metro quadrado correspondem a $\frac{7450000}{100}$ do centimetro quadrado, e ter-se-ha

$$7^{mq},45 = \frac{7450000^{cmq}}{100}$$
$$= 74500^{cmq}$$

Comparando o numero obtido com o proposto, vê-se que bastava ter multiplicado este ultimo numero por 10000, que é a relação entre a maior unidade e a menor.

REGRA.—*Para mudar a unidade á qual um numero está referido, divide-se ou multiplica-se este numero pela relação entre a maior unidade e a menor:* divide-se, *quando a nova unidade é maior que a primitiva ;* multiplica-se, *no caso contrario.*

A mudança de unidade corresponde, no systema metrico, a uma simples mudança da virgula decimal.

OPERAÇÕES.—As operações sobre numeros referidos a unidades metricas, não exigem regras especiaes. Em relação, porém, á unidade do resultado, cumpre ter em vista as observações que seguem.

Addição e subtracção.—Os numeros dados, que devem ser da mesma especie, é necessario que sejam referidos á mesma unidade (quando o não estiverem); e a esta unidade se-refere o resultado.

Multiplicação.—O producto é, geralmente, da especie do multiplicando, e vem referido á mesma unidade. Digo *geralmente*, porque ha duas excepções a este principio (o qual, entretanto, se-costuma enunciar sem restricção alguma): 1ª, se os factores exprimirem *unidades de comprimento*, o producto ex-

primirá *unidades de area*, quando os factores forem *dous*, e *unidades de volume*, quando os factores forem *tres*; 2ª, se os factores forem dous, e se um exprimir *unidades de area* e o outro *unidades de comprimento*, o producto exprimirá *unidades de volume*. Em qualquer destes casos é necessario reduzir os factores á mesma unidade, e a esta virá referido o producto.

Divisão.—Na divisão consideram-se dous casos, conforme os numeros dados são da mesma especie ou de especie diversa. Se o dividendo e o divisor são da mesma especie, o quociente exprimirá quantas vezes o dividendo contem o divisor; e a especie da unidade a que o quociente se-refere será determinada pela natureza da questão. Se o dividendo e o divisor são de especie diversa, o quociente será, em geral, da especie do dividendo: exceptuam-se os casos em que o dividendo exprime unidades de volume ou de area e o divisor exprime unidades de area ou de comprimento.

CAPITULO II

SYSTEMAS METROLOGICOS COMPLEXOS

379.—Embora sejam incontestaveis as vantagens do systema metrologico decimal sobre qualquer outro, ha nações onde aquelle systema não foi ainda legalmente auctorizado: necessario é, pois, que se-tenha idéa geral ácerca dos systemas metrologicos differentes do decimal, que se-qualificam de *complexos*. Mas, como, por outra parte, esse estudo tem mais cabimento num tractado de Arithmetica commercial, por isso restringir-nos-hemos aqui a falar sómente do systema metrologico outr'ora usado entre nós.

UNIDADES DE AREA

Legua quadrada . . .	9 milhas quadradas
Milha quadrada . . .	$(841,75)^2$ da braça quadrada
Braça quadrada . . .	4 varas quadradas
VARA QUADRADA . . .	25 palmos quadrados
Palmo quadrado . .	64 polleg. quadradas
Pollegada quadrada . .	144 linhas quadradas

Usava-se ainda

Geira	400 braças quadradas

UNIDADES DE VOLUME

VARA CUBICA . . .	125 palmos cubicos
Palmo cubico . . .	512 pollegadas cubicas
Pollegada cubica . . .	1728 linhas cubicas

UNIDADES DE CAPACIDADE

1) *Para seccos*

Moio	15 fangas
Fanga	4 alqueires
ALQUEIRE	4 quartas
Quarta	4 selamins

2) *Para liquidos*

Tonel	2 pipas
Pipa	15 almudes
Almude	12 canadas
CANADA	4 quartilhos

UNIDADES DE PESO

Tonellada	13,5 do quintal
Quintal	4 arrobas
Arroba	32 libras
Libra	2 marcos
MARCO	8 onças
Onça	8 oitavas
Oitava	3 escropulos
Escropulo	6 quilates
Quilate	4 grãos

UNIDADES DE ARCO (*)

Quadrante	90 graos
GRAO	60 minutos
Minuto	60 segundos

§ 2.º—**Calculo**

382.—A avaliação das qnantidades por meio das unidades de medida complexas, obriga os numeros que exprimem essas quantidades a tomarem uma fórma particular, logo-que a primeira unidade em cada caso escolhida não se-contiver exactamente na quantidade: tem-se, então, *numeros complexos*.

NUMERO COMPLEXO *é o numero que consta de unidades diversas, resultantes da divisão e subdivisão successiva da maior dellas em qualquer numero de partes eguaes.*

O numero $5^h\ 47^m\ 30^s$ é, pois, complexo. As partes que constituem o numero complexo chamam-se

(*) Não apresentamos aqui as unidades de tempo e de moeda, por serem muito conhecidas.

termos; e a maior das unidades a que se-referem os termos é a *unidade principal*.

NUMERO INCOMPLEXO *é o numero que se-refere a uma só unidade.*

Os numeros 5^{h}, 47^{m} e 30^{s} são, portanto, incomplexos; tambem o-são os numeros $\frac{4\ \text{lb}}{5}$, $\frac{28\ \text{ar}}{9}$.

383.—Tractando-se de numeros incomplexos, a numeração, a mudança de unidade e as operações fundamentaes não offerecem particularidade notavel: lêm-se e escrevem-se como numeros inteiros ou como fracções; a mudança de unidade effectua-se pela regra (n. 378) estabelecida para as unidades metricas; as operações estão subjeitas aos reparos em que tocámos tractando dessas unidades.

O mesmo não succede, porém, relativamente aos numeros complexos: nas operações sobre estes numeros sentem-se, frequentes vezes, embaraços que provêm da falta de uniformidade nas relações entre as unidades de cada especie. Entremos, pois, a occupar-nos com o calculo dos numeros complexos.

384.—NUMERAÇÃO.—Lê-se ou escreve-se um numero complexo, lendo ou escrevendo seguidamente, da esquerda para a direita, cada um dos seos termos. Assim, o numero complexo 35° 13' 28" ler-se-ha 35 *graos*, 13 *minutos* e 28 *segundos* (*); o numero complexo 7 *dias*, 15 *horas* e 20 *minutos* escrever-se-ha 7^{d} 15^{h} 20^{m}.

385.—MUDANÇA DE UNIDADE.—Esta questão subdivide-se em tres questões secundarias, de que passamos a tractar.

(*) Não se-confundam minutos e segundos de tempo com minutos e segundos de arco: os primeiros designam-se com as lettras (^{m}) e (^{s}) e os ultimos com os signaes (') e (").

Reduzir um numero complexo a incomplexo da menor unidade.—Seja dado o numero complexo 5^{br} 1^{v} 3^{p}, que queremos reduzir a numero incomplexo do palmo. Se 1 braça tem 2 varas, 5 braças terão 2.5 ou 10 varas: com 1 vara que existe no numero, temos 11 varas. Se 1 vara tem 5 palmos, 11 varas terão 5.11 ou 55 palmos: mais 3 palmos que existem no numero, são 58 palmos, que é o numero pedido. A operação consistiu em *reduzir cada termo a unidades de ordem immediatamente inferior e junctar ao resultado as unidades desta ordem que havia no numero dado.* Eis a disposição do calculo:

$$\begin{array}{r} 5^{br} \\ 2 \\ \hline 10 \\ 1 \\ \hline 11^{v} \\ 5 \\ \hline 55 \\ 3 \\ \hline 58^{p} \end{array}$$

Reduzir um numero complexo a incomplexo da unidade principal. — Seja dado o numero complexo 15^{lb} $13^{onç}$ 5^{oit}, que queremos reduzir a numero incomplexo da libra. Reduzindo a oitavas, tanto o numero dado como 1 libra, vê-se que o numero dado equivale a 2029 oitavas e que 1 libra tem 128 oitavas; ora, se 1 libra tem 128 oitavas, 1 oitava é $\frac{1}{128}$ da libra: portanto, 2029 oitavas correspondem a $\frac{2029^{lb}}{128}$, que é o numero procurado. A operação consistiu em *formar uma fracção que tem por numerador o numero proposto reduzido á menor unidade, e por denominador a unidade principal tambem reduzida á menor unidade*. Eis a disposição do calculo:

$$15^{lb}\ 13^{onç}\ 5^{oit} = \frac{2029^{lb}}{128} \qquad 1^{lb}$$

```
 16                16
 ---              -----
 90               16onç
 15                 8
 ---              -----
 240              128oit
  13
 ------
 253onç
    8
 ------
 2024
    5
 ------
 2029oit
```

Reduzir um numero incomplexo a complexo. — Podem aqui dar-se duas circumstancias, conforme o numero dado se-refere á menor unidade ou á unidade principal.

Supponha-se que queremos reduzir a complexo o numero 389^d, referido á menor unidade, o *dinheiro* sterlino (*). Se o soldo tem 12 dinheiros, o numero 389 conterá tantos soldos quantas vezes contiver 12 dinheiros: fazendo a divisão, vem 32 soldos, e restam 5 dinheiros. Se 1 libra sterlina tem 20 soldos, os 32 soldos conterão tantas libras quantas vezes contiverem 20 soldos: feita

(*) A libra sterlina tem 20 soldos, e o soldo tem 12 dinheiros.

a divisão, obtem-se 1 libra sterlina, e ficam 12 soldos. O numero procurado consta, pois, de $1£\ 12^s\ 5^d$.

Admitta-se agora que queremos reduzir a complexo o numero $\frac{143^{pip}}{40}$, referido á unidade principal, a *pipa*. O numero dado exprime o quociente da divisão de 143 pipas por 40: feita a divisão, acham-se 3 pipas, e ficam 23 pipas para dividir por 40. Se uma pipa tem 15 almudes, 23 pipas conterão 23.15 ou 345 almudes: fazendo a divisão deste numero por 40, vém 8 almudes, e restam 25 almudes para dividir por 40. Se 1 almude tem 12 canadas, 25 almudes terão 25.12 ou 300 canadas: fazendo a divisão deste numero por 40, tem-se 7 canadas, e ficam 20 canadas para dividir por 40. Se 1 almude tem 4 quartilhos, 20 canadas terão 20.4 ou 80 quartilhos: feita a divisão de 80 quartilhos por 40, acha-se 2 quartilhos. Assim, o numero pedido consta de $3^{pip}\ 8^{alm}\ 7^{can}\ 2^{quart}$. A disposição do calculo é a seguinte:

```
389d | 12                      143pip | 40
 29   -----                     23     -------------------------
 5d   32s | 20                  15      3pip 8alm 7can 2quart
      12s  -----               -----
            1£                  115
                                23
                               ------
                               345alm
                                 25
                                 12
                               ------
                                 50
                                25
                               ------
                               300can
                                 20
                               ------
                                80quart
```

Esta questão é a inversa das duas precedentes.

