

13. Uma letra de 5:900\$000 rs. foi descontada por fóra a 4% e o possuidor recebeu 5:883\$610 rs. Quanto tempo faltava para o seu vencimento? — R. 25 dias.

14. Uma letra de 5:900\$000 rs. foi descontada por dentro a 4% e soffreu o desconto de 16\$340 rs. Quanto tempo faltava para o seu vencimento? — R. 25 dias.

15. Uma letra de 5:900\$000 rs. foi descontada por dentro a 4% e o possuidor recebeu 5:883\$660 rs. Quanto tempo faltava para o dia do vencimento? — R. 25 dias.

(Extraídos do Tratado de Arithmetica de Raposo Botelho e Silva Dias).

#### § IV — Divisão em partes proporcionaes

354. Para dividir-se um numero em partes proporcionaes a outros numeros dados, sommam-se estes numeros e pela sua somma divide-se o numero que se quer repartir. Obtido o quociente, e por elle multiplicando-se successivamente cada um dos numeros dados, obtêm-se as diferentes partes procuradas.

Primeiro exemplo. — Dividir 240 em tres partes proporcionaes aos numeros 2, 3 e 5.

Dividindo-se 240 por 10 (somma dos numeros dados) obtem-se o quociente 24. Multiplicando este quociente successivamente por 2, 3 e 5, obteremos as partes procuradas: 48, 72 e 120.

Segundo exemplo. — Dividir 1356 em partes proporcionaes aos numeros  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$  e  $\frac{8}{9}$ .

Sommando-se as fracções dadas, tem-se:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{8}{9} = \frac{24}{36} + \frac{27}{36} + \frac{30}{36} + \frac{32}{36} = \frac{113}{36}$$

Na igualdade  $\frac{24}{36} + \frac{27}{36} + \frac{30}{36} + \frac{32}{36} = \frac{113}{36}$  expellindo-se o denominador commum 36, resulta:

$$24 + 27 + 30 + 32 = 113.$$

Operando-se sobre os numeros 24, 27, 30 e 32, como no exemplo precedente, apparecem as quotas 288, 324, 360 e 384.

Terceiro exemplo. — Dividir o numero 66 em tres partes, de modo que a segunda seja os  $\frac{2}{3}$  da primeira, e que a terceira seja os  $\frac{4}{5}$  da segunda.

Não tendo sido dado o primeiro numero, admitta-se que seja 1; devendo o segundo ser os  $\frac{2}{3}$  do primeiro, ter-se-á:  $\frac{2}{3}$ ; finalmente, o terceiro devendo ser os  $\frac{4}{5}$  do segundo, cujo valor é  $\frac{2}{3}$ , tem-se:  $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ .

Sommemos estes tres numeros 1,  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{8}{15}$ .

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{8}{15} = \frac{15}{15} + \frac{10}{15} + \frac{8}{15} = \frac{33}{15}$$

Multiplicando-se por 15 ambos os membros da igualdade  $\frac{15}{15} + \frac{10}{15} + \frac{8}{15} = \frac{33}{15}$ , tem-se:

$$15 + 10 + 8 = 33.$$

Divide-se o numero 66 por 33; e multiplicando-se successivamente pelo quociente 2 os numeros 15, 10 e 8, obtem-se para valor de cada uma das tres partes procuradas: 30, 20 e 16.

Quarto exemplo. — Dividir o numero 580 em tres partes taes que a primeira esteja para a segunda como 2:5, e a segunda para a terceira como 4:6.

Pelo enunciado deste problema, devemos estabelecer as duas seguintes proporções:

$$\begin{aligned} 1.^a : 2.^a &:: 2 : 5 \\ 2.^a : 3.^a &:: 4 : 6 \end{aligned}$$

Admittindo-se que seja 1 o valor da primeira parte, tem-se:

$$1 : 2.^a :: 2 : 5; \text{ donde}$$

$$2.^a = \frac{5}{2}$$

Substituindo-se este valor da 2.<sup>a</sup> parte na segunda proporção, tem-se:

$$\frac{5}{2} : 3.^a :: 4 : 6; \text{ donde}$$

$$3.^a = \frac{\frac{5}{2} \times 6}{4} = \frac{\frac{5 \times 6}{2}}{4} = \frac{5 \times 6}{4 \times 2} = \frac{15}{4}$$

Somme os tres numeros 1,  $\frac{5}{2}$  e  $\frac{15}{4}$ .

$$1 + \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{4}{4} + \frac{10}{4} + \frac{15}{4} = \frac{29}{4}$$

Multiplicando-se por 4 ambos os membros da igualdade  $\frac{4}{4} + \frac{10}{4} + \frac{15}{4} = \frac{29}{4}$ , obtem-se:

$$4 + 10 + 15 = 29.$$

Dividindo-se 580 por 29, tem-se o quociente 20, pelo qual sendo successivamente multiplicados os numeros 4, 10 e 15, obtem-se para valores das tres partes procuradas: 80, 200 e 300.

Quinto exemplo. — *Dividir o numero 248 em partes inversamente proporcionaes aos numeros 2, 3 e 5.*

Observação. — Quando as quotas devem ser tomadas na razão inversa dos numeros proporcionaes, invertem-se estes, e faz-se directamente a repartição sobre os numeros invertidos.

Attendendo-se ao que ficou dito em o n.º 266, pag. 153 e á nota \*\*) da pag. 169, os numeros inversos a 2, 3 e 5 são  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{5}$ , sobre os quaes se opera como no 2.º exemplo. As quotas são 120, 80 e 48.

### Problemas sobre divisão em partes proporcionaes

1. *Dividir 729 em tres partes que estejam entre si como os numeros, 2, 3, 4.* — R. 162; 243; 324.
2. *Repartir 329 francos entre tres individuos, de modo que a parte do primeiro esteja para a do segundo como 3 está para 5; e que a do segundo esteja para a do terceiro como 4 está para 3.* — R. 84; 140; 105.
3. *Dividir 460 em partes proporcionaes ás fracções  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ .* — R. 120; 160; 180.
4. *Dividir 560 em tres partes taes que a primeira esteja para a segunda como 2 para 3, a segunda para a terceira como 4 para 5.* — R. 128; 192; 240.

5. *Dividir o numero 120 em tres partes inversamente proporcionaes aos numeros 2,  $3\frac{1}{3}$ ,  $4\frac{5}{6}$ .* — R. 59  $\frac{13}{73}$ ; 35  $\frac{55}{73}$ ; 24  $\frac{48}{73}$ .
6. *Dividir 720 em tres partes taes que a primeira seja os  $\frac{3}{4}$  da segunda, e a segunda os  $\frac{4}{5}$  da terceira.* — R. 180; 240; 300.
7. *Um testador deixa 105 contos de réis a tres herdeiros, de modo que ao segundo toque os  $\frac{2}{3}$  do primeiro; e ao terceiro os  $\frac{5}{7}$  do segundo. Quer-se saber qual é a herança de cada um? — R. 49:000\$000; 32:666\$666  $\frac{2}{3}$ ; 23:333\$333  $\frac{1}{3}$ .*
8. *Um pai tendo 3 filhos, cujas idades eram 2, 4 e 8 annos, deixou-lhes por sua morte 6:750\$000 rs. para lhes serem distribuidos na razão inversa das idades. Quanto toca a cada um? — R. 8:857\$142  $\frac{6}{7}$ ; 1:928\$571  $\frac{3}{7}$ ; 964\$285  $\frac{5}{7}$ .*
9. *Tres trabalhadores fizeram certa obra pela qual têm de receber 800\$000 rs. O primeiro fez  $\frac{3}{8}$  do trabalho; o segundo  $\frac{2}{5}$ ; o terceiro o resto. Quanto toca a cada um? — R. 300\$000; 320\$000; 180\$000.*

10. *Tres districtos devem fornecer juntos para o exercito um contingente de 500 homens. As populações dos districtos são 23 100 17 600, 14 300 habitantes, qual será o contingente dado por cada districto? — R. 210; 160; 130.*

11. *Dividir 250\$000 rs. aluguel mensal de uma casa, entre tres herdeiros, dos quaes um tem 10 contos; outro, 15; e o terceiro, 25.* — R. 50\$000; 75\$000; 125\$000.

12. *Uma herança de 126 contos deve ser dividida na razão inversa das idades dos tres herdeiros; o primeiro tem 15 annos; o segundo, 25; e o terceiro, 30. Quanto toca a cada um? — R. 60 contos; 36; 30.*

### § V — Regra de sociedade ou de companhia

355. *Regra de sociedade é a que tem por fim repartir entre muitas pessoas associadas em o mesmo commercio o lucro ou a perda resultante da sua associação.*  
O seu fim, em geral, é dividir uma quantidade em partes proporcionaes.

356. *Chama-se entrada a quantia que fornece cada associado; capital é o fundo com que gira a sociedade; dividendo é a somma que representa o lucro ou a perda resultante da associação.*

357. *Ha duas especies de regra de sociedade: a simples e a composta.*

#### A) REGRA DE SOCIEDADE SIMPLES

358. *Regra de sociedade simples é aquella em que, sendo differentes as entradas, são iguaes os tempos; ou, sendo differentes os tempos, as entradas são iguaes.*

No 1.º caso, o lucro ou a perda é proporcional ás entradas; nã 2.º caso, o lucro ou a perda é proporcional aos tempos. \*)

**359.** A regra de sociedade reduz-se a tantas regras de tres quantas forem as partes que se buscam.

**Primeiro exemplo.** — Tres pessoas associaram-se para uma empresa. A primeira concorreu com 12 contos, a 2.ª com 10 e a 3.ª com 6. Tiveram o lucro de 14 contos e querem saber quanto tocará a cada um.

Entrada da 1.ª.....	12 contos
"    " 2.ª.....	10 "
"    " 3.ª.....	6 "

Entrada total ..... 28 contos,  
produzindo 14 contos de lucro.

**Methodo das proporções**

**1.ª Regra de tres** — Si 28 contos (somma dos capitães empregados) dão o lucro de 14 contos, o capital 12 contos (entrada da 1.ª) que lucro dará?

Si 28 contos dão 14 contos de lucro  
12 " " x " " "

$$28 : 12 :: 14 : x = \frac{12 \times 14}{28} = 6 \text{ contos (lucro da 1.ª)}$$

**2.ª Regra de tres.** — Si 28 contos dão o lucro de 14 contos, o capital 10 contos (entrada da 2.ª) que lucro dará?

Si 28 contos dão 14 contos de lucro  
10 " " x " " "

\*) Os problemas em que as estradas dos associados são as mēsmas a diversos tempos durante os quaes estiveram empregadas, são apenas dados como exercicios, pois que tal hypothese não se dá na pratica dos negocios. A entrada ou saída de um socio faz entrar em liquidação a sociedade existente, e dá lugar á formação de uma nova sociedade.

$$28 : 10 :: 14 : x = \frac{10 \times 14}{28} = 5 \text{ contos (lucro da 2.ª)}$$

**3.ª Regra de tres.** — Si 28 contos dão o lucro de 14 contos, o capital 6 contos (entrada da 3.ª) que lucro dará?

Si 28 contos dão 14 contos de lucro  
6 " " x " " "

$$28 : 6 :: 14 : x = \frac{6 \times 14}{28} = 3 \text{ contos (lucro da 3.ª)}$$

**OBSERVAÇÃO.** — Para verificar-se a operação, somam-se os lucros de cada socio, e a somma deve ser igual ao lucro total.

Com effeito:

6 contos	lucro da 1.ª pessoa
5 "	" " 2.ª "
3 "	" " 3.ª "
—	
14 "	" " total.

**Methodo de redução á unidade**

Entrada da 1.ª.....	12 contos
"    " 2.ª.....	10 "
"    " 3.ª.....	6 "

Entrada total ..... 28 contos,

produzindo 14 contos de lucro.

Si 28 contos produzem 14 contos de lucro  
1 conto produz  $\frac{14}{28} = \frac{1}{2}$  conto de lucro

Si 1 conto pro-  
duz  $\frac{1}{2}$  conto de lucro

{	12 cont. prod.	$\frac{12}{2} = 6$ cont. (luc. da 1.ª)
	10 " " "	$\frac{10}{2} = 5$ " ( " " 2.ª)
	6 " " "	$\frac{6}{2} = 3$ " ( " " 3.ª)

**Segundo exemplo.** — Tres negociantes fizeram uma sociedade, e tiveram um lucro de 9:750\$000. O 1.º teve o seu capital empregado 20 mezes, o 2.º por 12 mezes, e o 3.º por 8 mezes. Qual será o lucro de cada um, sabendo-se que as entradas são iguaes?

20	mezes,	tempo	dur.	o	qual	esteve	em	giro	o	cap.	do	1.º
12	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2.º
8	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	3.º

40 mezes, tempo empregado por certo capital para dar.....  
9:750\$000 de lucro.

**Methodo das proporções**

**1.ª Regra de tres.** — Si em 40 mezes (somma dos tempos) certo capital deu o lucro de 9:750\$000, em 20 mezes (tempo empregado pelo capital do 1.º socio) que lucro dará?

Si em 40 mezes houve 9:750\$000 de lucro  
" 20 " " " " " " " " " " " " " " " "

$$40 : 20 :: 9:750\$000 : x = \frac{20 \times 9:750\$000}{40} = 4:875\$000 \text{ (lucro do 1.º)}$$

**2.ª Regra de tres.** — Si em 40 mezes certo capital deu o lucro de 9:750\$000, em 12 mezes (tempo empregado pelo capital do 2.º) que lucro dará?

Si em 40 mezes houve 9:750\$000 de lucro  
" 12 " " " " " " " " " " " " " " " "

$$40 : 12 :: 9:750\$000 : x = \frac{12 \times 9:750\$000}{40} = 2:925\$000 \text{ (lucro do 2.º)}$$

**3.ª Regra de tres.** — Si em 40 mezes certo capital deu o lucro de 9:750\$000, em 8 mezes (tempo empregado pelo capital do 3.º) que lucro dará?

Si em 40 mezes houve 9:750\$000 de lucro  
" 8 " " " " " " " " " " " " " " " "

$$40 : 8 :: 9:750\$000 : x = \frac{8 \times 9:750\$000}{40} = 1:950\$000 \text{ (lucro do 3.º)}$$

**VERIFICAÇÃO**

4:875\$000	lucro	do	1.º
2:925\$000	"	"	2.º
1:950\$000	"	"	3.º

9:750\$000 lucro total.

**Methodo de redução á unidade**

20	mezes,	tempo	dur.	o	qual	esteve	em	giro	o	cap.	do	1.º
12	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	2.º
8	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	3.º

40 mezes, tempo empregado por certo capital para dar.....  
9:750\$000 de lucro.

Si em 40 mezes certo capital dá 9:750\$000 de lucro em 1 mez  
9:750\$000  
esse capital dá  $\frac{9:750\$000}{40} = 243\$750$  de lucro.

Si em 1 mez ha

Em 20 mezes ha o lucro	20 × 243\$750 = 4:875\$000	(lucro do 1.º)
" 12 " " " "	12 × 243\$750 = 2:925\$000	(lucro do 2.º)
" 8 " " " "	8 × 243\$750 = 1:950\$000	(lucro do 3.º)

**Problemas sobre regra de sociedade simples**

**1.** Tres individuos associaram-se para fundar uma fabrica, entrando um com 36 contos, outro com 45 e o terceiro com 27 contos. No fim de 4 annos tinha ganhado a fabrica 18 contos; calcular o quinhão de cada socio. — R. 6:000\$000; 7:500\$000; 4:500\$000.

**2.** Tres negociantes empregam uma mesma quantia em uma empresa; o primeiro por espaço de 15 annos, o segundo por 9 annos e o terceiro por 5 annos. Perderam 1:798\$000; qual foi o prejuizo de cada associado? — R. 930\$000; 558\$000; 310\$000.

**3.** Tres pessoas associaram-se em uma empresa; entrando a primeira com 1:000\$000, outra com 1:680\$000 e a terceira com 1:200\$000. O lucro tendo sido de 1:590\$800, calcular o lucro de cada associado. — R. 410\$000; 688\$000; 492\$000.

**4.** Dois associados receberam de lucro, um 1:200\$000 e o outro 960\$000. O total das duas entradas sendo de 10:800\$000, calcular a entrada de cada um. — R. 6:000\$000; 4:800\$000.

5. Tres associados tendo formado uma empresa com o capital de 32:000\$000, tiveram de lucro, ao fim de certo tempo: um, ..... 2:400\$000; outro, 3:000\$000 e o terceiro, 4:200\$000. *Calcular a entrada de cada um.* — R. 8:000\$000; 10:000\$000; 14:000\$000.

6. Quatro associados entraram com a mesma quantia numa empresa copmum. O primeiro levantou o dinheiro no fim de 4 mezes; o segundo, no fim de 8 mezes; o terceiro, no fim de 1 anno; o quarto, no fim de 15 mezes. *Faça-se a distribuição do lucro, que é de 1:317\$000, proporcionalmente ás entradas augmentadas sómente de seus juros de 12 % ao anno.* — R. 312\$000; 324\$000; 336\$000; 345\$000.

**B) REGRA DE SOCIEDADE COMPOSTA**

**360. Regra de sociedade composta é aquella em que as entradas e os tempos são differentes.**

Neste caso, o lucro ou a perda é proporcional ao producto da entrada de cada socio pelo tempo durante o qual esteve em giro.

**361.** A regra de sociedade composta resolve-se pela regra de sociedade simples, reduzindo-se todas as entradas á mesma unidade de tempo; o que melhor se verá no seguinte

**Exemplo.** — Um negociante começou uma empresa com 5 contos de réis; 4 mezes depois associou-se-lhe um outro entrando com 9 contos; e 10 mezes depois deste um terceiro concorreu com 10 contos. No fim de 2 annos liquidou-se o lucro de 20 contos. *Pede-se o lucro de cada um dos socios.*

**Solução.** — O 1.º socio teve o seu capital 5 contos em giro por 2 annos, ou 24 mezes. *5 contos por 24 mezes é o mesmo que 24 × 5 ou 120 contos em 1 mez.*

O 2.º socio tendo entrado 4 mezes depois, teve o seu capital 9 contos em giro sómente por 20 mezes. *9 contos por 20 mezes é o mesmo que 20 × 9 ou 180 contos em 1 mez.*

O 3.º socio tendo entrado 10 mezes depois do 2.º, teve em giro o seu capital 10 contos sómente por 10 mezes. *10 contos por 10 mezes é o mesmo que 10 × 10 ou 100 contos em 1 mez.*

**Disposição dos dados**

O 1.º tem	5 cont.	por 24 mez.	ou 24 × 5	ou 120 cont.	por 1 mez
" 2.º "	9 "	" 20 "	" 20 × 9	" 180 "	" 1 "
" 3.º "	10 "	" 10 "	" 10 × 10	" 100 "	" 1 "

Assim, pois, tem-se uma regra de sociedade simples, em que as entradas são differentes e os tempos iguaes. Ella se exprimirá do seguinte modo:

Tres negociantes associaram-se para uma empresa; o 1.º concorreu com 120 contos; o 2.º com 180 contos; e o 3.º com 100 contos. Tiveram um lucro de 20 contos; *quer-se saber o lucro de cada um.*

Entrada do 1.º.....	120 contos
" " 2.º.....	180 "
" " 3.º.....	100 "
	400

Entrada total..... 400 contos,  
produzindo 20 contos de lucro.

Já sabendo-se resolver os problemas da regra de sociedade simples, facil é organisarem-se as regras de tres deste problema.

**1.ª**

*Si 400 contos dão 20 contos de lucro*  
120 " " x " " "

$$400 : 120 :: 20 : x = \frac{120 \times 20}{400} = 6 \text{ contos (lucro do 1.º)}$$

**2.ª**

*Si 400 contos dão 20 contos de lucro*  
180 " " x " " "

$$400 : 180 :: 20 : x = \frac{180 \times 20}{400} = 9 \text{ contos (lucro do 2.º)}$$

**3.ª**

*Si 400 contos dão 20 contos de lucro*  
100 " " x " " "

$$400 : 100 :: 20 : x = \frac{100 \times 20}{400} = 5 \text{ contos (lucro do 3.º)}$$

## Methodo de redução á unidade

1.º socio	5 contos	por 24 mezes	ou 120 contos	por 1 mez			
2.º "	9 "	" 20 "	" 180 "	" 1 "			
3.º "	10 "	" 10 "	" 100 "	" 1 "			

Entrada do 1.º.....	120 contos
" " 2.º.....	180 "
" " 3.º.....	100 "

Entrada total ..... 400 contos,  
produzindo 20 contos de lucro.

Si 400 contos produzem 20 contos de lucro

1 conto produz  $\frac{20}{400}$  do conto ou 50\$000 de lucro.

Si 1 conto dá 50\$ de lucro	$\left\{ \begin{array}{l} 120 \text{ cont.} \\ 180 \text{ " } \\ 100 \text{ " } \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{dão} \\ \text{"} \\ \text{"} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 120 \times 50\$ = 6:000\$ \\ 180 \times 50\$ = 9:000\$ \\ 100 \times 50\$ = 5:000\$ \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} (\text{lucro do 1.º}) \\ (\text{lucro do 2.º}) \\ (\text{lucro do 3.º}) \end{array} \right.$

## Problemas sobre a regra de sociedade composta

1. Tres socios tiveram de lucro 540\$000 rs. O primeiro entrou na empresa com 600\$000 rs., por 3 mezes; o segundo com 500\$000 rs., por 5 mezes; o terceiro com 640\$000, por 7 mezes. *Faça-se a distribuição dos lucros em conformidade com o tempo e com as entradas.* — R. 110\$706; 153\$759; 275\$535.

