} = \frac{\sqrt{735}}{7} = \frac{27}{7}$$

por falta e $\frac{28}{7}$ por excesso.

$$2.º \quad \sqrt{3} \text{ a menos de } 0,1 = \frac{\sqrt{3 \times 10^2}}{10} = \frac{\sqrt{300}}{10} = \frac{17}{10} = 1,7 \text{ por falta.}$$

REGRA. Para extrair a raiz quadrada de um número a menos de uma unidade fracionária, multiplica-se o número pelo quadrado do denominador, extrai-se a raiz quadrada do produto a menos de 1 e multiplica-se o resultado pela unidade fracionária dada.

EXERCÍCIOS

Extrair a raiz quadrada das frações:

1. $\frac{64}{100}$	2. $\frac{225}{441}$	3. $\frac{223}{256}$	4. $\frac{1\ 573}{8\ 316}$	5. $\frac{625}{1\ 296}$
6. $\frac{118}{720}$	7. $\frac{37}{90}$	8. $4\frac{2}{7}$	9. $\frac{37}{81}$	10. $\frac{3}{8}$

Determinar a raiz quadrada a menos de $\frac{1}{7}$ dos números:

11. 23	12. 54	13. $4\frac{2}{7}$	14. 25,3	15. $3\frac{2}{5}$
--------	--------	--------------------	----------	--------------------

RESPOSTAS

1. $\frac{8}{10}$	2. $\frac{15}{21}$	3. $\frac{15}{16}$	4. $\frac{3}{7}$	5. $\frac{25}{36}$
6. $\frac{2}{5}$	7. $\frac{19}{30}$	8. 2	9. $\frac{6}{9}$	10. $\frac{1}{2}$
11. $4\frac{5}{7}$	12. $7\frac{2}{7}$	13. 2	14. 5	15. $\frac{12}{5}$

9. Raiz quadrada das frações e números decimais.

Suponhamos que queremos determinar o lado de um quadrado que tem $6,25 \text{ m}^2$ de área. Para isso precisamos extrair a raiz quadrada do número 6,25 que é a medida da

área em m^2 . Como já sabemos extrair a raiz quadrada dos números inteiros, podemos transformar o número decimal dado em inteiro, reduzindo-o a dm^2 .

Assim, temos:

$$6,25 \text{ m}^2 = 625 \text{ dm}^2;$$

extraindo a raiz de 625, obteremos:

$$\sqrt{625} = 25.$$

O lado do quadrado tem, pois, 25 dm ou, 2,5 m.

Observemos que a raiz tem metade das casas decimais do número dado.

Procuremos, como segundo exemplo, determinar o lado do quadrado de $39,7 \text{ m}^2$ de área.

Procedendo como no exemplo anterior, façamos a redução a dm^2 , o que dará:

$$39,7 \text{ m}^2 = 3\ 970 \text{ dm}^2.$$

Extraindo a raiz do número 3 970, obteremos o lado do quadrado em dm; assim,

$$\sqrt{3\ 970} = 63.$$

O lado tem 63 dm ou 6,3 m.

Observemos que a redução exigiu a colocação de um zero, isto é, que se tornasse par o número de algarismos decimais.

Considerando os números abstratos, podemos, então, concluir:

$$\sqrt{6,25} = 2,5$$

$$\sqrt{39,7} = 6,3.$$

REGRA. Torna-se par o número de algarismos fracionários decimais. Extrai-se a raiz do número como se fosse inteiro. Separa-se na raiz a metade do número de algarismos decimais do número dado.

Exemplos.

1.º Extrair a raiz quadrada de 0,4 096.

Temos: $\sqrt{4\ 096} = 64,$
 donde: $\sqrt{0,409\ 6} = 0,64.$

2.º Extrair a raiz quadrada de 2,4.

Tornando par o número de ordens decimais, temos:
 $2,4 = 2,40.$

Extraindo a raiz do número inteiro:

$\sqrt{240} = 15$
 donde: $\sqrt{2,40} = 1,5.$

3.º Extrair a raiz quadrada de 0,571.

Temos:
 $\sqrt{0,571} = \sqrt{0,571\ 0}.$
 $\sqrt{5\ 710} = 75$ a menos de uma unidade.
 $\sqrt{0,571\ 0} = 0,75$ a menos 0,01.

EXERCÍCIOS

Determinar a raiz quadrada dos seguintes números:

- | | | |
|------------|-----------------|--------------|
| 1. 2,89 | 2. 25,3 | 3. 12,96 |
| 4. 0,598 7 | 5. 0,000 087 83 | 6. 0,002 337 |
| 7. 0,022 | 8. 3,496 9 | 9. 0,000 333 |
| | 10. 7,241 | |

RESPOSTAS

- | | | |
|---------|------------|----------|
| 1. 1,7 | 2. 5,0 | 3. 3,6 |
| 4. 0,77 | 5. 0,009 3 | 6. 0,048 |
| 7. 0,14 | 8. 1,87 | 9. 0,018 |
| | 10. 2,69. | |

10. Raiz aproximada.

O erro cometido na extração da raiz de uma fração decimal é menor que a unidade fracionária, cuja ordem é obtida dividindo por 2 o número de algarismos decimais do número

dado. Assim, o erro cometido na extração da raiz de 2,40 é menor que 0,1; o erro cometido na extração da raiz de 0,571 ou 0,571 0 é menor que 0,01.

Inversamente, para obter a raiz de um número com erro menor que 0,01, por exemplo, é necessário que o mesmo tenha 4 algarismos fracionários decimais; isto é, o dobro de algarismos decimais da aproximação exigida.

Podemos, então, obter a raiz aproximada, acrescentando zeros ou suprimindo algarismos, à direita, de modo que o número dado fique com o dobro de algarismos decimais da aproximação pedida.

Exemplos.

1.º Extrair a raiz quadrada de 2, a menos de 0,01.

Extraímos a raiz do número 2,000 0 ou de 20 000 e separamos duas ordens decimais no resultado. Obteremos:

$$\sqrt{2} = 1,41.$$

2.º Extrair a raiz de 5/8, a menos de 0,01.

Devemos obter o número 5/8 com quatro ordens decimais fracionárias.

Convertendo em decimal, temos: $\frac{5}{8} = 0,625$ ou $0,625\ 0.$

Extraímos, então, a raiz de 0,625 0. Obteremos:

$$\sqrt{5/8} = \sqrt{0,625\ 0} = 0,79.$$

3.º Extrair a raiz de 0,003 588 7 a menos de 0,01.

A aproximação exigida será obtida, considerando 4 algarismos decimais do número dado, isto é, 0,003 5. Assim:

$$\sqrt{0,003\ 588\ 7} = 0,05$$
 a menos de 0,01.

EXERCÍCIOS

Determinar a raiz quadrada, a menos de centésimo, dos números seguintes:

- | | | | | |
|------|--------|--------------|------------------|-------------------|
| 1. 3 | 2. 258 | 3. 0,035 813 | 4. $\frac{3}{8}$ | 5. $\frac{7}{13}$ |
|------|--------|--------------|------------------|-------------------|

Determinar a raiz quadrada, a menos de um milésimo, dos números seguintes:

6. 5

7. 0,006

8. $\frac{53}{72}$

Resolver as expressões:

$$9. \sqrt{1,96} + 4, (3) \times \frac{9}{13} - [1, (6) - \sqrt{\frac{9}{25}}]$$

$$10. \left(\sqrt{144} + \frac{1}{3}\right) : \frac{37}{9} - \frac{3}{4} [0,2(6) - \sqrt{\frac{1}{25}}]$$

RESPOSTAS

1. 1,73 2. 16,06 3. 0,18 4. 0,61 5. 0,73
6. 2,236 7. 0,077 8. 0,857 9. $3\frac{1}{3}$ 10. $2\frac{19}{20}$

11. Tábua de potências e raízes.

O trabalho de obter potências e raízes pode ser abreviado utilizando-se tábuas. Na página 109 damos uma tabela de quadrados, raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas.

Para os números inteiros de 1 a 100, que estão escritos em **negrito**, a tabela dá imediatamente o resultado, lendo-se o número na 1.ª coluna e a potência ou raiz procurada na coluna correspondente.

Exemplos.

$$82^2 = 6\,724$$

$$82^3 = 551\,368$$

$$\sqrt{82} = 9,055$$

$$\sqrt[3]{82} = 4,344.$$

As raízes dos números de 1 a 100 são obtidas na tábua com erro menor que 0,001.

Para obter as raízes dos números maiores que 100, procuramos o número na coluna da potência e a raiz será o número em **negrito** que corresponder na 1.ª coluna.

TÁBUA DE POTÊNCIAS E RAÍZES

N.º	Quadrado	Cubo	Raiz Quadrada	Raiz Cúbica	N.º	Quadrado	Cubo	Raiz Quadrada	Raiz Cúbica
1	1	1	1.000	1.000	51	2 601	132 651	7.141	3.708
2	4	8	1.414	1.259	52	2 704	140 608	7.211	3.732
3	9	27	1.732	1.442	53	2 809	148 877	7.280	3.756
4	16	64	2.000	1.587	54	2 916	157 464	7.348	3.779
5	25	125	2.236	1.709	55	3 025	166 375	7.416	3.802
6	36	216	2.449	1.817	56	3 136	175 616	7.483	3.825
7	49	343	2.646	1.912	57	3 249	185 193	7.549	3.848
8	64	512	2.828	2.000	58	3 364	195 112	7.615	3.870
9	81	729	3.000	2.080	59	3 481	205 379	7.681	3.893
10	100	1 000	3.162	2.154	60	3 600	216 000	7.746	3.914
11	121	1 331	3.316	2.223	61	3 721	226 981	7.810	3.936
12	144	1 728	3.464	2.289	62	3 844	238 328	7.874	3.957
13	169	2 197	3.605	2.351	63	3 969	250 047	7.937	3.979
14	196	2 744	3.741	2.410	64	4 096	262 144	8.000	4.000
15	225	3 375	3.873	2.466	65	4 225	274 625	8.062	4.020
16	256	4 096	4.000	2.519	66	4 356	287 496	8.124	4.041
17	289	4 913	4.123	2.571	67	4 489	300 763	8.185	4.061
18	324	5 832	4.242	2.620	68	4 624	314 432	8.246	4.081
19	361	6 859	4.358	2.668	69	4 761	328 509	8.306	4.101
20	400	8 000	4.472	2.714	70	4 900	343 000	8.366	4.121
21	441	9 261	4.582	2.758	71	5 041	357 911	8.426	4.140
22	484	10 648	4.690	2.802	72	5 184	373 248	8.485	4.160
23	529	12 167	4.795	2.843	73	5 329	389 017	8.544	4.179
24	576	13 824	4.899	2.884	74	5 476	405 224	8.602	4.198
25	625	15 625	5.000	2.924	75	5 625	421 875	8.660	4.217
26	676	17 576	5.099	2.963	76	5 776	438 976	8.717	4.235
27	729	19 683	5.196	3.000	77	5 929	456 533	8.775	4.254
28	784	21 952	5.291	3.036	78	6 084	474 552	8.831	4.272
29	841	24 389	5.385	3.072	79	6 241	493 039	8.888	4.290
30	900	27 000	5.477	3.107	80	6 400	512 000	8.944	4.308
31	961	29 791	5.567	3.141	81	6 561	531 441	9.000	4.326
32	1 024	32 768	5.656	3.174	82	6 724	551 368	9.055	4.344
33	1 089	35 937	5.744	3.207	83	6 889	571 787	9.110	4.362
34	1 156	39 304	5.831	3.239	84	7 056	592 704	9.165	4.379
35	1 225	42 875	5.916	3.271	85	7 225	614 125	9.219	4.396
36	1 296	46 656	6.000	3.301	86	7 396	636 056	9.273	4.414
37	1 369	50 653	6.082	3.332	87	7 569	658 503	9.327	4.431
38	1 444	54 872	6.164	3.361	88	7 744	681 472	9.380	4.447
39	1 521	59 319	6.245	3.391	89	7 921	704 969	9.434	4.464
40	1 600	64 000	6.324	3.419	90	8 100	729 000	9.486	4.481
41	1 681	68 921	6.403	3.448	91	8 281	753 571	9.539	4.497
42	1 764	74 088	6.480	3.476	92	8 464	778 688	9.591	4.514
43	1 849	79 507	6.557	3.503	93	8 649	804 357	9.643	4.530
44	1 936	85 184	6.633	3.530	94	8 836	830 584	9.695	4.546
45	2 025	91 125	6.708	3.556	95	9 025	857 375	9.746	4.562
46	2 116	97 336	6.782	3.583	96	9 216	884 736	9.798	4.578
47	2 209	103 823	6.855	3.608	97	9 409	912 673	9.848	4.594
48	2 304	110 592	6.928	3.634	98	9 604	941 192	9.899	4.610
49	2 401	117 649	7.000	3.659	99	9 801	970 299	9.949	4.626
50	2 500	125 000	7.071	3.684	100	10 000	1 000 000	10.000	4.641

Exemplos.

1.º Achar a raiz quadrada de 7 744.

Procuramos o número 7 744 na coluna dos quadrados e encontramos na 2.ª parte da tabela, no 7.º grupo. O número correspondente em **negrito** é 88. Concluimos:

$$\sqrt{7\,744} = 88.$$

2.º Achar a raiz cúbica de 17 576.

Procuramos na coluna dos cubos o número 17 576 e o encontramos na 1.ª parte da tabela e no 5.º grupo. O número correspondente da 1.ª coluna, em **negrito**, é 26. Concluimos:

$$\sqrt[3]{17\,576} = 26.$$

3.º Achar a raiz quadrada de 1 810.

Procuramos o número 1 810 na coluna dos quadrados. Não está na tábua, porém encontra-se compreendido entre 1 764 e 1 849, que nela figuram. Os números correspondentes em **negrito** são 42 e 43. Concluimos:

A raiz quadrada de 1 810 é 42 por falta e 43 por excesso, com erro menor que uma unidade.

A tábua da página 109, pode, pois, fornecer-nos a raiz quadrada dos números de 100 a 10 000, com erro menor que uma unidade e, da mesma forma, as raízes cúbicas de 100 a 1 000 000.

Quando o número fôr decimal, utilizamos ainda a tabela de potências e raízes, tendo apenas o cuidado de colocar a vírgula no resultado, de acôrdo com as regras conhecidas.

Exemplos.

1.º Achar a raiz quadrada de 60,84.

Procuramos na tabela o número inteiro 6 084 e obtemos:

$$\sqrt{6\,084} = 78,$$

logo, concluimos:

$$\sqrt{60,84} = 7,8.$$

2.º Achar a raiz cúbica de 531,441.

