136.—Construir uma tabella de numeros primos.—E' util, muitas vezes, conhecer se um numero dado é primo; para este fim póde-se 1.°, examinar se o numero dado não é divisivel por algum dos numeros primos cujo quadrado não excede esse mesmo numero, ou 2.°, consultar uma tabella de numeros primos anticipadamente construida. O primeiro processo é consequencia immediata do theorema IV (n. 135): tractemos, pois, da formação de uma tabella de numeros primos, aproveitando as idéas de Eratósthenes (*), cujo methodo é conhecido com o nome de *crivo de Eratósthenes*.

Consideremos a serie natural dos numeros inteiros

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \ldots\ldots n:$$

1.° Todo numero que, a partir de 2, exclusive, occupar o 2.°, o 4.°, o 6.°, etc., logar, é multiplo de 2. Com effeito, o numero que occupa o 2.° logar á direita de 2 é

$$2+2=2.\,2;$$

o que occupa o 4.° logar é

$$2+2.2=2.3\ ;$$

e assim por deante.

2.° Todo numero que, a partir de 3, exclusive, occupar o 3.°, o 6.°, o 9.°, etc., logar, é multiplo de 3. Na verdade, o numero que occupa o 3.° logar á direita de 3 é

$$3+3=3.2\ ;$$

(*) Philosopho grego, bibliothecario da celebre Bibliotheca de Alexandria, morto no anno 194 a. Ch.

o que occupa o 6.° logar é

$$3+3.2=3.3\ ;$$

e assim por deante.

. . . .

Em geral.—Todo numero que, a partir de um certo numero primo p, exclusive, occupa um logar designado por p, $2p$, $3p$, etc., é multiplo de p.

Portanto, para achar todos os numeros primos, desde 1 até um limite dado, basta *escrever os numeros inteiros consecutivos até esse limite e supprimir os numeros que vierem no 2.°, 4.°, 6.°, etc., logar, a partir de 2, exclusive; no 3.°, 6.°, 9.°, etc., logar, a partir de 3, exclusive; e assim por deante.*

Os numeros primos inferiores a 100 são:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,$$
$$37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 53,\ 59,\ 61,\ 67,\ 71,\ 73,\ 79,$$
$$83,\ 89,\ 97.$$

Observação.—O processo exposto póde tornar-se mais simples se notarmos que—1.°, *todos os numeros pares, excepto 2, não são numeros primos*,—2.°, *entre os multiplos de um numero primo alguns ha que tambem são multiplos de numeros inferiores: por onde se conclue que é inutil escrever os numeros pares differentes de 2, e que, na suppressão dos multiplos de um numero primo bastará começar pelo quadrado delle.*

137.—Theorema V. *O numero que dividir o producto de dous factores e for primo com um delles, divide o outro.*

Demonstração.—Seja ab o producto de dous factores, a e b; admitta-se que um terceiro numero D divide o producto ab e é primo com o factor a : vamos demonstrar que D divide b.

Por serem a e D primos entre si, o seo maximo divisor commum é a unidade (n. 120) ; escrevamos os tres numeros a, D e 1 em linha horizontal e mutipliquemol-os por b : vem

$$a,\ D,\ 1$$

$$ab,\ Db,\ 1.b{=}b$$

Isto posto, provamos a nossa these do modo seguinte:

O numero que dividir dous outros, tambem divide o seo maximo divisor commum (n. 127) ; ora, D divide ab, segundo a hypothese, e divide o seo multiplo Db (n. 102) : logo D divide o maximo divisor commum de ab e Db ; porém, o maximo divisor commum de ab e Db é b, porque, quando se-multiplica os dous numeros a e D por um terceiro b, o seo maximo divisor commum, que é 1, fica multiplicado pelo terceiro (n. 129): portanto, D divide b.

C. q. d.

138.—Theorema VI. *O numero primo que divide um producto, divide tambem algum dos factores.*

Demonstração.—Seja $a\,b\,c$ um producto de tres factores (para quatro, cinco, etc., factores, o raciocinio seria analogo) ; e admitta-se que um qualquer numero primo D divide exactamente esse producto : vai-se demonstrar que D divide tambem algum dos factores, ou a, ou b, on c.

Faça-se (o que sempre é possivel)

$$bc{=}p:$$

teremos

$$abc{=}ap,$$

$$p{=}bc.$$

1.° Considere-se a primeira destas egualdades. O numero primo D divide, por hypothese, abc ou ap : se D dividisse a, o theorema ficaria provado ; supponha-se, pois, que D não divide a : será, então, D primo com a. Porém, o numero que divide o producto de dous factores, a e p, e é primo com um delles, a, divide o outro (n. 137) : logo D divide p.

2.° Considere-se agora a segunda egualdade. Se D dividisse b, ficaria demonstrado o theorema ; admitta-se, portanto, que D não divide b : será, então, D primo com b. Mas, o numero que divide o producto de dous factores, b e c, e é primo com um delles, b, divide o outro (n. 137) : logo D divide c. Assim, pois, exceptuando um dos factores do producto, se admittirmos que D não divide nenhum dos outros, ainda assim D dividirá o factor exceptuado.

C. q. d.

139.—Corollario I. *O numero primo que dividir um producto de factores primos, é egual a algum destes.*

Demonstração.—Seja abc um producto de tres factores primos, e D um numero primo que divide esse producto : vamos mostrar que D é egual a um dos factores. Com effeito, o numero primo D, dividindo o producto abc, divide um dos factores (n. 138) ; mas, o numero primo que divide outro não póde deixar de ser egual a esse outro, porque, do contrario, um numero primo não seria divisivel sómente por si e pela unidade (n. 131): logo, D é egual a algum dos factores, a, b ou c. *C. q. d.*

140. — Corollario II. *O numero primo que dividir qualquer potencia de outro numero, tambem divide este numero.*

Demonstração.—Seja D um numero primo qualquer, e a^m uma potencia de a, divisivel por D: devemos provar que D divide a. Com effeito, a potencia a^m é um producto de factores eguaes a a (n. 78); porém, o numero primo D, dividindo o producto, divide algum dos factores (n. 138): logo, D divide a. *C. q. d.*

141. — Theorema VII. *Se dous numeros forem primos entre si, as suas potencias quaesquer tambem o-são.*

Demonstração.—Sejam a^m e b^m quaesquer potencias de dous numeros a e b, primos entre si: quer-se demonstrar que a^m e b^m são egualmente numeros primos entre si.

Admitta-se, por um momento, que a^m e b^m não são numeros primos entre si: haverá, nessa hypothese, um numero primo d que divida exactamente a^m e b^m (n. 133); porém, o numero primo que divide qualquer potencia de outro numero, divide tambem este numero (n. 140): logo, d divide a e b. Esta conclusão é inadmissivel, porque a e b são numeros primos entre si (pela hypothese): logo, a^m e b^m são numeros primos entre si. *C. q. d.*

142.—Theorema VIII. *O numero que for primo com cada um dos factores de um producto, é tambem primo com este producto.*

Demonstração.—Seja abc um producto de tres factores, e admitta-se que um certo numero D é primo com a, com b e com c: deve-se provar que D é primo com o producto abc.

Por um instante supponha-se que D e abc não são numeros primos entre si: haverá, nessa hypothese, um numero primo d que divida exactamente D e abc; mas, o numero primo que divide um producto, divide tambem algum dos factores (n. 138): logo, d será divisor commum de D e a, ou de D e b, ou de D e c. Esta conclusão não se-póde admittir, porque suppozemos que D é primo com a, com b e com c: logo, D e abc são numeros primos entre si. *C. q. d.*

143.—Theorema IX. *O numero que for divisivel por diversos numeros primos entre si dous a dous, é tambem divisivel pelo producto desses numeros.*

Demonstração.—Seja N um numero qualquer, divisivel por tres numeros, a, b e c, que suppômos primos entre si dous a dous (*): queremos demonstrar que N é divisivel pelo producto abc desses tres numeros.

Sendo N divisivel por a, temos

$$N=aq.$$

O numero N ou aq é divisivel por b; mas, b é primo com a: logo, b divide q, e tem-se

$$q=bq';$$

substituindo na primeira egualdade o valor de q, virá

$$N=abq'.$$

(*) Isto é, taes que a é primo com b e com c, e que b é primo com c.

O numero N ou abq' é divisivel por c; porém, uma vez que c é primo com a e com b, tambem é primo com ab (n. 142): portanto, c divide q', e ter-se-ha

$$q'=cq'';$$

substituindo o valor de q' na precedente egualdade, virá

$$N=abcq''.$$

A ultima egualdade mostra que N contem abc um numero exacto de vezes, q'': logo, N é divisivel por abc.

C. q. d.

144.—Theorema X. *O numero que não for primo, é egual a um producto de factores primos.*

Demonstração.—Seja N qualquer numero não primo: vamos demonstrar que N é egual a um producto de factores primos.

Não sendo N numero primo, admitte ao menos um divisor primo (n. 132); seja a esse divisor: teremos

$$N=aq.$$

Se q não for numero primo, terá ao menos um divisor primo (n. 132); sendo b esse divisor, vem

$$q=bq'.$$

Como os quocientes q, q', etc. vão diminuindo, o numero delles é limitado: chegar-se-ha, pois, a um quociente que seja numero primo. Seja q' esse quociente: multiplicando membro a membro as precedentes egualdades, virá

$$Nq=abqq',$$

donde se-deduz, dividindo por q,

$$N=abq'.$$

145.—Theorema XI. *Um numero não póde ser decomposto em mais de um systema de factores primos.*

Demonstração.—Seja N qualquer numero não primo, que suppômos achar-se decomposto em quatro factores primos, a, b, c e d: vai-se provar que N não póde ter por divisores outros factores primos, a', b', etc.

Estando N decomposto nos factores primos a, b, c e d, temos

$$N=abcd.$$

Qualquer numero primo n que dividir N, tambem divide algum dos factores deste numero (n. 138); porém, o numero primo que divide outro numero primo, é egual a elle (n. 139): portanto, n é egual a a, ou a b, ou a c, ou a d. Dahi se-segue que N não admitte como factores outros numeros primos além daquelles em que se-acha decomposto.

C. q. d.

146.—Theorema XII. *Para que um numero seja divisivel por outro, é necessario e sufficiente que elle contenha todos os factores primos desse outro.*

Demonstração.—Sejam N e N' dous numeros quaesquer: vamos demonstrar que, para N ser divisivel por N', é necessario e sufficiente que N contenha todos os factores primos de N'.

A condição mencionada é necessaria, porque, se N não contiver algum dos factores primos de N', não será divisivel por N'. Com effeito, admittindo-se que a divisão de N por N' se-faça exactamente, deve-se ter

$$N=N'q\ ;$$

ora, o numero primo que existisse em N', e não em N, dividiria N' e, portanto, $N'q$ (n. 102) : logo, N poderia ser decomposto em mais de um systema de factores primos: o que é imposivel (n. 145).

A referida condição é sufficiente, porque, se N contiver todos os factores primos de N', será divisivel por cada um e, portanto, pelo seo producto N'.

O theorema actual póde tambem, evidentemente, ser enunciado assim: *Para que um numero divida outro, é necessario e sufficiente que elle não contenha factores primos differentes dos que entram nesse outro.*

147.—Decompôr um numero em seos factores primos.—Este é o problema fundamental da theoria dos numeros primos. Supponha-se que a questão a resolver é a seguinte:

Decompôr o numero 3960 *em seos factores primos.*
—O numero dado 3960 é divisivel por 2 (n. 105); effectuando a divisão, tem-se

$$3960=2.1980.$$

O numero 3960 admitte um systema unico de factores primos (n. 145); porém, todo divisor primo de 1980 tambem é divisor do seo multiplo 3960 (n. 102): portanto, a nossa questão está reduzida a decompôr o numero 1980 em seos factores primos.

O numero 1980 é divisivel por 2 (n. 105); fazendo a divisão, vem

$$1980=2.990.$$

O numero 1980 não admitte mais que um systema de factores primos (n. 145); mas, todo divisor primo de 990 é tambem divisor do seo multiplo 1980 (n. 102): logo, a nossa questão fica reduzida a procurar os factores primos de 990.

Reproduzindo as mesmas considerações a respeito do quociente 990 e dos seguintes, acha-se as egualdades

$$990=2.495,$$
$$495=3.165,$$
$$165=3.55,$$
$$55=5.11\ ;$$

e como o ultimo quociente 11 é numero primo, a operação acha-se terminada.

Multiplicando membro a membro todas as egualdades obtidas e supprimindo em ambos os membros da egualdade resultante os factores communs, vem

$$3960=2.2.2.3.3.5.11,$$

ou, simplificando,

$$3960=2^3.3^2.5.11.$$

Regra.—*Para decompôr um numero em seos factores primos, procura-se* (empregando os caracteres de divisibilidade ou effectuando a divisão) *o menor dos numeros primos que divida exactamente esse numero dado, e faz-se a divisão deste pelo numero primo que se-achar; com o quociente obtido e com os seguintes procede-se da mesma fórma, até se-encontrar um quociente que seja numero primo, o qual se-divide por si-mesmo: os factores primos pedidos não aquelles dos numeros primos que corresponderem a divisões exactas.*

A disposição práctica do calculo é a que segue:

3960	2
1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

148.—Observação.—Quando se-decompõe um numero em seos factores primos é indispensavel *reconhecer se um certo numero primo divide exactamente o numero proposto ou algum dos quocientes successivos*: se esse numero primo for 2, 5, 3, 11 ou 7, faz-se applicação dos caracteres de divisibilidade por estes numeros (ns. 105, 107, 108 e 109); porém, se o numero primo de que se-tracta for outro qualquer, como não se-conhece para elle caracter de divisibilidade, deve-se effectuar uma divisão. Ora, se acontecer que o numero tomado por dividendo seja numero primo, faz-se, muitas vezes, divisões inteiramente inuteis. Para obviar a este inconveniente, toma-se em consideração o theorema demonstrado em o n. 135.

Como exemplo, supponhamos que se-pede para decompôr em seos factores primos o numero 8172:

8172	2
4086	2
2043	3
681	3
227	227
1	

O ultimo quociente 227 não é divisivel por 2, 5, 3, 11, 7; porém, formando os quadrados de 13 e de 17, tem-se

$$13^2=169 \text{ e } 17^2=289:$$

por onde se-vê que basta examinar se 227 é divisivel por 13.

CAPITULO IV

MENOR MULTIPLO COMMUM

149.—Multiplo commum *é o numero que contem exactamente dous ou mais numeros dados*.—Assim os numeros 24, 48, 72, etc., contendo exactamente 6 e 8, são multiplos communs de 6 e de 8.

150.—Menor multiplo commum *é o menor numero que contem exactamente dous ou mais numeros dados*.—Assim, 24 é o menor multiplo commum de 6 e de 8.

Sómente nos-occuparemos, por ora, com o menor multiplo commum a dous numeros (*)

151.—Theorema. *O menor multiplo commum de dous numeros é egual ao producto desses numeros dividido pelo seo maximo divisor commum.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros, D o seo maximo divisor commum e m o seo menor multiplo commum: devemos provar que

$$m=(ab):D$$

Dividindo os numeros a e b por D, tem-se

$$a=Dq \text{ e } b=Dq'.$$

(*) Vej. n. 157.

Para que m seja divisivel por a ou Dq, é necessario que contenha todos os factores primos de D e todos os de q (n. 146); e para que m seja divisivel por b ou Dq', é preciso que contenha todos os factores primos de D e todos os de q' (n. 146): logo, m deve conter todos os factores primos de D, de q e de q'; porém, q e q' são numeros primos entre si (n. 130): portanto, m não póde ser menor do que Dqq'. Por outro lado, Dqq' é multiplo commum de Dq ou a e de Dq' ou b: logo Dqq' é o menor multiplo commum procurado, e tem-se

$$m=Dqq'.$$

Porém, das duas primeiras egualdades tira-se

$$Dq=a \quad \text{e} \quad q=b:D:$$

portanto, substituindo no valor de m os de Dq e q', vem

$$m=(a\ b):D \qquad C.\ q.\ d.$$

152.—Procurar o menor multiplo commum de dous numeros.—Este problema resolve-se immediatamente pelo theorema que precede. Supponhamos que se-quer *procurar o menor multiplo commum de* 360 e 588, cujo maximo divisor commum é 12: teremos

$$\begin{aligned} m &= (360.\ 588):12 \\ &= 30.\ 588 \\ &= 17640 \end{aligned}$$

Regra.—*Para achar o menor multiplo commum de dous numeros, procura-se o maximo divisor commum desses numeros e por elle se-divide o producto dos mesmos numeros.*

CAPITULO V

APPLICAÇÕES DA Decomposição em factores primos

153.—Divisibilidade por um producto.—O theorema do n. 93 permitte reconhecer quando um numero é divisivel por um producto de dous ou mais factores primos entre si; esse theorema nos-conduz á seguinte

Regra.—*Um numero é divisivel por um producto de dous ou mais factores primos entre si quando for divisivel, separadamente, por cada um destes factores.* Assim, um numero será divisivel por $6=2.\ 3$, se o-for por 2 e por 3; será divisivel por $72=2^3.3^2$, se o-for por 2^3 e por 3^2.

154.—Determinação de todos os divisores de um numero.—Supponhamos que se-pretende *achar todos os divisores*, primos e não primos, *do numero* 3600.