386.—Operações.—As operações sobre numeros complexos effectuam-se por dous methodos: o *methodo directo*, que consiste em operar sobre os mesmos numeros dados mediante regras especiaes; e o *methodo indirecto* que consiste em reduzir os numeros complexos a incomplexos, operar sobre estes, e converter o resultado em numero complexo. Prefere-se o methodo directo, por ser menos longo.

Addição e subtracção.—A addição e a subtracção de numeros complexos fazem-se como a addição e a subtracção de numeros inteiros, attendendo, porém, ás relações que existem entre as diversas ordens de unidades complexas.

Exemplos :

ADDIÇÃO

12^d	15^h	43^m	16^s
7	21	09	50
15	06	20	30
35^d	19^h	13^m	36^s

SUBTRACÇÃO

15°	56'	30"
7	43	51
8°	12'	39"

Multiplicação.—Na multiplicação de numeros complexos tem logar a observação que fizémos (n. 378) a respeito da multiplicação de numeros referidos a unidades metricas. Para maior facilidade, consideram-se dous casos, segundo o multiplicador é incomplexo ou complexo.

Supponha-se, em primeiro logar, que o multiplicador é numero incomplexo. Se o multiplicador é incomplexo e simples, faz-se a multiplicação proposta como a de numero inteiro composto por numero simples, attendendo, comtudo, ás relações que ligam as unidades complexas. Se o multiplicador é incomplexo e composto, emprega-se o methodo chamado das *partes aliquotas*, o qual consiste aqui em *decompôr cada termo do multiplicando em partes aliquotas* (divisores exactos e simples) *da unidade immediatamente superior, e multiplicar cada uma dellas pelo multiplicador*.

Exemplos :

1.°

1^{moio}	13^{fangas}	3^{alq}
		5
11^{moios}	7^{fangas}	2^{alq}

2.°

	1^{pip}	14^{alm}	7^{can}
	25		
1^{pip}	25^{pip}		
5^{alm}	8	5^{alm}	
5	8	5	
3	5	—	
1	1	10	
4^{can}	—	8	4^{can}
2	—	4	2
1	—	2	1
	49^{pip}	4^{alm}	7^{can}

O primeiro dos exemplos que precedem não carece de explicação; vejamos o segundo. O producto de 1 pipa por 25 não offerece difficuldade na sua formação: acha-se 25^{pip}. O producto de 14 almudes por 25 obtem-se formando separadamente os productos de 5 almudes, 5 almudes, 3 almudes e 1 almude, que são as partes aliquotas da pipa contidas em 14 almudes; ora, sendo 5 almudes a terça parte de 1 pipa, o producto de 3 almudes é a terça do producto de 1 pipa, ou a terça parte de 25 pipas : tem-se $8^{pip}\ 5^{alm}$, que se-repete ; sendo 3 almudes a quinta parte de 1 pipa, o producto de 3 almudes é a quinta parte do producto de 1 pipa, ou a quinta parte de 25 pipas: vem 5^{pip} para resultado; finalmente, sendo 1 almude a terça parte de 3 almudes, o producto de 1 almude é a terça do producto de 3 almudes, ou a terça parte de 5 pipas : obtem-se $1^{pip}\ 10^{alm}$. O producto de 7 canadas por 25 determina-se formando separadamente os productos de 4 canadas, 2 canadas e 1 canada, que são as partes aliquotas do almude contidas em 7 canadas; ora, sendo 4 canadas a terça parte de 1 almude, o producto de 4 canadas é a terça parte do producto de 1 almude, ou a terça parte de $1^{pip}\ 10^{alm}$: acha-se $8^{alm}\ 4^{can}$; sendo 2 canadas metade de 4 canadas, o producto de 2 canadas é metade do producto de 4 canadas, ou metade de $8^{alm}\ 4^{can}$: obtem-se $4^{alm}\ 2^{can}$; por fim, sendo 1 canada metade de 2 canadas, o producto de 1 canada é metade do producto de 2 canadas, ou metade de $4^{alm}\ 2^{can}$: encontra-se $2^{alm}\ 1^{can}$. Addicionando os productos parciaes obtidos, ter-se-ha o producto total, que é $49^{pip}\ 4^{alm}\ 7^{can}$.

Supponha-se, em segundo logar, que o multiplicador é complexo, quer o-seja, quer não, o multiplicando. Neste caso emprega-se o processo das partes aliquotas : para o que decompõe-se cada termo do multiplicando (se for complexo) e do multiplicador em partes aliquotas da unidade immediatamente superior, e practica-se a multiplicação por cada uma dellas ; notando, porém, que, se o primeiro termo do multiplicador é numero simples, procede-se como no primeiro dos exemplos anteriores. Sommados os productos parciaes, ter-se-ha o producto final.

Exemplo :

$$\begin{array}{r|llllll}
 & 7^{br} & 1^{v} & 3^{p} & & & \\
 & 5^{ar} & 31^{lb} & & & & \\
\hline
5^{ar} & 39^{br} & & & & & \\
16^{lb} & 3 & 1^{v} & 4^{p} & & & \\
8 & 1 & 1 & 4 & + & \frac{1^{p}}{2} \cdots\cdots & \frac{8^{p}}{16} \\
4 & — & 1 & 4 & + & \frac{3}{4} \cdots\cdots & \frac{12}{16} \\
2 & — & — & 4 & + & \frac{7}{8} \cdots\cdots & \frac{14}{16} \\
1 & — & — & 2 & + & \frac{7}{16} \cdots\cdots & \frac{7}{16} \\
\hline
 & 46^{br} & 1^{v} & & + & \frac{9^{p}}{16} \cdots\cdots & \frac{41}{16}
\end{array}$$

O producto do multiplicando por 5 arrobas obtem-se facilmente, segundo já se-explicou : encontramos 39^{br}. O producto do multiplicando por 31 libras acha-se formando separadamente os productos por 16 libras, 8 libras, 4 libras, 2 libras e 1 libra, que são as partes aliquotas da arroba contidas em 31 libras ; ora, sendo 16 libras metade de 1 arroba, o producto por 16 libras é metade do producto por 1 arroba, ou metade de $7^{br}\ 1^{v}\ 3^{p}$: obtem-se $3^{br}\ 1^{v}\ 4^{p}$; sendo 8 libras metade de 16 libras, o producto por 8 libras é metade do producto por 16 libras, ou metade de $3^{br}\ 1^{v}\ 3^{p}$: acha-se $1^{br}\ 1^{v}\ 4^{p} + \frac{1^{p}}{2}$; e assim se-continua, até chegar ao producto por 1 libra, que é $2^{p} + \frac{7^{p}}{16}$.

Muitas vezes, para facilitar a operação, somos levados a formar o producto por uma unidade de ordem immediatamente superior áquella de que se-tracta : este plexos da menor unidade, e depois dividir os numeros resultantes, attendendo á especie de unidades que, conforme a natureza da questão, o quociente deve exprimir. Se, por, exemplo, tivessemos de dividir $37^{ar}\ 5^{lb}\ 8^{onç}$ por $3^{ar}\ 2^{lb}$, e se as unidades do quociente tivessem de ser a *libra sterlina*, o *soldo* e o *dinheiro*, viria :

$37^{ar}\quad 5^{lb}\quad 8^{onç}$	$3^{ar}\quad 2^{lb}$
32	32
74	96
111	2
1184	98^{lb}
5	16
1189^{lb}	588
16	98
7134	$1568^{onç}$
1189	
19024	
8	
$19032^{onç}$	

19032£	1568
3352	$12£\ 2^s\ 9^d + \frac{3^d}{49}$
216	
20	
4320^s	
1184	
12	
2368	
1184	
14208^d	
96	

CAPITULO III

CONVERSÕES

387.—Teremos muitas vezes precisão de referir a unidades metricas uma quantidade avaliada em unidades complexas, e vice-versa; ora, se conhecermos a relação entre as unidades dos dous systemas, facil será effectuar a mudança de unidade : mostremos, pois, como se-acham as dictas relações.

388.—Comparemos as unidades principaes do systema metrico e do systema complexo.

Da comparação do metro com a vara, resulta que

$$10^v = 11^m,$$

e dividindo, primeiro por 10, e depois por 11, ambos os membros desta egualdade, obtem-se as duas relações fundamentaes

$$1^v = \frac{11^m}{10} = 1^m,1,$$

$$1^m = \frac{10^v}{11} = 0^v,9090,\ldots$$

Estas duas relações chamam-se *coefficientes de conversão* (*): a primeira serve para converter *varas* em *metros*, e a segunda para converter *metros* em *varas*.

Sabemos que o quadrado construido sobre 10^v encerra 100^{vq} e que o quadrado construido sobre 11^m contem 121^{mq}; porém, desde que 10^v valem o mesmo que 11^m, segue-se que o quadrado de 10^v é equivalente ao quadrado de 11^m, e teremos, pois,

$$100^{vq} = 121^{mq},$$

(*) A palavra *coefficiente* significa aqui *numero constante* pelo qual devemos multiplicar uma quantidade variavel para obter outra quantidade variavel.

donde se-tiram as duas relações

$$1^{vq} = \frac{121^{mq}}{100} = 1^{mq},21,$$

$$1^{mq} = \frac{100^{vq}}{121} = 0^{vq},83,$$

a primeira das quaes serve para converter *varas quadradas* em *metros quadrados*, e a segunda para converter *metros quadrados* em *varas quadradas*.

Por um raciocinio analogo ao precedente, achariamos

$$1000^{vc} = 1331^{mc},$$

donde se-deduz

$$1^{vc} = \frac{1331^{mc}}{1000} = 1^{mc},331,$$

$$1^{mc} = \frac{1000^{vc}}{1331} = 0^{vc},751,$$

e destas relações, a primeira serve para converter *varas cubicas* em *metros cubicos*, e a segunda para converter *metros cubicos* em *varas cubicas*.