Utilizando a tabela dos números inteiros, encontraremos:

$$\sqrt[3]{531\,441} = 81,$$

concluimos:

$$\sqrt[3]{531,441} = 8,1.$$

3.º Achar a raiz quadrada de 9,8.

Tornando par o número de casas decimais, consideramos o número 9,80 e procuramos na tabela o inteiro 980. Encontramos

$$\sqrt{980} = 31, \text{ com erro menor que } 1;$$

concluimos:

$$\sqrt{9,80} = 3,1 \text{ com erro menor que } 0,1.$$

EXERCÍCIOS

Ler na tábua os quadrados dos números:

1. 71 2. 9,3 3. 550 4. 0,064 5. 0,77 6. 4 300

Achar na tábua as raízes quadradas dos números:

7. 93 8. 9 604 9. 24,01 10. 82,35 11. 52,9 12. 0,005 184

Achar na tábua os cubos dos números:

13. 34 14. 8,7 15. 0,53 16. 970 17. 2,5 18. 0,44

Achar na tábua as raízes cúbicas dos números:

19. 13 824 20. 493,039 21. 1 627 22. 0,002 197 23. 45,8 24. 0,78

25. Achar, em quilômetros, o comprimento do lado de um quadrado que tem 729 hectares. R: 2,7 km

26. Um terreno tem 152 m de comprimento e 38 m de largura. Achar o lado do quadrado da mesma área. R: 76 m

27. Determinar a aresta de um cubo que tem $24\,389\text{ dm}^3$ de volume.
R: 2,9 dm
28. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são, respectivamente, de 1,6 dm, 0,4 dm e 2,7 dm. Determinar, em metros, a aresta do cubo que tem o mesmo volume.
R: 0,12 m
29. Um reservatório de forma cúbica pode conter 1 728 litros d'água. Determinar as dimensões do reservatório, em metros.
R: 1,2 m
30. O produto de dois números iguais é 1,5129. Determinar os números.
R: 1,23

UNIDADE V

Razões e Proporções

1. Razão de duas grandezas.
2. Proporções; médias.
3. Grandezas proporcionais.

I. RAZÃO DE DUAS GRANDEZAS

1. Medida de uma grandeza.

Medir uma grandeza é verificar quantas vezes a mesma contém uma segunda grandeza determinada que se denomina *unidade*. Consideremos o exemplo bem simples da linha reta. Medir um segmento é aplicar sôbre êle, a partir da origem, e tantas vezes quanto possível, um segundo segmento de comprimento determinado — a *unidade*.

O número que traduz quantas vezes a aplicação foi possível, denomina-se *medida* do segmento em relação à unidade escolhida.

Sendo AB o segmento a medir e CD a unidade escolhida, teremos, representando por a e b os comprimentos do segmento e da unidade, como se pode verificar na figura acima:

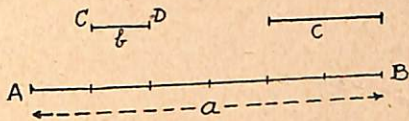


Fig. 15

$$a = 6 \cdot b.$$

A medida de AB com a unidade b é expressa pelo número 6.

Se medirmos o mesmo segmento com várias unidades diferentes, encontraremos vários números que exprimirão a medida do mesmo segmento; assim, o número que exprime a medida do mesmo segmento AB com a unidade c é 3. A medida de uma grandeza depende portanto da unidade escolhida; logo, se quizermos comparar duas grandezas por intermédio dos números que exprimem suas medidas, devemos adotar na medida de ambas a mesma unidade.

2. Razão.

Se medirmos duas grandezas com a mesma unidade, os dois segmentos a e b , por exemplo, com a mesma unidade u , encontraremos (fig. 16):

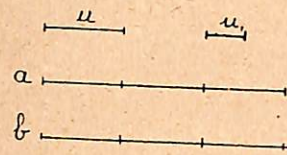


Fig. 16

$$\begin{aligned} a &= 3 u \\ b &= 5 u \end{aligned}$$

Dividindo, membro a membro, as duas igualdades, obteremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

O número $\frac{3}{5}$, que é abstrato, denomina-se *razão* dos dois segmentos a e b . Concluimos a definição:

Razão de duas grandezas da mesma espécie é o quociente da divisão dos números que exprimem suas medidas, com a mesma unidade.

Assim, para determinarmos a razão entre dois estados da mesma grandeza, ou, como também dizemos, entre duas grandezas da mesma espécie, é necessário medi-las com a mesma unidade.

Exemplos.

1.º Achar a razão entre dois segmentos de 1 dm e 25 cm, respectivamente.

Reduzindo as duas medidas a cm, obtemos a razão:

$$\frac{10}{25} \text{ ou } \frac{2}{5}, \text{ que também se escreve } 2:5.$$

2.º Achar a razão de 5 in para 5 ft.

Como o pé tem 12 polegadas, as medidas em polegadas serão, respectivamente, 5 e 60, e a razão pedida será:

$$\frac{5}{60} \text{ ou } \frac{1}{12}$$

Se adotássemos uma nova unidade u_1 , a metade de u , por exemplo, como mostra a fig. 16, teríamos:

$$u = 2u_1$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} a &= 3 \times 2u_1 = 6u_1 \\ b &= 5 \times 2u_1 = 10u_1. \end{aligned}$$

Por divisão, obteríamos novamente:

$$\frac{a}{b} = \frac{6}{10} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

daí, a conclusão:

A razão de duas grandezas é independente da unidade adotada nas medidas, isto é, tem um valor fixo, qualquer que seja a unidade escolhida.

Observemos que o segmento a contém três quintas partes do segmento b e a razão entre os mesmos é $\frac{3}{5}$; assim, podemos dizer que

a razão de uma grandeza para outra da mesma espécie é o número, inteiro ou fracionário, que indica como se pode obter a primeira a partir da segunda; ou, o que é o mesmo, o número que exprime a medida da primeira quando se toma a segunda para unidade.

3. Têrmos da razão.

O primeiro têrmo de uma razão denomina-se *antecedente*, e o segundo *consequente*. Na razão de 3 para 5 ou $\frac{3}{5}$, o antecedente é 3 e o consequente 5.

Quando a razão é um número inteiro, o consequente é a unidade.

4. Propriedades das razões.

As razões gozam de tôdas as propriedades das frações, e a elas são aplicáveis tôdas as regras de cálculo com as frações, já conhecidas.

EXERCÍCIOS

Exprimir as seguintes razões, com os menores números inteiros que fôr possível:

$$1. 3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3} \quad 2. 5,7 : 0,95 \quad 3. 91 : 117 \quad 4. \frac{9}{10} : \frac{24}{25}$$

$$5. 5,06 \text{ hl para } 8151$$

$$6. 7,32 \text{ kg para } 587 \text{ g}$$

$$7. 3,8 \text{ dam para } 570 \text{ dm}$$

$$8. 4 \text{ h } 25 \text{ m para } 1 \text{ h}$$

9. Um aluno recebe 44 problemas para resolver e um segundo aluno recebe 50. O primeiro acerta 20 e o segundo acerta 24. Qual dos alunos apresenta melhor resultado?

RESPOSTAS

1. $\frac{3}{4}$ 2. 6 3. $\frac{7}{9}$ 4. $\frac{15}{16}$ 5. $\frac{506}{815}$
 6. $\frac{7320}{587}$ 7. $\frac{2}{3}$ 8. $\frac{53}{12}$ 9. O segundo.

II. PROPORÇÕES. MÉDIAS

1. Proporção.

A razão entre os números 3 e 6 ou $\frac{3}{6}$ é igual à razão entre 9 e 18 ou $\frac{9}{18}$; são ambas iguais a $\frac{1}{2}$.

A expressão que traduz a igualdade das duas razões

$$\frac{3}{6} = \frac{9}{18}$$

é denominada *proporção*.

De um modo geral, quatro números formam uma proporção quando a razão entre os dois primeiros tem o mesmo valor que a razão entre os dois últimos. Os quatro números são denominados *têrmos* da proporção.

O primeiro e quarto têrmos, 3 e 18 no exemplo anterior, são denominados *extremos*. O segundo e terceiro, 6 e 9, são *meios*.

A proporção lê-se: três sobre seis igual a nove sobre dezoito, ou, três está para seis assim como nove está para dezoito.

A proporção acima também se escreve:

$$3 : 6 :: 9 : 18.$$

2. Propriedade fundamental das proporções.

Em toda proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Seja, a proporção

$$\frac{6}{18} = \frac{5}{15}$$

Temos:

$$6 \times 15 = 5 \times 18,$$

realmente, efetuando as multiplicações, obtemos o mesmo produto 90.

RECÍPROCA. Quando o produto de dois números é igual ao produto de outros dois, os quatro números formam proporção, podendo ser os dois fatores de qualquer dos produtos tomados como meios e os dois outros como extremos.

Seja

$$6 \times 15 = 5 \times 18.$$

Dividindo os dois membros por 15×18 , temos:

$$\frac{6 \times 15}{15 \times 18} = \frac{5 \times 18}{15 \times 18}$$

ou, simplificando os fatores iguais:

$$\frac{6}{18} = \frac{5}{15}$$

De acôrdo com a propriedade fundamental e sua recíproca, para verificar se quatro números formam proporção, efetuaremos os produtos dois a dois; se houver dois produtos iguais, os mesmos números formarão proporção, pois esta con-

dição é suficiente. Assim, os quatro números 4, 10, 16 e 40 formam proporção por serem iguais os produtos 4×40 e 10×16 .

APLICAÇÕES

Primeira aplicação. Transformações de uma proporção.

Transformar uma proporção é mudar a posição de seus termos de modo que resulte ainda uma proporção. São três as transformações que se denominam: *alternar*, *inverter* e *transpor* a proporção.

Alternar consiste em trocar a posição dos meios ou dos extremos.

$$\text{Seja a proporção } \frac{2}{3} = \frac{4}{6},$$

onde se verifica a propriedade fundamental:

$$2 \times 6 = 3 \times 4.$$

Alternando a proporção dada, obtemos:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \quad (\text{alternando os meios})$$

$$\frac{6}{3} = \frac{4}{2} \quad (\text{alternando os extremos});$$

igualdades que são também proporções, por se verificar ainda a propriedade fundamental.

Inverter consiste em trocar os termos de cada razão.

Assim, da proporção $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ concluímos:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4},$$

que é também uma proporção, por se verificar a propriedade fundamental.

Transpor consiste em trocar a posição das razões.

Assim, da proporção $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, concluímos:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Utilizando estas transformações é possível escrever uma proporção de *oito* maneiras.

Consideremos, por exemplo, a proporção:

$$\frac{5}{8} = \frac{10}{16} \quad (1)$$

$$\text{Alternando os meios, obtemos: } \frac{5}{10} = \frac{8}{16} \quad (2)$$

$$\text{Alternando os extremos: } \frac{16}{8} = \frac{10}{5} \quad (3)$$

$$\text{Invertendo as razões: } \frac{8}{5} = \frac{16}{10} \quad (4)$$

Transpondo as quatro primeiras, obtemos as outras quatro:

$$\frac{10}{16} = \frac{5}{8} \quad (5)$$

$$\frac{8}{16} = \frac{5}{10} \quad (6)$$

$$\frac{10}{5} = \frac{16}{8} \quad (7)$$

$$\frac{16}{10} = \frac{8}{5} \quad (8)$$

Segunda aplicação. Determinar um termo incógnito de uma proporção.

Por intermédio da propriedade fundamental, é sempre possível determinar um termo, quando são conhecidos os outros três.

Exemplos.

1.º Determinar o valor de x na proporção:

$$\frac{12}{48} = \frac{16}{x}$$

Aplicando a propriedade fundamental:

$$12x = 48 \times 16 \text{ ou } 12x = 768.$$

donde concluímos:

$$x = \frac{768}{12} = 64.$$

2.º Determinar o valor de x na proporção $\frac{18}{24} = \frac{x}{40}$

Aplicando a propriedade fundamental:

$$24x = 18 \times 40 \text{ ou } 24x = 720$$

donde concluímos:

$$x = \frac{720}{24} = 30.$$

Observemos que um extremo é igual ao produto dos meios, dividido pelo outro extremo; e um meio é igual ao produto dos extremos, dividido pelo outro meio.

EXERCÍCIOS

Determinar o valor de x nas proporções:

1. $\frac{35}{x} = \frac{5}{3}$

R: 21

2. $\frac{2/3}{5} = \frac{x}{3/4}$

R: 0,1

3. $\frac{15/28}{5/8} = \frac{6/7}{x}$

R: 1

4. $\frac{2,6}{0,65} = \frac{x}{5,8}$

R: 23,2

5. $\frac{2,1}{4 \frac{1}{5}} = \frac{3/5}{x}$

R: $1 \frac{1}{5}$

6. $\frac{2/3}{\frac{3}{9} + 2} = \frac{x}{\frac{6}{13} \times 2 \frac{3}{5}}$

R: 12/35

7. $\frac{x}{2 - \frac{1}{5}} = \frac{3/8}{6,75}$

R: 0,1

8. $\frac{0,84}{5,6} = \frac{x}{37,33 \dots}$

R: 5,6

9. Dizer qual das seguintes proporções é verdadeira:

$$\frac{1/2}{1/3} = \frac{1/4}{1/6} \quad \frac{45}{135} = \frac{4}{8}$$

R: a primeira

10. Da igualdade dos seguintes produtos, concluir as oito proporções possíveis:

$$9 \times 14 = 6 \times 21; \quad 5 \times 12 = 15 \times 4; \quad a \times b = c \times d$$

3. Quarta proporcional.

Chama-se *quarta proporcional* a três números dados, um quarto número, que forma com os mesmos uma proporção.

A determinação da quarta proporcional se reduz à determinação de um termo incógnito de uma proporção.

Exemplo.

Determinar a quarta proporcional aos números 12, 16 e 48.

Representando por x o termo procurado, o problema admite três soluções, correspondentes às proporções:

$$\frac{12}{16} = \frac{48}{x}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{x}{48}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{48}{16}$$

pois, a posição do número x é arbitrária. Daí, os três valores de x :

$$x = \frac{16 \times 48}{12} = 64$$

$$x = \frac{12 \times 48}{16} = 36$$

$$x = \frac{12 \times 16}{48} = 4$$

Só há três soluções, porque, em cada solução, o produto de um dos números dados por x , é igual ao produto dos outros dois.

Em geral, considera-se a solução obtida conservando na proporção a ordem dos números dados, e considerando como incógnita o último termo.

4. Proporção contínua. Média proporcional. Terceira.

Uma proporção em que os meios ou os extremos são iguais é denominada *proporção contínua*. Assim, a proporção

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \quad \text{é contínua.}$$

Na proporção contínua, o termo igual é denominado **média** proporcional ou geométrica; e, qualquer dos dois outros, 4 ou 9, é denominado **terceira** proporcional. No exemplo acima, 4 é terceira proporcional entre 9 e 6, e 9 é terceira proporcional entre 4 e 6.