2. Um negociante começou uma empresa com 216\$000 rs.; 8 mezes depois associou-se-lhe outro, que entrou com 3:348\$000 rs.; e 14 mezes depois da entrada deste, foi admittido um novo socio, que contribuiu com 5:400\$000 rs. A empresa durou 6 annos, deixando por fim 8:640\$000 de lucro para repartir pelos socios. *Calcular o quinhão de cada um.* — R. 268\$833; 3:703\$924; 4:667\$243.

3. Um negociante começou uma empresa com um fundo de 25 contos de réis; 5 mezes depois, se lhe associou um capitalista entrando com 40 contos; e 6 mezes mais tarde, outro capitalista concorreu com 60 contos. No fim de 2 annos, liquidou-se um lucro de 80 contos; *pede-se a parte de cada um dos socios.* — R. 22:429\$907; 28:411\$215; 29:158\$878.

4. Seis mezes depois de dois individuos haverem emprehendido certa negociação, entrando cada um com 6:500\$000 rs., foi admittido um terceiro socio, que tambem contribuiu 6:500\$000 rs.; e 8 mezes depois da entrada deste socio, ainda foi admittido outro, que tambem contribuiu com 6:500\$000 rs. 2 annos depois de começada a empresa, quando pela primeira vez se encerraram as contas, resolveu-se repartir pelos socios um dividendo de 3:876\$000 rs., reservando o restante dos lucros para a continuação do negocio. *Qual é o lucro a que tem direito cada um dos quatro socios?* — R. A cada um dos pri-

meiros socios toca 1:224\$000; ao terceiro 918\$000; e ao quarto ..... 510\$000.

5. Principiou um particular a negociar com o capital de 12 contos de réis; 8 mezes depois, entrou no seu commercio um socio com o capital de 20 contos; e 4 mezes depois deste, um outro com o capital de 30 contos. No fim de 3 annos, os lucros foram de 45 contos; *pergunta-se a parte do lucro que toca a cada socio, sendo estipulado que o 1.º deveria receber 6% do lucro total, além da parte proporcional á sua entrada, por ter sido encarregado da gerencia do negocio.* R. 10:673\$832; 13:836\$449; 17:789\$719. Ao 1.º tocou mais 2:700\$000, correspondentes aos 6% sobre o lucro de 45 contos.

6. Um homem começou uma empresa com o fundo de 25 contos de réis; 5 mezes depois, associou-se-lhe um capitalista, entrando com 40 contos; e 6 mezes mais tarde, outro capitalista concorreu com 60 contos. No fim de 2 annos, liquidou-se um lucro de 80 contos, que se deve repartir, sendo mais ajustado que ao empresario tocaria, pela administração, 5% do lucro total, além da sua quota proporcional ao fundo que empregou: *Pede-se a parte de cada um dos socios.* — R. Ao 1.º 21:308\$411; ao 2.º 26:990\$854; ao 3.º 27:700\$935. O 1.º deve receber mais 4:000\$000, correspondentes aos 5% sobre o lucro de 80 contos.

## § VI — Misturas — Ligas

362. Por misturas entende-se o ajuntamento de generos seccos ou liquidos, da mesma especie, porém de valores diferentes.

363. A regra de mistura tem por fim:

- 1.º Achar o valor de uma mistura, conhecendo-se as quantidades que se devem misturar e os seus preços;
  - 2.º Achar a quantidade de cada uma das cousas, conhecendo-se os seus preços e o preço total da mistura.
- No 1.º caso, a mistura chama-se directa; no 2.º, inversa. Só nos occupamos com a 1.ª, visto ser a 2.ª do dominio da Algebra.

364. Para resolverem-se os problemas da regra de mistura directa, multiplica-se cada parte da mistura pelo seu preço respectivo, e divide-se a somma dos productos pela somma das quantidades misturadas. O quociente dá o valor procurado.

Exemplo. — Mistura-se 45 litros de vinho de 640 rs. o litro com 30 de 560 rs. Qual será o preço de 1 litro da mistura?

45 litros a 640 réis.....	28\$800
30 " " 560 " .....	16\$800
Logo, 75 litros da mistura.....	45\$600
1 litro " " .....	$\frac{45\$600}{75} = 608 \text{ réis.}$

365. Póde nesta regra dar-se o caso de procurar-se um valor médio de muitas cousas de valores differentes.

A este processo chamam muitos autores *regra das médias*.

Valor médio, ou simplesmente *média arithmetica* de muitas quantidades, é o quociente da divisão da somma dessas quantidades pelo numero dellas.

Exemplo. — Pesou-se tres vezes um corpo, e achou-se primeiramente o peso de 125<sup>g</sup>,926; depois, 125<sup>g</sup>,946; finalmente, 126<sup>g</sup>,011. Qual é o peso médio deste corpo?

1. <sup>a</sup> pesada .....	125,926
2. <sup>a</sup> " .....	125,946
3. <sup>a</sup> " .....	126,011
Somma.....	377,883

$$\frac{377,883}{3} = 125,961 \text{ (peso médio)}$$

365. Liga é a combinação de diversos metaes entre si.

367. A regra de liga, do mesmo modo que a de mistura, divide-se em *directa* e *inversa*.

368. A regra de liga é *directa*, quando tem por fim calcular o titulo de uma porção de ouro ou de prata que resultou da combinação de porções de prata ou de ouro, cujos pesos e titulos são conhecidos.

369. *Titulo* ou *toque* de uma liga é a relação entre o peso de ouro puro ou de prata pura e o peso total da liga.

370. A regra de liga póde ser considerada como um caso particular da regra de mistura, differindo desta em

se considerarem como *preços* os *toques* ou *titulos* dos metaes e como *valores* as *quantidades* de prata ou de ouro puro contidas nas ligas.

371. Para resolverem-se os problemas de regra de liga *directa*, observa-se a regra dada para a resolução dos problemas sobre misturas, attendendo-se ao que ficou dito em o numero anterior.

Exemplo. \*) — Fundem-se tres barras de prata: a primeira pesa 1<sup>Kg</sup>,265 e seu titulo é 0,930; a segunda pesa 2<sup>Kg</sup>,124 e seu titulo é 0,851; o peso da terceira é 1<sup>Kg</sup>,850, e o titulo 0,785. Pergunta-se qual é o titulo da liga?

Peso das barras		Prata pura
1. <sup>a</sup> 1,265	$1,265 \times 0,930$	ou 1,176 450
2. <sup>a</sup> 2,124	$2,124 \times 0,851$	" 1,807 524
2. <sup>a</sup> 1,850	$1,850 \times 0,785$	" 1,452 250
	<hr/>	<hr/>
5,239		4,436 224

A liga pesa 5<sup>Kg</sup>,239 e tem de prata pura 4<sup>Kg</sup>,436 224. Por conseguinte, em 1 kilogrammo da liga haverá de prata pura

$$\frac{4.436\ 224}{5,239} = 0,847 \text{ titulo da liga).}$$

### Problemas sobre regras de mistura e de liga

1. Um negociante misturou 38 hectolitros de trigo de 18 francos o hectolitro, com 19 hectolitros de 19 francos e 42 hectolitros de 15 francos. Qual é o preço de cada hectolitro da mistura? — R. 16,91.

2. Misturam-se 80 litros de vinho de 70 rs. o litro com 100 litros de vinho de 90 rs. o litro. Qual será o valor dum litro da mistura? — R. 81 rs. (approximadamente).

3. Fôrma-se o latão, fundindo juntamente 30 kilogr. de zinco com 70 de cobre. O kilogrammo de cobre custa 480 rs., e o kilogrammo de zinco 190 rs.; pede-se o preço do kilogrammo de latão — R. 393 rs.

4. Fundiram-se juntamente duas barras de prata; a primeira de 0,92 de titulo, pesava 1 240 grammos; a segunda, com titulo 0,80, pesava 736 grammos. Qual é o titulo da liga obtida? — R. 0,873.

\*) Arithmetica pratica de Cunha.

5. Um negociante misturou vinhos de diversas qualidades, a saber: 530 litros a 75 centimos o litro; 860 litros a 60 centimos o litro; 750 litros a 45 centimos o litro. Qual é o preço do litro da mistura? — R. 58 centimos.

6. A liga de um kilogrammo de estanho com 2 kilogrammos de chumbo serve para soldar o chumbo e o estanho. A como sae, sendo o estanho a 500 rs. o kilogrammo e o chumbo a 120 rs.? — R. 246 rs. (aproximadamente).

7. Fundiram-se 7,5 kilogrammos de cobre com 4 kilogrammos de zinco e 1 kilogrammo de bismutho. Um kilogrammo de cobre custa 460 rs., um de zinco 120 rs., e um de bismutho 1\$600 rs. Qual é o preço dum kilogrammo desta liga? — R. 442 rs. (aproximadamente).

8. O bronze das peças e das estatuas obtem-se, fundindo 11 kilogrammos de estanho com 100 de cobre. A como sae o kilogrammo de bronze, sendo o cobre a 320 rs. o kilogrammo e o estanho a 550 rs. — R. 342 rs. (aproximadamente).

9. Fez-se um sino, fundindo 110 kilogrammos de estanho com 390 kilogrammos de cobre, 5 kilogrammos de zinco e 4 kilogrammos de chumbo. O estanho é a 500 rs. o kilogrammo, o cobre a 540 rs., o zinco a 120 rs. e o chumbo a 140 rs. Qual é o custo do sino e o dum kilogr. deste bronze? — R. 266\$760 rs. (preço do sino); 524 rs. (preço do kilogrammo de bronze).

10. Os caracteres de impressão fazem-se deitando nos moldes uma liga de 20 partes de antimonio sobre 80 de chumbo e 5 de cobre. Quanto vale o kilogrammo desta liga, suppondo o antimonio a 550 rs. o kilogrammo, o chumbo a 120 rs., e o cobre a 500 rs.? — R. 220 rs.

## § VII — Fundos publicos

372. O governo, para attender a despezas imprevistas, taes como guerras, secca, peste ou despezas de utilidade publica, sem aggravar os impostos, recorre ao credito para levantar o dinheiro emprestado.

373. As quantias que o governo se obriga a pagar aos particulares para este emprestimo, constituem o que se chama *divida publica*.

374. O governo contrae geralmente esta divida de dois modos:

*Ou obriga-se a pagar um juro certo e determinado, que satisfaz por semestres que se vencem em 30 de Junho e 31 de Dezembro, ficando-lhe o direito de amortizar a divida, quando queira;*

*Ou dá titulos de divida aos particulares com a condição de resgatal-os num dia fixo, além do qual não vencem juro algum.*

No primeiro caso, a divida contraída se diz *fundada* ou *consolidada*; no segundo, *flutuante*.

375. Todas as rendas contra o Estado denominam-se *fundos publicos* e sob a mesma denominação ficam as *acções* dos bancos e companhias, e as *obrigações*, de que nos occuparemos nos paragraphos seguintes.

376. Na *divida consolidada*, o crédor recebe um *titulo*; que designa o capital e o juro em cada um anno.

Para facilitar ao possuidor o meio de reembolsar o seu capital sem exigi-lo do credor, que a isso não é obrigado, esses titulos são *negociaveis* ou *transferiveis*.

Si o titulo é vendido pelo valor nominal, diz-se *vendido ao par*; ha *baixa* quando é vendido por *menos* do valor; *alta*, quando vendido por *mais* do valor.

377. A *divida fluctuante* é representada por letras do thesouro, a prazo, vencendo um juro que é descontado no acto do emprestimo.

378. Nestes emprestimos contraídos pelo governo, a *renda é fixa*, e o *capital variavel*.

As apolices do governo brasileiro são de 1:000\$000 e produzem uma renda de 4%, 5% e 6%; isto é, por cada inscripção paga o governo ao possuidor do titulo uma renda de 40\$000, 50\$000, 60\$000.

Este valor de 1:000\$000 das apolices é apenas nominal; porquanto o governo recebe por ellas uma quantia variavel com as circumstancias em que se acha, o fim do emprestimo, a confiança que inspira; mas sempre a quantia recebida é inferior a 1:000\$000 (valor nominal da apolice).

Vê-se, pois, que sempre é prejudicial ao governo o pagamento de suas dividas quando tem de amortizal-as: primeiro, porque tem de entregar por cada apolice 1:000\$000, quando recebeu pela sua venda quantia inferior a essa; segundo, em vez de pagar juros de um capital effectivo, paga sempre um juro maior, e tanto maior quanto menor fôr o capital que haja recebido por cada apolice.

### Problemas sobre fundos publicos

PRIMEIRO PROBLEMA. — Sendo 90% o curso das apolices de 6%: qual será a taxa a que empregará os seus capitales, neste momento, o comprador de apolices?



O problema reduz-se ao seguinte:  
Por 900\$000 compra-se uma renda de 60\$000, por 100 que renda se comprará? — R. 6,66.

SEGUNDO PROBLEMA. — As apolices de 5 % estão ao curso de 75 %; as apolices de 6 % estão ao curso de 86 %. Qual é o melhor emprego dos capitães?

Este problema resolve-se como o precedente, calculando-se a taxa da 1.<sup>a</sup> renda e depois a da 2.<sup>a</sup>, e estabelecendo-se a comparação entre estas taxas.

Para a 1.<sup>a</sup> renda

Por 750\$000 compra-se uma renda de 50\$000; por 100 que renda se comprará? — R. 6,66.

Para a 2.<sup>a</sup> renda

Por 860\$000 compra-se uma renda de 60\$000; por 100 que renda se comprará? — R. 6,97.

Portanto, melhor seria, nestas circumstancias, comprar apolices de 6 %.

TERCEIRO PROBLEMA. — Compra-se uma renda de 1:500\$000 em apolices de 6 % ao curso de 88 %; que quantia terá de desembolsar o comprador?

O problema reduz-se ao seguinte:

Si para ter-se uma renda de 60\$000 são precisos 880\$000, a renda sendo de 1:500\$000 quanto se deverá empregar? — R. 22:000\$000.

QUARTO PROBLEMA. — Um particular comprou apolices de 6 % pela quantia de 60:000\$000; qual é a renda que possui, sendo o curso das apolices, no momento da compra, 90 %?

O problema reduz-se ao seguinte:

Por 90\$000 compra-se uma renda de 60\$000, que renda se comprará por 60:000\$000? — R. 4:000\$000.

(Extr. do Tratado de Arithmetica de Rochet e Cardoso da Silva).

## § VIII — Acções

379. Acções são titulos que conferem aos associados em uma empresa o direito ao lucro da mesma e lhes impõem a responsabilidade no caso de prejuizo.

380. Os possuidores de acções chamam-se *accionistas*.

381. Para maior commodidade no pagamento, não se paga de uma só vez todo o valor nominal da acção; faz-se o respectivo pagamento por prestações com intervallos convenientes.

382. As acções são *nominativas* até o seu integral pagamento.

Resolvido o pagamento, podem ser convertidas em acções *transferiveis por endosso* ou em acções *ao portador*.

383. Os accionistas se responsabilizam unicamente pelo valor nominal das acções que possuem.

384. As acções são papeis de credito negociaveis. Diz-se que estão *ao par*, quando são vendidas pelo valor nominal, ou pelo desembolso, caso ainda não se tenha exigido o seu valor por completo; *estão acima ou abaixo do par*, quando se vendem por mais ou por menos do valor nominal ou do desembolso.

385. Dos lucros de uma empresa deduzindo-se as quantias necessarias para as suas despezas e mais certa quantia para *fundo de reserva* (para eventualidades futuras), o restante constitue o **dividendo**, isto é, a parte dos lucros liquidos da sociedade que semestralmente é destinada para se distribuir pelos accionistas, *a tanto por acção*.

### Problemas

PRIMEIRO. — Uma companhia cujo capital é de..... 5.000:000\$000 dividido em acções de 100\$000, teve um dividendo de 325:000\$000; quanto pertence a cada acção, e quanto recebe um accionista que tem 25 acções?

1.º 5.000:000\$000 divididos por 100\$000 dão 50 000 acções. Si por 50 000 acções se deve repartir o dividendo 325:000\$000, a cada acção tocará 6\$500.

2.º Si 1 acção recebe 6\$500, 25 acções receberão.....  
 $25 \times 6\$500 = 162\$500.$

SEGUNDO. — Uma companhia que tem 50 000 acções de 100\$000 offerece um dividendo de 325:000\$000. De quantos por cento é o dividendo, e quanto receberia um possuidor de 26 acções?

1.º 50 000 acções de 100\$000, cada uma, perfazem 5.000:000\$000. Si 5.000:000\$000 dão 325:000\$000 de dividendo, 100 quanto darão? — R. 6 ½ %.

2.º Si 50 000 acções dão 325:000\$000 de dividendo quanto cabe a 26 acções? — R. 169\$000.

TERCEIRO. — Uma companhia cujas acções são de 100\$000, não tendo tido ainda senão  $\frac{3}{4}$  do desembolso, offerece um dividendo de 6\$000 por acção. A quantos por cento foi feito este dividendo?

O desembolso de  $\frac{3}{4}$  de cada acção de 100\$000 importa em 75\$000.

Si 75\$000 dão 6\$000 de dividendo, 100 que dividendo darão — R. 8 %.

QUARTO. — As acções de certa companhia têm o valor nominal de 300\$000, e são pagas por prestações de 20 %. Pergunta-se de quanto deverá ser o dividendo para que o juro seja de 8 %, suppondo que a companhia tem 2 500 acções e que só se pagaram 3 prestações?

A prestação de 20 % por acção de 300\$000 importa em 60\$000; 3 prestações de cada acção, portanto, montam a  $3 \times 60$000 = 180$000$ , e as 2 500 acções importarão em  $2 500 \times 180$000 = 450:000$000$ . Si 100 rendem 8, ..... 450:000\$000 quanto renderão? — R. 36:000\$000.

QUINTO. — Um individuo comprou 60 acções de certa companhia, tendo soffrido cada uma o desembolso de 90\$000, com um premio de 2 %. Pergunta-se quanto deverá receber, para que lhe corresponda a um juro de 7 %?

As 60 acções montam a 5:508\$000; sendo 5:400\$000 o producto do desembolso de cada acção (90\$000) por 60 (numero das acções) e 108\$000, premio de 2 % sobre os 5:400\$000. Si 100 dão 7 de juro, 5:508\$000 quanto darão? — R. 385\$560.

(Problemas de Raposo Botelho e Silva Dias.)

## § IX — Obrigações

386. Obrigações são titulos emittidos por alguma sociedade, vencendo um juro fixo ou determinado até o dia em que, por meio de sorteio, são amortizados os valores por elles representados.

387. As obrigações têm por fiança todo o activo e bens da sociedade, preferindo a quaesquer outros titulos de divida.

388. Como as acções, são titulos negociaveis as obrigações; e podem, pois, estar ao par, acima do par ou abaixo do par. Seja, porém, qual for o preço por que se venderem, a sociedade emissora só os reembolsa pelo seu valor nominal.

### Problemas

PRIMEIRO. — Um individuo comprou 80 obrigações duma companhia, com o valor nominal de 100\$000 cada uma, emittidas a 94, com um juro de 6 %. Foram amortizadas no fim de 5 annos; e quer-se saber: 1) quanto lucrou o individuo; 2) a quantos por cento corresponde o lucro?

1.º 80 obrigações a 94\$000 cada uma importam em 7:520\$000.

Importancia da amortização das 80 obrigações: ..... 8:000\$000.

Diferença entre amortização e compra (8:000\$000 — 7:520\$000) 480\$000.

Juros das 80 obrigações em 5 annos a 6 %, 2:400\$000.

Lucro: 2:400\$000 + 480\$000 = 2:880\$000.

2.º Si 7:520\$000 (preço das 80 obrigações a 94) produziram 2:880\$000 de lucro em 5 annos, qual será o lucro de 100 em 1 anno? — R. 7,66 % (approxim.).

SEGUNDO. — Uma pessoa tendo comprado com ..... 51:619\$000 rs. 500 obrigações de certa companhia (de 100\$000 cada uma) e 18 fracções de obrigação (de 20\$000 cada fracção) a como saiu cada obrigação?

Sendo de 100\$000 cada obrigação e de 20\$000 cada fracção, segue-se que cada fracção equivale a um quinto de obrigação. Assim as 500 obrigações valem  $2 500/5$ ; augmentados mais de  $18/5$ , tem-se  $2 518/5$ , cuja importancia é de 51:619\$000.

Si  $2 518/5$  ..... custaram 51:619\$000  
 $5/5$  (ou 1 obrigação) " "  $x = 102$500$ .

TERCEIRO. — Estando as obrigações de certa companhia a 102\$500, que quantia pôde realizar uma pessoa que

possue 30 obrigações e 17 fracções, sendo as acções de 100\$000 cada uma, e cada fracção de 20\$000?

30 obrigações a 102\$500 cada uma montam a 3:075\$000.

Cada fracção de 20\$000 em relação a uma obrigação de 100\$000, representa 1/5 de obrigação. Estando a 102\$500 cada obrigação, 1/5 importará em 20\$500 e 17/5 ou 17 fracções importarão em 348\$500.

Logo, as 30 obrigações e 17 fracções dão 3:075\$000 + 348\$500 = 3:423\$500.

QUARTO. — Quantas obrigações de 100\$000 cada uma se podem comprar com 5:125\$000, suppondo que ellas têm 2,5 % de premio?

100\$000 nominaes valem 102\$500 em dinheiro:

$$5:125\$000 \text{ em dinheiro valem } \frac{5\ 125\ 000 \times 100\$000}{102\ 500} = 5:000\$000 \text{ nominaes.}$$

O numero de vezes que 5:000\$000 contiverem 100\$000, indicará quantas as obrigações que com aquella quantia se podem comprar.

Effectuando-se a divisão, obtem-se 50 obrigações.

