

Série 2^a LIVROS DIDÁTICOS Vol. 106
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

ARY QUINTELLA

MATEMÁTICA

2.º ANO

(De acôrdo com os últimos programas
de 16 de Julho de 1942).



COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

01/96

Z

MATEMÁTICA
SEGUNDO AÑO

GEMAT
DIGITALIZADO

Série 2.^a LIVROS DIDÁTICOS Vol. 106
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

ARY QUINTELLA

Professor do Colégio Militar



MATEMÁTICA

SEGUNDO ANO

(De acôrdo com os últimos programas de 16 de Julho de 1942).



5.^a EDIÇÃO

DO MESMO AUTOR

Matemática, 1.º ano — 7.ª edição.

Matemática, 3.º ano — 6.ª edição.

Matemática, 4.º ano — 4.ª edição.

EDIÇÕES DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

Exemplar Nº 2129 

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
São Paulo - Rio de Janeiro - Recife - Bahia - Pará - Pôrto Alegre
1945

PROGRAMA DA SEGUNDA SÉRIE

GEOMETRIA INTUITIVA

Unidade I — ÁREAS: 1. Área de uma figura plana; unidade de área. 2. As unidades legais brasileiras e as inglêsas mais usuais. 3. Áreas das principais figuras planas; fórmulas.

Unidade II — VOLUMES: 1. Noção de volume; unidade de volume. 2. As unidades legais brasileiras e as inglêsas mais usuais. 3. Volumes dos principais sólidos geométricos; fórmulas.

ARITIMÉTICA PRÁTICA

Unidade III — SISTEMA MÉTRICO: 1. Diferentes espécies de grandezas; medição direta e indireta. 2. Grandezas elementares unidades fundamentais; noção de grandeza composta. 3. Unidades legais de comprimento, área, volume, ângulo, tempo, velocidade, massa, densidade; múltiplos e submúltiplos.

Unidade IV — POTÊNCIAS E RAIZES: 1. Definições. 2. Operações com potências. 3. Quadrado da soma de dois números. 4. Potências das frações. 5. Regra prática para extração da raiz quadrada; aproximação no cálculo da raiz. 6. Uso de tábuas para obtenção do quadrado, do cubo, da raiz quadrada e da raiz cúbica dos números inteiros e decimais.

Unidade V — RAZÕES E PROPORÇÕES: 1. Razão de duas grandezas. 2. Proporções; médias. 3. Grandezas proporcionais.

Unidade VI — PROBLEMAS SÔBRE GRANDEZAS PROPORCIONAIS: 1. Divisão proporcional. 2. Regra de três. 3. Percentagem. 4. Juros simples.

ÍNDICE

Primeira Parte — Geometria Intuitiva

UNIDADE I — ÁREAS

	PÁG.
I. <i>Medida de uma superfície plana</i>	19
1) Unidades de superfície	19
2) Área	20
II. <i>Unidades legais brasileiras e inglêsas</i>	20
1) Unidades legais brasileiras	20
a) Relação entre as unidades	20
b) Mudança de unidade	22
c) Unidades agrárias	22
2) Unidades inglêsas mais usuais	23
Relações entre as unidades inglêsas	24
III. <i>Áreas das principais figuras planas; fórmulas</i>	24
1) Retângulo e quadrado	24
2) Triângulo	25
3) Trapézio	27
4) Paralelogramo	28
5) Círculo	29

UNIDADE II — VOLUMES

I. <i>Noção de volume</i>	35
1) Unidades de volume	35
2) Medida dos volumes	35
II. <i>Unidades legais brasileiras e inglêsas</i>	36
1) Unidades legais brasileiras	36
a) Relação entre as unidades	36
b) Mudança de unidade	37
2) Unidades inglêsas usuais	38
III. <i>Volume dos principais sólidos. Fórmulas</i>	39
1) Paralelepípedo e cubo	39
2) Prisma reto e cilindro	40
3) Pirâmide e cone	41

Segunda Parte — Aritmética Prática

UNIDADE III — SISTEMA MÉTRICO

	PÁG.
I. <i>Noções preliminares</i>	47
1) Diferentes espécies de grandeza	47
2) Objeto da medida das grandezas	47
3) Medição direta e indireta	48
4) Grandezas elementares	48
5) Unidades fundamentais	49
6) Grandezas compostas	50
7) Múltiplos e submúltiplos	50
II. <i>Comprimento</i>	51
1) Unidade legal	51
2) Múltiplos e submúltiplos usuais	52
3) Numeração	52
4) Mudança de unidade	53
5) Medidas efetivas e instrumentos de medir	54
III. <i>Área</i>	54
1) Unidade legal	54
2) Múltiplos e submúltiplos	54
3) Unidades agrárias	55
IV. <i>Volume</i>	55
1) Primeira unidade legal	55
a) Múltiplos e submúltiplos usuais	55
b) Observações	55
c) Volume aparente de lenha	56
2) Segunda unidade legal de volume. Volume de líquidos. Capacidade	57
a) Múltiplos e submúltiplos usuais	57
b) Mudança de unidade	57
c) Medidas efetivas	57
d) Correspondência entre as unidades de volume	57
V. <i>Ângulo plano</i>	58
1) Primeira unidade legal	58
a) Múltiplos e submúltiplos	59
b) Mudança de unidades	59
2) Segunda unidade legal	59
a) Múltiplos e submúltiplos	60
b) Mudança de unidade	60
c) Observação	60
d) Transformações nas medidas de ângulos	61
	62

	PÁG.
VI. <i>Tempo</i>	64
1) Unidade legal	64
a) Múltiplos e submúltiplos	64
b) Observações	64
c) Mudança de unidade	64
VII. <i>Velocidade</i>	67
1) Unidade legal	67
a) Múltiplos e submúltiplos usuais	67
b) Observações	67
c) Mudança de unidade	67
VIII. <i>Massa</i>	69
1) Unidade legal	69
a) Múltiplos e submúltiplos usuais	69
b) Mudança de unidade	70
c) Medidas efetivas	70
IX. <i>Densidade absoluta ou massa específica</i>	71
1) Unidade legal	71
a) Múltiplos e submúltiplos usuais	71
b) Observações	71
c) Densidade relativa	72
d) Mudança de unidade	72
e) Problemas	73

UNIDADE IV — POTÊNCIAS E RAIZES

I. <i>Potências</i>	79
1) Definições	79
2) Observações	80
3) Operações com potências	81
4) Multiplicação de potências da mesma base	81
5) Divisão de potências da mesma base	82
6) Potenciação de uma potência	83
7) Potenciação de um produto	84
8) Multiplicação e divisão de potências do mesmo grau	85
9) Potências das frações	86
a) Frações ordinárias	86
b) Números mistos	86
c) Frações e números decimais	86
10) Expressões	87
11) Quadrado da soma de dois números	88
II. <i>Raizes</i>	92
1) Definições	92
2) Raiz quadrada a menos de uma unidade	93

	PÁG.
3) Resto	95
4) Extração da raiz quadrada a menos de uma unidade	95
5) Determinação de uma raiz por decomposição em fatores	98
6) Prova	99
7) Raiz quadrada das frações ordinárias	100
8) Raízes aproximadas a menos de uma unidade fracionária	103
9) Raiz quadrada das frações e números decimais	104
10) Raiz aproximada	106
11) Tábua de potências e raízes	108

UNIDADE V — RAZÕES E PROPORÇÕES

I. Razão de duas grandezas	115
1) Medida de uma grandeza	115
2) Razão	116
3) Termos da razão	117
4) Propriedades das razões	117
II. Proporções. Médias	118
1) Proporção	118
2) Propriedade fundamental das proporções	119
3) Quarta proporcional	123
4) Proporção contínua. Média proporcional. Terceira	124
5) Média aritmética. Média harmônica	125
6) Propriedades das proporções	128
III. Grandezas proporcionais	137
1) Grandezas dependentes	137
2) Grandezas diretamente proporcionais	138
3) Números proporeionais	139
4) Aplicações	141
5) Grandezas inversamente proporcionais	143
6) Números inversamente proporcionais	143
7) Aplicações	145
8) Propriedade dos números proporcionais	146
9) Grandezas proporcionais a várias outras	147
10) Propriedade das grandezas proporcionais a várias outras	148

UNIDADE VI — PROBLEMAS SÔBRE GRANDEZAS PROPORCIONAIS

I. Divisão proporcional	155
1) Definição	155
2) Divisão em partes proporcionais	156

	PÁG.
3) Divisão em partes inversamente proporcionais	157
4) Aplicação. Regra de sociedade	158
II. Regra de três	162
1) Natureza dos problemas	162
2) Regra de três simples	162
3) Resolução das regras de três simples	163
4) Método de redução à unidade	164
5) Regra de três composta	165
III. Percentagem	171
1) Noção de percentagem. Definições	171
2) Cálculo da percentagem	172
3) Determinação do principal e da taxa	174
a) Determinação do principal	175
b) Determinação da taxa	175
IV. Juros simples	176
1) Definições	176
2) Juros simples e compostos	177
3) Cálculo de juros simples	177
4) Fórmula de juros simples	178
5) Problemas	179
a) Determinação do capital	180
b) Determinação do tempo	180
c) Determinação da taxa	181
6) Capital acumulado	182
7) Método do divisor fixo	184

PRIMEIRA PARTE

Geometria Intuitiva

UNIDADE I

Áreas

1. Área de uma figura plana; unidade de área.
2. As unidades legais brasileiras e as inglêsas mais usuais.
3. Áreas das principais figuras planas; fórmulas.

I. MEDIDA DE UMA SUPERFÍCIE PLANA

A medida de uma grandeza é o número que indica quantas vezes esta grandeza contém uma certa unidade. Assim, uma superfície qualquer pode ser medida escolhendo-se uma *unidade de superfície*, e verificando quantas vezes esta unidade fica contida na superfície dada.

1. Unidades de superfície.

Consideremos o segmento a (1 cm, fig. 1) como unidade de comprimento e construamos o quadrado u (fig. 1), cujo lado seja esta unidade de comprimento. Considera-se, então, a superfície desse quadrado como a unidade de superfície.

A unidade de superfície é, pois, um quadrado, cujo lado é a unidade de comprimento.

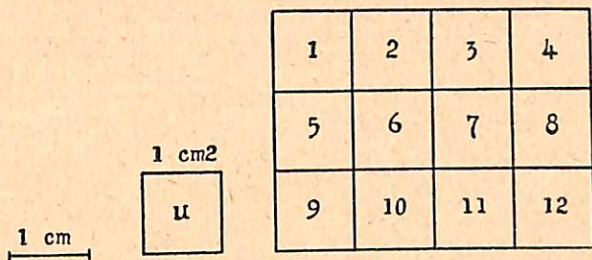


Fig. 1

Se a unidade de comprimento fôr *um metro*, a unidade de superfície será o quadrado, cujo lado tiver um metro, e que se denomina *metro quadrado*. Se a unidade de comprimento fôr uma *polegada*, a unidade de superfície será uma *polegada quadrada*. E assim por diante, podemos formar tantas unidades de superfície quantas forem as de comprimento. Na fig. 1, a unidade u é o *centímetro quadrado*.

2. Área.

O resultado da medida de uma superfície chama-se *área*.

O retângulo da figura 1 contém 12 vezes o quadrado u (unidade de superfície); assim, a área do retângulo, em relação à unidade u , é 12 u ; no caso, 12 centímetros quadrados.

Duas figuras que têm áreas iguais chamam-se equivalentes.

II. UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS
E INGLÊSAS

1. Unidades legais brasileiras.

A unidade legal de área é a área de um quadrado, cujo lado tem o comprimento de um metro. Essa unidade denomina-se *metro quadrado* e representa-se pelo símbolo m^2 .

Os múltiplos e submúltiplos do quadro abaixo são as outras unidades legais.

Nomes	Símbolos	Valores
quilômetro quadrado	km^2	1 000 000 m^2
hectômetro quadrado	hm^2	10 000 m^2
decâmetro quadrado	dam^2	100 m^2
metro quadrado	m^2	1 m^2
decímetro quadrado	dm^2	0,01 m^2
centímetro quadrado	cm^2	0,000 1 m^2
milímetro quadrado	mm^2	0,000 001 m^2

a) Relação entre as unidades

Se dividirmos a base e a altura de um quadrado em dez partes iguais e, pelos pontos de divisão, traçarmos paralelas aos lados, como mostra a figura 2, a superfície do quadrado ficará dividida em cem quadrados iguais.

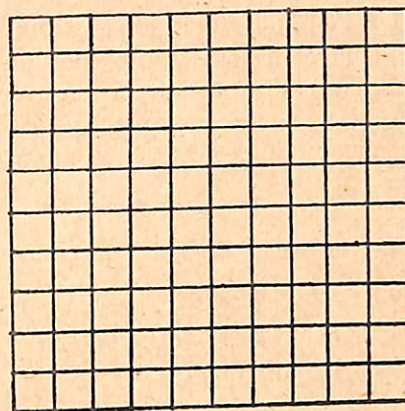


Fig. 2

Um quadrado contém cem quadrados cujo lado é a décima parte de seu lado.

Assim, conclui-se:

- O km^2 contém 100 hm^2 .
- O hm^2 contém 100 dam^2 .
- O dam^2 contém 100 m^2 .
- O m^2 contém 100 dm^2 .
- O dm^2 contém 100 cm^2 .
- O cm^2 contém 100 mm^2 .

A relação entre as unidades consecutivas de superfície é expressa pelo número 100; logo, são necessários dois algarismos para escrever cada um dos múltiplos e submúltiplos do metro quadrado, exceto o de ordem mais elevada que pode ser escrito com um ou dois algarismos. No quadro adiante, vêem-se reservadas duas ordens decimais para cada unidade de superfície.

km^2 00	hm^2 00	dam^2 00	m^2 00	dm^2 00	cm^2 00	mm^2 00
		2	53 7	7 8	9	

Para escrever os números referidos a uma certa unidade, é necessário preencher com zeros as ordens que correspondem às colunas em branco, colocar a vírgula na ordem que corresponde à unidade a que se quer referi-los e escrever, à direita, o símbolo da mesma unidade. O primeiro número do quadro

$$2 \text{ dam}^2 \text{ } 53 \text{ m}^2 \text{ e } 7 \text{ dm}^2,$$

expresso em m^2 , será escrito

$$253,07 \text{ m}^2.$$

O segundo, expresso em dm^2 , será

$$708,09 \text{ dm}^2.$$

b) Mudança de unidade

Para exprimir uma área em uma nova unidade dada, basta deslocar a vírgula 2, 4, 6... ordens, de modo a colocá-la na ordem correspondente à nova unidade.

Exemplos.

1.º Exprimir em dam^2 o número $253,07 \text{ m}^2$.

Deslocaremos a vírgula *duas* ordens para a esquerda, como esclarece o quadro anterior, e obteremos:

$$253,07 \text{ m}^2 = 2,5307 \text{ dam}^2.$$

2.º Exprimir o número $78,6 \text{ m}^2$ em cm^2 .

Deslocaremos a vírgula as duas ordens que correspondem ao dm^2 e as duas seguintes que correspondem ao cm^2 , isto é, *quatro* ordens para a direita, e obteremos:

$$78,6 \text{ m}^2 = 786 \text{ } 000 \text{ cm}^2.$$

3.º $0,002 \text{ } 14 \text{ hm}^2 = 21,4 \text{ m}^2 = 2 \text{ } 140 \text{ dm}^2$

c) Unidades agrárias

Nas medidas agrárias podem-se usar a denominação *are* e o símbolo *a*, para o decâmetro quadrado.