Seja a proporção contínua $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Aplicando a propriedade fundamental temos:

$$b^2 = ac.$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros, obtemos

$$b = \sqrt{ac}.$$

Conclui-se:

A **média proporcional** entre dois números é igual à raiz quadrada de seu produto.

Exemplos.

1.º Determinar a média proporcional entre 27 e 12.

Representando por x a média procurada temos:

$$x = \sqrt{27 \times 12}$$

ou,

$$x = \sqrt{324}$$

donde:

$$x = 18.$$

2.º Determinar a terceira proporcional a 5,6 e 0,84.

Formando a proporção contínua, obtemos, representando por x a terceira proporcional:

$$\frac{5,6}{0,84} = \frac{0,84}{x}$$

ou,

$$\frac{0,84}{5,6} = \frac{5,6}{x}$$

Observemos que, se não fôr fixada a média, haverá duas soluções. Da primeira proporção, resulta:

$$x = \frac{0,84^2}{5,6} = \frac{0,7056}{5,6} = 0,126$$

e da segunda

$$x = \frac{5,6^2}{0,84} = 37,33 \dots$$

Se fôr fixada previamente a média, só uma das soluções prevalecerá.

3.º Determinar a terceira proporcional a 3 e 9, sendo 9 a média. Temos:

$$\frac{3}{9} = \frac{9}{x}$$

donde:

$$x = \frac{9^2}{3} = 27.$$

5. Média aritmética. Média harmônica.

Além da média proporcional ou geométrica que estudamos, são ainda consideradas em matemática as médias aritmética e harmônica.

Média aritmética entre dois ou mais números dados é o quociente da divisão de soma pelo número deles.

Exemplos.

1.º A média aritmética entre 8,64 e 7,36 é:

$$\frac{8,64 + 7,36}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

2.º A média aritmética entre 8, 9 e 16 é:

$$\frac{8 + 9 + 16}{3} = \frac{33}{3} = 11.$$

Em certos casos, na determinação da média aritmética, consideram-se os números dados multiplicados por fatores constantes, denominados *pesos* dos números correspondentes; a média denomina-se, então, **média aritmética ponderada** e é determinada dividindo a soma dos produtos pela soma dos pesos.

Exemplo.

Um aluno obteve, em certa disciplina, média 7 nas provas parciais, média 6 nos trabalhos mensais e grau 8 em prova oral. Determinar o grau de aprovação, sabendo que a lei atribui peso 8 à média das provas parciais e peso 1 às demais.

Temos:

a) soma dos produtos dos graus pelos pesos respectivos:

$$7 \times 8 + 6 + 8 = 56 + 6 + 8 = 70;$$

b) soma dos pesos: $8 + 1 + 1 = 10$.

O grau de aprovação é a média ponderada:

$$\frac{70}{10} = 7.$$

Média harmônica entre vários números é o inverso da média aritmética de seus inversos.

Exemplo.

Determinar a média harmônica dos números 6 e 12.

A média aritmética dos inversos, é:

$$\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{2} = \frac{\frac{3}{12}}{2} = \frac{3}{24}.$$

A média harmônica será, por definição, o inverso desse resultado, isto é,

$$\text{média harmônica} = \frac{24}{3} = 8.$$

A noção de média geométrica é também generalizada para mais de dois números. Assim, a média geométrica dos três números a , b , c , será:

$$\sqrt[3]{a \times b \times c}.$$

EXERCÍCIOS

Determinar a quarta proporcional a:

1. 14, 15 e 21. R: 22,5 2. 8, $3\frac{1}{5}$, $7\frac{1}{2}$ R: 3

Determinar as médias proporcional e aritmética dos números:

3. 12 e 75. R: 30 e 43,5 4. $\frac{32}{5}$ e $\frac{36}{490}$ R: $\frac{24}{35}$ e $\frac{793}{245}$

Determinar a terceira proporcional aos números (sendo a média o segundo número):

5. $5\frac{1}{4}$ e 7. R: $9\frac{1}{3}$ 6. 0,5 e 1,5. R: 4,5

7. Determinar a média ponderada entre os números $3\frac{2}{3}$, 7 e 10, sendo os pesos 3, 4 e 1, respectivamente R: 6,125

8. Determinar a média harmônica entre os três números 3, 4 e 9. R: 4,32

9. No óxido de mercúrio, a razão entre o peso de oxigênio e o peso total é de $\frac{75}{1000}$. Determinar o peso de óxido de mercúrio que é necessário decompor para obter 30 g de oxigênio. R: 400 g

10. A razão entre as áreas de dois campos é $\frac{3}{4}$, e o campo menor tem 6 ha. Determinar o número de ha do campo maior. R: 8 ha

6. Propriedades das proporções.

I. A soma dos dois primeiros termos está para o primeiro ou para o segundo, assim como a soma dos dois últimos está para o terceiro ou quarto.

Seja a proporção

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

Somando uma unidade aos dois membros, os resultados serão iguais, logo temos:

$$1 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{6}{10}$$

ou, transformando os números mistos:

$$\frac{5+3}{5} = \frac{10+6}{10},$$

resulta, assim, a propriedade em relação ao segundo e quarto termos.

Invertendo previamente a proporção, teremos:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

e, raciocinando do mesmo modo:

$$\frac{5+3}{3} = \frac{10+6}{6}$$

resultando a propriedade em relação ao primeiro e terceiro.

APLICAÇÃO. Determinar dois números, cuja soma é 85 e a razão $\frac{2}{3}$.

Resolução. Representemos os números por a e b . A razão entre os mesmos é $\frac{2}{3}$, logo, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

Aplicando a propriedade em relação ao primeiro e terceiro, teremos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{2+3}{2}$$

Como a soma $a+b$ dos dois números é 85, teremos:

$$\frac{85}{a} = \frac{5}{2} \therefore a = \frac{2 \times 85}{5} = 34.$$

Um dos números é 34 e a soma, 85; o outro será:

$$b = 85 - 34 = 51.$$

Assim, os dois números procurados são 34 e 51.

II. A diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro ou para o segundo, assim como a diferença dos dois últimos está para o terceiro ou o quarto.

Seja, de um modo geral, a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e suponhamos ser a maior que b . Subtraindo uma unidade dos dois membros da igualdade teremos:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

ou, efetuando:

$$\boxed{\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}}$$

resulta, assim, a propriedade em relação aos consequentes.

Invertendo previamente a proporção, teremos:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

e obtemos assim razões menores que 1 que, subtraídas da unidade, darão resultados iguais, isto é:

$$1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c}$$

ou, efetuando:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

resultando a propriedade em relação aos antecedentes.

APLICAÇÃO. Determinar dois números cuja diferença é 13 e a razão $\frac{3}{4}$.

Resolução. Representemos os dois números procurados por a e b . A razão sendo $\frac{3}{4}$, temos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

Sendo a razão $\frac{3}{4}$ menor que 1, o número b é maior que a ; assim, aplicando a segunda propriedade em relação aos antecedentes, teremos:

$$\frac{b-a}{a} = \frac{4-3}{3}$$

Como a diferença $b-a$ dos dois números é 13, temos:

$$\frac{13}{a} = \frac{1}{3}$$

donde concluímos:

$$a = \frac{3 \times 13}{1} = 39.$$

O número menor é 39 e a diferença 13; o maior será:

$$b = 39 + 13 = 52.$$

Os números procurados são 39 e 52.

Consequência das propriedades I e II.

Consideremos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

De acôrdo com as duas primeiras propriedades e, supondo a maior que b , resultam as proporções:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

e

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

ou, alternando-as:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c}$$

As duas razões $\frac{a+b}{c+d}$ e $\frac{a-b}{c-d}$ são iguais a $\frac{a}{c}$, logo, são iguais entre si, isto é:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

ou, alternando os meios:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Dai, a consequência:

A soma dos dois primeiros termos está para a sua diferença, como a soma dos dois últimos está para a sua diferença.

III. A soma ou a diferença dos antecedentes está para a dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para seu consequente.

Seja, de um modo geral, a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Alternando os meios, teremos: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Aplicando, simultaneamente, as duas primeiras propriedades, resulta:

$$\frac{a+c}{a} = \frac{b+d}{b}$$

ou, alternando os meios:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$$

e, como $\frac{a}{b}$ é igual a $\frac{c}{d}$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

APLICAÇÃO. A diferença entre os antecedentes de uma proporção é 10 e os consequentes são 9 e 7. Determinar os antecedentes.

Representemos os antecedentes por a e b , e teremos a proporção:

$$\frac{a}{9} = \frac{b}{7}$$

Aplicando a 3.ª propriedade em relação à diferença resulta:

$$\frac{a-b}{9-7} = \frac{a}{9} = \frac{b}{7}$$

Como a diferença $a-b$ é igual a 10, temos as duas proporções:

$$\frac{10}{2} = \frac{a}{9} \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \\ b = \frac{10 \times 7}{2} = 35 \end{array} \right.$$

Os antecedentes são, respectivamente, 45 e 35.

Observação.

A propriedade III pode ser aplicada à igualdade de várias razões.

Assim, dadas as igualdades:

$$\frac{6}{18} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$$

podemos concluir:

$$\frac{6+4+5}{18+12+15} = \frac{6}{18} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$$

Aplicada a várias razões, a propriedade enuncia-se: **dadas várias razões iguais, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como qualquer antecedente está para o seu respectivo consequente.**

APLICAÇÃO. Determinar a , b , c , nas seguintes razões iguais:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6}$$

sabendo que a soma $a+b+c$ é igual a 26.

Resolução. Aplicando a propriedade da soma dos antecedentes, temos:

$$\frac{a+b+c}{3+4+6} = \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6}$$

Substituindo a soma dos três números pelo valor dado, resulta:

$$\frac{26}{13} = \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3 \times 26}{13} = 6 \\ b = \frac{4 \times 26}{13} = 8 \\ c = \frac{6 \times 26}{13} = 12 \end{array} \right.$$

IV. Os produtos, ou os quocientes dos termos correspondentes de duas proporções formam também proporção.

Sejam as proporções: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{u}$$

Multiplicando e dividindo membro a membro as duas igualdades, temos as duas proporções:

$$\frac{ax}{by} = \frac{cz}{du}$$

$$\frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}} = \frac{\frac{c}{z}}{\frac{d}{u}}$$

Consequência. Consideremos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e a igualdade evidente $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$. Aplicando a propriedade do produto, temos:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{ac}{bd}$$

Daí, a consequência: *em toda proporção o produto das razões é igual ao quadrado de qualquer delas.*

APLICAÇÃO. Determinar dois números na razão $\frac{3}{4}$, cujo produto seja 300.

Resolução. Representemos por a e b os dois números. Teremos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

Alternando os meios: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$

Aplicando a consequência da 4.ª propriedade, resulta a proporção:

$$\frac{ab}{12} = \frac{a^2}{9}$$

Como o produto ab dos dois números é 300, temos:

$$\frac{300}{12} = \frac{a^2}{9} \dots a^2 = \frac{9 \times 300}{12} = 225$$

e extraíndo a raiz: $a = 15$.

Sendo o produto dos dois números igual a 300 e um deles 15, o outro será:

$$b = \frac{300}{15} = 20.$$

Os números procurados são 15 e 20.

V. As potências do mesmo grau dos termos de uma proporção, formam também proporção.

Seja a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Se considerarmos a mesma proporção um certo número de vezes, três por exemplo, teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

De acôrdo com a propriedade anterior, os produtos dos termos correspondentes formarão proporção; assim, podemos concluir:

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3}$$

De um modo geral, temos:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$$

APLICAÇÃO. Determinar dois números na razão de $\frac{2}{3}$, sendo 325 a soma de seus quadrados.

Resolução. Representemos por a e b os números procurados; temos, então, a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}.$$

Como os quadrados dos termos estão também em proporção, temos:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{4}{9}.$$

Aplicando a propriedade da soma, resulta:

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{4 + 9}{9}.$$

Sendo a soma dos quadrados 325, concluímos:

$$\frac{325}{b^2} = \frac{13}{9} \therefore b^2 = \frac{9 \times 325}{13} = 225$$

e, portanto: $a^2 = 100.$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos: $a = 10$ e $b = 15.$

EXERCÍCIOS

1. A soma de dois números é 54 e a razão 7/11. Determinar os dois números. R: 21 e 33
2. A diferença entre dois números é 15 e a razão 8/5. Determinar os dois números. R: 40 e 25
3. Decompor 45 em duas parcelas, que estejam entre si na razão de 2 para 3. R: 18 e 27
4. A razão entre dois números é 3, e sua soma é 72. Determinar os dois números. R: 54 e 18
5. Num ginásio há ao todo 540 alunos. Distribuídos em classes, a cada classe de 45 meninos corresponde uma classe de 30 meninas. Determinar o número de meninas do ginásio. R: 216

6. Determinar dois números, na razão 3/4, sendo 432 o seu produto. R: 18 e 24
7. A razão entre a base e a altura de um triângulo é de 5 para 2, e a área do triângulo é de 45 m². Determinar a base e a altura. R: 15 m e 6 m
8. Determinar dois números na razão de 3 para 5, sendo 306 a soma de seus quadrados. R: 9 e 15.
9. A diferença entre os quadrados de dois números é $\frac{57}{144}$ e a razão entre eles é $\frac{8}{11}$. Determinar os números. R: $\frac{8}{12}$ e $\frac{11}{12}$
10. Uma fração é igual a 3/5. O denominador excede de 4 unidades o numerador. Determinar a fração. R: $\frac{6}{10}$

III. GRANDEZAS PROPORCIONAIS

1. Grandezas dependentes.

Quando duas grandezas estão ligadas de tal forma, que qualquer variação de uma delas acarreta uma variação da outra, as mesmas são denominadas *dependentes* ou *funções* uma da outra. Consideremos um trem percorrendo uma linha com a velocidade de 60 quilômetros a hora; variando a distância a percorrer, variará o tempo gasto no percurso, e, inversamente, variando o tempo durante o qual o trem permanecer em movimento, variará a distância percorrida. O espaço e o tempo são grandezas *dependentes*, uma é *função* da outra.

Da mesma forma, a área de um quadrado depende do comprimento do lado, o custo de uma peça de fazenda depende do número de metros; temos, assim, exemplos de grandezas dependentes.

Há casos em que uma grandeza depende de várias outras. A área de um retângulo depende da base e da altura, a massa de um corpo depende do volume e da densidade.

2. Grandezas diretamente proporcionais.

Representando o lado de um quadrado por l , o perímetro será obtido multiplicando-o por 4, isto é, será $4l$.