### § X — Cambio

389. Cambio, commercialmente falando, é a troca de dinheiro por dinheiro.

390. Cambio de banco é a troca de dinheiro entre duas praças commerciaes do mesmo paiz ou de paizes differentes.

391. Si a troca se dá entre praças do mesmo paiz, o cambio se chama interno; será externo, si a troca se fizer entre praças de paizes differentes.

392. O preço do cambio interno se avalia a uma porcentagem convencionada, visto as moedas serem do mesmo paiz.

393. O preço do cambio externo se avalia, convencio-

dellas dê sempre uma quantia determinada (o certo), e a outra o incerto, isto é, a quantia variavel que corresponda á primeira.

Assim, o Brasil dá o certo (1\$000) e a Inglaterra o incerto (mais ou menos pence ou dinheiros sterlingos por 1\$000). Portugal dá o certo (100 réis fortes) e o Brasil o incerto (mais ou menos réis fracos por 100 réis fortes). A França e a Allemanha dão o certo (1 franco e 1 reichsmark) e o Brasil o incerto, isto é, mais ou menos réis por 1 franco e por 1 reichsmark.

394. O preço do cambio entre duas praças está ao par, quando as moedas de dois paizes que a esse preço fazem suas transacções, têm o mesmo valor intrinseco, isto é, têm a mesma quantidade de metal precioso.

Assim, sendo 27 o preço do cambio ao par entre Inglaterra e o Brasil, quer isto dizer que 27 pence é o justo valor de 1\$000 ou que 1 £ vale exactamente 8\$889 rs.

A esse mesmo cambio 27, tem-se o par entre o Brasil e Portugal e a França e a Allemanha; porque

a 100 rs. fort. correspondem exactamente..	200 rs. fracos
a 1 franco .....	353 "
a 1 reichsmark .....	436 "

395. Conhecidos esses valores ao cambio de 27, por meio de uma regra de tres simples se determinam todos os valores correspondentes a um cambio qualquer. Assim foi organizada a pequena tabella annexa.

396. O que dito fica é sufficiente para os calculos mais communs, de que nos vamos occupar.

## TABELLA

para conhecer a estimativa do cambio francez, allemão e portuguez em réis brasileiros, desde 12 dinheiros sterlinos por 1\$000 até 15

Dinheiros sterlinos por 1\$000	Inglaterra Libra sterlina	França Franco	Allemanha Reichsmark	Portugal 100 rs. moeda forte
12	20\$000	793	981	450
(0,125) 12 1/8	19\$794	786	970	445
(0,250) 12 1/4	19\$591	778	960	440
(0,375) 12 3/8	19\$393	770	951	436
(0,500) 12 1/2	19\$200	762	941	432
(0,625) 12 5/8	19\$009	754	932	427
(0,750) 12 3/4	18\$823	747	923	423
(0,875) 12 7/8	18\$640	740	914	419
13	18\$461	733	905	415
13 1/8	18\$285	726	896	411
13 1/4	18\$113	719	888	407
13 3/8	17\$943	712	880	403
13 1/2	17\$777	706	872	399
13 5/8	17\$614	699	864	396
13 3/4	17\$454	693	856	392
13 7/8	17\$297	686	848	389
14	17\$142	680	840	385
14 1/8	16\$991	674	833	382
14 1/4	16\$842	668	826	378
14 3/8	16\$895	663	818	375
14 1/2	16\$551	657	811	372
14 5/8	16\$410	651	804	369
14 3/4	16\$271	646	798	366
14 7/8	16\$134	640	791	363
15	16\$000	635	784	360
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
27	8\$889	353	436	200

## Exercicios sobre cambios

## INGLATERRA

PRIMEIRO. — Quanto vale 1 libra sterlina, estando o cambio a 12?

Regra. — Si tivermos de determinar o valor de 1 libra 86, multiplicaremos 240 (numero de dinheiros que formam 1 libra) por 1000, e divide-se o producto pelo cambio dado. Si forem 1 ou mais libras e fracções, como soldos e dinheiros, reduziremos primeiramente o numero dado a diaheiro e procederemos depois pela fórmula já sabida.

$$\begin{array}{r} 240 \\ \times 1000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 240\ 000 : 12 = 20\$000. \\ 0. \dots \end{array}$$

Este calculo provém do seguinte problema de regra de tres simples:

$$\begin{array}{r} \text{Si } 12 \text{ dinheiros} \\ 240 \text{ " } (1 \text{ £}) \text{ " } \\ \times 1000 \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} \text{valem } 1\$000 \\ \text{" " } \\ 240\ 000 \\ \hline \end{array} = \frac{240\ 000}{12} = 20\$000.$$

SEGUNDO. — Qual é o valor de 1 libra sterlina estando o cambio a 12 1/8?

(Fracção ordinaria).  $12 \frac{1}{8} = 97/8$ .

$$\begin{array}{r} 240 \\ \times 1000 \\ \hline 240\ 000 : 97/8 \\ 8 \end{array}$$

$$1\ 920\ 000 : 97 = 19\$793.$$

$$\begin{array}{r} .950 \\ .770 \\ .910 \\ .370 \\ .79 \end{array}$$

(Fracção decimal).  $12 \frac{1}{8} = 12,125$

$$\begin{array}{r} 240 \\ 1\ 000 \\ \hline \end{array}$$

$$240\ 000 : 12,125$$

ou

$$\begin{array}{r} \text{''''''} \\ 240\ 000\ 000 : 12\ 125 = 19\ 879,3. \\ 118\ 750 \\ \dots 96\ 250 \\ 113\ 750 \\ \dots 46\ 250 \\ \dots 9\ 875 \end{array}$$

TERCEIRO. — *Saccaram de Londres contra nós uma letra de 283 £ 17 s 1 d, ao cambio de 13 5/8. Quanto devemos pagar em dinheiro brasileiro?*

Nota. — O numero complexo 283 £ 17 s 1 d reduzido a dinheiros sterlinos dá 68 125 dinheiros. (Vid. pagina 197 n.º 302). O numero 13 5/8 reduzido a uma só expressão fraccionaria é igual a 109/s. Feito isto, e applicando-se a regra, resulta:

$$\begin{array}{r} 68\ 125 \\ 1\ 000 \\ \hline \end{array}$$

$$68\ 125\ 000 : \frac{109}{8}$$

$$\begin{array}{r} 545\ 000\ 000 : 109 = 5:000\$000. \\ .0 \dots \end{array}$$

QUARTO. — *Tendo de remetter-se para Londres a quantia de 5:000\$000, estando o cambio a 13 5/8, quantas libras produz essa quantia?*

Nota. — Esta questão sendo inversa da precedente, em vez de multiplicar-se o numero dado por 1 000 e dividir o producto pelo cambio, multiplica-se o numero dado pelo cambio e divide-se o producto por 1 000. Para converter-se o quociente, que vem expresso em dinheiros, para libras esterlinas, observa-se o disposto na pag. 201, observ. II.

$$\begin{array}{r} 5\ 000\ 000 \times \frac{109}{8} \\ 109 \\ \hline \end{array}$$

$$545\ 000\ 000 : 8 = 68\ 125\ 000$$

$$\begin{array}{r} .65 \\ .10 \\ .20 \\ .40 \\ .0 \end{array}$$

$$68\ 125\ 000 : 1\ 000 = 68\ 125 \text{ dinheiros}$$

$$68\ 125 : 240 = 283 \text{ £}$$

$$\begin{array}{r} 20\ 12 \\ \dots 925 \\ 205 \\ \times 20 \end{array}$$

$$4\ 100 \text{ sold.} : 240 = 17 \text{ soldos}$$

$$\begin{array}{r} 1\ 700 \\ \dots 20 \\ \times 12 \end{array}$$

$$240 \text{ dinhr.} : 240 = 1 \text{ dinheiro.}$$

$$\dots 0$$

Assim, 5:000\$000, ao cambio de 13 5/8, produzem 283 £ 17 s 1 d.

Este modo de proceder provém da resolução do seguinte problema de regra de tres simples.

$$\begin{array}{l} \text{Si } 1\$000 \text{ vale } 13 \frac{5}{8} \text{ dinheiros} \\ 5:000\$000 \text{ " } x \text{ " } \end{array}$$

$$x = \frac{5\ 000\ 000 \times 13 \frac{5}{8}}{1\ 000} = 68\ 125 \text{ dinheiros}$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } 240 \text{ dinheiros formam } 1 \text{ £} \\ 68\ 125 \text{ " " } x \end{array}$$

$$x = \frac{68\ 125}{240} \text{ £} = 283 \text{ £ } 17 \text{ s } 1 \text{ d.}$$

## FRANÇA

O cambio inglez estando a 27, 1 franco vale 353 réis brasileiros.

Desta consideração se pôde deduzir qual seja o valor do franco a um cambio qualquer, estabelecendo-se uma regra de tres simples inversa.

EXERCICIO 1). — Quanto vale 1 franco ao cambio de 13?

Si ao cambio de 27.... 1 fr. vale 353  
 " " " 13.... 1 " " x

$$x = \frac{27 \times 353}{13} = 733 \text{ rs.}$$

Assim, para conhecer-se o valor de 1 franco em réis brasileiros, a um cambio qualquer, multiplica-se 353 por 27 e divide-se o producto pelo cambio dado.

EXERCICIO 2). — Uma factura de Paris importou em 3 540<sup>fr.</sup>,50 ao cambio de 12 <sup>7</sup>/<sub>8</sub>. A quanto monta essa quantia em réis brasileiros?

1<sup>fr.</sup> ao cambio de 12 <sup>7</sup>/<sub>8</sub> vale

$$\begin{array}{r} 353 \\ 27 \\ \hline 2\ 471 \\ 7\ 06 \\ \hline 9\ 531 : 103 \frac{1}{8} \\ 8 \end{array}$$

$$76\ 248 : 103 = 740 \text{ rs.}$$

$$\begin{array}{r} 414 \\ 28 \end{array}$$

1<sup>fr.</sup> valendo 740 rs. 3 540<sup>fr.</sup>,50 valerão

$$\begin{array}{r} 3\ 540,50 \\ 740 \\ \hline 141\ 620 \\ 2478\ 35 \\ \hline 2:6198970,00 \end{array}$$

EXERCICIO 3). — Tendo-se de enviar para Paris a quantia de 2:6198970, ao cambio de 12 <sup>7</sup>/<sub>8</sub>, quantos francos produz essa quantia?

1<sup>fr.</sup> ao cambio de 12 <sup>7</sup>/<sub>8</sub> vale 740 rs.

$$\begin{array}{r|l} 2619970 & 740 \\ .3999 & \hline .2997 & 3\ 540^{\text{fr.}} \text{,}50 \\ .3700 & \\ \dots 0 & \end{array}$$

## ALLEMANHA

Tudo quanto ficou dito sobre o franco se applica ao reichsmark, cujo valor é 436 réis brasileiros, ao cambio de 27.

EXERCICIO 1). — Quanto vale 1 reichsmark ao cambio de 14 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>?

$$\begin{array}{r} 436 \\ 27 \\ \hline 3\ 052 \\ 8\ 72 \\ \hline 11\ 772 : 113 \frac{1}{8} \\ 8 \end{array}$$

$$94\ 176 : 113 = 833 \text{ rs.}$$

$$\begin{array}{r} .377 \\ .386 \\ .47 \end{array}$$

EXERCICIO 2). — Uma factura de Hamburgo na importancia de 1725 reichsmarks, ao cambio de 13 <sup>3</sup>/<sub>4</sub>, a quanto monta em réis brasileiros?

1 reichsmark ao cambio de 13 <sup>3</sup>/<sub>4</sub> vale

$$\begin{array}{r} 436 \\ 27 \\ \hline 3\ 052 \\ 8\ 72 \\ \hline 11\ 772 : 55/4 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47\ 088 : 55 = 856\ \text{rs.} \\ .308 \\ .338 \\ ..8 \end{array}$$

1 reichsmark valendo 856 rs. 1725 reichsmarks valerão

$$\begin{array}{r} 1\ 725 \\ 856 \\ \hline 10\ 350 \\ 86\ 25 \\ 138\ 00 \end{array}$$

1:476\$600 rs.

EXERCICIO 3). — Tendo de enviar para Hamburgo a quantia de 1:476\$600, ao cambio de  $13\frac{3}{4}$ , quantos reichsmarks produz essa quantia?

1 reichsmark ao cambio de  $13\frac{3}{4}$  vale 856 rs.

$$\begin{array}{r} 1\ 476\ 600 \mid 856 \\ 6\ 206 \mid 1\ 725\ \text{reichsmarks.} \\ .2\ 140 \\ .4\ 280 \\ \dots 0 \end{array}$$

### PORTUGAL

O cambio inglez estando a 27, 100 réis fortes valem 200 réis fracos.

Para ter-se o valor de 100 réis fortes em réis fracos a um cambio qualquer, multiplica-se 200 por 27 e divide-se o producto pelo cambio dado.

Assim, 100 réis fortes, ao cambio de 15, valem

$$\begin{array}{r} 27 \\ 200 \\ \hline 5\ 400 \mid 15 \\ .90 \mid 360\ \text{réis fracos.} \\ .0 \end{array}$$

EXERCICIO 1). — A quanto monta em réis brasileiros, uma factura de Lisboa na importancia de 1:500\$000, ao cambio de  $13\frac{5}{8}$ ?

100 réis fortes ao cambio de  $13\frac{5}{8}$  valem

$$\begin{array}{r} 27 \\ 200 \\ \hline 5\ 400 : 109/8 \\ 8 \\ \hline 43\ 200 : 109 = 396\ \text{réis fracos.} \\ 1\ 050 \\ .690 \\ .36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,96 \\ 1\ 500\ 000 \\ \hline 1\ 980 \\ 3\ 96 \\ \hline 5:940\$000,00 \end{array}$$

100 réis fortes ao cambio de  $13\frac{5}{8}$  valem 396 réis fracos; ou 1 real forte vale 3,96 réis fracos.

EXERCICIO 2). — Tendo de remetter para Lisboa 5:940\$000 ao cambio de  $13\frac{5}{8}$ , quanto produz essa quantia em moeda portugueza?

100 réis fortes ao cambio de  $13\frac{5}{8}$  valem 396 réis fracos; ou 1 real forte vale 3,96 réis fracos.

$$\begin{array}{r} 5\ 940\ 000 : 3,96 \\ \text{ou} \\ 5\ 940\ 000\ 00 \mid 396 \\ 1\ 980 \mid 1:500\$000\ \text{fortes.} \\ \dots 0 \end{array}$$

### OBSERVAÇÃO

Em todos os exercicios propostos empregamos cambios que se encontram na tabella annexa, para confirmal-a. Assim, com as regras dadas podemos resolver todas as questões identicas, seja qual for o cambio dado.

CAPITULO XI

RAIZES QUADRADA E CUBICA

§ I — Quadrado e raiz quadrada

397. Quadrado ou segunda potencia de um numero, é o producto de dois factores iguaes a esse numero; ou, por outra, é o producto desse numero por si mesmo.  
Assim, 49 (7×7) é o quadrado de 7; 81 (9×9) é o quadrado de 9.

398. Raiz quadrada de um numero, é o numero que, sendo multiplicado por si mesmo, ou elevado ao quadrado, reproduz o numero proposto.  
Assim, 7 é a raiz quadrada de 49, porque 7×7 ou 7<sup>2</sup>=49; 9 é a raiz quadrada de 81, porque 9×9 ou 9<sup>2</sup> = 81.

399. Indica-se a extracção de raizes por meio de um signal particular ( $\sqrt{\quad}$ ), chamado *radical*.  
As raizes, como as potencias, têm grãos que são indicados pelos *indices* ou *expoentes*.  
*Indice de um radical* é o numero que indica as vezes que a raiz entra como factor; colloca-se na abertura deste signal; assim  $\sqrt[2]{4}$ ,  $\sqrt[3]{9}$ , lê-se: raiz quadrada de 4; raiz cubica de 9.

Não se costuma escrever o indice (2) da raiz quadrada.  
— Assim,  $\sqrt{16}$ ,  $\sqrt{25}$ , etc., lê-se raiz quadrada de 16, raiz quadrada de 25.

400. Para extrair-se a raiz quadrada de um numero inteiro, é preciso conhecer os quadrados dos nove primeiros numeros:

Raizes quadradas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados . . . . .	1	4	9	16	25	36	49	64	81

OBSERVAÇÃO. — Quando um numero inteiro não é quadrado, acha-se entre os quadrados de dois numeros consecutivos.

58, por exemplo, não sendo quadrado, acha-se entre 49 e 64, quadrados de 7 e 8 (numeros consecutivos).

Assim, 58, ficando comprehendido entre os quadrados 49 e 64, é maior do que 49 e menor do que 64; o que se indica deste modo:

$$49 < 58 < 64$$

A raiz quadrada, pois, de 58, fica comprehendida entre 7 e 8 (raizes quadradas de 49 e 64); é maior do que 7 e menor do que 8; o que assim se indica:

$$\sqrt{49} < \sqrt{58} < \sqrt{64}$$

isto é,

$$7 < \sqrt{58} < 8.$$

A differença entre 7 e 8 sendo de uma unidade, a differença entre a raiz quadrada de 58 e qualquer um destes dois numeros é menor do que uma unidade, visto estar ella comprehendida entre ambos. O numero 7 é a raiz quadrada de 58, a menos de uma unidade por falta; 8 é a raiz quadrada de 58, a menos de uma unidade por excesso.

401. O quadrado de um numero composto de dezenas e unidades consta de tres partes.

- 1.º do quadrado das dezenas,
- 2.º do dobro do producto das dezenas pelas unidades,
- 3.º do quadrado das unidades.

Exemplo.  $36^2 = (30+6)^2 = 30^2 + 2(30 \times 6) + 6^2 = 900 + 360 + 36 = 1296.$

402. A differença dos quadrados de dois numeros consecutivos é igual ao dobro do menor mais 1.

Exemplo.  $27^2 = (26+1)^2 = 26^2 + 2 \times 26 + 1 = 27^2$   
—  $26^2 = 2 \times 26 + 1 = 729 - 676 = 53.$

Raiz quadrada dos numeros inteiros

403. Para extrair a raiz quadrada de um numero inteiro, divide-se este em classes de dois algarismos, começando-se da direita para a esquerda, podendo a ultima constar de um só algarismo.



Procura-se o maior quadrado contido na 1.<sup>a</sup> classe da esquerda, e a sua raiz quadrada (*que será o primeiro algarismo da raiz pedida*) se escreve á direita do numero proposto, d'elle separando-se por um traço vertical.

Da classe considerada subtrae-se o maior quadrado nella contido, e á direita do resto se escreve a classe seguinte.

Do numero assim formado separa-se o ultimo algarismo da direita, e divide-se o numero resultante pelo dobro da raiz achada. O quociente se escreve á direita do numero que serviu de divisor. Este divisor, assim augmentado, multiplica-se pelo ultimo algarismo da direita; e subtrae-se o producto do numero formado pelo dividendo e o algarismo que se havia separado.

A' direita do resto escreve-se a 3.<sup>a</sup> classe, e continúa-se do mesmo modo até se haver considerado todos os algarismos.

## OBSERVAÇÕES

**PRIMEIRA.** — Quando algum dos dividendos parciaes for menor do que o divisor, o quociente será zero, e zero se escreverá na raiz; para continuar a operação, baixa-se a classe seguinte, a qual se escreve á direita do numero formado pelo resto e a ultima classe considerada, procedendo-se depois como preceitúa a regra.

**SEGUNDA.** — Quando não ha resto, o numero dado é quadrado; si houver resto, a raiz achada é a raiz quadrada do maior quadrado contido no numero dado; ou, é a raiz quadrada approximada do numero dado, a menos de uma unidade, por falta.

Exemplo. — *Extraír a raiz quadrada de 57 836 025.*

$\sqrt{57.83.60.25}$	7605	
49		
.88.3	$(2 \times 7) = 14 \dots \dots 1.^\circ \text{ divisor}$	
87.6	$146 \times 6 = 876$	
... 76.0	$(2 \times 76 = 152 \dots \dots 2.^\circ \text{ divisor}$	
0		
76 02 5	$(2 \times 760) = 1520 \dots 3.^\circ \text{ divisor}$	
76 02 5	$15\ 205 \times 5 = 76025$	
0		

**TERCEIRA.** — Quando se quer extrair a raiz quadrada de um numero, a menos de uma unidade fraccionaria dada, multiplica-se esse numero pelo quadrado do denominador da fracção que indica a approximação pedida; extrae-se depois, a menos de uma unidade, a raiz quadrada do producto, e o resultado divide-se pelo denominador da fracção dada.

Exemplo. — *Extraír a raiz quadrada de 41, a menos de  $\frac{1}{5}$ .*

$$\sqrt{41} = \frac{\sqrt{41 \times 5^2}}{5} = \frac{\sqrt{1025}}{5} = \frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5}$$

a menos de  $\frac{1}{5}$  por falta.

**QUARTA.** — Querendo-se achar a raiz quadrada de um numero, a menos de  $\frac{1}{2}$ ; conserva-se o ultimo algarismo da raiz inteira, si o resto fôr menor do que essa parte inteira, ou a ella igual. Neste caso tem-se a raiz quadrada approximada a menos de  $\frac{1}{2}$  por falta. (Vid. ex. 1 e 2).

Si, porém, o resto fôr maior do que a parte inteira, junta-se a esta uma unidade, e obtem-se a raiz quadrada approximada a menos de  $\frac{1}{2}$  por excesso. (Vide ex. 3).

Ex. 1).  $\sqrt{268}$  é 16 a menos de  $\frac{1}{2}$  por falta.

$\sqrt{2.68}$	16
1	26
16.8	
15 6	
Resto.....	1 2

Ex. 2).  $\sqrt{552}$  é 23 a menos de  $\frac{1}{2}$  por falta.