Segundo a definição de canada, temos

$$1^{can} = 2.(0^{v},1)^3;$$

reduzindo o segundo membro a metros cubicos e depois a litros, virá

$$\begin{aligned} 2.\,(0^{v},1)^3 &= 2.\,(0^{m},11)^3 \\ &= 2 \times 0^{mc},001331 \\ &= 0^{mc},002662 \\ &= 2^{l},662: \end{aligned}$$

por conseguinte,

$$1^{can} = 2^{l},662,$$

donde se-tira, dividindo por 2,662,

$$1^{l} = 0^{can},376.$$

Segundo a definição de alqueire, tem-se

$$1^{alq} = \left(27 + \frac{1}{4}\right).\,(0^{v},1)^3;$$

reduzindo o segundo membro a metros cubicos e depois a litros, ter-se-ha

$$\begin{aligned} \left(27 + \frac{1}{4}\right)\cdot (0^{v},1)^3 &= 27,25 \times (0^{m},11)^3 \\ &= 27,25 \times 0^{mc},001331 \\ &= 0^{mc},03626975 \\ &= 36^{l},26975: \end{aligned}$$

portanto, teremos, proximamente,

$$1^{alq} = 36^{l},27,$$

donde se-deduz, dividindo por 36,27,

$$1^{l} = 0^{alq},0275.$$

Para obter a relação entre o marco e o grammo, seria necessario que entrassemos aqui em considerações extranhas a este nosso trabalho: diremos sómente que, comparando o peso do marco com o do grammo, achou-se que

$$1^{marc} = 229^{g},5,$$

donde se-deduz, dividindo por 229,5.

$$1^{g} = 0^{marc},00436.$$

Por meio das doze relações que acabamos de achar, podem-se obter os coefficientes de conversão relativos aos multiplos e aos submultiplos de cada unidade principal: mostremos como se-consegue isto. Seja pedido o coefficiente de conversão de *braças* em *decametros*; teremos

$$1^{br} = 2^{v},$$
$$1^{v} = 1^{m},1,$$
$$1^{Dm} = 10^{m}:$$

portanto,

$$1^{br} = 1^{m},1 \times 2$$
$$= 2^{m},2$$
$$= 0^{Dm},22.$$

Estes coefficientes determinam-se com extrema facilidade mediante um processo, de que logo tractaremos, chamado *Regra conjuncta*

LIVRO VIII

PROBLEMAS USUAES

389.— *Duas quantidades* que variam ao mesmo tempo, *são directamente proporcionaes uma á outra* quando a razão entre dous valores da primeira é igual á razão directa entre os valores correspondentes da segunda.—Por exemplo: o *salario* de um trabalhador é directamente proporcional ao *tempo* durante o qual elle trabalha; o *comprimento de uma circumferencia* é directamente proporcional ao do *raio* (*).

No primeiro dos precedentes exemplos, a proporcionalidade resulta de uma *convenção*; no segundo, de uma *demonstração*, propria da Geometria. Na Arithmetica não se-deduz a proporcionalidade entre duas quantidades: admitte-se como um facto; comtudo, podemos reconhecer essa proporcionalidade mediante o principio que segue:

Duas quantidades são directamente proporcionaes quando, tornando-se a primeira um certo numero de vezes maior ou menor, a segunda se-torna o mesmo numero de vezes maior ou menor.

(*) De ordinario subentende-se a palavra *directamente*.

390.— *Duas quantidades* que variam ao mesmo tempo, *são inversamente proporcionaes* quando a razão entre dous valores da primeira é egual á razão inversa entre os valores correspondentes da segunda.—Por exemplo: *o numero dos trabalhadores* que executam uma mesma obra é inversamente proporcional ao *tempo* necessario para terminál-a; a *velocidade* de um corpo que se-move com movimento uniforme é inversamente proporcional ao *tempo* que o corpo gasta.

No primeiro dos anteriores exemplos, é por *convenção* que as duas quantidades são inversamente proporcionaes; no segundo, é em consequencia de uma *demonstração*, propria da Mechanica. Reconhecemos que duas quantidades são inversamente proporcionaes mediante o principio seguinte:

Duas quantidades são inversamente proporcionaes quando, tornando-se a primeira um certo numero de vezes maior ou menor, a segunda se-torna o mesmo numero de vezes menor ou maior.

391.— Ordinariamente uma quantidade depende de muitas outras, e não de uma só; e póde ser directamente proporcional a algumas dessas outras, e inversamente proporcional ás restantes. Neste caso, quando se-diz que uma quantidade é directa ou inversamente proporcional a outra, suppõem-se *constantes* as demais quantidades que a-fazem variar.

392.— Estabelecidas estas noções preliminares, passemos á resolução dos principaes problemas em que as quantidades estão ligadas umas ás outras pela relação de proporcionalidade.

CAPITULO I

REGRA DE TRES

393.—Regra de tres *é a questão que tem por fim, sendo conhecidos um valor de certa quantidade e o valor ou os valores simultaneos de outras quantidades, ás quaes aquella é directa ou inversamente proporcional, determinar o valor que toma a primeira quantidade logoque ás outras se-attribuam novos valores simultaneos.*

Quando duas quantidades são proporcionaes, directa ou inversamente, se egualarmos a razão entre os dous valores de uma e a razão, directa ou inversa, entre os dous valores correspondentes da outra, teremos uma proporção: podemos, portanto, dizer que

Regra de tres *é o processo que tem por objecto a resolução dos problemas dependentes de uma ou mais proporções.*

394.—A Regra de tres divide-se em *simples* e *composta.*

Regra de tres simples *é a que tem por objecto resolver problemas dependentes de uma só proporção.*

Regra de tres composta *é a que tem por objecto resolver problemas dependentes de mais de uma proporção.*

Em uma Regra de tres simples, chamam-se *termos principes* os dous valores de uma mesma quantidade conhecidos, e denominam-se *termos relativos* os dous valores de uma mesma quantidade, um dos quaes é desconhecido.

Em uma Regra de tres qualquer, as duas series de valores simultaneos chamam-se *periodos*: estes escrevem-se um por baixo do outro, de modo que se-correspondam os valores da mesma quantidade.

395.—A Regra de tres simples classifica-se em *directa* e *inversa* : é *directa* quando os termos principaes e os seos relativos são directamente proporcionaes; é *inversa* quando os termos principaes e os seos relativos são inversamente proporcionaes. 3 - 7 - 94

94

§ 1º.—**Regra de tres simples**

396.—A resolução de um problema por meio de uma Regra de tres simples, comprehende duas operações distinctas : 1ª, *estabelecer a proporção*; 2ª, *calcular o termo desconhecido*.

397.—*Regra de tres simples directa.*—Para estabelecer a proporção em uma Regra de tres simples directa, temos o seguinte processo :

O termo principal e o seo relativo conhecido são os antecedentes; o outro termo principal e o seo relativo desconhecido são os consequentes.

Verifiquemos esta regra.

Problema I. *Se 15 trabalhadores fizeram 56 metros de certa obra; 18 trabalhadores, nas mesmas circumstancias que os primeiros, quantos metros farão ?*

$$\begin{array}{lcl} 15^{tr.} & \_\_\_\_\_\_\_\_ & 56^{m} \\ 18 & \_\_\_\_\_\_\_\_ & x \end{array}$$

Temos neste problema duas quantidades : trabalhadores e metros de obra; e além disso, os valores numericos da primeira são 15 e 18, e os valores correspondentes da segunda são 56 e x; ora, se o numero de trabalhadores tornar-se 2, 3, etc., vezes maior ou menor, o numero de metros de obra tambem se-tornará 2, 3,

etc. vezes maior ou menor : logo, as duas quantidades são directamente proporcionaes, e, pois, a razão entre dous valores numericos da primeira é egual á razão entre os valores correspondentes da segunda; isto é,

$$15 : 18 = 56 : x$$

Por esta proporção se-vê que o termo principal 15 e o seo relativo conhecido 56 são antecedentes, e que o outro termo principal 18 e o seo relativo desconhecido x são consequentes.

Estabelecida a proporção, sabemos tirar della o valor da incognita (n. 298). Assim, da proporção precedente deduz-se

$$x = \frac{18.56}{15} = \frac{1008}{15} = 67^{m},20$$

398.—*Regra de tres simples inversa.*—Para estabelecer a proporção em uma Regra de tres simples inversa, temos o processo que segue :

O termo principal e o seo relativo conhecido são os meios ; o outro termo principal e o seo relativo desconhecido são os extremos.

Verifiquemos esta regra.

Problema II. *Se 9 trabalhadores fazem uma certa obra em 14 dias ; 21 trabalhadores em que tempo farão a mesma obra ?*

$$\begin{array}{lcl} 9^{tr} & \_\_\_\_\_\_\_\_ & 14^{d} \\ 21 & \_\_\_\_\_\_\_\_ & x \end{array}$$

Neste problema temos duas quantidades : numero de trabalhadores e tempo ; e além disso, os valores numericos da primeira são 9 e 21, e os valores correspondentes da segunda são 14 e x ; ora, se o numero de trabalhadores tornar-se 2, 3, etc. vezes maior ou menor, o numero de dias de trabalho tornar-se-ha 2, 3, etc. vezes menor ou maior: portanto, as duas quantidades são inversamente proporcionaes, e, pois, a razão entre dous valores numericos da primeira é egual á razão inversa entre os valores correspondentes da segunda; isto é,

94

$$21 : 9 = 14 : x$$

Por esta proporção se-vê que o termo principal 9 e o seo relativo conhecido 14 são meios, e que o outro termo principal 21 e o seo relativo desconhecido x são extremos.

Da precedente proporção deduz-se (n. 298)

$$x = \frac{9.14}{21} = 6^{d}.$$

§ 2.º—Regra de tres composta

399.— Resolve-se uma Regra de tres composta decompondo-a em tantas Regras de tres simples menos uma quantas forem as quantidades que figuram no problema. Vejamos como isto se-consegue.