Decomposto o numero 3600 em seos factores primos (n. 147), tem-se

$$3600=2^4.3^2.5^2$$

O numero 3600, sendo divisivel por 2^4, tambem o-é por 2, 2^2, 2^3, que são divisores de 2^4 (n. 102); sendo divisivel por 3^2, tambem o-é por 3; sendo divisivel por 5^2 tambem o-é por 5: portanto, o numero dado tem já por divisores os numeros $2, 2^2, 2^3, 2^4, 3, 3^2, 5, 5^2$, além de 1, que é divisor de todos os numeros. Escrevamos as potencias de cada factor primo em uma linha horizontal começando por 1:

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4, \\ 1,\ 3,\ 3^2, \\ 1,\ 5,\ 5^2. \end{array}$$

Cada numero da 2.ª linha é primo com cada numero da 1.ª (n. 141) : logo, 3600 é divisivel pelos productos de cada numero da 2.ª linha por cada numero da 1.ª (n. 143) ; temos, pois,

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2.3	$2^2.3$	$2^3.3$	$2^4.3$
3^2	2.3^2	$2^2.3^2$	$2^3.3^2$	$2^4.3^2$

Cada numero da 3.ª linha é primo com cada um dos numeros que acabamos de formar (n. 142) : portanto, 3600 é divisivel pelos productos de cada numero da 3.ª linha por cada um dos precedentes divisores (n. 143) ; e virá

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2.3	$2^2.3$	$2^2.3$	$2^4.3$
3^2	2.3^2	$2^2.3^2$	$2^2.3^2$	$2^4.3^2$
5	2.5	$2^2.5$	$2^3.5$	$2^4.5$
3.5	$2.3.5$	$2^2.3.5$	$2^3.3.5$	$2^4.3.5$
$3^2.5$	$2.3^2.5$	$2^2.3^2.5$	$2^3.3^2.5$	$2^4.3^2.5$
5^2	2.5^2	$2^2.5^2$	$2^3.5^2$	$2^4.5^2$
3.5^2	$2.3.5^2$	$2^2.3.5^2$	$2^3.3.5^2$	$2^4.3.5^2$
$3^2.5^2$	$2.3^2.5^2$	$2^2.3^2.5^2$	$2^3.3^2.5^2$	$2^4.3^2.5^2$

Ficam assim formadas todas as combinações que são possiveis entre os factores primos de 3600, porque se-multiplicou cada numero da 2.ª linha por cada numero da 1.ª, e depois cada numero da 3.ª linha por cada numero da 1.ª, cada numero da 2.ª e cada um dos productos anteriores; porém, qualquer numero que divida 3600 não póde conter factores primos differentes

dos que entram neste numero (n. 146), e, portanto, é identico a algum dos divisores precedentemente formados: logo, estes são todos os divisores e os unicos divisores de 3600.

Regra.—*Para achar todos os divisores de um numero, decompõe-se este numero em seos factores primos e forma-se as potencias consecutivas desses factores, até a mais elevada que entrar no referido numero: depois escreve-se em linha horizontal, começando por 1, as potencias de cada factor, e multiplica-se 1.º cada numero da segunda linha por cada numero da primeira, 2.º cada numero da terceira linha por cada um dos numeros anteriormente formados: e assim se-prosegue até haver considerado a derradeira linha. Os divisores procurados são os productos dos numeros que compõem a derradeira linha pelos divisores precedentes.*

Na práctica, para evitar repetições inuteis e, por isso, tornar mais facil a operação, adopta-se a seguinte disposição de calculo :

	1
3600	2
1800	(2)—4
900	(2)—8
450	(2)—16
225	3 — 6—12—24—48
75	(3)— 9—18—36—72—144
25	5 —10—20—40—80
	—15—30—60—120—240
	—45—90—180—360—720
5	(5)—25—50—100—200—400
	—75—150—300—600—1200
	—225—450—900—1800—3600.

Os divisores procurados, primos e não primos, são os numeros que, á direita do traço, não se-acham entre parenthese.

155.—Observação.—Podemos achar o numero total dos divisores de um numero sem termos o trabalho de formar estes. Sirva de exemplo o numero 3600 que, decomposto em seos factores primos nos-deu

$$3600=2^4.3^2.5^2;$$

teremos (n. 154)

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,$$
$$1,\ 3,\ 3^2$$
$$1,\ 5,\ 5^2$$

Na primeira destas linhas ha $4+1$ numeros, na segunda $2+1$ e na terceira $2+1$: quando multiplicamos cada numero da segunda linha por cada numero da primeira, formamos $2+1$ vezes $4+1$ divisores ou $(4+1).(2+1)$ divisores; quando multiplicamos cada numero da terceira linha por cada um dos divisores precedentemente formados, obtemos $2+1$ vezes $(4+1).(2+1)$ divisores ou $(4+1).(2+1).(2+1)$ divisores. Dahi a seguinte

Regra.—*O numero total dos divisores de um numero é egual ao producto dos expoentes dos factores primos distinctos que entram nesse numero, augmentados, cada um, de uma unidade.*

156.—Composição do maximo divisor commum. Sejam dados os numeros

$6000=2^4.3.5^3$, $12600=2^3.3^2.5^2.7$, $9900=2^2.3^2.5^2.11$,

e supponhamos que se-pede o seo maximo divisor commum.

Para um numero ser divisor exacto de 6000, de 12600 e de 9900 é necessario e sufficiente que elle não contenha factores primos differentes dos que entram em todos e cada um destes numeros (n. 146): logo, um divissor commum dos numeros propostos deve conter unicamente os factores primos communs 2, 3 e 5. O divisor commum mencionado não póde conter: 1.°, o factor 2 mais de 2 vezes, porque, se assim fosse, não dividiria 9900; 2.°, o factor 3 mais de 1 vez, porque, então, não dividiria 6000; 3.°, o factor 5 mais de 2 vezes, porque, nesse caso, não dividiria 12600 nem 9900: portanto, um qualquer divisor commum de 6000, 12600 e 9900 não póde ser maior do que $2^2.3.5^2$. Por outro lado, o numero $2^2.3.5^2$ divide exactamente cada um dos numeros dados: logo é o maximo divisor commum destes numeros; e, representando-o por D, ter-se-ha

$$D=2^2.3.5^2=300$$

O raciocinio anterior nos-conduz á seguinte

Regra.—*Para achar o maximo divisor commum de dous ou mais numeros, decompostos em seos factores primos, forma-se o producto dos factores primos communs, tomado cada um com o mais baixo expoente que nos dictos numeros elle tiver.*

157.—Composição do menor multiplo commum.—Sejam dados os numeros

$6000=2^4.3.5^3$, $12600=2^3.3^2.5^2.7$ e $9900=2^2.3^2.5^2.11$,

e supponhamos que se-pede o seo menor multiplo commum.

Para um numero ser divisivel por 6000, por 12600 e por 9900 é necessario e sufficiente que elle contenha todos os factores primos de cada um destes numeros (n. 146) : logo, um multiplo commum dos numeros propostos deverá conter os factores primos 2, 3, 5, 7 e 11. O mencionado multiplo commum não póde conter : 1.°, o factor 2 menos de 4 vezes, porque, então, não seria divisivel por 6000; 2.°, o factor 3 menos de 2 vezes, porque, nesse caso, não seria divisivel por 12600 nem por 9900 ; 3.°, o factor 5 menos de 3 vezes, porque, se assim fosse, não seria elle divisivel por 6000 ; 4.°, os factores 7 e 11 menos de 1 vez, porque, nessa hypothese, elle não seria divisivel por 12600 nem por 9900 : portanto, um qualquer multiplo commum de 6000, 12600 e 9900 não poderá ser menor do que $2^4.3^2.5^3.7.11$. Por outra parte, o numero $2^4.3^2.5^3.7.11$ é divisivel por cada um dos numeros dados : logo, é o menor multiplo commum desses numeros ; representando-o por m, temos

$$m=2^4.3^2.5^3.7.11=1386000.$$

Do que precede conclue-se a

Regra.—*Para achar o menor multiplo commum a dous ou mais numeros, decompostos em seos factores primos, forma-se o producto dos factores primos differentes, tomado cada um com o mais alto expoente que elle tiver nos numeros dados.*

LIVRO III

OPERAÇÕES FUNDAMENTAES

SOBRE

Fracções ordinarias

158.—Os numeros fraccionarios procedem da avaliação de quantidades que não contêm exactamente a unidade escolhida como termo de comparação (n. 4). Entre os diversos modos de effectuar, nestas circumstancias, a avaliação, destaca-se o seguinte :—*divide-se a unidade em partes eguaes sufficientemente pequenas, para que uma dellas possa conter-se numero inteiro de vezes na quantidade*—; toma-se uma parte da unidade principal como unidade auxiliar, á qual se-dá o nome de *parte aliquota* da unidade.

Parte aliquota da unidade *é uma das partes eguaes em que se-divide a mesma unidade, considerada como principal.*

Fracção ordinaria (*) *é o numero que consta de partes aliquotas da unidade principal, resultantes da divisão desta unidade em qualquer numero de partes eguaes.*

159.—Para formar juizo claro sobre o valor da quantidade expressa por uma fracção ordinaria, é precisa a consideração simultanea de dous numeros inteiros: *denominador* e *numerador*.

(*) Por abreviar, subentende-se, ás vezes, o qualificativo de *ordinaria*.

Denominador *é o numero que mostra em quantas partes aliquotas dividiu-se a unidade principal.*—O denominador assignala a *especie* das partes aliquotas.

Numerador *é o numero das partes aliquotas que constituem a fracção.*—O numerador indica o *valor* da fracção.

O numerador e o denominador formam os *termos da fracção.*

160.—A numeração das fracções ordinarias fica resumida nas duas convenções que passamos a expôr.

Convenção 1.ª—*Para enunciar uma parte aliquota da unidade, accrescenta-se a designação* avos (*) *ao nome do denominador.*

Assim, tendo-se dividido a unidade principal em 11 partes eguaes, uma dellas denominar-se-ha um *onze-avos*, que é como se dissemos uma *decima parte.* O uso tem alterado a precedente convenção nos casos em que o denominador é 2, 3,.....9, 10, 100, 1000, etc. : nesses casos a parte aliquota denomina-se *meio, terço,* ....*nono, decimo, centesimo, millesimo,* etc.

Não sendo a fracção ordinaria outra cousa senão um *numero inteiro* (numerador) formado por *partes aliquotas* da unidade (n. 158), torna-se claro que,

Para enunciar uma fracção ordinaria, enuncia-se o numerador e accrescenta-se o nome das partes aliquotas que constituem a fracção.

Assim, sendo 7 o numerador e 8 o denominador de uma fracção ordinaria, leremos *sete oitavos.*

Convenção 2.ª—*Para representar mediante algarismos uma fracção ordinaria, escreve-se o numerador della por cima de um traço horizontal e o denominador por baixo.*

A fracção *sete oitavos* escrever-se-ha, pois, $\frac{7}{8}$. Póde-se tambem empregar, na separação dos termos, um traço obliquo, collocando o numerador á esquerda e o denominador á direita ; assim : 7/8. Esta notação é usada principalmente nos calculos commerciaes.

(*) A designação *avos* quer dizer *partes eguaes.*

CAPITULO I

PROPRIEDADES

161. — Theorema I. *Se o numerador de uma fracção é inferior, egual ou superior ao denominador, a fracção é inferior, egual ou superior á unidade.*

Demonstração.—Sejam dadas as fracções $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$ e $\frac{7}{5}$: deve-se provar que

$$\frac{4}{5} < 1, \ \frac{5}{5} = 1 \text{ e } \frac{7}{5} > 1$$

Para formar qualquer das tres fracções, dividiu-se a unidade em 5 partes eguaes (n. 158): portanto, 1.°, a fracção $\frac{4}{5}$ é menor que a unidade, porque contem menos partes que a unidade ; 2.°, a fracção $\frac{5}{5}$ é egual á unidade, porque encerra tantas partes quantas existem na unidade ; 3.°, a fracção $\frac{7}{5}$ é maior que a unidade, porque consta de mais partes que a unidade. *C. q. d.*

162.—Observação.—Uma fracção, comparada com a unidade, póde ser *propria* ou *impropria.*

Fracção propria *é aquella que tem o numerador menor que o denominador.*

Fracção impropria *é aquella que tem o numerador egual ao denominador ou maior do que elle.*

O fundamento desta distincção está em que o vocabulo *fracção*, tomado no sentido restricto, lembra a idéa de quantidade *menor* do que a unidade.

163.—Theorema II. *Se duas fracções tiverem o mesmo denominador, a maior das duas é a que tiver maior numerador. Se duas fracções tiverem o mesmo numerador, a maior das duas é a que tiver menor denominador.*

Demonstração.—Supponhamos dadas as duas fracções $\frac{3}{8}$ e $\frac{7}{8}$, que têm o mesmo denominador, e as duas outras $\frac{3}{7}$ e $\frac{3}{4}$, cujo numerador é o mesmo; vamos mostrar que

$$\frac{7}{8} > \frac{3}{8} \text{ e } \frac{3}{4} > \frac{3}{7}.$$

1.° as duas fracções $\frac{3}{8}$ e $\frac{7}{8}$ compõem-se de partes aliquotas da mesma especie (n. 159); mas, na segunda existe maior numero destas partes que na primeira: logo, $\frac{7}{8}$ é maior que $\frac{3}{8}$.

2.° As duas fracções $\frac{3}{7}$ e $\frac{3}{4}$ encerram o mesmo numero de partes aliquotas (n. 159); porém, as partes aliquotas que compõem a segunda são maiores do que aquellas que formam a primeira: portanto, $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{3}{7}$.

164.—Theorema III. *O producto de uma fracção pelo seo denominador é egual ao numerador.*

Demonstração.—Admitta-se que é dada a fracção $\frac{7}{8}$: queremos mostrar que

$$\frac{7}{8} \times 8 = 7.$$

Formou-se a fracção $\frac{7}{8}$ dividindo a unidade em 8 partes eguaes e tomando 7 dessas partes (n. 158); ora, é evidente que $\frac{1}{8}$ repetido 8 vezes dá 1 unidade: logo, $\frac{7}{8}$ repetidos 8 vezes darão 7 unidades. *C. q. d.*

165.—Theorema IV. *O quociente da divisão de um numero por outro é egual a uma fracção que tem como numerador o dividendo e como denominador o divisor.*

Demonstração.—Supponhamos que se-quer dividir 3 por 4: vamos provar que

$$3 : 4 = \frac{3}{4}.$$

O quociente da divisão de 3 por 4 é um numero que, multiplicado por 4, dá 3 (n. 56); ora, o producto da fracção $\frac{3}{4}$ pelo seo denominador 4 equivale ao numero 3 (n. 164): portanto, o quociente da divisão de 3 por 4 é egual á fracção $\frac{3}{4}$, isto é, a uma fracção que tem por numerador o dividendo e por denominador o divisor. *C. q. d.*

166.—THEOREMA V. *Se, não alterando o denominador, multiplicarmos ou dividirmos o numerador de uma fracção por qualquer numero, a fracção tornar-se-ha esse mesmo numero de vezes maior ou menor.*

Demonstração.—Seja dada a fracção $\frac{5}{7}$; multiplicando o seo numerador por 2, ter-se-ha $\frac{5.2}{7}$: deve-se provar que

$$\frac{5.2}{7} = \frac{5}{7} \times 2.$$

As duas fracções $\frac{5}{7}$ e $\frac{5.2}{7}$ compõem-se de partes aliquotas da mesma especie (n. 159); mas, a primeira contem 5 dessas partes, ao passo que a segunda encerra 5.2 das mesmas partes, isto é, 2 vezes mais que a primeira: logo, a fracção $\frac{5.2}{7}$ é 2 vezes maior que a fracção $\frac{5}{7}$.

Do raciocinio precedente inferimos que a fracção $\frac{5}{7}$ torna-se 2 vezes maior quando multiplicarmos o seo numerador por 2: logo, reciprocamente, a fracção $\frac{5.2}{7}$ tornar-se-ha 2 vezes menor desde-que dividirmos o seo numerador por 2.

C. q. d.

167.—THEOREMA VI. *Se, não alterando o numerador, multiplicarmos ou dividirmos o denominador de uma fracção por qualquer numero, a fracção tornar-se-ha esse mesmo numero de vezes menor ou maior.*

Demonstração.—Seja a fracção $\frac{5}{7}$; multiplicando o seo denominador por 2, tem-se $\frac{5}{7.2}$: vamos provar que

$$\frac{5}{7.2} = \frac{5}{7} : 2.$$

As duas fracções $\frac{5}{7}$ e $\frac{5}{7.2}$ contêm o mesmo numero de partes aliquotas (n. 159); porém, a parte aliquota que forma a primeira é $\frac{1}{7}$, em quanto-que a parte aliquota que entra na segunda é $\frac{1}{7.2}$, isto é, 2 vezes menor que $\frac{1}{7}$: portanto, a fracção $\frac{5}{7.2}$ é 2 vezes menor que $\frac{5}{7}$.

Do raciocinio anterior concluimos que a fracção $\frac{5}{7}$ torna-se 2 vezes menor quando multiplicarmos o seo denominador por 2: logo, reciprocamente, a fracção $\frac{5}{7.2}$ tornar-se-ha 2 vezes maior logo-que dividirmos o seo denominador por 2.

C. q. d.

168.—THEOREMA VII. *Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, o valor da fracção não se-altera.*

Demonstração.—Supponha-se que é dada a fracção $\frac{5}{7}$: multiplicando os seos dous termos por 2, obtem-se $\frac{5.2}{7.2}$: é preciso provar que

$$\frac{5.2}{7.2} = \frac{5}{7}.$$

Multiplicando por 2 o numerador da fracção $\frac{5}{7}$, obtem-se a fracção $\frac{5.2}{7}$, que é 2 vezes maior que $\frac{5}{7}$ (n. 166); multiplicando por 2 o denominador da fracção $\frac{5.2}{7}$, forma-se a fracção $\frac{5.2}{7.2}$, que é 2 vezes menor que $\frac{5.2}{7}$ (n. 167), ou egual a $\frac{5}{7}$.