$\sqrt{5.52}$	23
4	43
15.2	
12 9	
Resto.....	2 3

Ex. 3).  $\sqrt{1128}$  é 34 a menos de  $\frac{1}{2}$  por excesso.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{11.28} & 33 \\ 9 & 63 \\ \hline 22.8 & \\ 189 & \\ \hline \text{Resto.....} & 39 \end{array}$$

**Exercicios**

Extraír a raiz quadrada dos seguintes numeros:

- 1) 7 744    2) 87 025    3) 128 881    4) 334 084    5) 5 517 801  
 8 649    96 100    247 009    480 249    48 846 121

Extraír a raiz quadrada dos seguintes numeros, a menos de cada uma das uniões fraccionarias:  $\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ .

- 1) 34    2) 58    3) 75    4) 139    5) 342  
 43    69    87    291    453

Extraír a raiz quadrada dos seguintes numeros a menos de  $\frac{1}{2}$ :

- 1) 1 118    2) 5 700    3) 3 444    4) 8 322    5) 9 506  
 3 253    6 162    6 201    8 574    3 451

**RAIZ QUADRADA DE NUMEROS FRACCIONARIOS**

1.º — FRACÇÕES DECIMAES

404. Para extraír a raiz quadrada de uma fracção decimal cujo numero de casas de dizima é par, extrae-se, a menos de uma unidade, a raiz quadrada da fracção dada, fazendo-se abstracção da virgula, e toma-se depois á direita della a metade das casas de dizima existentes na fracção proposta.

Exemplo. — Extraír a raiz quadrada de 0,5987

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{59.87} & 77 \\ 49 & 147 \\ \hline 108.7 & \\ 102.9 & \\ \hline \dots 58 & \end{array}$$

$\sqrt{0,5987} = 0,77$ , a menos de um centesimo.

Quando o numero de casas de dizima da fracção é impar, torna-se primeiramente par, acrescentando-se um zero á sua direita e opera-se como precedentemente.

Exemplo. — Extraír a raiz quadrada de 0,57689 (ou 0,576890).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{57.68.90} & 759 \\ 49 & 145 \\ \hline 86.8 & 1509 \\ 725 & \\ \hline 1439.0 & \\ 13581 & \\ \hline .809 & \end{array}$$

$\sqrt{0,576890} = 0,759$ , a menos de um millesimo.

**Exercicios**

Extraír a raiz quadrada das seguintes fracções:

- 1) 0,3136    2) 0,3702    3) 0,321    4) 0,42521  
 65,9344    0,6198    0,819    0,20054  
 0,491401    29,4813    12,578    14,80167

2.º — FRACÇÕES ORDINARIAS

405. Para extraír-se a raiz quadrada de uma fracção ordinaria cujos termos são quadrados, extrae-se, separadamente a raiz quadrada ao numerador e ao denominador, e divide-se depois a primeira raiz pela segunda.

Exemplo. —  $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$ .

Si unicamente o denominador fôr quadrado, extrae-se, a menos de uma unidade, a raiz quadrada do numerador e a exacta do denominador.

Exemplo. —  $\sqrt{\frac{29}{49}} = \frac{\sqrt{29}}{7} = \frac{5}{7}$  a menos de  $\frac{1}{7}$  por falta.

Si os dois termos não forem quadrados, multiplicam-se ambos pelo denominador e procede-se depois como no caso precedente.

Exemplo.  $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{7 \times 11}{11^2}} = \frac{\sqrt{77}}{11} = \frac{8}{11}$ , a menos de  $\frac{1}{11}$  por falta.

Exercicios

Extrair a raiz quadrada das seguintes fracções:

1) $\frac{9}{16}$	2) $\frac{53}{64}$	3) $\frac{5}{7}$	4) $\frac{16}{25}$
$\frac{25}{49}$	$\frac{75}{81}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{97}{144}$
$\frac{64}{121}$	$\frac{97}{121}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{8}{15}$

Problemas sobre os quadrados e sobre as raizes quadradas

- 10 vezes a raiz quadrada de um numero vale 250. Qual é este numero? — R. 625.
- 8 vezes o quadrado de um numero vale 8192. Qual é este numero? — R. 32.
- Dois numeros são iguaes e o seu producto é 1849. Quaes são os dois numeros? — R. 43.
- A somma dos quadrados de dois numeros é 625 e um destes numeros é 15. Qual é o outro? — R. 20.
- Repartindo-se 230\$400 entre diversas pessoas, cada uma dellas recebeu tantos réis quantas eram as pessoas. Quantas eram as pessoas e quanto recebeu cada uma? — R. 430 pessoas e cada uma dellas recebeu 480 rs.
- Um jardineiro quer plantar em um terreno quadrado 3136 arbustos, de modo que formem renques parallelos. Quantos arbustos deve elle plantar em cada linha? — R. 56.
- A somma dos quadrados de dois numeros é 1552 e a differença de seus quadrados é 1040. Quaes são esses dois numeros? — R. 36; 16.

8. Qual é o numero cuja raiz quadrada augmentada de 13 dá para somma 29? — R. 256.

9. A differença de dois numeros é 10 e o producto de seus quadrados é 576. Quaes são esses numeros? — R. 21, 2.

10. Qual é o numero cujos  $\frac{2}{3}$  do quadrado igualam a 654? —

R. 99.  
11. O maior de dois numeros é 546; o quadrado de sua somma é 470 596. Qual é o menor? — R. 149.

12. A differença dos quadrados de dois numeros consecutivos é 65. Quaes são esses numeros? — R. 32, 33.

§ II — Cubo e raiz cubica

406. Cubo ou terceira potencia de um numero, é o producto de tres factores iguaes a esse numero.

Assim, 27 ( $3 \times 3 \times 3$ ) é o cubo de 3;  
125 ( $5 \times 5 \times 5$ ) é o cubo de 5.

407. Raiz cubica ou raiz terceira de um numero é o numero que tomado tres vezes como factor ou elevado ao cubo, reproduz o numero proposto.

Assim 3 é a raiz cubica de 27, porque  $3 \times 3 \times 3$  ou  $3^3 = 27$ ; 5 é a raiz cubica de 125, porque  $5 \times 5 \times 5$  ou  $5^3 = 125$ .

408. Para extrair-se a raiz cubica de um numero inteiro, é preciso conhecer os cubos dos nove primeiros numeros:

Raizes cubicas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubos.....	1	8	27	64	125	216	343	512	729

OBSERVAÇÃO. — Quando um numero inteiro não é cubo acha-se comprehendido entre os cubos de dois numeros inteiros consecutivos.

298, por exemplo, não sendo cubo, acha-se entre 216 e 343, cubos de 6 e 7 (numeros consecutivos).

Assim, 298, ficando entre os cubos 216 e 343, é maior do que 216 e menor do que 343; o que se indica deste modo:

$216 < 298 < 343$ .

A raiz cubica, pois, de 298, fica comprehendida entre 6 e 7 (raizes cubicas de 216 e 343); é maior do que 6 e menor do que 7; o que assim se indica:

$$\sqrt[3]{216} < \sqrt[3]{298} < \sqrt[3]{343}; \text{ isto é,}$$

$$6 < \sqrt[3]{298} < 7.$$

E como a differença entre 6 e 7 é de uma unidade, a differença entre a raiz cubica de 298 e qualquer um destes dois numeros é menor do que uma unidade, visto estar ella comprehendida entre ambos. O numero 6 é a raiz cubica de 298, a menos de uma unidade por falta; 7 é a raiz cubica de 298, a menos de uma unidade por excesso.

**409. O cubo de um numero composto de dezenas e unidades consta de quatro partes:**

- 1.º do cubo das dezenas,
- 2.º do triplo do producto do quadrado das dezenas pelas unidades,
- 3.º do triplo do producto das dezenas pelo quadrado das unidades,
- 4.º do cubo das unidades.

Exemplo.  $32^3 = (30 + 2)^3 = 30^3 + 3(30^2 \times 2) + 3(30 \times 2^2) + 2^3 =$   
 $= 27\ 000 + 5\ 400 + 360 + 8 = 32\ 768.$

### RAIZ CUBICA DOS NUMEROS INTEIROS

**410. Para extrair a raiz cubica de um numero inteiro,** divide-se este em classes de tres algarismos, começando-se da direita para a esquerda; podendo a ultima constar de 1, 2 ou 3 algarismos.

Procura-se o maior cubo contido na 1.ª classe da esquerda e a sua raiz cubica (que será o primeiro algarismo da raiz pedida) escreve-se á direita do numero dado, delle separando-se por um traço vertical.

Da classe considerada subtrae-se o maior cubo nella contido, e escreve-se á direita do resto a classe seguinte. Do numero assim formado separam-se os dois ultimos algarismos da direita e divide-se o numero formado pelos outros

algarismos pelo triplo do quadrado da raiz achada. O quociente se escreve á direita da raiz achada, e o numero que dahi resulta eleva-se ao cubo e subtrae-se este das duas classes consideradas.

Quando acontecer que o cubo obtido seja maior que o numero formado pelas classes consideradas, subtrae-se 1 ao ultimo algarismo achado da raiz e de novo eleva-se o resultado ao cubo, para ver si é possível a subtracção.

A' direita do resto se escreve a classe seguinte, e continúa-se do mesmo modo até se haver considerado todos os algarismos.

### OBSERVAÇÕES

**PRIMEIRA.** — Si algum dos dividendos parciaes fór menor do que o divisor, o quociente será zero, e zero se escreverá na raiz; para continuar a operação, baixa-se a classe seguinte, a qual se escreverá á direita do numero formado pelo resto e a ultima classe considerada, procedendo-se depois como manda a regra.

**SEGUNDA.** — Sendo zero o resto da ultima subtracção, o numero dado é cubo; si houver resto, a raiz achada é a raiz cubica do maior cubo contido no numero dado; ou, é a raiz cubica do numero dado, approximada a menos de uma unidade, por falta.

Exemplo. — Extrair a raiz cubica de 12 230 590 464.

$\sqrt{12\ 230\ 590\ 464}$	2304
8	
.42 30	
12 167	
.. 635.90	
12 167 000	
.. 63 590 454	
12 230 590 464	
	0

$(3 \times 2^2) = (3 \times 4) = 12 \dots \dots \dots 1.^\circ \text{ divisor}$

$23^3 = 12\ 167$

$(3 \times 23^2) = (3 \times 529) = 1587 \dots \dots 2.^\circ \text{ divisor}$

$230^3 = 12\ 167\ 000$

$(3 \times 230^2) = (3 \times 52\ 900) = 158\ 700 \dots \dots 3.^\circ \text{ divisor}$

$2304^3 = 12\ 230\ 590\ 464$

Cubo de 23

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \\ 23 \\ \hline 1587 \\ 1058 \\ \hline 12167 \end{array}$$

Cubo de 230

$$\begin{array}{r} 230 \\ 230 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 52900 \\ 230 \\ \hline 1587 \\ 1058 \\ \hline 12167000 \end{array}$$

Cubo de 2304

$$\begin{array}{r} 2304 \\ 2304 \\ \hline 9216 \\ 4608 \\ \hline 5308416 \\ 2304 \\ \hline 21233664 \\ 15925248 \\ 10616832 \\ \hline 12230590464 \end{array}$$

TERCEIRA. — Querendo-se extrair a raiz cubica de um numero, a menos de uma unidade fraccionaria dada, multiplica-se esse numero pelo cubo do denominador da fracção que indica a approximação pedida; extrae-se depois, a menos de uma unidade, a raiz cubica do producto, e o resultado divide-se pelo denominador da fracção dada.

Exemplo. — Extrair a raiz cubica de 60, a menos de  $\frac{1}{5}$ .

$$\sqrt[3]{60} = \frac{\sqrt[3]{60 \times 5^3}}{5} = \frac{\sqrt[3]{7500}}{5} = \frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5}$$

a menos de  $\frac{1}{5}$ , por falta.

QUARTA. — Sabemos (observ., n.º 408) que todo numero que não é cubo acha-se comprehendido entre os cubos de dois numeros consecutivos e que, por conseguinte, a sua raiz cubica fica entre esses dois numeros consecutivos, que são as raizes dos cubos entre os quaes se acha o numero dado; é maior do que um e menor do que o outro.

O que não ha, porém, na extracção da raiz cubica, é um meio de reconhecer-se qual dos dois exprime o valor mais approximado da verdadeira raiz, isto é, não podemos dizer que raiz devemos preferir, si a por falta ou si a por excesso; assim, toma-se qualquer uma dellas, visto ser o erro em ambas, menor do que uma unidade.

Na extracção da raiz quadrada, porém, podemos dizer qual a raiz que deve-se preferir, comparando o resto da operação com a raiz achada (vid. observ. quarta, n.º 403).

## Exercicios

Extrair a raiz cubica dos seguintes numeros:

1) 2197	2) 10648	3) 175616	4) 7414875
3375	24389	262144	8869743
4096	35937	357911	9528128

Extrair a raiz cubica dos seguintes numeros, a menos de cada uma das unidades fraccionarias:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$

1) 2	2) 5	3) 8	4) 19	5) 43	6) 74
3	6	9	28	59	87
4	7	10	31	68	98

## RAIZ CUBICA DE NUMEROS FRACCIONARIOS

## 1.º — FRACÇÕES DECIMAES

411. Para extrair a raiz cubica de uma fracção decimal cujo numero de casas de dizima é multiplo de 3, extrae-se, a menos de uma unidade, a raiz cubica da fracção dada, feita a abstracção da virgula, e separa-se á direita della a terça parte das casas de dizima existentes na fracção dada.

Exemplo. — Extrair a raiz cubica de 0,079507.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{79.507} & 43 \\ \hline 64 & \\ \hline 155.07 & (3 \times 4^2) = (3 \times 16) = 48 \\ \hline 795.07 & 43^3 = 79507 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{0,079507} = 0,43 \text{ exactamente.}$$

Si o numero de casas de dizima da fracção não fôr multiplo de 3, faz-se que o seja, accrescentando-se á sua direita os zeros que para isso forem necessarios, e opera-se depois como precedentemente.

Exemplo. — Extrair a raiz cubica de 0,1843 (ou..... 0,184300).

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{184.300} & 56 \\ \hline 125 & \\ \hline 593.00 & (3 \times 5^2) = (3 \times 25) = 75, \\ \hline 175.616 & 56^3 = 175\ 616 \\ \hline ..8\ 684 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{0,184\ 300} = 0,56 \text{ a menos de um centesimo.}$$

## Exercícios

Extraír a raiz cubica das seguintes fracções:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1) 0,054 872<br>-0,117 649<br>0,438 976 | 2) 0,010 503 459<br>0,210 644 875<br>143,877 824 | 3) 40,036 787 461<br>263,005 101 143<br>1818,081 515 125 |
| 4) 2,4 603<br>40,7 074<br>29,5 432      | 5) 0,45 622<br>0,01 548<br>0,97 022              | 6) 89,62 145<br>136,59 071<br>0,68 111 125               |

## 2.º — FRACÇÕES ORDINARIAS

412. Para extrair-se a raiz cubica de uma fracção ordinaria cujos termos são cubos, extrae-se a raiz cubica separadamente ao numerador e ao denominador, e divide-se a primeira raiz pela segunda.

$$\text{Exemplo. — } \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$$

Si unicamente o denominador fôr cubo, extrae-se, a menos de uma unidade, a raiz cubica do numerador.

$$\text{Exemplo. } \sqrt[3]{\frac{143}{216}} = \frac{\sqrt[3]{143}}{6} = \frac{5}{6}, \text{ a menos de } \frac{1}{6} \text{ por falta.}$$

Os dois termos não sendo cubos, multiplicam-se ambos pelo quadrado do denominador e opera-se como precedentemente.

$$\text{Exemplo. — } \sqrt[3]{\frac{5}{9}} = \sqrt[3]{\frac{5 \times 9^2}{9^3}} = \frac{\sqrt[3]{405}}{9} = \frac{7}{9}, \text{ a menos}$$

de  $\frac{1}{9}$  por falta.

## Exercícios

Extraír a raiz cubica das seguintes fracções:

- |                    |                        |                     |                  |
|--------------------|------------------------|---------------------|------------------|
| 1) $\frac{27}{64}$ | 2) $\frac{1728}{2197}$ | 3) $\frac{49}{216}$ | 4) $\frac{2}{9}$ |
| $\frac{216}{343}$  | $\frac{2744}{3375}$    | $\frac{109}{729}$   | $\frac{5}{12}$   |
| $\frac{125}{729}$  | $\frac{6859}{50653}$   | $\frac{391}{512}$   | $\frac{7}{15}$   |

Verificar as seguintes igualdades:

$$1. \sqrt[3]{169} - \left( \frac{\sqrt{144}}{3} + \sqrt[3]{512} \right) = \frac{\sqrt{729}}{6} : 1,5$$

$$2. \frac{\frac{3}{4}}{0,75} + \frac{\sqrt{196}}{7} - \frac{15}{\sqrt{225}} = \sqrt[3]{1331} - \sqrt{(71+6+4)^2} : \sqrt[3]{729}$$

$$3. \left( \frac{5}{8} + 0,25 \right) \times \frac{8}{\sqrt[3]{343}} + \frac{16}{\sqrt{512}} = \frac{15}{2\sqrt{9}} + \sqrt{\frac{\frac{3}{4} + 0,5}{5}}$$

$$4. \frac{\sqrt{225}}{4} \times 0,75 + \frac{1}{4} = \sqrt[3]{216} - \sqrt[3]{\frac{216}{27}}$$

$$5. 2,5 - \frac{\sqrt{(4 \times 5)}}{6} + \sqrt[3]{\frac{27}{27}} = \frac{\sqrt[3]{512} (\sqrt[3]{4096} - \sqrt{140} - 19)}{\sqrt{144} - (2,25 + 1,75)}$$

$$6. \sqrt[4]{\frac{4}{0,25}} + 2 \left( 0,8 + \frac{1}{5} \right) = \sqrt{\frac{9}{16}} \left( \sqrt{\frac{0,49}{0,64}} + 0,125 \right) + \sqrt[3]{\frac{1}{16} + \sqrt{125}}$$

$$7. \left( \frac{3}{2^2} + \frac{7}{\sqrt{64}} - \frac{5}{\sqrt[3]{512}} \right) \frac{7(11^2 - 9)}{11\sqrt{121} - \sqrt[3]{729}} = \sqrt[3]{0,064} \left( \frac{\sqrt[3]{0,125}}{\sqrt[3]{0,25}} + \sqrt[3]{\frac{0,216}{0,027}} \left( + \sqrt{0,64} + \sqrt[3]{125} \right) \right)$$

$$8. \sqrt[3]{0,008} + \sqrt{\frac{0,29+0,07}{0,75-0,11}} + 7,05 = \sqrt{144} \sqrt{\left( \frac{8}{27} + \frac{1}{3} \right) - 2^2 + \frac{\sqrt{80-16}}{\sqrt[3]{8}}}$$

$$9. \left[ \sqrt{144} \left( \sqrt[3]{\frac{8}{27} + \frac{1}{3}} \right) + \sqrt[3]{64} \right] \frac{\sqrt{(72+9)}}{4\sqrt{16}} = \left[ \sqrt[3]{27(\sqrt{0,0121} + \sqrt[3]{0,81} + \sqrt[3]{0,729})} \right] \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt{4}} + \sqrt{0,81} + \sqrt{0,24^2}$$

$$10. \left[ \sqrt{16} \left( \sqrt[3]{\frac{0,002197}{\sqrt{0,81}} + \sqrt{0,81}} \right) + \sqrt{0,0144} \right] \sqrt[3]{\frac{125}{125} - \sqrt{121} - \frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\left[ \sqrt{4} \left( \frac{5}{\frac{8}{3}} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt{64}} \right) + 7 \right] + \frac{6,75}{\sqrt[3]{27}} \times \sqrt[3]{64} - \frac{0,5}{\frac{\sqrt{1}}{4}}}$$

## Problemas sobre os cubos e raizes cubicas

1. 4 vezes a raiz cubica de um numero vale 60. Qual é este numero? — R. 3375.

2.  $\frac{1}{4}$  do cubo de um numero vale 3456. Qual é este numero? — R. 24.

3. O producto de um numero pelos  $\frac{3}{4}$  do seu quadrado é igual a 1296. Qual é este numero? — R. 12.

4. A somma dos cubos de dois numeros é 23625, e um destes numeros é 20. Qual é o outro? — R. 25.

5. Qual é o numero cuja raiz cubica diminuida de 3 é igual a 24? — R. 19683.

6. A somma de dois numeros é 77, o cubo de sua differença é 19683. Quaes são estes numeros? — R. 52, 25.

7. Os  $\frac{5}{8}$  do cubo de um numero igualam a 8640. Achar este numero. — R. 24.

8. O menor de dois numeros é 25; o cubo de sua somma é 614125. Qual é o maior? — R. 60.

## APPLICAÇÕES GEOMETRICAS

### § I — Preliminares

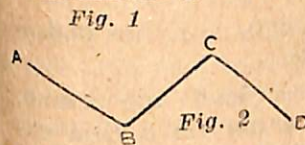
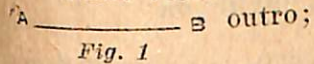
1. **Corpo** é tudo que occupa uma porção do espaço.
2. **Volume** de um corpo é o espaço occupado por este corpo.
3. **Superficie** de um corpo é a parte exterior deste corpo; é o que o separa do resto do espaço.  
As superficies são *planas, quebradas e curvas*.  
*Superficie plana* é uma superficie tal, que por qualquer dos seus pontos se pôde traçar uma linha recta em todas as direcções.  
*Superficie quebrada* é a que se compõe de superficies planas concorrendo duas a duas.  
*Superficie curva* é a que nem é plana nem composta de superficies planas.
4. **Linha** é o limite de uma superficie; ou é a intersecção de duas superficies.
5. **Ponto** é a extremidade de uma linha; ou, é o lugar em que duas linhas se cortam.  
O ponto de encontro chama-se *ponto de intersecção*.