Problema I. *Se 25 trabalhadores empregaram 18 dias para fazer 47 metros de certa obra; 36 trabalhadores quantos dias empregarão para fazer 64 metros da mesma obra?*

$$\begin{array}{llll} 25^{tr} & \text{———} \ 18^{d} & \text{———} \ 47^{m} \\ 36 & \text{———} \ x & \text{———} \ 64 \end{array}$$

Este problema resolve-se por uma Regra de tres composta, porque no seo enunciado figuram mais de duas quantidades: numero de trabalhadores, numero

de dias, e numero de metros de obra. Para acharmos as proporções que o-resolvem, supponhamos que os 36 trabalhadores fizeram a mesma obra que os 25; teremos então, o problema seguinte:

$$\left.\begin{array}{llll} 25^{tr} & \text{———} \ 18^{d} & \text{———} \ 47^{m} \\ 36 & \text{———} \ x' & \text{———} \ » \end{array}\right\} 36:25 = 18:x',$$

sendo x' o numero de dias em que os 36 trabalhadores fazem 47 metros da obra; porém, como queremos saber em quantos dias elles fazem 64 metros, teremos o problema seguinte:

$$\left.\begin{array}{llll} 36^{tr} & \text{———} \ x' & \text{———} \ 47^{m} \\ » & \text{———} \ x & \text{———} \ 64 \end{array}\right\} 47:64 = x':x.$$

Multiplicando ordenadamente as duas proporções achadas (n. 303), virá

$$36.47:25.64 = 18.x':x'.x:$$

dividindo por x' os dous ultimos termos, vem

$$36.47:25.64 = 18.x,$$

donde se-tira (n. 298)

$$x = \frac{25.64.18}{36.47} = \frac{25.32}{47} = 17^{d} + \frac{1^{d}}{47}$$

400.— Observação. — Para facilitar a resolução da Regra de tres composta, notemos que: 1º, o quarto termo de cada proporção (exceptuada a ultima) é o terceiro termo da proporção seguinte; 2º, quando multiplicamos ordenadamente as proporções, podemos logo escrever no terceiro termo da proporção final o terceiro termo da primeira proporção, e no quarto termo da mesma proporção final o quarto termo da ultima proporção; 3°, podemos deduzir as proporções immediatamente do quadro dos valores, segundo vamos mostrar na resolução do problema que segue.

PROBLEMA II. *Se para vestir 60 homens são necessarios 387 metros de panno, de $\frac{5}{6}$ do metro em largura; quantos metros de panno, de $\frac{3}{4}$ do metro em largura, serão necessarios para vestir 87 homens?*

$$60^h \text{———} 387^m \text{———} \frac{5_m}{6} \text{ (largura)}$$
$$87 \text{———} x \text{———} \frac{3}{4} \text{ (»)}$$

$$60 : 87 = 387 : x',$$

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = x' : x;$$

desembaraçando dos denominadores a segunda proporção (*), vem

$$18 : 20 = x' : x$$

portanto,

$$60.18 : 87.20 = 387 : x,$$

donde

$$x = \frac{87.20.387}{60.18} = \frac{29.43}{2} = 623^m,50$$

401.—A Regra de tres tambem póde ser resolvida

(*) Basta multiplicar os dous primeiros termos (n. 299) por 4 6.

pelo *methodo de reducção á unidade*, que consiste em — procurar o valor que toma a quantidade representada pela incognita, quando cada uma das outras quantidades é egual á *unidade*; e desse valor deduzir em seguida a incognita do problema.

Um exemplo esclarecerá a applicação do methodo.

PROBLEMA III. *Se 45 operarios fazem 70 metros de certa obra em 28 dias, trabalhando 8 horas por dia; em quantos dias 56 operarios farão 84 metros da mesma obra, trabalhando apenas 5 horas por dia?*

$$45^{op} \text{———} 70^m \text{———} 28^d \text{———} 8^h$$
$$56 \text{———} 84 \text{———} x \text{———} 5$$

Se, em logar de 45 operarios, suppozermos um só, o numero de dias necessario para executar a obra é 45 vezes maior, ou 28.45. Se, em logar de 70 metros, suppozermos um só, o numero de dias será 70 vezes menor, ou $\frac{28.45}{70}$. Se, em logar de 8 horas por dia, suppozermos uma só, o numero de dias necessario será 8 vezes maior, ou $\frac{28.45.8}{70}$.

Portanto, $\frac{28.45.8}{70}$ é o numero de dias em que um operario faz um metro da obra, trabalhando uma hora por dia.

Se, em logar de 1 operario, suppozermos 56, o numero de dias será 56 vezes menor, ou $\frac{28.45.8}{70.56}$. Se, em logar de 1 metro de obra, suppozermos 84, o numero de dias será 84 vezes maior, ou $\frac{28.45.8.84}{70.56}$. Se, finalmente, em logar de 1 hora por dia, suppozermos 5, o numero de dias será 5 vezes menor, ou $\frac{28.45.8.84}{70.56.5}$, que é a incognita do problema : portanto,

$$x = \frac{28.45.8.84}{70.56.5} = \frac{9.2.12}{5} = 43^d + \frac{1^d}{5} .$$

402.—As questões de que passamos a tractar nos capitulos seguintes, resolvem-se mediante Regras de tres.

CAPITULO II

REGRA DE JURO

403.—Comecemos definindo as quantidades que entram em qualquer questão de juros.

Capital (em sentido restricto) *é a quantia que se-empresta a alguem* (*)

Tempo *é a duração do emprestimo.*—O tempo que se-considera como unidade, chama-se *prazo.*

Juro *é o rendimento de um certo capital durante um tempo determinado.*

Para tornar uniforme o calculo dos juros, convencionou-se referil-os a um *juro fixo*, denominado *taxa*: é a *unidade de juro.*

Taxa *é o rendimento do capital* 100 *durante a unidade de tempo.*—A unidade de tempo, é ordinariamente, *um anno.*

Regra de juro *é a questão que tem por objecto determinar uma das quatro quantidades* — capital, tempo, juro e taxa—,*logo-que forem dadas as outras tres.*

(*) Em sentido amplo, a palavra *capital* significa *os fructos do trabalho applicados á producção da riqueza.* Nesse caso póde-se dizer que o saber é um capital.

404.—O juro divide-se em *simples* e *composto.*

Juro simples *é o rendimento de um capital que conserva o mesmo valor durante todo o tempo do emprestimo.*

Juro composto *é o rendimento de um capital cujo valor, no fim de cada prazo, augmenta do juro simples correspondente a esse prazo.*

§ 1.º—Juro simples

405.—A Regra de juro simples resolve-se como uma Regra de tres, simples ou composta. Se a taxa for dada, os periodos collocam-se na ordem seguinte :

$$\begin{array}{lll} 100 & 1 & taxa \\ capital & tempo & juro \end{array}$$

se, porém, a taxa for pedida, inverte-se a ordem dos periodos.

406.—Entremos na resolução dos quatro problemas fundamentaes da Regra de juro.

Problema I. *Qual é o juro de* 3:528$000 *réis durante* 5 *annos e* 3 *mezes, a* 6°/ₒ *ao anno ?*

$$\begin{array}{lll} 100 & 1 & 6 \\ 3528000 & 5+\frac{1}{4} & x \end{array}$$

$$100:3528000=6:x'$$

$$1:\frac{21}{4}=x':x$$

ou $$4 : 21 = x' : x$$

portanto, $$100.4 : 3528000.21 = 6 : x$$

donde $$x = \frac{3528000.21.6}{100.4} = 8820.21.6 = 1{:}111\$320$$

PROBLEMA II. *Qual é o capital que, em 2 annos a* $(4 + \frac{1}{2})\%$, *rende* $927\$000$ réis?

$$\begin{array}{lll} 100 \text{———} & 1 \text{———} & 4 + \frac{1}{2} \\ x \text{———} & 2 \text{———} & 927000 \end{array}$$

$$2 : 1 = 100 : x'$$

$$\frac{9}{2} : 927000 = x' : x$$

ou $$9 : 1854000 = x' : x$$

portanto, $$2.9 : 1854000 = 100 : x$$

donde $$x = \frac{1854000.100}{2.9} = 10{:}300\$000$$

PROBLEMA III. *Durante que tempo deve estar a juros a quantia de* $630\$000$ *para produzir* $810\$000$, *sendo a taxa* $\left(2 + \frac{1}{2}\right)\%$?

$$\begin{array}{lll} 100 \text{———} & 1 \text{———} & 2 + \frac{1}{2} \\ 630000 \text{———} & x \text{———} & 810000 \end{array}$$

$$630000 : 100 = 1 : x'$$

$$\frac{5}{2} : 810000 = x' : x$$

ou $$5 : 1620000 = x' : x$$

portanto $$630000.5 : 100.1620000 = 1 : x$$

donde $$x = \frac{100.1620000}{630000.5} = 51 \text{ annos e } 6 \text{ mezes}$$

PROBLEMA IV. *Qual é a taxa de juro a que se-emprestou a quantia de* $5{:}400\$000$ réis, *para que no fim de 4 annos, esta quantia tenha produzido* $387\$000$ réis?

$$\begin{array}{lll} 5400000 \text{———} & 4 \text{———} & 387000 \\ 100 \text{———} & 1 \text{———} & x \end{array}$$

$$5400000 : 100 = 387000 : x'$$

$$4 : 1 = x' : x$$

portanto, $$5400000.4 : 100 = 387000 : x$$

donde $$x = \frac{100.387000}{5400000.4} = 2\%$$

407.—Os quatro problemas precedentes pódem tambem resolver-se pelo methodo de reducção á unidade (n. 401), e ainda pelo emprego das fórmulas que passamos a estabelecer.

Seja proposta a seguinte questão:

Calcular o juro produzido pelo capital c *em* t *annos a* i *por cento.*—Esta questão é uma Regra de tres composta: assim, pois, teremos

$$\begin{array}{lll} 100 \text{———} & 1 \text{———} & i \\ c \text{———} & t \text{———} & x \end{array}$$

$$100 : c = i : x'$$

$$1 . t = x' : x$$

portanto, $$100 : ct = i : x$$

corresponde ao capital 100 ; *a somma* 442$000 *de outro capital com o seo juro, a que capital corresponde?*

$$\begin{array}{l} 130 \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_} 100 \\ 442000 \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_} x \end{array}$$

portanto, $130 : 442000 = 100 : x$

donde $x = \frac{442000 . 100}{130} = 340\$000$

Logo, sendo conhecida uma somma de capital e juro, para achar o capital temos o seguinte processo:

Multiplica-se a taxa pelo tempo, juncta-se o producto a 100, e estabelece-se esta proporção : 100 *mais o producto da taxa pelo tempo está para* 100, *como a somma do capital com o seo juro está para o capital.*

Observação.—Achariamos o juro por um processo inteiramente simelhante.

