

Felipe Beltrán Rodríguez

**REDUÇÃO DE CENÁRIOS VIA DISTÂNCIA ANINHADA  
APLICADA AO PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA  
OPERAÇÃO ENERGÉTICA**

Dissertação submetida ao Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Santa  
Catarina para a obtenção do Grau de  
Mestre em Sistemas de Energia  
Orientador: Prof. D. Eng. Erlon  
Cristian Finardi  
Coorientador: Prof. D. Sc. Welington  
Luis de Oliveira

Florianópolis  
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária  
da UFSC.

Beltrán Rodríguez, Felipe

REDUÇÃO DE CENÁRIOS VIA DISTÂNCIA ANINHADA APLICADA AO  
PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA / Felipe  
Beltrán Rodríguez ; orientador, Erlon Cristian Finardi ;  
coorientador, Wellington Luis De Oliveira. - Florianópolis,  
SC, 2015.

151 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia Elétrica. 2. Planejamento energético. 3.  
Programação estocástica. 4. Redução árvores de cenários. I.  
Finardi, Erlon Cristian . II. De Oliveira, Wellington Luis  
. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

## AGRADECIMENTOS

A execução dessa dissertação não seria possível sem o apoio direto ou indireto de diversas pessoas. Por isso, não tem como não ser grato:

A toda minha família, em especial a minha irmã, meu pai e minha mãe por sempre encontrar a forma de me dar forças estando à distância.

Ao meu orientador, *Prof. Erlon Cristian Finardi*, que acreditou em mim e sempre me deu a confiança para desenvolver um trabalho relevante para nossa área de estudo.

Ao meu coorientador, *Prof. Welington de Oliveira*, por sua dedicação e paciência. Sempre suas contribuições e sugestões foram de suma importância neste trabalho.

Aos professores do Labplan e do Labspot pela mediação nas disciplinas cursadas no primeiro ano.

Aos companheiros de sala no Labplan, *Rodolfo Calderon, Carlos Ernani, Brunno Brito, Guilherme Fredo, Pablo Galvis e Deysy Murillo*, pelos conselhos, pela paciência e ajudas em todo momento.

Aos demais colegas do Labplan por me facilitar a adaptação em outro país e sempre me ajudar. Em especial aos colegas *Marco Delgado, Paulo Larroid, Murilo Scuzziato, Carlos Rodríguez, Marcelo Cordova, Andres Martinez, Rodolfo Bialecki, Pedro Vieira, Valmor Zimmer, Marcelo Benetti, Daniel Tenfen e Fábio Mantelli*.

Aos meus amigos da vida que sempre torcem para que tudo dê certo, em especial, *Maria Claudia, Daniel, Carlos, Lorena, Shirley, Juan Camilo, Carolina, Vanessa, Santiago, Paula e Shaianne*.



## RESUMO

O Sistema Elétrico Brasileiro (SEB) é um sistema hidrotérmico com predominância de geração de origem hidráulica. Uma das principais maneiras de garantir a sustentabilidade técnica e econômica deste tipo de sistema é por meio da solução do problema do Planejamento da Operação Energética (POE). O objetivo do POE é estabelecer políticas de operação que determinem o despacho de cada usina em um determinado horizonte de planejamento, de maneira que seja atendida a demanda ao menor custo esperado. Devido a uma série de complexidades, o POE é resolvido indiretamente (e, portanto, aproximadamente) por uma cadeia de modelos, dentre os quais, destacam-se dois modelos de otimização estocástica referente as etapas de médio e curto prazos. Em ambos os problemas, para obter uma solução numérica aproximada é necessário aproximar o processo estocástico original, associado com a vazão incremental afluyente, por uma árvore de cenários. Naturalmente, quanto maior for o conjunto de possíveis realizações futuras do evento incerto, melhor é a representação das incertezas. Contudo, árvores com muitos cenários aumentam a complexidade do problema de otimização associado em termos do esforço computacional. Nesse contexto, o desafio é manter um equilíbrio entre a representatividade do processo estocástico e o esforço computacional para obter soluções de boa qualidade. Neste trabalho é utilizada uma estratégia baseada no uso de métricas probabilísticas para obter, a partir de uma árvore de cenários e de grande porte, uma árvore reduzida capaz de representar satisfatoriamente a árvore inicial. A métrica utilizada, denominada por distância aninhada, foi recentemente proposta por G.C. Pflug e A. Pichler para lidar com árvores de cenários multiestágio. Com base nesta métrica é utilizado um algoritmo que atualiza iterativamente árvores reduzidas de modo a obter aquela que mais se aproxima, em termos da distância aninhada, da árvore de grande porte. Finalmente, o desempenho da solução da árvore reduzida é avaliado com base no teste de Kolmogorov-Smirnov e da brecha de otimalidade.

**Palavras-chave:** Distância aninhada, processo estocástico, árvores de cenários, filtrações, problema de transporte ótimo.



## ABSTRACT

The Brazilian Electric System (SEB) is a hydrothermal system with predominance of hydroelectric generation. The technical and economic ensured sustainability of this type of system is designed by the Energy Operation Planning (POE). The main objective of the POE is to establish operating policies that determine the dispatch of each plant in a given planning horizon, so that demand is met at the lowest expected cost. For this purpose, a stochastic optimization problem is solved, in which the only uncertainty are the incremental inflows to the system's reservoirs. In order to obtain an approximate numerical solution to the problem, it is necessary to approximate the continuous stochastic process associated to the inflows by a scenario tree. Naturally, the greater set of scenarios (i.e., large trees) is the better uncertainty representation. However, large scenario trees drastically increase the computational effort to (approximately) solve the resulting multistage stochastic program. In this context, the challenge is to maintain a balance between uncertainty representation and computational effort to obtain good quality solutions. In this work, we employ a strategy based on the use of probabilistic metrics to find smaller but representative scenario trees. The considered metric denoted by Nested Distance, was recently proposed by G.C. Pflug e A. Pichler to deal with multistage scenario trees. Based on this metric, we employ an algorithm that iteratively updates reduced trees in order to obtain the one that is closest to the initial, large, tree. Finally, the performance of the reduced tree solution is evaluated based on the Kolmogorov-Smirnov and optimality gap.

**Keywords:** Nested distance, stochastic processes, scenarios trees, filtrations, optimal transport





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Nível de detalhamento da modelagem dependendo do horizonte de planejamento.....	20
Figura 2.1 – Representação da discretização de um processo estocástico. ....	25
Figura 2.2 – Ilustração de uma árvore de cenários.....	29
Figura 2.3 – Exemplo Árvore de cenários. ....	30
Figura 2.4 – Representação do problema de transporte. ....	32
Figura 2.5 – Representação da nomenclatura para o cálculo da distância aninhada entre duas árvores.....	36
Figura 2.6 – Exemplo para ilustrar o equacionamento das restrições do problema da distância aninhada. ....	37
Figura 2.7 – Exemplo cálculo da distância aninhada.....	39
Figura 2.8 – Árvores utilizadas no exemplo do cálculo da distância aninhada de forma recursiva. ....	43
Figura 3.1 – Diagrama Esquemático do algoritmo de redução de árvores de cenários.....	51
Figura 3.2 – Exemplo de árvore para redução inicial. ....	53
Figura 3.3 – Subárvores obtidas para $t=2$ . ....	53
Figura 3.4 – Árvore resultante do processo de combinação em $t=2$ . ....	54
Figura 3.5 – Subárvores obtidas para o nó N1 em $t=3$ .....	55
Figura 3.6 – Árvore resultante do processo de combinação dos nós sucessores de N1 em $t=3$ . ....	55
Figura 3.7 – Subárvores obtidas para o nó N2 em $t=3$ .....	56
Figura 3.8 – Árvore resultante do processo de combinação dos nós sucessores de N2 em $t=3$ . ....	56
Figura 3.9 – Processo de combinação dos nós do último estágio. ....	57
Figura 3.10 – Diagrama do algoritmo de adaptação ótima. ....	60
Figura 3.11 – Exemplo de árvores para o processo de adaptação ótima. ....	61
Figura 3.12 – Atualização das probabilidades da árvore reduzida.....	65

Figura 3.13 – Evolução da árvore reduzida. ....	74
Figura 4.1 – Diagrama esquemático do sistema hidrelétrico. ....	78
Figura 4.2 – Bacia hidrográfica exemplo.....	82
Figura 4.3 – Representação da distribuição da vazão afluyente incremental da bacia nas usinas associadas.....	86
Figura 4.4 – Exemplo para tipos de sorteios de árvores de cenários. ....	86
Figura 4.5 – Representação árvore de cenários com amostra comum. ....	87
Figura 4.6 – Diagrama do processo da simulação operativa.....	93
Figura 4.7 – Esquema do teste Kolmogorov-Smirnov.....	95
Figura 4.8 – Diagrama do processo de avaliação das árvores de cenários reduzidas.....	98
Figura 5.1 – Estrutura da árvore de cenários base. ....	101
Figura 5.2 – Estrutura da árvore reduzida.....	103
Figura 5.3 – Esquemático das políticas operativas para cada estágio de decisão da AOU base. ....	105
Figura 5.4 – Árvore de cenários reduzida caso base univariado.....	107
Figura 5.5 – Teste K-S – Custo total da árvore univariada.....	109
Figura 5.6 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=2$ - Árvore univariada.....	111
Figura 5.7 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=3$ - Árvore univariada.....	111
Figura 5.8 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=4$ - Árvore univariada.....	111
Figura 5.9 – Teste K-S – Potência termelétrica em $t=2$ - Árvore univariada.....	111
Figura 5.10 – Teste K-S – Potência termelétrica em $t=3$ - Árvore univariada.....	111
Figura 5.11 – Teste K-S – Potência termelétrica em $t=4$ - Árvore univariada.....	112
Figura 5.12 – Processo de cálculo do limite superior. Caso univariado. ....	113
Figura 5.13 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=2$ - $D_{ns,ns}=0,0$ .....	118
Figura 5.14 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=4$ - $D_{ns,ns}=0,0129$ .....	118
Figura 5.15 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=3$ - $D_{ns,ns}=0,0427$ .....	118
Figura 5.16 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=5$ - $D_{ns,ns}=0,0065$ .....	118
Figura 5.17 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=6$ - $D_{ns,ns}=0,0018$ .....	119
Figura 5.18 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em $t=7$ - $D_{ns,ns}=0,0$ .....	119