### § II — Das linhas

#### Linha recta, quebrada, curva

6. **Quanto á fôrma**, a linha é *recta, quebrada ou curva*.

Linha recta é o mais curto caminho de um ponto a outro; como AB (Fig. 1).



Linha quebrada é toda linha composta de linhas rectas; como ABCD (Fig. 2).

Linha curva é a que nem é recta nem composta de linhas rectas; como AC (Fig. 3).

Fig. 3

#### Linhas perpendiculares, obliquas, parallelas

7. **Quanto ás suas posições relativas**, as linhas rectas são *perpendiculares, obliquas ou parallelas*.

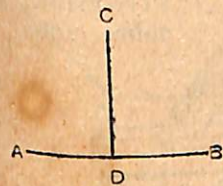


Fig. 4

Uma linha se diz *perpendicular* á outra, quando a encontra sem pender para nenhum lado; como CD (Fig. 4).

Chama-se *linha obliqua* a que encontra outra, pendendo mais para um dos lados. A linha CD é obliqua a AB (Fig. 5).

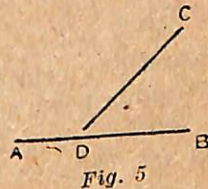


Fig. 5

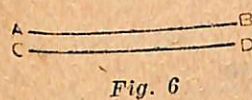


Fig. 6

Duas linhas chamam-se *parallelas* quando, traçadas no mesmo plano, não se encontram por mais que se prolonguem (Fig. 6).  
As duas linhas AB e CD são parallelas.



Fig. 7

Duas curvas são também *parallelas*, quando sempre ficam á igual distancia uma da outra (Fig. 7).



### Linha vertical, horizontal, inclinada

8. Quanto á sua direcção no espaço, as linhas podem ser *verticaes*, *horizontaes* ou *inclinadas*.

*Linha vertical* é a que segue a direcção de um prumo. O fio de prumo não é mais do que um fio a cuja extremidade está preso um pequeno bloco de chumbo (Fig. 8).



Fig. 8

Uma linha é *horizontal*, quando segue a direcção da superficie das aguas tranquillas. Para fazer-se uma construcção em uma posição horizontal, serve-se do nivel de pedreiro (Fig. 9).

O nivel de pedreiro é uma especie de triangulo de madeira, a cujo vertice está ligado um prumo.

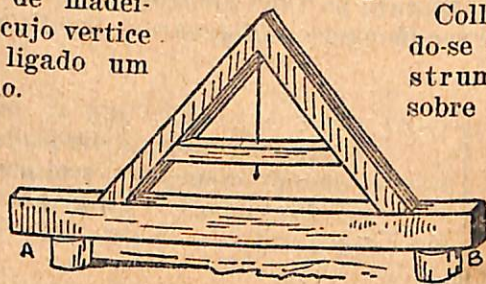


Fig. 9

collocan-do-se o instrumento sobre uma construcção, esta é horizontal si o prumo cair exactamente sobre uma pequena marca chamada *linha de fé*.

*Linha inclinada* ou *obliqua no espaço* é a que não é nem vertical nem horizontal.

### § III — Dos angulos

#### Angulo recto, agudo e obtuso

9. Angulo é a figura formada por duas linhas que se encontram; como ABC (Fig. 10).

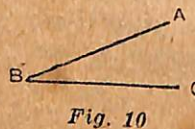


Fig. 10

10. As linhas que formam o angulo chamam-se *lados*; o ponto de encontro dos lados chamam-se *vertice do angulo*.

12. Designa-se um angulo pela letra do vertice. Assim, diz-se: o angulo B (Fig. 10).

Si o vertice for commum a dois ou mais angulos designa-se cada um destes por tres letras, collocando-se no meio a letra do vertice.

Assim, diz-se: o angulo ADC, o angulo CDB (Figs. 4 e 5).

12. Os angulos são: *rectos*, *agudos*, *obtusos*.

*Angulo recto* é um angulo formado por duas rectas entre si perpendiculares (Fig. 11).

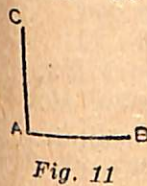


Fig. 11

*Angulo agudo* é um angulo menor do que um angulo recto. (Fig. 12).

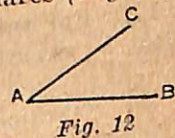


Fig. 12

*Angulo obtuso* é um angulo maior do que um angulo recto (Fig. 13)

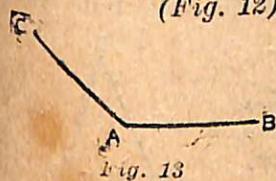


Fig. 13

### § IV — Dos triangulos

13. Triangulo é uma superficie plana limitada por tres linhas que se encontram duas a duas (Fig. 14). As tres linhas rectas que formam o triangulo chamam-se *lados do triangulo*.

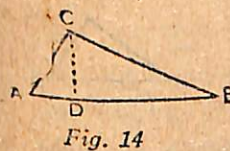


Fig. 14

Os tres angulos formados pela intersecção das tres linhas rectas são os tres *angulos do triangulo*, e os vertices destes tres angulos são os *vertices do triangulo*.

14. Designa-se um triangulo pelas tres letras collocadas nos tres vertices.

Assim, diz-se: o triangulo ABC.

15. *Base de um triangulo* é qualquer um dos seus lados.

*Altura de um triangulo* é a perpendicular baixada de um dos vertices do triangulo sobre o lado opposto (Fig. 14).

**OBSERVAÇÃO.** — A's vezes a perpendicular cae fóra do triangulo sobre o prolongamento da base (Fig. 15); esta perpendicular é ainda a altura do triangulo.



Fig. 15

16. A somma dos tres angulos de um triangulo é igual a dois angulos rectos.

### Differentes especies de triangulos

17. Em relação aos lados, o triangulo se denomina: *equilatero, isosceles e scaleno.*

18. *Triangulo equilatero* é um triangulo que tem os tres lados iguaes (Fig. 16).

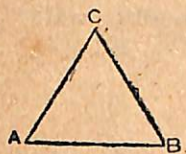


Fig. 16

19. *Triangulo isosceles* é um triangulo que tem dois lados iguaes (Fig. 17).

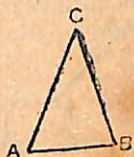


Fig. 17

No triangulo isosceles toma-se particularmente por base o lado que não é igual a um dos outros dois.

20. *Triangulo scaleno* é um triangulo que tem os tres lados desiguaes (Fig. 18).

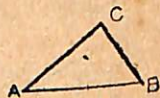


Fig. 18

21. Em relação aos angulos, o triangulo se denomina: *rectangulo, obtusangulo e acutangulo.*

### Do triangulo rectangulo

22. *Triangulo rectangulo* é um triangulo que tem um angulo recto (Fig. 19).  
O lado opposto ao angulo recto chama-se *hypotenusa*.

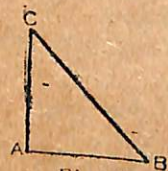


Fig. 19

23. Em um triangulo rectangulo, tomando-se para base um dos lados do angulo recto, o outro lado é a altura. — Si tomar-se a *hypotenusa* para base, a altura é a perpendicular baixada do vertice do angulo recto sobre a *hypotenusa*.

24. **Propriedade do triangulo rectangulo.** — O quadrado da *hypotenusa* de um triangulo rectangulo é igual á somma dos quadrados dos outros dois lados.

Por conseguinte:

1) A *hypotenusa* de um triangulo rectangulo é igual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos outros dois lados.

2) Qualquer lado do angulo recto de um triangulo rectangulo é igual á raiz quadrada da differença entre o quadrado da *hypotenusa* e o quadrado do outro lado.

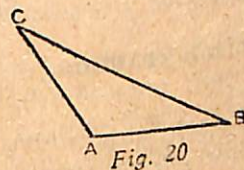


Fig. 20

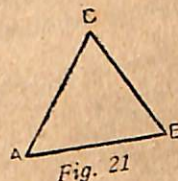


Fig. 21

### Triangulos acutangulo e obtusangulo

25. *Triangulo acutangulo* é um triangulo que tem os tres angulos agudos (Fig. 20).

26. *Triangulo obtusangulo* é um triangulo que tem um angulo obtuso (Fig. 21).

### § V — Dos quadrilateros

27. **Quadrilatero** é uma superficie plana limitada por quatro linhas rectas que se encontram duas a duas (Fig. 22).



Fig. 22

28. As linhas rectas que formam o quadrilatero chamam-se *lados do quadrilatero*.

Os angulos formados por dois lados consecutivos chamam-se *angulos do quadrilatero*. Os vertices destes angulos são os *vertices do quadrilatero*.

29. Designa-se um quadrilatero pelas quatro letras collocadas nos vertices.

30. Os principaes quadrilateros são: o *parallelogrammo*, o *rectangulo*, o *losango*, o *quadrado* e o *trapezio*.

### Do parallelogrammo

31. *Parallelogrammo* é um quadrilatero que tem os lados oppostos iguaes e parallelos dois a dois (Fig. 23).

32. *Base de um parallelogrammo* é qualquer um dos lados parallelos; ordinariamente escolhe-se o maior.

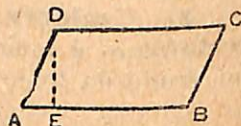


Fig. 23

33. *Propriedade do parallelogrammo*. — As diagonaes de um parallelogrammo *cortam-se mutuamente em partes iguaes*. (Fig. 24).



Fig. 24

### Do rectangulo

34. *Rectangulo* é um parallelogrammo cujos angulos são rectos.

35. *Base de um rectangulo* é qualquer um dos lados.

*Altura dum rectangulo* é um dos dois lados perpendiculares áquelle que se escolheu para base.



Fig. 25

36. *Propriedades do rectangulo*. — O rectangulo é um parallelogrammo; gosa, portanto, da mesma propriedade deste. Logo, as suas diagonaes *cortam-se mutuamente em partes iguaes*; além disto, são iguaes (Fig. 26).



Fig. 26

### Do losango



Fig. 27

37. *Losango* é um parallelogrammo cujos lados são todos iguaes (Fig. 27).

38. *Propriedades do losango*. — O losango é um parallelogrammo; gosa, pois, das propriedades deste. O que o distingue do parallelogrammo é que as suas diagonaes *cortam-se em angulo ou orthogonalmente* (Fig. 28).



Fig. 28

### Do quadrado

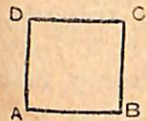


Fig. 29

39. *Quadrado* é um parallelogrammo que tem os angulos rectos e os lados iguaes (Fig. 29).

40. No quadrado como são iguaes os lados, a *base* e a *altura* são iguaes.

41. *Propriedades do quadrado*. — Segundo a definição, o quadrado gosa das propriedades do *parallelogrammo*, porque os seus lados são parallelos; das do *rectangulo*, porque os seus angulos são rectos; das do *losango*, porque os seus lados são iguaes.

Por conseguinte:

1.º As diagonaes de um quadrado *cortam-se mutuamente em partes iguaes*.

2.º São iguaes.

3.º *Cortam-se em angulos rectos*.

4.º *Decompõem a figura em quatro triangulos rectangulos, isosceles, iguaes entre si*.



Fig. 30

### Do trapezio

42. *Trapezio* é um quadrilatero que tem dois lados parallelos e desiguaes (Fig. 31).

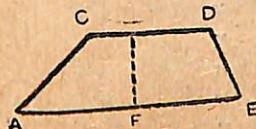


Fig. 31

43. *Bases de um trapezio* são os dois lados parallelos.

Altura de um trapézio é a distancia das duas bases; e, portanto, a perpendicular commum.

44. O trapézio póde ser *isosceles* ou *rectangulo*.

*Trapezio isosceles* ou *symetrico* é aquelle em que são iguaes os dois lados não parallelos (Fig. 32).

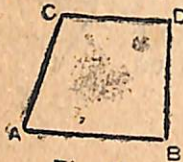


Fig. 33

*Trapezio rectangulo* é aquelle em que um dos lados não parallelos é perpendicular ás bases (Fig. 33).

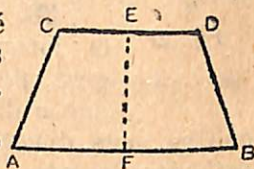


Fig. 32

45. **Propriedades do trapézio.** — Em um trapézio, a recta que une os meios dos lados não parallelos é: 1.º) *parallelá ás bases*; 2.º) *igualmente distante das bases*; 3.º) *igual á semi-somma das bases*.

## § VI — Dos polygonos

46. **Polygono** é toda superficie plana limitada por linhas rectas que se encontram duas a duas (Fig. 34).



Fig. 34

47. O mais simples dos polygonos é o *triangulo*; depois deste, o *quadrilatero*

48. Em geral, dá-se o nome de *polygono* a uma figura que tem *mais de quatro lados*.

Em relação ao numero dos lados, o *polygono* denomina-se:

Pentagono	quando tem	5	lados
Hexagono	" "	6	"
Heptagono	" "	7	"
Octogono	" "	8	"
Enneagono	" "	9	"
Decagono	" "	10	"
Endecagono	" "	11	"
Dodecagono	" "	12	"
Pentadecagono	" "	15	"
Icosagno	" "	20	"

São estes os unicos polygonos que têm *nomes particulares*; os outros designam-se pelo *numero de lados*.

49. As rectas que formam o *polygono* chamam-se *lados do polygono*.

A *somma dos lados* chama-se *contorno* ou *perimetro do polygono*.

*Angulos do polygono* são os angulos formados por dois lados consecutivos.

*Vertices do polygono* são os vertices dos seus angulos.

Ha tantos vertices e tantos angulos quantos forem os lados.

Toda recta que, em um *polygono*, une dois vertices não consecutivos, chama-se *diagonal do polygono*.

50. Designa-se um *polygono* pelas letras collocadas nos seus vertices.

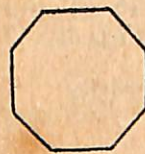


Fig. 35

51. Em um *polygono* póde haver angulos *salientes* ou *reentrantes*.

52. Os *polygonos* cujos angulos são todos *salientes* chamam-se *convexos* (Fig. 35).

53. Os *polygonos* em que ha um ou mais angulos *reentrantes*, chamam-se *concavos* (Fig. 36).

54. Os *principaes caracteres dos polygonos convexos* são:

1.º) Uma recta traçada no seu plano não póde encontrar o *perimetro* em mais de dois pontos.

2.º) Prolongado indefinidamente um lado, todo o *polygono* fica da mesma parte desse lado que não o corta.

3.º) Todas as *diagonaes* são interiores.

55. Um *polygono* póde dividir-se em tantos *triangulos* quantos são os *lados* menos dois.

Tomando-se um ponto no interior dum *polygono* e ligando-o a todos os vertices, o *polygono* ficará dividido em tantos *triangulos* quantos forem os *lados*.

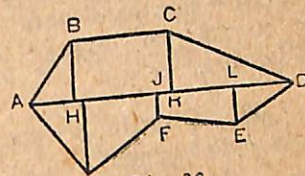


Fig. 36

56. Em relação aos angulos e lados, os polygonoõ são regulares ou irregulares.

57. Polygonos regulares são os que tem os lados e os angulos iguaes (Fig. 37).

O triangulo equilatero é um polygono regular de tres lados; o quadrado é um polygono regular de quatro lados.

Os polygonos regulares se podem decom-

por em tantos triangulos isosceles quantos forem os lados (Fig. 38).

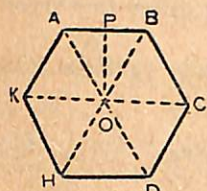


Fig. 38

Cada lado do polygono serve de base a cada um dos triangulos, cujos vertice oppostos se acham no centro do polygono.



Fig. 37

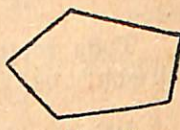


Fig. 39

58. Polygonos irregulares são os que têm lados e angulos desiguaes (Fig. 39).

## § VII — Da circumferencia e do circulo

### Linhas no circulo

59. Circumferencia é uma linha curva, plana, fechada, cujos pontos distam todos igualmente de um ponto interior chamado centro (Fig. 40).

60. Circulo é uma superficie limitada pela circumferencia.

61. Raio de um circulo é a linha recta que vae do centro á circumferencia (Fig. 41).

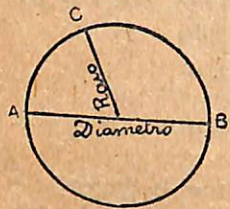


Fig. 41

62. Diametro de um circulo é a linha recta que passando pelo centro toca a circumferencia em dois pontos.

O diametro é o dobro do raio: divide a circumferencia e o circulo em duas partes iguaes chamadas semi-circumferencias e semi-circulos (Fig. 41).

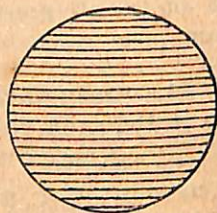


Fig. 40

63. Arco de um circulo é uma parte qualquer da circumferencia.

64. Corda é toda recta que une as extremidades de um arco.

65. Tangente ao circulo é toda recta que toca a circumferencia em um unico ponto (Fig. 42). O ponto em que a tangente toca a circumferencia chama-se ponto de contacto ou de tangencia.

A tangente a um circulo é perpendicular á extremidade do raio.

66. Secante de um circulo é toda recta que corta a circumferencia em dois pontos (Fig. 42).

Uma secante não é mais do que uma corda prolongada nos dois sentidos.

67. Sector é uma parte da superficie do circulo, comprehendida entre um arco e os dois raios tirados para as suas extremidades (Fig. 43).

68. O arco que corresponde ás extremidades destes raios chamam-se base do sector.

69. Segmento é uma parte da superficie do circulo, comprehendida entre um arco e a respectiva corda (Fig. 43).

70. O segmento é a differença entre um sector que tem por base o arco do segmento e um triangulo que tem por base a corda do mesmo segmento e cujo vertice está no centro do circulo.

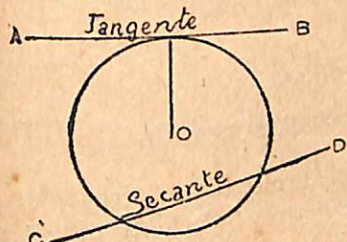


Fig. 42

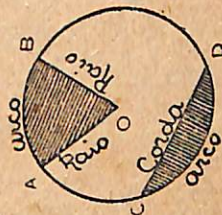


Fig. 43

71. *Circunferencias concentricas* são as que têm o mesmo centro e raios diferentes (Fig. 44).

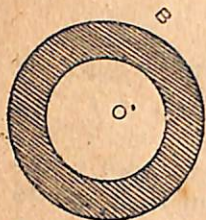


Fig. 45

72. *Corôa* é uma superfície compreendida entre duas circunferencias concentricas (Fig. 45).

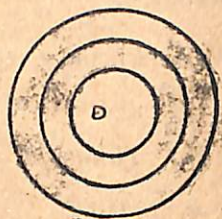


Fig. 44

### § VII — Medida da circumferencia

73. Não se podendo medir directamente as circumferencias, tratou-se de procurar o meio geral de determinar o seu comprimento.

Para isto tomou-se o diametro que, como linha recta, facil é medir-se. E partindo-se do principio que *duas circumferencias são proporcionaes aos seus raios* ou *aos seus diametros*, concluiu-se dahi que o diametro daria a circumferencia, si fosse conhecida a *relação constante* entre estas duas linhas.

Archimedes achou que esta relação é  $\frac{22}{7}$ , isto é, que dividindo-se o diametro em 7 partes iguaes, a circumferencia conterá 22 dessas partes.

Tomando-se o *diametro* por *unidade*, procurou-se quantas vezes a circumferencia conteria o diametro e achou-se que ella o continha tres vezes mais uma fracção: **3,1416**, valor este que se representa pela letra grega  $\pi$  (que se lê: pi).

74. Para achar-se o comprimento de uma circumferencia, sendo dado o diametro, multiplica-se este por  $\pi$ ; si for dado o raio, duplica-se este e o resultado multiplica-se por  $\pi$ .

Chamando **D** o diametro e designando por **C** o comprimento de uma circumferencia, temos:

$$C = D \pi.$$

Substituindo **D** por **2 R**, porque o diametro vale dois raios, resulta a

$$\text{Formula: } C = 2 R \pi = 2 \pi R.$$

Aplicações

1) Qual é o comprimento de uma circumferencia que tem  $1^m,50$  de diametro?

$$C = 2 \pi R = 1^m,50 \times 3,1416 = 4^m,7124.$$

2) Qual é o comprimento de uma circumferencia que tem  $0^m,75$  de raio?

$$C = 2 \pi R = 2 \times 0^m,75 \times 3,1416 = 4^m,7124.$$

OBSERVAÇÃO. — Dividindo-se por  $\pi$  ambos os membros da igualdade

$$C = 2 \pi R, \text{ tem-se:}$$

$$2 R \text{ ou } D = \frac{C}{\pi}.$$

Si dividirmos por  $2 \pi$  os dois membros da mesma igualdade, resulta:

$$R = \frac{C}{2 \pi}.$$

### § IX — Medida dos angulos

75. *Medir uma grandeza* é procurar a sua relação com uma unidade da mesma especie.

76. *Medir*, pois, *um angulo* é procurar a sua relação com a unidade de angulo.

77. *Medir um arco* é procurar a sua relação com a unidade de arco.

78. No mesmo circulo ou em circulos iguaes, a relação entre dois angulos centraes é a mesma que a dos arcos interceptados por seus lados.

79. *Angulo central* é todo angulo cujo vertice está no centro do circulo.

80. Não basta que duas grandezas sejam proporcionaes para que a medida de uma seja a da outra; é necessario escolher para unidade de uma o valor que corresponde á unidade da outra.