As unidades legais são:

Nomes	Símbolos	Valores
hectare	ha	10 000m ²
are	a	100m ²
centiare	ca	1m ²

EXERCÍCIOS

- Exprimir em m^2 : $4,351 \text{ hm}^2$, 247 dam^2 , $0,207 \text{ km}^2$, $32,406 \text{ ha}$.
R: $43 \text{ } 510 \text{ m}^2$, $24 \text{ } 700 \text{ m}^2$, $207 \text{ } 000 \text{ m}^2$, $324 \text{ } 060 \text{ m}^2$
- Exprimir em ares: 732 dm^2 , $47,000 \text{ } 7 \text{ hm}^2$, 281 m^2 , $5,207 \text{ hm}^2$.
R: $0,073 \text{ } 2 \text{ a}$, $4 \text{ } 700,07 \text{ a}$, $2,81 \text{ a}$, $520,7 \text{ a}$
- Exprimir em dam^2 : $5,38 \text{ m}^2$, $7,80 \text{ dm}^2$.
R: $0,538 \text{ dam}^2$, $0,000780 \text{ dam}^2$
- Efetuar a adição, dando o resultado em dam^2 : $4,07 \text{ hm}^2 + 487 \text{ m}^2 + 2,7 \text{ m}^2 + 325,07 \text{ dam}^2$.
R: $736,967 \text{ } 0 \text{ dam}^2$
- Efetuar as subtrações: $4,07 \text{ hm}^2 - 24 \text{ } 506 \text{ m}^2$; $327,07 \text{ dm}^2 - 3,264 \text{ } 1 \text{ m}^2$; $3 \text{ ha} - 28 \text{ } 270 \text{ m}^2$.
R: $1,619 \text{ } 4 \text{ hm}^2$; $0,66 \text{ dm}^2$; $17,3 \text{ a}$

2. Unidades inglesas mais usuais.

Denominação da unidade			Valor convertido em unidades legais
Em inglês	Em português	Abreviação inglesa	
1 square inch .	1 poleg. quadrada.	sq. in	6,451 6cm ²
1 square foot .	1 pé quadrado . .	sq. ft.	9,290 3dm ²
1 square yard .	1 jarda quadrada .	sq. yd.	0,836 126m ²
1 perch	—	—	25,293m ²
1 rood	—	—	10, 117a
1 acre	1 acre	A	0,404 68ha
1 square mile .	1 milha quadrada.	sq. mi.	259,00ha

A última coluna do quadro permite fazer a conversão das unidades inglesas em unidades legais.

Para reduzir a unidades legais a medida de uma área expressa no sistema inglês, basta multiplicar o número que mede a área pelo valor da unidade inglesa em unidades legais.

A conversão inversa faz-se por divisão.

Exemplos.

1.º Reduzir a unidades legais 3,5 sq. in.
A polegada quadrada vale 6,451 6 cm²; logo, temos:
 $3,5 \text{ sq. in.} = 6,451 6 \times 3,5 = 22,580 6 \text{ cm}^2.$

2.º Reduzir a sq. ft. 25,293 m².
O pé quadrado vale 0,092 903 m²; logo, temos:
 $25,293 \text{ m}^2 = (25,293 : 0,092 903) \text{ sq. ft.} = 272,25 \text{ sq. ft.}$

Relações entre as unidades inglesas.

$$1 \text{ sq. ft.} = 144 \text{ sq. in.}$$

$$1 \text{ sq. yd.} = 9 \text{ sq. ft.}$$

$$1 \text{ sq. mi.} = 640 \text{ A.} = 2 097 600 \text{ sq. yd.}$$

III. ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS. FÓRMULAS

1. Retângulo e quadrado.

Consideremos o retângulo da figura 3, de altura AB e comprimento AD , cujas medidas são, respectivamente, 3 e 4, sendo o segmento a , de 1 cm, tomado como unidade.

Dividamos a base e a altura em partes iguais à unidade a e, pelos pontos de divisão, tracemos paralelas aos lados. O retângulo fica, assim, dividido em quadrados de lado a , isto é, em centímetros quadrados.

A área do retângulo é o número de quadrados contidos em sua superfície. Ora, em cada fila há quatro quadrados; como são três filas, haverá ao todo 4×3 quadrados.

Podemos, então, concluir o princípio:

A área do retângulo é igual ao produto dos números que medem a base e a altura.

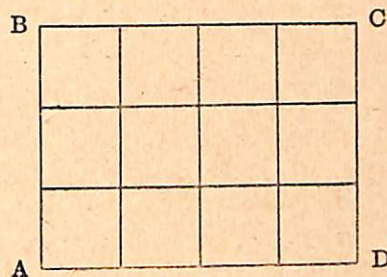


Fig. 3

Representando a área por S , a medida da base por b e a da altura por h , escrevemos, abreviadamente:

$$S = bh.$$

Esta igualdade, que traduz a regra para obter a área, chama-se uma *fórmula*, pela qual verificamos que a área *depende* da base e da altura.

Exemplo.

Calcular a área de um retângulo de 15 m de base e 20 m de altura.

Temos:

$$S = 15 \times 20 = 300.$$

R: A área é de 300 m².

O quadrado é um retângulo, cujas dimensões são iguais; logo, representando por l a medida do lado, a área será:

$$S = l^2.$$

2. Triângulo.

a) *Triângulo retângulo.* O triângulo BAC é a metade do retângulo $ABDC$ (Fig. 4). A sua área será a metade da do retângulo.

Temos, assim, a fórmula:

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{b}{2} \times h = b \times \frac{h}{2}$$

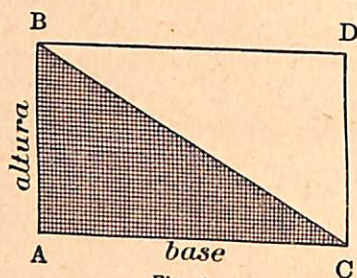


Fig. 4

b) *Triângulo qualquer.* A altura de um triângulo qualquer o decompõe na soma ou diferença de dois triângulos retângulos; o cálculo de sua área se fará somando ou subtraindo as áreas, como se vê nas figuras abaixo.

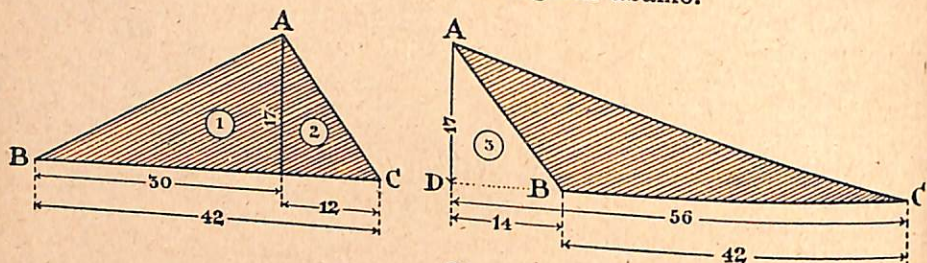


Fig. 5

Na figura da esquerda, o triângulo ABC é a soma dos triângulos retângulos 1 e 2. Calculando as áreas desses últimos pela fórmula, temos:

$$\text{triângulo (1): } 30 \times \frac{17}{2} = 30 \times 8,5 = 255$$

$$\text{triângulo (2): } 12 \times \frac{17}{2} = 12 \times 8,5 = 102$$

$$\text{A soma é a área do triângulo } ABC: (30+12) \times \frac{17}{2} = 42 \times 8,5 = 357$$

Observe-se que a área do triângulo é dada pelo produto $42 \times 8,5$, metade do produto da base 42 pela altura 17.

Na figura da direita, o triângulo ABC é a diferença dos triângulos retângulos ADC e ADB . Assim,

$$\text{triângulo } ADC: \quad 56 \times \frac{17}{2} = 56 \times 8,5 = 476$$

$$\text{triângulo (3):} \quad 14 \times \frac{17}{2} = 14 \times 8,5 = 119$$

$$\text{A diferença é a área do triâng. } ABC: (56-14) \times \frac{17}{2} = 42 \times 8,5 = 357$$

Verifica-se que a área do triângulo é dada, nos dois casos, pelo produto $42 \times 8,5$, metade do produto da base 42 pela altura 17.

Conclui-se o princípio:

A área de um triângulo qualquer é a metade do produto da base pela altura.

Fórmula:

$$S = \frac{bh}{2}$$

Exemplo.

Calcular a área de um triângulo, cuja base mede 122 cm e a altura 9,5 dm.

Reduzindo as duas medidas à mesma unidade e aplicando a fórmula, obteremos:

$$S = \frac{122 \times 95}{2} = 61 \times 95 = 5795. \text{ A área é de } 5795 \text{ cm}^2.$$

3. Trapézio.

O trapézio (fig. 6) se decompõe nos dois triângulos (1) e (2):

$$\text{triângulo (1): } 42 \times \frac{15}{2} = 42 \times 7,5 = 315$$

$$\text{triângulo (2): } 22 \times \frac{15}{2} = 22 \times 7,5 = 165$$

$$\text{A soma é a área do trapézio: } (42+22) \times \frac{15}{2} = \frac{(42+22) \times 15}{2} = 480$$

Verifica-se que a área do trapézio é dada pelo produto $\frac{(42 + 22) \times 15}{2}$, metade do produto da soma das bases $22 + 42$ pela altura 15. Conclui-se:

A área de um trapézio obtém-se, multiplicando a semi-soma das bases pela altura.

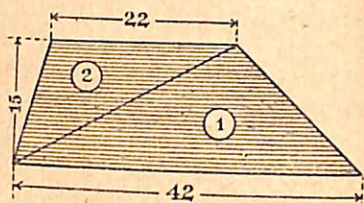


Fig. 6

Fórmula:

$$S = \frac{(B + b)h}{2}$$

Exemplo.

Calcular a área de um trapézio, cuja altura tem 3 cm e as bases respectivamente 1,5 cm e 2,5 cm. Aplicando a fórmula, temos:

$$S = \frac{(1,5 + 2,5) \times 3}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

A área tem 6 cm².

4. Paralelogramo.

O paralelogramo pode ser considerado como um trapézio de bases iguais. A soma das bases é igual ao dobro de uma das bases e a semi-soma é igual a uma base.

Assim:

A área do paralelogramo obtém-se, multiplicando a base pela altura.

Fórmula:

$$S = bh$$

Exemplo.

Calcular a área de um paralelogramo, cuja base mede 8,5 dm e a altura 3,6 dm.

Aplicando a fórmula, temos:

$$S = 8,5 \times 3,6 = 30,6;$$

resulta:

$$S = 30,60 \text{ dm}^2.$$

5. Círculo.

Cortado um círculo em papel, dobremos o mesmo, sucessivamente, em 2, 4, 8, 16... partes, como mostra a fig. 7.

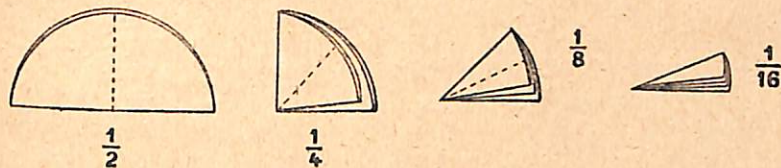


Fig. 7

Considerando a última divisão, o arco correspondente a uma das partes será a décima sexta parte da circunferência, isto é,

$$\frac{C}{16} \text{ ou } \frac{2\pi r}{16}$$

Cada parte é aproximadamente um triângulo, tendo por base este arco e por altura o raio; considerando assim, a área de uma parte será o produto do raio pela metade do arco:

$$r \times \frac{\pi r}{16} \text{ ou } \frac{\pi r^2}{16}$$

Como o círculo contém 16 dessas partes, sua área será 16 vezes maior; logo, temos:

$$S = 16 \times \frac{\pi r^2}{16}$$

Simplificando o fator 16, resulta a fórmula:

$$S = \pi r^2$$

Observemos que, se continuássemos a dobrar em 32, 64 etc. partes, mais estas partes se aproximariam de um triângulo.

Exemplo.

A área de um círculo de 0,5 m de raio será:

$$S = 3,14 (0,5)^2 = 3,14 \times 0,25 = 0,785$$

ou $S = 0,785 \text{ m}^2$.

EXERCÍCIOS

1. Calcular a área de um triângulo, cuja base é a metade da altura, tendo esta 0,8 m.
R: 0,16 m²
2. Calcular a área de um trapézio, cujas bases medem respectivamente 5,8 dm e 49,5 cm e a altura 35 cm.
R: 18,812 5 dm²
3. Calcular a área de um retângulo, cuja base tem 0,4 m e a altura 0,43 m.
R: 0,172 0 m²
4. Calcular a área de um círculo de 3 m de raio.
R: 28,26 m²
5. Calcular a área de um retângulo, cujo perímetro mede 16,8 m, e a altura 3,7 m.
R: 17,39 m²
6. Calcular a área de um círculo, cujo raio tem 2,4 cm.
R: 18,086 4 cm²
7. Sendo a área de um paralelogramo 210 m² e medindo a base 10,5 m, calcular a altura.
R: 20 m
8. Um campo tem a forma de um trapézio e sua área é de 2,7 ha. A altura do trapézio é de 216 m e a base menor 47,40 m. Determinar a soma das bases e a base maior.
R: 250 m; 202,60 m
9. Calcular a área do terreno quadriculado na planta abaixo e avaliar o valor a 25 mil cruzeiros o ha. As medidas indicadas têm para unidade o metro.
R: 10 800 m²; 27 mil cruzeiros

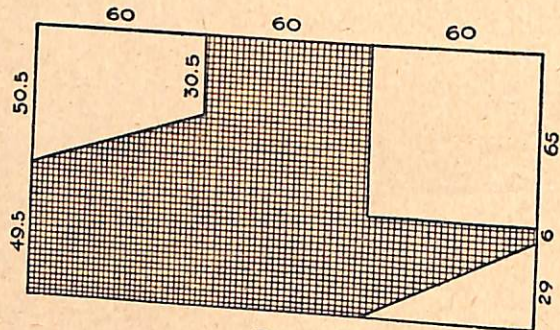


Fig. 8

10. A chapa de zinco é comprada a Cr \$ 12,00 o m². Um comerciante importa 1 000 chapas de 2 yd. de largura e 4 yd. 2 ft. de comprimento. Quanto deve pagar?
R: Cr \$ 93 646,224

11. Uma sociedade adquire uma fazenda de 5,28 ha para fazer um loteamento. O arruamento diminui a área da propriedade de 53 a. O resto é dividido em 125 lotes iguais. A sociedade vende os lotes a Cr \$ 85,00 o m². Determinar, em m², a área de cada lote, o preço do lote e a quantia apurada pela sociedade.
R: 380 m²; Cr \$ 32 300,00; Cr \$ 4 037 500,00

12. A cobertura de um hangar é formada de dois trapézios iguais e de dois triângulos iguais. As bases dos trapézios têm, respectivamente, 13 m e 7 m; a base dos triângulos tem 6 m. Os trapézios e os triângulos têm a mesma altura de 3,5 m. Na cobertura são utilizadas chapas de zinco, pagas ao preço de Cr. \$ 13,00 o m², incluindo o transporte. No cálculo acrescenta-se um décimo da área total para as juntas e outras perdas. Calcular a despesa.
R: Cr \$ 1 301,30

13. O comprimento de uma circunferência é de 18,84 m. Calcular a área do círculo.
R: 28,26 m².

14. Calcular a área de um trapézio isósceles cujo perímetro é de 41 m, sabendo-se que os lados têm 7,5 m, a base menor 8 m, os ângulos obtusos 135° e os agudos 45°.
R: 65 m².

15. Calcular a área de um triângulo, cuja base é o dobro da altura e a soma das duas dimensões 24 m.
R: 64 m².

16. O lado de um quadrado tem 3 dam. Calcular a altura de um retângulo equivalente, cuja base tenha 18 m.
R: 50 m.

17. Uma praça retangular tem 50 m de comprimento e 30 m de largura. Quer-se construir um abrigo quadrado que ocupe 1/60 da área da praça. Qual a medida do lado do abrigo?
R: 5 m.