§ 2.º—Juro composto

410.—Nas questões relativas a juros compostos, o capital que se-empresta chama-se *capital primitivo* ; e a somma formada com o capital primitivo, o juro deste capital e os juros de juros, isto é, a somma formada com o capital primitivo e o seo juro composto, denomina-se *capital accumulado*.

Para maior simplicidade, costuma-se tomar como unidade de juro *a centesima parte da taxa*, ou, o que é a mesma cousa, o *juro simples do capital* 1 *em* 1 *prazo*; e faz-se $\frac{i}{100} = r$.

411.—Supponhamos que se-pretende resolver a questão seguinte :

Calcular o capital accumulado em que se-transforma o capital primitivo a *no fim de* n *prazos, sendo* i *a taxa.*

Procuremos primeiramente o capital accumulado no fim do primeiro prazo : —*Se o capital* 1 *rende* r, *quanto renderá o capital* a ?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{\_\_\_\_} r \\ a \text{\_\_\_\_} x \end{array}\right\} 1 : a = r : x ; \text{ donde } x = ar :$$

portanto, o capital accumulado no fim do primeiro prazo é

$$a + ar = a\ (1 + r) = a'.$$

Procuremos agora o capital accumulado no fim do segundo prazo : —*Se o capital* 1 *rende* r, *quanto renderá o capital* a' ?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{\_\_\_\_} r \\ a' \text{\_\_\_\_} x' \end{array}\right\} 1 : a' = r : x' ; \text{ donde } x' = a'r :$$

portanto, o capital accumulado no fim do segundo prazo é

$$a' + a'r = a'\ (1 + r) = a\ (1 + r)^2 = a''.$$

Procuremos ainda o capital accumulado no fim do terceiro prazo : —*Se o capital* 1 *rende* r, *quanto renderá o capital* a'' ?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{\_\_\_\_} r \\ a'' \text{\_\_\_\_} x'' \end{array}\right\} 1 : a'' = r : x'' ; \text{ donde } x'' = a''r :$$

portanto, o capital accumulado no fim do terceiro prazo é

$$a'' + a''r = a''\ (1 + r) = a\ (1 + r)^3 = a'''.$$

Do mesmo modo achariamos o capital accumulado no fim do quarto prazo, do quinto prazo, etc. Logo, se representarmos por A o capital accumulado no fim de n prazos, teremos a fórmula

$$A = a(1 + r)^n,$$

que resolve a questão proposta.

412. — Muitas vezes succede que o tempo é um certo numero inteiro de prazos mais uma fracção do prazo. Para achar o capital accumulado no fim desse tempo, chamemos r' o juro simples do capital 1 durante a fracção do prazo (*).

O capital accumulado no fim de n prazos é (n. 411)

$$A = a(1 + r)^n.$$

Procuremos o capital accumulado no fim da fracção do prazo: — *Se o capital* 1 *rende* r', *quanto renderá o capital* A ?

$$\left.\begin{matrix} 1 \text{———} r' \\ A \text{———} x \end{matrix}\right\} 1 : A = r' : x \text{ ; donde } x = Ar' :$$

portanto, o capital accumulado no fim de n prazos mais uma fracção do prazo é

$$A + Ar' = A(1 + r') = a(1 + r)^n(1 + r'),$$

e representando por A' esse capital, teremos a fórmula

$$A' = a(1 + r)^n(1 + r').$$

413.— Uma ou outra das fórmulas que acabamos de achar, presta-se á resolução de quatro problemas distinctos, conforme se-tem em vista obter, ou *o capital accumulado*, ou *o capital primitivo*, ou *a taxa*, ou *o*

(*) A quantidade r' é uma fracção de r : é o producto de r pela fracção do prazo considerada.

tempo; e como o calculo directo destas quantidades seria longo, ou até impossivel em certos casos, por isso empregam-se *fórmulas logarithmicas*, ou recorre-se a tabellas préviamente calculadas.

Seja, em primeiro logar, a fórmula $A = a(1 + r)^n$, da qual se-deduz, tomando os logarithmos de ambos os membros,

$$lgA = lga + nlg(1 + r)$$

1.° Conhecendo a, r e n, calcular A. — Temos a fórmula

$$lgA = lga + nlg(1 + r). \qquad [1]$$

2.° Conhecendo A, r e n, calcular a.—Subtrahe-se $nlg(1 + r)$ de ambos os membros da egualdade precedente [1], e vem

$$lga = lgA - nlg(1 + r)$$

3.° Conhecendo A, a e n, calcular r.—Subtrahe-se lga de ambos os membros da egualdade [1], e tem-se

$$nlg(1 + r) = lgA - lga : \qquad [2]$$

donde se-tira, dividindo por n,

$$lg(1 + r) = \frac{lgA - lga}{n}.$$

4.° Conhecendo A, a e r, calcular n.—Dividem-se por $lg(1 + r)$ os dous membros da fórmula [2], e vem

$$n = \frac{lgA - lga}{lg(1 + r)}.$$

Seja agora a fórmula $A' = a(1 + r)^n(1 + r')$; della se-deduzem as seguintes:

$$lgA' = lga + nlg(1 + r) + lg(1 + r'),$$
$$lga = lgA' - nlg(1 + r) - lg(1 + r'),$$

que são as fórmulas ordinariamente empregadas, quando o tempo não é numero exacto de prazos. Para calcular r, procura-se, por tentativas, um numero que satisfaça á egualdade

$$nlg(1+r) + lg(1+r') = lgA - lga\ ;$$

para calcular o tempo, sempre se-usa de fórmula ha pouco deduzida.

414.—Passemos á resolução de alguns problemas de juros compostos.

Problema I. *Quanto vale no fim de 7 annos o capital* 800$000 réis *emprestado a juro composto, sendo a taxa* 5,5 °/° *ao anno?*

Neste problema pede-se o capital accumulado, e para o-determinar temos a fórmula

$$lgA = lga + nlg(1+r),$$

na qual se-deve fazer

$$a = 800000,\ n = 7,\ r = \frac{5,5}{100} = 0,055$$

por conseguinte, virá

$$lgA = lg\ 800000 + 7lg1,055:$$

$$\begin{array}{rl|l} lg800000 = & 5,9030900 & lg1,055 = 0,0232525 \\ 7lg1,055 = & 0,1627675 & \\ \hline lgA = & 6,0658575 & \\ A = & 1:163\$744 & \end{array}$$

Problema II. *Qual é a quantia que, emprestada a juro composto e á taxa de* $(5 + \frac{1}{2})$ °/° *ao anno, vale no fim de 7 annos* 1:163$744 réis?

Neste problema pede-se o capital primitivo, e para o-calcular temos a fórmula

$$lga = lgA - nlg(1 + r),$$

em que se-deve suppôr

$$A = 1163744,\ n = 7,\ r = \frac{5 + \frac{1}{2}}{100} = \frac{5,5}{100} = 0,055:$$

portanto,

$$lga = lg1163744 - 7lg1,055$$

$$\begin{array}{rl|l} lg1163744 = & 6,0658575 & lg1,055 = 0,0232525 \\ C7lg1,055 = & 9,8372325 & 7lg1,055 = 0,1627675 \\ lga = & 1)5,9030900 & \\ a = & 800\$000 & \end{array}$$

Problema III. *A que taxa havemos de emprestar a juro composto a quantia de* 500$000 *para que, no fim de 8 annos, essa quantia se-transforme em* 763$700?

Para calcular a taxa quando o tempo é numero inteiro de prazos, temos a fórmula

$$lg(1+r) = \frac{lgA - lga}{n},$$

na qual devemos fazer

$$A = 763700,\ a = 500000,\ n = 8:$$

vem, pois,

$$lg(1+r) = \frac{lg763700 - lg500000}{8}$$

$$\begin{array}{rcl|l} lg763700 & = & 5,8829228 & lg500000 = 5,6989700 \\ Clg500000 & = & 4,3010300 & \\ \hline 8lg(1+r) & = & 1)0,1839528 & \\ lg(1+r) & = & 0,0229941 & \\ 1+r & = & 1,052 & \\ r & = & 0,052 & \\ i & = & 5,2\ °/° & \end{array}$$

PROBLEMA IV. *Durante quanto tempo é necessario emprestar a juro composto o capital* 380$000, *para que, no fim desse tempo, tenhamos o capital accumulado* 800$000, *sabendo-se que a taxa é* 6,5 %?

Neste problema pede-se o tempo, e para determinál-o tem-se a fórmula

$$n = \frac{lgA - lga}{lg(1+r)},$$

na qual se-deve fazer

$$A = 800000, \quad a = 380000, \quad r = \frac{6.5}{100} = 0,065:$$

por consequencia,

$$n = \frac{lg800000 - lg380000}{lg1,065}$$

$$\begin{array}{rcl|rcl} lg800000 & = & 5,9030900 & lg380000 & = & 5,5797836 \\ Clg380000 & = & 4,4202164 & lg1,065 & = & 0,0273496 \\ \hline nlg1,065 & = & 1)0,3233064 & & & \end{array}$$

$$n = \frac{0.3233064}{0,0273496} = 11^{an.}9^{mez.}25^{d}$$

415. — Quando a taxa é annual (como até aqui temos supposto) e o prazo de capitalização não é o anno, cumpre determinar a taxa correspondente ao prazo que se-considera, antes de fazer applicação da fórmula.

PROBLEMA V. *Quanto vale, no fim de 7 annos, o capital* 800$000 *emprestado a juro composto, suppondo que a taxa é* 5, 5 % *ao anno e que os juros se-capitálizam semestralmente?*

Temos a fórmula

$$lgA = lga + nlg(1+r),$$

onde n é o numero de prazos e r é o juro de 1 em um prazo; ora, se um anno tem 2 semestres, 7 annos terão 14, e o juro de 1 em 1 semestre será metade de $\frac{5,5}{100}$: logo, na fórmula precedente devemos fazer

$$a = 800000, \quad n = 14, \quad r = \frac{5,5}{2.100} = 0,0275;$$

e assim teremos

$$lgA = lg800000 + 14lg1,0275$$

$$\begin{array}{rcl|l} lg800000 & = & 5,9030900 & lg1,0275 = 0,0117818 \\ 14lg1,0275 & = & 0,1648452 & \\ \hline lgA & = & 6,0679352 & \\ A & = & 1:166\$325 & \end{array}$$

OBSERVAÇÃO. — O calculo de A' e a por meio das fórmulas

$$lgA' = lga + nlg(1+r) + lg(1+r'),$$
$$lga = lgA' - nlg(1+r) - lg(1+r'),$$

não offerece difficuldade.