Assim, deve-se tomar por *unidade de arco*, o arco que corresponde á unidade de angulo.

81. O *angulo recto* é a principal unidade de angulos. E' preciso, pois, escolher para unidade de arcos o arco comprehendido entre os lados do angulo recto que tem o vertice no centro; isto é, deve-se escolher o *quadrante*.

82. Para facilitar essa comparação, divide-se a circumferencia em 360 partes iguaes chamadas *graus* ( $360^\circ$ ); cada grau em 60 *minutos* ( $60'$ ); cada minuto em 60 *segundos* ( $60''$ ).

83. Traçando-se em uma circumferencia dois diâmetros entre si perpendiculares, formam-se *quatro angulos* que são *angulos rectos*, e a circumferencia fica dividida em *quatro partes iguaes que são quadrantes*.

84. Um *angulo central* tem por medida o arco comprehendido entre seus lados.

Assim, cada quadrante valendo  $90^\circ$ , diz-se que o *angulo recto* vale  $90^\circ$ .

Dividindo-se o angulo recto em duas partes iguaes, obtem-se  $45^\circ$  para valor de cada um dos dois angulos. Si dividirmos o angulo recto em tres partes iguaes, cada um dos tres angulos tem por medida a terça parte de  $90^\circ$  ou  $30^\circ$ .

85. O *transferidor* é o mais simples dos instrumentos graduados, destinados para medir os angulos. E' um semi-circulo de chifre ou de latão, sobre cujo contorno ou *limbo* estão marcados os graus 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... 180. (Fig. 46).

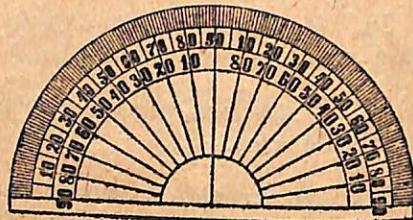


Fig. 46

86. Seja para medir o *angulo ABC* (Fig. 47).

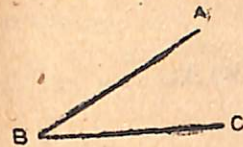


Fig. 47

Colloca-se o transferidor sobre o angulo dado, de modo que o vertice B do angulo coincida com o centro do transferidor e o lado BC do angulo coincida com o diametro do transferidor. Feito isto, vê-se a que divisão do transferidor corresponde o outro lado AB. O numero de graus marcados será a medida do angulo.

87. Conclue-se daqui, que a *grandeza de um angulo não depende do comprimento dos seus lados e sim do seu afastamento*.

## § X — Medida dos polygonos

88. Medir uma *superficie* é procurar a relação desta *superficie com a unidade de superficie* (metro quadrado, decimetro quadrado; ou hectaro, etc.).

89. A *relação entre a extensão de uma superficie e a unidade de superficie chama-se area*.

OBSERVAÇÃO PRIMEIRA. — Não são propriamente as *superficies* que se medem; são as *linhas* de que ellas dependem, isto é, medem-se as bases, as alturas, os perimetros, etc.

OBSERVAÇÃO SEGUNDA. — Não se confundam *tambem figuras iguaes com figuras equivalentes*. *Figuras iguaes* são as que sendo applicadas uma sobre a outra, coincidem em todos os seus pontos; ou por outra, são as que têm a *mesma forma e a mesma grandeza*. *Taes são dois triangulos* cujos lados são respectivamente iguaes; *dois circulos* cujos raios são iguaes; etc. *Figuras equivalentes* são as que têm a *mesma area* sem que tenham a *mesma forma*. Assim, um *triangulo* pôde ser *equivalente a um rectangulo*; um *circulo* pôde ser *equivalente a um quadrado*; etc.

### Area do rectangulo

90. A *area de um rectangulo* é igual ao producto da base pela altura.

Designando-se por **B** a base e por **A** a altura de um rectangulo, tem-se a

$$\text{Formula: } Ar. \text{ rectang.} = B \times A.$$

Aplicação

Qual é a area do soalho de um quarto que tem 4<sup>m</sup>,20 de comprimento sobre 3<sup>m</sup>,50 de largura?

$$Ar. \text{ rectang.} = A \times B = 4^m,20 \times 3^m,50 = 14^m2,70.$$

### Area do quadrado

91. O quadrado sendo um rectangulo, a sua area obtem-se como a de um rectangulo.

Como, porém, no quadrado a base e a altura são iguaes, conclue-se que:

Para obter-se a area de um quadrado basta elevar-se ao quadrado ou á 2.<sup>a</sup> potencia um dos lados.

### Area do parallelogrammo

92. Um parallelogrammo póde sempre se transformar em um rectangulo da mesma base e da mesma altura.

Assim, o parallelogrammo *ABCD* (Fig. 48) é equivalente ao rectangulo *EDCP*; porque, si tem de mais a parte *ACP*, tem de menos a parte *BDE*, igual a *ACP*.

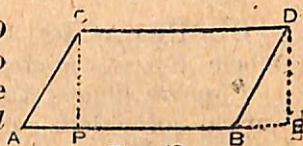


Fig. 48

93. Sendo qualquer parallelogrammo equivalente a um rectangulo da mesma base e da mesma altura, conclue-se que:

A area de um parallelogrammo é igual ao producto da base pela altura.

### Area do triangulo

94. O triangulo é a metade dum parallelogrammo da mesma base e da mesma altura.

Logo,

95. Para obter-se a area de um triangulo toma-se a metade do producto da base pela altura.

Designando-se por **B** a base de um triangulo e por **A** a sua altura, obtem-se a area por meio da

$$\text{Formula: } Ar. \text{ triang.} = \frac{B \times A}{2}.$$

Aplicação

Achar a superficie de um campo triangular de 94<sup>m</sup>,50 de base e 31<sup>m</sup>,50 de altura.

$$Ar. \text{ triang.} = \frac{B \times A}{2} = \frac{94^m,50 \times 31^m,50}{2} = 1488^m2,2750.$$

OBSERVAÇÃO. — Multiplicando-se por 2 ambos os membros da igualdade acima

$$2 \times Ar. \text{ triang.} = \frac{B \times A}{2} = \text{tem-se:}$$

$$2 \times ar. \text{ triang.} = B \times A;$$

donde:

$$B = \frac{2 \times ar. \text{ triang.}}{A}$$

$$A = \frac{2 \times ar. \text{ triang.}}{B}$$

96. Para obter-se a area de um triangulo, conhecendo-se os tres lados, sommam-se estes e toma-se a metade da somma. Desta metade subtrae-se successivamente cada um dos lados; com os tres restos e a metade da somma forma-se um producto do qual se extrae a raiz quadrada. Designando-se por **p** o semi-perimetro (isto é, a semi-somma dos lados) e por **a**, **b**, **c** os lados, calcula-se a area do triangulo por meio da



$$\text{Formula: } Ar. \text{ triang.} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Aplicação

Calcular a area de um tirangulo cujos lados são: 72, 64, 38 metros.

$$\begin{aligned} Ar. \text{ triang.} &= \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{87(87-72)(87-64)(87-38)} = \\ &= \sqrt{87 \times 15 \times 23 \times 49} = \sqrt{1470785} = 1212^m2. \end{aligned}$$

97. Para obter-se a area de um triangulo equilatero, eleva-se o lado ao quadrado; divide-se o resultado por 4 e multiplica-se o quociente pela raiz quadrada de 3 ( $\sqrt{3} = 1,732$ ).

Designando-se por  $l$  o lado do triangulo, teremos a

$$\text{Formula: } Ar. \text{ triang. equilat.} = \frac{l^2}{4} \sqrt{3}.$$

Aplicação

Calcular a area de um triangulo equilatero do qual cada lado tem 24 metros de comprimento.

$$\begin{aligned} Ar. \text{ triang. equilat.} &= \frac{l^2}{4} \sqrt{3} = \frac{24 \times 24}{4} \times 1,732 = \\ &= 144 \times 1,732 = 249^m2,4080. \end{aligned}$$

### Area do losango

98. O losango sendo um parallelogrammo, a sua area obtem-se como se obtem a area de um parallelogrammo.

99. Para obter-se a area de um losango, sendo dadas as diagonaes, toma-se a metade do producto das diagonaes. Designando-se por  $D$  a diagonal maior e por  $d$  a diagonal menor, tem-se a

$$\text{Formula: } Ar. \text{ los.} = \frac{D \times d}{2}.$$

Aplicação

Achar a area de um losango cujas diagonaes são  $3^m,60$  uma,  $1^m,74$  a outra.

$$Ar. \text{ los.} = \frac{D \times d}{2} = \frac{3^m,60 \times 1^m,74}{2} = 3^m2,1320.$$

### Area do trapezio



Fig. 49

100. Um trapezio pôde-se transformar em um rectangulo da mesma altura e cuja base é igual á semi-somma dos dois lados parallellos do trapezio (Fig. 49).

101. Para obter-se a area de um trapezio, multiplica-se a semi-somma das bases pela altura.

Designando-se por  $B$  a base maior, por  $b$  a base menor e por  $A$  a altura de um trapezio, para obter-se a sua area, tem-se a

$$\text{Formula: } Ar. \text{ trap.} = \frac{B + b}{2} \times A.$$

Aplicação

Calcular a area de um trapezio, cuja base maior é de 600 metros, a menor de 400 metros e a altura de 1100 metros.

$$\begin{aligned} Ar. \text{ trap.} &= \frac{B + b}{2} \times A = \frac{600 + 400}{2} \times 1100 = \\ &= \frac{1000}{2} \times 1100 = 500 \times 1100 = 550000^m2. \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO. — Tambem se obtem a area de um trapezio, multiplicando-se a altura pela parallela equidistante das duas bases (Vid. n.º 45).

## Area do polygono

102. Para obter-se a area de um polygono qualquer, traça-se uma recta chamada diretriz (linha que une dois vertices oppostos), e sobre ella baixando-se perpendiculares do vertice de cada angulo, decompõe-se o polygono em triangulos e trapezios, cujas areas (avaliadas pelos processos já indicados) sendo sommadas, dão a area do polygono (Fig. 50).

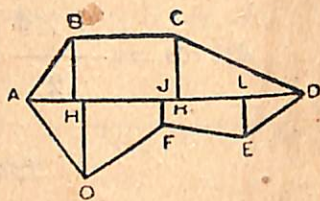


Fig. 50

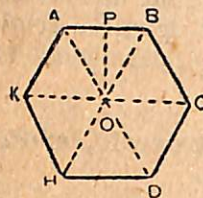


Fig. 51

OBSERVAÇÃO. — O polygono sendo regular, une-se o centro a todos os vertices, e ficará o polygono dividido em tantos triangulos isosceles iguaes quantos forem os lados.

103. Para obter-se a area de um polygono regular, multiplica-se a metade do perimetro pelo apothema.

Chama-se *apothema* a recta que une o centro do polygono ao meio de um dos seus lados. Na Fig. 51, a recta O P é o apothema.

## Area do circulo

104. Si formos successivamente duplicando o numero de lados de um polygono regular, estes lados se irão tornando cada vez menores, e haverá occasião em que as linhas que compõem o perimetro serão *pontos*; o polygono terá um numero infinito de lados e tornar-se-á um circulo.

Deduzir-se-á, pois, a *area do circulo* da do polygono, visto que o semi-perimetro tornou-se semi-circumferencia e o apothema ficou sendo raio. Dahi, a

Formula:  $Ar. \text{ circul.} = \frac{C}{2} \times R$  que, traduzida, quer dizer:

105. A area de um circulo é igual á metade da circumferencia multiplicada pelo raio.

## Aplicação

Calcular a area de um circulo cuja circumferencia é de 4<sup>m</sup>,7124.

Para a applicação da formula acima, é necessario determinar-se o raio, o que se consegue pela formula

$$R = \frac{C}{2\pi}$$

$$\text{Assim, } R = \frac{4^m,7124}{6,2832} = 0^m,75.$$

$$Ar. \text{ circul.} = \frac{C}{2} \times R = \frac{4^m,7124}{2} \times 0^m,75 = 1^m,7671.$$

OBSERVAÇÃO. — Tambem se obtem a area de um circulo, multiplicando-se o quadrado do raio por  $\pi$ .

Formula:  $Ar. \text{ circul.} = \pi R^2$ .

## Aplicação

Calcular a area de um circulo de 2 metros de raio.

$$Ar. \text{ circul.} = \pi R^2 = 3,1416 \times 4 = 12^m,5664.$$

## Area do sector

100. Notando-se que o sector está para o circulo como o seu arco está para a circumferencia, tem-se

$$\text{Sect.} : \pi R^2 :: \text{arc.} : \text{circumf.}$$

donde, a

$$\text{Formula: } \text{Sect.} = \frac{\pi R^2 \times \text{arc.}}{\text{circumf.}} = \pi R^2 \times \frac{\text{arc.}}{\text{circumf.}}$$

que, traduzido, quer dizer:

107. A area de um sector é igual á area do circulo multiplicada pela relação entre o arco e a circumferencia.

## Aplicação

Calcular a area de um sector cujo arco tem  $20^\circ$ , em um circulo de 4 metros de raio.

$$\begin{aligned} \text{Ar. sect.} &= \pi R^2 \times \frac{\text{arc}}{\text{circumf.}} = 3,1416 \times 16 \times \frac{20}{360} = \\ &= \frac{3,1416 \times 16 \times 20}{360} = 2^{\text{m}2},7925. \end{aligned}$$

## Area do segmento

108. O segmento sendo a differença entre um sector (que tem por base o arco do segmento) e um triangulo do qual um dos lados é a corda do mesmo segmento, conclue-se dahi que

109. Para obter-se a area de um segmento, subtrae-se da area do sector a area do triangulo.

## Aplicação

Qual é a area do segmento que corresponde ao arco de  $90^\circ$  no circulo cujo raio é de 1 metro?

O sector cuja base é um quadrante representa a quarta parte do circulo; e valendo 3,1416 a area do circulo cujo raio é 1

$$\text{o sector valerá } \frac{3,1416}{4} = 0^{\text{m}2},7854.$$

O triangulo COB sendo rectangulo em O, a sua area

$$\text{será } \frac{\text{OB} \times \text{OC}}{2};$$

sendo, porém, OB = OC = 1 tem-se

$$\frac{\text{OB} \times \text{OC}}{2} = \frac{1}{2} = 0^{\text{m}2},50.$$

Logo, a area do segmento é  
 $0^{\text{m}2},7854 - 0^{\text{m}2},50 = 0^{\text{m}2},2854.$

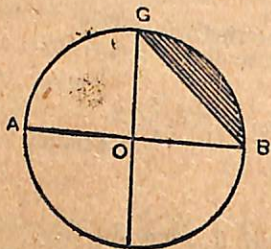


Fig. 51

## Area da corôa

110. Para obter-se a area de uma corôa, multiplique-se por  $\pi$  a differença entre os quadrados dos raios. Sejam R o raio maior e r o menor; ter-se-á a

$$\text{Formula: Ar. cor.} = \pi (R^2 - r^2).$$

## Aplicação

Um proprietario tem em seu jardim uma bacia circular rodeada de relva, formando uma corôa que tem  $8^{\text{m}},40$  de largura. Tendo esta bacia  $15^{\text{m}},80$  de diametro, qual será a area da corôa da relva?

O diametro da bacia sendo de  $15^{\text{m}},80$ , o raio será  $7^{\text{m}},90$ . A este raio juntando-se a largura da corôa, tem-se  $7^{\text{m}},90 + 8^{\text{m}},40 = 16^{\text{m}},30$ , que será o raio maior.

$$\begin{aligned} \text{Ar. cor.} &= \pi (R^2 - r^2) = 3,1416 (16^{\text{m}},30^2 - 7^{\text{m}},90^2) = \\ &= 3,1416 (265^{\text{m}2},69 - 62^{\text{m}2},41) = 3,1416 \times 203^{\text{m}2},28 = \\ &= 638^{\text{m}2},62. \end{aligned}$$

## Exercicios sobre as medidas de superficie

1. Achar a area de um rectangulo cuja base é de  $47^{\text{m}}$  e cuja altura é de  $16^{\text{m}}$ . — R.  $752^{\text{m}2}$ .
2. Qual é a area de um parallelogrammo de  $18^{\text{m}}$  de comprimento sobre  $9^{\text{m}}$  de largura? — R.  $162^{\text{m}2}$ .
3. Qual é a area de um quadrado que tem  $68^{\text{m}},80$  de perimetro? — R.  $295^{\text{m}2},84$ .
4. Qual é a area de um rectangulo de  $0^{\text{m}},8$  de base e  $0^{\text{m}},75$  de altura? — R.  $0^{\text{m}2},60$ .
5. Um quarto de fôrma rectangular tem  $17^{\text{m}}$  de comprimento sobre  $8^{\text{m}},50$  de largura; qual é a area? — R.  $144^{\text{m}2},50$ .
6. Dizer a area de uma porta que tem 2 metros de altura e  $0^{\text{m}},90$  de largura. — R.  $1^{\text{m}2},80$ .
7. Um terreno perfeitamente quadrado tem  $13^{\text{m}}$  de lado; qual é a sua area? — R.  $169^{\text{m}2}$ .
8. Qual é o valor de um terreno de fôrma rectangular de  $5^{\text{m}},6$  de comprimento e  $3^{\text{m}},5$  de largura, a  $10\$000$  o metro quadrado? — R.  $196\$000$ .
9. Dizer a area de um triangulo de  $17^{\text{m}},20$  de base sobre  $15^{\text{m}},40$  de altura. — R.  $132^{\text{m}2},44$ .
10. Dizer a area de um triangulo de  $0^{\text{m}},75$  de base sobre  $0^{\text{m}},45$  de altura. — R.  $0^{\text{m}2},168750$ .
11. Qual é a base de um triangulo que tem  $5^{\text{m}},9$  de altura e  $41^{\text{m}2},89$  de area? — R.  $14^{\text{m}},20$ .

12. Os tres lados de um triangulo são:  $7^m$ ,  $11^m$  e  $12^m$ ; qual é a sua area? — R.  $37^m,9473$ .
13. Qual é a area de um triangulo cujos tres lados são:  $8^m,25$ ;  $15^m,2$  e  $13^m$ ? — R.  $53^m,6038$ .
14. Os tres lados de um triangulo são:  $15^m,4$ ;  $8^m,12$  e  $19^m$ ; achar a sua area? — R.  $60^m,9250$ .
15. Qual é a area de um triangulo equilatero que tem  $36^m$  de perimetro? — R.  $62^m,35$ .
16. Os dois lados do angulo recto de um triangulo rectangulo são  $15^m$  e  $8^m,45$ ; qual é o comprimento da hypotenusa? — R.  $17^m,21$ .
17. Por meio de uma escada de  $11^m$  de comprimento, quer-se chegar a uma janella situada a  $8^m,10$  do sólo; que desvio se deve dar ao pé da escada? — R.  $7^m,44$ .
18. Achar a altura de um triangulo de  $5^m,4$  de base e igual em area a um quadrado de  $10^m,8$  de lado? — R.  $43^m,20$ .
19. A area de um triangulo é de  $19^m,20$  e a base é de  $8^m$ ; achar a altura. — R.  $4^m,80$ .
20. Um triangulo cuja area é de  $42^m,35$  tem uma altura de  $3^m,5$ ; calcular o comprimento da base. — R.  $24^m,20$ .
21. Um trapezio e um triangulo tem areas iguaes. Os lados paralelos do trapezio são  $3^m,86$  e  $2^m,44$ . O triangulo tem  $3^m,15$  de base e  $2^m,56$  de altura. Qual é a altura do trapezio? — R.  $1^m,28$ .
22. Os dois lados do telhado de uma casa têm cada um  $8^m,15$  de comprimento sobre  $4^m,4$  de altura; quanto se deve pagar ao telhador á razão de  $1\$000$  por metro quadrado? — R.  $71\$720$ .
23. Mandaram cair as paredes internas de um quarto que tinha  $6^m,40$  de comprimento sobre  $5^m$  de largura á razão de  $100$  rs. por metro quadrado, tendo as paredes  $3$  metros de altura; quanto se deve pagar por este serviço? — R.  $6\$840$ .
24. Os dois lados paralelos de um trapezio são  $17^m$  e  $11^m,60$ ; a altura é de  $5^m$ ; qual é a sua area? — R.  $71^m,50$ .
25. Na area de uma porta com  $2^m,10$  de altura e  $0^m,92$  de largura, acham-se dois losangos cada um com  $0^m,35$  de base sobre  $0,25$  de altura. Estes dois losangos devem ser pintados á razão de  $2\$000$  o metro quadrado, e o resto da porta, de um só lado, á razão de  $700$  rs. Quanto se deve pagar por todo o trabalho? — R.  $1\$580$ .
26. O telhado de uma casa compõe-se de  $2$  trapezios e de  $2$  triangulos, todos com a altura de  $5^m$ . A base dos triangulos é de  $6^m,65$ ; os lados paralelos dos trapezios têm, um  $10^m$  e o outro  $8^m,50$ . Quanto se deve pagar ao telhador á razão de  $1\$300$  o metro quadrado? — R.  $163\$475$ .
27. Pede-se a base de um rectangulo de  $4^m$  de altura e de  $9^m,60$  de area. — R.  $2^m,40$ .
28. Achar a altura de um rectangulo de  $17^m,5$  de base e  $84^m,70$  de area. — R.  $4^m,84$ .
29. Os dois lados paralelos de um trapezio são  $18^m,1$  e  $17^m,6$ ; a area é de  $133^m,5180$ ; qual é a altura? — R.  $7^m,48$ .