18. A base de um retângulo é o triplo da altura e o perímetro mede 4 dam. Calcular a área, em m².
R: 75 m².

UNIDADE II

Volumes

1. Noção de volume; unidade de volume.
2. As unidades legais brasileiras e as inglesas mais usuais.
3. Volumes dos principais sólidos geométricos; fórmulas.

I. NOÇÃO DE VOLUME

1. Unidades de volume.

Consideremos o segmento a da figura 9, e construamos o cubo u (fig. 9), cuja aresta seja aquela unidade de comprimento.

Considera-se, então, o volume do cubo u como unidade de volume.

A unidade de volume é, pois, um cubo, cuja aresta é a unidade de comprimento.

Se a unidade de comprimento fôr um metro, a unidade de volume será o cubo, cuja aresta tiver um metro de comprimento e que se denomina *metro cúbico*. Se a unidade de comprimento fôr o centímetro, a unidade de volume será o *centímetro cúbico*.

Na figura 9, a é a unidade de comprimento e u , a de volume.

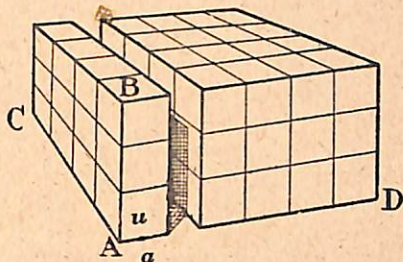


Fig. 9

2. Medida dos volumes.

Para medir um volume, podemos escolher uma *unidade de volume* e verificar quantas vezes esta unidade fica contida no volume dado.

Consideremos o paralelepípedo retângulo da figura 9, de altura AB , comprimento AD e largura AC , cujas medidas são, respectivamente, expressas pelos números 3, 4 e 5, sendo a , a unidade de comprimento.

Dividamos as três dimensões em partes iguais à unidade a , e, pelos pontos de divisão, tracemos planos paralelos às faces, como indica a figura. O paralelepípedo fica dessa forma dividido em cubos, cuja aresta a é a unidade de comprimento.

O volume do paralelepípedo será o número de cubos iguais a u que êle contiver. O sólido fica decomposto em 5 camadas verticais, contendo cada uma 4 filas de 3 cubos. Assim, em cada camada haverá 12 cubos; como são 5 camadas, o número total de cubos contidos no corpo será dado pelo produto

$$12 \times 5 \text{ ou } 3 \times 4 \times 5,$$

e o volume será de 60 centímetros cúbicos.

Conclui-se o princípio:

A medida do volume do paralelepípedo é o produto dos números que medem suas três dimensões.

II. UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS E INGLÊSAS

1. Unidades legais brasileiras.

Unidade legal de volume é o volume de um cubo, cuja aresta tem o comprimento de um metro. Essa unidade denomina-se metro cúbico e representa-se pelo símbolo m^3 .

Os múltiplos e submúltiplos do quadro abaixo são as outras unidades legais.

Nomes	Símbolos	Valores
quilômetro cúbico	km^3	1 000 000 000 m^3
metro cúbico	m^3	$1m^3$
decímetro cúbico	dm^3	0,001 m^3
centímetro cúbico	cm^3	0,000 001 m^3
milímetro cúbico	mm^3	0,000 000 001 m^3

a) Relação entre as unidades

Se dividirmos as três arestas que concorrem no mesmo vértice de um cubo em 10 partes iguais, e traçarmos, pelos pontos de divisão, planos paralelos às faces, de modo análogo ao da fig. 9, o cubo ficará dividido em mil cubos iguais.

Assim, um cubo contém mil cubos, cuja aresta é a décima parte da sua.

Conclui-se: $1 m^3$ contém 1 000 dm^3 ;

$1 dm^3$ contém 1 000 cm^3 ; etc.

São necessários três algarismos para escrever cada um dos múltiplos e submúltiplos do metro cúbico, exceto a unidade de ordem mais elevada, que pode ser expressa com um, dois ou três, como se vê no quadro abaixo.

km^3	m^3		dm^3			cm^3		mm^3
	2	8	1	2	5	8	3	
		5			6			

Para escrever os números referidos a uma certa unidade, é necessário preencher com zeros as ordens que correspondem às colunas em branco, colocar a vírgula na ordem que corresponde à unidade a que se quer referir-los e escrever à direita o símbolo da mesma unidade. Os números do quadro acima, expressos em metros cúbicos serão escritos:

8, 125 m^3

25,006 083 m^3 .

Para ler, enuncia-se a unidade adotada e a menor. Assim, o segundo dos números acima lê-se:

25 metros cúbicos e 6 083 centímetros cúbicos.

b) Mudança de unidade

Para mudar a unidade de um número que exprime um volume, basta deslocar a vírgula 3, 6, 9 ordens para a direita ou para a esquerda, o que corresponde a multiplicá-lo ou dividi-lo por 1 000, 1 000 000, etc.

Exemplos.

1.º Expressar em dm^3 o número $2,7 \text{ m}^3$. Deslocamos a vírgula três ordens para a direita:

$$2,7 \text{ m}^3 = 2\,700 \text{ dm}^3.$$

2.º Expressar em m^3 o número 25 dm^3 . Deslocando a vírgula três ordens para a esquerda, obtemos:

$$25 \text{ dm}^3 = 0,025 \text{ m}^3.$$

EXERCÍCIOS

Escrever os seguintes números, tomando como unidade o m^3 :

1. $25\,387 \text{ dm}^3$ R: $25,387 \text{ m}^3$ 2. $2\,845 \text{ cm}^3$ R: $0,002\,845 \text{ m}^3$
 3. 46 dm^3 R: $0,046 \text{ m}^3$ 4. $5,48 \text{ dam}^3$ R: $5\,480 \text{ m}^3$
 5. 973 dm^3 R: $0,973 \text{ m}^3$ 6. $2\,000\,347 \text{ cm}^3$ R: $2,000\,347 \text{ m}^3$

Efetuar as operações, dando o resultado em m^3 :

7. $283 \text{ dm}^3 + 59\,347 \text{ cm}^3 + 2 \text{ m}^3 + 54,47 \text{ dm}^3$ R: $2,396\,817 \text{ m}^3$
 8. $28 \text{ dam}^3 - 98,4 \text{ m}^3$ R: $27\,901,600 \text{ m}^3$
 9. $28,45 \text{ dm}^3 \times 41,1$ R: $1.169\,295 \text{ m}^3$
 10. $283,8 \text{ dam}^3 : 4,8$ R: $59\,125 \text{ m}^3$

2. Unidades inglêsas mais usuais.

Denominação da unidade			Valor convertido em unidades legais
Em inglês	Em português	Abreviação inglesa	
1 cubic inch.	1 polegada cúbica.	cu. in.	16.387 cm^3 0,028 317 m^3 0,764 553 m^3
1 cubic foot.	1 pé cúbico	cu. ft.	
1 cubic yard.	1 jarda cúbica	cu. yd.	

Para converter as unidades inglêsas em unidades legais, ou reciprocamente, utiliza-se a última coluna do quadro.

Exemplo.

Reduzir a metros cúbicos $1,5 \text{ cu. ft.}$

Um pé cúbico vale $0,028\,317 \text{ m}^3$; logo, temos:

$$1,5 \text{ cu. ft.} = (0,028\,317 \times 1,5) \text{ m}^3 = 0,042\,475 \text{ m}^3.$$

Relações entre as unidades inglêsas

Assim como mostramos que o metro cúbico contém *mil* decímetros cúbicos, isto é, o cubo do número que exprime a relação entre o metro e o decímetro, da mesma forma poderíamos verificar as relações:

$$1 \text{ pé cúbico (cu. in.)} = 1\,728 \text{ polegadas cúbicas (cu. ft.)}$$

$$1 \text{ jarda cúbica (cu. yd.)} = 27 \text{ pés cúbicos (cu. ft.)}$$

EXERCÍCIOS

Expressar em m^3 o volume de 3 cu. yd. 19 cu. ft.

Reduzindo a medida a pés cúbicos, temos:

$$3 \text{ cu. yd.} \quad 19 \text{ cu. ft.} = (3 \times 27 + 19) \text{ cu. ft.} = 100 \text{ cu. ft.}$$

Multiplicando este resultado pelo valor de um pé cúbico em metros cúbicos (quadro anterior), temos:

$$100 \text{ cu. ft.} = (100 \times 0,028\,317) \text{ m}^3 = 2,831\,7 \text{ m}^3.$$

**III. VOLUMES DOS PRINCIPAIS SÓLIDOS.
FÓRMULAS****1. Paralelepípedo e cubo.**

Vimos no n.º I que o volume do paralelepípedo se obtém multiplicando os números que medem suas três dimensões.

Se representarmos as três dimensões, respectivamente, por a , b , c , obteremos a fórmula:

$$V = abc$$

No caso particular do cubo as três dimensões são iguais, e a fórmula será:

$$V = a^3$$

Como o produto ab exprime a área da base do paralelepípedo, a fórmula pode também ser escrita:

$$V = Bh,$$

onde B representa a área da base e h , a altura.

Exemplo.

Calcular o volume de um paralelepípedo, cuja base tem $9,5 \text{ m}^2$ de área e a altura $2,5 \text{ dm}$. Aplicando a última fórmula e reduzindo previamente as medidas à mesma unidade, temos:

$$V = 9,5 \times 0,25 = 2,375, \text{ logo,}$$

$$V = 2,375 \text{ m}^3.$$

Observação. Quando o paralelepípedo é oblíquo, obtém-se o volume, multiplicando a área da base pela altura.

2. Prisma reto e cilindro.

Suponhamos um prisma reto ou um cilindro, cuja base tenha 10 cm^2 e a altura 3 cm .

Se, sobre cada centímetro quadrado, construirmos um paralelepípedo de altura igual à do prisma, como indica a figura 10, o volume de cada paralelepípedo será:

$$1 \times 3 = 3, \text{ isto é, } 3 \text{ cm}^3.$$

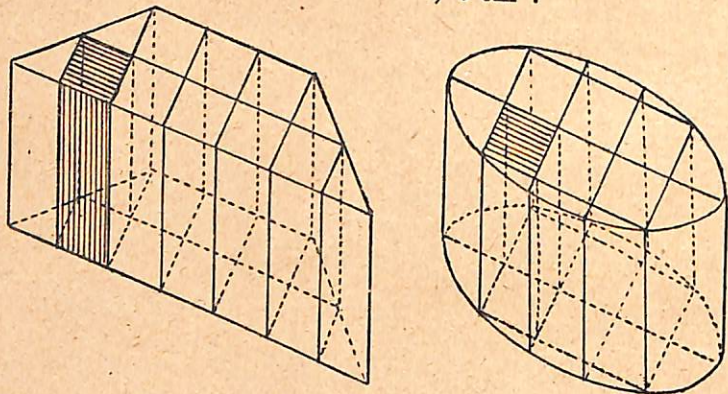


Fig. 10

Como são 10 os paralelepípedos construídos, o volume será:

$$10 \times 3 = 30 \text{ cm}^3;$$

conclui-se o princípio:

O volume de um prisma ou de um cilindro obtém-se, multiplicando a área da base pela altura.

Fórmula

$$V = B \cdot h$$

Observação. Como a base do cilindro é um círculo, a área da base será πr^2 e a fórmula pode ser escrita:

$$V = \pi r^2 h.$$

Exemplo.

Calcular o volume de um cilindro, cujo raio tem 5 cm e a altura 25 cm .

Aplicando a última fórmula:

$$V = 3,14 \times 5^2 \times 25 = 78,5 \times 25$$

ou

$$V = 1\,962,500 \text{ cm}^3.$$

3. Pirâmide e cone.

Verifica-se, experimentalmente, que o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume do prisma da mesma base e da mesma altura, e que o volume do cone é a terça parte do volume do cilindro da mesma base e da mesma altura. Concluem-se então as fórmulas:

Volume da pirâmide:

$$V = \frac{Bh}{3}$$

Volume do cone:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Exemplo.

Calcular o volume de uma pirâmide que tem por base um quadrado de $0,25 \text{ m}$ de lado e por altura $0,66 \text{ m}$.

O volume será, em decímetros cúbicos:

$$V = \frac{(2,5)^2 \times 6,6}{3} = \frac{6,25 \times 6,6}{3} = 13,750 \text{ dm}^3.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular o volume de um cilindro de 4,6 dm de diâmetro e 35 cm de altura.
R: 58,137 1 dm³
2. Calcular o volume de um prisma, cuja base é um quadrado de 2,1 dm de lado e cuja altura é igual ao perímetro da base.
R: 37,044 dm³
3. Calcular o volume de um prisma de 1,2 dm de altura, cuja base é um retângulo de 0,3 m de comprimento e 36 cm de largura.
R: 12,96 dm³
4. Calcular o volume de um cone de 3 dm de altura e 0,4 m de raio.
R: 50,24 dm³
5. Calcular o volume de um cone, cuja circunferência da base mede 25,12 dm e cuja altura mede 15 m.
R: 2,512 m³
6. O volume de um cone vale 314,16 m³ e a área da base 78,54 m². Calcular a altura.
R: 12 m
7. Calcular o volume de uma pirâmide de 4 m de altura, cuja base é um losango de 20 dm de altura e 20 m de perímetro.
R: 13,333 m³
8. Calcular o volume de um cilindro, cujo raio da base tem 2 dm e a altura 4 dm.
R: 50,240 dm³
9. Calcular o volume de um prisma quadrangular regular, cuja altura é igual ao lado da base e o perímetro desta mede 16 m.
R: 64 m³
10. Calcular o volume de um cilindro de 5 dm de raio, cuja altura tem a mesma medida do diâmetro da base.
R: 7 85 dm³
11. Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, cuja altura é o dobro do comprimento e este o triplo da largura, sabendo que a soma das três dimensões é 30 dm.
R: 486 dm³
12. Uma pirâmide triangular tem 5 dm de altura. A altura do triângulo é o dobro da base e medem juntas 18 dm. Calcular o volume da pirâmide.
R: 60 dm³
13. A altura de um paralelepípedo mede 2/3 do comprimento e este 3/5 da largura. As três dimensões medem juntas 30 m. Calcular o volume.
R: 810 m³
14. Uma estrada de 3 km de comprimento e 6 m de largura é coberta de pedra britada numa espessura de 5 cm. Sendo Cr \$ 25,00 o custo do m³ de pedra, qual a despesa de material da pavimentação?
R: Cr. \$ 22 500,00
15. Um terreno retangular de 0,42 ha tem 105 m de comprimento. Qual o volume da alvenaria empregada para cercá-lo com um muro de 1,5 m de altura e 10 cm de largura?
R: 43,500 m³

SEGUNDA PARTE

Aritmética Prática

UNIDADE III

Sistema Métrico

1. Diferentes espécies de grandeza; medição direta e indireta.
2. Grandezas elementares; unidades fundamentais.
3. Noção de grandeza composta.
4. Unidades legais de comprimento, área, volume, ângulo, tempo, velocidade, massa, densidade; múltiplos e submúltiplos.

I. NOÇÕES PRELIMINARES

1. Diferentes espécies de grandeza.

Todos nós temos a noção de grandeza.

Uma grandeza pode sofrer modificações, passando por vários estados sucessivos. Assim, a distância entre os dois pontos fixos A e B da figura ao lado, é um estado da grandeza comprimento.



Aos diferentes estados de uma grandeza, denominamos também, *quantidades*.

As grandezas chamadas científicas são as *geométricas* e as *físicas*.

São *grandezas geométricas*: o comprimento, o ângulo, a área, o volume.

São *grandezas físicas*: o tempo, a massa, a velocidade, a força, a temperatura, a pressão, a densidade, a quantidade de calor, etc.

“É” comum empregar a palavra grandeza para designar um estado de uma certa grandeza; assim, quando dizemos *duas grandezas da mesma espécie*, queremos dizer *dois estados, dois valores da mesma grandeza.*” (1)

2. Objeto da medida das grandezas.

Consideremos o segmento a e apliquêmo-lo sobre uma reta um certo número de vezes, três por exemplo, obteremos, assim, o segmento AB (Fig. 11).