Se, multiplicando por 2 os termos da fracção $\frac{5}{7}$, esta fracção não muda de valor, segue-se que, dividindo por 2 os termos de fracção resultante $\frac{5.2}{7.2}$, tambem o valor desta fracção não se-altera. *C. q. d.*

169—. THEOREMA VIII. *Se ajunctarmos ou tirarmos um mesmo numero aos dous termos de uma fracção, esta augmenta ou diminue se for menor que a unidade, diminue ou augmenta quando for maior que a unidade, e não muda de valor sendo egual á unidade.*

Demonstração.—Sejam dadas as tres fracções $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{8}$ e $\frac{8}{8}$, das quaes a primeira é inferior, a segunda superior e a terceira egual á unidade: vamos demonstrar que, ajunctando 4, por exemplo, aos dou termos de cada fracção, tem-se

$$\frac{3+4}{8+4} > \frac{3}{8}, \quad \frac{11+4}{8+4} < \frac{11}{8} \quad \text{e} \quad \frac{8+4}{8+4} = \frac{8}{8}.$$

1.° Das duas fracções $\frac{3+4}{8+4}$ e $\frac{3}{8}$, menores que a unidade, aquella que menos differir da unidade é, evidentemente, a maior; ora, a differença entre a unidade e a fracção $\frac{3+4}{8+4}$ é menor que a differença entre a unidade

e a fracção $\frac{3}{8}$, pois-que a primeira differença é $\frac{5}{8+4}$ e a segunda é $\frac{5}{8}$ (n. 163): logo a fracção $\frac{3+4}{8+4}$ é maior que a fracção $\frac{3}{8}$.

Reciprocamente, se tirarmos 4 aos dous termos da fracção $\frac{3+4}{8+4}$, obteremos a fracção $\frac{3}{8}$ que é menor que a primeira.

11+4

2.° Das duas fracções $\frac{11+4}{8+4}$ e $\frac{11}{8}$, maiores que a unidade, aquella que menos differir da unidade é, evidentemente, a menor; porém, a differença entre a fracção $\frac{11+4}{8+4}$ e a unidade é menor que a differença entre a fracção $\frac{11}{8}$ e a unidade, por quanto a primeira differença é $\frac{3}{8+4}$ e a segunda é $\frac{3}{8}$ (n. 163): portanto, a fracção $\frac{11+4}{8+4}$ é menor que a fracção $\frac{11}{8}$.

Reciprocamente, quando tirarmos 4 aos dous termos da fracção $\frac{11+4}{8+4}$, encontramos a fracção $\frac{11}{8}$, que é maior que a primeira.

3.° As duas fracções $\frac{8+4}{8+4}$ e $\frac{8}{8}$ são eguaes á unidade, a segunda comforme a hypothese e a primeira porque, junctando um mesmo numero a dous numeros eguaes, tambem são eguaes os resultados (n. 73, ax. 2.°): logo, as fracções $\frac{8+4}{8+4}$ e $\frac{8}{8}$ são eguaes entre si (n. 73, ax. 1.°).

170.—Nos theoremas que seguem vão ser expostas as principaes propriedades das fracções chamadas *irreductiveis*.

Fracção irreductivel *é a fracção que não póde ser convertida em outra que tenha o mesmo valor e termos menores.*

Dous numeros são *equimultiplos* de dous outros quando forem productos destes ultimos pelo mesmo numero inteiro.

171.—Theorema IX. *Se os dous termos de uma fracção forem primos entre si, e se essa fracção for egual a outra, os dous termos desta outra são equimultiplos dos da primeira.*

Demonstração.—Seja $\frac{a}{b}$ uma fracção cujos termos são numeros primos entre si, e seja $\frac{a'}{b'}$ uma outra fracção egual á primeira: vamos demonstrar que os termos da fracção $\frac{a'}{b'}$ são equimultiplos de a e b.

Sendo eguaes as fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$, quando multiplicarmos os seos numeradores pelo numero bb', cada uma dellas ficará este mesmo numero de vezes maior (n. 166), e, portanto, teremos (n. 13, ax. 2º.)

$$\frac{abb'}{b} = \frac{a'bb'}{b'},$$

donde resulta, dividindo o numerador de cada fracção pelo respectivo denominador (n. 90),

$$ab' = a'b$$

Consideremos esta ultima egualdade. O numero a, dividindo o primeiro membro da referida egualdade (n. 102), tambem divide o segundo $a'b$, e sendo primo com o factor b (conforme a hypothese), divide o outro

factor a' (n. 137): por conseguinte, chamando m o quociente inteiro da divisão de a' por a, tem-se (n. 60)

$$a' = am;$$

porém, substituindo este valor de a' na egualdade que consideramos, vem

$$ab' = amb,$$

donde se-tira, dividindo ambos os membros por a,

$$b' = bm$$

Assim, os termos a' e b' são productos de a e b pelo mesmo numero m, e são, pois, equimultiplos de a e b. *C. q. d.*

172. — Corollario. *Se tivermos duas fracções eguaes, e se os dous termos de cada uma forem primos entre si, as duas fracções são identicas.*

Demonstração.—Sejam dadas as fracções eguaes $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$, e admittamos que os termos de cada uma são primos entre si: vamos provar que as duas fracções são identicas, isto é, que seos numeradores e seos denominadores são eguaes.

Sendo eguaes as fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$, e sendo primos entre si os dous termos da primeira, os dous termos da segunda são equimultiplos de a e b (n. 171), e terão, portanto, um divisor commum m: donde segue que

$$a' = am \text{ e } b' = bm;$$

porém, desde-que são tambem primos entre si os dous termos da segunda fracção, o seo unico divisor commum é a unidade (n. 120): por conseguinte, sendo $m=1$, teremos

$$a'=a \text{ e } b'=b \qquad C.\ q.\ d.$$

173.—Theorema X. *Se os dous termos de uma fracção forem primos entre si, a fracção é irreductivel.*

Demonstração.—Seja a fracção $\frac{a}{b}$, cujos termos suppomos serem primos entre si: deve-se provar que esta fracção é irreductivel.

A fracção $\frac{a}{b}$ será irreductivel se não pudermos transformál-a em outra que tenha o mesmo valor e termos menores (n. 170); ora, sendo primos entre si os numeros a e b, os termos de qualquer outra fracção egual a $\frac{a}{b}$ devem ser maiores que os desta ou, quando muito, eguaes a elles (ns. 171 e 172): logo, a fracção $\frac{a}{b}$ é irreductivel.

C. q. d.

174.—Theorema XI. *Se uma fracção for irreductivel, os seos termos são primos entre si.*

Demonstração.—Seja dada a fracção irreductivel $\frac{a}{b}$: quer-se provar que a e b são numeros primos entre si.

Se os termos a e b não fossem primos entre si, deveriam ter um divisor commum differente da unidade (n. 120); mas, então, dividindo ambos esses termos por esse divisor commum, a fracção $\frac{a}{b}$, sem mudar de valor, ficaria convertida em outra de termos menores, e não seria irreductivel (n. 170); ora, esta conclusão é inadmissivel, por ser contraria á hypothese: logo, os termos a e b são primos entre si. *C. q. d.*

CAPITULO II

TRANSFORMAÇÕES

175.—Quanto menores forem os termos de uma fracção, tanto mais facil será 1.°, fazer-se idéa do valor della, e 2.°, entrar com ella em calculo: dahi resulta a vantagem de sabermos transformar uma fracção em outra que tenha o mesmo valor que a primeira e cujos termos não possam ser menores. A essa transformação chama-se *reducção á expressão mais simples* (*).

Seria tambem difficultoso ou, até, impossivel 1.°, comparar, 2.°, addicionar, 3.°, subtrahir, fracções que não tivessem o mesmo denominador, isto é, que não fossem da mesma especie (n. 159): é, pois, util aprendermos a transformar duas ou mais fracções em outras que tenham o mesmo denominador e sejam, respectivamente, eguaes ás primeiras. Essa transformação denomina-se *reducção ao mesmo denominador*.

§ 1.º—Reducção á expressão mais simples

176.—Reduzir uma fracção á expressão mais simples *é procurar outra fracção que seja irreductivel e egual á primeira.*

Os principios em que se-basêa essa transformação reduzem-se aos seguintes: 1.°, Se dividirmos por um mesmo numero ambos os termos de uma fracção, o valor desta não se-altera (n. 168); 2.°, Se dividirmos os dous numeros pelo seo maximo divisor commum, os

(*) Não se-deve confundir *reducção á expressão mais simples* com *simplificação*: uma fracção estará sómente simplificada quando, convertida em outra equivalente e de termos menores, esta puder ser ainda simplificada; no caso contrario é que a fracção proposta achar-se-ha reduzida á sua expressão mais simples.

quocientes resultantes são numeros primos entre si (n. 130).

177.—Supponhamos que nos-é proposta a seguinte questão :

Reduzir a fracção $\frac{612}{720}$ *á sua expressão mais simples.*—A fracção proposta ficará reduzida á sua expressão mais simples desde-que acharmos uma fracção irreductivel que seja egual a ella (n. 176); ora, se dividirmos os termos 612 e 720 pelo seo maximo divisor commum, 1.°, a fracção resultante é irreductivel, porque os seos termos são primos entre si (n. 130), e 2.°, o valor da fracção proposta não se-altera (n. 168): por conseguinte, sendo 36 o maximo divisor commum dos numeros 612 e 720, teremos

$$\frac{612}{720} = \frac{612:36}{720:36} = \frac{17}{20},$$

e $\frac{17}{20}$ é a fracção procurada.

Regra.—*Para reduzir uma fracção á sua expressão mais simples, divide-se ambos os termos della pelo maximo divisor commum desses termos.*

178.—O processo de reducção á expressão mais simples com o qual acabamos de occupar-nos, embora offereça a vantagem de ser geral, tem, comtudo, o inconveniente de não ser commodo na práctica; attendendo, pois, á maxima rapidez do calculo combinada com a menor probabilidade de erro, vejamos a modificação que o mencionado processo póde receber.

Seja dada a fracção $\frac{4620}{6160}$. O maximo divisor commum de dous numeros compõe-se de todos os factores

primos communs a esses numeros, tomado cada factor com o seo mais baixo expoente (n. 156): logo, se dividirmos os termos 4620 e 6160 por todos os divisores, primos ou não primos, que lhes-forem communs, teremos dividido esses termos pelo seo maximo divisor commum (n. 93), e a fracção proposta ficará reduzida á sua mais simples expressão.

A disposição práctica do calculo é a que segue:

$$\frac{4620}{6160} = \frac{462}{616} = \frac{231}{308} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

Regra.—*Supprime-se, primeiramente, os zeros que forem communs aos dous termos da fracção proposta; examina-se, em seguida, se esses dous termos são divisiveis por algum dos numeros 2 ou 4, 5 ou 25, 3 ou 9, 11, 7, e por elle se divide. Com a fracção resultante procede-se do mesmo modo, até chegar a uma fracção cujos termos não sejam mais divisiveis por nenhum dos dictos numeros : se, á simples vista, não reconhecermos serem primos entre si os termos desta ultima fracção, applicaremos a ella o processo do n. 177.*

179.—A regra que precede applica-se com vantagem á simplificação successiva de fracções cujos termos acham-se decompostos em factores. Supponhamos que é dada a fracção

$$\frac{6.25.420.380}{720.345.190}$$

Depois de se-ter supprimido egual numero de zeros nos dous termos da fracção proposta, compara-se o primeiro factor do numerador com os diversos factores do denominador, afim de descobrir entre aquelle factor e estes algum divisor commum, pelo qual se-divide ; o quociente obtido no numerador (sendo maior que 1) compara-se ainda, para o mesmo fim, com os diversos factores que ficaram no denominador : se não se-encontrar divisor commum, passa-se ao segundo factor do numerador, e com elle se procede como com o primeiro. Eis o typo do calculo

$$\frac{\begin{array}{r} 1 \\ 1\quad 5\ 7\ 19 \\ 6.25\ 42.38 \end{array}}{\begin{array}{l} 72.245.19 \\ 12\quad 69\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}} = \frac{5.7}{69} = \frac{35}{69}$$

180.—Observação.—Toda a vantagem práctica que se-descobre no processo de simplificações successivas está baseada na substituição de divisões parciaes, geralmente complicadas, por outras mais faceis de executar. como sejam as divisões por 2, 4, 5, 3, 9, 7. As divisões por 25 e por 11 tornar--se-hão tão faceis como as precedentes, desde-que se-tome em conta as observações que passamos a fazer.

Sendo exacta a divisão de um numero por 25, esse numero é egual a 25 vezes o quociente; e se multiplicarmos esse mesmo numero por 4, o producto se-tornará egual a 100 vezes o dicto quociente : logo, *se um numero for divisivel por 25, para effectuar essa divisão é bastante multiplicar o numero por 4 e abstrahir de dous zeros á direita do producto.*

Quando é exacta a divisão de um numero por 11, se examinarmos o modo por que, multiplicando o quociente por 11, se-formou esse numero, será facil de ver que o primeiro algarismo do numero é o mesmo que o primeiro algarismo do quociente; que o segundo algarismo do numero resulta da somma do primeiro algarismo do quociente com o segundo; que o terceiro algarismo do numero provem da somma do segundo algarismo do quociente com o terceiro e com a reserva da somma anterior; e assim por deante : logo, *se um numero for divisivel por 11, para effectuar essa divisão é sufficiente 1.°, escrever o primeiro algarismo da direita do dividendo; 2.°, subtrahir do segundo algarismo do dividendo esse primeiro algarismo achado, escrevendo o resto á esquerda deste; 3.°, subtrahir do terceiro algarismo do dividendo o segundo algarismo achado, escrevendo o resto á esquerda deste; e assim por deante.*

Estas duas regras são de mui facil applicação.

§ 2.º—Reducção ao mesmo denominador

181.—Reduzir duas ou mais fracções ao mesmo denominador *é procurar outras tantas fracções que tenham o mesmo denominador e sejam eguaes ás primeiras, cada uma a cada uma.*

Os principios em que está fundada esta transformação vem a ser os seguintes : 1.°, O valor de uma fracção não se-altera quando multiplicamos ou dividimos ambos os seos termos pelo mesmo numero (n. 168) ; 2.°, Um producto é independente da ordem em que se-multiplica os seos factores (n. 81).

182.—Admittamos que se-pretende resolver a questão seguinte :

Reduzir as duas fracções $\frac{3}{7}$ e $\frac{8}{11}$ *ao mesmo denominador.*—Se multiplicarmos ambos os termos da primeira fracção $\frac{3}{7}$ por 11, denominador da segunda, obtem-se para resultado a fracção $\frac{3.11}{7.11}$, equivalente a $\frac{3}{7}$ (n. 168) ; e se multiplicarmos ambos os termos da segunda fracção $\frac{9}{11}$ por 7, denominador da primeira, acha-se a fracção $\frac{9.7}{11.7}$, equivalente a $\frac{9}{11}$ (n. 168); ora, as duas fracções obtidas têm o mesmo denominador, porque $7.\,11 = 11.\,7$ (n. 81): logo, quando sobre as fracções dadas operarmos de accordo com o presente raciocinio, ficarão essas fracções reduzidas ao mesmo denominador, e teremos

$$\frac{3.11}{7.11} \text{ e } \frac{9.7}{11.7} \text{ ou } \frac{33}{77} \text{ e } \frac{63}{77}$$

Se, em logar de duas, fossem dadas as tres fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{8}$, e se multiplicassemos ambos os termos de cada uma pelo producto dos denominadores das outras, concluiriamos, por um raciocinio analogo ao precedente, que as tres fracções dadas ficavam reduzidas ao mesmo denominador. Viria

$$\frac{2.5.8}{3.5.8},\ \frac{4.3.8}{5.3.8} \text{ e } \frac{7.3.5}{8.3.5} \text{ ou } \frac{80}{120},\ \frac{96}{120} \text{ e } \frac{105}{120}$$

Regra.—*Para reduzir duas ou mais fracções ao mesmo denominador, multiplica-se ambos os termos de cada uma pelo denominador da outra, se forem duas as fracções; ou pelo producto dos denominadores das outras, se forem mais de duas.*

183.—O processo de reducção ao mesmo denominador, que constitue o objecto da regra precedentemente estabelecida, offerece a desvantagem de nos-conduzir, muitas vezes sem necessidade, a fracções com denominador commum consideravel; essa desvantagem

será com facilidade removida mediante a observação que passamos a fazer.

Por pouco que se-reflicta sobre o processo exposto em o n. 182, facilmente se-nota 1.°, que o denominador commum das fracções resultantes é um *multiplo commum* dos denominadores das fracções dadas; 2.°, que o numero pelo qual se-multiplica ambos os termos de cada fracção dada é *o quociente da divisão desse multiplo commum pelo denominador da mesma fracção*. Segue-se dahi que, se o dicto multiplo commum for *o menor* e se, demais, cada uma das fracções dadas for irreductivel, as fracções que se-achar terão o menor denominador commum que é possivel dar-lhes.

Sejam dadas as fracções irreductiveis (*) $\frac{13}{16}$, $\frac{29}{30}$ e $\frac{17}{48}$. O menor multiplo commum dos numeros 16, 30 e 48 é 240 (n. 157), e dividindo 240 por 16, 30 e 48, successivamente, acha-se os quocientes 15, 8 e 5. Se agora multiplicarmos ambos os termos da primeira fracção $\frac{13}{16}$ por 15, tem-se a fracção $\frac{13.15}{16.15}$, equivalente a $\frac{13}{16}$ (n. 168); se multiplicarmos ambos os termos da segunda fracção $\frac{29}{30}$ por 8, vem a fracção $\frac{29.8}{30.8}$, equivalente a $\frac{29}{30}$ (n. 168); se, finalmente, multiplicarmos os termos da terceira fracção $\frac{17}{48}$ por 5, encontra-se a fracção $\frac{17.5}{48.5}$, equivalente a $\frac{17}{48}$; ora, os denominadores das fracções obtidas são eguaes, porque $16.15 = 30.8 = 48.5 = 240$: logo, as tres fracções

(*) Se o não fossem, deveriamos reduzil-as previamente á sua expressão mais simples.

dadas acham-se reduzidas ao mesmo denominador (n. 181), e este é o menor possivel.