Figura 5.19 – Decisão de geração termelétrica e hidrelétrica do primeiro estágio com as políticas operativas da AOU4 e ARU42.....	119
Figura 5.20 – Teste Kolmogorov-Smirnov. ARMI.....	130
Figura 5.21 – Teste Kolmogorov-Smirnov. ARMP.....	130
Figura 5.22 – Teste Kolmogorov-Smirnov. ARMC. ....	130
Figura 5.23 – Processo de cálculo do limite superior. Caso multivariado. ....	134



## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Resultados da distância aninhada. ....	41
Tabela 4.1 – Dados das UHEs do sistema. ....	79
Tabela 4.2 – Dados das UTEs do sistema. ....	80
Tabela 4.3 – Dados históricos de vazões afluentes incrementais das usinas $H_{A1}$ $H_{A2}$ , $H_{A3}$ . ....	82
Tabela 4.4 – Parâmetros do modelo independente das usinas $H_{A1}$ $H_{A2}$ , $H_{A3}$ . ....	83
Tabela 4.5 – Dados históricos de vazões afluentes incrementais da Bacia A. ...	84
Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo independente da bacia A. ....	84
Tabela 4.7 – Valores de ponderação da vazão afluente incremental para as usinas $H_{A1}$ $H_{A2}$ , $H_{A3}$ . ....	85
Tabela 4.8 – Valores de $c(\alpha)$ dependendo do nível de confiança $\alpha$ . ....	95
Tabela 5.1 – Parâmetros do modelo independente da Bacia do Rio Grande. ....	101
Tabela 5.2 – Realizações da AOU base. ....	101
Tabela 5.3 – Parâmetros modelo independente usinas $H_1$ - $H_2$ - $H_3$ - $H_4$ - $H_5$ . ....	102
Tabela 5.4 – Parâmetros modelo independente usinas $H_6$ - $H_7$ - $H_8$ - $H_9$ - $H_{10}$ . ....	102
Tabela 5.5 – Parâmetros modelo independente usinas $H_{11}$ - $H_{12}$ - $H_{13}$ - $H_{14}$ - $H_{15}$ . ....	102
Tabela 5.6 – Realizações da AOM base. ....	103
Tabela 5.7 – Resultados da AOU base. ....	104
Tabela 5.8 – ARU. Iteração $k=1$ . ....	105
Tabela 5.9 – ARU. Iteração $k=2$ . ....	106
Tabela 5.10 – ARU. Iteração $k=3$ . ....	106
Tabela 5.11 – ARU. Iteração $k=4$ . ....	106
Tabela 5.12 – Tempo computacional utilizado para encontrar a ARU. ....	107
Tabela 5.13 – Resultados para a ARU. ....	108
Tabela 5.14 – Tempo computacional da solução da AOU base e ARU. ....	108
Tabela 5.15 – Resultados médios da simulação operativa. Caso univariado. ...	110
Tabela 5.16 – $D_{ns,ns}$ dos valores simulados da potência hidrelétrica e potência termelétrica. Caso univariado. ....	112
Tabela 5.17 – Brecha de otimalidade. Caso univariado. ....	113

Tabela 5.18 – Resultados redução de diferentes árvores de cenários univariadas. .....	115
Tabela 5.19 – Resultados da redução de árvore de 7 estágios. ....	117
Tabela 5.20 – Resultados para a AOM base. ....	120
Tabela 5.21 – ARMI. Iteração $k=1$ . ....	121
Tabela 5.22 – ARMI. Iteração $k=2$ . ....	122
Tabela 5.23 – ARMI. Iteração $k=3$ . ....	122
Tabela 5.24 – ARMI. Iteração $k=4$ . ....	123
Tabela 5.25 – Tempo computacional utilizado para encontrar a ARMI. ....	123
Tabela 5.26 – ARMP. Iteração $k=1$ . ....	124
Tabela 5.27 – ARMP. Iteração $k=2$ . ....	125
Tabela 5.28 – ARMP. Iteração $k=3$ . ....	125
Tabela 5.29 – ARMP. Iteração $k=4$ . ....	126
Tabela 5.30 – Tempo computacional utilizado para encontrar a ARMP. ....	126
Tabela 5.31 – ARMC. Iteração $k=1$ . ....	127
Tabela 5.32 – ARMC. Iteração $k=2$ . ....	127
Tabela 5.33 – ARMC. Iteração $k=3$ . ....	128
Tabela 5.34 – ARMC. Iteração $k=4$ . ....	128
Tabela 5.35 – Tempo computacional utilizado para encontrar a ARMC. ....	129
Tabela 5.36 – Resultados das árvores reduzidas caso multivariado. ....	129
Tabela 5.37 – Valores $D_{ns,ns}$ , das distribuições acumuladas do caso multivariado. .....	131
Tabela 5.38 – Resultados médios da simulação operativa. Caso multivariado. .....	132
Tabela 5.39 – $D_{ns,ns}$ , dos valores simulados da potência hidrelétrica e potência termelétrica. Caso multivariado. ....	133
Tabela 5.40 – Brecha de otimalidade. Caso univariado. ....	134
Tabela 5.41 – Resultados redução de diferentes árvores de cenários multivariadas. ....	135
Tabela 5.42 – Resultados redução de árvore de 4096 cenários. ....	138

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAO	Árvore Adaptada Ótima
AO	Árvore Original
AOM	Árvore Original Multivariada
AOU	Árvore Original Univariada
AR	Árvore Reduzida
ARI	Árvore Reduzida Inicial
ARMC	Árvore Reduzida Multivariada Matriz Inversa das Correlações
ARMI	Árvore Reduzida Multivariada Matriz Identidade
ARMP	Árvore Reduzida Multivariada Matriz Ponderação das Potências das Usinas
ARU	Árvore Reduzida Univariada
DA	Decomposição Aninhada
FCF	Função Custo Futuro
FDP	Função de Probabilidade Acumulada
K-S	Kolmogorov-Smirnov
M-K	Monge-Kantorovich
PDO	Programação Diária da Operação Eletroenergética
PDDE	Programação Dinâmica Dual Estocástica
PEN	Planejamento Anual da Operação Energética
PL	Programação Linear
PMO	Programa Mensal da Operação Energética
POE	Planejamento da Operação Energética
POM	Políticas operativas da Árvore Original Multivariada
POU	Políticas operativas da Árvore Original Univariada
PRMI	Políticas operativas da Árvore Reduzida Multivariada Matriz Identidade
PRMIC	Políticas operativas da Árvore Reduzida Multivariada Matriz Inversa das Correlações
PRMP	Políticas operativas da Árvore Reduzida Multivariada Matriz Ponderação das Potências das Usinas
PRU	Políticas operativas da Árvore Reduzida Univariada
ROC	Redução Ótima de Cenários
SAR	Subárvore Resultante
SEB	Sistema Elétrico Brasileiro
UHE	Usinas Hidrelétricas
UTE	Usinas Termelétricas
VA	Valor da Água

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>19</b>
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	22
1.2 OBJETIVOS DESTE TRABALHO.....	24
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	24
<b>2. INTRODUÇÃO À DISTÂNCIA MULTIESTÁGIO .....</b>	<b>25</b>
2.1 ÁRVORES DE CENÁRIOS E FILTRAÇÕES.....	26
2.1.1 Árvore de cenários.....	28
2.1.2 Filtração em árvore de cenários .....	29
2.2 PROBLEMA DE TRANSPORTE .....	31
2.3 DISTÂNCIA DE WASSERSTEIN.....	33
2.4 DISTÂNCIA ANINHADA .....	34
2.4.1 Exemplo 1 – Cálculo da distância aninhada .....	39
2.4.2 Cálculo da distância aninhada de forma recursiva.....	42
<b>3. ALGORITMO DE REDUÇÃO DE ÁRVORES DE CENÁRIOS .....</b>	<b>51</b>
3.1 FASE 1: REDUÇÃO INICIAL.....	52
3.2 FASE 2: ADAPTAÇÃO ÓTIMA .....	57
3.3 ÁRVORES MULTIVARIADAS .....	74
<b>4. MODELAGEM DO PROBLEMA E FERRAMENTAS DE AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS.....</b>	<b>77</b>
4.1 SISTEMA BASE .....	77
4.1.1 Sistema hidrelétrico .....	78
4.1.2 Sistema termelétrico .....	80
4.2 MODELAGEM DAS INCERTEZAS DO SISTEMA .....	80
4.2.1 Modelo independente de geração de cenários.....	80
4.2.2 Formas do sorteio de vazões de afluentes incrementais .....	81
4.2.3 Tipos de sorteio das árvores de cenários.....	86



4.3	MODELAGEM DO PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA .....	87
4.4	AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DAS ÁRVORES REDUZIDAS .....	91
4.4.1	<b>Simulação Operativa.....</b>	<b>92</b>
4.4.2	<b>Brecha de otimalidade .....</b>	<b>95</b>
4.4.2.1	Cálculo do limite superior .....	96
4.4.2.2	Cálculo do limite inferior.....	97
4.4.2.3	Estimação da brecha de otimalidade para otimização estocástica	97
4.4.3	<b>Processo de Redução e Avaliação .....</b>	<b>98</b>
<b>5.</b>	<b>RESULTADOS COMPUTACIONAIS .....</b>	<b>99</b>
5.1	Árvores Bases.....	100
5.1.1	<b>Árvore original univariada base .....</b>	<b>101</b>
5.1.2	<b>Árvore multivariada base.....</b>	<b>102</b>
5.1.3	<b>Estrutura árvore reduzida base.....</b>	<b>103</b>
5.2	Árvores Univariadas .....	104
5.2.1	<b>Solução da árvore original.....</b>	<b>104</b>
5.2.2	<b>Redução da árvore original .....</b>	<b>105</b>
5.2.3	<b>Solução da árvore reduzida.....</b>	<b>108</b>
5.2.4	<b>Avaliação da qualidade da solução da ARU .....</b>	<b>109</b>
5.2.4.1	Teste Kolmogorov-Smirnov .....	109
5.2.4.2	Brecha de otimalidade .....	112
5.2.5	<b>Resultados Adicionais .....</b>	<b>114</b>
5.3	Árvores Multivariadas .....	120
5.3.1	<b>Solução da árvore original.....</b>	<b>120</b>
5.3.2	<b>Redução da árvore original .....</b>	<b>120</b>
5.3.2.1	Árvore reduzida multivariada – Matriz Identidade (ARMI).....	121
5.3.2.2	Árvore reduzida multivariada – Matriz de Ponderação das Potências das Usinas (ARMP).....	123
5.3.2.3	Árvore reduzida multivariada – Matriz inversa das correlações (ARMC) .....	126

<b>5.3.3 Solução da árvore reduzida.....</b>	<b>129</b>
<b>5.3.4 Avaliação da qualidade das árvores reduzidas.....</b>	<b>130</b>
5.3.4.1 Teste Kolmogorov-Smirnov.....	130
5.3.4.2 Brecha de otimalidade.....	133
<b>5.3.5 Resultados Adicionais.....</b>	<b>134</b>
<b>6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>141</b>
<b>7. APÊNDICE: DECOMPOSIÇÃO ANINHADA .....</b>	<b>145</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>147</b>

## 1. INTRODUÇÃO

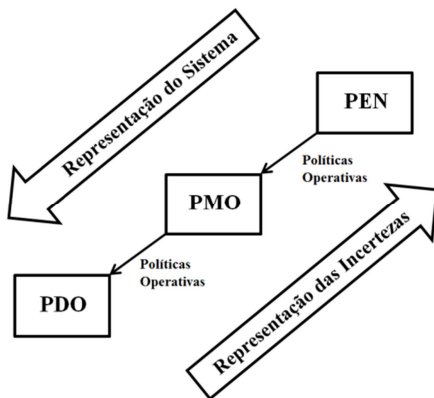
O Sistema Elétrico Brasileiro (SEB) é caracterizado por ser um sistema hidrotérmico predominantemente hidráulico em que o total de recursos proveniente da hidroeletricidade corresponde a aproximadamente 62% da capacidade total de geração. Por sua vez, a geração térmica representa em torno de 30% do total dos recursos, sendo que o restante é suprido pelo aporte de outras fontes de energia, tais como a energia renovável e a importação de sistemas vizinhos (ANEEL, 2015).