Assim, podemos formar a seguinte tabela de correspondência de valores das duas grandezas *perímetro* e *lado*:

lado em metros. . .	1	2	3	4...
perímetro em metros	4	8	12	16...

Se formarmos as razões entre dois valores quaisquer da primeira grandeza e entre os valores correspondentes da segunda, verificaremos que estas razões são iguais; as razões entre os segundos e quartos valores, por exemplo, são ambas iguais a $\frac{1}{2}$.

As duas grandezas *perímetro* e *lado* são denominadas *diretamente proporcionais* ou, apenas, *proporcionais*.

Dois grandezas dependentes, são *diretamente proporcionais*, quando a razão de dois estados quaisquer da primeira é igual à razão dos estados correspondentes da segunda.

Consideremos, como segundo exemplo, um trem percorrendo uma linha com a velocidade de 60 quilômetros a hora. Se considerarmos os intervalos de tempo tomando como unidade constante a hora, e as distâncias com a unidade quilômetro, teremos a correspondência:

tempo em horas	1	2	3	4
espaço em quilômetros.	60	120	180	240

e concluiremos, como no exemplo anterior, que as grandezas tempo e espaço são diretamente proporcionais. Se considerarmos apenas os números que exprimem as medidas, e fizer-

mos abstração das grandezas, observamos que a razão das medidas de dois estados correspondentes é sempre a mesma; realmente,

$$\frac{1}{60} = \frac{2}{120} = \frac{3}{180} = \frac{4}{240},$$

pois, reduzindo-as à expressão mais simples, obtemos para valor comum $\frac{1}{60}$.

Podemos, então, concluir:

Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, a razão dos números que exprimem as medidas de estados correspondentes, com unidades invariáveis, é constante.

Para o nosso primeiro exemplo, temos, da mesma forma, as razões iguais:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}.$$

Se formarmos as razões tomando como antecedente os números que exprimem as medidas dos perímetros, teremos analogamente:

$$\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4}$$

o valor comum é 4.

3. Números proporcionais.

Os números que exprimem as medidas das grandezas diretamente proporcionais são denominados *números diretamente proporcionais* ou, apenas, *proporcionais*. Assim, os números

e

1,	2,	3,	4
4,	8,	12,	16

são *proporcionais*.

De um modo geral, os números de duas sucessões são denominados *proporcionais*, quando a razão entre um número

qualquer de uma delas e o seu correspondente na outra é constante. Os números

$$3, 5, 8, 11$$

$$\text{e} \quad 9, 15, 24, 33$$

são proporcionais, porque as razões

$$\frac{3}{9}, \frac{5}{15}, \frac{8}{24}, \frac{11}{33};$$

ou, reciprocamente

$$\frac{9}{3}, \frac{15}{5}, \frac{24}{8}, \frac{33}{11}$$

são iguais.

O valor comum das razões é denominado *fator* ou *coeficiente de proporcionalidade*. O coeficiente de proporcionalidade da primeira para segunda sucessão é $\frac{1}{3}$; inversamente, da segunda para a primeira, o coeficiente de proporcionalidade é 3.

Se conhecermos os números de uma sucessão, e o coeficiente de proporcionalidade de uma segunda para ela, obteremos os números da segunda sucessão, multiplicando os da primeira pelo mesmo coeficiente. O coeficiente de proporcionalidade entre o perímetro e o lado do quadrado é 4; assim, sendo os números

$$1, 2, 3, 4, \text{ etc.}$$

as medidas de lados de quadrados, os números proporcionais

$$4, 8, 12, 16, \text{ etc.}$$

obtidos multiplicando os anteriores por 4, serão as medidas dos perímetros correspondentes.

Inversamente, o coeficiente de proporcionalidade é determinado dividindo um elemento qualquer por seu correspondente.

De um modo geral, representando por x e y dois valores quaisquer, mas correspondentes, de dois grupos de números, a proporcionalidade dos mesmos é caracterizada pela fórmula

$$\frac{y}{x} = a$$

onde a é o coeficiente de proporcionalidade. A mesma relação pode ainda ser expressa:

$$y = ax$$

4. Aplicações.

1.ª A circunferência é diretamente proporcional ao diâmetro e quando o diâmetro tem 7 cm a circunferência tem aproximadamente 22 cm. Qual o comprimento da circunferência quando o diâmetro tem 14 cm?

Sendo a circunferência diretamente proporcional ao diâmetro, a razão entre dois valores da circunferência é igual à razão entre os valores correspondentes do diâmetro; assim, temos, representando por x o comprimento procurado:

$$\frac{22}{x} = \frac{7}{14}$$

Determinando o valor de x na proporção, temos:

$$x = \frac{22 \times 14}{7} = 44 \text{ cm.}$$

2.ª O peso de um objeto colocado abaixo da superfície da terra é diretamente proporcional à sua distância ao centro do globo. Determinar o peso de um objeto a 3 189 km do centro da terra, sabendo que seu peso na superfície é de 100 kg.

Considerando o globo terrestre como uma esfera de raio igual a 6 378 km (raio equatorial), o coeficiente de proporcio-

nalidade será determinado pela razão $\frac{P}{d}$, entre o pêso e a distância conhecidos, isto é:

$$\frac{P}{d} = a.$$

Assim, sendo $P = 100$ quando $d = 6\ 378$, concluímos:

$$a = \frac{100}{6\ 378}.$$

De acôrdo com a fórmula da proporcionalidade direta, temos:

$$P = a \times d$$

logo, o pêso, quando a distância é 3 189, será:

$$P = \frac{100}{6\ 378} \times 3\ 189 = 50 \text{ kg.}$$

EXERCÍCIOS

1. Determinar o coeficiente de proporcionalidade entre os seguintes grupos de números proporcionais:

$$\begin{array}{l} 2, 5, 8, 10 \\ 14, 35, 56, 70 \end{array} \quad \text{R: } 1/7$$

2. Verificar se os seguintes números são proporcionais:

$$\begin{array}{l} 45, 60, 75 \\ 3, 4, 5 \end{array} \quad \text{R: Sim; coeficiente } 15$$

3. A massa é proporcional ao volume? Qual o coeficiente de proporcionalidade?

R: Sim; a densidade

4. Qual o coeficiente de proporcionalidade entre a massa e o volume do ferro?

R: 7,78

5. A grandeza x é diretamente proporcional a y . Quando a grandeza y tem o valor 8, x tem o valor 40. Determinar o valor da grandeza x , quando y vale 10.

R: 50

6. Determinar os valores de x e y , nos seguintes grupos de números proporcionais:

$$\begin{array}{l} 3, 4, 5 \\ 60, x, y \end{array} \quad \text{R: } 80 \text{ e } 100$$

5. Grandezas inversamente proporcionais.

Consideremos um automóvel percorrendo uma estrada de 240 km. E' claro que o tempo gasto no percurso varia com a velocidade; a velocidade e o tempo são grandezas dependentes. Se a *velocidade* fôr de 30 quilômetros por hora, o *tempo* necessário para percorrer a estrada será de 8 horas; se a velocidade fôr de 60 km/h, o tempo será de 4 horas. Assim, se um estado qualquer da grandeza velocidade fôr multiplicado por um número, o estado correspondente do tempo ficará dividido pelo mesmo número. As duas grandezas dependentes são denominadas, neste caso, *inversamente proporcionais*. Com o exemplo dado, podemos formar a tabela de correspondência dos estados das duas grandezas.

Velocidade em km/h	60	40	30	20
Tempo em horas	4	6	8	12

Observemos que a razão entre dois estados quaisquer da primeira grandeza é igual ao inverso da razão dos estados correspondentes da outra; considerando os dois primeiros valores, temos a igualdade:

$$\frac{60}{40} = \frac{6}{4}$$

Desta proporção concluímos:

$$60 \times 4 = 40 \times 6$$

isto é, quando duas grandezas são inversamente proporcionais, os produtos dos números que exprimem as medidas de estados correspondentes é constante. No exemplo, temos:

$$60 \times 4 = 40 \times 6 = 30 \times 8 = 20 \times 12 = 240.$$

6. Números inversamente proporcionais.

De um modo geral, os números de duas sucessões são denominados inversamente proporcionais, quando o produto de dois números correspondentes é constante. Assim, os números

$$30, 25, 20, 15$$

$$10, 12, 15, 20$$

são inversamente proporcionais; o produto dos termos correspondentes é sempre 300.

Representando por x e y dois correspondentes quaisquer em dois grupos de números, a proporcionalidade inversa dos mesmos é caracterizada pela fórmula:

$$xy = a$$

ou, ainda

$$y = \frac{a}{x}$$

Como no caso da proporcionalidade direta, se conhecermos a constante a de proporcionalidade, poderemos determinar os números de qualquer das sucessões, sendo conhecidos os da outra. Assim, sendo dados os números

$$30, 25, 20, 15$$

e a constante de proporcionalidade inversa 300, dividindo esta pelos números dados obtemos

$$10, 12, 15, 20$$

Temos, assim, os números inversamente proporcionais:

$$30, 25, 20, 15$$

$$10, 12, 15, 20.$$

Os números inversamente proporcionais, os dados acima, por exemplo, satisfazem, como sabemos, a condição:

$$30 \times 10 = 25 \times 12 = 20 \times 15 = 15 \times 20.$$

Esses produtos podem também ser escritos com a forma

$$\frac{30}{10} = \frac{25}{12} = \frac{20}{15} = \frac{15}{20}$$

Podemos, pois, concluir, que os números

$$30, 25, 20, 15$$

são diretamente proporcionais aos números

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$$

Concluimos, então: *vários números são inversamente proporcionais a outros, quando são diretamente proporcionais aos inversos desses outros.*

7. Aplicações.

1.ª Com a velocidade de 60 km/h, um trem gasta 10 horas para percorrer a distância entre duas cidades. Que tempo gastará para percorrer a mesma distância com a velocidade de 40 km/h?

Como as velocidades são inversamente proporcionais aos tempos, a razão de dois valores da primeira grandeza é igual à razão inversa dos valores correspondentes da segunda; assim, representando por x o valor procurado do tempo, temos a proporção:

$$\frac{60}{40} = \frac{x}{10}$$

Resolvendo a proporção, temos:

$$x = \frac{60 \times 10}{40} = 15.$$

Com a velocidade de 40 km/h, o trem gastará 15 horas.

2.ª *Aplicação do coeficiente de proporcionalidade.* Distinguindo os valores dados das grandezas proporcionais de modo que se correspondam, teremos:

$$\begin{array}{l} \text{velocidades.} 60 \quad 40 \\ \text{tempos.} 10 \quad x \end{array}$$

O produto de dois valores correspondentes é constante; como o produto de 60 por 10 é 600, concluimos que o produto de dois outros valores correspondentes quaisquer será também 600, logo, temos:

$$40 \cdot x = 600 \therefore x = \frac{600}{40} = 15.$$

Podemos obter outros valores do tempo, dividindo a constante 600 pelas velocidades correspondentes.

8. Propriedades dos números proporcionais.

Suponhamos proporcionais os números:

$$a, b, c, d \\ a', b', c', d'.$$

Teremos, então, as razões iguais:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}.$$

Multiplicando os antecedentes pelo mesmo número m , as razões permanecerão iguais, pois tôdas ficarão m vezes maiores; assim:

$$\frac{am}{a'} = \frac{bm}{b'} = \frac{cm}{c'} = \frac{dm}{d'}.$$

Logo, os números

$$am, bm, cm, dm$$

são proporcionais aos números

$$a', b', c', d'$$

concluindo-se a propriedade:

Sendo dados dois grupos de números proporcionais, multiplicando os números de um deles pelo mesmo número, os produtos obtidos são também proporcionais aos do outro.

APLICAÇÃO. Sejam os números proporcionais:

$$12, 18, 20$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$$

Multiplicando os consequentes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, e $\frac{5}{6}$ pelo m.m.c. 12 dos denominadores, obtemos os números proporcionais:

$$12, 18, 20$$

$$6, 9, 10$$

em que os números dos dois grupos são inteiros.

Observações.

1.ª A mesma propriedade pode ser aplicada aos números inversamente proporcionais, pois podemos considerá-los diretamente proporcionais aos inversos.

2.ª Análogamente se conclui a propriedade em relação à divisão.

EXERCÍCIOS

1. Verificar se os números dos seguintes grupos são inversamente proporcionais:

$$78, 104, 91$$

$$e \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}$$

R: Sim

2. Determinar os valores de x e y nos seguintes grupos de números inversamente proporcionais:

$$64, 72, 48, 96$$

$$e \quad 9, 8, x, y$$

R: 12 e 6

3. Substituir, nos seguintes grupos, os números fracionários por inteiros, de modo que os grupos continuem proporcionais:

$$64, 72, 48$$

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$$

R: 8, 9 e 6

4. O volume é inversamente proporcional à densidade. 6 dm³ de uma substância, cuja densidade é 8,7 têm uma certa massa; determinar o volume necessário de uma segunda substância, de densidade 0,9, para se obter a mesma massa.

R: 58 dm³

9. Grandezas proporcionais a várias outras.

Uma grandeza dependente de várias outras, é proporcional a estas quando, variando apenas uma dessas últimas, a grandeza dada varia proporcionalmente a ela.

Exemplos.

1.º A área de um retângulo depende da base e da altura. Conservando o valor fixo 3 da altura, como vemos na figura abaixo, a área é diretamente proporcional à base;

$$3 \quad \boxed{S = 6} \\ 2$$

$$3 \quad \boxed{S = 12} \\ 4$$

$$3 \quad \boxed{S = 18} \\ 6$$

assim, dando à base os valores 2, 4, 6, temos os números proporcionais:

$$\begin{array}{ccc} 6, & 12, & 18 \\ 2, & 4, & 6. \end{array}$$

Ao mesmo resultado chegaremos, conservando fixa a base e fazendo variar a altura. Concluimos, então, ser a área de um retângulo diretamente proporcional à base e à altura.

2.º O tempo gasto por um automóvel num certo percurso depende da extensão do percurso e da velocidade. Se supuzermos fixa a velocidade, o tempo será tanto maior quanto maior for a extensão do percurso; se supuzermos fixo o percurso, o tempo será tanto menor quanto maior for a velocidade. O tempo é diretamente proporcional ao espaço e inversamente proporcional à velocidade.

APLICAÇÃO. A área de um retângulo tem 48 m^2 e o comprimento da base é de 12 m. Determinar a área de um retângulo da mesma altura, cuja base é 6 m mais comprida.

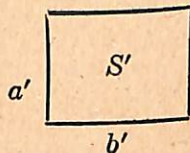
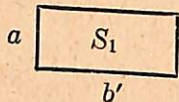
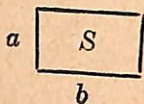
A base do retângulo procurado é $12 + 6$ ou 18 m. Como a altura é constante, a área é proporcional à base; assim, sendo S a área do retângulo procurado, temos:

$$\frac{48}{12} = \frac{S}{18} \therefore S = \frac{48 \times 18}{12} = 72.$$

R.: A área é de 72 m^2 .