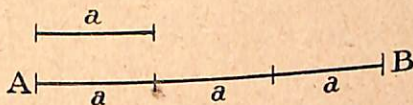


Fig. 11

(1) Euclides Roxo - *Unidades e Medidas*.

AB é a soma de três parcelas iguais a a , por conseguinte, é o produto de a por 3. Escrevemos:

$$AB = 3a.$$

O número 3 traduz como se pode formar o segmento AB ou o estado AB da grandeza *comprimento*, a partir do estado a .

O estado a , escolhido para formar os outros estados da grandeza, chama-se *unidade*.

O número, que traduz a lei de formação de um segundo estado, a partir da unidade escolhida, chama-se *medida* desse segundo estado. Assim, para medir uma grandeza, escolheremos um certo estado, ao qual damos o nome de *unidade*, e representaremos por números os resultados de sua comparação com os outros estados. Podemos, pois, dizer que a medida das grandezas tem por objeto estabelecer uma correspondência entre os seus diferentes estados e os números, de modo que a cada estado distinto corresponda um número e a cada número, um estado da grandeza (1).

3. Medição direta e indireta.

No caso da grandeza *comprimento* podemos comparar diretamente os diferentes estados com a unidade, como por exemplo, o segmento AB , que contém três vezes a unidade a . Neste caso, diremos ter feito uma *medição direta*.

Já no caso da grandeza *área* não procedemos da mesma forma. Realmente, como vimos na unidade I, para estabelecer a comparação com o quadrado que serve de unidade, multiplicamos os números que medem a base e a altura. Neste caso diremos que a *medição é indireta*.

4. Grandezas elementares.

Para estabelecer um *sistema de medidas*, escolhemos algumas grandezas para delas derivar as demais.

As grandezas escolhidas são denominadas *elementares*.

As grandezas elementares são: o *comprimento*, a *massa* e o *tempo*.

(1) Sebastião Sodré da Gama - *Elementos de Algebra* - 1.º fascículo.

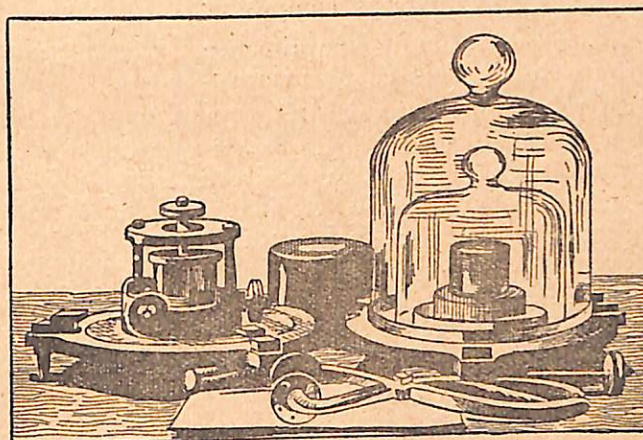
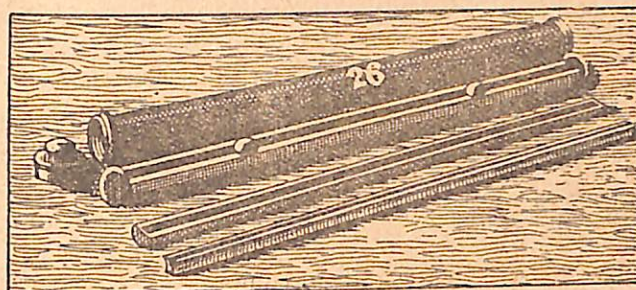


Fig. 12
Padrões do metro e do quilograma, com suas respectivas embalagens, (do Pavilhão de Breteuil)

5. Unidades fundamentais.

As unidades escolhidas para fazer a medição das grandezas elementares são denominadas *unidades fundamentais*.

As unidades fundamentais usadas no Brasil, em virtude de lei, são:

- o *metro* — para o comprimento;
- o *quilograma* — para a massa;
- o *segundo* — para o tempo.

Destas unidades, as duas primeiras são representadas por padrões fixos ou protótipos internacionais, aos quais é assegurada a mais perfeita inalterabilidade por meio de uma embalagem adequada como mostra a fotografia da figura 12.

A construção dos padrões exige uma técnica de precisão regulada por lei.

6. Grandezas compostas.

Uma grandeza diz-se *composta*, quando se deriva das grandezas elementares, ou de outras compostas.

Exemplos de grandezas compostas:

- a *área*, derivada do comprimento, e que se define como produto de dois comprimentos;
- b) o *volume*, produto de três comprimentos;
- c) a *velocidade*, derivada do comprimento e do tempo, e que se define como quociente da divisão do comprimento pelo tempo; a velocidade é o comprimento percorrido por um móvel durante um certo tempo, tomado como unidade;
- d) a *densidade absoluta* ou *massa específica*, derivada da massa e do volume, e que se define como quociente da massa pelo volume; é a massa da unidade de volume de um corpo.

Para cada uma das grandezas compostas fixa-se uma *unidade*, derivada das unidades fundamentais. Toma-se, por exemplo, para unidade de velocidade, a velocidade de um móvel que percorre *um metro* durante *um segundo*.

Da mesma forma, a unidade de densidade é a densidade absoluta de um corpo, no qual *um centímetro cúbico* tem a massa de *um grama*.

7. Múltiplos e submúltiplos.

Além das unidades fixadas anteriormente, que podemos chamar principais, outras unidades são obtidas formando múltiplos e submúltiplos.

Os múltiplos e submúltiplos são designados, antepondo-se ao nome da unidade principal os prefixos do quadro seguinte.

QUADRO DAS DESIGNAÇÕES DOS MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS DECIMAIS DAS UNIDADES LEGAIS DE MEDIDA

Fator pelo qual é multiplicada a unidade	Prefixo a antepor ao nome da unidade	Símbolo a antepor ao da unidade
1 000 000	mega	M
100 000	hectoquilo	hk
10 000	miria	ma
1 000	quilo	k
100	hecto	h
10	deca	da
0,1	deci	d
0,01	centi	c
0,001	mili	m
0,000 1	decimili	dm
0,000 01	centimili	cm
0,000 001	micro	μ
0,000 000 1	decimicro	d μ
0,000 000 01	centimicro	c μ
0,000 000 001	milimicro	m μ
0,000 000 000 001	micromicro	$\mu\mu$

Observação. O emprêgo das designações do quadro acima limita-se, de acôrdo com a lei do sistema métrico, aos casos indicados no estudo que faremos sôbre as diversas unidades legais.

Assim, não podemos formar o múltiplo *megâmetro* ou *hectoquilômetro* para a medida do comprimento.

II. COMPRIMENTO

1. Unidade legal.

E' o *metro*, que é a distância, à temperatura de zero graus, dos eixos dos dois traços médios sôbre a barra de platina iridiada, depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas (fig. 12).

2. Múltiplos e submúltiplos usuais.

São unidades secundárias, formadas a partir do metro e do micron por meio dos prefixos: *deca* (significa dez), *hecto* (cem), *quilo* (mil), *deci* (décimo), *centi* (centésimo), *mili* (milésimo).

Eis o quadro dessas unidades:

Nomes	Símbolos	Valores
quilômetro.	km	1 000 m
hectômetro	hm	100 m
decâmetro.	dam	10 m
metro.	m	1 m
decímetro.	dm	0,1 m
centímetro.	cm	0,01 m
milímetro.	mm	0,001 m
micron	μ	
milimicron.	m μ	
decimicron.	dm μ	
micronmicron	$\mu\mu$	

3. Numeração.

As diferentes unidades de comprimento, variando na razão décupla, são sujeitas às regras da numeração decimal. Assim, lê-se e escreve-se um número que exprime uma medida de comprimento, de modo idêntico ao que se faz com os números decimais.

Os números seguintes

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
2	5 2	3 8 3	8 1	7 4	4	2

cujos algarismos correspondem às unidades abreviadas acima dos mesmos, escrevem-se:

38,742 m
2 580 m
231,4 m

e lêem-se:

38 metros e 742 milímetros
2 580 metros
231 metros e 4 decímetros.

4. Mudança de unidade.

Podemos colocar a vírgula entre dois algarismos quaisquer, tendo o cuidado de indicar o símbolo do múltiplo adotado como unidade. Assim, a primeira das medidas acima consideradas pode ser escrita de diversos modos:

$$38,742 \text{ m} = 387,42 \text{ dm} = 3,874 2 \text{ dam} = 38 742 \text{ mm} = 0,038 742 \text{ km}.$$

A mudança de unidade corresponde, pois, a um deslocamento da vírgula.

Exemplo.

Para converter 2 587,4 m a quilômetros, recuaremos a vírgula três ordens para a esquerda, colocando-a à direita do algarismo 2, que exprime quilômetros. Temos assim:

$$2,587 4 \text{ km}.$$

Observação. Para adicionar ou subtrair duas medidas é necessário convertê-las à mesma unidade.

EXERCÍCIOS

1. Expressar em quilômetros: 13 800 m, 24,85 dam, 1 587 dm, 875 m.
R: 13,8 km, 0,248 5 km, 0,158 7 km, 0,875 km
2. Expressar em metros: 0,45 km, 15,750 hm, 2,207 dam, 285,7 cm.
R: 450 m, 1 575 m, 22,07 m, 2,857 m
3. Expressar em decímetros: 7 hm, 3,008 cm, 19,7 mm, 2,38 km.
R: 7 000 dm, 0,8003 dm, 0,197 dm, 23 800 dm

4. Converter em dam e adicionar: 38,45 hm, 385,5 m, 4 275 dm.
R: 465,80 dam
5. Efetuar as subtrações e dar os resultados em metros: 9,857 hm — 785,9 dm; 48,5 cm — 2,86 dm; 98,29 km — 756,4 hm.
R: 907,11 m, 0,199 m, 22 650 m
6. Multiplicar 28,85 dm por 165 e dar o resultado em hectômetros e em metros.
R: 4,760 25 hm e 476,025 m

5. Medidas efetivas e instrumentos de medir.

Chamamos medidas efetivas as que correspondem a instrumentos construídos para uso do comércio, indústria, etc. Empregam-se usualmente as seguintes:

o *decâmetro* e o *duplo-decâmetro* — construídos em cadeias metálicas utilizadas pelos agrimensores;

o *metro* e o *duplo-metro* — construídos em madeira, fita metálica ou fita de pano;

o *duplodecímetro* e o *decímetro* — em madeira, metal^l celulósido, utilizados no desenho linear.

III. ÁREA

1. Unidade legal.

E' o *metro quadrado*, que se define como sendo a área de um quadrado, cujo lado tem o comprimento de um metro.

2. Múltiplos e submúltiplos.

Nomes	Símbolos	Valores
quilômetro quadrado	km ²	1 000 000m ²
hectômetro quadrado	hm ²	10 000m ²
decâmetro quadrado	dam ²	100m ²
<i>metro quadrado</i>	m ²	1m ²
decímetro quadrado	dm ²	0,01m ²
centímetro quadrado	cm ²	0,000 1m ²
milímetro quadrado	mm ²	0,000 001m ²

3. Unidades agrárias.

Nas unidades agrárias podem-se usar a denominação *are* e o símbolo *a*, para o decâmetro quadrado. As unidades legais são:

Nomes	Símbolos	Valores
hectare	ha	10 000m ²
are	a	100m ²
centiare	ca	1m ²

Os demais conhecimentos, sôbre as unidades de superfície, encontram-se na unidade I.

IV. VOLUME

1. Primeira unidade legal.

E' o *metro cúbico*, que se define como sendo o volume de um cubo, cuja aresta tem o comprimento de um metro.

a) Múltiplos e submúltiplos usuais

Nomes	Símbolos	Valores
quilômetro cúbico	km ³	1 000 000 000m ³
metro cúbico	m ³	1m ³
decímetro cúbico	dm ³	0,001m ³
centímetro cúbico	cm ³	0,000 001m ³
milímetro cúbico	mm ³	0,000 000 001m ³

b) Observações

1.ª Outras unidades de volume podem ser obtidas substituindo-se no nome, na definição e no símbolo do quadro

acima, o metro por qualquer unidade legal de comprimento. Assim, podemos considerar o *decâmetro cúbico* e outras unidades.

2.ª Os outros conhecimentos sobre a primeira unidade legal de volume, encontram-se na unidade II.

c) Volume aparente de lenha

O metro cúbico, quando utilizado na medida do volume aparente da lenha, pode ser denominado *estéreo*, cujo símbolo é *st*.

Os múltiplos e submúltiplos decimais do estéreo são:

Nomes	Simbolos	Valores
decaestéreo	dast	10m ³
estéreo	st	1m ³
decistério	dst	0,1m ³

EXERCÍCIOS

Reduzir a m³:

1. 973 dst R: 97,3m³ 2. 5,48 dast R: 54,800m³

Efetuar as operações e dar os resultados em m³:

3. 28 dast — 98,4 st R: 181,6m³ 4. 283,8 dast : 4,8 R: 591,25m³

Resolver os problemas:

5. Um fazendeiro corta lenha em tocos de 1,50 m e os empilha em lotes de 2m de comprimento e 1,25 m de altura. Vende cada lote por Cr \$ 180,00. Quanto recebe por st? R: Cr \$ 48,00

6. Um comerciante compra um lote de lenha de 3,5 m de comprimento, 0,7 m de largura e 2,25 m de altura à razão de Cr \$ 8,00 o dst. Quanto pagou pelo lote? Pretendendo vender a Cr \$ 160,00 o st, qual o lucro provável? R: Cr \$ 441,00; Cr \$ 441,00

2. Segunda unidade legal de volume.

É o *litro*, volume de 1 quilograma de água destilada à temperatura de 4° C e sob a pressão atmosférica normal.

O volume de um litro é aproximadamente igual ao de um decímetro cúbico e assim considerado legalmente.

a) Múltiplos e submúltiplos usuais

Nomes	Simbolos	Valores
hectolitro.	hl	100 l
decalitro.	dal	10 l
litro	l	1 l
decilitro	dl	0,1 l
centilitro.	cl	0,01 l
mililitro	ml	0,001 l

b) Mudança de unidade

Obedece ao mesmo critério das medidas de comprimento e massa.

c) Medidas efetivas

São fabricadas em estanho, alumínio, madeira e vidro, variando as capacidades entre o hectolitro e o centilitro.

A forma das medidas é também variável.

São utilizadas, de acordo com a lei, para a medição de volume de gases e líquidos, cereais e materiais pulverulentos ou granulosos.

d) Correspondência entre as unidades de volume

1 metro cúbico tem capacidade para — 1 000 litros.

1 decímetro cúbico tem capacidade para — 1 litro.

1 centímetro cúbico tem capacidade para — 1 mililitro.