Dispõe-se o calculo pelo modo seguinte:

$$\begin{array}{ccc} 15 & 8 & 5 \\ \dfrac{13}{16}, & \dfrac{29}{30}, & \dfrac{17}{48} \end{array}$$

$$\frac{195}{240},\quad \frac{232}{240},\quad \frac{85}{240}$$

Regra.—*Para reduzir duas ou mais fracções ao menor denominador commum, reduz-se, primeiro, essas fracções á expressão mais simples; em seguida procura-se o menor multiplo commum dos denominadores de todas as fracções, e multiplica-se ambos os termos de cada uma pelo quociente que se-obtem dividindo esse menor multiplo pelo denominador correspondente.*

184.—Na determinação do menor multiplo commum, exigida pela regra precedente, convem examinar, antes de tudo, 1.º, se o maior denominador é divisivel por todos os outros, ou, no caso contrario, 2.º, se o producto do maior denominador por 2, 3, 4,...9, 10, 100, etc., é divisivel por todos os denominadores: em qualquer dos casos ter-se-ha sem grande trabalho o menor multiplo commum.

CAPITULO III

OPERAÇÕES

§ 1º—Addição

185.—Addição, em geral, *é a operação que tem por fim reunir em um numero unico as unidades ou partes aliquotas da unidade contidas em dous ou mais numeros dados.*

Na addição de fracções consideraremos dous casos.

186.—1.º Caso: *addição de fracções.*—Supponhamos, em primeiro logar, que as fracções dadas têm o mesmo denominador, e sejam $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$ e $\frac{5}{8}$ essas fracções. A somma que se-procura deve encerrar todas as partes aliquotas da unidade contidas nas fracções dadas (n. 185); ora, a primeira dessas fracções contem 3 partes aliquotas da unidade eguaes a *um oitavo*, a segunda contem 7 e a terceira 5 das mesmas partes: por conseguinte, a somma das tres fracções constará de 3+7+5 *oitavos*, e teremos

$$\frac{3}{8}+\frac{7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{3+7+5}{8}=\frac{15}{8}$$

Sejam agora dadas as fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{11}$ e $\frac{13}{15}$, que têm denominadores differentes. Se reduzirmos estas tres fracções ao mesmo denominador, os valores dellas não se-alteram (n. 181): applicando ás fracções resultantes o precedente raciocinio, teriamos, pois,

$$\begin{array}{ccccc} 55 & & 15 & & 11 \\ \dfrac{2}{3} & + & \dfrac{7}{11} & + & \dfrac{13}{15} \end{array}$$

$$=\frac{110}{165}+\frac{105}{165}+\frac{143}{165}=\frac{110+105+143}{165}=\frac{358}{165}$$

Regra.—*Para addicionar duas ou mais fracções que tenham o mesmo denominador, somma-se os numeradores e dá-se á somma o denominador commum; e se não tiverem o mesmo denominador, reduzem-se primeiro.*

187.—Mediante a regra que precede, podemos tambem addicionar uma fracção com um numero inteiro. Com effeito, qualquer numero inteiro póde representar-se por uma fracção que tenha como numerador esse numero inteiro e como denominador a unidade; porque, se a fracção exprime um quociente (n. 165), dividindo o seo numerador por 1, ter-se-ha o numero inteiro. Posto isto, supponha-se que se-quer addicionar 4 e $\frac{7}{9}$: teremos (n. 186)

$$4+\frac{7}{9}=\frac{4}{1}+\frac{7}{9}=\frac{4.9}{9}+\frac{7}{9}=\frac{4.9+7}{9}$$

Analysando a expressão obtida, conclue-se a seguinte

Regra.—*Para addicionar uma fracção com um numero inteiro, multiplica-se o numero inteiro pelo denominador da fracção, juncta-se ao producto o numerador desta, e ao resultado dá-se o mesmo denominador.*

Esta regra serve para reduzir á fórma de fracção impropria um numero composto de inteiro e fracção.

Examinemos a questão inversa da precedente, isto é, supponha-se que queremos extrahir o inteiro contido na fracção impropria $\frac{42}{9}$. A fracção $\frac{42}{9}$ exprime o quociente completo da divisão de 42 por 9 (n. 165) : chamando, pois, q a parte inteira do quociente e r o resto dessa divisão, ter-se-ha (n. 60)

$$42=9.\,q+r\,;$$

porém, é facil de ver que, se multiplicarmos o divisor 9 por $q+\frac{r}{9}$, obtemos $9.\,q+r$ (ns. 80 e 164) ou o dividendo 42 : logo, $q+\frac{r}{9}$ é o quociente completo da divisão de 42 por 9, e teremos

$$\frac{42}{9}=q+\frac{r}{9}\,.$$

Da analyse desta expressão deduz-se a

Regra.—*Para extrahir o inteiro contido numa fracção impropria, divide-se o numerador pelo denominador : a parte inteira do quociente será o inteiro procurado, e o resto* (havendo-o) *será o numerador de uma fracção propria que se-ajuncta ao inteiro com o mesmo denominador da fracção dada.*

E' claro que esta regra serve tambem para *completar* o quociente de uma divisão inexacta (*) : a fracção propria que se-addiciona á parte inteira do quociente, denomina-se *fracção complementar*.

188.—2.º Caso : *addição de numeros compostos de inteiro e fracção.*—Admittamos que se-pretende addicionar os numeros $5+\frac{7}{8}$, $11+\frac{9}{15}$ e $7+\frac{13}{16}$. E' necessario que a somma procurada encerre todas as unidades e partes aliquotas da unidade contidas nos tres numeros dados (n. 185); porém, a somma dos inteiros é

$$5+11+7=23,$$

e a das fracções é

$$\overset{30}{\frac{7}{8}}+\overset{16}{\frac{9}{15}}+\overset{15}{\frac{13}{16}}$$
$$=\frac{210}{240}+\frac{144}{240}+\frac{195}{240}=\frac{210+144+195}{240}=\frac{549}{240}$$

(*) Vej. n. 60.

ou, extrahindo o inteiro (n. 187), e reduzindo á expressão mais simples, $2+\frac{23}{80}$: logo, a somma pedida será

$$\left(5+\frac{7}{8}\right)+\left(11+\frac{9}{15}\right)+\left(7+\frac{13}{16}\right)$$

$$=23+2+\frac{23}{80}=25+\frac{23}{80}.$$

Regra.—*Para addicionar numeros compostos de inteiro e fracção, somma-se de uma parte os inteiros e da outra as fracções, e juncta-se á primeira somma o inteiro que provier da segunda.*

§ 2.º—Subtracção

189.—Na subtracção de fracções temos dous casos a considerar.

190.—1.º Caso : *subtracção de fracções.*—Supponha-se, em primeiro logar, que as fracções dadas têm o mesmo denominador, e admitta-se que queremos subtrahir $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{7}$. O resto da subtracção proposta deve conter as partes aliquotas da unidade que, addicionadas ao subtrahendo, produzem o minuendo (n. 43); mas, o minuendo compõe-se de 5 partes aliquotas da unidade eguaes a *um setimo*, e o subtrahendo contem 3 das mesmas partes: portanto, o resto constará de 5—3 *setimos*, e tem-se, pois,

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$$

Admitta-se agora que pretendemos subtrahir $\frac{5}{13}$

de $\frac{25}{26}$, fracções estas que têm denominadores differentes. Se reduzirmos ao mesmo denominador as duas fracções dadas, os valores dellas não se-alteram (n. 181): repetindo sobre as fracções resultantes o raciocinio precedente, viria

$$\frac{\overset{1}{25}}{26}-\frac{\overset{2}{5}}{13}$$

$$=\frac{25}{26}-\frac{10}{26}=\frac{25-10}{26}=\frac{15}{26}$$

Regra.—*Para subtrahir fracções que tenham o mesmo denominador, subtrahe-se os numeradores e dá-se ao resto o denominador commum; e se não tiverem o mesmo denominador, reduzem-se primeiro.*

191.—2.º Caso : *subtracção de numeros compostos de inteiro e fracção.*—Supponhamos que se-pretende subtrahir o numero $2+\frac{5}{8}$ do numero $6+\frac{11}{12}$. Deve o resto pedido conter as unidades e partes aliquotas da unidade que faltam ao subtrahendo para este ser egual ao minuendo (n. 43); porém, a differença entre os inteiros é

$$6-2=4,$$

e a differença entre as fracções é

$$\frac{\overset{2}{11}}{12}-\frac{\overset{3}{5}}{8}$$

$$\frac{22}{24}-\frac{15}{24}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}:$$

por conseguinte, o resto procurado é

$$\left(6+\frac{11}{12}\right)-\left(2+\frac{5}{8}\right)=4+\frac{7}{24}$$

Se a fracção do minuendo fosse menor que a fracção do subtrahendo, seria impossivel effectuar a subtracção das duas fracções : neste caso toma-se uma unidade na parte inteira do minuendo e somma-se essa unidade com a fracção do dicto minuendo (n. 187), e procede-se depois como dissemos.

REGRA.—*Para subtrahir numeros compostos de inteiro e fracção, subtrahe-se de uma parte os inteiros e da outra as fracções, e juncta-se o segundo resto ao primeiro : sendo a fracção do minuendo menor que a do subtrahendo, juncta-se áquella uma unidade que se-toma na parte inteira do minuendo.*

§ 3.º—**Multiplicação**

192.—MULTIPLICAÇÃO, em geral, *é a operação que tem por fim, sendo dados dous numeros, repetir o multiplicando ou uma parte aliquota do multiplicando tantas vezes quantas forem as unidades ou as partes aliquotas da unidade contidas no multiplicador.*

Na multiplicação de fracções consideraremos um caso unico, ao qual se-pódem reduzir todos os outros. (Vej. adeante, n. 194).

193.—CASO GERAL : *multiplicação de duas fracções.* — Supponha-se que queremos multiplicar a fracção $\frac{4}{7}$ pela fracção $\frac{3}{8}$. Multiplicar $\frac{4}{7}$ por $\frac{3}{8}$ equivale a repetir 3 vezes *um oitavo* de $\frac{4}{7}$ (n. 192) ; ora, para

se-obter um oitavo de $\frac{4}{7}$, bastará tornar 8 vezes menor esta fracção, multiplicando o seo denominador por 8 (n. 167) : um oitavo de $\frac{4}{7}$, é, pois, $\frac{4}{7.8}$; e para repetir 3 vezes $\frac{4}{7.8}$, bastará tornar 3 vezes maior esta fracção, multiplicando o seo numerador por 3 (n. 166) : 3 vezes $\frac{4}{7.8}$ valem, pois, $\frac{4.3}{7.8}$. Assim, o producto buscado é

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{4.3}{7.8}=\frac{3}{14}$$

REGRA.—*Para multiplicar duas fracções, uma pela outra, multiplica-se entre si os numeradores e os denominadores.*

194.—Se um dos factores fosse numero inteiro, dando a este por denominador 1 (n. 187), teriamos

$$8\times\frac{15}{16}=\frac{8}{1}\times\frac{15}{16}=\frac{8.15}{16}=\frac{15}{2}=7+\frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{4}\times 7=\frac{3}{4}\times\frac{7}{1}=\frac{3.7}{4}=\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}.$$

Se um dos factores, ou ambos, fosse composto de inteiro e fracção, reduzindo esse factor á fórma de fracção impropria (n. 187), viria

$$\left(5+\frac{3}{7}\right)\times\frac{2}{9}=\frac{38}{7}\times\frac{2}{9}=\frac{38.2}{7.9}=\frac{76}{63}$$
$$=1+\frac{13}{63}.$$

Por conseguinte, a regra precedentemente exposta é geral.

195.—Observação.—O producto de tres ou mais fracções obtem-se—multiplicando entre si as duas primeiras fracções; multiplicando este primeiro producto pela terceira fracção, etc.—Assim :

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{9}{14} \times \frac{10}{27} = \frac{2.4}{3.5} \times \frac{9}{14} \times \frac{10}{27}$$
$$= \frac{2.4.9}{3.5.14} \times \frac{10}{27}$$
$$= \frac{2.4.9.10}{3.5.14.27}$$

Antes de effectuar o producto dos numeradores e o dos denominadores, convem supprimir nesses productos os factores communs (n. 179) : assim,

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}.4.\overset{1}{\cancel{9}}.\overset{2}{\cancel{10}}}{3.\underset{1}{\cancel{5}}.\underset{7}{\cancel{14}}.\underset{3}{\cancel{27}}} = \frac{4.2.}{3.7.3} = \frac{8}{63}$$

§ 4.º—**Divisão**

196.—Consideraremos na divisão de fracções um caso unico, ao qual todos os outros pódem ser reduzidos. (Vej. adeante, n. 198).

197.—Caso geral : *divisão de duas fracções.*— Admitta-se que queremos dividir a fracção $\frac{4}{7}$ pela fracção $\frac{3}{8}$. Dividir $\frac{4}{7}$ por $\frac{3}{8}$ é procurar um numero que, multiplicado por $\frac{3}{8}$, produza $\frac{4}{7}$ (n. 56) : por consequencia, 3 vezes *um oitavo* do quociente procurado valem $\frac{4}{7}$ (n. 192); ora, se 3 vezes um oitavo do

quociente valem $\frac{4}{7}$, para se-obter um oitavo desse quociente, bastará tornar 3 vezes menor a fracção $\frac{4}{7}$, multiplicando o seo denominador por 3 (n. 167) : um oitavo do quociente é, pois, $\frac{4}{7.3}$; e, se um oitavo do quociente vale $\frac{4}{7.3}$, para se-achar este quociente, bastará tornar 8 vezes maior a fracção $\frac{4}{7.3}$, multiplicando o seo numerador por 8 (n. 166) : o quociente procurado é, portanto, $\frac{4.8}{7.3}$. Assim, teremos

$$\frac{4}{7} : \frac{3}{8} = \frac{4.8}{7.3} = \frac{32}{21} = 1 + \frac{11}{21}$$

Regra. — *Para dividir duas fracções, uma pela outra, multiplica-se a fracção dividenda pela fracção divisora invertida.*

198.—Se um dos termos da divisão fosse numero inteiro, dando a este como denominador 1 (n. 187), teriamos

$$8 : \frac{4}{5} = \frac{8}{1} : \frac{4}{5} = \frac{8.5}{4} = 10$$
$$\frac{4}{5} : 8 = \frac{4}{5} : \frac{8}{1} = \frac{4}{5.8} = \frac{1}{10}\ .$$

Se um dos termos da divisão, ou ambos, fosse numero composto de inteiro e fracção, reduzindo esse termo á fórma de fracção impropria, achar-se-hia

$$\left(5 + \frac{3}{7}\right) : \frac{19}{21} = \frac{38}{7} : \frac{19}{21} = \frac{38.21}{7.19} = 6$$

LIVRO IV

OPERAÇÕES FUNDAMENTAES

SOBRE

Numeros decimaes

199.—A simplicidade que se-observa nas operações sobre numeros inteiros, provem essencialmente dos principios convencionaes em que está fundada a nomenclatura e a representação dos dictos numeros (ns. 20 e 28): era, pois, natural que, na avaliação das quantidades que não contêm exactamente a unidade, se-procurasse subjeitar a esses mesmos principios a formação dos numeros fraccionarios que as-exprimem. Para conseguir este resultado,—*divide-se a unidade principal em* 10 *partes eguaes, chamadas* decimos ; *divide-se o decimo em* 10 *partes eguaes, denominadas* centesimos (porque a unidade principal contem 10 vezes 10 ou 100 destas partes); *divide-se o centesimo em* 10 *partes eguaes, a que se-dá o nome de* millesimos (porque a unidade principal encerra 100 vezes 10 ou 1000 destas partes); *e assim por deante.*

Numero decimal *é o numero que consta de partes aliquotas da unidade principal, resultantes da divisão e subdivisão successiva dessa mesma unidade em* 10 *partes eguaes.*

200.—O decimo chama-se unidade de *primeira ordem decimal*; o centesimo denomina-se unidade de *segunda ordem decimal*; o millesimo é unidade de *terceira ordem decimal*; e assim progressivamente.

Para bem se-comprehender que os numeros decimaes obedecem, na sua nomenclatura, aos mesmos principios que os numeros inteiros, basta reparar no modo de formação das differentes ordens decimaes. Com effeito, segundo o que precedentemente expuzemos, o decimo vale 10 centesimos, o centesimo vale 10 millesimos, etc., isto é,—uma unidade de qualquer ordem decimal é constituida por 10 unidades da ordem decimal seguinte—: o que está de accordo com a 1.ª das convenções donde se-deduz a nomenclatura dos numeros inteiros (n. 20). Demais, se 10 centesimos formam 1 decimo, se 10 millesimos constituem 1 centesimo, etc., segue-se que—um numero decimal não póde conter em qualquer ordem mais do que 9 unidades dessa ordem—: o que é conforme á 2.ª das precitadas convenções.

Vejamos agora como é possivel subjeitar os numeros decimaes ao mesmo modo de representação que os numeros inteiros. Segundo o principio fundamental em que se-basêa a representação dos numeros inteiros, todo algarismo escripto á direita de outro exprime unidades 10 vezes menores que as desse outro: logo, se á direita de um numero inteiro escrevermos differentes algarismos, o primeiro representará *decimos*, o segundo *centesimos*, o terceiro *millesimos*, etc.; bastando tão sómente, para completar a escriptura dos numeros decimaes, convencionar um signal que faça distinguir, entre os algarismos do numero, aquelle que representa as unidades simples: este signal é uma *virgula*, collocada entre o algarismo das unidades simples e o dos decimos. Assim, portanto, o numero decimal que constar de 53 unidades simples, 8 decimos, 2 centesimos e 7 millesimos, será representado por 53,827.