Uma tarefa fundamental para a sustentabilidade técnica e econômica do SEB é aquela associada com o problema do Planejamento da Operação Energética (POE) do sistema. No POE, o objetivo principal consiste em estabelecer políticas de operação que determinem o despacho de cada usina em um determinado horizonte de planejamento, de modo que a demanda seja atendida ao menor custo esperado. Contudo, esta tarefa é complexa de ser realizada devido, entre outros fatores, ao acoplamento espacial e temporal presente na operação das usinas, à não linearidade da função de produção das hidrelétricas e à incerteza nas vazões afluentes. Deste modo, uma estratégia adotada para obter uma solução que seja implementável na prática baseia-se na divisão do problema do POE em uma série de subproblemas (etapas), os quais consideram distintos horizontes de planejamento e diferentes graus de detalhamento para representar o sistema. No caso Brasileiro, essas etapas são definidas da seguinte maneira (PEREIRA; PINTO, 1982):

1. Planejamento Anual da Operação Energética (PEN);
2. Programa Mensal da Operação Energética (PMO);
3. Programação Diária da Operação Eletroenergética (PDO).

As duas primeiras etapas acima fornecem, por meio de uma política de operação, informações para a etapa subsequente de modo a manter a coordenação entre os diferentes horizontes utilizados. Além disso, o tamanho do horizonte de planejamento é maior no PEN e decresce até a PDO. Dado que, quão maior o horizonte de planejamento maior o nível de incerteza, as etapas têm características distintas com relação à representação da modelagem dos elementos do sistema, bem como ao tratamento das aleatoriedades, conforme é ilustrativamente apresentado na Figura 1.1.

**Figura 1.1 – Nível de detalhamento da modelagem dependendo do horizonte de planejamento.**



Fonte: adaptado de (DIAS, 2009).

Este trabalho está inserido no contexto da representação das incertezas no problema do POE. Nesse sentido, especificamente falando do caso Brasileiro, o trabalho tem aplicação nas duas primeiras etapas de planejamento, i.e., o PEN e o PMO. Estas etapas têm como base a solução de um problema de otimização estocástico, em que a incerteza representada no problema refere-se à vazão incremental afluyente aos reservatórios.

No contexto da programação estocástica, a incerteza é modelada através de variáveis aleatórias que são inseridas no modelo de otimização. Contudo, salvo em alguns casos em que o valor esperado pode ser obtido analiticamente, sempre é necessário recorrer a algum tipo de simplificação do problema. Assim, para obter uma solução numérica aproximada, a função de densidade de probabilidade é discretizada, sendo então o processo estocástico original aproximado por uma árvore de cenários, i.e., um conjunto de possíveis realizações futuras do evento incerto. Em termos gerais, quanto maior é o número de discretizações da variável aleatória, melhor é a representação das incertezas. No entanto, árvores com muitos cenários dificultam a solução do problema de otimização em termos do esforço computacional. Assim, o desafio é manter um equilíbrio entre a representatividade do processo estocástico no modelo de otimização e o esforço computacional para obter soluções de boa qualidade.

Com base nos aspectos supracitados é evidente que a construção de uma árvore de cenários (isto é, a aproximação de um processo por

uma árvore) é um assunto fundamental em otimização estocástica, em especial no caso multiestágio em que as decisões devem ser tomadas em vários estágios de tempo. Neste contexto é possível encontrar diferentes estratégias na literatura. Uma opção clássica consiste em realizar uma simulação baseada em técnicas de amostragem como, por exemplo, Monte Carlo (CHIRALAKSANAKUL, 2003), Quasi Monte Carlo (NIEDERREITER, 1992), *Latin Hypercube Sampling* (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979) e Amostragem Seletiva (PENNA; MACEIRA; DAMÁZIO, 2011). Outra opção propõe construir uma árvore, em conjunto com alguma dessas técnicas de amostragem, de tal maneira que os momentos principais desta árvore sejam os mais próximos possíveis do processo estocástico original.

Seguindo uma outra linha, importantes trabalhos têm sido feitos com base no uso de métricas probabilísticas, e.g., distâncias de Wasserstein /Kantorovich (DUPAČOVÁ; GRÖWE-KUSKA; RÖMISCH, 2003) em que a ideia geral é usar um problema de transporte para minimizar os custos quando se passa de uma dada distribuição de probabilidade para outra desejada. Ainda neste mesmo contexto, (PFLUG, 2009) propôs um novo tipo de distância, denominada de distância aninhada, que estende a distância de Wasserstein, para uma distância entre processos estocásticos. Devido ao fato de que a distância aninhada considera processos estocásticos, não somente a distribuição de probabilidades mas também a filtração (medida de informação ao longo dos estágios) são levadas em conta.

Este trabalho tem como foco o uso da distância aninhada para construção de árvores de cenários de afluições para representar as incertezas envolvidas nos problemas ligados ao POE. De forma sucinta, para o caso discreto, a distância aninhada pode ser calculada por meio de um problema de transporte (PFLUG; PICHLER, 2012), o qual mede a distância entre dois processos estocásticos multiestágio, sendo assim, uma generalização da métrica probabilística de Wasserstein utilizada em modelos de dois estágios. Será mostrado que, para uma dada árvore de cenários de grande porte, denominada árvore original (AO), é possível construir uma outra árvore de porte menor, denominada de árvore reduzida (AR), que fornece valor ótimo e políticas operativas com qualidade muito semelhante aquela obtida através do problema de otimização baseado na AO e, a um custo computacional menor. Para este fim, neste trabalho é aplicado o algoritmo de redução proposto por (KOVACEVIC; PICHLER, 2012) o qual melhora iterativamente as probabilidades e realizações da árvore reduzida com base nos conceitos da distância aninhada apresentados em (PFLUG, 2009). Além disso, são

realizadas algumas contribuições ao algoritmo de redução que dizem respeito a inclusão das características peculiares do problema do POE para fornecer uma árvore de cenários com qualidade melhor do que aquela que seria fornecida pelo algoritmo original.

Para avaliar a qualidade da AR obtida pelo algoritmo, este trabalho faz uso de um extenso conjunto de metodologias. Inicialmente, obtém-se as políticas operativas da AO e da AR resolvendo-se os respectivos problemas de otimização associados as mesmas por meio do algoritmo da Decomposição Aninhada (BIRGE; LOUVEAUX, 2011). Essas políticas são utilizadas em uma simulação com um conjunto maior e diferente de cenários daqueles incluídos na AO e na AR e, assim, obtém-se uma série de índices de desempenho, tais como custos de operação, despachos, entre outros. Subsequentemente, esses índices são dados de entradas para a aplicação do teste Kolmogorov-Smirnov (MASSEY, 1951), o qual pode ser usado para determinar se duas distribuições de probabilidade subjacentes diferem uma da outra com base em amostras finitas. O objetivo deste teste é comparar estatisticamente a AO e AR. Por exemplo, considere a simulação supracitada aplicada às políticas com a AO e AR. Isto fornece duas distribuições empíricas de probabilidades para o custo de operação. Se tais distribuições são aprovadas pelo teste de Kolmogorov-Smirnov, diz-se que AR é uma boa aproximação de AO segundo este critério (custos de operação).

Com intuito de contextualizar os objetivos deste trabalho, na próxima seção é realizada uma revisão bibliográfica dos diferentes trabalhos relacionados com a redução de árvores de cenários, desde sua concepção teórica até algumas aplicações, inclusive, para o problema da POE. Conforme será visto, o enfoque é para as metodologias que fazem uso de métricas probabilísticas.

## 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como citado na seção anterior, existe uma analogia entre um problema de transporte e o uso de métricas probabilísticas para a redução de cenários. O problema de transporte ótimo entre duas quantidades de massa foi proposto inicialmente por Monge (1781). Nesse trabalho, sugere-se encontrar uma função de transporte  $t$  que, conservando a massa inicial, minimize o custo total de transporte  $C(t)$ . Contudo, este problema é de difícil solução pois envolve integração multidimensional. Posteriormente, uma grande contribuição nesta área foi realizada por Kantorovich (1942), o qual concebeu o problema de

transporte com outro enfoque, onde o interesse principal reside nos planos de transporte ao invés da função de transporte  $t$ . Após, Kantorovich demonstrou em (KANTOROVICH, 1948) que a solução ótima de seu problema também é solução do problema de Monge e, desde então, esta formulação é conhecida como problema de Monge-Kantorovich (M-K) (VILLANI, 2009). Além disso, um caso particular do problema M-K é a distância de Wasserstein denominada assim em (DOBRUSHIN, 1970) e, definida em primeira instância em (VASERSTEIN, 1969). A equivalência entre um caso particular da métrica de M-K e a métrica de Wasserstein é demonstrada no teorema de Kantorovich-Rubinstein (GIBBS; SU, 2002). No contexto da programação estocástica, a métrica Wasserstein / Kantorovich é somente aplicável aos processos de dois estágios (PFLUG; PICHLER, 2012).