10. Propriedade das grandezas proporcionais a várias outras.

Suponhamos um retângulo variando nas condições da figura abaixo. S , S_1 e S' representam os números resultantes das medidas de suas áreas; a , a' , b e b' os números resultantes das medidas da base e da altura.



Da primeira para a segunda figura a altura é fixa; logo, a área será diretamente proporcional à base; temos, pois:

$$\frac{S}{b} = \frac{S_1}{b'}$$

Da segunda para a terceira figura a base é fixa, e temos analogamente:

$$\frac{S_1}{a} = \frac{S'}{a'}$$

Multiplicando, termo a termo, as duas proporções, obtemos a proporção:

$$\frac{SS_1}{ab} = \frac{S_1S'}{a'b'}$$

ou, dividindo os antecedentes por S_1 :

$$\frac{S}{ab} = \frac{S'}{a'b'}$$

O mesmo dar-se-á para mais de duas grandezas, concluindo-se a propriedade:

Quando uma grandeza é proporcional a várias outras, os números que exprimem sua medida são proporcionais aos produtos dos números resultantes das medidas das outras.

Observação. No caso das grandezas inversamente proporcionais, a mesma propriedade será aplicada em relação aos inversos dos números resultantes das medidas das outras grandezas. Assim, o volume de um corpo é diretamente proporcional à massa e inversamente proporcional à densidade. Se representarmos respectivamente por v , m , d , o volume, a massa e a densidade, v será diretamente proporcional a m e $\frac{1}{d}$, logo, será proporcional ao produto

$$m \times \frac{1}{d} \text{ ou } \frac{m}{d}$$

Exemplo.

Conhecemos a fórmula da área do triângulo

$$S = \frac{bh}{2}$$

daf, concluímos:

$$2S = bh$$

donde:

$$h = \frac{S}{b} \times 2.$$

Assim, a altura é diretamente proporcional à área e inversamente proporcional à base.

APLICAÇÃO. Um triângulo de 3 dm^2 de área tem $1,5 \text{ dm}$ de base, e 4 dm de altura. Determinar, pela proporcionalidade, a altura de um triângulo de 6 dm^2 de área e 2 dm de base.

A altura é diretamente proporcional à área e inversamente proporcional à base; sua medida será, portanto, diretamente proporcional ao produto da medida da área pelo inverso da base.

Representando por h a altura procurada, temos, para o exemplo dado, os números proporcionais.

$$\begin{array}{ccc} 4 & \text{—} & h \\ \frac{3}{1,5} & \text{—} & \frac{6}{2} \end{array}$$

ou, efetuando as divisões:

$$\begin{array}{ccc} 4 & \text{—} & h \\ 2 & \text{—} & 3 \end{array}$$

donde

$$\frac{4}{2} = \frac{h}{3}$$

Determinando o valor de h na proporção, temos:

$$h = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ dm.}$$

EXERCÍCIOS

1. Em 18 gramas de água, há 2 de hidrogênio e 16 de oxigênio; em 45 gramas de água há 5 de hidrogênio e 40 de oxigênio. Verificar se há proporcionalidade entre os pesos de água e hidrogênio, água e oxigênio, e hidrogênio e oxigênio. Determinar os coeficientes de proporcionalidade.
R: Sim; 9; 9/8; 1/8

2. Na planta de uma casa as linhas do desenho são proporcionais às naturais. Um quarto de $3,5 \text{ m}$ de largura é representado por um segmento de 5 cm . O comprimento do quarto é representado por um segmento de 7 cm . Determinar o comprimento do quarto.
R: $4,9 \text{ m}$

3. A planta de um edifício é desenhada de modo que as distâncias naturais são proporcionais às do desenho, e o coeficiente de proporcionalidade é 50. Que dimensões devem ser dadas, na planta, a uma sala retangular de $4,5 \text{ m}$ por 7 m .
R: 9 cm por 14 cm

4. O volume da pirâmide é diretamente proporcional à área da base e à altura. O volume de uma pirâmide, cuja área da base tem 36 dm^2 , é de 24 dm^3 . Mantendo fixa a altura e diminuindo a área da base para 24 dm^2 , qual será o volume da nova pirâmide?
R: 16 dm^3

5. Um triângulo tem 4 dm de altura e $1,5 \text{ dm}$ de base. Mantendo fixa a área e aumentando a base para 3 dm , qual será o comprimento da nova altura?
R: 2 dm

6. A grandeza x é diretamente proporcional a y e assume o valor 40 quando y é igual a 8. Determinar o valor de x , quando y é igual a 12.
R: 60

7. A grandeza y é inversamente proporcional a x , e quando x vale 4, o valor correspondente de y é 48. Qual o valor de y , quando x vale 10?
R: $19,2$

8. Um trem, com a velocidade de 60 km/h , percorre uma certa distância em $3,5 \text{ h}$. Determinar a velocidade de um segundo trem que faz o mesmo percurso em 5 h .
R: 42 km/h

9. Uma grandeza A é diretamente proporcional a B e C , e A recebe o valor 9, quando B e C têm, respectivamente, os valores 5 e 7. Determinar o valor de A , quando B vale 3 e C vale 2.
R: $54/35$

10. A grandeza x varia diretamente em relação a y e inversamente em relação a z . Quando y vale 15 e z vale 6, x assume o valor 10. Determinar o valor do coeficiente de proporcionalidade e daí, concluir o valor de x , quando y vale 8 e z vale 2.
R: 4 e 16

UNIDADE VI

Problemas sôbre Grandezas Proporcionais

1. Divisão proporcional.
2. Regra de três.
3. Percentagem.
4. Juros simples.

I. DIVISÃO PROPORCIONAL

1. Definição.

Dividir um número em partes proporcionais a números dados é decompô-lo em parcelas, de tal forma que estas sejam proporcionais aos números dados.

O número 26, por exemplo, pode ser decomposto numa soma de três parcelas de vários modos distintos; considerando a decomposição

$$26 = 6 + 8 + 12$$

observemos que as parcelas são proporcionais aos números 3, 4 e 6; realmente

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{12}{6}$$

Assim, a decomposição do número 26 foi feita em partes proporcionais aos números 3, 4 e 6.

2. Divisão em partes proporcionais.

1.º exemplo.

Decompor o número 180 em partes proporcionais a 3, 4 e 11.

Representemos por x , y e z as parcelas de 180, proporcionais a 3, 4 e 11. Devemos ter:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11}$$

Para determinar as parcelas x , y , z , é suficiente conhecer o fator de proporcionalidade, como vimos no estudo dos números proporcionais; para isso aplicamos a propriedade das

razões iguais: a soma dos antecedentes está para a dos consequentes, assim como qualquer antecedente para o seu consequente; e obtemos:

$$\frac{x + y + z}{3 + 4 + 11} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11}.$$

Dai, concluímos, por ser $x + y + z = 180$:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11} = \frac{180}{18} = 10.$$

O fator de proporcionalidade é 10; logo, temos:

$$x = 3 \times 10 = 30$$

$$y = 4 \times 10 = 40$$

$$z = 11 \times 10 = 110$$

Verificação: $x + y + z = 30 + 40 + 110 = 180$.

2.º exemplo.

Dividir o número 153 em partes proporcionais a $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

O número 153 deve ser decomposto em duas parcelas, x e y ; temos, assim, os números proporcionais:

$$\frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{y}{\frac{3}{4}}$$

Multiplicando os números da segunda linha por 12 (m.m.c. dos denominadores), obtemos ainda números proporcionais, de acôrdo com o n.º 8 da página 146. Assim, são proporcionais os números:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{9}.$$

Determinando o fator de proporcionalidade, obtemos:

$$\frac{x + y}{8 + 9} = \frac{153}{17} = 9.$$

O fator de proporcionalidade é 9; logo:

$$\begin{cases} x = 8 \times 9 = 72 \\ y = 9 \times 9 = 81 \end{cases}$$

Verificação: $x + y = 72 + 81 = 153$.

Concluímos, dêsse segundo exemplo, que o cálculo pode sempre ser feito sôbre números inteiros.

3. Divisão em partes inversamente proporcionais.

Dividir um número em partes inversamente proporcionais a números dados é o mesmo que dividi-lo em partes diretamente proporcionais aos inversos dos números dados, de acôrdo com o estudo feito sôbre números inversamente proporcionais.

Exemplo.

Dividir o número 341 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 5.

Sendo x , y e z as partes procuradas, as mesmas devem ser diretamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$; assim, temos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{5}}$$

Multiplicando os consequentes por 30, m.m.c. dos denominadores, obtemos:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}.$$

Determinando o fator de proporcionalidade:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{x + y + z}{15 + 10 + 6} = \frac{341}{31} = 11;$$

donde:

$$\begin{cases} x = 15 \times 11 = 165 \\ y = 10 \times 11 = 110 \\ z = 6 \times 11 = 66. \end{cases}$$

4. Aplicação. Regra de sociedade.

Chama-se regra de sociedade o cálculo da parte de cada sócio nos lucros ou prejuízos da sociedade.

Convencionalmente, os lucros ou prejuízos são proporcionais aos capitais e aos tempos com que os sócios participaram do negócio; no entanto, condições especiais podem ser estipuladas no *contrato social*.

Na regra de sociedade há três casos a considerar.

Primeiro caso.

O tempo de participação na empresa é o mesmo, e os capitais diferentes. Neste caso a repartição é proporcional aos capitais.

Segundo caso.

Os tempos são diferentes e o capital, o mesmo. Neste caso a repartição é proporcional ao tempo.

Terceiro caso.

Os tempos e capitais são diferentes. Neste caso a repartição é proporcional aos produtos dos capitais pelos tempos.

1.º exemplo.

Três pessoas se associam numa empresa. A primeira com 60 mil cruzeiros, a segunda com 20 mil cruzeiros, e a terceira com 35 mil cruzeiros. Ao efetuarem o primeiro balanço, verificaram um lucro de 23 mil cruzeiros. Qual a parte de cada sócio?

Os 23 mil cruzeiros devem ser distribuídos em partes proporcionais a 60, 20, 35. Assim, temos:

$$\frac{x}{60} = \frac{y}{20} = \frac{z}{35}$$

O fator de proporcionalidade é

$$\frac{x + y + z}{60 + 20 + 35} = \frac{23}{115} = \frac{1}{5}$$

As partes serão:

$$x = 60 \times \frac{1}{5} = 12$$

$$y = 20 \times \frac{1}{5} = 4$$

$$z = 35 \times \frac{1}{5} = 7$$

O primeiro sócio deve receber 12 mil cruzeiros, o segundo 4 mil cruzeiros e o terceiro 7 mil cruzeiros.

2.º exemplo.

Dois comerciantes associam-se com quantias iguais.

O primeiro trabalhou durante 15 meses e o segundo durante 9 meses. Verificam, então, um lucro de 15 mil cruzeiros.

Qual a parte de cada sócio?

O lucro de 15 mil cruzeiros deve ser distribuído proporcionalmente ao tempo. Temos, representando as partes por x e y :

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{9}$$

O fator de proporcionalidade é

$$\frac{x + y}{15 + 9} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

Logo, as partes serão:

$$x = 15 \times \frac{5}{8} = \frac{75}{8} = 9,375$$

$$y = 9 \times \frac{5}{8} = \frac{45}{8} = 5,625$$

O primeiro sócio recebe Cr\$ 9.375,00, e o segundo Cr\$ 5.625,00.

3.º exemplo.

Três pessoas constituíram uma sociedade em 1 de agosto. A primeira obrigou-se pelo capital de Cr \$ 12 000,00, que realizou no mesmo dia da constituição da sociedade. A segunda obrigou-se pelo capital de Cr \$ 12 000,00 que realizou a 1 de setembro do mesmo ano. A terceira obrigou-se pela soma de Cr \$ 18 000,00 que realizou a 1 de outubro.

No dia 1 de janeiro do ano seguinte, verificou-se um lucro de Cr \$ 8 100,00. Qual o lucro de cada sócio?

O primeiro sócio empregou Cr \$ 12 000,00 por 5 meses, o segundo Cr \$ 12 000,00 por 4 meses e o terceiro Cr \$ 18 000,00 por 3 meses.

Os produtos dos capitais pelos tempos são, respectivamente:

$$12\ 000 \times 5 = 60\ 000$$

$$12\ 000 \times 4 = 48\ 000$$

$$18\ 000 \times 3 = 54\ 000$$

O lucro deve ser distribuído proporcionalmente a esses produtos, ou, simplificando, aos números 60, 48 e 54. Assim, representando as partes por x , y , z , temos:

$$\frac{x}{60} = \frac{y}{48} = \frac{z}{54}$$

A soma dos lucros x , y e z é igual ao lucro total de Cr \$ 8.100,00, logo, determinando o coeficiente de proporcionalidade, obteremos:

$$\frac{x + y + z}{60 + 48 + 54} = \frac{8\ 100}{162} = 50.$$

Assim, os lucros serão:

$$x = 60 \times 50 = \text{Cr } \$ 3.000,00$$

$$y = 48 \times 50 = \text{Cr } \$ 2.400,00$$

$$z = 54 \times 50 = \text{Cr } \$ 2.700,00$$

EXERCÍCIOS

- Dividir 180 em três partes, diretamente proporcionais a 3, 4 e 5.
R: 45, 60, 75
- Dividir 3 410 em três partes, inversamente proporcionais a 5, 3 e 2.
R: 660, 1 100 e 1 650
- Dividir o número 184 em partes proporcionais a $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$.
R: 64, 72, 48
- Dividir o número 273 em partes inversamente proporcionais a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{7}$.
R: 78, 104, 91
- Dividindo-se um certo número em partes proporcionais a 3, 4 e 5, a primeira parte é 60; determinar as duas outras partes e o número que foi dividido.
R: 80, 100 e 240
- Três pessoas associaram-se em uma empresa; a primeira participou com o capital de 30 mil cruzeiros, a segunda de 25 mil cruzeiros e a terceira de 45 mil cruzeiros. Tendo a empresa produzido um lucro de 27 mil cruzeiros, qual a parte de cada sócio?
R: Cr \$ 8 100,00, Cr \$ 6 750,00 e Cr \$ 12 150,00
- Uma pessoa monta uma fábrica e três e sete meses depois, respectivamente, recebe dois sócios com o mesmo capital. No fim do primeiro ano de funcionamento verificam um lucro de 130 mil cruzeiros. Qual a parte de cada sócio?
R: 60 mil cruzeiros, 45 mil cruzeiros e 25 mil cruzeiros
- O caixa de uma casa comercial recebe ordem de distribuir Cr \$ 3 600,00, como gratificação a três empregados, de modo que o mais moço receba $\frac{2}{3}$ da parte do segundo e este $\frac{3}{4}$ da parte do mais velho. Quanto deve dar o caixa a cada empregado?
R: Cr \$ 800,00, Cr \$ 1 200,00, Cr \$ 1 600,00
- Três sócios participaram de uma empresa: o primeiro com o capital de quarenta mil cruzeiros durante dez meses, o segundo com o capital de cinquenta mil cruzeiros durante oito meses e o terceiro com o capital de oitenta mil cruzeiros durante seis meses. Tendo verificado um lucro de 40% sobre o capital total, quanto tocará a cada sócio?
R: Cr \$ 21 250,00, Cr \$ 21 250,00 e Cr \$ 25 500,00
- Certa quantia foi distribuída entre duas pessoas em partes proporcionais a 3 e 4; a segunda recebeu 2 mil cruzeiros mais que a primeira. Qual a quantia distribuída? Qual a parte de cada pessoa?
R: 14 mil cruzeiros, 6 e 8 mil cruzeiros

II. REGRA DE TRÊS

1. *Natureza dos problemas.*

Os problemas sobre grandezas proporcionais são de dois tipos, conforme nêles interfiram duas ou mais grandezas.