201.—Em um numero decimal, os algarismos que ficam á esquerda da virgula constituem a *parte inteira*, a qual, se não existir, será representada por *zero*; e os que se-acham á direita formam a *parte decimal*. Estes ultimos algarismos denominam-se *algarismos decimaes* ou, simplesmente, *decimaes*.

Se um numero decimal não contem parte inteira, dá-se-lhe, propriamente, o nome de *fracção decimal*; exemplo: 0,827.

202.—Poderiamos ler facilmente um numero decimal enunciando em primeiro logar a parte inteira e depois cada algarismo da parte decimal; vamos, porém, mostrar que a enunciação dos numeros decimaes póde-se tornar mui simelhante á dos numeros inteiros.

Supponhamos que se-quer ler o numero 4,357. O numero proposto contem 4 *unidades*, 3 *decimos*, 5 *centesimos* e 7 *millesimos*; ora, 1 decimo vale 10 centesimos: logo, 3 decimos valem 30 centesimos, os quaes, com os 5 centesimos do numero dado, fazem 35 centesimos; mas, 1 centesimo vale 10 millesimos; portanto, 35 centesimos valem 350 millesimos, os quaes, junctos aos 7 millesimos do numero proposto, perfazem 357 millesimos. Assim, pois, o numero decimal proposto poderá ler-se 4 *unidades* e 357 *millesimos*.

A parte inteira e a parte decimal pódem tambem ler-se junctas. Com effeito, por um raciocinio inteiramente analogo ao que precede, mostrariamos que 4 unidades, 3 decimos, 5 centesimos e 7 millesimos equivalem a 4357 *millesimos*.

Regras para ler um numero decimal.—1.ª *Enuncia-se primeiro a parte inteira; em seguida lê-se a parte decimal como se fosse numero inteiro, accrescentando a este enunciado o nome do ultimo decimal.*—2.ª *Enuncia-se o numero dado como se todo elle fosse numero inteiro, e accrescenta-se ao enunciado o nome do ultimo decimal.*

Observação.—Das duas regras que precedem, a primeira é a que habitualmente se-emprega: a segunda é preferida sómente no caso em que o numero dado tem poucos decimaes.

203.—Passemos a expôr os modos de escrever um numero decimal.

Admittamos que se-pretende escrever o numero 4 *unidades* e 357 *millesimos*. A parte inteira do numero supposto encerra 4 unidades, e a parte decimal contem 300 millesimos ou 3 *decimos*, 50 millesimos ou 5 *centesimos*, e 7 *millesimos*: portanto, escrevendo primeiramente a parte inteira, em seguida uma virgula, e depois cada decimal na ordem que lhe-compete, virá 4,357.

Se quizermos escrever o numero 46 *decimos millesimos*, que não contem parte inteira, escreveremos *zero* no logar desta; e se notarmos que a parte decimal, constando de 40 decimos millesimos ou 4 *millesimos*, e 6 *decimos millesimos*, não encerra *decimos* nem *centesimos*, escreveremos um *zero* em cada uma destas ordens, vem: pois, 0,0046.

Regras para escrever um numero decimal.—1.ª *Escreve-se primeiro a parte inteira* (ou *zero*, se não houver parte inteira), *colloca-se depois desta uma virgula e em seguida escreve-se a parte decimal como se fosse numero inteiro, tendo em attenção que o ultimo algarismo da direita occupe a ordem decimal indicada pelo enunciado. Sendo necessario, antepõe-se á parte decimal os zeros indispensaveis para que fique preenchida a ultima condição.* 2.ª *Escreve-se o numero decimal* *como se fosse inteiro, e separa-se com uma virgula os algarismos necessarios para que o ultimo, á direita, exprima unidades da ordem decimal enunciada.*

CAPITULO I

PROPRIEDADES

204.—Theorema I. *Se, á direita de um numero decimal, escrevermos ou supprimirmos um ou mais zeros, o valor do numero não se-altera.*

Demonstração.—Seja supposto o numero decimal 7,35; escrevendo um zero á direita deste numero, teremos 7,350: é necessario demonstrar que o segundo numero é egual ao primeiro, ou que

$$7,350=7,35$$

Os dous numeros 7,35 e 7,350 encerram os mesmos algarismos significativos dispostos na mesma ordem; porém, cada um destes algarismos tem nos dous numeros o mesmo valor relativo, como é facil de ver: por conseguinte, os numeros 7,35 e 7,350 são eguaes. O raciocinio que acabamos de fazer é independente do numero de zeros que escrevermos á direita do numero decimal supposto: logo, esse raciocinio é geral.

Reciprocamente, se fosse dado o numero 7,35000, e supprimissemos á direita delle um, dous ou tres zeros, os numeros resultantes 7,3500 | 7,350 | 7,35 e elle seriam eguaes.

205.—Observação.—Um numero inteiro póde ser considerado como um numero decimal que tem á direita da virgula um ou mais zeros; assim:

$$25=25,0=25,00.....$$

206.—Reduzir numeros decimaes á mesma denominação.—E' muitas vezes conveniente, para comparar, addicionar ou subtrahir numeros decimaes, reduzil-os a ter o mesmo numero de decimaes, ou, o que tanto vale, reduzil-os á *mesma denominação*. Para esse fim, é bastante—*Escrever os zeros necessarios á direita dos numeros que tiverem menos decimaes.*

207.—Theorema II. *Se, em um numero decimal, avançarmos com a virgula uma, duas, tres, etc., casas para a direita, o numero tornar-se-ha 10, 100, 1000, etc., vezes maior.*

Demonstração.— Seja dado o numero decimal 3,748; avançando com a virgula uma casa para a direita, tem-se 37,48: é preciso provar que o segundo numero é 10 vezes maior que o primeiro, ou que

$$37,48=3,748.\ 10$$

Os dous numeros decimaes 3,748 e 37,48 compõem-se dos mesmos algarismos dispostos na mesma ordem; porém, cada algarismo tem no segundo numero um valor relativo 10 vezes maior do que no primeiro, porque, por exemplo, o algarismo 8 representa millesimos no primeiro numero e centesimos no segundo, o algarismo 4 exprime centesimos no primeiro numero e decimos no segundo, etc. (n. 199): logo, com a mudança da virgula uma casa para a direita, o numero dado 3,748 tornou-se 10 vezes maior.

Provariamos de um modo simelhante que o numero decimal 374,8 é 10 vezes maior do que 37,48 e, portanto, 100 vezes maior do que o numero proposto 3,748: logo, com a mudança da virgula duas casas para a direita, este ultimo numero tornar-se-ha 100 vezes maior.

Outra demonstração.—O numero 3,748 vale 3748 *millesimos* e o numero 37,48 exprime 3748 *centesimos:* mas, 1 centesimo é 10 vezes maior do que 1 millesimo (n. 199): portanto, o numero 37,48 é 10 vezes maior do que o numero dado 3,748.

Conclue-se a demonstração do mesmo modo que ha pouco.

208.—Observação.— Frequentemente acontece que a parte decimal de um numero dado encerra menos algarismos do que os necessarios para se-poder effectuar a mudança da virgula: nessa hypothese preenche-se com zeros as casas que faltam (n. 204), e depois abstrahe-se da virgula. Exemplo.

$$25,3.1000=25,300.1000=25300$$

209.—Multiplicar um numero decimal por 10, 100, 1000, etc.—Tornar um numero 10, 100, 1000, etc., vezes maior é o mesmo que multiplicál-o por 10, 100, 1000, etc.; do theorema II conclue-se, pois, que, —*Para multiplicar um numero decimal por* 10, 100, 1000, etc., *basta mudar a virgula uma, duas, tres,* etc., *casas para a direita*—.

210.—Theorema III. *Se, em um numero decimal, recuarmos com a virgula uma, duas, tres,* etc., *casas para a esquerda, o numero tornar-se-ha* 10, 100, 1000, etc., *vezes menor.*

Demonstração. — Seja dado o numero decimal 273,5; recuando com a virgula uma casa para a esquerda, virá 27,35: devemos provar que o segundo numero é 10 vezes menor do que o primeiro, ou que

$$27,35=273,5:10$$

Os dous numeros decimaes 273,5 e 27,35 contêm os mesmos algarismos dispostos na mesma ordem; porém, cada um desses algarismos tem no segundo numero um valor relativo 10 vezes menor do que no primeiro, pois-que, por exemplo, o algarismo 5 exprime decimos no primeiro numero e centesimos no segundo, o algarismo 3 representa unidades no primeiro numero e decimos no segundo, etc. (n. 199): portanto, com a mudança da virgula uma casa para a esquerda, o numero proposto 273,5 tornou-se 10 vezes menor.

Demonstrariamos de modo analogo que o numero decimal 2,735 é 10 vezes menor do que 27,35 e, portanto, 100 vezes menor do que o numero dado 273,5: logo, com a mudança da virgula duas casas para a esquerda, este ultimo numero tornar-se-ha 100 vezes menor.

Outra demonstração. - O numero 273,5 representa 2735 *decimos* e o numero 27,35 exprime 2735 *centesimos*; mas, 1 centesimo é 10 vezes menor que 1 decimo (n. 199): por consequencia, o numero 27,35 é 10 vezes menor que o numero dado 273,5.

Esta demonstração termina como a precedente.

211.— Observação. — Quando acontecer que a parte inteira de um numero decimal não contenha os algarismos necessarios para podermos effectuar a mudança da virgula, escreveremos primeiro os zeros indispensaveis á esquerda da parte inteira e depois transportamos a virgula. Exemplo:

$$2,3 : 100=002,3 : 100=0,023$$

212.—Dividir um numero decimal por 10, 100, 1000, etc.,—Tornar um numero 10, 100, 1000, etc., vezes menor é a mesma cousa que dividil-o por 10, 100, 1000, etc.; portanto, do theorema III segue-se que,— *Para dividir um numero decimal por* 10, 100, 1000, etc., *basta mudar a virgula uma, duas, tres,* etc., *casas para a esquerda.*

CAPITULO II

OPERAÇÕES

§ 1.º — Addição

213.—Supponhamos que se-quer addicionar os numeros decimaes 2,4 | 0,735 | 1,69. Se reduzirmos á mesma denominação os numeros dados e, depois, fizermos abstracção das virgulas (ns. 206 e 208), ficarão 1000 vezes maiores esses numeros (n. 209): logo, a somma procurada é 1000 vezes menor que a somma dos numeros 2400, 735 e 1690; porém, a somma destes ultimos numeros é

$$2400+735+1690=4825:$$

por conseguinte, a somma procurada será

$$4825:1000=4,825$$

Eis a disposição do calculo:

$$\begin{array}{r} 2,400 \\ 0,735 \\ 1,690 \\ \hline 4,825 \end{array}$$

A addição dos numeros dados consistiu em formar as sommas parciaes dos millesimos, centesimos, etc., existentes nesses numeros, do mesmo modo como se-procede na addição de numeros inteiros; ora, para

chegar a esse resultado, bastava ter escripto os numeros de maneira que as virgulas ficassem collocadas em linha vertical, e não era indispensavel ter reduzido estes numeros á mesma denominação.

Regra.—*Para addicionar numeros decimaes, escreve-se estes numeros uns por baixo dos outros de modo que as virgulas fiquem collocadas em linha vertical, e depois effectua-se a operação como se os numeros fossem inteiros: colloca-se a virgula da somma na mesma linha em que estão as das parcellas.*

§ 2.º—Subtracção

214.—Admitta-se que queremos tirar 8,287 de 37,9. Se reduzirmos á mesma denominação os numeros decimaes propostos e, depois, fizermos abstracção das virgulas (ns. 206 e 208), tornar-se-hão 1000 vezes maiores esses numeros (n. 209): portanto, a differença pedida é 1000 vezes menor do que a differença entre 37900 e 8287; porém, esta ultima differença é

$$37900-8287=29613:$$

conseguintemente, a differença procurada será

$$29613:1000=29,613$$

Dispõe-se o calculo da fórma seguinte:

$$\begin{array}{r} 37,900 \\ 8,287 \\ \hline 29,613 \end{array}$$

A subtracção dos numeros propostos consistiu em tirar, successivamente, do minuendo os millesimos, centesimos, etc., contidos no subtrahendo, do mesmo modo por que se-procede na subtracção de numeros inteiros.

Regra.—*Para subtrahir numeros decimaes, escreve-se o subtrahendo por baixo do minuendo, por fórma que as virgulas correspondam-se em linha vertical, e depois effectua-se a operação como se os numeros fossem inteiros: a virgula do resto colloca-se na mesma linha em que estão as dos termos.*

§ 3.º—Multiplicação

215.—1.º Caso: *multiplicação de numero decimal por numero inteiro.*—Supponha-se que pretendemos multiplicar o numero decimal 2,73 pelo numero inteiro 18. Se fizermos abstracção da virgula no multiplicando, tornaremos 100 vezes maior esse factor (n. 209): logo, o producto pedido é 100 vezes menor que o producto de 273 por 18 (n. 83); porém, este ultimo producto é

$$273 . 18 = 4914 :$$

consequentemente, o producto pedido será

$$4914 : 100 = 49,14$$

Dispõe-se o calculo pelo modo seguinte:

$$\begin{array}{r} 2,73 \\ 18 \\ \hline 2184 \\ 273 \\ \hline 49,14 \end{array}$$

Regra.—*Para multiplicar um numero decimal por um numero inteiro, abstrahe-se da virgula no multiplicando e, depois, effectua-se a operação como se o dicto multiplicando fosse numero inteiro: no producto separa-se para a direita com a virgula tantos decimaes quantos forem os do multiplicando.*

216.—2.º Caso: *multiplicação de dous numeros decimaes.*—Admitta-se que queremos multiplicar 2,73 por 4,6. O producto que se-pede não fica alterado se tornarmos 10 vezes maior o multiplicador e, ao mesmo tempo, 10 vezes menor o multiplicando (ns. 83 e 92); ora, para tornar 10 vezes maior o multiplicador 4,6, é sufficiente abstrahir da virgula (n. 207), e, para tornar 10 vezes menor o multiplicando 2,73, basta recuar com a virgula uma casa para a esquerda (n. 210): por consequencia, o producto pedido é egual ao producto do numero decimal 0,273 pelo numero inteiro 46. Teremos, pois,

$$2,73 . 4,6 = 0,273 . 46 = 12,558$$

Para obter o producto de 0,273 por 46 foi necessario abstrahir da virgula no multiplicando, effectuar a multiplicação como se os dous numeros fossem inteiros, e separar para a direita do producto tres decimaes (n.215): a operação consistiu, portanto, em multiplicar como inteiros os factores primitivos e separar para a direita do producto tantos decimaes quantos são os desses factores. Eis a disposição do calculo:

$$\begin{array}{r} 2,73 \\ 4,6 \\ \hline 1638 \\ 1092 \\ \hline 12,558 \end{array}$$

Regra.—*Para multiplicar entre si dous numeros decimaes, abstrahe-se das virgulas e effectua-se a operação como se os numeros fossem inteiros: no producto separa-se para a direita com a virgula tantos decimaes quantos forem os de ambos os factores.*

§ 4.º—Divisão

217.—1.º Caso: *divisão de numero decimal por numero inteiro.*—Supponha-se que queremos dividir o numero decimal 3,528 pelo numero inteiro 12. Se abstrahirmos da virgula no dividendo, tornaremos 1000 vezes maior esse termo (n. 209): portanto, o quociente procurado é 1000 vezes menor do que o quociente da divisão de 3528 por 12 (n. 94); porém, este ultimo quociente é

$$3528 : 12 = 294 ;$$

logo, o quociente procurado será

$$294 : 1000 = 0,294$$

A disposição práctica do calculo é a que segue:

$$\begin{array}{r|l} 3,528 & 12 \\ \cline{2-2} 112 & 0,294 \\ 48 & \\ 0 & \end{array}$$

No exemplo supposto a divisão é exacta: se o não fosse, completariamos o quociente ajunctando-lhe uma fracção que tivesse como numerador o resto e como denominador o divisor seguido de tantos zeros quantos forem os decimaes do dividendo. Se, por exemplo, quizessemos dividir 3,528 por 25, abstrahindo da virgula no dividendo e effectuando a divisão de 3528 por 25, achariamos o quociente inteiro 141 e o resto 3: mas, este quociente e este resto são 1000 vezes maiores que o quociente e o resto da divisão proposta (n. 96): logo, o quociente pedido é 0,141 e a fracção complementar será $\frac{0.003}{25} = \frac{3}{25000}$.

Regra.—*Para dividir um numero decimal por um numero inteiro, abstrahe-se da virgula no dividendo e, depois, effectua-se a operação como se o dicto dividendo fosse numero inteiro: no quociente separa-se para a direita com a virgula tantos decimaes quantos houver no dividendo.*

218.—2.º Caso: *divisão de dous numeros decimaes.* — Supponhamos que se-quer dividir 19,657 por 0,36. O quociente procurado não se-altera quando tornarmos 100 vezes maiores o divisor e o dividendo (n. 96); mas, para tornar 100 vezes maior o divisor 0,36, é sufficiente abstrahir da virgula, e, para tornar 100 vezes maior o dividendo 19,657, basta avançar com a virgula duas casas para a direita (n. 209): logo, o quociente procurado é egual ao quociente da divisão do numero decimal 1965,7 pelo numero inteiro 36. Temos, pois,

$$19,657 : 0,36 = 1965,7 : 36 = 54,6 + \frac{1}{360}$$

Dispõe-se o calculo pela seguinte fórma:

$$\begin{array}{r|l} 19,65|7 & 0,36 \\ \cline{2-2} 165 & 54,6 + \frac{1}{360} \\ 217 & \\ 1 & \end{array}$$

O traço vertical collocado, no dividendo, entre 5 e 7, indica a posição da virgula depois de transportada duas casas para a direita.