CAPITULO III

REGRA DE DESCONTO

416. — LETTRA *é o escripto no qual um individuo promette pagar a outro, ou manda esse outro pagar a um terceiro, uma determinada quantia.* (*)

VENCIMENTO de uma lettra *é a epocha em que se-deve effectuar o pagamento da quantia nella inscripta.*

(*) Ha *lettras de ordem* e *lettras de cambio*. A lettra de ordem envolve uma *promessa de pagamento*; a lettra de cambio envolve um *mandado de pagamento*.

DESCONTO *é o abatimento que se-faz sobre a importancia de uma lettra quando queremos recebêl-a antes de vencida.*

Uma lettra tem dous valores : *valor nominal* e *valor actual*.

VALOR NOMINAL, ou futuro, *é o valor que a lettra tem quando se-vence.*

VALOR ACTUAL, ou effectivo, *é o valor que a lettra tem quando se-desconta.*

Existem dous modos de fazer o desconto : *por fóra* e *por dentro*.

DESCONTO POR FÓRA *é o abatimento do juro produzido pelo valor nominal.*

DESCONTO POR DENTRO *é o abatimento do juro produzido pelo valor actual.*

REGRA DE DESCONTO *é a questão que tem por objecto determinar uma das quantidades*—desconto *ou* valor actual, valor nominal, taxa *e* tempo—*quando forem dadas as outras.*

§ 1.º—Desconto por fóra

417. — Supponhamos que se-pretende resolver a questão seguinte :

Calcular o desconto que se-deve fazer sobre a importancia N *de uma lettra, pagavel no fim do tempo* t, *sendo* i *a taxa do desconto, e suppondo que se-desconta por fóra.*

Quando o desconto é por fóra, considera-se a quantia 100 como valor nominal de uma lettra, e procura-se o juro dessa quantia (n. 416) ; ora, se 100 rende i durante a unidade de tempo, no tempo t deve render it: logo, it é o desconto por fóra que se-faz em uma

lettra cujo valor nominal é 100 e cujo valor actual será $100-it$. A nossa questão fica, pois, reduzida á seguinte: —*Se em* 100 *desconta-se* it, *em* N *quanto se-descontará?*

$$\left.\begin{array}{l}100 \_\_\_ it \\ N \_\_\_ x\end{array}\right\} \; 100 : N = it : x \,; \text{ donde } x = \frac{Nit}{100}$$

Logo, para achar o desconto por fóra temos o seguinte processo:

Multiplica-se a taxa pelo tempo, e escreve-se esta proporção: 100, que é o valor nominal de uma lettra, *está para o valor nominal da outra lettra, assim como o producto da taxa pelo tempo*, que é o desconto da primeira lettra, *está para o desconto da segunda.*

Pedindo-se o valor actual, a questão é a seguinte: —*Se* 100 *reduz-se a* 100—*it*, N *a quanto se-reduzirá?*

$$\left.\begin{array}{l}100 \_\_ 100-it \\ N \_\_ \quad y\end{array}\right\} 100 : N = 100-it : y; \text{ donde } y = \frac{N(100-it)}{100}$$

Logo, para calcular o valor actual no desconto por fóra temos este processo:

Multiplica-se a taxa pelo tempo, e forma-se a seguinte proporção : 100, que é o valor nominal de uma lettra, *está para o valor nominal da outra lettra, assim como* 100 *menos o producto da taxa pelo tempo*, que é o valor actual da primeira lettra, *está para o valor actual da segunda.*

418.—Mediante os dous processos precedentemente expostos, resolvem-se todas as questões de descontos por fóra: emprega-se o primeiro processo quando for dado ou pedido o desconto ; e o segundo, quando for dado ou pedido o valor actual da lettra.

419.—Entremos nas applicações das regras estabelecidas.

PROBLEMA I. *Uma lettra de* $700\$000$, *que se ha de vencer no fim de anno e meio, é actualmente descontada a* 5 % *ao anno; qual é o desconto, sendo este por fóra?*

Temos $$5.\left(1+\frac{1}{2}\right)=5\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2}:$$

portanto, $$100:700000=\frac{15}{2}:x\ ,$$

ou $$200:700000=15:x\ ;$$

donde $$x=\frac{700000.15}{200}$$ $$=52\$500$$

PROBLEMA II. *Uma lettra de* $1:500\$000$, *pagavel no fim de 9 mezes, é descontada a* 5 % *ao anno; qual é o valor actual da lettra, sendo o desconto por fóra?*

Sabe-se que 9 mezes equivalem a $\frac{3}{4}$ do anno; e assim temos $$5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}:$$

portanto, $$100:1500000=100-\frac{15}{4}:x\ ,$$

ou $$400:1500000=400-15:x\ ;$$

donde $$x=\frac{1500000.385}{400}$$ $$=1:443\$750$$

PROBLEMA III. *Fez-se o desconto de* $81\$000$ *em uma lettra que se-vencia no fim de 1 anno e 3 mezes: sabe-se que a taxa era* 2 % *ao mez; pede-se o valor nominal da lettra.*

Sendo 1 anno e 3 mezes o mesmo que 15 mezes, teremos $$2.15=30$$

portanto, $$100:x=30:81000$$

donde $$x=\frac{100.81000}{30}=\frac{81000}{3}$$ $$=270\$000$$

PROBLEMA IV. *Abateu-se a quantia de* $81\$000$ réis *em uma lettra de* $540\$000$, *pagavel no fim de 2 annos e meio; qual foi a taxa do desconto, sendo este por fóra?*

Designando por x a taxa procurada, temos $$100:540000=\frac{5x}{2}:81000$$

ou $$200:540000=5x:81000$$

donde $$5x=\frac{200.81000}{540000}=\frac{1820}{54}=30$$

portanto $$x=\frac{30}{5}=6\ \%$$

PROBLEMA V. *Sobre uma lettra de* $800\$000$ *descontou-se a quantia de* $174\$400$, *a* 3 % *ao mez; quando se-vencia a lettra, sendo o desconto por fóra?*

Chamando x o tempo, vem

$$100:800000=3x:174400$$

donde $$3x=\frac{100.174400}{800000}=\frac{1744}{80}$$

portanto, $$x=\frac{1744}{240}=7 \text{ mezes e } 8 \text{ dias}$$

§ 2.º—Desconto por dentro

420. — Supponha-se que queremos resolver a seguinte questão:

Calcular o desconto que se-deve fazer sobre a importancia N *de uma lettra, pagavel no fim do tempo* t, *sendo* i *a taxa do desconto, e suppondo que se-desconta por dentro.*

Quando o desconto é por dentro, considera-se a quantia 100 como valor actual, e procura-se o juro dessa quantia (n. 416); ora, se 100 rende i durante a unidade de tempo, no tempo t deve render it: por conseguinte, it é o desconto por dentro que se-faz em uma lettra cujo valor actual é 100 e cujo valor nominal será $100+it$. Temos, pois, a questão seguinte:— *Se em* 100+it *desconta-se* it, *em* N *quanto se-descontará?*

$$\left.\begin{array}{r} 100+it\_\_\_\_it \\ N\_\_\_\_x \end{array}\right\} 100+it : N = it : x;\ \text{donde}\ x = \frac{Nit}{100+it}$$

Logo, para achar o desconto por dentro temos o seguinte processo:

Multiplica-se a taxa pelo tempo, juncta-se o producto a 100, e escreve-se esta proporção: 100 *mais o producto da taxa pelo tempo*, que é o valor nominal de uma lettra, *está para o valor nominal da outra lettra, assim como o producto da taxa pelo tempo*, que é o desconto da primeira lettra, *está para o desconto da segunda.*

Pedindo-se o valor actual, a questão é a que segue:— *Se* 100+it *reduz-se a* 100, N *a quanto se-reduzirá?*

$$\left.\begin{array}{r} 100+it\_\_100 \\ N\_\_\ \ y \end{array}\right\} 100+it : N = 100 : y;\ \text{donde}\ y = \frac{100N}{100+it}$$

Logo, para calcular o valor actual no desconto por dentro temos este processo:

Multiplica-se a taxa pelo tempo, juncta-se o producto a 100, e forma-se esta proporção: 100 *mais o producto da taxo pelo tempo*, que é o valor nominal de uma lettra, *está para o valor nominal da outra lettra, assim como* 100, que é o valor actual da primeira lettra, *está para o valor actual da segunda.*

421.— Todas as questões de desconto por dentro resolvem-se por meio dos dous processos expostos: emprega-se o primeiro desses processos quando é dado

ou pedido o desconto; e o segundo, quando for dado ou pedido o valor actual.

422.— Passemos ás applicações.

PROBLEMA I. *Uma lettra de 1:925$000, que se-vence no fim de anno e meio; é actualmente descontada a 5°/ₒ; qual é o desconto, sendo este por dentro?*

Tem-se $\quad 5.\left(1+\frac{1}{2}\right) = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$:

portanto, $\quad 100 + \frac{15}{2} : 1935000 = \frac{15}{2} : x,$

ou $\quad 215 : 1935000 = 15 : x;$

donde $\quad x = \frac{1935000.15}{215} = 135\$000$

PROBLEMA II. *Qual é o valor actual de uma lettra de 1:657$800, pagavel no fim de 7 mezes, sabendo-se que a taxa é 4°/ₒ ao anno e que o desconto é por dentro?*

Temos $\quad 4.\frac{7}{12} = \frac{4.7}{12} = \frac{7}{3}$:

portanto, $\quad 100 + \frac{7}{3} : 1657800 = 100 : x,$

ou $\quad 307 : 4973400 = 100 : x;$

donde $\quad x = \frac{4973400.100}{307} = 1{:}620\$000$

PROBLEMA III. *E' descontada a 2°/ₒ ao mez uma lettra que se-vence no fim de 6 mezes, e o portador da lettra recebe 740$000; qual é a valor nominal dessa lettra, sendo o desconto por dentro?*

Temos $\quad 2.6 = 12$:

portanto, $\quad 100 + 12 : x = 100 : 740000,$

ou $\quad 112 : x = 100 : 740000$

donde $\quad x = \frac{112.740000}{100} = 112.7400$

$= 828\$800$

Problema IV. *Em uma lettra de 5:145$000, a prazo de 9 mezes, descontou-se a quantia de 945$000; qual é a taxa, sendo o desconto por dentro?*

Temos, representando por x a taxa procurada,

$$100 + 9x : 5145000 = 9x : 945000 ;$$

porém, a differença dos antecedentes está para a dos consequentes como um antecedente para o seo consequente (n. 307):

logo, $100 : 5145000 - 945000 = 9x : 945000,$
ou $100 : 4200 = 9x : 945,$

donde $$9x = \frac{100.945}{4200} = 22,5 :$$

portanto, $$x = \frac{22,5}{9} = 2,5\%$$

423.—Chamando D o desconto por fóra e d o desconto por dentro, temos (ns. 417 e 420)

$$D = \frac{Nit}{100} \quad , \quad d = \frac{Nit}{100+it} ;$$

e da comparação destas duas fórmulas conclue-se que:

1.° *O desconto por fóra é maior que o desconto por dentro*; porque, de duas fracções que têm o mesmo numerador, maior é a que tem menor denominador (n. 163).