Diferentes estratégias de redução de cenários têm sido desenvolvidas com base em métricas probabilísticas. Por exemplo, Romish e Heitsh em vários trabalhos (GROWE-KUSKA; HEITSCH; ROMISCH, 2003; HEITSCH; ROMISCH, 2005 e HEITSCH; RÖMISCH, 2009), propõem um algoritmo heurístico baseado na eliminação recursiva e agrupamento de cenários de dois estágios com o uso da distância de Wasserstein; esta heurística é utilizada inclusive em árvores multiestágio. No caso Brasileiro, De Oliveira (2007) utilizou, para o problema do PMO, o algoritmo denominado Redução Ótima de Cenários (ROC), introduzido em (DUPAČOVÁ; GRÖWE-KUSKA; RÖMISCH, 2003) e baseado na métrica de Fortet-Mourier (RACHEV; RÜSCHENDORF, 1998), a qual é uma generalização da distância de Wasserstein. Além disto, De Oliveira (2007) propôs um algoritmo para reduzir o tempo necessário na seleção dos cenários a serem preservados, melhorando o algoritmo da ROC. Posteriormente em (DE OLIVEIRA et al., 2010), reduções de árvores de cenários compostas por sequências autorregressivas periódicas foram realizadas com a ajuda da ROC. Por sua vez, Homem-de-Mello no trabalho (HOMEM-DE-MELLO, 2012) utilizou a teoria sobre distribuições condicionadas, indicada em (MIRKOV; PFLUG, 2007) e baseada na distância de Wasserstein, para reduzir árvores multiestágio. Esta metodologia foi aplicada a uma árvore multiestágio de vazões afluentes com cenários independentes e equiprováveis. Os resultados do problema de planejamento hidrotérmico associado apresentaram uma boa proximidade entre as soluções do custo de operação obtidas das árvores original e reduzidas respectivamente.

Por último, Pflug e Pichler (2012) introduzem a distância aninhada, a qual se apresenta como uma métrica mais apropriada para calcular a distância entre dois processos estocásticos multiestágio, dado

que, esta métrica considera a estrutura de filtração das árvores. Deste modo, a distância aninhada é uma generalidade da distância de Wasserstein. O presente trabalho se baseia em (KOVACEVIC; PICHLER, 2012) para desenvolver um algoritmo de redução que atualiza as realizações e probabilidades a partir da solução do problema da distância aninhada entre duas árvores multiestágio.

## 1.2 OBJETIVOS DESTE TRABALHO

O objetivo geral deste trabalho é utilizar o algoritmo de redução, baseado na distância aninhada, em árvores de cenários de vazões afluentes multiestágio.

Nesse sentido, os objetivos específicos a serem cumpridos são:

1. Aplicar os conceitos da distância aninhada para implementar o algoritmo de redução em árvores de cenários de afluições de um sistema hidrotérmico;
2. Quantificar e analisar o impacto na solução e nas políticas de operação obtidas a partir de uma árvore reduzida, determinando que tamanho da árvore reduzida é adequado para conservar a qualidade na solução;
3. Propor e utilizar dentro do problema da distância aninhada informações baseadas nas características do problema em aplicação;
4. Quantificar e analisar o impacto de incluir informação do sistema na atualização das realizações da árvore reduzida.

## 1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Este trabalho está organizado conforme descrito na sequência. O Capítulo 2 introduz os conceitos da distância aninhada e exemplifica a teoria por meio de exemplos numéricos. Por sua vez, o Capítulo 3 mostra em detalhes o algoritmo de redução e, realiza exemplos didáticos com árvores de pequeno porte. No Capítulo 4 é introduzida a modelagem do problema de POE utilizada neste trabalho, bem como as ferramentas de avaliação dos resultados da árvore reduzida. No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos do algoritmo de redução e da solução do problema de otimização associado ao problema com as árvores reduzidas. Finalizando o trabalho, no Capítulo 6 são descritas as principais conclusões e sugestões para desenvolvimentos futuros.

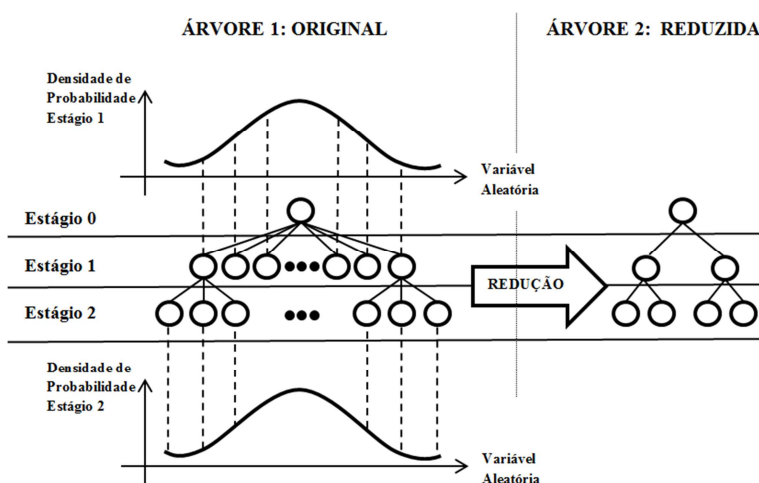


## 2. INTRODUÇÃO À DISTÂNCIA MULTIESTÁGIO

Em um problema de otimização estocástico os dados observados de uma variável aleatória são modelados como um processo estocástico (PFLUG; PICHLER, 2012). Uma consequência é que, considerando o caso de grande porte, este tipo de problema pode ser resolvido de forma analítica somente em casos raros. Portanto, uma alternativa para obter uma solução numérica de boa qualidade consiste na discretização do processo estocástico, obtendo assim uma aproximação de valores finitos para as variáveis aleatórias associadas. Esta discretização é normalmente representada por meio de uma árvore de cenários.

Gerar árvores de cenários para um modelo de decisão estocástico multiestágio conduz ao seguinte dilema: (i) se a discretização (tamanho da amostragem dos valores das variáveis aleatórias) deve ser grosseira (amostra pequena) para permitir uma solução numérica eficiente; ou, (ii) se a discretização é detalhada (amostra grande) para melhorar a representatividade do processo estocástico, porém, o custo computacional para resolver o problema de otimização estocástico se torna exorbitante. Uma das possibilidades de sobrepujar este dilema consiste em gerar uma árvore de cenários suficientemente representativa do processo estocástico original e, na sequência, aproximá-la por uma outra árvore menor que consiga manter ao máximo as características da informação da árvore maior. De maneira bem simplificada, este processo é ilustrado na Figura 2.1.

**Figura 2.1 – Representação da discretização de um processo estocástico.**



A qualidade da redução de uma árvore original pode ser medida por meio de uma distância multiestágio, introduzida em (PFLUG; PICHLER, 2012) e definida como distância aninhada, a qual é detalhada na Seção 2.4. Em termos gerais, a distância aninhada indica a distância entre distribuições de dois processos estocásticos; além disso, consegue incorporar naturalmente o incremento gradual da informação com o tempo, característica intrínseca das árvores de cenários multiestágio. De forma geral, a distância aninhada pode ser vista como um problema de transporte clássico, sendo uma generalidade da métrica probabilística de Wasserstein<sup>1</sup> utilizada em programação estocástica de dois estágios.

Assim, neste capítulo são apresentadas as definições principais (PFLUG; PICHLER, 2012); (KOVACEVIC; PICHLER, 2012) associadas aos processos estocásticos multiestágio discretos. Por outro lado, introduz-se o problema de transporte clássico e a distância de Wasserstein para problemas de dois estágios para, por fim, definir a distância aninhada. Além disso, para tornar a compreensão do assunto mais didática, mostra-se uma série de exemplos ilustrativos do cálculo da distância aninhada entre árvores de pequeno porte.

## 2.1 ÁRVORES DE CENÁRIOS E FILTRAÇÕES

Os problemas de otimização estocástica estão caracterizados pela tomada de decisões sob incertezas em cada estágio de decisão. A inclusão de incertezas na modelagem pode ser feita por meio de uma variável aleatória<sup>2</sup>  $\xi$ , definida em um espaço amostral  $\Xi \subseteq \mathbb{R}^d$ , com distribuição (medida) de probabilidade  $P$ . Um simples esboço deste tipo de problema é apresentado a seguir (KOVACEVIC; PICHLER, 2012):

$$\min_x E[f(x, \xi)] \quad (2.1)$$

s.a

$$x_t \in \mathbb{X}_t \quad t \in \{1, \dots, T\}$$

em que,

---

<sup>1</sup> Como a distância de Wasserstein é um caso particular da distância de M-K, alguns autores citam esta métrica como o caso generalizado.

<sup>2</sup> Em problemas multiestágio, a variável aleatória  $\xi$  pode ter para cada estágio de decisão uma distribuição de probabilidades diferente.

$E[f(x, \xi)]$	Valor esperado da função objetivo com respeito à medida de probabilidade $P$ ;
$x_t$	Variável de decisão no estágio de decisão $t$ ;
$\mathbb{X}_t$	Conjunto das restrições do problema no estágio $t$ . Expressadas como equações lineares de igualdade e desigualdade.
$T$	Estágio final.

No entanto, quando a distribuição de probabilidade for contínua, que é o caso de estudo deste documento, a solução analítica de (2.1) na maioria dos casos práticos é raramente uma opção viável (PFLUG; PICHLER, 2012); (DE MATOS, 2012). Nesse contexto, para viabilizar a solução do problema, o espaço amostral é discretizado em  $N$  realizações (também chamadas de cenários)  $\xi^1, \dots, \xi^N$  com probabilidades associadas  $p^1, \dots, p^N$ . Consequentemente, o problema de otimização (2.1) resulta em:

$$\min_x \sum_{s=1}^N p^s [f(x, \xi^s)] \quad (2.2)$$

s.a

$$x_t \in \mathbb{X}_t.$$

Para problemas multiestágio, a discretização do espaço amostral ao longo do tempo implica em um aumento progressivo da informação. Este comportamento é modelado como uma filtração de  $\sigma$ -álgebras<sup>3</sup>, geralmente, representada como uma árvore de cenários. Na continuação, estes conceitos são apresentados em mais detalhes.

---

<sup>3</sup> Uma  $\sigma$ -álgebra define-se como uma coleção de subconjuntos de um conjunto, pode-se formar por operações de união, intersecção ou complemento.