Regra.—*Para dividir um numero decimal por outro, avança-se com a virgula no dividendo tantas casas para a direita quantos forem os decimaes que houver no divisor e, depois, effectua-se a operação considerando o divisor como numero inteiro.*

CAPITULO III

CONVERSÕES

219.—A facilidade com que se-effectua as operações sobre numeros decimaes, suscitou a idéa de converter as fracções ordinarias em numeros decimaes equivalentes. Occupemo-nos com essa transformação.

§ 1º.- Conversão de fracção ordinaria em numero decimal

220.—Converter uma fracção ordinaria em numero decimal *é procurar o maior numero de unidades, de decimos, de centesimos, etc., contidos na fracção ordinaria.*

Na conversão de fracção ordinaria em numero decimal consideraremos dous casos, conforme o denominador da fracção ordinaria é potencia de 10 ou qualquer outro numero inteiro.

221.—1.º Caso : *o denominador da fracção ordinaria é potencia de 10.*—Admittamos que se-quer converter em numero decimal a fracção ordinaria $\frac{8507}{1000}$, cujo denominador, $1000=10^3$, é a terceira potencia de 10. A fracção ordinaria proposta corresponde, evidentemente, á somma das tres fracções $\frac{8000}{1000}$, $\frac{500}{1000}$, $\frac{7}{1000}$, e temos, portanto,

$$\frac{8507}{1000} = \frac{8000}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{7}{1000};$$

porém, cortando egual numero de zeros nas duas primeiras fracções do segundo membro (n. 168), virá

$$\frac{8507}{1000} = 8 + \frac{5}{10} + \frac{7}{1000};$$

logo, a fracção ordinaria dada compõe-se de 8 *unidades*, 5 *decimos* e 7 *millesimos*, e é, por consequencia, equivalente ao numero decimal 8,507.

O nosso raciocinio é independente do numero de algarismos que houver no numerador da fracção dada : portanto, esse raciocinio é geral.

Regra.—*Para converter em numero decimal uma fracção ordinaria cujo denominador seja potencia de 10, supprime-se o denominador e separa-se á direita do numerador, por meio de uma virgula, tantos decimaes quantas unidades houver no expoente da potencia.*

222.—Observação.—A equivalencia entre os numeros decimaes e as fracções ordinarias que têm por denominadores potencias de 10, constitue uma propriedade que se-toma, frequentemente, como definição de numero decimal : essa definição, porém, sobre o inconveniente de não ser geral (pois não abrange, em rigor, as fracções decimaes periodicas), tem o de nos-conduzir a uma theoria dos numeros decimaes menos simples que aquella que adoptámos.

223.—2°. Caso : *o denominador da fracção ordinaria não é potencia de* 10.—Supponha-se que é necessario converter em numero decimal a fracção ordinaria $\frac{35}{8}$, cujo denominador não é potencia de 10 : a nossa questão se-reduz a determinar o maior numero de unidades, de decimos, de centesimos, etc., contidos na fracção proposta (n. 220). O maior numero de unidades contidas na fracção $\frac{35}{8}$ obtem-se dividindo 35 por 8, porque toda fracção ordinaria exprime o quociente da divisão do seo numerador pelo seo denominador (n. 165): temos, pois, para quociente 4 *unidades*, e restam 3 unidades que é necessario dividir por 8; mas, dividir 3 unidades por 8 é o mesmo que dividir 30 decimos por 8, porque uma unidade vale 10 decimos (n. 199) : acha-se para quociente 3 *decimos*, e restam 6 decimos que é preciso dividir por 8; porém, dividir 6 decimos por 8 equivale a dividir 60 centesimos por 8, pois-que um decimo contem 10 centesimos (n. 199) : obtem-se para quociente 7 *centesimos*, e ficam 4 centesimos para dividir por 8; mas, dividir 4 centesimos por 8 vale tanto como dividir 40 millesimos por 8, porquanto um centesimo encerra 10 millesimos (n. 199): acha-se o quociente exacto 5 *millesimos*. Pelo raciocinio que precede conclue-se que a fracção ordinaria $\frac{35}{8}$ contem 4 unidades, 3 decimos, 7 centesimos e 5 millesimos : logo, essa fracção é equivalente ao numero decimal 4,375.

Eis como se-dispõe practicamente a operação :

$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \cline{2-2} 30 & 4,375 \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Se a fracção dada fosse menor que a unidade, o numero decimal correspondente não teria parte inteira : nesse caso deveriamos escrever um *zero* no logar da parte inteira, continuando, depois, a operação como no exemplo supposto.

Regra.—*Para converter em numero decimal uma fracção ordinaria cujo denominador não seja potencia de* 10, *divide-se o numerador pelo denominador : o quociente será a parte inteira do numero decimal pedido ; á direita do primeiro resto escreve-se zero, e divide-se o numero resultante pelo denominador : o quociente exprimirá os decimos do numero decimal procurado ; com cada um dos restos seguintes procede-se da mesma fórma. Se a fracção ordinaria for propria, o quociente da divisão do numerador pelo denominador é zero.*

224.—Observação.—A regra precedentemente deduzida serve tambem 1.°, para avaliar em decimaes o quociente da divisão de dous numeros inteiros ; 2.°, para prolongar, até a ordem decimal que se-quizer, o quociente da divisão de um numero decimal por um numero inteiro.

225.—Convertendo em numero decimal a fracção ordinaria $\frac{35}{8}$, chegou-se, por fim, a uma divisão exacta (a de 40 millesimos por 8) : o numero dos decimaes é, pois, *limitado*, e o numero decimal obtido tem absolutamente o mesmo valor que a fracção ordinaria. Ha, porém, fracções ordinarias que dão logar a um numero *illimitado* de decimaes. Sirvam de exemplo as fracções ordinarias $\frac{28}{37}$ e $\frac{137}{148}$:

```
280 | 37                1370 | 148
 210  0,756756.....       380  0,92567567.....
  250                     840
   280                    1000
    210                    1120
     250                    840
      28                    1000
       .                     1120
       .                      84
       .                       .
       .                       .
       .                       .
                               .
                               .
```

No primeiro exemplo, depois de effectuada a 3.ª divisão parcial, nota-se que o resto dessa divisão é egual ao numerador da fracção : logo, esse resto seguido de zero dará para quociente o mesmo algarismo que o numerador seguido de zero; mas, por outro lado, sendo constante o divisor, dividendos eguaes devem produzir restos eguaes: portanto, os restos 28, 21 e 25, os dividendos parciaes 280, 210 e 250, e os algarismos decimaes 7, 5 e 6 reproduzem-se indefinidamente e na mesma ordem. No segundo exemplo, além do que se-notou no primeiro, observa-se ainda que os dividendos parciaes 1370 e 380, e os algarismos decimaes 9 e 2 sómente apparecem uma vez. As fracções ordinarias $\frac{28}{37}$ e $\frac{137}{148}$ não podém, por consequencia, ser expressas exactamente em fracções decimaes ; estas ultimas fracções approximam-se tanto mais dos valores das primeiras quanto maior for o numero de algarismos decimaes que se-considerar, como sem difficuldade se-infere das egualdades seguintes :

$$\frac{28}{37} = 0{,}756 + \frac{28}{37000}$$

$$\frac{28}{37} = 0{,}756756 + \frac{28}{37000000}$$

. . . .

226.—O que fica exposto no n. 224 nos-leva a distinguir duas especies de fracções decimaes : *fracção decimal finita* e *fracção decimal periodica.*

FRACÇÃO DECIMAL FINITA *é a fracção decimal em que o numero dos algarismos decimaes é limitado.*

FRACÇÃO DECIMAL PERIODICA *é a fracção decimal em que um certo numero de algarismos decimaes consecutivos reproduzem-se indefinidamente e na mesma ordem.*

Periodo é o numero constituido pelos algarismos decimaes consecutivos que se-reproduzem, tomado em valor absoluto. Em qualquer fracção decimal periodica existe uma infinidade de periodos; e não sendo possivel escrevêl-os todos, ou se-escreve sómente os dous primeiros periodos seguidos de uma linha de ponctos, ou se-envolve num parenthese o primeiro periodo : adoptámos a segunda notação, por ser mais simples e mais clara.

As fracções decimaes periodicas subdividem-se em duas especies : *fracção decimal periodica simples* e *fracção decimal periodica mixta.*

Fracção decimal periodica simples *é a fracção decimal periodica em que o periodo começa immediatamente depois da virgula.*—Assim, a fracção decimal periodica 0,(756) é *simples*, e o seo periodo é, em valor absoluto, 756.

Fracção decimal periodica mixta *é a fracção decimal periodica em que o periodo não principia logo depois da virgula.*—Assim, a fracção decimal periodica 0,92(567) é *mixta*, e o seo periodo é, em valor absoluto, 567.

Parte não periodica, numa fracção decimal periodica mixta, é, em valor absoluto, o numero constituido pelos algarismos decimaes consecutivos que existem entre a virgula e o primeiro periodo.

227.—A fracção ordinaria de que se-deriva uma fracção decimal periodica, chama-se *geratriz* desta fracção decimal. Sabemos tambem (n. 225) que a differença entre uma fracção decimal periodica e a sua geratriz póde tornar-se tão pequena quanto se-quizer, considerando um numero de periodos cada vez maior: por isso a geratriz de uma fracção decimal periodica chama-se tambem *limite* (*) desta fracção decimal.

§ 2.º—Conversão de numero decimal em fracção ordinaria

228.—A conversão de numero decimal em fracção ordinaria offerece-nos dous casos principaes, segundo a fracção decimal que compõe aquelle numero é finita ou periodica.

(*) *Limite* de uma quantidade variavel é uma quantidade constante de que a variavel póde differir tão pouco quanto se-quizer.

Converter uma fracção decimal finita em fracção ordinaria *é procurar a fracção ordinaria equivalente a essa fracção decimal.*

Converter uma fracção decimal periodica em fracção ordinaria *é procurar o limite para que tende essa fracção decimal quando se-considera um numero de periodos cada vez maior.*

229.—1.º Caso: *a fracção decimal é finita.*—Admitta-se que queremos converter em fracção ordinaria o numero decimal 3,847, cuja parte decimal é finita. O numero decimal proposto encerra 3847 *millesimos* (n. 202): logo, esse numero equivale a uma fracção ordinaria que tem por numerador 3847 e por denominador 1000 (n. 159). Temos, pois,

$$3{,}847=\frac{3847}{1000}$$

Regra.—*Para converter em fracção ordinaria um numero decimal que tenha numero limitado de algarismos decimaes, abstrahe-se da virgula e dá-se ao resultado como denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos forem os decimaes do numero dado.*

230.—2.º Caso: *a fracção decimal é periodica.*—A determinação da geratriz de uma fracção decimal periodica encerra duas questões distinctas, conforme esta fracção decimal periodica é simples ou mixta.

231.—*Geratriz da fracção decimal periodica simples.*—Supponhamos que se-pede a geratriz da fracção decimal periodica simples 0,(36): tracta-se de achar o limite para o qual tende esta fracção decimal periodica, desde-que o numero dos periodos que se-considera for crescendo indefinidamente (n. 228).

Para determinar o limite procurado, representemos por x a fracção decimal que se-obtem considerando os n primeiros periodos, ou os $2n$ primeiros algarismos decimaes (pois-que cada periodo tem dous algarismos): virá

$$x=0,363636........36\ ;$$

multiplicando por 100 os dous membros desta egualdade, e junctando aos dous membros da egualdade resultante o ultimo periodo, tem-se

$$100x+\frac{36}{10^{2n}}=36,3636.....3636;$$

e subtrahindo desta ultima egualdade a precedente, vem

$$\begin{array}{rcl} 100x+\dfrac{36}{10^{2n}} & = & 36,3636......3636 \\ x & = & 0,363636......36 \\ \hline 99x+\dfrac{36}{10^{2n}} & = & 36 \end{array}$$

donde se-deduz, dividindo ambos os membros por 99,

$$x+\frac{36}{99.10^{2n}}=\frac{36}{99}$$

Da egualdade que acabamos de estabelecer, conclue-se que a differença entre a fracção decimal x e a fracção ordinaria $\frac{36}{99}$ é expressa pela fracção ordinaria $\frac{36}{99.10^{2n}}$, que varia com o numero dos periodos, n: supponhamos, pois, que este numero vai crescendo indefinidamente. A' medida que o numero dos periodos for crescendo, a fracção ordinaria $\frac{36}{99.10^{2n}}$ vai diminuindo (n. 163) e póde tornar-se tão pequena quanto se-quizer, suppondo n infinitamente grande: portanto, a fracção decimal x tem por limite a fracção ordinaria $\frac{36}{99}$ (n. 227, nota); porém, a fracção decimal x, suppondo indefinido o numero dos periodos que a-constituem, não se-distingue da fracção decimal periodica 0,(36): por consequencia,

$$\lim.x \text{ ou } \lim.\ 0,(36)=\frac{36}{99}.$$

Regra.—*Para achar a geratriz de uma fracção decimal periodica simples*, sem parte inteira, *escreve-se uma fracção ordinaria que tenha por numerador um dos periodos e por denominador um numero formado de tantos noves quantos forem os algarismos do periodo.*

232.—*Geratriz da fracção decimal periodica mixta.*—Admittamos que se-pede a geratriz da fracção decimal periodica mixta 0,27(6): a questão que se-tracta de resolver consiste em achar o limite para que tende a fracção decimal periodica proposta, logo-que o numero dos periodos que se-considera for crescendo indefinidamente (n. 228).

Para determinar o limite procurado, represente-se por x a fracção decimal que se-obtem considerando a parte não periodica seguida dos n primeiros periodos: tem-se

$$x=0,27666........6\ ;$$

multiplicando ambos os membros desta egualdade, primeiro, por 1000 e, depois, por 100, e junctando o ultimo periodo aos dous membros da primeira egualdade resultante, virão as duas egualdades

$$1000x + \frac{6}{10^{n+2}} = 276{,}66\ldots\ldots66,$$

$$100x = 27{,}666\ldots\ldots6;$$

finalmente, subtrahindo a segunda da primeira, ter-se-ha

$$900x + \frac{6}{10^{n+2}} = 276 - 27,$$

donde se-deduz, dividindo os dous membros por 900,

$$x + \frac{6}{900.10^{n+2}} = \frac{276-27}{900}.$$

Pela egualdade que acabamos de estabelecer, vê-se que a differença entre a fracção decimal x e a fracção ordinaria $\frac{276-27}{900}$ é representada pela fracção ordinaria $\frac{6}{900.10^{n+2}}$, que varia com o numero dos periodos, n: admitta-se, portanto, que este numero vai crescendo indefinidamente. A' medida que o numero dos periodos for crescendo, a fracção ordinaria $\frac{6}{900.10^{n+2}}$ vai diminuindo (n. 163) e póde tornar-se tão pequena quanto se-quizer, tomando n infinitamente grande: logo, a fracção decimal x tem como limite a fracção ordinaria $\frac{276-27}{900}$ (n. 227, nota); porém, suppondo indefinido o numero dos periodos, a fracção decimal x não se-distingue da fracção decimal periodica 0,27(6): por conseguinte,

$$\text{lim. } x \text{ ou lim. } 0{,}27(6) = \frac{276-27}{900}.$$

Regra.—*Para achar a geratriz de uma fracção decimal periodica mixta,* sem parte inteira, *escreve-se uma fracção ordinaria que tenha por numerador a parte não periodica seguida de um periodo, menos a parte não periodica, e por denominador o numero formado de tantos noves quantos forem os algarismos do periodo, seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não periodica.*

233.—Observação 1.ª—Quando uma fracção decimal periodica, simples ou mixta, vier acompanhada de parte inteira, a geratriz correspondente póde ser determinada segundo a regra que se-acaba de expôr: basta, para isso, considerar a parte inteira como parte não periodica, e no denominador da geratriz, obtida conforme a dicta regra, supprimir tantos zeros quantos forem os algarismos da parte inteira (isto equivale a não escrever os zeros). Assim, sendo dados os numeros 4,(35) e 17,2(35), teremos

$$4{,}(35) = 0{,}4(35) \times 10$$

$$= \frac{435-4}{990} \times 10 = \frac{435-4}{99}$$

$$17{,}2(35) = 0{,}172(35) \times 100$$

$$= \frac{17235-172}{99000} \times 100 = \frac{17235-172}{990}$$

Observação 2.ª—Das regras que ficaram estabelecidas em os ns. 231 e 232, deduz-se as consequencias que seguem, as quaes nos-serão uteis mais tarde.

O denominador da geratriz de uma fracção decimal periodica simples não contem nenhum dos factores 2 e 5. Porque este denominador tem por ultimo algarismo da direita 9 (n. 231), que não é multiplo de 2 nem de 5 (n. 105); e ainda-que reduzissemos a geratriz á sua expressão mais simples, não introduziriamos com isso nenhum factor novo no seo denominador.

O numerador da geratriz de uma fracção decimal periodica mixta não póde nunca terminar por zero. Porque o ultimo algarismo da direita deste numerador obtem-se tirando o ultimo algarismo da parte não periodica do ultimo algarismo do periodo (n. 232), e estes dous algarismos não pódem ser eguaes, pois-que, se o-fossem, o periodo começava no ultimo algarismo não periodico, isto é, uma casa antes.

O denominador da geratriz de uma fracção decimal periodica mixta encerra, além de outros, o factor 2 ou o factor 5, ou mesmo ambos, com expoente egual ao numero dos algarismos não periodicos. Porque este denominador termina por tantos zeros quantos são os algarismos não periodicos, isto é, contem os factores 2 e 5 com expoente egual ao numero dos algarismos não periodicos; e ainda-que, reduzindo a geratriz á sua expressão mais simples, desappareça o factor 2 ou o factor 5, não pódem estes dous factores desapparecer simultaneamente, pois-que o numerador da geratriz nunca termina por zero, isto é, não contem os factores 2 e 5.