1.º Conhecendo-se dois valores correspondentes de *duas* grandezas diretas ou inversamente proporcionais, determinar o valor de uma delas que deverá corresponder a um novo valor dado à outra.

2.º Conhecendo-se valores correspondentes de várias grandezas proporcionais, determinar o valor da primeira que deverá corresponder a novos valores dados a tôdas as outras.

Nos problemas do primeiro tipo são dados *três* valores, daí a denominação de *regra de três* dada a êsses problemas. Por extensão, os do segundo tipo são também chamados regra de três, distinguindo-se uns dos outros pelas denominações: *regra de três simples* para os primeiros, e *regra de três composta*, para os últimos.

2. *Regra de três simples.*

Uma regra de três simples é direta quando as grandezas são *diretamente proporcionais*.

Exemplo.

Um automóvel gasta 10 litros de gasolina para percorrer 65 quilômetros. Quantos litros gastará num percurso de 500 quilômetros?

A quantidade de gasolina é diretamente proporcional ao percurso, a regra de três é direta.

A regra de três simples é *inversa*, quando as grandezas são *inversamente proporcionais*.

Exemplo.

Qual o tempo gasto por 12 homens para executar um trabalho, que 8 homens, nas mesmas condições, executam em 39 dias?

O número de homens é inversamente proporcional ao tempo; a regra de três é *inversa*.

Numa regra de três denominam-se *têrmos principais* os dois valores conhecidos da mesma grandeza, e *têrmos relativos* os dois valores da grandeza, em que um é desconhecido. No primeiro exemplo os têrmos principais são 65 e 500, valores ambos conhecidos da grandeza *espaço*; os têrmos relativos são 10 e o valor desconhecido (representado comumente por x) da grandeza *volume de gasolina*. No segundo exemplo os têrmos principais são 12 e 8, e os relativos 39 e x (valor desconhecido de dias).

3. *Resolução da regra de três simples.*1.º *problema.*

Quatro quilos de farinha de trigo produzem cinco quilos de pão; quantos quilos de farinha serão necessários para produzir cento e vinte quilos de pão?

Os dados podem ser dispostos sob a forma:

4 kg de farinha produzem	5 de pão
x kg de farinha produzem	120 de pão.

As grandezas são diretamente proporcionais; a razão de dois valores da primeira é igual à razão dos valores correspondentes da segunda; logo, temos a proporção:

$$\frac{4}{x} = \frac{5}{120} \dots x = \frac{120 \times 4}{5} = 96.$$

R: São necessários 96 kg de farinha.

Observemos que, sendo direta a regra de três, a razão dos principais é igual à dos relativos.

2.º *problema.*

Uma torneira, jorrando 20 litros d'água por minuto, enche um reservatório em 6 horas. Qual o tempo em que encherá o mesmo reservatório, uma torneira que deite 30 litros d'água por minuto?

Os dados podem ser dispostos:

20 litros correspondem a 6 horas

30 litros corresponderão a x horas.

Quanto maior o número de litros vertidos por minuto, menor será o tempo gasto para encher o reservatório. As grandezas são inversamente proporcionais; a razão de dois valores da primeira é igual à razão inversa dos valores correspondentes da segunda. Assim, temos a proporção:

$$\frac{20}{30} = \frac{x}{6} \quad \therefore \quad x = \frac{6 \times 20}{30} = 4.$$

R: A segunda torneira enche o reservatório em 4 horas.

3.º problema.

Um trem percorre 177 km em 4 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 28 minutos, supondo a velocidade constante?

Os dados são dispostos:

4 horas — 177 km

28 minutos — x km.

Em primeiro lugar, para determinar a razão entre os dois valores do tempo é necessário *reduzi-los à mesma unidade*; reduzindo as horas a minutos, temos, então:

240 mn — 177 km

28 mn — x km.

Sendo direta a regra de três, a razão dos principais é igual à dos relativos, daí a proporção:

$$\frac{240}{28} = \frac{177}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{177 \times 28}{240} = 20,65 \text{ km.}$$

R: Em 28 minutos o trem percorre 20,65 km.

4. Método de redução à unidade.

Chama-se *método de redução à unidade* ou *análise aritmética* o processo de raciocínio que consiste em partir do valor

dado de uma grandeza para a *unidade*, e desta para o *valor procurado* da mesma grandeza. Os mesmos três problemas anteriores serão resolvidos por este método.

1.º problema.

Quatro quilos de farinha de trigo produzem 5 de pão, quantos quilos de farinha serão necessários para produzir 120 quilos de pão?

5 kg de pão correspondem a 4 kg de farinha.

1 kg de pão corresponderá a $\frac{4}{5} = 0,8$ kg de farinha.

120 kg de pão corresponderão a $0,8 \times 120 = 96$ kg de farinha.

2.º problema.

Uma torneira, que jorra 20 litros d'água por minuto, enche um reservatório em 6 horas. Qual o tempo em que encherá o mesmo reservatório uma torneira que deite 30 litros d'água por minuto?

Jorrando 20 l gasta 6 horas

Jorrando 1 l gastará 6×20 horas

Jorrando 30 l gastará $\frac{6 \times 20}{30} = 4$ horas.

3.º problema.

Um trem percorre 177 km em 4 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 28 minutos?

Em 4 horas ou 240 mn percorre 177 km

Em 1 minuto percorrerá $\frac{177}{240}$

Em 28 minutos percorrerá $\frac{177 \times 28}{240} = 20,65$ km.

5. Regra de três composta.

Na regra de três composta, a grandeza cujo valor procuramos pode ser *diretamente* proporcional a *todas* as outras, pode ser *inversamente* proporcional a *todas* as outras e, pode,

ainda, ser diretamente proporcional a umas e inversamente proporcional a outras. Os números correspondentes às medidas guardarão entre si a mesma razão de proporcionalidade, direta ou inversa. Como os números inversamente proporcionais a outros são diretamente proporcionais a seus inversos, podemos reduzir todos os casos ao primeiro, invertendo os números correspondentes às grandezas inversamente proporcionais. Realizada esta transformação, poderemos aplicar a propriedade estudada no n.º 10 da pág. 148:

Quando uma grandeza é proporcional a várias outras, os números que exprimem sua medida são proporcionais aos produtos dos números resultantes das medidas das outras.

1.º exemplo.

A despesa com um bico de gás, que funciona 5 horas por dia durante 9 dias, é de Cr \$ 6,00. Qual será a despesa se o mesmo bico funcionar 7 horas por dia, durante 30 dias?

Método das proporções.

A despesa é diretamente proporcional ao número de dias e de horas. A regra de três é composta e todas as grandezas são diretamente proporcionais. Dispondo os dados do problema de modo que o valor incógnito figure em primeiro lugar, teremos:

Despesa	horas	dias
x ———	7 ———	30
6 ———	5 ———	9

Como os primeiros números representam medidas de uma grandeza diretamente proporcional às demais, serão diretamente proporcionais aos seus produtos; daí, a regra de três simples e direta:

$$\begin{array}{l} x \text{ ——— } 210 \\ 6 \text{ ——— } 45. \end{array}$$

Armando a proporção, temos:

$$\frac{x}{6} = \frac{210}{45} \quad \therefore \quad x = \frac{6 \times 210}{45} = 28.$$

R: A despesa é de Cr \$28,00.

Método de redução à unidade.

Funcionando 5 horas durante 9 dias, gasta	6
Funcionando 1 hora durante 9 dias, gastará	$\frac{6}{5}$
Funcionando 1 hora durante 1 dia, gastará	$\frac{6}{5 \times 9}$
Funcionando 7 horas durante 1 dia, gastará	$\frac{6 \times 7}{5 \times 9}$
Funcionando 7 horas durante 30 dias, gastará	$\frac{6 \times 7 \times 30}{5 \times 9}$

A despesa pedida será:

$$\frac{6 \times 7 \times 30}{5 \times 9} = \frac{252}{9} = 28.$$

2.º exemplo.

Uma máquina de rotular garrafas funcionou durante 6 horas por dia e rotulou 3 000 garrafas em 6 dias. Quantas horas deverá funcionar por dia, para rotular 5 000 garrafas em 4 dias?

Método das proporções.

Disposição dos dados:

horas	dias	n.º de garrafas
x ———	4 ———	5 000
6 ———	6 ———	3 000

Quanto maior o número de horas de trabalho diário, menor será o número de dias necessários e maior o número de garrafas; assim, o número de horas é inversamente proporcional ao de dias e diretamente proporcional ao de garrafas; invertendo os números correspondentes aos dias, teremos os números diretamente proporcionais.

$$\begin{array}{l} x \text{ ——— } \frac{1}{4} \text{ ——— } 5\ 000 \\ 6 \text{ ——— } \frac{1}{6} \text{ ——— } 3\ 000. \end{array}$$

Aplicando a propriedade das grandezas proporcionais a várias outras:

$$\begin{array}{r} x \text{ ————— } \frac{5\ 000}{4} \\ 6 \text{ ————— } \frac{3\ 000}{6} \end{array}$$

Resolvendo a regra de três simples e direta, temos:

$$x = \frac{6 \times \frac{5\ 000}{4}}{\frac{3\ 000}{6}}$$

ou,
$$x = 6 \times \frac{5\ 000}{4} \times \frac{6}{3\ 000} = 15 \text{ horas.}$$

Método de redução à unidade.

Rotulando 3 000 garrafas em 6 dias de 6 horas,

rotulará 1 garrafa em 6 dias de $\frac{6}{3\ 000}$ h,

rotulará 1 garrafa em 1 dia de $\frac{6 \times 6}{3\ 000}$

rotulará 1 garrafa em 4 dias de $\frac{6 \times 6}{3\ 000 \times 4}$ h,

rotulará 5 000 garrafas em 4 dias de $\frac{6 \times 6 \times 5\ 000}{4 \times 3\ 000}$ h.

Logo, deverá funcionar por dia:

$$\frac{6 \times 6 \times 5\ 000}{4 \times 3\ 000} = 15 \text{ horas.}$$

REGRA PRÁTICA

Em qualquer dos dois métodos o valor de x é dado pela expressão:

$$x = \frac{6 \times 6 \times 5\ 000}{4 \times 3\ 000}$$

que também pode ser escrita:

$$x = 6 \times \frac{6}{4} \times \frac{5\ 000}{3\ 000}$$

Observamos, então:

Dispondo os dados de modo que a incógnita figure em primeiro lugar, essa é igual ao número que lhe corresponde (6) multiplicado pela razão inversa $\left(\frac{6}{4}\right)$ dos valores da grandeza que lhe é inversamente proporcional, e pela razão direta $\left(\frac{5\ 000}{3\ 000}\right)$ dos valores da grandeza que lhe é diretamente proporcional.

3.º exemplo.

Quantos dias gastarão 20 homens para cortar 1 000 estéreos de lenha, se 15 homens podem cortar 1 500 estéreos em 30 dias?

Sendo x o número de dias, a disposição dos dados será:

dias	homens	estéreos
x	20	1 000
30	15	1 500

O número de dias é inversamente proporcional ao número de homens e diretamente proporcional ao de estéreos; aplicando a regra prática, temos:

$$x = 30 \times \frac{15}{20} \times \frac{1\ 000}{1\ 500} = \frac{3 \times 15 \times 10}{2 \times 15} = 15 \text{ dias.}$$

EXERCÍCIOS

Resolver os problemas

- Se 3 m de certa fazenda custaram Cr\$ 16,50, quanto custarão 7 m da mesma fazenda?
R: Cr\$ 38,50
- Um autom vel gasta 10 litros de gasolina para percorrer 65 km. Quantos litros gastará num percurso de 910 km?
R: 140 l

3. Qual o tempo gasto por 12 homens para executar um trabalho que 8 homens, nas mesmas condições, executam em 9 dias?
R: 6 dias
4. Uma fonte dá 38 l d'água em 5 minutos; quantos litros dará em hora e meia?
R: 684 l
5. Para tecer 19 m de um tecido com 50 cm de largura são gastos 38 kg de lã. Quantos metros serão tecidos com 93 kg da mesma lã, sendo a largura de 60 cm?
R: 38, 75 m
6. O transporte de uma carga de 3 toneladas numa estrada de 50 km importa em Cr \$ 120,00. Quanto custará o transporte de 2 toneladas numa estrada de 30 km, à mesma razão?
R: Cr \$ 48,00
7. Numa transmissão de correia, a polia maior tem 30 cm de diâmetro e a menor, 18 cm. Qual o número de rotações por minuto da menor polia, se a maior dá 45 no mesmo tempo?
R: 75 rotações p/ min.
8. Com 9 ha de pasto podem ser mantidas 20 cabeças de gado. Quantos ha serão necessários para manter 360 cabeças?
R: 162 ha
9. Uma máquina, que funciona 4 horas por dia durante 6 dias produz 2 000 unidades. Quantas horas deverá funcionar por dia para produzir 20 000 unidades em 30 dias?
R: 8 horas por dia
10. Um comerciante tem de lucro $\frac{2}{5}$ do preço de compra dos artigos com que negocia. Tendo vendido Cr \$ 2 800,00, qual o lucro auferido?
R: Cr \$ 800,00
- Resolver pelo método de redução à unidade:
11. Se 5 pence valem Cr \$ 1,00 quanto valerão £ 20-15-7?
R: Cr \$ 997,40
12. Se uma libra esterlina vale Cr \$ 80,00 qual o valor de doze pence?
R: Cr \$ 4,00
13. Uma livreria do Rio manda pagar a uma casa editora de Paris uma fatura de 1 500 francos, por intermédio de um banco de Londres. Qual a quantia necessária em moeda brasileira, se 30 francos valem uma libra e o cruzeiro vale 5 pence?
R: Cr \$ 2 400,00
14. Se 144 dólares valem Cr \$ 1 800,00, quanto valerão 50 dólares?
R: Cr \$ 625,00
15. Quanto valem 36 francos, sabendo-se que 150 francos valem Cr \$ 58,50?
R: Cr \$ 14,04
16. Dois operários, A e B, trabalhando juntos, podem fazer um serviço em 6 dias. Podendo B fazê-lo sózinho em 15 dias, quanto tempo dispenderá A para fazê-lo sózinho?
R: 10 dias