2.° *A differença entre o desconto por fóra e o desconto por dentro é o juro deste ultimo desconto*; porque, multiplicando ambos os membros de cada fórmula pelo denominador da fracção, vem

$$100D = Nit \ . \ 100d + dit = Nit :$$

portanto, $$100D = 100d + dit ,$$

donde se-deduz, subtrahindo $100d$ e dividindo por 100,

$$D - d = \frac{dit}{100} .$$

O desconto por dentro é, pois, mais racional que o desconto por fóra, visto não ser de justiça que o portador da lettra pague juro de quantia que fica nas mãos do banqueiro. Entretanto, no commercio costuma-se fazer o desconto por fóra, por dous motivos: 1.° porque o desconto por fóra calcula-se mais rapidamente; 2.° porque nas transacções ordinarias a differença dos dous descontos é insignificante.

CAPITULO IV

REGRA DE COMPANHIA

424.—Quando uma empreza não póde ser levada a cabo sem o concurso de diversos capitalistas, estes ligam-se mediante um contracto e formam o que se-denomina *companhia*.

Regra de companhia *é a questão que tem por objecto repartir entre os capitalistas que fazem parte de uma companhia, o lucro ou o prejuizo que esta houver dado.*

O capital de cada socio chama-se *entrada*.

425.—A Regra de companhia divide-se em *simples* e *composta*.

Regra de companhia simples *é aquella em que, ou sómente as entradas, ou sómente os tempos, são differentes.*

Regra de companhia composta *é aquella em que as entradas e os tempos são differentes.*

426.—Na repartição do lucro ou do prejuizo de uma companhia admittem-se convencionalmente os principios que seguem:

1.° Sendo eguaes os tempos, *os lucros ou os prejuizos parciaes são proporcionaes ás entradas.*

2.° Sendo eguaes as entradas, *os lucros ou os prejuizos parciaes são proporcionaes aos tempos.*

Destes dous principios vamos deduzir que

Sendo differentes as entradas e os tempos, *os lucros ou os prejuizos parciaes são proporcionaes aos productos de cada entrada pelo tempo correspondente.*

Supponhamos que a, b, c são as entradas de tres socios, e que a', b', c' são os tempos correspondentes. Considerem-se, por ora, os dous primeiros socios, e imagine-se um *socio ficticio* que a elles vem associar-se com a entrada b durante o tempo a' : chamando x, y, v os lucros ou os prejuizos, temos

$$a \text{———} a' \text{———} x$$
$$b \text{———} a' \text{———} v$$
$$b \text{———} b' \text{———} y$$

$$a : x = b : v,$$
$$a' : v = b' : y :$$

portanto, $$aa' : x = bb' : y.$$

Com raciocinio analogo se-provaria que

$$bb' : y = cc' : z :$$

logo, $$aa' : x = bb' : y = cc' : z$$

De accordo com os tres principios anteriores, podemos definir mais geralmente a Regra de companhia.

Regra de companhia *é a questão que tem por objecto dividir um numero em partes proporcionaes a outros numeros.*

A Regra de companhia tambem se-póde chamar *Regra de repartição proporcional.*

§ 1.°—Regra de companhia simples

427.—Admitta-se que queremos resolver a questão que segue :

Dividir o numero N em partes proporcionaes aos numeros a , b , c.

Sejam x, y, z as partes procuradas : devendo estas partes ser proporcionaes a a , b , c , teremos

$$a : x = b : y = c : z ;$$

mas, em uma serie de razões eguaes a somma dos antecedentes está para a somma dos consequentes como qualquer antecedente está para o respectivo consequente (n. 309) : portanto,

$$a + b + c : x + y + z = a : x = b : y = c : z$$

e como temos, evidentemente, $x + y + z = N$, segue-se que

$$a + b + c : N = a : x = b : y = c : z$$

Na Regra de companhia simples N exprime o lucro ou o prejuizo a repartir ; a , b , c são as entradas ou os tempos dos socios ; x , y , z são os lucros ou os prejuizos correspondentes.

Logo, para resolver uma Regra de companhia simples temos o processo seguinte :

A somma das entradas ou a somma dos tempos está para o lucro ou o prejuizo total, assim como a entrada ou o tempo de cada socio está para o lucro ou o prejuizo correspondente.

428.—Passemos á resolução das principaes questões dependentes da Regra de companhia.

Problema I. *Dividir o numero* 391 *em tres partes proporcionaes a* 5, 7 *e* 11.

Temos $5+7+11=23:$

portanto,

$$23:391=5:x, \quad =7:y, \quad =11:z;$$

donde se-deduz

$$x=\frac{391.5}{23}=85$$

$$y=\frac{391.7}{23}=119$$

$$z=\frac{391.11}{23}=187$$

Problema II *Dividir o numero* 917 *em tres partes taes que a primeira esteja para a segunda como* $\frac{2}{3}$ *está para* 5, *e a segunda para a terceira como* 7 *está para* $\frac{4}{5}$.

Neste problema os numeros proporcionaes não são dados explicitamente ; é, porém, facil achál-os. Tem-se

$$x:y=\frac{2}{3}:5,$$

$$y:z=7:\frac{4}{5},$$

ou, expellindo os denominadores (n. 299),

$$x:y=2:15,$$

$$y:z=35:4;$$

destas proporções deduz-se

$$y=\frac{15x}{2},$$

$$z=\frac{4y}{35}=\frac{60x}{70}=\frac{6x}{7}:$$

logo, se a primeira parte x for 1, a segunda será $\frac{15}{2}$ e a terceira $\frac{6}{7}$; e assim, tracta-se de dividir o numero 917 em partes proporcionaes a 1, $\frac{15}{2}$ e $\frac{6}{7}$, ou a 14, 105 e 12.

Temos $14+105+12=131:$

portanto,

$$131:917=14:x, \quad =105:y, \quad =12:z,$$

donde se-tira

$$x=\frac{917.14}{131}=98$$

$$y=\frac{917.105}{131}=735$$

$$z=\frac{917.12}{131}=84$$

Problema III.— *Dous individuos associaram-se numa empreza, entrando o primeiro com* 4:000$000 *e o segundo com* 3:500$000; *no fim de certo tempo acharam* 12:000$000 *de lucro liquido: quanto deve tocar a cada um?*

Temos $4000000+3500000=7500000:$

portanto, $75(00000:120(00000=4000000:x$
$=3500000:y$

donde se-deduz

$$x=\frac{120.4000000}{75}=6:400\$000$$

$$y=\frac{120.3500000}{75}=5:600\$000$$

Problema IV.— *Um individuo abriu uma casa de negocio com o capital de* 7:200$000; 9 *mezes depois associou-se ao mesmo individuo um outro, com o mesmo capital; 1 anno e meio mais tarde reuniu-se aos precedentes um outro socio, ainda com o mesmo capital. O* *negocio durou dous annos, e deu de prejuizo 4:050$000: quanto deve receber cada socio?*

O capital do primeiro socio esteve em gyro durante 2 annos ou 24 mezes; o do segundo socio durante 15 mezes, e o do terceiro durante 6 mezes: devemos, pois, repartir o prejuizo 4:050$000 em partes proporcionaes a 24, 15, 6, ou a 8, 5, 2.

Temos
$$8 + 5 + 2 = 15:$$
portanto,
$$\begin{aligned} 15:4050000 &= 8 : x \\ &= 5 : y \\ &= 2 : z \end{aligned}$$
donde tiramos
$$\begin{aligned} x &= \frac{4050000.8}{15} = 2:160\$000 \\ y &= \frac{4050000.5}{15} = 1:350\$000 \\ z &= \frac{4050000.2}{15} = 540\$000 \end{aligned}$$

Os tres socios devem, portanto, receber
$$\begin{aligned} 7200000 - 2160000 &= 5:040\$000 \\ 7200000 - 1350000 &= 5:850\$000 \\ 7200000 - 540000 &= 6:660\$000 \end{aligned}$$

§ 2°.—**Regra de companhia composta**

429.—Para resolver uma Regra de companhia composta emprega-se o seguinte processo:

Multiplica-se a entrada de cada socio pelo tempo correspondente, e depois reparte-se o lucro ou o prejuizo proporcionalmente aos productos que se-obtiverem (n. 426).

Um exemplo basta para esclarecer a regra.

Problema.—*Tres individuos formaram uma sociedade, que lhes-deu de lucro 7:400$000; o primeiro entrou com 1:370$000 durante 4 mezes; o segundo com*

800$000 durante 9 mezes; e o terceiro com 476$000 durante 1 anno e 8 mezes; qual é o lucro de cada socio?

Temos
$$\begin{aligned} 1370000 \times 4 &= 5480000 \\ 800000 \times 9 &= 7200000 \\ 476000 \times 20 &= 9520000 \\ \hline & \ 22200000 \end{aligned}$$
portanto
$$\begin{aligned} 222(00000 : 74(00000 &= 5480000 : x \\ &= 7200000 : y \\ &= 9520000 : z \end{aligned}$$
donde se-tira
$$\begin{aligned} x &= \frac{74.5480000}{222} = 1:826\$660 \\ y &= \frac{74.7200000}{222} = 2:400\$000 \\ z &= \frac{74\ 9520000}{222} = 3:173\$330 \end{aligned}$$

CAPITULO V

REGRA CONJUNCTA — MISTURAS E LIGAS

430.—Pareceu-nos acertado que dessemos aqui algumas breves noções ácerca de misturas e ligas, por causa da utilidade práctica dessas noções.