234.—Visto-que, entre as fracções ordinarias, umas convertem-se em fracções decimaes finitas e outras produzem fracções decimaes periodicas (n. 225), será util podermos reconhecer, independentemente de conversão, a especie da fracção decimal que uma fracção ordinaria deve produzir : é esse o objecto dos theoremas que vamos demonstrar.

235.—Theorema I. *Toda fracção ordinaria irreductivel cujo denominador não contem factor nenhum*

differente de 2 e de 5, converte-se em fracção decimal finita.

Demonstração.—Seja dada a fracção ordinaria irreductivel $\frac{a}{2^m,5^m}$, cujo denominador contem m factores eguaes a 2 e n factores eguaes a 5, e não encerra nenhum factor differente destes : deve-se provar que essa fracção ordinaria é convertivel em fracção decimal finita.

A fracção ordinaria proposta converter-se-ha em fracção decimal finita se pudermos transformál-a em outra fracção ordinaria que tenha por denominador uma potencia de 10 (n. 222): ora, comparando o numero dos factores eguaes a 2 com o numero dos factores eguaes a 5, isto é, m e n, póde succeder que estes numeros sejam eguaes ou que sejam deseguaes : se tivermos $m=n$, virá (n. 88)

$$2^m.\ 5^m=(2.\ 5)^m=10^m,$$

e, por conseguinte,

$$\frac{a}{2^m.5^m}=\frac{a}{10^m};$$

se tivermos $m > n$ ou, o que é o mesmo, $m=n+p$, podemos multiplicar por 5^p os dous termos da fracção ordinaria proposta, sem que esta se-altere (n. 168), e teremos

$$\frac{a}{2^m.5^n}=\frac{a.5^p}{2^m.5^n.5^p};$$

porém, sendo $n+p=m$ (segundo suppozemos), vem (ns. 86 e 88)

$$2^m.5^n : 5^p = 2^m.5^{n+p} = 2^m.5^m = 10^m,$$

e, por consequencia.

$$\frac{a}{2^m.5^n} = \frac{a.\,5^p}{10^m}.$$

Assim, pois, toda fracção ordinaria irreductivel em cujo denominador não houver factor algum differente de 2 e de 5, póde sempre transformar-se em outra fracção ordinaria que tem por denominador uma potencia de 10: logo, póde sempre converter-se em fracção decimal finita. *C. q. d.*

236.—Observação.—Da demonstração do theorema precedente conclue-se que—*Quando uma fracção ordinaria irreductivel se-converte em fracção decimal finita, o numero dos decimaes é egual ao maior dos expoentes com que os factores 2 e 5 entram no denominador.*

237.—Theorema II. *Toda fracção ordinaria irreductivel cujo denominador contem algum factor differente de 2 e de 5, converte-se em fracção decimal de numero illimitado de algarismos e periodica.*

Demonstração.—Seja dada a fracção ordinaria irreductivel $\frac{a}{7.k}$, cujo denominador contem um factor, 7, differente de 2 e de 5: vamos mostrar que esta fracção ordinaria converte-se em fracção decimal de numero illimitado de algarismos e periodica.

Se a fracção ordinaria proposta pudesse converter-se em fracção decimal finita, seria possivel achar outra fracção ordinaria equivalente á primeira, tendo por nu-

merador um *numero inteiro* e por denominador uma potencia de 10 (n. 222), isto é, deveriamos ter

$$\frac{a}{7.k} = \frac{N}{10^m},$$

donde se-deduz, multiplicando ambos os membros por 10^m,

$$\frac{a.\,10^m}{7.\,k} = N;$$

vejamos, pois, se esta egualdade póde ser satisfeita. Para que N seja numero inteiro, é necessario que o producto $a.10^m$ seja divisivel por $7.k$; porém o factor a é primo com $7.k$ (por suppôrmos irreductivel a fracção dada): logo, deverá o outro factor 10^m ser divisivel por $7.\,k$ (n. 137); mas, isso é impossivel, porque 10^m não contem factor algum differente de 2 e de 5 (n. 146): portanto, a fracção ordinaria $\frac{a}{7.\,k}$ não póde converter-se em fracção decimal finita.

A fracção decimal correspondente á fracção ordinaria proposta, não podendo ser finita (como acabamos de provar), ha de, forçosamente, conter numero illimitado de algarismos decimaes; e, além disso, deve ser periodica. Com effeito: se o resto de uma divisão é sempre menor que o divisor, quando convertermos a fracção ordinaria $\frac{a}{7.k}$ em fracção decimal, (n. 223) acharemos, no maximo, $7.k-1$ restos differentes; ora, sendo infinito o numero dos restos (pois-que nenhuma divisão parcial é exacta) e não podendo ser todos differentes, é forçoso que alguns delles reproduzam-se indefinidamente e na mesma ordem: por conseguinte, deverá dar-se o mesmo facto com os quocientes parciaes que correspondem a esses restos.

338.—Podendo ser simples ou mixta a fracção decimal periodica produzida por uma fracção ordinaria, vejamos por que meio distinguiremos um caso do outro, sem effectuar a conversão.

Uma fracção ordinaria irreductivel cujo denominador contem sómente factores diversos de 2 e de 5, produz fracção decimal periodica simples.—Essa fracção ordinaria produz fracção decimal periodica (n. 237); porém, esta não póde ser mixta, porque, se o-fosse, o denominador da fracção ordinaria proposta deveria conter algum dos factores 2 e 5 (n. 233, Obs. 2.ª): logo, é simples.

Uma fracção ordinaria irreductivel cujo denominador não contem sómente factores diversos de 2 e de 5, mas tambem um destes ou ambos, produz fracção decimal periodica mixta.—Essa fracção ordinaria produz fracção decimal periodica (n. 237); mas, esta não póde ser simples, pois-que, se o-fosse, o denominador da fracção ordinaria proposta não conteria nenhum dos factores 2 e 5 (n. 233, Obs. 2.ª): logo, é mixta.

239.—Observação.—Se attendermos ao modo como se-compõe o denominador da geratriz de uma fracção decimal periodica mixta (n. 233, Obs. 2.ª), podemos dahi inferir que—*Quando uma fracção ordinaria irreductivel se-converte em fracção decimal periodica mixta, encerra esta na parte não periodica tantos algarismos quantas unidades houver no maior dos expoentes que affectam 2 e 5 no denominador daquella fracção.*

LIVRO V

POTENCIAS E RAIZES

240.—Potencia *é um producto de factores eguaes.* (n. 78).

Expoente *é o numero que mostra quantos factores eguaes entram em uma potencia.*

Formar qualquer potencia de um numero é *elevar* o numero a essa potencia. A elevação a potencias não constitue operação inteiramente nova: é uma multiplicação de tantos factores eguaes quantas são as unidades do expoente.

As potencias classificam-se por *graos*, e estes são indicados pelos expoentes: assim 5^4 é a quarta potencia de 5.

241.—Raiz *é o numero que, elevado a uma certa potencia, reproduz um numero dado.*

Indice *é o numero que mostra quantas vezes a raiz entra como factor no numero dado.*—O indice da raiz tem a mesma significação que o expoente da potencia correspondente: por isso, ás vezes, toma-se um termo pelo outro.

Extracção de raizes *é a operação que tem por fim, sendo dada certa potencia de um numero e o expoente desta potencia, achar esse numero.*

Para indicar a extracção de raizes, emprega-se um signal particular, ($\sqrt{\ }$), que se-denomina *radical* e se-lê *raiz... de* : o numero de que se-busca a raiz escreve-se na abertura do lado direito, e o indice na abertura superior.

As raizes classificam-se por *graos*, e estes são indicados pelos indices ou expoentes. A raiz segunda chama-se *raiz quadrada*, e a raiz terceira é a *raiz cubica*; assim como a segunda potencia tem o nome de *quadrado* e a terceira potencia o de *cubo* : a expressão $\sqrt[3]{343}$ indica, pois, que se-deve extrahir a *raiz cubica de* 343.

242.—A extracção de raizes, do mesmo modo que a elevação a potencias, não é operação absolutamente distincta das quatro fundamentaes, que já conhecemos; mas, emquanto a elevação a potencias depende sómente da multiplicação, a extracção de raizes basêa-se em tres operações, a saber : a subtracção, a multiplicação e a divisão. Eis o motivo por que a extracção de raizes exige o conhecimento de regras particulares.

Tractaremos apenas da raiz quadrada e da raiz cubica, porque as raizes de graos mais elevados offerecem, na sua determinação, difficuldades prácticas que se-vence com o emprego de processos indirectos.

CAPITULO I

QUADRADO E RAIZ QUADRADA

243.—QUADRADO *é o producto de dous factores eguaes.*—Assim, o quadrado de 3 é 3.3 ou 9; o quadrado de $\frac{2}{3}$ é $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{9}$.

Para formar o quadrado de uma fracção ordinaria, eleva-se ao quadrado os dous termos desta.

244.—RAIZ QUADRADA *é o numero que, elevado á segunda potencia, reproduz um numero dado.*—Assim, 3 é a raiz de 9, porque $3^2=9$; $\frac{2}{3}$ é a raiz quadrada de $\frac{4}{9}$, porque $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

O indice da raiz quadrada não se-costuma escrever.

§ 1.º—Quadrado

245.—As propriedades que vamos estabelecer servem de base á theoria da raiz quadrada.

246.—THEOREMA I. *O quadrado da somma de dous numeros é egual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o producto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.*

Demonstração.—Sejam a e b dous numeros cuja somma é $a+b$: quer-se provar que

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Conforme a definição de quadrado (n. 243), temos

$$(a+b)^2=(a+b).(a+b) ;$$

mas, effectuando a multiplicação indicada no segundo membro, vem (n. 80)

$$(a+b).(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2 :$$

por conseguinte, *C. q. d.*

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

247.—Corollario I. *O quadrado de um numero composto de dezenas e unidades é egual ao quadrado das dezenas, mais duas vezes o producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades.*

Porque todo numero inteiro maior que 9 póde ser considerado como somma das suas dezenas com as suas unidades. Assim :

$$57^2=(50+7)^2=50^2+2.50.7+7^2$$
$$=2500+700\ +49$$

248.—Corollario II. *A differença entre os quadrados de dous numeros inteiros consecutivos é egual a duas vezes o menor, mais uma unidade.*

Porque, segundo o theorema do n. 246, temos

$$(a+1)^2=a^2+2a+1,$$

donde, subtrahindo a^2 de ambos os membros, se-deduz

$$(a+1)^2-a^2=2a+1:$$

ora, a e $a+1$ são dous numeros inteiros consecutivos, e o primeiro destes numeros é o menor.

249.—Theorema II. *Se um numero inteiro não for quadrado de outro numero inteiro, tambem não póde ser quadrado de uma fracção.*

Demonstração.—Seja N um numero inteiro que não é quadrado de outro numero inteiro : deve-se provar que N tambem não é quadrado de uma fracção.

Se o numero N pudesse ser quadrado de uma fracção $\frac{a}{b}$, que supporemos irreductivel, teriamos

$$N=\frac{a^2}{b^2};$$

mas, esta egualdade é absurda, porque, sendo primos entre si os numeros a e b (n. 174), os seos quadrados a^2 e b^2 tambem o-são (n. 141); e a fracção $\frac{a^2}{b^2}$ é irreductivel (n. 173) : portanto, N não póde ser quadrado de uma fracção. *C. q. d.*

250.—Theorema III. *Se os dous termos de uma fracção irreductivel não forem quadrados, essa fracção não póde ser quadrado de outra.*

Demonstração.—Seja $\frac{a}{b}$ uma fracção irreductivel cujos termos a e b não são quadrados: vamos demonstrar que esta fracção não é quadrado de outra.

Supponhamos por um momento que a fracção $\frac{a}{b}$ é quadrado de uma fracção irreductivel $\frac{m}{n}$: devemos ter, nessa hypothese,

$$\frac{a}{b}=\frac{m^2}{n^2};$$

ora, sendo irreductiveis as fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n}$, os seos termos são primos entre si (n. 174) ; e, sendo os numeros m e n primos entre si, os seos quadrados m^2 e n^2 tambem o-são (n. 141) : portanto, as duas fracções $\frac{a}{b}$ e $\frac{m^2}{n^2}$ são identicas, e teremos

$$a=m^2 \text{ e } b=n^2;$$

o que é impossivel, porque suppoz-se que a e b não são quadrados.

§ 2.º—Raiz quadrada de qualquer numero, a menos de uma unidade

251.—Se compararmos a serie dos numeros inteiros consecutivos 1, 2, 3, 4, etc., com a serie dos quadrados correspondentes 1, 4, 9, 16, etc., bem depressa reconhecemos a existencia de numeros inteiros que não são quadrados de outros numeros inteiros: desde 1 até 100, por exemplo, ha sómente dez quadrados. Uma vez que um numero inteiro não é quadrado, se a sua raiz quadrada não é numero inteiro, tambem não póde ser numero fraccionario (n. 249); porém, é sempre possivel achar dous quadrados inteiros consecutivos, um dos quaes seja menor e o outro maior que o numero dado: a raiz quadrada de um desses quadrados é um valor approximado, por defeito ou por excesso, da raiz pedida. Com effeito, sendo dado o numero 56, que se-acha comprehendido entre o quadrado de 7 e o de 8, teremos

$$7^2 < 56 < 8^2,$$

e, passando ás raizes quadradas,

$$7 < \sqrt{56} < 8;$$

ora, os numeros extremos 7 e 8 differem entre si de uma unidade: logo, a raiz quadrada de 56, que está comprehendida entre 7 e 8, differe de qualquer destes numeros em menos de uma unidade. O numero 7 é a raiz quadrada de 56, a menos de uma unidade por defeito; o numero 8 é a raiz quadrada de 56, a menos de uma unidade por excesso.

Com o mesmo raciocinio se-prova que 7 é a raiz

quadrada qe 56,27, a menos de uma unidade por defeito; e que 8 é a raiz quadrada do dicto numero, a menos de uma unidade por excesso.

Extrahir a raiz quadrada de um numero, a menos de uma unidade por defeito, *é procurar a raiz quadrada do maior quadrado inteiro contido nesse numero.*

A extracção da raiz quadrada de um numero inteiro, a menos de uma unidade, é a questão a que, por fim, se-reduzem todas as outras relativas á extracção de raizes quadradas: tractaremos, pois, della mais particularmente.

252.—Na extracção das raizes quadradas dos numeros inteiros considera-se dous casos, conforme o numero dado é menor ou maior que 100.

253.—1.º Caso: *o numero dado é menor que* 100. —Quando o numero de que se-pede a raiz quadrada é menor que 100, forma-se mentalmente os quadrados dos numeros inteiros consecutivos 1, 2, 3,......10, até se-encontrar o numero cujo quadrado seja egual ao numero proposto ou ao maior quadrado contido nelle: esse numero será a raiz quadrada pedida (ns. 244 e 251). Para facilitar a operação, convem que seja entregue á memoria a tabella seguinte:

1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100	Quadrados.
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	Raizes.

Por esta tabella facilmente se-vê que, por exemplo, a raiz quadrada de 64 é exactamente 8, e que a de 45 é 6 approximadamente. O excesso 9 de 45 sobre 36 chama-se *resto.*

254.—2.º Caso: *o numero dado é maior que* 100. —Supponhamos que se-pretende extrahir a raiz quadrada do numero 75238.

Sendo o numero 75238 maior do que 100, a sua raiz quadrada é maior do que 10 (raiz quadrada de 100): logo, suppondo esta raiz decomposta em dezenas e unidades, o seo quadrado conterá o quadrado das dezenas, mais duas vezes o producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades (n. 246); e essas tres partes, sommadas com o resto da operação (se o-houver), formam o numero proposto.

O quadrado das dezenas da raiz é um numero exacto de centenas: portanto, esse quadrado existe nas 752 centenas do numero 75238, as quaes pódem conter ainda reservas de centenas provenientes das outras partes do quadrado da raiz e do resto da operação; estas reservas, entretanto, não influem sobre as dezenas da raiz, isto é, extrahindo a raiz quadrada de 752, ter-se-ha o numero exacto das dezenas da raiz. Com effeito, sendo a a raiz quadrada do maior quadrado contido em 752, este ultimo numero está comprehendido entre os quadrados consecutivos a^2 e $(a+1)^2$, e temos

$$a^2 < 752 < (a+1)^2,$$

donde se-tira, multiplicando por 100 os tres numeros,

$$100.a^2 < 75200 < 100.(a+1)^2;$$

ora, os numeros 752 e $(a+1)^2$, por serem inteiros, differem pelo menos em uma unidade, e depois de multiplicados por 100 ficarão differindo pelo menos em uma centena: logo, junctando $38 < 100$ ao numero 75200, teremos ainda

$$100.a^2 < 75238 < 100.(a+1)^2;$$

ou, extrahindo a raiz quadrada,

$$10.a < \sqrt{75238} < 10.(a+1);$$

assim, a raiz quadrada de 75238, estando comprehendida entre a dezenas e $a+1$ dezenas, não póde conter mais do que a dezenas, isto é, um numero de dezenas egual á raiz quadrada de 752.

Sendo o numero 752 maior do que 100, a sua raiz quadrada é maior de 10 (raiz quadrada de 100): portanto, suppondo esta raiz decomposta em dezenas e unidades, o seo quadrado conterá o quadrado das dezenas, mais duas vezes o producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades (n. 246); e essas tres partes, sommadas com o resto da operação (havendo-o), constituem o numero 752.