17. Dois operários, A e B, trabalhando juntos, podem fazer um serviço em 6 dias. Podendo B fazê-lo sózinho em 21 dias, em quanto tempo poderá A fazê-lo sózinho?
R: 8 d 9 h 36 m

18. Em uma casa comercial, metade dos empregados são homens, um terço são mulheres, e os dez restantes são meninos. Quantos empregados tem, ao todo, a casa?
R: 60

19. Um homem percorre 120 km em 5 dias, marchando 6 horas por dia. Em quantos dias caminhará 320 km, marchando 8 horas por dia?
R: 10 dias

20. Pagaram-se Cr \$ 180,00 pelo frete de 1,2 t de minério a 90 km. Quanto custará o frete de 750 kg de minério a 80 km?
R: Cr \$ 100,00

III. PERCENTAGEM

1. Noção de percentagem. Definições.

A razão entre dois valores de uma grandeza pode ser estabelecida com um conseqüente ou denominador qualquer. Suponhamos que no primeiro ano dum colégio há ao todo 90 alunos e 27 são alunas; a razão entre o número de alunas e o total será:

$$\frac{27}{90}$$

e, essa razão pode ser expressa com as formas:

$$\frac{27}{90}, \frac{9}{30}, \frac{3}{10}, \frac{30}{100}, \text{ etc.}$$

Assim, podemos dizer, com o mesmo sentido:

No primeiro ano do colégio $\frac{27}{90}$ dos alunos são meninas,

ou, três décimos dos alunos são meninas, ou trinta centésimos dos alunos são meninas.

A razão expressa com o denominador 100 recebe o nome particular de *percentagem*, e é muito empregada por estabelecer um termo fixo de comparação. No exemplo anterior, a razão,

sob forma de percentagem, é $\frac{30}{100}$

O numerador 30 da razão denomina-se *taxa de percentagem* e representa-se pelo símbolo 30%, que se lê trinta por

cento; o número total 90 é denominado *principal* e o número correspondente de alunas, 27, é a *percentagem*. Assim, dizemos: 27 é trinta por cento de 90, ou, trinta por cento dos alunos são meninas.

E' sempre possível exprimir uma razão sob forma de percentagem, e, recíprocamente, exprimir uma percentagem sob forma de fração irredutível.

Exemplos.

1.º Exprimir a razão $\frac{3}{25}$ sob forma de percentagem.

A questão consiste em determinar uma razão igual $\frac{3}{25}$ e de denominador 100. Representando por x o numerador da razão procurada, temos:

$$\frac{3}{25} = \frac{x}{100} \therefore x = \frac{3 \times 100}{25} = 12.$$

Assim, a percentagem é $\frac{12}{100}$ ou 12 %.

2.º Exprimir 2,5 % sob forma de fração irredutível.

Temos:

$\frac{2,5}{100} = \frac{25}{1\ 000}$, ou, reduzindo à expressão mais simples:

$$\frac{25}{1\ 000} = \frac{1}{40}$$

A fração irredutível correspondente é $\frac{1}{40}$.

2. Cálculo da percentagem.

1.º exemplo.

Calcular 5 % de Cr\$ 208,00.

O problema consiste numa regra de três simples e direta, pois a taxa exprime a razão $\frac{5}{100}$. Temos, assim:

A	100	corresponde	5,
a	208	corresponderá	x.

Donde a proporção:

$$\frac{100}{208} = \frac{5}{x} \therefore x = \frac{208 \times 5}{100} = \text{Cr\$ } 10,40.$$

R: 5 % de Cr\$ 208,00 são Cr\$ 10,40.

2.º exemplo.

Ao pagar uma conta de Cr\$ 4 800,00, uma pessoa consegue um abatimento de 3 %. Quanto pagou pela conta?

Temos a regra de três:

em	100	abate-se	3,
em	4 800	abater-se-á	x.

Daí, a proporção:

$$\frac{100}{4\ 800} = \frac{3}{x} \therefore x = \frac{4\ 800 \times 3}{100} = \text{Cr\$ } 144,00.$$

O abatimento é de Cr\$ 144,00, logo, a pessoa pagou
4 800 — 144 = Cr\$ 4 656,00.

Dos dois exemplos estudados conclui-se a regra prática para o cálculo da percentagem.

REGRA. A percentagem é obtida multiplicando o principal pela taxa e dividindo o produto por 100.

Esta regra prática é traduzida pela fórmula:

$$p = \frac{C \times i}{100}$$

onde C é o principal, i a taxa e p a percentagem.

Realmente, sendo i % a taxa, C o principal e p a percentagem, temos a regra de três:

a	100	corresponde	i
a	C	corresponderá	p

Armando a proporção:

$$\frac{100}{C} = \frac{i}{p} \dots p = \frac{C \times i}{100}$$

Exemplo.

Calcular 5 % de Cr \$ 840,00.

Multiplicando o principal pela taxa 5 obteremos 4 200 e, dividindo o resultado por 100, temos:

$$4\ 200 : 100 = \text{Cr } \$ 42,00.$$

EXERCÍCIOS

Exprimir sob forma de percentagem as razões:

1. $\frac{1}{25}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{11}{40}$ 4. $\frac{31}{125}$

Exprimir sob forma de fração irredutível as percentagens:

5. 12 % 6. 30 % 7. 4,5 % 8. 24,8 %

Determinar as seguintes percentagens:

9. 8 % de 175 10. 67 % de 386 11. 0,2 % de 938
12. $8\frac{1}{2}$ % de 600 13. 16 % de 27,86 14. 12 % de Cr \$ 600,00
15. 6 % de Cr \$ 1 800,00

RESPOSTAS

1. 4 % 2. 75 % 3. 27,5 % 4. 24,8 % 5. $\frac{3}{25}$
6. $\frac{3}{10}$ 7. $\frac{9}{200}$ 8. $\frac{31}{125}$ 9. 14 10. 258,62
11. 1,876 12. 50 13. 4,457 6 14. Cr \$ 72,00 15. Cr \$ 108,00

3. Determinação do principal e da taxa.

Em certos problemas, a incógnita pode ser o *principal* ou a *taxa*. A resolução do problema far-se-á sempre por intermédio de uma regra de três.

Exemplos.

a) Determinação do principal

Um menino, comprando uma bicicleta, conseguiu um abatimento de 3 % sobre o preço marcado, e assim obteve um desconto de Cr \$ 18,00.

Qual o preço marcado?

Resolução. A incógnita é o principal, temos a regra de três:

$$\begin{array}{l} \text{em } 100 \text{ o abatimento é } \quad 3 \\ \text{em } C \text{ o abatimento será } 18. \end{array}$$

Daí, a proporção:

$$\frac{100}{C} = \frac{3}{18}$$

donde:

$$C = \frac{18 \times 100}{3} = \text{Cr } \$ 600,00.$$

R: O preço marcado é Cr \$ 600,00

b) Determinação da taxa

Em 35 g duma solução de iodo, a porção de iodo pesa 0,7 g.

Qual a taxa da solução?

Resolução. A incógnita é a taxa *i*. Temos a regra de três:

$$\begin{array}{l} \text{em } 35 \text{ g há } \quad 0,7 \text{ g de iodo} \\ \text{em } 100 \text{ haverá } \quad i. \end{array}$$

Daí, a proporção:

$$\frac{35}{100} = \frac{0,7}{i}$$

donde:

$$i = \frac{0,7 \times 100}{35} = \frac{70}{35} = 2.$$

R: A solução tem 2 % de iodo.

EXERCÍCIOS

1. Determinar $8\frac{1}{3}\%$ de 600. R: 50
2. Qual o número, cujos 43% valem 374,1? R: 870
3. Uma pessoa compra um terreno por Cr \$ 17 500,00 e vende-o com lucro de Cr \$ 3 500,00. Qual a percentagem do lucro? R: 20 %
4. Qual o número que aumentado de seus 20% dá a soma de 432? R: 360
5. Um viajante comercial recebe de comissão 4% das vendas que realiza. Em um mês recebeu de comissão Cr \$ 580,00; quanto vendeu nesse mês? R: Cr \$ 14 500,00
6. Em uma fábrica 28% dos operários são mulheres, e os homens são 216. Quantos são os operários? R: 300
7. Um comerciante compra 310 toneladas de minério a Cr \$ 450,00 a tonelada. Vende um quinto com lucro de 25% , dois quintos com lucro de 15% e o resto com lucro de 10% . Quanto recebe ao todo e qual o seu lucro? R: Cr \$ 160 425,00; Cr \$ 20 925,00
8. Uma conta, ao ser paga à vista, sofre um abatimento de 5% no valor de Cr \$ 200,00. Qual o valor da conta? R: Cr \$ 4 000,00
9. Qual o valor de uma fatura pela qual se pagou Cr \$ 1 900,00, sabendo-se que o vendedor concordou em fazer um abatimento de 5% ? R: Cr \$ 2 000,00
10. Um agente de automóveis adquire os mesmos por Cr \$ 18 000,00 e paga de taxa alfandegária 15% . Devendo dar ao vendedor uma comissão de 10% sobre o preço de tabela, por quanto deve tabelar para ganhar 30% sobre o mesmo preço? R: Cr \$ 34 500,00

IV. JUROS SIMPLES

1. Definições.

Uma pessoa, possuidora de certa quantia, cedendo-a em benefício de outra, por empréstimo, ou depositando-a num banco, recebe, pela aplicação de seu dinheiro, uma remuneração denominada *juro*.

Nessas transações há *quatro* quantidades a considerar:

- capital* — a quantia aplicada ou emprestada;
juro — a remuneração recebida pelo capital;
tempo — prazo de duração da transação;
taxa — que traduz as condições da transação.

A taxa estabelece o juro de uma quantia determinada, num tempo também determinado e é, em geral, dada sob a forma de percentagem. Assim, a taxa 3% ao ano estabelece que o capital 100 produz 3 em 1 ano; com esta taxa, cem cruzeiros produzirão três cruzeiros em um ano.

(Os prazos podem ser estabelecidos em anos, meses ou dias.

Convencionou-se considerar o prazo de um ano quando não é indicado explicitamente; assim, enunciada simplesmente a taxa $4\frac{1}{2}\%$, subentende-se $4\frac{1}{2}\%$ ao ano.

2. Juros simples e compostos.

Os juros são compostos quando, no fim de cada prazo, são reunidos ao capital, sendo o juro do prazo seguinte contado sobre o capital assim acrescido.

Quando o capital permanece invariável o juro é simples.

3. Cálculo de juros simples.

Por convenção, os juros são diretamente proporcionais ao capital e ao tempo; d esse modo, o cálculo dos juros se reduz à resolução de uma regra de três composta.

Exemplo.

Calcular o juro produzido por Cr \$ 900,00 no fim de 4 anos, à taxa de 6% ao ano.

Temos a regra de três:

- O capital 100 em 1 ano produz 6,
o capital 900 em 4 anos produzirá x .

Aplicando a regra prática obteremos:

$$x = 6 \times \frac{4}{1} \times \frac{900}{100} = \text{Cr } \$ 216,00.$$

4. Fórmula de juros simples.

Os problemas de juros são praticamente resolvidos por uma fórmula, de emprêgo muito simples. Para obter essa fórmula, representemos, de modo geral, por c o capital empregado, i a taxa, t o tempo em anos, j o juro produzido. O problema será, então, enunciado:

Determinar o juro produzido pelo capital c a i % ao ano, em t anos.

Teremos a regra de três:

O capital 100 em 1 ano produz i ,
o capital c em t anos produzirá j .

Sendo j a incógnita, diretamente proporcional ao tempo e ao capital, obteremos:

$$j = i \times \frac{c}{100} \times \frac{t}{1}$$

$$j = \frac{cit}{100}$$

que é a fórmula de juros simples.

APLICAÇÃO. Determinar o juro de Cr \$ 1 200,00 em 2 anos, a 5 % ao ano.

Temos:

$$c = 1\ 200, t = 2 \text{ e } i = 5.$$

Aplicando a fórmula:

$$j = \frac{1\ 200 \times 5 \times 2}{100} = 120.$$

O juro é de Cr \$ 120,00.

Observação importante.

Na aplicação da fórmula, a taxa e o tempo devem ser referidos à mesma unidade. Assim:

a taxa sendo *ao ano*, o tempo deve ser reduzido a unidade *ano*;

a taxa sendo *ao mês*, o tempo deve ser reduzido a *mês*.

Exemplos.

1.º Determinar o juro produzido pelo capital Cr \$ 900,00, a 8 % ao ano, no fim de 3 anos e 9 meses.

A taxa é anual, o tempo deve ser reduzido a anos.

$$\text{Temos: } 3 \text{ anos } 9 \text{ meses} = \frac{3 \times 12 + 9}{12} = \frac{45}{12}$$

Aplicando a fórmula do juro, resulta:

$$= \frac{900 \times 8 \times \frac{45}{12}}{100} = \frac{9 \times 28 \times 45}{125} = \text{Cr } \$ 270,00.$$

EXERCÍCIOS

- Qual o juro produzido por Cr \$ 14 000,00 em 3 anos, a 5 % ao ano?
R: Cr \$ 2 100,00
- Qual o juro de Cr \$ 16 000,00, em dois anos e três meses, a 7 % ao ano?
R: Cr \$ 2 520,00
- Determinar o juro de Cr \$ 2 700,00, a 8 % ao ano, em 3 anos e 4 meses.
R: Cr \$ 720,00
- Calcular o juro produzido por Cr \$ 900,00 em 1 a 5 m 20 d a 0,8 % ao mês.
R: Cr \$ 127,20
- Determinar o juro de Cr \$ 264,00 em 9 meses a 7 % ao ano.
R: Cr \$ 13,86

5. Problemas.

Os problemas de juros simples são de quatro tipos:

- calcular o juro, conhecidos o capital, a taxa e o tempo; problema do tipo dos exemplos anteriores;
- calcular o *capital*, conhecidos o juro, a taxa e o tempo;
- calcular o *tempo*, conhecidos o capital, a taxa e o juro;
- calcular a *taxa*, conhecidos o capital, o tempo e o juro.