§ 1º —**Regra conjuncta**

431.—Regra conjuncta *é a questão que tem por objecto converter unidades de uma especie em unidades de outra especie, quando são conhecidas certas relações intermedias.*

A Regra conjuncta serve principalmente para effectuar a conversão reciproca das unidades de medida empregadas em dous paizes: applicando-se, em particular, á conversão de moedas, ella toma o nome de *Regra de cambio* (*).

432.—Podemos resolver uma Regra conjuncta por diversos processos : o primeiro consiste em decompôr a questão em tantas Regras de tres simples menos uma quantas forem as especies de unidades que figuram no enunciado.

PROBLEMA I. *Converter 48 braças em metros, sabendo : 1.°, que 25 braças valem 50 varas ; 2.°, que 17 varas valem 85 palmos ; 3.°, que 50 palmos valem 11 metros.*

$$\begin{array}{ccccccc}
25^{br} & \text{———} & 50^{v} & & & & \\
 & & 17 & \text{———} & 85^{p} & & \\
 & & & & 50 & \text{———} & 11^{m} \\
48 & \text{———} & x' & \text{———} & x'' & \text{———} & x
\end{array}$$

Se 25 braças formam 50 varas, 48 braças quantas varas formarão ? —Chamando x o numero de varas, temos

$$\left.\begin{array}{l} 25^{br} \text{———} 50^{v} \\ 48 \text{———} x' \end{array}\right\} 25 : 50 = 48 : x'$$

Se 17 varas formam 85 palmos, 48 braças ou x' varas quantos palmos formarão ? — Chamando x'' o numero de palmos, vem

$$\left.\begin{array}{l} 17^{v} \text{———} 85^{p} \\ x' \text{———} x'' \end{array}\right\} 17 : 85 = x' : x''$$

Se 50 palmos formam 11 metros, 48 braças ou

(*) *Cambio* é a maior ou menor somma de moedas extrangeiras que se-dá por uma moeda do paiz.

x' varas ou x'' palmos quantos metros formarão ? — Chamando x o numero de metros, tem-se

$$\left.\begin{array}{l} 50^{p} \text{———} 11^{m} \\ x'' \text{———} x \end{array}\right\} 50 : 11 = x'' : x$$

Multiplicando as tres proporções ordenadamente, vem

$$25.17.50 : 50.85.11 = 48 : x,$$

donde se-deduz

$$x = \frac{50.85.11.48}{25.17.50} = 105^{m},60$$

433.— Outro processo para resolver uma Regra conjuncta consiste em escrever as egualdades que figuram na questão e multiplicál-as membro a membro.

PROBLEMA II. *Se 7 arrobas equivalem a 224 libras; e se 37 libras equivalem a 592 onças : 24 arrobas quantas onças formam ?*

Designando por x o numero de onças pedido, temos, conforme o enunciado,

$$\begin{array}{r} x \text{ onças} = 24 \text{ arrobas}, \\ 7 \text{ arrobas} = 224 \text{ libras}, \\ 37 \text{ libras} = 592 \text{ onças}. \end{array}$$

Multiplicando a primeira egualdade por 7 e a segunda por 24, vem

$$\begin{array}{r} 7.x \text{ onças} = 7.24 \text{ arrobas}, \\ 24.7 \text{ arrobas} = 24.224 \text{ libras}, \\ 37 \text{ libras} = 592 \text{ onças} ; \end{array}$$

donde se-deduz, eliminando as arrobas entre as duas primeiras egualdades,

$$7.x \text{ onças} = 24.224 \text{ libras}:$$
$$37 \text{ libras} = 592 \text{ onças}.$$

Multiplicando a primeira destas egualdades por 37 e a segunda por 24.224, ter-se-ha

$$37.7.x \text{ onças} = 37.24.224 \text{ libras}$$
$$24.224.37 \text{ libras} = 24.224.592 \text{ onças}$$

donde se-deduz, eliminando as libras,

$$37.7.x \text{ onças} = 24.224.592 \text{ onças},$$

ou

$$37.7\,x = 24.224.592:$$

portanto,

$$x = \frac{24.224.592}{37.7} = 12288 \text{ onças}$$

Problema III. *Achar o coefficiente de conversão de linhas em metros.*

Temos, chamando x o numero de metros,

$$x \text{ metros} = 1 \text{ linha},$$
$$12 \text{ linhas} = 1 \text{ pollegada},$$
$$8 \text{ polleg.} = 1 \text{ palmo},$$
$$5 \text{ palmos} = 1 \text{ vara},$$
$$1 \text{ vara} = 1,1 \text{ do metro}:$$

portanto,

$$x.12.8.5 = 1,1$$

donde

$$x = \frac{1,1}{12.8.5} = 8^{m},00229$$

§ 2.º—Misturas e ligas

434.—Mistura *é a reunião de diversas substancias capazes de formarem uma mercadoria.*

Liga *é o corpo formado de diversos metaes, unidos intimamente por via de fusão.*

Regra de mistura ou de liga *é a questão que tem por objecto: 1,º achar o valor medio da mistura ou da liga, sendo conhecidos os valores e as quantidades dos elementos; ou, 2,º achar as quantidades dos elementos, sendo conhecidos os valores destes e o valor medio da mistura ou da liga.*

435.—Passemos á resolução das principaes questões de misturas e de ligas.

Problema I. *Misturaram-se tres qualidades de vinho, a saber: 25 garrafas de 700 réis cada uma; 14 garrafas de 1$500 reis cada uma; 30 garrafas de 1$200 reis cada uma: pergunta-se qual é o preço de uma garrafa da mistura.*

As 25 garrafas de 700 reis valem 25.700 reis; as 14 garrafas de 1$500 reis valem 14.1500 reis; e as 30 garrafas de 1$200 reis valem 30.1200 reis: portanto, as 25 + 14 + 30 garrafas da mistura valerão

$$25.700 + 14.1500 + 30.1200;$$

e assim, representando por x o preço de uma garrafa, teremos

$$x = \frac{25.700+14.1500+30.1200}{25+14+30} = 1\$079 \text{ reis}$$

Problema II. *Tem-se duas qualidades de farinha, uma de 50 reis o litro e a outra de 100 reis: pergunta-se quantos litros é necessario tomar de cada qualidade para que o litro da mistura possa vender-se a 80 reis.*

Vendendo por 80 reis cada litro da farinha de 50 reis, ganha-se 80—50 ou 30 reis ; vendendo por 80 reis cada litro da farinha de 100 reis, perde-se 100—80 ou 20 reis : por conseguinte, a perda compensará o ganho se misturarmos 2 litros da farinha de 50 reis com 3 litros da farinha de 100, porque assim o ganho é 2.30 ou 60 reis, e a perda é tambem 3.20 ou 60 reis.

Se fosse dada a quantidade da mistura, 100 litros por exemplo, as quantidades dos elementos seriam determinadas pelas seguintes proporções :

$$5 : 2 = 100 : x,$$
$$5 : 3 = 100 : x' ;$$

donde se-tirava

$$x = \frac{2.100}{5} = 40 \text{ litros.}$$

$$x' = \frac{3.100}{5} = 60 \text{ litros.}$$

N. B.—Quando não é dada a quantidade da mistura, esta póde ser feita por diversos modos : achámos 2 litros e 3 litros, mas é facil ver que com 2, 3, etc. vezes estes numeros de litros fica tambem resolvida a questão.

436.—No fabrico dos objectos de ouro ou de prata nunca se-empregam o ouro puro ou a prata pura : formam-se *ligas* de um desses metaes e cobre.

Titulo de uma liga a respeito de um metal *é a relação entre o peso desse metal contido na liga e o peso total da liga.*

Os titulos das ligas de ouro e prata avaliam-se em *millesimos* ; isto é, suppondo que na liga ha *mil partes* (em peso) e que 950 partes são de ouro ou de prata, o titulo da liga é 0,950.

O titulo das ligas de ouro tambem se-avalia em *quilates* : representa-se o ouro puro por 24 quilates, e

o titulo da liga será o numero de quilates de ouro que ella contem. O quilate divide-se em 4 grãos, e o grão em 8 oitavas.

O titulo das ligas de prata avalia-se tambem em *dinheiros* : representa-se a prata pura por 12 dinheiros, e o titulo da liga será o numero de dinheiros de prata que ella contiver. O dinheiro divide-se em 24 grãos, e o grão em 4 quartas.

Problema III. *Um ourives fundiu 13 grammos de ouro do titulo de 0,950 com 17 grammos de ouro do titulo de 0,830 : qual é o titulo da liga?*

Os 13 grammos da 1.ª liga de ouro valem $0,950 \times 13$, e os 17 grammos da 2.ª liga de ouro valem $0,830 \times 17$: portanto, os $13+17$ grammos da nova liga valerão

$$0,950 \times 13 + 0,830 \times 17 ;$$

por onde se-vê que, representando por x o titulo da ultima liga, será

$$x = \frac{0,950 \times 13 + 0,830 \times 17}{13+17} = 0,882$$

Problema IV. *Quer-se fazer uma liga com ouro do titulo de 0,920 e ouro do titulo de 0,850 ; o titulo da liga deve ser 0,880, e ella deve pesar 35 grammos : quanto se ha de tomar de cada qualidade de ouro?*

Para que a 1.ª liga de ouro tenha por titulo 0,880 é necessario que ella perca 920—880 ou 40 grammos de ouro, ganhando egual peso de cobre ; e para que a 2.ª liga de ouro tenha tambem por titulo 0,880 é preciso que ella ganhe 880—850 ou 30 grammos de ouro, perdendo egual peso de cobre : logo, o ganho compensará a perda se fundirmos 3 grammos do ouro de 0,920 com 4 grammos do ouro de 0,850.

Por outro lado, como a liga deve pesar 35 grammos, teremos as proporções

$$7 : 3 = 35 : x,$$
$$7 : 4 = 35 : x' ;$$

donde se-tira

$$x = \frac{3.35}{7} = 15$$

$$x' = \frac{4.35}{7} = 20$$

437.—Se nos problemas analogos ao 2.° e ao 4.° houver mais de dous elementos, a questão, embora se-possa resolver pela Arithmetica, mais facilmente se-resolve pela Algebra.