30. Qual é a area (em aros) de um parque com  $460^m$  de comprimento sobre  $250^m$  de largura? — R.  $1150^a$ .
31. Calcular a area de um rectangulo cuja base é de  $12^m$  e cuja diagonal é de  $15^m$ . — R.  $108^m,2$ .
32. Achar a area de um losango do qual uma diagonal é de  $7^m,15$  e a outra de  $4^m,90$ . — R.  $17^m,5175$ .
33. Achar a area de um losango do qual cada lado tem  $2^m$  de comprimento, e uma diagonal  $3^m,60$ . — R.  $3^m,1356$ .
34. A diagonal de um quadrado é de  $15^m,40$ ; qual é (em aros) a sua area? — R.  $1^a,1858$ .
35. Qual é o lado de um quadrado cuja area é de  $295^m,84$ ? — R.  $17^m,20$ .
36. Achar o lado de um quadrado equivalente a dois outros cujos lados são  $3^m$  e  $4^m$ ? — R.  $5^m$ .
37. Decompoz-se um polygono em dois triangulos: o  $1^o$  com  $25^m$  de base sobre  $17^m,40$  de altura; o  $2^o$ , com a mesma base que o  $1^o$ , tem  $9^m$  de altura; qual é a area do polygono? — R.  $330^m,2$ .
38. A area de um terreno irregular pôde-se decompor em  $2$  trapezios tendo, o  $1^o$   $7^m$  e  $4^m,80$  para lados paralelos e  $5^m,10$  para altura; o  $2^o$   $11^m,60$  e  $19^m$  para lados paralelos e  $4^m$  e  $11^m,25$ ; e em tres triangulos tendo para alturas:  $5^m,10$ ;  $4^m$  e  $11^m,25$ ; e para bases:  $4^m,80$ ;  $5^m,90$  e  $11^m,60$ . Qual é a area deste terreno? — R.  $348^m,88$ .
39. O diametro de um circulo é de  $1^m,45$ ; qual é o raio? — R.  $0^m,725$ .
40. O diametro de um circulo é de  $1^m,45$ ; qual é o comprimento da circumferencia? — R.  $4^m,5553$ .
41. O diametro de um circulo é de  $0^m,145$ ; qual é o raio? — R.  $0^m,0725$ .
42. O diametro de um circulo é de  $0^m,145$ ; qual é a circumferencia? — R.  $0^m,45558$ .
43. A circumferencia de um circulo é de  $15^m,708$ ; qual é o diametro? — R.  $5^m$ .
44. A circumferencia de um circulo é de  $15^m,708$ ; qual é o raio? — R.  $2^m,5$ .
45. A circumferencia de um circulo é de  $22^m,46244$ ; qual é o diametro? — R.  $7^m,15$ .
46. A circumferencia de um circulo é de  $22^m,46244$ ; qual é o raio? — R.  $3^m,575$ .
47. O raio de um circulo é de  $2^m,80$ ; qual é a circumferencia? — R.  $17^m,59$ .
48. A circumferencia de um circulo é de  $14^m$ ; qual é o diametro? — R.  $4^m,456$ .
49. Achar a area de um circulo de  $2^m,80$  de raio — R.  $24^m,63$ .
50. Achar a area de um circulo de  $11^m,20$  de diametro. — R.  $98^m,5205$ .
51. Qual é a area de um circulo de  $7^m,65$  de circumferencia? — R.  $4^m,6282$ .
52. Sendo de  $0^m,45$  o raio de um circulo, achar a sua area. — R.  $0^m,6361$ .
53. Uma bacia de fórma circular tem  $19^m$  de diametro; qual é a area? — R.  $283^m,5294$ .

54. Uma bacia circular tem  $7^m,15$  de diametro, entrando a alvenaria; e interiormente um diametro de  $6^m,50$ . Qual é a area occupada: 1.º) pela agua; 2.º) pela alvenaria? — R. 1.º)  $33^m2,18\ 81$ ; 2.º)  $6^m2,96\ 84$ .

55. Qual é o raio de um circulo de  $98^m2,54\ 40$  de area? — R.  $5^m,59$ .

56. Determinar o raio de um circulo que tem  $3\ 567^m2$  de area. — R.  $33^m,69$ .

57. Qual é o diametro de um circulo de  $24^m2,62\ 60$  de area? — R.  $5^m,58$ .

58. Achar a circumferencia de um circulo de  $71^m2,62$  de area. — R.  $30^m$ .

59. Achar o raio de um circulo equivalente em area a um quadrado de 3 metros de lado. — R.  $1^m,69$ .

60. A area de um circulo é 9 vezes menor que a de um outro circulo que tem  $6^m$  de diametro; qual é o diametro do primeiro? — R.  $2^m$ .

61. Em um circulo de 1 metro de raio, qual é a area do sector de  $28^\circ$ ? — R.  $0^m2,24\ 43$ .

62. Qual é a area do sector de  $60^\circ$  em um circulo, cujo raio é de 10 metros? —  $52^m2,36$ .

63. Um sector está comprehendido em um angulo de  $60^\circ$ ; o raio da circumferencia é de 13 metros. Qual é a sua area? — R.  $88^m2,48\ 84$ .

64. Achar a area do sector de  $37^\circ\ 29'$  em um circulo de  $1^m,455$  de raio. — R.  $0^m2,67\ 35$ .

65. Calcular a area dum sector cuja base é um arco de  $45^\circ$  e cujo raio tem 8 metros. — R.  $25^m2,13\ 28$ .

66. Um terreno tem a fórma dum sector circular cujo angulo central é de  $50^\circ\ 36'$  e o raio  $19^m,36$ . Qual é o preço deste terreno á razão de 48 fr. o aro? —  $791,41$ .

67. Qual é a area do segmento de  $60^\circ$  no circulo cujo raio é de 2 metros? — R.  $0^m2,36\ 24$ .

68. Calcular a area do segmento de  $60^\circ$  em um circulo cujo raio é de 8 metros. — R.  $5^m2,79\ 84$ .

69. Achar a area do segmento de  $60^\circ$  no circulo cujo raio é 1 metro. — R.  $0^m,09\ 06$ .

70. Calcular a area do segmento de  $90^\circ$  em um circulo cujo raio tem  $0^m,12$  de comprimento. — R.  $0^m2,00\ 41$ .

71. Dois circulos concentricos têm: um  $4^m,25$  de diametro e o outro  $3^m,20$ ; qual é a area da corôa? — R.  $6^m2,14\ 37$ .

72. Uma bacia circular tem  $7^m,15$  de diametro, entrando a alvenaria; e interiormente, um diametro de  $6^m,50$ . Qual é a arca occupada pela alvenaria? — R.  $6^m2,96\ 84$ .

73. Sabese que a somma dos raios duma corôa é 25 metros e a differença é 7 metros. Calcular a arca desta corôa. — R.  $549^m2,78$ .

74. Uma bacia circular de 28 metros de diametro é rodeada duma muralha de pedras de  $2^m,20$  de largura. Qual é a area desta muralha. — R.  $208^m2,72\ 79$ .

## § XI — Dos corpos e sua medida

111. Uma parte do espaço limitada por planos forma um corpo chamado *polyedro*.

112. Sendo precisos, pelo menos, quatro planos para fechar um espaço, o mais simples dos polyedros é o que tem quatro faces, o *tetraedro*.

113. Os polyedros designam-se, em geral, pelo numero de suas faces. Assim, o de cinco faces chama-se *pentaedro*; o de seis, *hexaedro*; etc.

114. Dos polyedros os que mais merecem ser particularmente considerados são: o *prisma* e a *pyramide*.

115. Definidos e caracterisados os principaes corpos da geometria, para complemento de seu estudo basta medil-os.

116. E como em um corpo ha duas cousas distinctas a considerar, o espaço que elle occupa e a *superficie* que o limita, a questão da medida dos corpos deve comprehender duas partes: *superficies* e *volumes*.

### Do prisma; sua superficie e volume

117. *Prisma* é um corpo cujas duas faces oppostas são iguaes e parallelas e cujas faces lateraes são parallelogrammos (Fig. 53).

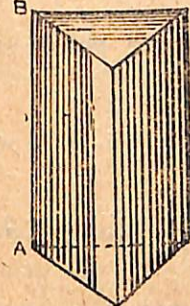


Fig. 53

118. As duas faces oppostas chamam-se *bases* do prisma. *Altura* do prisma é a porção da perpendicular comprehendida entre os planos das duas bases.

119. Um prisma se diz *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc., conforme a sua base é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono, etc.

120. Um prisma tem duas especies de arestas; as *arestas das bases* e as *arestas lateraes*. As *arestas lateraes* são iguaes e parallelas.

121. O prisma é *recto* quando as arestas lateraes são perpendiculares aos planos das bases; neste caso as faces são rectangulos e as arestas são iguaes á altura.

122. O prisma recto é *regular* quando suas bases são polygonos regulares.

Quando as bases de um prisma são parallelogrammos, este prisma denomina-se *parallelepipedo*. Si estes parallelogrammos são rectangulos, o parallelepipedo denomina-se *parallelepipedo rectangulo* (Fig. 54).

O parallelepipedo rectangulo toma o nome de *cubo* quando todas as suas faces são quadrados.



Fig. 55

O dado de jogar (Fig. 55) é um cubo.



Fig. 54

123. Superficie lateral do prisma. — A superficie lateral do prisma recto é igual ao producto do **perimetro** da base pela altura.

124. Superficie total do prisma. — A superficie total do prisma recto obtem-se juntando á superficie lateral a superficie dos **dois polygonos** que formam as bases.

#### Aplicação

Calcular a superficie lateral e a total de um *parallelepipedo rectangulo* cujas tres dimensões (as tres arestas encontrando-se num mesmo vertice) são  $0^m,5$ ;  $0^m,3$ ;  $0^m,7$ .

Superficie lateral. — O perimetro da base é  $(0,5+0,3) \times 2 = 0,8 \times 2 = 1,6$ .

Multiplicando-se este perimetro 1,6 pela altura 0,7, obtem-se  $1,6 \times 0,7 = 1^m,12$  para *superficie lateral*.

Superficie total. — A superficie dos dois polygonos das bases é igual  $(0,5 \times 0,3) \times 2 = 0,15 \times 2 = 0^m,30$ . Assim,

Superficie lateral .....	$1^m,12$
"    das bases .....	$0^m,30$
Superficie total .....	$1^m,42$ .

125. Volume do *parallelepipedo rectangulo*. — Para achar-se o volume de um *parallelepipedo rectangulo*, basta fazer-se um producto com as tres dimensões: *comprimento*, *largura* e *altura*; ou, o que é o mesmo, — basta multiplicar-se a area da base pela altura.

#### Aplicação

Qual é o volume dum *parallelepipedo rectangulo* que tem  $4^m,45$  de comprimento sobre  $2^m,90$  de largura, sendo de  $1^m,30$  a altura?

$$\begin{aligned} \text{Vol. parallelip. rect.} &= 4^m,45 \times 2^m,90 \times 1^m,30 = \\ &= 16^m,776\ 500. \end{aligned}$$

126. Volume do cubo propriamente dito. — Para obter-se o volume de um cubo, basta fazer-se um producto com tres factores *iguaes* ao lado.

Assim, o volume de um dado de jogar que tem  $2^{\text{cm}}$  de lado será igual a  $2^{\text{cm}} \times 2^{\text{cm}} \times 2^{\text{cm}} = 8^{\text{cms}}$ .

127. Volume do prisma. — Para achar-se o volume de um prisma, multiplica-se a area da base pela altura.

#### Aplicação

Qual é, em decimetros cubicos, o volume de um prisma triangular, cuja base tem  $1^m,35$  de comprimento e  $1^m,06$  de largura, a altura do prisma sendo de  $0^m,84$ ?

$$\text{Ar. da base} = \frac{1^m,35 \times 1^m,06}{2} = 0^m,7\ 155$$

$$\begin{aligned} \text{Vol. do prisma} &= 0^m,7155 \times 0,84 = 0^m,60\ 1020 = \\ &= 601^{\text{dms}},020. \end{aligned}$$

**Da pyramide; sua superficie e volume**

128. **Pyramide** é um corpo cuja *base* é um polygono qualquer, e cujas faces lateraes são triangulos que têm um vertice commum (Fig. 56).

129. Este vertice commum chama-se *vertice* da pyramide.

*Altura* de uma pyramide é a perpendicular baixada do vertice sobre a base.

*Superficie lateral* de uma pyramide é o conjuncto dos triangulos que têm um vertice commum.

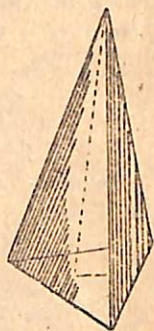


Fig. 56

130. Uma pyramide se diz *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc., conforme a sua base é um triangulo, um quadrilatero, um pentagono, etc.

131. A pyramide é *regular* quando a sua base é um polygono regular e o seu vertice está situado sobre a perpendicular levantada pelo centro deste polygono.

132. **Superficie lateral da pyramide.** — Para achar-se a superficie lateral de uma pyramide, sommam-se as areas das suas faces.

**Aplicação**

Calcular a superficie lateral de uma pyramide regular, que tem por base um quadrado de 3<sup>m</sup>,5 de lado, tendo cada face 7 metros de altura.

A base sendo um quadrado, 4 triangulos iguaes formam a sua superficie lateral. Avaliando-se, pois, a area de um dos triangulos e repetindo-se 4 vezes, ter-se-á a superficie lateral pedida.

$$\text{Assim, tem-se: } \frac{7 \times 3,5}{2} \times 4 = 49^{\text{m}^2}.$$

133. **Superficie total da pyramide.** — Para obter-se a superficie total de uma pyramide, calculam-se as areas dos triangulos que formam as faces lateraes e a do polygono que fórma a base, e faz-se a somma de todas essas areas.

**Aplicação**

Calcular a superficie total de uma pyramide regular definida no exemplo precedente.

$$\begin{aligned} \text{Area da base} \dots 3^{\text{m}^2},5 \dots &= 12^{\text{m}^2},25 \\ \text{Superficie lateral} \dots &= 49^{\text{m}^2} \\ \hline \text{Superficie total} \dots &= 61^{\text{m}^2},25. \end{aligned}$$

134. **Volume da pyramide.** — O volume de uma pyramide qualquer é igual ao terço do producto da area da base pela altura.

Chamando *V* o volume de uma pyramide, *B* a area da base *A* a altura, tem-se a

$$\text{Formula: } V = \frac{B \times A}{3}$$

**Aplicação**

Calcular o volume de uma pyramide triangular cuja base tem 0<sup>m</sup>,65 de comprimento sobre 0<sup>m</sup>,56 de largura e 0<sup>m</sup>,95 de altura.

$$\text{Ar. B} = \frac{0^{\text{m}},65 \times 0^{\text{m}},56}{2} = 0^{\text{m}^2} 1820.$$

$$V = \frac{A \times B}{3} = \frac{0^{\text{m}^2},1820 \times 0^{\text{m}},95}{3} = 0^{\text{m}^3},057 633.$$

**Da pyramide truncada; sua superficie e volume**

135. **Tronco do cône ou pyramide truncada** é a porção de pyramide comprehendida entre a base e uma secção que corta todas as arestas lateraes (Fig. 57).

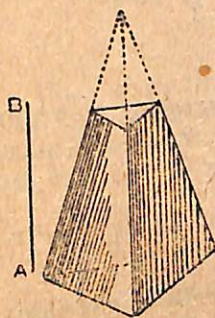


Fig. 57

136. **Superficie lateral da pyramide regular truncada de bases parallelas.** — A superficie lateral de um tronco de pyramide regular compõe-se de trapezios iguaes. Multiplicando-se a area de um dos trapezios pelo numero delles, ter-se-á a superficie lateral.

137. Como tambem o apothema do tronco de pyramide é a altura commum

de todos esses trapezios, dizemos, segundo o que já sabemos para a area do trapezio (n.º 101), que a *superficie lateral de uma pyramide truncada é igual ao producto do apothema pela semi-somma dos perimetros das duas bases.*

138. Sabemos tambem, pelo que dito ficou em o n.º 45, que a parallela tirada á igual distancia das bases de um trapezio é igual a semi-somma das bases deste trapezio. Assim, fazendo-se uma secção parallela ás bases e dellas equidistante, resultará um polygono cujo perimetro será a semi-somma dos perimetros das bases. Portanto, a *superficie lateral de uma pyramide truncada ainda é igual ao producto do apothema pelo perimetro da secção parallela ás duas bases e dellas equidistante.*

139. **Superficie total de uma pyramide truncada de bases parallelas.** — Para obter-se a superficie total de uma pyramide truncada de bases parallelas, juntam-se á superficie lateral as areas dos dois polygonos que formam as bases.

140. **Volume de uma pyramide truncada.** — Para obter-se o volume de uma pyramide truncada, sommam-se as areas da grande base, da pequena e de uma média \*) entre estas duas superficies; a somma multiplica-se pela altura e o producto divide-se por 3.

Designando-se por  $B$  a base maior e por  $b$  a menor, a base média será  $\sqrt{Bb}$ ; a altura sendo  $A$  tem-se a

$$\text{Formula: } V. \text{ pyr. trunc.} = \frac{(B+b+\sqrt{Bb}) \times A}{3}$$

Aplicação

Calcular o volume de uma pyramide truncada de 7<sup>m</sup>,50 de altura e cujas bases tem: a maior 16 metros quadrados de superficie e a menor, 9 metros quadrados.

$$\text{Sup. média} = \sqrt{Bb} = \sqrt{16 \times 9} = \sqrt{144} = 12 \text{ m. quadr.}$$

\*) Para achar-se a média entre as duas superficies das bases da pyramide truncada, multiplica-se uma pela outra e extrah-se a raiz quadrada do producto.

$$\begin{aligned} V. \text{ pyr. trunc.} &= \frac{(B+b+\sqrt{Bb}) \times A}{3} \\ &= \frac{(16+9+\sqrt{144}) \times 7,50}{3} = \frac{(16+9+12) \times 7,50}{3} \\ &= \frac{37^{\text{m}^2} \times 7,50}{3} = \frac{277^{\text{m}^3},500}{3} = 92^{\text{m}^3},500. \end{aligned}$$

Do cylindro; sua superficie e volume

141. **Cylindro** é um corpo cujas duas bases são circulos iguaes e parallelos (Fig. 58).

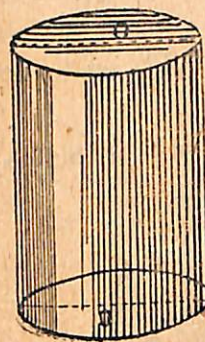


Fig. 58

142. A linha recta que une os centros dos dois circulos chama-se *altura* do cylindro.

Chama-se *superficie lateral* do cylindro toda a superficie do cylindro menos a *superficie das duas bases.*

143. **Superficie lateral do cylindro.** — Para achar-se a superficie lateral de um cylindro, multiplica-se a circumferencia da base pela altura do cylindro.

$$\text{Formula: } \text{Sup. lat. cyl.} = 2 \pi R \times A.$$

Aplicação

Qual é a superficie lateral de um cylindro que tem 1<sup>m</sup>,70 de altura, sendo de 0<sup>m</sup>,50 o diametro da base?

$$\begin{aligned} \text{Sup. lat. cyl.} &= 2 \pi R \times A = 3,1416 \times 0,50 \times 1,70 \\ &= 8^{\text{m}^2},67 \text{ 03 60.} \end{aligned}$$

144. **Superficie total do cylindro.** — Para achar-se a superficie total do cylindro, ajunta-se a superficie das suas duas bases á sua superficie lateral.

$$\text{Formula: } \text{Sup. tot. cyl.} = 2 \pi R^2 + 2 \pi R A.$$



Aplicação

Achar a superficie total do cylindro definido no exemplo precedente.

Sup. das duas bases:  $2 \pi R^2 = 2 \times 3,1416 \times 0,25^2 = 0^m,39 27$

Sup. lat.:  $2 \pi R \times A = \dots \dots \dots 2^m,67 03 60$

Superficie total  $\dots \dots \dots 3^m,06 30 60$

145. Volume do cylindro. — O volume de um cylindro é igual ao producto da superficie da base pela altura.

Formula:  $Vol. cyl. = \pi R^2 \times A.$

Aplicação

Calcular o volume de um cylindro de 2<sup>m</sup>,50, sendo de 0<sup>m</sup>,70 o raio da base.

Vol. cyl. =  $\pi R^2 \times A = 3,1416 \times 0,70^2 \times 2,50 = 3^m,848 460.$

Do cône; sua superficie e volume

146. Cône é um corpo que termina, dum lado, por um ponto que é o *vertice* e do outro por um circulo que é a *base* (Fig. 59).

147. A linha recta que une o vertice ao centro da base, é a *altura* do cône.

Chama-se *superficie lateral* do cône toda a superficie do cône menos a *superficie da base*.

148. Superficie lateral do cône. — A superficie lateral do cône é igual á metade do producto da circumferencia da base pela altura.

Formula:  $Sup. lat. cône = \frac{2 \pi R A}{2} = \pi R \times A.$

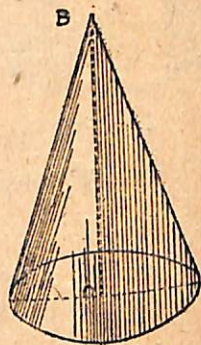


Fig. 59

Qual é a superficie lateral de um cône, cuja altura é de 0<sup>m</sup>,40 e a circumferencia 0,439 824?

Sup. lat. cône =  $\pi R A = \frac{0,439 824}{2} \times 0^m,40 = 0^m,08 79 64 80.$

149. Superficie total do cône. — Para obter-se a superficie total de um cône, ajunta-se a superficie do circulo que lhe serve de base á sua superficie lateral.

Formula:  $Sup. total cône = \pi R^2 + \pi R A.$

Aplicação

Achar a superficie total do cône definido no exemplo precedente.