EXERCÍCIOS

- Determinar em dal a capacidade de reservatórios cujos volumes são: $15,065 \text{ m}^3$; 181 dm^3 ; $2,003 \text{ m}^3$. R: $1\ 506,5 \text{ dal}$; $18,1 \text{ dal}$; $200,3 \text{ da}$.
- Qual o volume em m^3 de $743,7 \text{ kg}$ d'água destilada?
R: $0,743\ 7 \text{ m}^3$
- Exprimir em hl a soma: $34,51 \text{ hl} + 2,31 \text{ m}^3 + 2\ 983 \text{ dm}^3 + 38,5 \text{ dal}$
R: $91,29 \text{ hl}$
- Um reservatório contém água até $\frac{2}{3}$ de seu volume. Suas dimensões são 2 m , $1,5 \text{ m}$ e $0,90 \text{ m}$. Quantos litros d'água contém?
R: $1\ 800 \text{ litros}$
- Custando o litro de óleo Cr \$3,50, qual será a despesa mensal de uma máquina que gasta 240 g de óleo por dia, sabendo-se que o óleo pesa $0,8 \text{ kg}$ por decímetro cúbico? R: Cr \$31,50
- Um negociante comprou 80 hl de trigo por Cr \$1 800,00. Qual o preço de custo do kg se o trigo pesa $0,75 \text{ kg}$ por decímetro cúbico?
R: Cr \$0,30
- Um pedaço de mármore posto num reservatório cheio de água destilada fez transbordar 48 cl d'água. Qual o peso do pedaço de mármore se o mesmo pesa $2\ 700 \text{ g}$ por dm^3 ? R: $1,296 \text{ kg}$
- Numa construção empregam-se 10 colunas de concreto armado de $2,80 \text{ m}$ de altura, cujas bases são quadrados de 20 cm de lado. O ferro pesa $7,2 \text{ kg}$ e o concreto armado $2,5 \text{ kg}$ por dm^3 . Qual o peso de ferro e de concreto empregados, se o ferro corresponde a $\frac{1}{40}$ do volume total?
R: $201,6 \text{ kg}$; $2\ 730 \text{ kg}$
- Um brejo de $2,5 \text{ ha}$ é cultivado com um arrozal que produz 51 por m^2 . Valendo Cr \$10,00 o saco de 50 kg e pesando o arroz $0,8 \text{ kg}$ por litro, qual o valor da produção? R: 20 mil cruzeiros
- Quer-se construir um reservatório cilíndrico com capacidade para $3,14 \text{ hl}$ e com 20 cm de raio. Qual deve ser a altura?
R: 25 dm

V. ÂNGULO PLANO

1. Primeira unidade legal.

E' o ângulo reto, que se define como sendo qualquer dos menores ângulos determinados por duas retas concorrentes que formam entre si ângulos adjacentes iguais.

O símbolo dessa unidade é *r*.

a) Múltiplos e submúltiplos

Os múltiplos da unidade não têm designação própria. O único submúltiplo que tem designação própria é o *grado*, centésima parte da unidade.

São usuais os submúltiplos do quadro abaixo.

Nomes	Símbolos	Valores
ângulo reto	<i>r</i>	$1\ r$
grado	<i>g</i> ou <i>gr</i>	$0.01\ r$
decigrado	<i>dgr</i>	$0.001\ r$
centigrado	<i>cgr</i>	$0.000\ 1\ r$
miligrado	<i>mgr</i>	$0.000\ 01\ r$

O símbolo *g* será usado quando não possa haver confusão com o gramo.

b) Mudança de unidade

Para exprimir em grados um ângulo referido a retos e reciprocamente, a vírgula deve ser deslocada de duas ordens, pois o reto tem 100 grados. A mudança de unidade entre os submúltiplos far-se-á deslocando a vírgula uma única ordem.

Exemplo.

Exprimir, sucessivamente, em *gr*, *dgr* e *cgr* um ângulo cuja medida é $1,305\ 6\ r$.

Temos:

$$1,305\ 6\ r = 130,56\ gr = 1305,6\ dgr = 13\ 056\ cgr.$$

2. Segunda unidade legal.

E' o *grau*, que se define como sendo o ângulo equivalente a $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto.

a) Múltiplos e submúltiplos

Nomes	Símbolos	Valores
gráu sexagesimal ou gráu	°	$\frac{1}{90}^r$
minuto de ângulo ou minuto.	'	$\frac{1^\circ}{60}$
segundo de ângulo ou segundo.	"	$\frac{1'}{60}$

As denominações grau, minuto e segundo, podem ser usadas quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.

Os múltiplos decimais não têm designação própria.

b) Mudança de unidade

As mudanças de unidade fazem-se de acôrdo com as regras para os números complexos. (*Matemática* - 1.º ano).

Exemplos.

1.º Expressar em segundos o número 2º 26' 15".

Cada grau vale 60'; logo, os dois graus valerão

$$2 \times 60 = 120'.$$

Adicionando os 26', obteremos:

$$2^\circ 26' 15'' = 146' 15''.$$

Como o minuto vale 60'', os 146' valerão

$$146 \times 60 = 8760''.$$

Adicionando os 15'' do número dado, resulta, finalmente:

$$2^\circ 26' 15'' = 8775''.$$

2.º Expressar em minuto de ângulo o número 2º 26' 15".

O número dado contém (primeiro caso) 8775''. Valendo

o segundo $\frac{1}{60}$ do minuto, 8775'' valerão $\frac{8775}{60}$ do minuto.

Então: $2^\circ 26' 15'' = \frac{8775}{60}$ do minuto = $\frac{585}{4}$ do minuto, ou, em número decimal:

$$2^\circ 26' 15'' = 146,25.$$

Obtém-se uma fração cujos termos são, respectivamente, o número e o múltiplo dados, expressos no menor múltiplo que figura no número.

3.º Expressar em graus, minutos e segundos o número 15 216".

Em 15 216'' há tantos minutos quantas vezes 15 216 con- tiver 60; efetuando a divisão, encontramos:

$$15\ 216 = 253 \times 60 + 36.$$

Resulta, então:

$$15\ 216'' = 253' 36''.$$

Em 253' haverá tantos graus quantas vezes 253 con- tiver 60; efetuando a divisão encontramos:

$$253 = 4 \times 60 + 13.$$

Concluimos:

$$253' = 4^\circ 13'$$

e, portanto,

$$15\ 216'' = 4^\circ 13' 36''.$$

Dispositivo prático:

$$\begin{array}{r|l|l} 15\ 216 & 60 & \\ 3\ 21 & 253 & 60 \\ 216 & 13' & 4^\circ \\ 36'' & & \end{array}$$

c) Observação

Há, ainda, uma terceira unidade legal denominada *radiano*, cujo conhecimento será adquirido no estudo do quarto ano.

d) Transformações nas medidas de ângulos

1.ª Expressar em grados, uma medida referida a graus.

Um grau é equivalente a $\frac{1}{90}$ do reto; assim, dividindo por 90 o número que exprime a medida de um ângulo em graus,

obteremos a medida em retos. Se multiplicarmos o resultado obtido por 100, obteremos a medida expressa em grados. Como dividir um número por 90 e multiplicar o resultado por 100 é o mesmo que multiplicar o primitivo por $\frac{100}{90}$ ou $\frac{10}{9}$, podemos concluir uma regra prática de conversão.

REGRA. Para referir ao grau uma medida dada em graus, multiplica-se o número de graus por $\frac{10}{9}$. Para obter a medida expressa em retos, basta dividir o número de graus por 90.

Exemplo.

Referir ao grau um ângulo de $18^\circ 20' 45''$.

Em primeiro lugar devemos exprimir a medida dada em graus. Assim, temos:

$$18^\circ 20' 45'' = 66\ 045'' = \frac{66\ 045}{3\ 600}$$

ou, reduzindo à expressão mais simples:

$$\frac{4\ 403}{240}$$

Multiplicando este resultado por $\frac{10}{9}$, teremos a medida em grados, que será:

$$\frac{4\ 403}{240} \times \frac{10}{9} = \frac{4\ 403}{216} = 20,384 \text{ gr.}$$

2.ª Referir a grau uma medida expressa em grados ou retos.

Um ângulo reto é equivalente a 90 graus; logo, para exprimir em graus uma medida dada em retos, basta multiplicar por 90 esta última medida.

Exemplos.

1.º Exprimir em graus um ângulo de 1,04 r.

Multiplicando o número dado por 90, temos:

$$1,04 \times 90 = 93^\circ,6.$$

O número obtido é o mesmo que $93^\circ + 0^\circ,6$. Reduziremos a fração decimal do grau a minutos multiplicando-a por 60 e obteremos:

$$0,6 \times 60 = 36'.$$

Temos, então:

$$1,04 \text{ r} = 93^\circ 36'.$$

2º Exprimir em graus um ângulo de 45,8 gr.

Podemos referir, primeiramente, ao ângulo reto, dividindo o número dado por 100 e, em seguida, multiplicar o resultado obtido por 90, como no exemplo anterior. Ora, estas duas operações podem ser realizadas simultaneamente, multiplicando o número dado por 0,9, o que fornece o mesmo resultado.

Assim, temos:

$$45,8 \times 0,9 = 41^\circ,22.$$

Reduzindo a fração $0^\circ,22$ a minutos e segundos, temos:

$$0,22 \times 60 = 13',2.$$

e

$$0,2 \times 60 = 12''.$$

Resulta, finalmente:

$$45,8 \text{ gr} = 41^\circ 13' 12''.$$

REGRA. Para referir ao grau uma medida dada em retos, multiplica-se o número de retos por 90 ou o número de grados por 0,9.

EXERCÍCIOS

Reduzir a grados os ângulos:

1. $18^\circ 25'$. R: 20,462 9 gr 2. $30^\circ 18' 30''$. R: 33,676 gr

Reduzir a grau, minutos e segundos:

3. 18,45 gr. R: $16^\circ 36' 18''$ 4. 38,75 gr. R: $34^\circ 52' 30''$

Efetuar as operações:

5. $58^\circ 26' 30'' - 42,85 \text{ gr.}$ R: $19^\circ 52' 36''$.

6. $78,25 \text{ gr} + 36^\circ 18'$. R: $106^\circ 43' 30''$.

7. $3 \times 36,5 \text{ gr} + 2 \times 18^\circ 20'$. R: $135^\circ 13'$.

8. $5 \times 20^\circ 18' 36'' - 3 \times 33,5 \text{ gr.}$ R: $11^\circ 6'$.

VI. TEMPO

1. Unidade legal.

E' o *segundo*, que se define como sendo o intervalo de tempo igual à fração $\frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio, definido de acôrdo com as convenções da astronomia.

a) Múltiplos e submúltiplos

Nomes	Símbolos	Valores
segundo	s ou seg	1 s
minuto	m ou mn	60 s
hora	h	3 600 s = 60 m
dia	d ou da	86 400 s = 1 440 m = 24 h

b) Observações

1.ª Os múltiplos e submúltiplos decimais do segundo não têm designação própria.

2.ª Os símbolos s, d e m serão usados quando não possa haver dúvida quanto ao seu significado.

3.ª Serão admitidas também as unidades de tempo estabelecidas pelas convenções usuais do calendário civil e da astronomia, como, por exemplo, o mês, o ano, o século.

c) Mudança de unidade

As diferentes mudanças de unidade fazem-se de acôrdo com as regras correspondentes aos números complexos (*Mat.* - 1.º ano).

Exemplos.

1.º Expressir em minutos o número 2d 3h 25m.

Dois dias equivalem a 2×24 ou 48 horas; assim,

$$2d \ 3h \ 25m = 51h \ 25m.$$

Equivalentendo a hora a 60m, 51h equivalem a 51 vezes 60m :

$$\text{Então} \quad 60 \times 51 = 3\,060,$$

$$51h \ 25m = 3\,060m + 25m = 3\,085m$$

$$\text{logo,} \quad 2d \ 3h \ 25m = 3\,085m.$$

Praticamente, utiliza-se o dispositivo seguinte:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 24 \times \\ \hline 48 \\ 3 + \\ \hline 51 \\ 60 \times \\ \hline 3\,060 \\ 25 + \\ \hline 3\,085 \end{array}$$

2.º Expressir em fração do dia o intervalo de tempo de 1 me 2 d 3 h.

Procedendo como no exemplo anterior, reduziremos a medida à menor unidade, isto é, horas:

$$1 \text{ me } 2 \text{ d } 3 \text{ h} = 771 \text{ h.}$$

Valendo a hora $\frac{1}{24}$ do dia, 771 horas valerão $\frac{771}{24}$ do dia. Logo, temos:

$$1 \text{ me } 2 \text{ d } 3 \text{ h} = \frac{771d}{24} \text{ ou, em decimal, } 32,125d.$$

Dispositivo prático:

$$\begin{array}{r} \text{Numerador} \\ 1 \times \\ 30 \\ \hline 30 + \\ 2 \\ \hline 32 \times \\ 24 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 768 + \\ 3 \\ \hline 771 \end{array}$$

Denominador: $1d = 24h$

Resultado: $1me\ 2d\ 3h = \frac{771}{24}$ do dia $= \frac{257}{8}$ do dia, ou,

em decimal: $1me\ 2d\ 3h = 32,125d$.

3.º Exprimir em anos, meses e dias o intervalo de tempo de $\frac{58a}{15}$.

Extraindo os inteiros, encontramos 3 a e a fração $\frac{13}{15}$ do ano, ou, $\frac{13}{15}$ de 12 m. Como $\frac{13}{15}$ de 12 valem $\frac{52}{5}$ ou $10\frac{2}{5}$, concluímos $\frac{58a}{15} = 3a\ 10me\ \frac{2}{5}$.

A fração $\frac{2}{5}$ do mês corresponde a $\frac{2}{5}$ de 30d.

Sendo $\frac{2}{5}$ de 30 = 12

temos, finalmente: $\frac{58a}{15} = 3a\ 10m\ 12da$.

Dispositivo prático:

	58	15
	13	3a 10me 12d
Conversão do resto em meses	× 12	
	156	
	06	
Conversão do resto em dias	× 30	
	180	
	30	
	0	

EXERCÍCIOS

- Expressar em minutos os intervalos de tempo:
 - 3 da 4 h
 - 4 da 26 mn
 - 7 mn 36 seg

R: 4 560 mn; 5 786 mn; 7,6 mn.
- Expressar em meses, dias e horas os intervalos de tempo:
 - $\frac{13a}{18}$
 - $\frac{23m}{15}$
 - $\frac{571h}{20}$

R: 8 me 20 d; 1 me 16 da; 1 da 4,55 h.
- Expressar em horas os intervalos de tempo:
 - 2 da 3 h 24 mn
 - 30 m 56 seg
 - 2 h 36 mn.

R: 51,4h; $\frac{116h}{225}$; $\frac{13h}{5} = 2,6h$.
- Expressar em meses, dias e horas:
 - 32,125 d
 - 0,4 a
 - 5,25 me.

R: 1 me 2 d 3h; 4 me 24 da; 5 me 7 da 12 h.
- Uma fábrica de automóveis produz três unidades por hora. Determinar a produção da fábrica em 1 a 2 me 5 da.

R: 30 600.

VII. VELOCIDADE

1. Unidade legal.

E' o metro por segundo, que se define como sendo a velocidade de um móvel, que animado de movimento retilíneo e uniforme, percorre uma distância de 1 metro durante 1 segundo.

a) Múltiplos e submúltiplos usuais

Nomes	Símbolos	Valores
metro por segundo	m/s	$\frac{1}{1}$ m/s
metro por minuto	m/min	$\frac{1}{60}$ m/s
centímetro por segundo	cm/s	$\frac{1}{100}$ m/s
quilômetro por hora	km/h	$\frac{1}{3,6}$ m/s
nó		0,514 78 m/s

b) Observações

1.ª Outras unidades de velocidade podem ser obtidas substituindo-se no nome, na definição e no símbolo do quadro acima, o metro por qualquer outra unidade legal de comprimento e o segundo por qualquer unidade legal de tempo.

Assim, podemos ter o quilômetro por minuto (km/min).

2.ª Para medir a velocidade de embarcações pode ser utilizado o *nó*, considerado como equivalente a 1 milha náutica por hora.

c) Mudança de unidade

Para referir a uma nova unidade, um número que exprima a medida de uma velocidade, basta multiplicar ou dividir a unidade de tempo ou de comprimento que figura no número pela relação entre ela e a nova unidade em que se quer exprimir o número dado.

Exemplos.

1. **Mudança de unidade de comprimento.** Exprimir em km/h a velocidade 400m/h.

Reduzindo os quatrocentos metros a quilômetros, temos:
 $400\text{m/h} = 0,4\text{km/h}$.

2. **Mudança da unidade de tempo.** Exprimir em m/h a velocidade de 3.1m/min.