### 2.1.1 Árvore de cenários

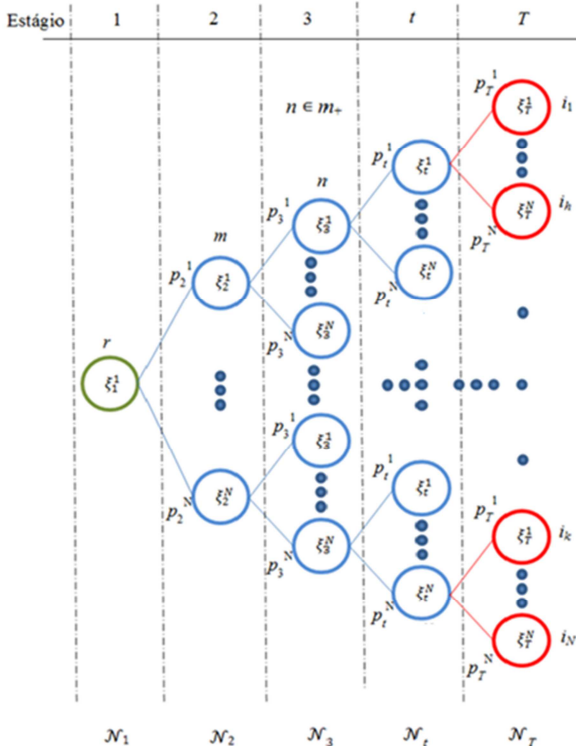
Uma árvore de cenários é um grafo conexo que não contém ciclos (ROSEN, 1999). Os vértices do grafo  $\mathcal{N}$ , são chamados de nós. A relação entre um nó  $m \in \mathcal{N}$  que é um nó predecessor direto de  $n \in \mathcal{N}$ , denota-se  $m \supset n$ . O conjunto dos sucessores diretos do nó  $m$  é denominado como  $m_+$ .

Assume-se que uma árvore de cenários atende as seguintes propriedades (KOVACEVIC; PICHLER, 2012):

- Os nós de um mesmo estágio  $t$  são incorporados no conjunto  $\mathcal{N}_t$ , tal que  $\mathcal{N}$  é a união dos subconjuntos  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_T$ ;
- Denomina-se nó raiz de uma árvore o nó  $r \in \mathcal{N}$ , o qual satisfaz ser o predecessor de todos os nós da árvore,  $r \supset n$  ( $n \in \mathcal{N}$ ); além, o conjunto  $\mathcal{N}_1$  contém o nó  $r$ . Por convenção o nó raiz é denotado como 0; portanto,  $\mathcal{N}_1 = \{0\}$ ;
- Designa-se como nó folha de uma árvore o nó  $i \in \mathcal{N}_T$ , se  $i_+ = \emptyset$ . O conjunto  $\mathcal{N}_T$  coleta todos os nós folhas da árvore, onde  $T$  é o último estágio da árvore;
- Os nós sucessores diretos de  $n \in \mathcal{N}_t$  pertencem ao conjunto de nós do próximo estágio; isto é,  $n_+ \in \mathcal{N}_{t+1}$ .

A Figura 2.2 é utilizada para ilustrar as características de uma árvore de cenários. Nota-se que em cada abertura da árvore, para cada estágio, existe uma discretização do espaço amostral  $\Xi_t$  com um número finito de realizações. Assim, cada realização  $\xi_t^i$  está associada com um nó da árvore de cenários (o índice subscrito indica o estágio correspondente e o índice sobrescrito representa o número do sorteio da variável aleatória). O único nó onde a realização é determinística é o nó  $r \in \mathcal{N}_1$ . Observe que o nó  $n$  é sucessor do nó  $m$  e, portanto,  $n \in m_+$ . Por último, os nós  $i$  pertencentes ao conjunto  $\mathcal{N}_T$  não são predecessores de nenhum nó, o que significa que o conjunto  $i_+$  é vazio.

Figura 2.2 – Ilustração de uma árvore de cenários.



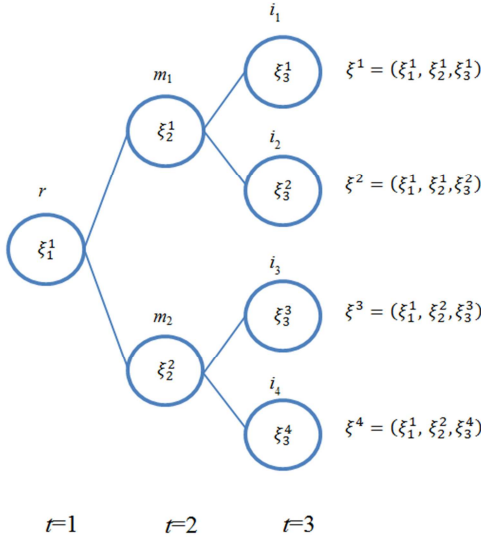
A informação de uma árvore de cenários tem um comportamento incremental devido à evolução do fenômeno aleatório ao longo do tempo. Esta característica pode ser modelada como uma filtração (KOVACEVIC; PICHLER, 2012), como é descrito a seguir.

### 2.1.2 Filtração em árvore de cenários

Seja  $(\Xi, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade. Uma filtração sobre  $(\Xi, \mathcal{F}, P)$  é uma família incremental de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ . Em outras palavras, para cada  $t$ ,  $\mathcal{F}_t$  é a  $\sigma$ -álgebra incluída em  $\mathcal{F}$ , além disso, se  $k \leq t$ , então,  $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_t$ . A fim de explicar este conceito, considere a árvore de cenários da Figura 2.3, a qual é composta por três estágios e quatro cenários. Cada nó da árvore tem associado uma realização  $\xi_t^i$ . Todo cenário  $\xi^s$  representa a trajetória do evento incerto desde o nó raiz  $r$  até

os nós do último estágio (denominados como  $i_1, i_2, i_3$  e  $i_4$ ). Assim, cada cenário está composto pelas realizações da trajetória percorrida, isto é,  $\xi^s = (\xi_1^s, \xi_2^s, \dots, \xi_T^s)$ . Como exemplo considere a árvore indicada na Figura 2.3, o cenário  $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1)$ . Neste sentido, os possíveis cenários conformam o conjunto  $\Omega = \{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4\}$  que é denominado como árvore de cenários.

**Figura 2.3 – Exemplo Árvore de cenários.**



Fonte: (DE OLIVEIRA, 2011).

A  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  gerada pelo conjunto  $\Xi$  é composta pelas partes de  $\Xi$ , denota-se como  $\mathcal{F} = P(\Xi)$ . Considerando a árvore da Figura 2.3, as possíveis  $\sigma$ -álgebras para cada estágio  $t$  apresentam-se a seguir:

- $\mathcal{F}_1 = \{\{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4\}, \emptyset\}$ ;
- $\mathcal{F}_2 = \{\{\xi^1, \xi^2\}, \{\xi^3, \xi^4\}, \{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4\}, \emptyset\}$ ;
- $\mathcal{F}_3 = \{\{\xi^1\}, \{\xi^2\}, \{\xi^3\}, \{\xi^4\}, \{\xi^1, \xi^2\}, \{\xi^1, \xi^3\}, \{\xi^1, \xi^4\}, \{\xi^2, \xi^3\}, \{\xi^2, \xi^4\}, \{\xi^3, \xi^4\}, \{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}, \{\xi^1, \xi^2, \xi^4\}, \{\xi^1, \xi^3, \xi^4\}, \{\xi^2, \xi^3, \xi^4\}, \{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4\}, \emptyset\}$ ;

Note que  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$ , esta sequência define-se como a filtração  $\Sigma$  das  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}$ . Assim, pode-se afirmar que uma árvore de cenários é uma filtração e que qualquer filtração induz a uma árvore

como é demonstrado em (KOVACEVIC; PICHLER, 2012). Este conceito é fundamental devido que a distância aninhada é justamente uma medida para encontrar a distância entre as filtrações e, por conseguinte, uma distância entre as árvores de cenários, incorporando naturalmente o comportamento incremental da informação no tempo (PFLUG; PICHLER, 2012).

## 2.2 PROBLEMA DE TRANSPORTE

O problema de transporte ótimo tem como objetivo levar as quantidades (distribuição) de massa de uma região para outra de tal forma que o custo do trabalho realizado seja mínimo. Este problema clássico foi inicialmente introduzido em (MONGE, 1781), o qual propôs um problema de otimização para encontrar uma função de transporte.

Matematicamente este problema é descrito como (DE SOUZA, 2009): Dado dois conjuntos  $A$  e  $B \subset \mathbb{R}^n$  de volumes iguais, o objetivo consiste em encontrar uma função de transporte  $t: A \rightarrow B$  que preserve o volume, isto é,  $t^{-1}(B) = A$ , e que minimiza a seguinte função:

$$C(t) = \int_A d(x, t(x)) \cdot dx \quad (2.3)$$

em que:

$d(x, y)$ : Custo de transportar  $x \in A$  para  $y \in B$ .

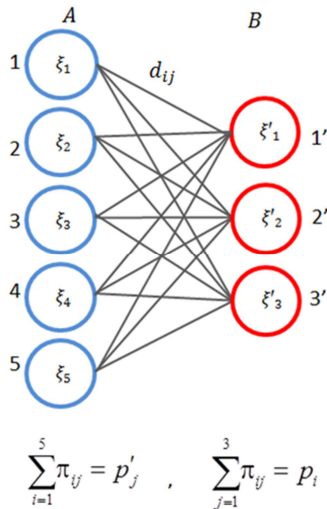
A função  $t(x)$  que minimiza (2.3) é chamado de transporte ótimo. Neste problema considera-se que a função custo é a distância Euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,  $d(x, y) = |x - y|$ . Além disso, Monge (1781) demonstrou que a função de otimização  $C(t)$  é não linear na função de transporte  $t$ .

Posteriormente, (KANTOROVICH, 1942) realizou uma formulação equivalente e que generaliza o problema de Monge (1781), com a diferença de que ao invés de encontrar uma função de transporte, o interesse está em encontrar um plano de transporte que minimize o custo total. Quando os conjuntos  $A$  e  $B$  são finitos, o problema de transporte de Kantorovich ou Wasserstein é um problema de Programação Linear (PL).

Para uma ilustração e interpretação do problema de Kantorovich ou Wasserstein, considere a Figura 2.4 e o seguinte exemplo análogo (DE OLIVEIRA, 2007); suponha que  $p_i \in A$  é a quantidade de uma

mercadoria situada na localidade  $\xi_i$  e que  $p'_j \in B$  seja a quantidade de mercadoria que será entregue na localidade  $\xi'_j$ . Levando-se em conta que cada localidade de recebimento de  $\xi'_j$  deve receber mercadorias de todas as localidades de saída  $\xi_i$ , o menor custo de transporte da mercadoria é realizado pelo trajeto ótimo  $\pi_{ij}^*$ , sendo que cada caminho tem um custo  $d_{ij}$ .