Por um raciocinio inteiramente analogo ao que fizémos ha pouco, somos levados, para achar as dezenas da raiz quadrada de 752, a extrahir a raiz quadrada de 7; ora, o maior quadrado contido em 7 é 4, cuja raiz quadrada é 2 (n. 253): por consequencia, a raiz quadrada de 752 contem 2 dezenas. Vamos procurar as unidades da mesma raiz.

Se tirarmos de 752 o quadrado de 2 dezenas, que é 4 centenas, achamos para resto 3 centenas e 52 unidades ou 352: este resto contem ainda duas vezes o producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades, mais o resto da operação

Duas vezes o producto das dezenas pelas unidades dão um numero exacto de dezenas: portanto, este numero existe nas 35 dezenas do resto 352, as quaes pódem encerrar tambem reservas de dezenas provenientes do quadrado das unidades e do resto da operação. Chamando u o algarismo das unidades e k as reservas de dezenas, teremos

$$35 = 2.2.u + k,$$

donde se-deduz, subtrahindo k e dividindo por 2.2,

$$\frac{35-k}{2.2}=u:$$

assim, para achar o algarismo das unidades, é necessario subtrahir das 35 dezenas do resto as k dezenas de reserva e dividir o resultado pelo dobro das dezenas; porém, a subtracção não podemos effectuál-a, porque é desconhecida a reserva: por conseguinte, se fizermos a divisão de 35 por 2.2 ou 4, obteremos um quociente egual ou superior ao algarismo das unidades; donde se-segue que é indispensavel verificar o dicto quociente.

Dividindo 35 por 4, tem-se 8. Se este quociente for egual ao algarismo das unidades contidas na raiz, esta, compondo-se de 2 dezenas e 8 unidades, será 28; mas, nessa hypothese, o quadrado de 28 é o maior quadrado contido em 752 (n. 251), e, por esta razão, deverá ser inferior ou, quando muito, egual a 752: logo, para verificar o quociente obtido, forma-se o quadrado de 28 e compara-se este quadrado com 752, afim de examinar se é verdadeira a relação

$$28^2 \leqq 752.$$

O processo de verificação que acabamos de indicar substitue-se, na práctica, por outro mais vantajoso que elle. Desenvolvendo o quadrado de 28 (n. 246), teremos, conforme a relação anterior,

$$20^2+2.20.8+8^2 \leqq 752,$$

donde, subtrahindo 20^2 de ambos os membros, se-tira

$$2.20.8+8^2 \leqq 752-20^2;$$

ora, a differença $752-20^2$ é conhecida e egual ao resto 352, que ha pouco achámos: por consequencia, para verificar o quociente 8, forma-se o numero dado pela expressão $2.20.8+8^2$ ou $(2.20+8).8$ ou, finalmente, 48.8, e compara-se o dicto numero com o resto 352, afim de examinar se é verdadeira a relação

$$48.8 \leqq 352.$$

Formando o producto 48.8, acha-se 384, numero maior que o resto 352: portanto, o quociente 8 é maior que o algarismo das unidades. Verifiquemos, pois, 7.

Formando o producto 47.7, obtem-se 329, numero menor que o resto 352: logo, 7 é o algarismo das unidades contidas na raiz quadrada de 752, e esta raiz é 27. O excesso de 752 sobre o quadrado de 27 é, evidentemente, egual ao excesso de 352 sobre 47.7 ou egual a 23, que é o resto da operação.

Para achar o numero exacto das dezenas contidas na raiz quadrada de 75238, fomos conduzidos a extrahir a raiz quadrada de 752; porém, esta raiz é, como vimos, 27: portanto, a raiz quadrada de 75238 encerra 27 dezenas. Tractemos de achar o algarismo das unidades.

Se tirarmos de 75238 o quadrado de 27 dezenas, obtemos para resto 23 centenas e 38 unidades ou 2338: este resto ainda contem duas vezes o producto das dezenas pelas unidades, mais o quadrado das unidades, mais o resto da operação.

Repetindo aqui o raciocinio feito para achar as unidades da raiz quadrada de 752, teremos de effectuar a divisão de 233 por 2.27 ou 54, a qual dá para quociente 4. Reproduzindo egualmente o raciocinio feito para verificar o resultado da divisão de 35 por 2.2

ou 4, seremos levados a formar o producto 544.4, equivalente a 2176, numero que é menor do que o resto 2338: logo, 4 é o algarismo das unidades contidas na raiz quadrada de 75238, e esta raiz é 274. O excesso de 75238 sobre o quadrado de 274 é egual ao excesso de 2338 sobre 544.4 ou egual a 162, que é o resto da operação.

Examinando com attenção as operações que foram executadas, facilmente se-reconhece que a extracção da raiz quadrada de um numero inteiro decompõe-se em tres partes principaes: 1ª, determinar o algarismo das mais altas unidades; 2ª, determinar cada um dos algarismos seguintes; 3ª, verificar cada um destes algarismos.

Eis como se-dispõe o calculo:

75238	274		
4	48	47	544
352	8	7	4
329			
2338			
2176			
162			

Regra.—*Escreve-se o numero dado e á direita delle um traço vertical e outro horizontal* (como na divisão).

Para achar o algarismo das mais altas unidades, divide-se o numero em classes de dous algarismos, da direita para a esquerda, e extrahe-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na ultima classe á esquerda.

Desta ultima classe tira-se o quadrado do algarismo que se-obtiver.

Para achar o algarismo seguinte, escreve-se á direita do resto a segunda classe, a contar da esquerda, e divide-se as dezenas do numero resultante pelo dobro da raiz achada: o quociente é um numero egual ou superior ao algarismo pedido.

Para verificar o algarismo obtido no quociente, escreve-se este algarismo á direita do dobro da raiz achada e por elle se-multiplica o numero assim formado: se o producto não exceder o numero constituido pelo primeiro resto e a segunda classe, o dicto algarismo é exacto; no caso contrario verifica-se, do mesmo modo, o algarismo immediatamente inferior.

O terceiro, o quarto, etc., algarismo da raiz determina-se como o segundo. Continua-se a operação até haver considerado todas as classes.

255.—Observação 1.ª—Na extracção da raiz quadrada, exceptuado o das mais altas unidades, cada um dos outros algarismos é determinado por uma divisão: quando o quociente de qualquer divisão parcial for zero, será tambem zero o algarismo que lhe-corresponde na raiz; e, para continuar a operação, escreve-se uma nova classe á direita do numero formado pelo ultimo resto e a ultima classe considerada.

Observação 2.ª—O quociente de qualquer das divisões lembradas na precedente observação, ou nos-dá o algarismo pedido, ou nos-fornece outro maior que este: na segunda hypothese, se diminuirmos de uma unidade, successivamente, cada algarismo que reconhecemos ser grande, por força havemos de chegar ao algarismo verdadeiro; mas, se, por abreviar, diminue-se de mais de uma unidade o dicto quociente, poderá succeder que o algarismo verificado seja menor que o verdadeiro: dá-se esta circumstancia quando o resto que se-obtem excede o dobro da raiz achada (n. 248).

Observação 3.ª—A extracção de raizes quadradas póde simplificar-se, do mesmo modo que a divisão (n. 64, obs. 1.ª), effectuando mentalmente as multiplicações e as subtracções, e escrevendo só os restos, como se-segue:

75238	274		
352	48	47	544
2338	8	7	4
162			

256.—Dado um numero inteiro, será util, ás vezes, reconhecer promptamente se elle não é quadrado. Os caracteres que passamos a estabelecer são puramente *negativos*: isto é, permittem-nos affirmar apenas que o numero proposto *não é* quadrado.

1.° *O numero que terminar por 2, 3, 7 ou 8, não é quadrado.*—Porque, quando se-forma o quadrado de um numero inteiro vê-se que o ultimo algarismo deste quadrado é o mesmo que o ultimo algarismo do quadrado das unidades contidas no numero: e não ha quadrado de unidades que termine em 2, 3, 7 ou 8 (n. 253).

2.° *O numero que terminar por zeros em numero impar, não é quadrado.*—Porque, se um numero inteiro acaba por zeros, o seo quadrado terminará por duas vezes mais zeros, isto é, por numero par de zeros: portanto, não ha quadrado que termine em numero impar de zeros.

3.° *O numero par que não for divisivel por 4, não é quadrado.*—Porque o quadrado de um numero inteiro não póde ser par sem que este numero tambem o-seja; ora, o quadrado de qualquer numero par é multiplo de 2.2 ou 4 (n. 88): logo, não ha quadrado par que não seja divisivel por 4.

4.° *O numero impar que, diminuido de 1, não der para resultado um numero divisivel por 4, não é quadrado.*—Porque o quadrado de um numero inteiro não póde ser impar sem que este numero tambem o-seja; porém, todo numero impar é egual a um numero par mais uma unidade, e o seo quadrado é egual ao quadrado do numero par (que é multiplo de 4), mais o dobro do numero par (que tambem é multiplo de 4), mais 1 (n. 248): por conseguinte, não ha quadrado impar que, diminuido de 1, não produza um numero divisivel por 4.

§ 3.°—Raiz quadrada de qualquer numero, a menos de uma unidade fraccionaria

257.—Quando um numero não é quadrado, sabemos como se-extrahe a raiz quadrada do maior quadrado inteiro que nelle se-contem (n. 254): obtem-se desse modo a raiz procurada sem perda de uma unidade. Vamos agora mostrar como se-determina esta mesma raiz quadrada sem perda de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... 0,1 | 0,01 | 0,001. . . . .

Extrahir a raiz quadrada de um numero, a menos de uma unidade fraccionaria dada, *é procurar o maior multiplo desta unidade contido na raiz quadrada do numero.*

Proponhamo-nos, como exemplo, extrahir a raiz quadrada de 56, a menos de $\frac{1}{7}$. Designando por x o maior numero de *setimos* contidos na raiz quadrada que se-procura, esta raiz ficará comprehendida entre as duas fracções consecutivas $\frac{x}{7}$ e $\frac{x+1}{7}$, e teremos

$$\frac{x}{7} < \sqrt{56} < \frac{x+1}{7}:$$

elevando ao quadrado os tres numeros, vem (ns. 243 e 244)

$$\frac{x^2}{7^2} < 56 < \frac{(x+1)^2}{7^2};$$

multiplicando por 7^2, temos

$$x^2 < 56.7^2 < (x+1)^2,$$

e extrahindo a raiz quadrada, ter-se-ha

$$x < \sqrt{56.7^2} < x+1:$$

por onde se-conclue que o maior numero de *setimos* contidos na raiz quadrada de 56, obtem-se extrahindo a raiz quadrada do maior quadrado inteiro contido no producto 56.7^2 ou 2744; ora, extrahindo esta raiz, a menos de uma unidade (n. 254), acha-se 52: logo, o maior multiplo de $\frac{1}{7}$ contido na raiz procurada, é $\frac{52}{7}$, e temos

$$\sqrt{56} = \frac{52}{7} = 7 + \frac{3}{7}, \text{ a menos de } \frac{1}{7}$$

Em geral, chamando N um numero qualquer, inteiro ou fraccionario, e $\frac{1}{n}$ a unidade fraccionaria conhecida, ter-se-ha, pela definição,

$$\frac{x}{n} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{n},$$

e, reproduzindo as mesmas transformações de ha pouco,

$$\frac{x^2}{n^2} < N < \frac{(x+1)^2}{n^2},$$

$$x^2 < N.n^2 < (x+1)^2,$$

$$x < \sqrt{N.n^2} < x+1.$$

Regra. — *Para extrahir a raiz quadrada de um numero qualquer, a menos de uma unidade fraccionaria dada, multiplica-se esse numero pelo quadrado do denominador da fracção que exprime o grao da approximação pedida; extrahe-se, a menos de uma unidade, a raiz quadrada do producto, e divide-se o resultado pelo dicto denominador.*

258.—Quando se-quer achar a raiz quadrada de um numero, a menos de $\frac{1}{2}$, não é necessario fazer uso da regra precedente: bastará modificar ou, em certos casos, conservar o ultimo algarismo da raiz inteira. Com effeito, chamemos N um numero qualquer (não quadrado), R a raiz do maior quadrado inteiro contido em N, e, finalmente, r o resto da operação: teremos

$$N = R^2 + r;$$

mas, temos tambem (n. 246)

$$\left(R + \frac{1}{2}\right)^2 = R^2 + R + \frac{1}{4}:$$

comparemos, pois, N e $\left(R + \frac{1}{2}\right)^2$.

1.° Quando tivermos

$$r \leqq R,$$

teremos tambem, evidentemente,

$$r < R + \frac{1}{4},$$

ou, junctando aos dous membros R^2,

$$R^2 + r < R^2 + R + \frac{1}{4},$$

isto é,

$$N < \left(R + \frac{1}{2}\right)^2;$$

da ultima deseguualdade se-tira, extrahindo as raizes quadradas,

$$\sqrt{N} < R + \frac{1}{2}:$$

portanto, a raiz quadrada de N está mais proxima de R que de $R+1$, e R é, pois, um valor da dicta raiz, a menos de $\frac{1}{2}$ por defeito.

2.° Quando tivermos

$$r > R,$$

não podendo estes dous numeros differir em menos de uma unidade (por serem inteiros), teremos tambem

$$r > R + \frac{1}{4},$$

ou, addicionando aos dous membros R^2,

$$R^2 + r > R^2 + R + \frac{1}{4},$$

isto é,

$$N > \left(R + \frac{1}{2}\right)^2;$$

e desta deseguualdade se-infere, extrahindo as raizes quadradas,

$$\sqrt{N} > R + \frac{1}{2}:$$

por conseguinte, a raiz quadrada de N está mais proxima de $R+1$ que de R, e $R+1$ é um valor dessa raiz, a menos de $\frac{1}{2}$ por excesso.

Exemplo :—Extrahindo, a menos de uma unidade, a raiz quadrada de 674, obtem-se 25, com um resto egual a 49; e sendo este resto maior que a raiz (2.°), deve-se ajunctar a esta uma unidade para ter, a menos de $\frac{1}{2}$, a raiz quadrada de 674: assim, 26 é a raiz procurada.

§ 4.º—Raiz quadrada de numeros fraccionarios, ordinarios ou decimaes

259.—Até aqui temos supposto que, na extracção de uma raiz quadrada, se-pede, ou sómente a parte inteira da raiz (§ 2.°), ou a mesma raiz com uma approximação determinada (§ 3.°). Mas, tractando-se especialmente de fracções ordinarias ou de numeros decimaes, não é, muitas vezes, dado o grao da approximação : dahi a necessidade de novas regras.

260.—Fracções ordinarias.—Supponhamos que se-quer extrahir a raiz quadrada da fracção ordinaria $\frac{4}{9}$, cujos termos são quadrados. Sabemos que, para formar o quadrado de uma fracção ordinaria, eleva-se ao quadrado o seo numerador e o seo denominador (n. 243) ; porém, sendo 4 o quadrado do numerador da raiz, este numerador é $\sqrt{4}=2$, e sendo 9 o quadrado do denominador da mesma raiz, este denominador é $\sqrt{9}=3$: logo, a raiz procurada é $\frac{2}{3}$, e temos

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}.$$

No exemplo que considerámos, os termos da fracção proposta eram quadrados: não é esse, porém, o que ordinariamente succede.

Supponha-se, em primeiro logar, que sómente é quadrado o denominador da fracção, e seja $\frac{58}{81}$ esta fracção. Extrahindo, a menos de uma unidade, a raiz quadrada do numerador 58, teremos

$$7^2 < 58 < 8^2,$$

donde se-deduz, dividindo por 81,

$$\frac{7^2}{81} < \frac{58}{81} < \frac{8^2}{81},$$

e extrahindo as raizes quadradas das tres fracções.

$$\frac{7}{9} < \sqrt{\frac{58}{81}} < \frac{8}{9}:$$

por consequencia, ter-se-ha, a menos do $\frac{1}{9}$ por defeito,

$$\sqrt{\frac{58}{81}}=\frac{\sqrt{58}}{\sqrt{81}}=\frac{7}{9}.$$

Supponha-se, em segundo logar, que o denominador da fracção não é quadrado, e seja $\frac{4}{11}$ essa fracção. Poderiamos, neste caso particular, extrahir de ambos os

termos a raiz quadrada, como até aqui temos feito; porém, o denominador da raiz não sendo numero inteiro nem fracção (n. 249), não seria possivel ter idéa clara sobre a especie da dicta raiz; portanto, é necessario transformar a fracção proposta em outra equivalente cujo denominador seja quadrado. Para o-conseguir,—*multiplica-se ambos os termos da fracção pelo denominador della*—; porque, assim, a fracção dada não se-altera (n. 168) e o denominador da nova fracção fica sendo quadrado do da primeira (n. 243). Teremos, pois, a menos de $\frac{1}{11}$ por defeito,

$$\sqrt{\frac{4}{11}}=\sqrt{\frac{44}{11^2}}=\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11^2}}=\frac{6}{11}$$

Regra.—*Para extrahir a raiz quadrada de uma fracção ordinaria, 1.º, se o denominador é quadrado, extrahe-se, exactamente ou a menos de uma unidade, a raiz quadrada do numerador, e depois extrahe-se a raiz quadrada exacta do denominador; 2.º, se o denominador não é quadrado, primeiro multiplica-se os dous termos da fracção pelo denominador, e depois procede-se como no caso precedente.*

261.—Observação.—Quando o denominador de uma fracção ordinaria não é quadrado, para transformál-a em outra cujo denominador o-seja, procede-se tambem do modo que segue:—*multiplica-se ambos os termos da fracção dada por um numero que torne pares os expoentes dos factores primos que entram no denominador.*—Este processo funda-se em que o producto de dous numeros eguaes contem o *dobro* dos factores primos de que se-compõe um desses numeros.

262.—Numeros decimaes.—Admitta-se que se-