Se o móvel percorre 3.1m em um minuto, em uma hora percorrerá 60 vezes o mesmo comprimento; logo, temos:

$$3,1\text{m/min} = 186\text{m/h}$$

3. **Mudança da unidade de tempo e de comprimento.** Exprimir em km/h a velocidade de 120m/min.

a) Mudamos, em primeiro lugar, a unidade de comprimento e temos:

$$120\text{m/min} = 0,120\text{km/min}$$

Se o móvel percorre 0,120km em um minuto, em uma hora percorrerá distância 60 vezes maior; assim:

$$120\text{m/min} = 0,120\text{km/min} = 7,2\text{km/h}$$

b) Podemos mudar em primeiro lugar a unidade de tempo, e obtemos:

$$120\text{m/min} = 7\,200\text{m/h}$$

Mudando a unidade de comprimento, resulta:

$$120\text{m/min} = 7\,200\text{m/h} = 7,2\text{km/h}$$

EXERCÍCIOS

Referir ao km/h as velocidades:

- | | | | |
|--------------|-------------|-----------------|--------------|
| 1. 10 m/s. | R: 36 km/h | 2. 45 m/min. | R: 2,7 km/h |
| 3. 3 km/min. | R: 180 km/h | 4. 118 dam/min. | R: 70,8 km/h |

Reduzir a m/s as velocidades:

- | | | | |
|--------------|--------------|----------------|--------------|
| 5. 210 km/h. | R: 58,33 m/s | 6. 2,8 km/min. | R: 46,66 m/s |
|--------------|--------------|----------------|--------------|

Resolver os problemas:

7. Um automóvel percorre 507 km durante 10 h 50 min. Determinar a velocidade do automóvel em km/h e m/s.

$$\text{R: } 46,8 \text{ km/h e } 13 \text{ m/s}$$

8. Numa viagem de trem um viajante consulta o relógio no momento exato em que o trem passava no marco quilométrico 237 km. Eram 8 h 17 min.. Às 8 h 25 min o trem passa no marco 249 km. Determinar a velocidade do trem em m/min e km/h.

$$\text{R: } 1\,500 \text{ m/min e } 90 \text{ km/h}$$

9. Um motorista cobra Cr \$ 20,00 por hora a um passageiro, para levá-lo a uma cidade que dista 168 km de seu ponto de estacionamento. Partem às 6 horas da manhã e fazem a viagem com a velocidade média de 42 km/h. Permanecem parados na cidade durante 2h.

A que horas estarão de volta? Quanto deve receber o motorista?

$$\text{R: } 16 \text{ horas; Cr } \$ 200,00$$

10. Duas estações, A e B, de uma linha férrea, distam 20 km. Um trem parte da estação A na direção de B, com a velocidade de 90 km/h. No mesmo instante e na mesma direção, parte de B um segundo trem, com a velocidade de 10 hm/min. No fim de quantas horas será o segundo trem alcançado pelo primeiro? A que distância da estação A ocorrerá o encontro?

$$\text{R: } 40 \text{ min; } 60 \text{ km}$$

VIII. MASSA

1. Unidade legal.

É o quilograma, massa do protótipo internacional de platina iridiada que se acha depositado na repartição internacional de pesos e medidas. (fig. 12)

a) Múltiplos e submúltiplos usuais

Para formação dos múltiplos e submúltiplos toma-se como base o grama que é igual à fração 0,001 da massa do quilograma.

Nomes	Símbolos	Valores
tonelada.	t	1 000 000 g
quilograma	kg	1 000 g
hectograma	hg	100 g
decagrama.	dag	10 g
grama.	g	1 g
decigrama	dg	0,1 g
centigrama	cg	0,01 g
miligrama	mg	0,001 g

Nas medidas relativas a pedras preciosas, emprega-se também o *quilate*, massa de 2 decigramas.

b) Mudança de unidade

Obedece aos mesmos critérios estabelecidos para as medidas de comprimento. Assim, 7 kg 4 hg 5 dag e 6 g pode-se escrever de diversas maneiras:

$$7,456 \text{ kg} = 745,6 \text{ dag} = 7\,456 \text{ g, etc.}$$

c) Medidas efetivas

São fabricadas em ferro fundido para as grandes pesadas, em latão ou cobre para as médias, e em lâminas de cobre para as pequenas, nos três tipos indicados na figura abaixo.

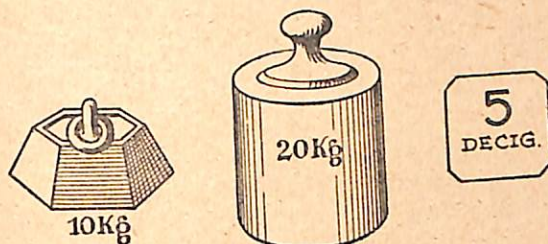


Fig. 13

Para as grandes (primeira figura) variam de 50 kg a $\frac{1}{2}$ hg numa série de dez.

Para as médias (segunda figura) variam de 20 kg a 1 g, sendo ao todo quatorze.

Para as pequenas (terceira figura) variam de 5 dg a 1 mg, em número de nove, utilizadas nas balanças de precisão.

EXERCÍCIOS

- Expressar em gramas: 1,85 kg; 15,7 dg; 3,8 hg; 1 293 mg.
R: 1 850 g; 1,57 g; 380 g; 1,293 g
- Na pesagem de um objeto foram utilizadas: 1 medida de 500 g, 2 de 100 g, 1 de 50 g, 2 de 20 g e 2 de 2 g. Qual a massa do objeto em g e kg?
R: 794 g e 0,794 kg
- Efetuar a adição: 5,97 kg + 281,3 dag + 2 821 g.
R: 11,604 kg
- Efetuar as subtrações: 3 kg — 183,7 g; 4581 g — 38,581 hg; 2,5t — 1 589,7 kg.
R: 2,816 3 kg, 722,9 g, 910,3 kg
- Um padeiro vende a um colégio 300 pães de 250 g. Quanto deve receber, ao preço de Cr \$ 1,20 o quilo?
R: Cr \$ 90,00
- Uma barra de ferro fundido tem 225 mm de largura e 48 cm de altura. Qual deve ser o comprimento para que ela pese 972 kg, sabendo-se que o ferro pesa 7,2 kg por dm³?
R: 1,25 m

IX. DENSIDADE ABSOLUTA OU MASSA ESPECÍFICA

1. Unidade legal.

É o grama por centímetro cúbico, que se define como sendo a densidade de um corpo homogêneo no qual cada centímetro cúbico tem a massa de 1 grama.

a) Múltiplos e submúltiplos usuais

Nomes	Símbolos	Valores
grama por centímetro cúbico. . .	g/cm ³	1 g/cm ³
quilograma por decímetro cúbico.	kg/dm ³	1 g/cm ³
tonelada por metro cúbico. . . .	t/m ³	1 g/cm ³
quilograma por metro cúbico. . .	kg/m ³	0,001 g/cm ³
grama por metro cúbico.	g/m ³	0,000 001 g/cm ³

b) Observações

1.ª Outras unidades de massa específica podem ser obtidas, substituindo-se no nome, na definição e no símbolo do quadro acima, o grama por qualquer unidade legal de massa e o centímetro cúbico por qualquer unidade legal de volume.

Assim, podemos fazer a medição de uma densidade, tomando para unidade o quilograma por centímetro, isto é, determinando, em quilogramas, a massa de um centímetro cúbico.

2.ª A massa específica da água destilada e isenta de ar, à temperatura de 4º C, pode ser considerada como equivalente a 1 g/cm³.

c) Densidade relativa

Um centímetro cúbico de enxofre pesa 2,08 g e um centímetro cúbico de prata, 10,4 g. Assim, as densidades absolutas desses dois corpos são, respectivamente, 2,08 g/cm³ e 10,4 g/cm³. Verificamos, então, que, dados iguais volumes

de prata e enxofre, o de prata tem massa 5 vezes maior, isto é, a relação entre as massas de iguais volumes dos dois corpos é expressa pelo número 5.

Dizemos, então, que a densidade da prata em relação ao enxofre é 5 e denominamos essa grandeza *densidade relativa*.

Ao enunciar a densidade de um corpo, referida a de um segundo, é indispensável mencionar qual o corpo que serve como termo de comparação. Não podemos dizer a densidade da prata é 5 e sim a *densidade relativa da prata é 5, em relação ao enxofre*.

Pode-se omitir essa menção no caso particular de se tomar para termo de comparação um corpo, cuja massa específica seja igual a 1 g/cm³, como por exemplo, a água destilada a 4º C. Quando dizemos: "a densidade do mercúrio é 13,6", deve-se entender que a densidade relativa do mercúrio é 13,6 em relação à água destilada a 4º centígrados, ou qualquer outro corpo, cuja densidade absoluta seja 1 g/cm³.

d) Mudança de unidade

As mudanças de unidade não oferecem dificuldade. São utilizados nessas mudanças os valores do quadro de múltiplos e submúltiplos.

Exemplos.

1.º Referir ao g/cm³ a massa específica de 0,8 kg/l. O litro é equivalente ao dm³. Assim, temos:

$$0,8 \text{ kg/l} = 0,8 \text{ kg/dm}^3 = 0,8 \text{ g/cm}^3.$$

2.º Referir ao g/cm³ a massa específica de 38,5 kg/m³. Se 1 metro cúbico pesa 38,5 kg, 1 decímetro cúbico pesará 1 000 vezes menos; assim, temos:

$$38,5 \text{ kg/m}^3 = 0,038 5 \text{ kg/dm}^3 = 0,038 5 \text{ g/cm}^3.$$

e) Problemas

A grandeza *massa específica* ou *densidade absoluta* é, como sabemos, uma grandeza composta das grandezas *massa* e *volume*, sendo o quociente da divisão de massa por volume.

Os problemas correspondentes envolvem, portanto, três grandezas: a densidade absoluta, a massa e o volume. São de três tipos.

1.º *Dados o volume e a massa de um corpo, determinar a densidade absoluta.*

Exemplo.

Se 0,05 l de leite pesam 51,5 g, qual a densidade do leite?

Resolução:

Se 0,05 l ou 0,05 dm³ pesam 51,5 g, 1 dm³ pesará:

$$\frac{51,5 \text{ g}}{0,05} = 1030 \text{ g.}$$

Logo, 1 cm³ pesará 1 000 vezes menos e a densidade será:
1,030 g/cm³ ou apenas 1,030.

Podemos observar a fórmula:

$$\text{Densidade absoluta} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

2.º *Dadas a densidade absoluta e a massa, determinar o volume.*

Exemplo.

Determinar, em litros, o volume ocupado por 36 kg de óleo, cuja densidade é 0,9.

Resolução. Sendo a densidade 0,9, concluímos que 1 cm³ pesa 0,9 g; logo, para perfazer 36 kg ou 36 000 g são necessários:

$$\frac{36\,000}{0,9} \text{ cm}^3 = 40\,000 \text{ cm}^3$$

Reduzindo a litros, temos:

$$40\,000 \text{ cm}^3 = 40 \text{ dm}^3 = 40 \text{ litros.}$$

R: 36 kg de óleo ocupam 40 litros.

Podemos observar a fórmula:

$$\text{Volume} = \frac{\text{massa}}{\text{densidade}}$$

3.º *Dados o volume e a densidade, determinar a massa.*

Exemplo.

A densidade absoluta do álcool-motor é 0,8 g/cm³. Qual a massa de 2 hl?

Resolução. Se 1 cm³ pesa 0,8 g, 2 hl ou 200 000 cm³ pesarão:

$$200\,000 \times 0,8 = 160\,000 \text{ g} = 160 \text{ kg.}$$

R: 2 hl de álcool-motor pesam 160 kg.

Observamos a fórmula:

$$\text{Massa} = \text{densidade} \times \text{volume}$$

EXERCÍCIOS

- O óleo lubrificante, cuja densidade absoluta é de 0,8 kg/dm³, custa Cr \$ 3,50 o litro. Qual a despesa mensal de uma máquina que gasta 240 g de óleo por dia?
R: Cr \$ 31,50
- Um negociante comprou 80 hl de trigo por Cr \$ 1 800,00. Qual o preço de custo do kg, se a densidade do trigo é 0,75 kg/dm³?
R: Cr \$ 0,30
- Um pedaço de mármore, posto num reservatório cheio d'água destilada fez transbordar 48 cl d'água. Qual a massa do pedaço de mármore, se a densidade absoluta é de 2 700 g/dm³?
R: 1,296 kg
- Numa construção empregam-se 10 colunas de concreto armado de 2,80 m de altura, cujas bases são quadrados de 20 cm de lado. A densidade do ferro é 7,78 kg/dm³ e a do concreto, 2,5 kg/dm³. Qual as massas de ferro e de concreto empregadas, se o volume do ferro é 1/40 do total?
R: 217,84 kg; 2 730 kg
- Um brejo de 2,5 ha é cultivado com um arrozal que produz 5 litros por m². Valendo Cr \$ 10,00 o saco de 50 kg e sendo a densidade do arroz 0,8 kg/l, qual o valor da produção?
R: 20 mil cruzeiros
- Qual o volume, em m³, de 743,7 kg d'água destilada?
R: 0,743 7 m³

UNIDADE IV

Potências e Raizes

I. POTÊNCIAS:

1. Definições.
2. Operações com potências.
3. Quadrado da soma de dois números.
4. Potências das frações.

II. RAIZES:

1. Definições.
2. Regra prática para extração da raiz quadrada. Aproximação no cálculo da raiz.
3. Uso de tábuas para obtenção do quadrado, do cubo, da raiz quadrada e da raiz cúbica dos números inteiros e decimais.

I. POTÊNCIAS

1. Definições.

A multiplicação reiterada de fatores iguais, como

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

chama-se *potenciação*.

Da mesma forma que a adição de parcelas iguais dá origem à multiplicação, a multiplicação de fatores iguais dá origem a uma nova operação denominada *potenciação*.

O resultado dessa operação tem o nome de *potência do fator considerado*.

Assim, se efetuarmos a multiplicação indicada, obteremos:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81,$$

e diremos que 81 é uma *potência de 3*.

Daí, a definição:

Potência de um número é um produto de fatores iguais a êsse número.

O número considerado denomina-se **base** da potência, e o número de fatores chama-se **grau** da potência. Assim,

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \text{ ou } 81$$

é a *potência do quarto grau* de 3 ou é a *quarta potência* de três.

Indica-se a potência de um número, escrevendo a base e, um pouco acima e à direita, o número que representa o grau. Para indicar a quarta potência de três, escreve-se:

$$3^4$$

e lê-se: *três elevado a quatro*. O número 4, que indica o grau, chama-se *expoente*.

Exemplos.

$$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

343 é a terceira potência de 7, como 25 é a segunda potência de 5 e 16, a quarta potência de 2.

2. Observações.

1.ª Em virtude da definição, o expoente deve ser maior ou, no mínimo, igual a 2, pois não há multiplicação com menos de dois fatores.

Convenciona-se, no entanto, considerar potências de expoente 1, cujo valor é, por definição, igual à base.

Exemplos.

$$27^1 = 27$$

$$5^1 = 5$$

2.ª Toda potência de 1 é igual a 1:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$

$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

3.ª Toda potência de zero é igual a zero.

4.ª As potências de 10 são as unidades de diversas ordens, e obtêm-se, escrevendo à direita da unidade tantos zeros quantas são as unidades do expoente:

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1\,000$$

5.ª A segunda potência chama-se também *quadrado*, porque a área do quadrado obtém-se, elevando a medida do lado à segunda potência.

A terceira potência chama-se também *cuvo* porque o volume do cuvo se obtém, elevando à terceira potência a medida de sua aresta.

EXERCÍCIOS

Calcular as seguintes potências:

1. 34^2	R: 1 156	4. 100^3	R: 1 000 000	7. 2^6	R: 64
2. 5^4	R: 625	5. 16^3	R: 4 096	8. 4^4	R: 256
3. 2^5	R: 32	6. 3^4	R: 81	9. $4^5 - 5^4$	R: 399

3. Operações com potências.

De um modo geral, para efetuar qualquer operação entre potências, calcula-se primeiro o valor das potências.