**Figura 2.4 – Representação do problema de transporte.**



Quando as localidades (simbolizadas pelos conjuntos  $A$  e  $B$ ) são substituídas por probabilidades (simbolizadas por  $P$  e  $P'$ ) o resultado de um problema de transporte pode ser interpretado como uma métrica probabilística entre duas distribuições, devido ao fato que o valor do custo de transporte indica o esforço de passar de uma distribuição para outra. Intuitivamente, quanto maior é o custo de transporte entre duas distribuições, maior é a distância entre ambas.

A definição formal do problema de transporte (distância de Kantorovich ou Wasserstein) é apresentada na Seção 2.3; esta distância é utilizada em problemas estocásticos de dois estágios e sua generalização introduzirá a distância entre processos multistágio. Ressalta-se que a distância de Wasserstein é um caso particular da distância de Monge-Kantorovich, demonstrado no teorema Kantorovich-Rubinstein (EDWARDS, 2011); para seguir a evolução destas métricas sugere-se (DUDLEY, 2002) e (SZULGA, 1982). Além disso, para uma



compreensão global das relações entre as métricas probabilísticas clássicas indica-se (GIBBS; SU, 2002).

### 2.3 DISTÂNCIA DE WASSERSTEIN

A distância de Wasserstein pode ser vista como um problema de transporte que tenta minimizar o esforço ou o custo total de transportar os elementos de uma distribuição de dois estágios para outra, encontrando um plano de transporte ótimo.

Assim, dados dois espaços de probabilidade  $\mathbb{P} := (\Xi, \Sigma, P)$  e  $\mathbb{P}' := (\Xi', \Sigma', P')$  e a função custo para transportar um elemento de  $\mathbb{P}$  para  $\mathbb{P}'$ , denotada como  $d(\xi, \xi')$ , em que:

- $\Xi, \Xi'$  Espaço amostral do espaço de probabilidade  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}'$ , respectivamente;
- $\Sigma, \Sigma'$  Filtração associada ao espaço de probabilidade  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}'$ , respectivamente;
- $P, P'$  Função de probabilidade acumulada (FDP) da variável aleatória  $\xi$  do espaço de probabilidade  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}'$ , respectivamente.

A distância de Wasserstein de ordem  $r \geq 1$ , denotada como  $\mathbb{d}_r(P, P')$ , é o valor ótimo do seguinte problema de otimização (KOVACEVIC; PICHLER, 2012):

$$\min_{\pi} \left( \int d(\xi, \xi')^r \pi(d\xi, d\xi') \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.4)$$

s.a

$$\pi(M \times \Xi') = P(M) \quad (M \in \Sigma) \quad (2.5)$$

$$\pi(\Xi \times N) = P'(N) \quad (N \in \Sigma') \quad (2.6)$$

Sendo  $\pi$  os possíveis planos de transporte. Porém, o interesse está no plano de transporte ótimo  $\pi^*$ , obtido na solução de (2.4) – (2.6).

Se  $P$  e  $P'$  são medidas discretas dos espaços  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}'$  respectivamente, como no caso das árvores de cenários, a distância de Wasserstein pode ser encontrada pelo seguinte problema de PL (KOVACEVIC; PICHLER, 2012):

$$\min_{\pi_{ij}} \sum_{ij} d_{ij}^r \pi_{ij} \quad (2.7)$$

s.a:

$$\sum_j \pi_{ij} = p_i$$

$$\sum_i \pi_{ij} = p'_j$$

$$\pi_{ij} \geq 0$$

em que:

- $d_{ij}^r$ : Função distância, definida como  $d(\xi^i, \xi^j) = |\xi^i - \xi^j|^r$   
 $r$ : Parâmetro da função distância, definida para  $r \geq 1$ .  
 $\pi_{ij}$ : Variável de decisão do problema. Representam o plano de transporte entre o nó  $i$  e  $j$ , os quais pertencem às árvores  $\Omega$  e  $\Omega'$ , respectivamente;  
 $p_i$ : Probabilidade associada ao cenário  $\xi^i$ .  
 $p'_j$ : Probabilidade associada ao cenário  $\xi^j$ .

Esta metodologia é aplicável unicamente em problemas com um estágio probabilístico, isto é, processos conformados por uma filtração que consiste em uma única  $\sigma$ -álgebra. No caso multiestágio, precisa-se de uma generalização da distância de Wasserstein devido a que, neste caso, as filtrações são conformadas por múltiplas  $\sigma$ -álgebras, as quais representam o incremento da informação com o tempo. Uma distância multiestágio, conhecida como distância aninhada, é apresentada na seção seguinte.

## 2.4 DISTÂNCIA ANINHADA

A distância aninhada é uma métrica utilizada para encontrar a distância probabilística entre dois processos multiestágio. Nesta seção, será apresentada a formulação formal deste problema, bem como sua forma de cálculo para árvores de cenários com apoio de alguns exemplos numéricos.

Novamente, por ser um problema de transporte, o propósito da distância multiestágio é minimizar o esforço ou custo total para transportar os elementos de um espaço de probabilidade  $\mathbb{P} := (\Xi, \Sigma, P)$  para outro  $\mathbb{P}' := (\Xi', \Sigma', P')$ . Neste caso, as filtrações  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  podem estar compostas por múltiplas  $\sigma$ -álgebras. Assim, o valor ótimo  $\pi$  em (2.4) – (2.6), em geral, não se adapta a este tipo de estrutura multiestágio,

devido a que se perde informação descrita em  $\sigma$ -álgebras prévias  $\Sigma_t$  e  $\Sigma'_t$ , com  $t < T$  (PFLUG; PICHLER, 2012).

Dada esta necessidade, foi definida em (PFLUG; PICHLER, 2012) a distância multiestágio, conhecida como distância aninhada. Assim, dadas duas distribuições  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}'$ , com funções de probabilidade contínuas, a distância aninhada de ordem  $r \geq 1$ , denotada como  $\mathbb{D}_r(\mathbb{P}, \mathbb{P}')$ , é o valor ótimo do seguinte problema de otimização (KOVACEVIC; PICHLER, 2012):

$$\min_{\pi} \left( \int d(\xi, \xi')^r \pi(d\xi, d\xi') \right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.8)$$

s.a:

$$\pi[M \times \Xi' | \Sigma_t \otimes \Sigma'_t] = P[M | \Sigma_t] \quad (M \in \Sigma_t, t \in \{0, \dots, T\}) \quad (2.9)$$

$$\pi[\Xi \times N | \Sigma_t \otimes \Sigma'_t] = P'[N | \Sigma'_t] \quad (N \in \Sigma'_t, t \in \{0, \dots, T\}) \quad (2.10)$$

A solução ótima  $\pi^* \in P(\Xi \times \Xi')$  do problema (2.8) – (2.10) é o melhor plano de transporte entre  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}'$ , o qual está definido sobre o produto  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma_T \otimes \Sigma'_T$ .

Para o caso em que as funções de probabilidade das variáveis aleatórias são discretizadas, como acontece com as árvores de cenários, a distância aninhada pode ser obtida por meio do seguinte problema de PL (KOVACEVIC; PICHLER, 2012), onde assume-se a notação  $i \in \mathcal{N}_T$  e  $j \in \mathcal{N}'_T$ , i.e.,  $i$  e  $j$  são os nós das folhas das árvores  $\Omega$  e  $\Omega'$  respectivamente:

$$\min_{\pi_{ij}} \sum_{ij} d_{ij}^r \pi_{ij} \quad (2.11)$$

s.a:

$$\sum_{j \subset n} \pi(i, j | m, n) = P(i | m) \quad (m \supset i, n) \quad (2.12)$$

$$\sum_{i \subset m} \pi(i, j | m, n) = P'(j | n) \quad (n \supset j, m) \quad (2.13)$$

$$\sum_{ij} \pi_{ij} = 1$$

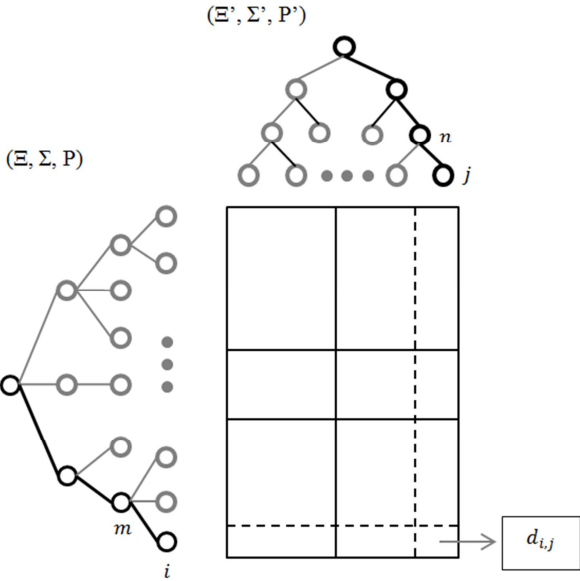
$$\pi_{ij} \geq 0$$

em que:

- $P(i|m)$  Probabilidade associada ao nó  $i$  condicionada à ocorrência do evento do nó  $m$  na árvore  $\Omega$ ;
- $P(j|n)$  Probabilidade associada ao nó  $j$  condicionada à ocorrência do evento do nó  $n$  na árvore  $\Omega'$ ;
- $\pi(i,j|m,n)$  Plano de transporte entre os nós  $i$  e  $j$  condicionados à ocorrência dos nós  $m$  e  $n$ .

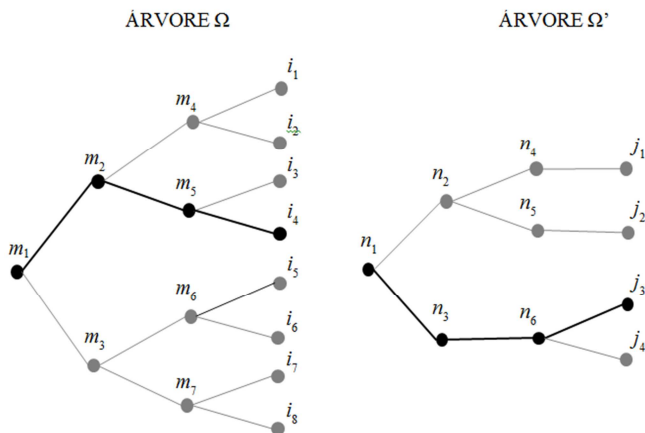
A nomenclatura utilizada para o cálculo da distância aninhada é apresentada na Figura 2.5.

**Figura 2.5 – Representação da nomenclatura para o cálculo da distância aninhada entre duas árvores.**



O plano de transporte  $\pi_{ij}$  está definido para os nós  $i \in \mathcal{N}_T$ ,  $j \in \mathcal{N}'_T$ . Os nós  $m \in \mathcal{N}_t$  e  $n \in \mathcal{N}'_t$ , referem-se a nós arbitrários dentro das árvores  $\Omega$  e  $\Omega'$  respectivamente. Para ilustrar o equacionamento das restrições apresentadas em (2.12) e (2.13), considere a estrutura das árvores indicada na Figura 2.6.