Da fórmula para o cálculo do juro podem ser deduzidas fórmulas particulares para o cálculo do *capital*, da *taxa* e do *tempo*. Realmente, dada a fórmula:

$$j = \frac{cit}{100}$$

obtemos, multiplicando os dois membros por 100:

$$cit = 100j;$$

onde, dividindo os dois membros respectivamente por *it*, por *ci* e por *ct*, resultam as três fórmulas:

$$c = \frac{100j}{it}$$

$$t = \frac{100j}{ci}$$

$$i = \frac{100j}{ct}$$

respectivamente, para o cálculo do capital, do tempo e da taxa.

Exemplos.

a) Determinação do capital

Determinar o capital que, em 3 anos, rendeu Cr \$ 270,00, a 5 % ao ano.

Empregando a fórmula do capital

$$c = \frac{100j}{it}$$

temos:

$$c = \frac{100 \times 270}{5 \times 3} = \frac{27\ 000}{15} = \text{Cr } \$ 1\ 800,00.$$

b) Determinação do tempo

O capital Cr \$ 900,00, empregado a 8 % ao ano, rendeu Cr \$ 216,00 de juro. Durante quanto tempo esteve empregado?

Empregando a fórmula:

$$t = \frac{100j}{ci}$$

temos:

$$t = \frac{100 \times 216}{900 \times 8} = \frac{216}{72} = 3 \text{ anos.}$$

c) Determinação da taxa

A que taxa deve ser empregado o capital Cr \$ 2 000,00 para produzir Cr \$ 280,00 em 2 anos?

Empregando a fórmula

$$i = \frac{100j}{ct}$$

temos:

$$i = \frac{100 \times 280}{2\ 000 \times 2} = \frac{28}{4} = 7.$$

R: A taxa deve ser de 7 % ao ano.

EXERCÍCIOS

- Qual o capital que produz Cr \$ 400,00 de juro em 1 a 8 m, à taxa de 1 % ao mês?
R: Cr \$ 2 000,00
- A que taxa deve ser empregado o capital de Cr \$ 16 000,00, para produzir Cr \$ 2 520,00 em 2 a 3 m?
R: 7 % ao ano
- O capital de Cr \$ 6 000,00, empregado a 9 % ao ano, produziu Cr \$ 810,00 de juro. Durante quanto tempo esteve empregado?
R: 1 a 6 m
- Uma pessoa adquire um automóvel por Cr \$ 18 000,00. O vendedor oferece um abatimento de 5 % pelo pagamento à vista. A pessoa prefere, no entanto, pagar em duas prestações iguais; a primeira 6 meses depois da compra, e a outra 1 ano depois, submetendo-se ao pagamento do juro de 7 % ao ano. Quanto gastou a mais, adotando o pagamento em prestações?
R: Cr \$ 1 845,00
- Certo capital, colocado a juro durante 3 a 4 m, a 8 % ao ano, produziu Cr \$ 720,00 de juro. Qual o capital?
R: Cr \$ 2 700,00
- O capital de Cr \$ 900,00, empregado a 0,8 % ao mês, produziu Cr \$ 127,20 de juro. Durante quanto tempo esteve empregado?
R: 1 a 5 m 20 d

7. Calcular o juro de Cr \$ 800,00 em 90 dias, à taxa de 9 % ao ano.
R: Cr \$ 18,00
8. A que taxa esteve empregado um capital de Cr \$ 500,00, para produzir Cr \$ 3,75 em 30 dias?
R: 9 %
9. Qual o prazo de aplicação de um capital de Cr \$ 1 440,00 que produziu Cr \$ 18,00 de juro, à taxa de 10 %?
R: 45 dias
10. Qual o capital que, empregado durante 72 dias à taxa de 6 %, produziu Cr \$ 300,00 de juro?
R: Cr \$ 25 000,00

6. Capital acumulado.

A soma dum capital com o juro correspondente denomina-se *capital acumulado*.

Em certos problemas são dados o capital acumulado, a taxa e o tempo e pedido o capital ou o juro.

Exemplo.

Sendo Cr \$ 944,00 o capital acumulado no fim de 2 anos e 3 meses, a 8 % ao ano, determinar o capital e o juro.

O problema pode ser resolvido por uma regra de três simples, determinando-se antes o capital acumulado correspondente a 100.

Se 100 produzem 8 de juro em um ano, em 2 a. 3 m. ou $\frac{27}{12}$ do ano produzirão $8 \times \frac{27}{12} = 18$; logo, o capital acumulado correspondente a 100 é $100 + 18$ ou 118. Temos, então, a regra de três:

Se o capital acumulado 118 corresponde a 100,
o capital acumulado 944 corresponderá a x

A regra de três é direta, assim:

$$x = \frac{944 \times 100}{118} = \text{Cr } \$ 800,00.$$

Sendo o capital Cr \$ 800,00 e o acumulado Cr \$ 944,00, o juro será a diferença: $j = \text{Cr } \$ 944,00 - \text{Cr } \$ 800,00 = \text{Cr } \$ 144,00$.

Nos problemas em que figura o capital acumulado, é, pois, suficiente determinar o capital, sendo o juro determinado por subtração.

Fórmula.

O capital primitivo, correspondente a um capital acumulado dado, pode ser também obtido por uma fórmula. Representemos, de modo geral, por

S , o capital acumulado (soma do capital com o juro)

c , o capital primitivo

i , a taxa

t , o tempo.

O problema será enunciado:

Qual o capital que, a i % ao ano, se eleva a S em t anos?

Resolução.

Se o capital 100 em 1 ano produz i , em t anos produzirá it , logo, o capital acumulado correspondente será $100 + it$.

Daí, a regra de três:

Se o capital acumulado $100 + it$ corresponde a 100
o capital acumulado S corresponderá a c .

Sendo direta a regra de três, obtemos:

$$c = \frac{100 \times S}{100 + it}$$

que é a fórmula procurada.

Exemplo.

Sendo Cr \$ 2 540,00 o capital acumulado no fim de 3 anos, a 9 % ao ano, determinar o juro.

Aplicando a fórmula do capital primitivo, temos:

$$c = \frac{100 \times 2\,540}{100 + 3 \times 9} = \frac{254\,000}{127} = \text{Cr } \$ 2\,000,00$$

Sendo o capital primitivo Cr \$ 2 000,00, o juro será:

$$2\,540 - 2\,000 = \text{Cr } \$ 540,00.$$

7. Método do divisor fixo.

Nos estabelecimentos bancários e principalmente nas Caixas Econômicas, os correntistas movimentam seus depósitos com muita frequência, havendo por isso modificações no capital com intervalos de dias. A fórmula de juros empregada é adaptada ao cálculo para os prazos em dias, convertidos à fração do ano. Assim, suponhamos um capital depositado

durante d dias; cada dia é equivalente à fração $\frac{1}{360}$ do ano, d dias serão equivalentes a $\frac{d}{360}$ do ano; logo, na fórmula de

juros substituiremos t por $\frac{d}{360}$ e obteremos:

$$j = \frac{ci \times \frac{d}{360}}{100}, \text{ ou,}$$

$$j = \frac{cid}{36\ 000}$$

Além disso, cada estabelecimento têm uma taxa fixa daí, o emprêgo de um método simples, denominado *do divisor fixo*. Consiste em dividir os dois termos da última fração pela taxa fixa. Suponhamos que a Caixa Econômica pague juros à taxa de 5 % ao ano, a fórmula será:

$$= \frac{c \times 5 \times d}{36\ 000}$$

ou, dividindo os dois termos da fração por 5:

$$j = \frac{cd}{7\ 200}$$

Assim, os funcionários calcularão o juro, multiplicando o capital pelo número de dias e dividindo sempre pelo mesmo número 7 200, que é o *divisor fixo* na Caixa considerada.

De modo geral, representando o *divisor fixo* por D , teremos a fórmula:

$$j = \frac{cd}{D}$$

Exemplo.

Determinar o divisor fixo de juro, para um banco que paga aos seus correntistas 3 % ao ano e calcular o juro a pagar por um depósito de vinte mil cruzeiros, durante um mês e quinze dias.

O divisor fixo do banco é $\frac{36\ 000}{3}$ ou 12 000. O juro a pagar será:

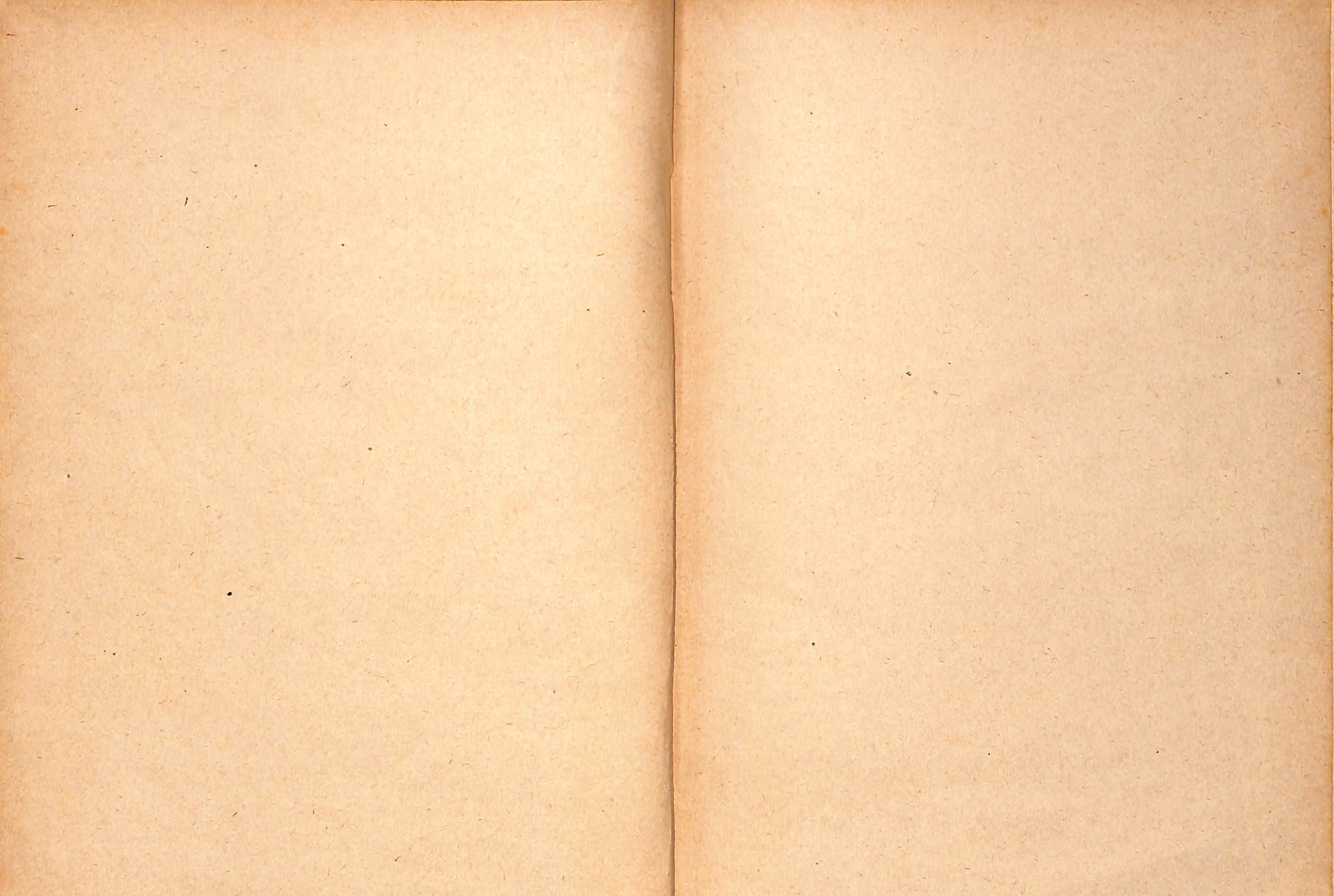
$$j = \frac{20\ 000 \times 45}{12\ 000} = \text{Cr } \$ 75,00.$$

EXERCÍCIOS

1. Uma pessoa deposita suas economias no valor de Cr \$ 13 000,00, numa caixa que paga 5 % ao ano. Qual o capital acumulado em 5 anos?
R: Cr \$ 16 250,00
2. Qual o juro correspondente a um capital que, empregado a 6 % ao ano, atinge o valor de Cr \$ 4 480,00 no fim de dois anos?
R: Cr \$ 480,00
3. Uma pessoa emprega seu capital a 8 % e, no fim de 3 a 8 m, recebe capital e juro reunidos no valor de Cr \$ 15 520,00. Qual o capital empregado?
R: Cr \$ 12 000,00

Resolver pelo método do divisor fixo:

4. Calcular o juro de Cr \$ 720,00, a 5 % ao ano, em 2 m 15 d.
R: Cr \$ 7,50
5. Calcular o juro de Cr \$ 720,00 em 35 dias à taxa de 8 %.
R: Cr \$ 5,60
6. Durante quanto tempo esteve empregada a quantia de Cr \$ 1 000,00, para produzir Cr \$ 25,00 de juro, à taxa de 6 % ao ano?
R: 5 meses
7. Qual o capital que, colocado a 8 % ao ano durante 5 meses, produz Cr \$ 27,50 de juro?
R: Cr \$ 825,00
8. O capital de Cr \$ 3 600,00, depositado durante 30 dias, produziu Cr \$ 24,00 de juros. Qual a taxa?
R: 8 %



2 DICIONÁRIOS indispensáveis A TODOS OS ESTUDANTES



PEQUENO DICIONÁRIO INGLÊS-PORTUGUÊS

por Nuno S. de Vasconcellos

Com cêrca de 40.000 palavras modernas, expressões idiomáticas e termos técnicos que não se encontram em nenhum outro dicionário de sua classe. Indispensável a todos aquêles que desejem escrever corretamente a língua inglesa.



PEQUENO DICIONÁRIO BRASILEIRO DA LÍNGUA PORTUGUÊSA

5.ª EDIÇÃO REVISTA E ATUALIZADA
DE ACÔRDO COM A REFORMA ORTO-
GRÁFICA DEFINITIVA. VOLUME
COM CÊRCA DE 80.000 VOCÁBULOS.

É o primeiro dicionário destinado ao Brasil e elaborado com espírito prático e moderno, uma vez que se levou em conta a *língua viva*, aquela que brota da pena dos nossos escritores, se lê nos jornais e se ouve no lar, nas ruas, no campo e por tôda a parte. Indispensável aos estudantes e professores.

—Rubian—

São Paulo Editora Ltda., Imprimta.

Preço dêste vol. Cr \$ 14,00