Exemplos.

$$1.^\circ \quad 3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$$

$$2.^\circ \quad 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$$

$$3.^\circ \quad 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

Todavia, em certos casos, o resultado pode ser escrito em forma de potência indicada, o que é mais cômodo, principalmente quando se opera com expoentes elevados. A seguir estão especificados todos estes casos.

4. Multiplicação de potências da mesma base.

Seja multiplicar 2^2 por 2^4 .

Por definição, temos: $2^2 \times 2^4 = \underbrace{2 \times 2}_{2 \text{ fatores}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ fatores}}$

logo, o produto terá 2 + 4 ou 6 fatores, isto é,

$$2^2 \times 2^4 = 2^{2+4} = 2^6.$$

REGRA. O produto de potências da mesma base obtém-se, elevando essa base à soma dos expoentes dos fatores.

Exemplos.

$$1.^\circ \quad 3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$$

$$2.^\circ \quad 7^3 \times 7^4 = 7^7.$$

Observação. Da regra de multiplicação, podemos concluir que uma potência dada pode ser transformada em um produto de potências da mesma base, o que em certos casos é útil. Assim, sendo

$$2^2 \times 2^4 = 2^6,$$

temos:

$$2^6 = 2^2 \times 2^4.$$

Exemplos.

$$3^6 = 3^2 \times 3^4 = 9 \times 81 = 729$$

$$2^7 = 2^3 \times 2^4 = 8 \times 16 = 128.$$

5. Divisão de potências da mesma base.

Seja dividir 2^5 por 2^3 .

De acôrdo com a definição de divisão, o quociente multiplicado pelo divisor 2^3 dará o dividendo 2^5 ; logo, em virtude da regra de multiplicação, deve ser uma potência da mesma base, cujo expoente será o número que, somado a 3, dá 5; este número é a diferença $5 - 3$. Assim:

$$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2.$$

Dai, a

REGRA. O quociente da divisão de duas potências da mesma base é uma potência da mesma base, cujo expoente é igual ao expoente do dividendo diminuído do expoente do divisor.

Exemplos.

$$1.º \quad 3^7 : 3^4 = 3^{7-4} = 3^3$$

$$2.º \quad 5^4 : 5^3 = 5.$$

Expoente zero. Se aplicarmos a regra acima a potências do mesmo grau, por exemplo

$$7^8 : 7^8$$

encontraremos:

$$7^8 : 7^8 = 7^{8-8} = 7^0.$$

Por outro lado, como o quociente da divisão de dois números iguais é a unidade, podemos escrever:

$$7^8 : 7^8 = 1.$$

Assim, embora o expoente zero não tenha significação concreta, somos levados a *convenicionar* a igualdade:

$$7^0 = 1,$$

o que nos traz a vantagem de ampliar a aplicação da regra de divisão.

6. Potenciação de uma potência.

Por definição de potência e de acôrdo com a regra da multiplicação, temos:

$$(7^2)^3 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2 = 7^{2+2+2} = 7^{2 \times 3}.$$

Dai a

REGRA. Para elevar uma potência a um novo expoente podemos elevar a sua base ao produto dos expoentes.

Exemplos.

$$1.º \quad (2^2)^5 = 2^{10} \quad 2.º \quad (3^3)^4 = 3^{12}.$$

Como a ordem dos fatores não altera o produto, verifica-se que:

$$(2^2)^3 = (2^3)^2.$$

Observação. O uso do parênteses é obrigatório quando a base é uma potência; assim:

$$(2^3)^2 = 2^6 = 64;$$

enquanto que, sem o parênteses, quem fica afetado à potência é o expoente, tendo-se:

$$2^{3^2} = 2^9 = 512.$$

Fica, então, esclarecido que

$$2^{3^2} \text{ equivale a } 2^{(3^2)}.$$

EXERCÍCIOS

Efetuar as operações:

- | | | | |
|----------------------------------|---------------------|---------------------------|----------------------------------|
| 1. $2^6 + 8^2$ | 2. $4^4 - 3^3$ | 3. 3×5^2 | 4. $5 \times 2^7 - 3 \times 5^3$ |
| 5. $\frac{4^5 - 8^3}{8^2 - 2^4}$ | 6. $2^3 \times 5^2$ | 7. $2^4 \times 2^3 : 2^7$ | 8. $(2 \times 3)^6 : (6^2)^3$ |

Indicar com forma de potência os resultados das operações:

9. $5^3 \times 5^8$ 10. $7^2 \times 7^3 \times 7^4$ 11. $27^0 : 27^4$ 12. $8^{15} : 8^4 : 8^3$
 13. $2 \times 2^5 : 2^2$ 14. $14^2 : 14$ 15. $(3^4)^3$ 16. $(2^5)^2$
 17. 2^{3^2} 18. $3^{(2^3)}$ 19. 5^{4^3} 20. $5^0 + 7^0$

RESPOSTAS

1. 128 2. 229 3. 75 4. 265 5. 16 6. 200
 7. 1 8. 1 9. 5^{11} 10. 7^0 11. 27^5 12. 8^3
 13. 2^4 14. 14 15. 3^{12} 16. 2^{40} 17. 2^9 18. 3^8
 19. 5^{64} 20. 2

7. Potenciação de um produto.

Por definição de potência podemos escrever:

$$\begin{aligned} (3 \times 2 \times 5)^3 &= (3 \times 2 \times 5)(3 \times 2 \times 5)(3 \times 2 \times 5) \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \\ &= 3^3 \times 2^3 \times 5^3. \end{aligned}$$

Dai, a

REGRA. Para elevar um produto a um expoente, eleva-se cada fator a esse expoente.

Exemplos.

1.º $(2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$
 2.º $(2^3 \times 3^2)^3 = 2^9 \times 3^6$

Desta propriedade conclui-se:

a) Toda potência de 10 é um produto de potências, do mesmo grau, dos fatores 2 e 5.

Com efeito, $10 = 2 \times 5$, portanto $10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$.

Exemplos.

1.º $10^4 = 2^4 \times 5^4$
 2.º $10^2 = 2^2 \times 5^2$

b) Para elevar a uma potência um número terminado em zeros, faz-se abstração dos zeros da terminação, eleva-se a essa potência o número resultante, e, à direita do resultado, escreve-se um número de zeros igual ao produto do número de zeros da base pelo expoente da potência.

Exemplos.

1.º $20^3 = (2 \times 10)^3 = 2^3 \times 10^3 = 8\,000$
 2.º $300^2 = 90\,000$

8. Multiplicação e divisão de potências do mesmo grau.

De acôrdo com a regra da potenciação dos produtos, temos:

$$(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2,$$

desta igualdade resulta:

1.º $2^2 \times 3^2 = (2 \times 3)^2$
 2.º $\frac{(2 \times 3)^2}{2^2} = 3^2$ ou $\frac{6^2}{2^2} = 3^2$

Dai, a

REGRA. Para multiplicar ou dividir potências do mesmo grau, conserva-se o expoente e efetua-se a operação indicada com as bases.

Exemplos.

$$\begin{aligned} 5^3 \times 7^3 &= 35^3 \\ 8^2 : 4^2 &= 2^2. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

Efetuar as operações, indicando os resultados por potências:

1. $(2^3 \times 3^2 \times 5)^3$ 2. $5^3 \times 4^3$ 3. $100^2 : 25^2$
 4. $5^4 \times 7^4 \times 10^4$ 5. $8^5 \times (2 \times 4)^3$ 6. $2^2 \times 2^3 \times 5^5$
 7. $(20^3 \times 20^5) : (4^7 \times 5^7)$ 8. $(2^3)^4 \times (3^2)^6$ 9. $(12^6 : 4^6) : (3^8 : 3^5)$
 10. $(20^2)^3 : (4^3)^2$

RESPOSTAS

1. $2^9 \times 3^6 \times 5^3$ 2. 20^3 3. 4^2 4. 350^4 5. 8^8
 6. 10^6 7. 20 8. 6^{12} 9. 3^3 10. 5^6

9. Potências das frações.

a) Frações ordinárias

Seja calcular o cubo de $\frac{3}{5}$.

Por definição de potência, temos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5}$$

ou

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}$$

Daf, a

REGRA. Para elevar uma fração a uma certa potência, elevam-se os dois termos a essa potência.

Exemplos.

$$1.º \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$2.º \quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

b) Números mistos

Transformam-se previamente os números mistos em frações impróprias.

Exemplo:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

c) Frações e números decimais

Seja determinar o cubo de 1,1. Por definição de potência, temos:

$$1,1^3 = 1,1 \times 1,1 \times 1,1 = 1,331.$$

Observa-se que o número de algarismos decimais da potência é o triplo do correspondente no número dado. De um modo geral, o número de algarismos decimais da potên-

cia é igual ao produto do número de algarismos decimais da base pelo grau da potência. Assim, efetua-se a potenciação como se o número fosse inteiro, colocando-se a vírgula no resultado de acôrdo com a observação acima.

Exemplos.

$$1.º \quad 2,3^2 = 5,29$$

$$2.º \quad 0,2^4 = 0,0016$$

$$3.º \quad 0,5^3 = 0,125.$$

10. Expressões.

Quando numa expressão interferem potências, estas devem ser efetuadas antes das demais operações. Observamos, no entanto, que devem ser obtidos em primeiro lugar os valores contidos nos sinais de reunião (), [] e { }, se os houver.

Exemplo.

Calcular o valor da expressão

$$\begin{aligned} & 5^2 + 2^3 \times 5 - [3^2 - (3 \times 2)^2 : 12]^2 = \\ & = 25 + 8 \times 5 - [9 - 36 : 12]^2 = 25 + 40 - (9 - 3)^2 = \\ & = 25 + 40 - 6^2 = 65 - 36 = 29. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

Efetuar as operações indicadas, de modo que, no resultado, figure cada base uma única vez:

$$1. \quad 2^3 \times 3^2 \times 2^5 \times 3.$$

$$2. \quad 2^3 : 2^2 : 2^3.$$

$$3. \quad (3^4 \times 5^5) : 5^3.$$

$$4. \quad (2^5 \times 3^4) : (2^2 \times 3^3).$$

$$5. \quad (2^4 \times 3^3 \times 5^2) : (2^2 \times 3^3).$$

$$6. \quad 2^3 \times (5^7)^2 \times 2^2.$$

$$7. \quad (3 \times 2 \times 5)^3 \times (2^2 \times 3 \times 7)^2 : (2^5 \times 5^2 \times 7)$$

$$\text{R: } 2^8 \times 3^3$$

$$\text{R: } 2^3$$

$$\text{R: } 3^4 \times 5^2$$

$$\text{R: } 2^3 \times 3$$

$$\text{R: } 2^2 \times 3^3 \times 5^3$$

$$\text{R: } 2^{11} \times 5^{14}$$

$$\text{R: } 2 \times 3^5 \times 5 \times 7$$

Calcular o valor das expressões:

$$8. \quad 2^3 \times 5 + [3^2 - 2^3 + (3 \times 2)^4 : 48].$$

$$\text{R: } 68$$

$$9. \quad \frac{3^2 \times 5^3}{(3 \times 5)^2} + \frac{(2 \times 3)^3}{3^2}$$

$$\text{R: } 29$$

10. $25 - \left(3 \times 7 - \frac{2^2 \times 3^2}{5^2 - 2^4}\right)$

R: 8

11. $\left\{[(2+4)^2 + 3]^2 : 9 - 9\right\} : 10.$

R: 16

12. $100^2 : 25^2 + (20^2 \times 20^5) : (4^7 \times 5^7).$

R: 36

13. $[(7+3) \times 2^2 + (10-8)^6 - (15:5 + 3 \times 7)]^2$

R: 6 400

14. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$

R: $\frac{77}{120}$

15. $\frac{\frac{1}{9}}{\frac{11}{225} : \frac{7}{25}} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{5 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}$

R: $\frac{6}{11}$

16. $0,(3)^2 \times \frac{7}{25} : (1,36 - 1,311\dots)$

R: $\frac{7}{11}$ 11. **Quadrado da soma de dois números.**

Consideremos o segmento AC , formado pela adição dos segmentos AB e BC (fig. 14), cujas medidas com a unidade U são, respectivamente, 4 e 3, isto é:

$$AC = AB + BC = 4 + 3.$$

Formemos o quadrado de lado AC , como mostra a figura 14, e observemos que o mesmo é formado pela soma de dois quadrados desiguais e dois retângulos iguais de dimensões 4 e 3. Logo, temos:

$$(4 + 3)^2 = 4^2 + 2 \times (4 \times 3) + 3^2$$

e, podemos concluir:

O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais o dobro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Exemplos.

$$(7 + 8)^2 = 7^2 + 2(7 \times 8) + 8^2 = 49 + 112 + 64 = 225$$

$$(30 + 1)^2 = 30^2 + 2 \times 30 + 1 = 961$$

$$(30 + 7)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 7 + 7^2 = 900 + 420 + 49 = 1369.$$

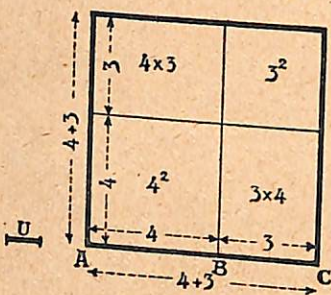


Fig. 14

Podemos, então, obter o quadrado de um número inteiro qualquer, decompondo-o na soma da totalidade das dezenas com o algarismo das unidades, e aplicando a regra do quadrado da soma de dois números.

Exemplos.

$$43^2 = (40+3)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$$

$$72^2 = (70+2)^2 = 70^2 + 2 \times 70 \times 2 + 2^2 = 4900 + 280 + 4 = 5184$$

Assim, o quadrado de um número é igual ao quadrado das dezenas, mais o duplo produto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades.

Este processo de obter o quadrado tem várias aplicações.

PRIMEIRA APLICAÇÃO

Consideremos os quadrados seguintes:

$$31^2 = (30 + 1)^2 = 30^2 + 2 \times 30 + 1$$

$$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \times 50 + 1$$

Observemos que o quadrado de 31 é igual ao quadrado de 30 aumentado do dobro de 30 e da unidade. Da mesma forma o quadrado de 51 é igual ao quadrado de 50, aumentado do dobro de 50 e da unidade. De um modo geral, o quadrado de um número qualquer é igual ao quadrado do número precedente, aumentado do dobro deste precedente e da unidade. Esta propriedade pode também ser enunciada:

A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é igual ao dobro do menor, mais um.

Tabela de quadrados. Por intermédio desta propriedade é fácil organizar uma tabela de quadrados, efetuando apenas uma adição. Como exemplo, damos a seguir uma tabela de quadrados formada a partir do quadrado de dez:

$$\begin{array}{l} 10^2 = 100 \\ 2 \times 10 + 1 = 21, \text{ logo, } 11^2 = 100 + 21 = 121 \\ 2 \times 11 + 1 = 23 \quad 12^2 = 144 \\ 2 \times 12 + 1 = 25 \quad 13^2 = 169 \end{array}$$

e assim por diante.

Nas duas primeiras colunas da tábua II (pág. 109) encontra-se uma tabela dos quadrados dos números de 1 a 100.

SEGUNDA APLICAÇÃO

Das três parcelas, cuja soma é o quadrado do número, duas terminam por zero; logo, a soma tem terminação igual à da terceira parcela, que é o quadrado das unidades. Assim, os quadrados dos números têm as terminações seguintes:

Terminação do número	Terminação do quadrado
1 ou 9	1
2 ou 8	4
3 ou 7	9
4 ou 6	6
5	5
0	00

No caso particular do número terminar por 5, podemos obter facilmente o quadrado.