**Figura 2.6 – Exemplo para ilustrar o equacionamento das restrições do problema da distância aninhada.**



Como exemplo, apresentam-se as restrições encontradas entre o cenário da árvore  $\Omega$  composto pela trajetória entre o nó  $m_1$  e o nó  $i_4$  e o cenário da árvore  $\Omega'$  formado pela trajetória entre o nó  $n_1$  e o nó  $j_3$ .

Para (2.12), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \pi(i_4, j_3 | m_1, n_1) + \pi(i_4, j_3 | m_1, n_3) + \pi(i_4, j_3 | m_1, n_6) &= P(i_4 | m_1), \\
 \pi(i_4, j_3 | m_2, n_1) + \pi(i_4, j_3 | m_2, n_3) + \pi(i_4, j_3 | m_2, n_6) &= P(i_4 | m_2), \\
 \pi(i_4, j_3 | m_5, n_1) + \pi(i_4, j_3 | m_5, n_3) + \pi(i_4, j_3 | m_5, n_6) &= P(i_4 | m_5).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

De (2.13), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \pi(i_4, j_3 | m_1, n_1) + \pi(i_4, j_3 | m_2, n_1) + \pi(i_4, j_3 | m_5, n_1) &= P'(j_3 | n_1), \\
 \pi(i_4, j_3 | m_1, n_3) + \pi(i_4, j_3 | m_2, n_3) + \pi(i_4, j_3 | m_5, n_3) &= P'(j_3 | n_3), \\
 \pi(i_4, j_3 | m_1, n_6) + \pi(i_4, j_3 | m_2, n_6) + \pi(i_4, j_3 | m_5, n_6) &= P'(j_3 | n_6).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Analogamente todas as combinações entre os cenários das árvores podem ser obtidas como em (2.14) e (2.15). Contudo, o plano de transporte condicionado  $\pi(i,j|m,n)$  não é conhecido e deve ser relacionado com o plano de transporte  $\pi_{ij}$  indicado em (2.11). Com este fim, aplica-se a seguinte relação (KOVACEVIC; PICHLER, 2012):

$$\pi(i, j | m, n) = \frac{\pi_{ij}}{\sum_{i' \subset m, j' \subset n} \pi_{i'j'}}. \quad (2.16)$$

Além disso, as probabilidades condicionadas cumprem a seguinte propriedade:

$$P(i | m) = \frac{P(i)}{P(m)}, \quad P'(j | n) = \frac{P'(j)}{P'(n)}. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.16) e (2.17) em (2.12) e (2.13), obtém-se o seguinte PL:

$$\mathbb{D}(i, j) = \min_{\pi_{ij}} \sum_{ij} d_{ij}^r \pi_{ij} \quad (2.18)$$

s.a:

$$P(i) \sum_{i' \subset m, j' \subset n} \pi_{i'j'} = P(m) \sum_{j' \subset n} \pi_{ij'}, \quad (m \supset i) \quad (2.19)$$

$$P'(j) \sum_{i' \subset m, j' \subset n} \pi_{i'j'} = P'(n) \sum_{i' \subset m} \pi_{i'j} \quad (n \supset j) \quad (2.20)$$

$$\sum_{ij} \pi_{ij} = 1 \quad (2.21)$$

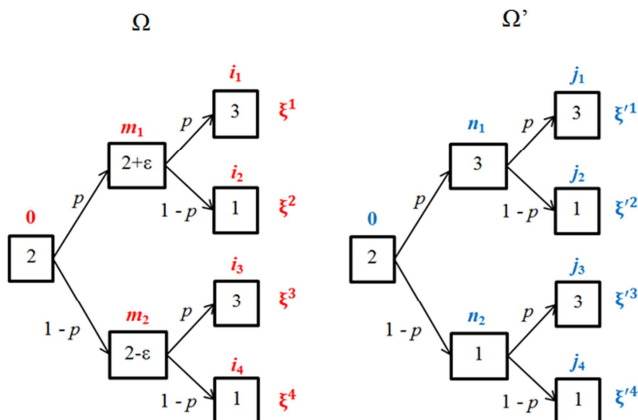
$$\pi_{ij} \geq 0 \quad (2.22)$$

No problema (2.18) - (2.22) o número de restrições de igualdade totais está dado por  $\sum_{t=2}^T \left( \bar{\mathcal{N}}_t \cdot \bar{\mathcal{N}}'_{t-1} + \bar{\mathcal{N}}_{t-1} \cdot \bar{\mathcal{N}}'_t \right) + 1$ , sendo  $\bar{\mathcal{N}}_t$  e  $\bar{\mathcal{N}}'_t$  o tamanho dos conjuntos  $\mathcal{N}_t$  e  $\mathcal{N}'_t$  da árvore  $\Omega$  e  $\Omega'$  respectivamente. Na sequência, apresenta-se um exemplo numérico referente a uma aplicação simples da distância aninhada.

### 2.4.1 Exemplo 1 – Cálculo da distância aninhada

Com o objetivo de ilustrar o cálculo da distância multiestágio, considere as árvores indicadas na Figura 2.7. Pretende-se realizar o cálculo da distância aninhada utilizando o PL (2.18) – (2.22), considerando  $r=1$ . As duas árvores do exemplo têm a mesma estrutura, com a diferença que a realização do primeiro estágio aleatório da árvore 1, contém um parâmetro  $\varepsilon$ , definido para  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Note que se  $\varepsilon = 1$  as árvores são idênticas e a distância aninhada é igual a zero (0). Intuitivamente pode-se concluir ainda que o comportamento da distância aninhada tem a tendência de diminuir à medida que  $\varepsilon$  aproxima-se a 1.

Figura 2.7 – Exemplo cálculo da distância aninhada.



Notação:

$m, i$ : Nós da árvore 1;

$n, j$ : Nós da árvore 2;

$\xi$ : Cenários da árvore 1;

$\xi'$ : Cenários da árvore 2.

A função objetivo do PL associado com a distância aninhada é apresentada como segue:

$$\min_{\pi_{ij}} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 d_{ij} \pi_{ij}$$

s.a:

$$p \cdot (\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{21} + \pi_{22}) = \pi_{11} + \pi_{12}$$

$$(1-p) \cdot (\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{21} + \pi_{22}) = \pi_{21} + \pi_{22}$$

$$p \cdot (\pi_{13} + \pi_{14} + \pi_{23} + \pi_{24}) = \pi_{13} + \pi_{14}$$

$$(1-p) \cdot (\pi_{13} + \pi_{14} + \pi_{23} + \pi_{24}) = \pi_{23} + \pi_{24}$$

$$p \cdot (\pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{41} + \pi_{42}) = \pi_{31} + \pi_{32}$$

$$(1-p) \cdot (\pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{41} + \pi_{42}) = \pi_{41} + \pi_{42}$$

$$p \cdot (\pi_{33} + \pi_{34} + \pi_{43} + \pi_{44}) = \pi_{33} + \pi_{34}$$

$$(1-p) \cdot (\pi_{33} + \pi_{34} + \pi_{43} + \pi_{44}) = \pi_{43} + \pi_{44}$$

$$p \cdot (\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{21} + \pi_{22}) = \pi_{11} + \pi_{21}$$

$$(1-p) \cdot (\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{21} + \pi_{22}) = \pi_{12} + \pi_{22}$$

$$p \cdot (\pi_{13} + \pi_{14} + \pi_{23} + \pi_{24}) = \pi_{13} + \pi_{23}$$

$$(1-p) \cdot (\pi_{13} + \pi_{14} + \pi_{23} + \pi_{24}) = \pi_{14} + \pi_{24}$$

$$p \cdot (\pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{41} + \pi_{42}) = \pi_{31} + \pi_{41}$$

$$(1-p) \cdot (\pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{41} + \pi_{42}) = \pi_{32} + \pi_{42}$$

$$p \cdot (\pi_{33} + \pi_{34} + \pi_{43} + \pi_{44}) = \pi_{33} + \pi_{43}$$

$$(1-p) \cdot (\pi_{33} + \pi_{34} + \pi_{43} + \pi_{44}) = \pi_{34} + \pi_{44}$$

$$\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} + \pi_{14} + \pi_{21} + \pi_{22} + \pi_{23} + \pi_{24} = p$$

$$\pi_{31} + \pi_{32} + \pi_{33} + \pi_{34} + \pi_{41} + \pi_{42} + \pi_{43} + \pi_{44} = 1-p$$

$$\pi_{11} + \pi_{21} + \pi_{31} + \pi_{41} + \pi_{12} + \pi_{22} + \pi_{32} + \pi_{42} = p$$

$$\pi_{13} + \pi_{23} + \pi_{33} + \pi_{43} + \pi_{14} + \pi_{24} + \pi_{34} + \pi_{44} = 1-p$$

$$\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13} + \pi_{14} + \dots + \pi_{41} + \pi_{42} + \pi_{43} + \pi_{44} = 1$$

$$\pi_{ij} \geq 0$$

em que:

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & 3-\varepsilon & 1+\varepsilon & 3+\varepsilon \\ 3-\varepsilon & 1-\varepsilon & 3+\varepsilon & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & 3+\varepsilon & 1-\varepsilon & 3-\varepsilon \\ 3+\varepsilon & 1+\varepsilon & 3-\varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$



As linhas e colunas da matriz  $d_{ij}$ , representam a diferença entre as realizações dos cenários  $\xi^i$  da árvore 1 e dos cenários  $\xi^{j'}$  da árvore 2; por exemplo, a distância entre o cenário  $\xi^1$  e  $\xi^{3'}$  é  $d_{13} = d(\xi^1, \xi^{3'})$ , dada por:

$$d(\xi^1, \xi^{3'}) = |\xi_1^1 - \xi_1^{3'}| + |\xi_2^1 - \xi_2^{3'}| + |\xi_3^1 - \xi_3^{3'}|$$

portanto:

$$d(\xi^1, \xi^{3'}) = |2 - 2| + |2 + \varepsilon - 1| + |3 - 3| = 1 + \varepsilon$$

O resultado da distância aninhada das árvores da Figura 2.7, para diferentes valores de  $\varepsilon$  e  $p$  pode ser vistos na Tabela 2.1.