Sup. da base \*):  $\pi R^2 = 0^m,01 53 93 84$   
 Sup. lat.:  $\pi R A = 0^m,08 79 64 80$   
 $0^m,10 33 58 64$

150. Volume do cône. — O volume de um cône é igual ao terço do producto da superficie da base pela altura.

Formula:  $Vol. cône = \frac{\pi R^2 \times A}{3}$

Aplicação

Qual é o volume de um cône cuja altura tem 0<sup>m</sup>,58 e o raio da base 0<sup>m</sup>,25?

Vol. cône =  $\frac{\pi R^2 \times A}{3} = \frac{3,1416 \times 0,25^2 \times 0^m,48}{3} = 0^m,031 416.$

$R = \frac{C}{2\pi} = \frac{0,439 824}{2 \times 3,1416} = \frac{0,219 912}{3,1416} = 0^m,07$

$\pi R^2 = 3,1416 \times 0,07^2 = 3,1416 \times 0,0049 = 0^m,01 53 93 84.$

\*) (Vid. Observação, pagina 321).

**Do cône truncado; sua superficie e volume**

151. Cône truncado é uma porção de cône comprehendida entre a base e uma secção paralela a esta base (Fig. 60).

152. Superficie lateral do cône truncado. — Para achar-se a superficie lateral dum cône truncado, multiplica-se o seu lado pela semi-somma das circumferencias das suas bases.

Designando-se por **C** a circumferencia maior, por **c** a circumferencia menor e por **l** o lado, tem-se a

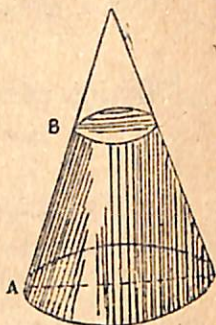


Fig. 60

$$\text{Formula: Sup. lat. cône trunc.} = \frac{C + c}{2} \times l.$$

**Aplicação**

Qual é a superficie lateral de um cône truncado que tem 1<sup>m</sup>,40 de raio na base maior, 0<sup>m</sup>,82 de raio na base menor, sendo de 6<sup>m</sup>,80 o comprimento do lado?

$$\begin{aligned} \text{Sup. lat. cône trunc.} &= \frac{C + c}{2} \times l = \\ &= \frac{8,79\ 64 + 5,15\ 22}{2} \times 6,80 = \frac{13,94\ 86}{2} \times 6,80 = \\ &= 6,97\ 43 \times 6,80 = 47^{\text{m}2},42. \end{aligned}$$

153. Superficie total do cône truncado. — Para achar-se a superficie total de um cône truncado, ajuntase a superficie das bases á superficie lateral.

$$\text{Formula: Sup. tot. cône trunc.} = \pi R^2 + \pi r^2 + \text{sup. lat.}$$

**Aplicação**

Qual é a superficie total do cône truncado definido no exemplo precedente?

$$\begin{aligned} \text{Superficie da base inferior} &\dots\dots 3,1416 \times 1,40^2 = 6^{\text{m}2},15 \\ \text{,, ,, ,, superior} &\dots\dots 3,1416 \times 0,82^2 = 2^{\text{m}2},11 \\ \text{,, lateral} &\dots\dots\dots = 47^{\text{m}2},42 \end{aligned}$$

$$\text{Superficie total} \dots\dots\dots = 55^{\text{m}2},68$$

154. Volume do cône truncado. — Para achar-se o volume de um cône truncado, observa-se o que ficou dito em o n.º 140; e note-se que para achar-se a superficie média de um cône truncado multiplica-se o raio da grande base pelo da pequena e o producto por  $\pi$ .

$$\begin{aligned} \text{Formula: Vol. cône trunc.} &= \frac{(\pi R^2 + \pi r^2 + R r \pi) \times A}{3} = \\ &= \frac{\pi (R^2 + r^2 + R r) \times A}{3}. \end{aligned}$$

**Aplicação**

Qual é o volume de um cône truncado cuja altura é de 1<sup>m</sup>,26, tendo o raio da base inferior 0<sup>m</sup>,68 e o da base superior 0<sup>m</sup>,42?

$$\begin{aligned} \text{Vol. cône trunc.} &= \frac{\pi (R^2 + r^2 + R r) \times A}{3} = \\ &= \frac{3,1416 (0^{\text{m}2},68^2 + 0^{\text{m}2},42^2 + 0^{\text{m}},68 \times 0^{\text{m}},42) \times 1^{\text{m}},26}{3} = \\ &= 1^{\text{m}3},219\ 719. \end{aligned}$$

**Da esphera; sua superficie e volume**

155. Esphera é um corpo limitado por uma superficie curva cujos pontos estão todos igualmente distantes de um ponto interior chamado centro (Fig. 61).



Fig. 61

156. Superficie da esphera. — Para achar-se a superficie de uma esphera, multiplica-se a circumferencia pelo diametro.

Designando-se por **C** uma circumferencia e por **D** o diametro, tem-se que

$$\text{Sup. esph.} = C \times D.$$

Substituindo-se, nesta igualdade, C por  $2 \pi R$  e D por  $2 R$ , resulta a

$$\text{Formula: Sup. esph.} = 2 \pi R \times 2 R = 4 \pi R^2.$$

Aplicação

Qual é a superficie de uma esphera de  $0^m,45$  de raio?

$$\text{Sup. esph.} = 4 \pi R^2 = 4 \times 3,1416 \times 0,45^2 = 2^m 54 46 96.$$

157. Volume da esphera. — O volume da esphera é igual ao terço do producto da superficie da esphera pelo raio.

$$\text{Formula: Vol. esph.} = \frac{4 \pi R^2 \times R}{3} = \frac{4 \pi R^3}{3}.$$

Aplicação

Qual é o volume de uma esphera de  $0^m,60$  de raio?

$$\text{V. esph.} = \frac{4 \pi R^3}{3} = \frac{4 \times 3,1416 \times 0,60^3}{3} = 0^m 3,904 780 = 904^{\text{dm}^3} 780.$$

### Do tonel

158. Para achar-se a capacidade de um tonel, tomam-se tres medidas: o comprimento interior do tonel, o diametro do bojo e o dos fundos.

Feito isto, subtrae-se o diametro dos fundos do bojo. Toma-se o terço da differença e subtrae-se este terço do diametro do bojo. Obtem-se assim um resto que é o diametro de um cylindro do mesmo comprimento do tonel e que lhe é equivalente.

Por conseguinte, continúa-se como para a medida do cylindro. \*)

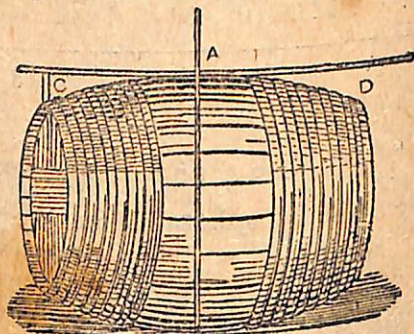


Fig. 62

Designando-se por D o diametro do bojo e, por d o diametro dos fundos, tem-se

$$\text{Diam. cyl.} = D - \frac{D - d}{3} = \frac{3D - D + d}{3} = \frac{2D + d}{3}.$$

$$\text{Raio} = \frac{2D + d}{6}.$$

$$\text{Vol. ton.} = \pi R^2 \times A = \pi \times \frac{(2D + d)^2}{36} \times A.$$

Aplicação

Achar a capacidade de um tonel cujo comprimento é de  $1^m,92$ ; o diametro do bojo  $0^m,97$ ; o dos fundos  $0^m,88$ .

$$\text{Vol. tonel} = \pi \times \frac{(2D + d)^2}{36} \times A =$$

$$= 3,1416 \times \frac{(2 \times 0,97 + 0,88)^2}{36} \times 1,92 =$$

$$= 3,1416 \times 0,2209 \times 1,92 = 1^m 332 440 = 1 332^{\text{litro}} 44.$$

### Exercicios sobre a medida dos corpos

1. Achar o volume de um prisma cuja base é de  $17^m 2,15$  e cuja altura é de  $0^m,75$ . — R.  $12^m 3,862 500$ .
2. Qual é o volume de um prisma cuja base é de  $1^m 2,174$  e a altura de  $0^m,25$ ? — R.  $0^m 3,293 500$ .
3. Qual é o volume de um prisma de  $0^m,80$  de altura e cuja base é um rectangulo de  $2^m$  de comprimento sobre  $1^m,40$  de largura? — R.  $2^m 3,240$ .
4. Qual é o volume de um prisma de  $1^m$  de altura e cuja base é um parallelogrammo de  $0^m,48$  de base sobre  $0^m,15$  de altura? — R.  $0^m 3,072$ .
5. Achar o volume de um prisma de  $1^m,20$  de altura e cuja base é um quadrado de  $0^m,26$  de lado. — R.  $0^m 3,081 120$ .
6. Qual é o volume de um prisma de  $2^m,94$  de altura e cuja base é um trapezio, cujos lados parallelos têm  $4^m,25$  e  $6^m$  e a altura  $5^m$ ? — R.  $75^m 3,337 500$ .

\*) Lei franceza de 19 germinal anno VII (8 de Abril de 1798).

7. Calcular o volume de um cubo de  $0^m,75$ . — R.  $0^m,421\ 875$ .  
 8. Achar o volume de um cubo de  $2^m,50$  de lado. — R.  $15^m,625$ .  
 9. Qual é o lado de um cubo de  $343^m,3$  de volume? — R.  $7^m$ .  
 10. Determinar o lado de um cubo de  $5\ 088^m,3,448$  de volume. — R.  $17^m,20$ .

11. A base de uma pyramide é um rectangulo de  $0^m,26$  de comprimento sobre  $0^m,15$  de largura; a sua altura é de  $0^m,85$ . Qual é o seu volume? — R.  $0^m,011\ 050$ .

12. Uma pyramide com  $6^m,40$  de altura tem por base um quadrado de  $1^m,30$  de lado; qual é o seu volume? — R.  $3^m,605\ 300$ .

13. A base de uma pyramide é um triangulo de  $0^m,52$  de base e de  $0^m,15$  de altura. Qual é o seu volume, si a sua altura é de  $0^m,85$ ? — R.  $0^m,011\ 050$ .

14. A base de uma pyramide é um triangulo equilatero de 1 metro de lado. Calcular o volume, sabendo-se que a altura é de  $4^m,50$ . — R.  $0^m,649\ 500$ .

15. A altura de uma pyramide é de  $14^m,25$ ; sua base é um trapezio cujos lados paralelos têm  $2^m,10$  e  $1^m,75$  e a altura  $0^m,90$ . Qual é o seu volume? — R.  $8^m,229\ 375$ .

16. As duas bases de uma pyramide truncada são rectangulos tendo um  $1^m,80$  de comprimento sobre  $0^m,90$  de largura, e o outro  $2^m$  de comprimento sobre  $1^m$  de largura. Qual é o volume deste corpo, que tem  $3^m$  de altura? — R.  $5^m,341,8$ .

17. Achar a superficie lateral de um cylindro cuja circumferencia da base é de  $2^m,40$  e a altura de  $1^m,75$ . — R.  $4^m,20$ .

18. Qual é a superficie lateral de um cylindro de  $2^m,10$  de altura e cujo circulo da base tem um diametro de  $0^m,45$ ? — R.  $2^m,96\ 88$ .

19. Achar a superficie lateral de um cylindro de  $1^m,50$  de altura e cuja base tem um raio de  $0^m,32$ . — R.  $3^m,201\ 59$ .

20. Dizer qual é o volume de um cylindro de  $1^m,92$  de altura e cujo raio da base é de  $0^m,47$ . — R.  $1^m,332\ 439$ .

21. Calcular o volume de um cylindro cuja superficie da base é de  $0^m,46\ 25$  e a altura de  $0^m,56$ . — R.  $0^m,3,259$ .

22. Achar o volume de um cylindro cuja base é uma circumferencia de  $1^m,15$  e cuja altura é de  $3^m$ . — R.  $0^m,3,315\ 627$ .

23. Qual é o volume de um cylindro de  $1^m,80$  de altura e cuja base tem um diametro de  $0^m,54$ ? — R.  $0^m,3,412\ 239$ .

24. Qual é o volume de um cylindro cuja altura é de  $1^m,40$  e o volume de  $0^m,3,750$ ? — R.  $0^m,413$ .

25. Até que altura se deve derramar agua em um vaso cylindrico de  $0^m,50$  de diametro para que o volume contido seja de  $0^m,3,140$ ? — R.  $0^m,713$ .

26. Um cylindro de ferro, pesado n'agua, perde  $38\text{Kg},453\ 184$ ; sua altura é de  $0^m,85$ . Qual será o diametro? — R.  $0^m,21$ .

27. Um cône tem por base um circulo de  $0^m,76$  de circumferencia, e a distancia desta circumferencia ao vertice é de  $0^m,84$ ; qual é a superficie lateral deste cône? — R.  $0^m,2,31\ 92$ .

28. Calcular a superficie lateral de um cône cuja base tem  $0^m,48$  de diametro, sendo de  $1^m,10$  a distancia da circumferencia da base ao vertice. — R.  $0^m,2,82\ 93$ .

29. Calcular a superficie total de um cône cujo raio da base é de  $0^m,47$  e no qual a distancia da circumferencia ao vertice é de  $3^m,84$ . — R.  $6^m,2,36\ 39\ 38$ .

30. Qual é o volume de um cône cuja base é de  $0^m,465$  e a altura de  $0^m,36$ ? — R.  $0^m,3,055\ 800$ .

31. A base de um cône tem um diametro de  $0^m,48$  e a altura é de  $0^m,96$ ; qual é o seu volume? — R.  $0^m,3,057\ 905$ .

32. Qual é o volume de um tronco de cône cujos raios das bases são de  $5^m$  e  $3^m$  e a altura de  $7^m$ ? — R.  $359^m,3,139\ 300$ .

33. A pequena base de um tronco de cône tem  $8^m$  de circumferencia e a grande  $9^m,80$ ; a sua altura é de  $12^m,55$ ; qual é o seu volume? — R.  $79^m,3,355$ .

34. Os diametros das bases de um tronco de cône são  $0^m,32$  e  $0^m,48$ ; a altura é de  $2^m$ ; qual é o volume deste corpo? — R.  $0^m,3,254\ 678$ .

35. Os raios das bases de um tronco de cône são  $0^m,41$  e  $0^m,36$ ; a altura  $0^m,84$ ; qual é o seu volume? — R.  $0^m,3,391\ 700$ .

36. Qual é a superficie de uma esphera de 5 centimetros de diametro? — R.  $0^m,2,00\ 78\ 54$ .

37. Uma esphera tem 3 decimetros de diametro; qual é a sua superficie? — R.  $0^m,2,28\ 27\ 44$ .

38. Achar a superficie de uma esphera cujo diametro é de  $0^m,6$ . — R.  $1^m,2,13\ 09\ 76$ .

39. Qual é a superficie de uma esphera que tem  $0^m,12$  de raio. — R.  $0^m,2,18\ 09\ 56$ .

40. Qual é o volume de uma esphera cujo diametro é de  $0^m,36$ ? — R.  $0^m,3,024\ 429$ .

41. O raio de uma esphera é de 6 centimetros; qual é o seu volume? — R.  $0^m,3,000\ 904\ 780$ .

42. Calcular o volume de uma esphera de 14 decimetros de diametro. — R.  $1^m,3,436\ 758\ 400$ .

43. Uma cuba de pedra tem a fórma de um prisma; ella tem interiormente uma base de  $0^m,2,95\ 75$  e uma altura de  $0^m,84$ ; qual é a sua capacidade em litros? — R.  $804$  litr., 3.

44. Uma pedra tem 8 decimetros de altura;  $1^m,40$  de comprimento e  $0^m,75$  de espessura; qual é o seu volume e o preço a  $3\ 000$

por metro cubico? — R.  $0^m,3,840$  e  $2\ 8520$ .

45. Um poço tem  $1^m,25$  de diametro; a agua nelle se eleva a  $3^m,45$  de altura; quantos litros tem elle? — R.  $4\ 233$  litr., 79.

46. Um monte de pedras tem a fórma de um prisma com a altura de  $1^m,50$  e cuja base é um rectangulo de  $3^m,05$  de largura sobre  $4^m,75$  de comprimento; quantos metros cubicos de pedra tem este monte? — R.  $21^m,3,731\ 250$ .

47. O telhado de um pavilhão tem a fórma de um cône cuja base é de  $3^m,15$  de circumferencia; a distancia desta circumferencia ao vertice sendo de  $3^m,40$ , quanto se deve pagar ao telhador á razão de  $1\ 8100$  o metro quadrado? — R.  $15\ 8240$ .

48. Um funil cônico tem  $0^m,25$  de diametro na sua maior largura; a altura (não se contando com o tubo que o termina) é de  $0^m,26$ ; qual é a sua capacidade? — R.  $4$  litr., 25.

49. Um baide com a fórma de cône truncado tem  $0^m,40$  de altura; um dos seus diametros (tomados interiormente) é de  $0^m,25$ ; e o outro  $0^m,20$ ; qual é a sua capacidade em litros? — R.  $15$  litr., 67.

50. Uma cisterna com 5<sup>m</sup> de profundidade tem um comprimento de 4<sup>m</sup>,75 sobre 2<sup>m</sup>,90 de largura; quantos metros cubicos de terra são precisos para enche-la? — R. 68<sup>m</sup>3,875.

51. Uma caixa tem 1<sup>m</sup>,30 de comprimento e 0<sup>m</sup>,56 de largura e 0<sup>m</sup>,80 de altura; qual é a sua capacidade? — R. 0<sup>m</sup>3,582 400.

52. Um pedaço de madeira em fórma de cône truncado tem 0<sup>m</sup>,48 de diametro em uma das extremidades e 0<sup>m</sup>,42 na outra; o comprimento sendo de 6<sup>m</sup>, qual é o seu volume em stereos? — R. 0<sup>s</sup>,95 56.

53. Um mastro de barco tem 0<sup>m</sup>,98 de circumferencia em uma extremidade e 0<sup>m</sup>,24 na outra; o comprimento sendo de 16<sup>m</sup>,50, qual é o seu volume em stereos? — R. 0<sup>s</sup>,54 75 68.

54. Uma cuba cuja fórma é a de um cône truncado tem interiormente um diametro de 0<sup>m</sup>,80 no fundo, e um diametro de 1<sup>m</sup> na abertura; sua altura é de 1<sup>m</sup>; qual é em litros a capacidade desta cuba? — R. 638 ltr., 79.

55. Uma celha cujos dois diametros são 0<sup>m</sup>,60 e 0<sup>m</sup>,75 tem 0<sup>m</sup>,54 de altura; qual é a sua capacidade? — R. 194 ltr., 17.

56. As duas circumferencias de uma cuba são 8<sup>m</sup> e 9<sup>m</sup>,80; calcular a sua capacidade em hectolitros, sabendo-se que a altura é de 2<sup>m</sup>,45? — R. 154<sup>Hl</sup>,90 85.

57. Um tonel com 2<sup>m</sup> de comprimento tem 0<sup>m</sup>,98 de diametro no batoque e 0<sup>m</sup>,92 em cada extremidade, tomadas interiormente estas dimensões; qual é a capacidade do tonel? — R. 1447 ltr., 648.

58. Qual é a capacidade de um tonel de 1<sup>m</sup>,20 de diametro no batoque, de 1<sup>m</sup>,02 de diametro em cada extremidade e de 2<sup>m</sup>,10 de comprimento? — R. 2 143 ltr., 48.

59. Um negociante vendeu 17 barras de ferro com 3<sup>m</sup>,45 de comprimento, 6 centimetros de largura e 29 millimetros de espessura; a densidade do ferro é 7,79 e o kilogrammo vale 0<sup>fr</sup>,25. Quanto deve o comprador, tendo-se-lhe feito um desconto de 3½%? — R. 191<sup>fr</sup>,79.

60. Um tanoeiro quer fazer um balde que tenha um duplo decalitre de capacidade. O diametro superior sendo de 0<sup>m</sup>,30 e o diametro inferior de 0<sup>m</sup>,26 que profundidade deve o tanoeiro dar ao balde? — R. 0<sup>m</sup>,324.

# INDICE

## Capitulo I — Numeros inteiros

Numeros		Paginas
1— 14 § I	— Principios elementares . . . . .	1— 2
15— 64 § II	— Systema decimal de numeração; exerci- cios . . . . .	2— 18 18— 19
65— 66 § III	— Numeração romana; exercicios . . . . .	
67— 78 § IV	— Adição dos numeros inteiros; princi- pales usos da adição; problemas sobre a adição . . . . .	19— 25 25— 30
79— 94 § V	— Subtracção dos numeros inteiros . . . . .	
96— 98 § VI	— Provas da adição e da subtracção; principaes usos da subtracção; proble- mas sobre a subtracção. Exercicios e problemas sobre a adição e a sub- tracção simultaneas . . . . .	30— 34 34— 39
99— 111 § VII	— Multiplicação dos numeros inteiros; potencias . . . . .	
112— 117 § VIII	— Operações sobre as potencias. Exerci- cios sobre as operações de potencias; principaes usos da multiplicação; pro- blemas sobre a multiplicação; exerci- cios sobre a adição, subtracção e mul- tiplicação de inteiros; problemas sobre as tres primeiras operações . . . . .	39— 43 43— 49
118— 125 § IX	— Divisão dos numeros inteiros . . . . .	
126— 127 § X	— Prova real da multiplicação e da di- visão; principaes usos da divisão; pro- blemas sobre a divisão. Exercicios so- bre a adição, subtracção, multiplica- ção e divisão dos inteiros; problemas sobre as quatro operações de inteiros; problemas de recapitulação das quatro operações sobre inteiros . . . . .	49— 59

## Capitulo II — Fracções decimaes

128— 135 § I	— Numeração das fracções decimaes; exercicios sobre a numeração das fra- cções decimaes . . . . .	60— 64
--------------	---	--------