Consideremos o número 35. Teremos:

$$35^2 = (30 + 5)^2 = 900 + 300 + 25,$$

ou, colocando 300 em evidência nas duas primeiras parcelas,

$$35^2 = 300(3 + 1) + 25 = 100 \times 3(3 + 1) + 25,$$

soma esta que é obtida imediatamente, escrevendo-se 25 à direita do produto $3(3 + 1)$, resultando:

$$35^2 = 1\ 225.$$

De um modo geral, obtemos o quadrado de um número terminado por 5, escrevendo 25 à direita do produto das dezenas pelo seu consecutivo.

Exemplos.

$$85^2 = 7\ 225 \text{ (diz-se: } 8 \times 9, 72 \text{ e escreve-se à direita 25).}$$

$$95^2 = 9\ 025$$

$$105^2 = 11\ 025.$$

Observação. Sendo 5 o algarismo das unidades de um número, o algarismo das dezenas de seu quadrado é sempre 2.

TERCEIRA APLICAÇÃO

Reconhecer se um número dado é quadrado.

Terminando o quadrado de um número qualquer, forçosamente, por um dos algarismos 1, 4, 5, 6, 9 ou por um número par de zeros, concluímos: *não são quadrados os números que terminarem por 2, 3, 7, 8 ou por número ímpar de zeros.*

No caso de ser 5 o algarismo das unidades, podemos ainda afirmar que o número não é quadrado, se o algarismo das dezenas for diferente de 2.

Não estando o número nos casos considerados, recorremos à sua decomposição em fatores primos; isto porque, sendo um número quadrado de outro, seus fatores primos têm expoentes pares como verificamos nos exemplos:

$$12 = 2^2 \times 3 \quad \text{e} \quad 12^2 = (2^2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5 \quad \text{e} \quad 90^2 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2.$$

Concluimos, então, que não é quadrado, o número em cuja decomposição em fatores primos existe algum expoente ímpar.

Exemplos.

1.º Verificar se 576 é quadrado; no caso afirmativo dizer de que número.

$$\text{Temos: } 576 = 2^6 \times 3^2.$$

Concluimos: 576 é quadrado de $2^3 \times 3$ ou 24.

2.º Verificar se 224 é quadrado; no caso afirmativo dizer de que número.

$$\text{Temos: } 224 = 2^5 \times 7.$$

Concluiremos: 224 não é quadrado.

EXERCÍCIOS

1. Aplicar a regra do quadrado da soma aos seguintes exemplos: $9 + 6$, $30 + 4$, $11 + 3$, $7 + 10$, $12 + 8$.
2. Obter mentalmente o quadrado dos seguintes números, decompondo-os na soma das dezenas com as unidades: 31, 25, 82, 95, 93, 115. Conferir os resultados pela tabela de quadrados da página 109.
3. Sem efetuar a decomposição em fatores primos, dizer quais dos seguintes números não são quadrados: 375, 360, 400, 341, 1 237, 528, 6 234, 2 725, 3 025, 2 842, 7 523.
4. Verificar, pela decomposição em fatores, quais dos seguintes números são quadrados: 400, 225, 425, 200, 441, 116, 216, 4 225.
5. Achar os menores números pelos quais se devem multiplicar, respectivamente, 18, 72, 425, 200, 116 e 216, para obter produtos quadrados.
6. A diferença entre os quadrados de dois números inteiros e consecutivos é 37. Quais são os números?

RESPOSTAS

3. 375, 360, 1 237, 528, 2 725, 2 842, 7 523.
4. 400, 225, 441, 4 225.
5. 2, 2, 17, 2, 29, 6.
6. 18 e 19.

II. RAIZES

1. Definições.

A noção de raiz é, exatamente, oposta à de potência.

Assim, 9 é uma potência de 3; ao contrário, 3 é uma raiz de 9. O número 8 é o cubo de 2; o número 2 é a raiz cúbica de 8; 81 é a quarta potência de 3; então, 3 é a raiz quarta de 81.

De um modo geral, quando um número é potência de outro, este outro chama-se raiz do primeiro. Podemos, portanto, definir a raiz de qualquer ordem:

Raiz quadrada de um número dado é um outro número, cujo quadrado é igual ao número dado.

Raiz cúbica de um número é um outro número, cujo cubo é igual ao primeiro.

E, assim, sucessivamente.

A raiz de um número indica-se com o símbolo

$$\sqrt{\quad}$$

que se denomina *radical*. O número que indica a ordem ou grau da raiz escreve-se na abertura do radical e denomina-se *índice*. A raiz quarta de 16, por exemplo, indica-se

$$\sqrt[4]{16}.$$

Ao número, como 16 no exemplo anterior, colocado de baixo do radical, chama-se *radicando*.

Por convenção, o índice 2, que indica a raiz quadrada, não se escreve.

Indicamos a raiz quadrada de um número, 64 por exemplo, escrevendo: $\sqrt{64}$.

Exemplos.

$$\sqrt{25} = 5 \text{ porque } 5^2 = 25.$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \text{ porque } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\sqrt{0,09} = 0,3 \text{ porque } 0,3^2 = 0,09.$$

EXERCÍCIOS

Achar as raizes indicadas:

1. $\sqrt{4}$
2. $\sqrt[3]{8}$
3. $\sqrt{9}$
4. $\sqrt{49}$
5. $\sqrt[4]{16}$
6. $\sqrt{64}$
7. $\sqrt[3]{27}$
8. $\sqrt{\frac{16}{25}}$
9. $\sqrt[3]{125}$
10. $\sqrt{81}$
11. $\sqrt[3]{64}$
12. $\sqrt{0,04}$
13. $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$
14. $\sqrt{21+4}$
15. $\sqrt{4 \times 9}$

2. Raiz quadrada a menos de uma unidade.

Consideremos a tabela de quadrados dos números inteiros de 1 a 10.

Números:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrados:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Os números da segunda sucessão são quadrados e suas raízes são os números correspondentes da primeira sucessão.

Observando a tabela, concluímos que há muitos números que não têm como raiz quadrada um número inteiro. Consideremos, por exemplo, o número 42. O quadrado de 6 é 36; logo, o número, cujo quadrado é 42, é maior que 6; do mesmo modo concluímos que esse número é menor que 7, porque o quadrado de 7 é 49.

$$\text{Assim, temos: } 36 < 42 < 49$$

$$6 < \sqrt{42} < 7$$

Estando a raiz de 42 compreendida entre 6 e 7, a diferença entre ela e um qualquer destes números é menor que 1. Se considerarmos, como raiz de 42, um dos números 6 ou 7, cometeremos um erro menor que 1; para menos, se considerarmos 6, e, para mais, se considerarmos 7. Diremos, então: 6 é a raiz aproximada de 42, por falta, com erro menor que 1;

7 é a raiz aproximada de 42, por excesso, com erro menor que 1.

Verificamos que a raiz por falta é igual à raiz do maior quadrado inteiro contido no número.

Quando um número é quadrado a sua raiz é *exata*.

Exemplos.

1.º O maior quadrado inteiro contido em 93 é 81, logo:

$$\sqrt{93} = 9, \text{ com erro menor que uma unidade.}$$

2.º O maior quadrado inteiro contido em 10,43 é 9, logo:

$$\sqrt{10,43} = 3, \text{ com erro menor que uma unidade.}$$

3.º O maior quadrado inteiro contido em $27 \frac{2}{3}$ é 25, logo,

$$\sqrt{27 \frac{2}{3}} = 5, \text{ com erro menor que uma unidade.}$$

Observamos que a raiz com erro menor que uma unidade de um número fracionário é a mesma que a de sua parte inteira.

3. Resto.

A diferença entre um número dado e o maior quadrado nele contido denomina-se *resto* da raiz quadrada.

Exemplo.

A raiz quadrada de 31, com erro menor que a unidade, é 5 e o resto é $31 - 25$ ou 6.

Esse resto é menor que a diferença entre o quadrado da raiz por falta e o quadrado da raiz por excesso; e, como aquela diferença é igual ao dobro do menor mais um (as duas raízes são números inteiros, consecutivos), concluímos que o resto é sempre menor que o dobro da raiz aumentado de uma unidade.

4. Extração da raiz quadrada a menos de uma unidade.

A operação por meio da qual determinamos a raiz quadrada de um número com erro menor que uma unidade, denomina-se *extração* da raiz quadrada. Consideramos dois casos.

1.º O número dado é menor que cem.

Neste caso a raiz procurada é menor que 10 e a tabela dos quadrados dos nove primeiros números inteiros permite obtê-la imediatamente.

E' necessário guardar de memória a tabela dos quadrados dos números de 1 a 10.

2.º O número dado é maior que 100.

Em primeiro lugar observemos que, sendo $10^2 = 100$ e $100^2 = 10\,000$, a raiz quadrada de um número compreendido entre 100 e 10 000 fica compreendida entre 10 e 100; isto é, a raiz quadrada de um número de 3 ou 4 algarismos tem 2 algarismos.

Da mesma forma $100^2 = 10\,000$ e $1\,000^2 = 1\,000\,000$, portanto, a raiz quadrada de um número de 5 ou 6 algarismos tem 3 algarismos. E assim por diante.

Assim, se dividirmos um número em grupos de *dois* algarismos, podendo o último grupo da esquerda conter um só algarismo, o número de grupos será igual ao número de algarismos da raiz.

A raiz de 56 231, por exemplo, terá 3 algarismos, porque a divisão em grupos dá 5.62.31.

Exemplos.

1.º *Extraír a raiz quadrada de 1 296.*

a) Divide-se o número em classes de dois algarismos:
12 96

b) Extraí-se a raiz da 1.ª classe (12), a menos de uma unidade, e encontra-se o 1.º algarismo da raiz:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 96 \\ \hline & 3 \end{array}$$

c) Da classe considerada subtrai-se o quadrado da raiz e, à direita do resto, escreve-se a classe seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 96 \\ \hline 9 & \\ \hline 3 & 96 \end{array}$$

d) Dividem-se as dezenas do número resultante pelo dôbro da raiz, o que fornece o segundo algarismo da raiz:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 96 \\ \hline 9 & \\ \hline 39 & 6 \\ \hline 39 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} 36 \\ \hline 39 : 6 = 6 \end{array}$$

e) Escreve-se o quociente obtido à direita do dôbro da raiz e multiplica-se o número assim formado pelo próprio quociente; o produto resultante subtrai-se do 1.º resto:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 96 \\ \hline 9 & \\ \hline 39 & 6 \\ \hline 39 & 6 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 36 \\ \hline 39 : 6 = 6 \\ 66 \times 6 = 396 \end{array}$$

R: A raiz quadrada de 1 296 é 36, exata.

2.º *Extraír a raiz quadrada de 56 231.*

a) Dividindo em classes:

5 62 31

b) A raiz a menos de 1 da 1.ª classe é 2, cujo quadrado é 4:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 62 & 31 \\ \hline 4 & & \\ \hline 1 & 62 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ \hline \end{array}$$

c) Dividindo as dezenas pelo dôbro da raiz (16 : 4), encontramos 4; mas, se multiplicarmos 44 por 4, encontraremos o número 176, maior que o resto 162. O algarismo seguinte da raiz é, pois, 3; e temos:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 62 & 31 \\ \hline 4 & & \\ \hline 16 & 2 & \\ \hline 12 & 9 & \\ \hline 33 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} 23 \\ \hline 16 : 4 = 4 \\ 44 \times 4 = 176 \\ 43 \times 3 = 129 \end{array}$$

d) Abaixando a classe seguinte e dividindo as dezenas do número formado pelo dôbro da raiz, temos:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 62 & 31 \\ \hline 4 & & \\ \hline 16 & 2 & \\ \hline 12 & 9 & \\ \hline 33 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 237 \\ \hline 16 : 4 = 4 \\ 44 \times 4 = 176 \\ 43 \times 3 = 129 \\ 333 : 46 = 7 \text{ (quoc. inteiro)} \end{array}$$

e) Escrevendo o quociente obtido (7) à direita do dôbro da raiz (46), multiplicando o número formado (467) pelo próprio quociente (7) e subtraindo o produto do 2.º resto:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 62 & 31 \\ \hline 4 & & \\ \hline 16 & 2 & \\ \hline 12 & 9 & \\ \hline 333 & 1 & \\ \hline 326 & 9 & \\ \hline 6 & 2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 237 \\ \hline 16 : 4 = 4 \\ 44 \times 4 = 176 \\ 43 \times 3 = 129 \\ 333 : 46 = 7 \\ 467 \times 7 = 3\ 269 \end{array}$$

1.º resto
2.º resto
resto da raiz

R: A raiz quadrada de 56 231, a menos de uma unidade, é 237 e o resto é 62.

REGRA:

a) Divide-se o número em classes de dois algarismos a partir da direita, podendo a última classe conter um único algarismo.

b) O primeiro algarismo da raiz é a raiz quadrada da primeira classe à esquerda.

c) Da classe considerada subtrai-se o quadrado da raiz e, à direita do resto, escreve-se a classe seguinte.

d e e) Dividem-se as dezenas do número resultante pelo dúbio da raiz, o que fornece o segundo algarismo. Escreve-se o quociente obtido à direita do dúbio da raiz e multiplica-se o número obtido pelo próprio quociente; subtrai-se o produto obtido do número formado pelo primeiro resto seguido da classe abaixada.

À direita do segundo resto escreve-se a classe seguinte; e assim sucessivamente, até se ter considerado todas as classes.

3.º Extrair a raiz quadrada de 23 409.

Neste exemplo daremos apenas a disposição prática do cálculo, que já será compreendida, sem assinalar as diferentes etapas.

	2 34 09	153	
	1	13 : 2 = 6	
1.º resto	13.4	26 × 6 = 156 (o algarismo 6	
	12 5	25 × 5 = 125	é forte)
2.º resto	90.9	90 : 30 = 3	
	90 9	303 × 3 = 909	
resto da raiz	0		

5. Determinação de uma raiz por decomposição em fatores.

Se o número dado é quadrado, pode-se obter a raiz quadrada decompondo-o em fatores primos, e dividindo por 2 os expoentes dos mesmos fatores.

Exemplos.

$$1.º \quad 144 = 2^4 \times 3^2, \text{ logo } \sqrt{144} = 2^2 \times 3 = 12.$$

$$2.º \quad \sqrt{441} = \sqrt{3^2 \times 7^2} = 3 \times 7 = 21.$$

Analogamente, poderemos proceder para extrair raizes de qualquer outro grau.

Exemplo.

$$\sqrt[3]{9261} = \sqrt[3]{3^3 \times 7^3} = 3 \times 7 = 21.$$

6. Prova.

Verifica-se, em primeiro lugar, se o resto é menor que o dúbio da raiz mais um. Esta condição preenchida, a prova consistirá em elevar a raiz encontrada ao quadrado, e somar o resto; o resultado deve ser o número dado.

EXERCÍCIOS

1. Extrair a raiz quadrada, a menos de uma unidade, dos números: 196; 225; 576; 34 969; 41 616; 15 229; $680 \frac{5}{7}$; 961,73; 94 372; 76 176; 18 225.

R: 14; 15; 24; 187; 204; 123; 26; 31; 307; 276; 135

2. Extrair as seguintes raizes, decompondo os números em fatores primos:

$$\sqrt{3969} \quad \sqrt{6561} \quad \sqrt{8281} \quad \sqrt[3]{729} \quad \sqrt[3]{3375}$$

R: 63; 81; 91; 9; 15

3. Extrair a raiz quadrada dos seguintes produtos, sem efetuá-los: 64×81 ; $2^4 \times 3^6$; $5^2 \times 7^2$; 169×49 .

R: 72; 108; 35; 91

4. Determinar o lado de um quadrado que tem 729 m^2 de área.

R: 27 m

5. Determinar o comprimento, em metros, do lado de um quadrado que tem $112,36 \text{ ha}$ de área.

R: 1060 m

6. Que comprimento deve ter o lado de um quadrado para que sua área seja igual à de um retângulo que tem 28 m de largura e 63 m de comprimento?

R: 42 m