**Tabela 2.1 – Resultados da distância aninhada.**

$\varepsilon$	$\mathbb{D}(\mathbb{P}, \mathbb{P}')$	$p$		
		0,3	0,5	0,7
0,0	1,0	$\pi_y = \begin{bmatrix} 0,09 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,49 \end{bmatrix}$	$\pi_y = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$	$\pi_y = \begin{bmatrix} 0,49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,09 \end{bmatrix}$
0,3	0,7			
0,5	0,5			
1,0	0,0			

Conforme pode ser visto na Tabela 2.1, a distância aninhada entre as árvores diminui a medida que o parâmetro  $\varepsilon$  aproxima-se de 1, dado que as árvores vão se aproximando estatisticamente.

Nota-se que para todos os casos do exemplo, o plano de transporte resultante é uma matriz diagonal. Devido às características do problema, as menores distâncias probabilísticas se encontram entre cada par de cenários análogos nas árvores. Nesse sentido, para transportar todos os elementos de  $P$  (na árvore 1) para  $P'$  (na árvore 2) ao menor custo possível, o melhor caminho é  $\pi_{ij}$  com  $i=j$ . Por exemplo, a quantidade do elemento do cenário  $i_1$  em sua totalidade será transportada para o cenário  $j_1$  através do valor de transporte  $\pi_{11}$ . Observe-se que em nenhuma porcentagem a quantidade do cenário  $i_1$  será levada para os cenários  $j_2, j_3$  nem  $j_4$ ; portanto,  $\pi_{21} = \pi_{31} = \pi_{41} = 0$ .

A grande dificuldade da formulação apresentada nesta seção é o fato de que o problema (2.18) – (2.22) se torna excessivamente grande para árvores de grande porte, podendo ser computacionalmente intratável. A fim de resolver o PL (2.18) – (2.22) para árvores grandes, faz-se necessário decompor o problema em subproblemas menores. Este assunto é tratado na seção seguinte.

## 2.4.2 Cálculo da distância aninhada de forma recursiva

O cálculo da distância aninhada de forma recursiva foi introduzido em (KOVACEVIC; PICHLER, 2012). De forma geral, ao longo do processo recursivo devem-se resolver vários problemas de PL, cuja estrutura é dada por (2.23) – (2.26).

$$\min_{\pi(\cdot, \cdot | m, n)} \sum_{i \in m_+, j \in n_+} \pi(i, j | m, n) \cdot d(i, j)^r \quad (2.23)$$

s.a:

$$\sum_{j \in n_+} \pi(i, j | m, n) = P(i | m) \quad (i \in m_+) \quad (2.24)$$

$$\sum_{i \in m_+} \pi(i, j | m, n) = P'(j | n) \quad (j \in n_+) \quad (2.25)$$

$$\pi(i, j | m, n) \geq 0 \quad (2.26)$$

Como se trata de um cálculo recursivo, a distância  $d(i, j)^r$  em (2.23) para os estágios diferentes do último estágio, isto é,  $t < T$ , deve-se levar em conta a distância aninhada entre os nós sucessores calculada previamente. O valor ótimo deste problema por etapa,  $\mathbb{D}_r(i, j)^r$ , pode ser interpretado como a distância aninhada condicionada à ocorrência dos eventos dos nós  $m$  e  $n$ . Desta forma, para  $i \in \mathcal{N}_T$  e  $j \in \mathcal{N}'_T$ , a distância  $d^r(i, j)$  é apenas  $d_{ij}^r = |\xi_T^i - \xi_T^j|^r$ . No entanto, para  $m \in \mathcal{N}_t$  e  $n \in \mathcal{N}_t$  com  $t < T$ , a nova distância  $d^r(m, n)$  é definida por:

$$d^r(m, n) = \left| \xi_t^m - \xi_t^n \right|^r + \mathbb{D}_r(m_+, n_+) \quad (2.27)$$

O plano de transporte ótimo para cada nó  $i$  e  $j$  é rearranjado da seguinte maneira:

$$\pi(i, j) = \pi(i_T, j_T | i_{T-1}, j_{T-1}) \cdot \pi(i_{T-1}, j_{T-1} | i_{T-2}, j_{T-2}) \dots \pi(i_1, j_1 | 0, 0) \quad (2.28)$$

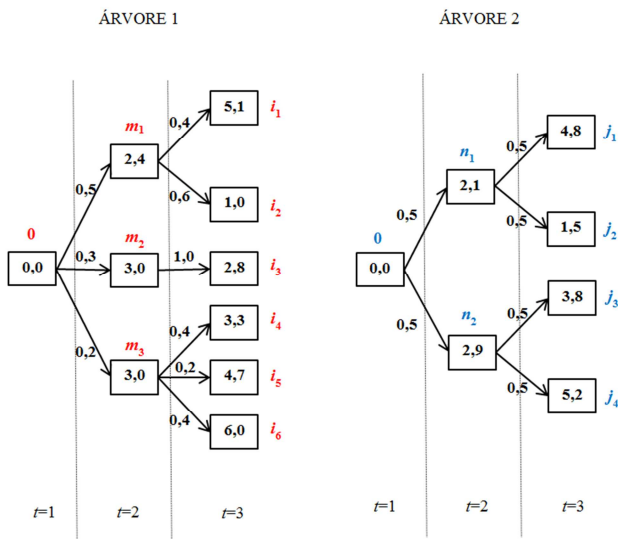
A distância aninhada é encontrada quando se resolve o problema de transporte para os nós raízes das árvores, isto é, entre os nós (0,0), dada pela seguinte expressão:

$$\mathbb{D}_r(\mathbb{P}, \mathbb{P}')^r = \mathbb{D}_r(0, 0)^r \quad (2.29)$$

A solução do cálculo recursivo dado em (2.29) é um cálculo exato de (2.18) - (2.22), como é demonstrado no Teorema 2 de (KOVACEVIC; PICHLER, 2012).

Para ilustrar o processo de cálculo recursivo da distância aninhada, considere as árvores indicadas na Figura 2.8. Estas árvores representam dois processos estocásticos discretos, caracterizadas por ter um estágio determinístico e dois estágios probabilísticos. Nota-se que a estrutura da informação entre as árvores não é igual, dado que apresentam um número distinto de aberturas probabilísticas por estágio e diferentes valores de realizações.

**Figura 2.8 – Árvores utilizadas no exemplo do cálculo da distância aninhada de forma recursiva.**



Fonte: (PFLUG; PICHLER, 2011).

Com base em (2.23) – (2.26) são calculadas as distâncias aninhadas condicionadas de todas as combinações possíveis entre os nós  $m$  e  $n$ , predecessores respectivamente dos nós  $i$  e  $j$ . Subsequentemente, é encontrada a distância entre os nós raízes, sendo esta a distância multiestágio entre as árvores em avaliação, de acordo com (2.29).

- Para os nós  $m$  e  $n$ :

A modo de exemplo é apresentado o passo a passo do cálculo da distância aninhada condicionada à ocorrência dos nós  $m_1$  e  $n_1$ , a qual encontra-se resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\mathbb{D}(m_1, n_1) = \min \pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) \cdot d(i_1, j_1) + \pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) \cdot d(i_1, j_2) \\ + \pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) \cdot d(i_2, j_1) + \pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) \cdot d(i_2, j_2)$$

s.a:

$$\begin{aligned} \pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) + \pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) &= P(i_1 | m_1) \\ \pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) + \pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) &= P(i_2 | m_1) \\ \pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) + \pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) &= P'(j_1 | n_1) \\ \pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) + \pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) &= P'(j_2 | n_1) \\ \pi(\cdot, \cdot | m, n) &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Acima as probabilidades condicionadas têm os seguintes valores (dados do problema, conforme Figura 2.8):

$$\begin{aligned} P(i_1 | m_1) &= 0.4 & P(j_1 | n_1) &= 0.5 \\ P(i_2 | m_1) &= 0.6 & P(j_2 | n_1) &= 0.5 \end{aligned}$$

As distâncias entre cenários pertencentes ao estágio  $T$  é igual à norma das realizações correspondentes a cada nó  $i$  e  $j$ , isto é:

$$\begin{aligned} d(i_1, j_1) &= \left| \xi_3^1 - \xi_3^1 \right| = |5.1 - 4.8| = 0.3 \\ d(i_1, j_2) &= \left| \xi_3^1 - \xi_3^2 \right| = |5.1 - 1.5| = 3.6 \\ d(i_2, j_1) &= \left| \xi_3^2 - \xi_3^1 \right| = |1.0 - 4.8| = 3.8 \\ d(i_2, j_2) &= \left| \xi_3^2 - \xi_3^2 \right| = |1.0 - 1.5| = 0.5 \end{aligned}$$

A solução do problema de PL (2.30) é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(m_1, n_1) &= 0.75 \\
\pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) &= 0.4 \\
\pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) &= 0.0 \\
\pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) &= 0.1 \\
\pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) &= 0.5
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Seguindo a mesma metodologia, as soluções para as combinações restantes entre os nós  $m$  e  $n$  são apresentadas a seguir.

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(m_1, n_2) &= 1.86 \\
\pi(i_1, j_3 | m_1, n_2) &= 0.0 \\
\pi(i_1, j_4 | m_1, n_2) &= 0.4 \\
\pi(i_2, j_3 | m_1, n_2) &= 0.5 \\
\pi(i_2, j_4 | m_1, n_2) &= 0.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(m_2, n_1) &= 1.65 & \mathbb{D}(m_2, n_2) &= 1.70 \\
\pi(i_3, j_1 | m_2, n_1) &= 0.5 & \pi(i_3, j_3 | m_2, n_2) &= 0.5 \\
\pi(i_3, j_2 | m_2, n_1) &= 0.4 & \pi(i_3, j_4 | m_2, n_2) &= 0.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(m_3, n_1) &= 1.53 & \mathbb{D}(m_3, n_2) &= 0.66 \\
\pi(i_4, j_1 | m_3, n_1) &= 0.0 & \pi(i_4, j_3 | m_3, n_2) &= 0.4 \\
\pi(i_4, j_2 | m_3, n_1) &= 0.4 & \pi(i_4, j_4 | m_3, n_2) &= 0.0 \\
\pi(i_5, j_1 | m_3, n_1) &= 0.1 & \pi(i_5, j_3 | m_3, n_2) &= 0.1 \\
\pi(i_5, j_2 | m_3, n_1) &= 0.1 & \pi(i_5, j_4 | m_3, n_2) &= 0.1 \\
\pi(i_6, j_1 | m_3, n_1) &= 0.4 & \pi(i_6, j_3 | m_3, n_2) &= 0.0 \\
\pi(i_6, j_2 | m_3, n_1) &= 0.0 & \pi(i_6, j_4 | m_3, n_2) &= 0.4
\end{aligned}$$

- Para os nós raízes:

Seguindo o cálculo recursivo para o cálculo da distância aninhada, calcula-se então  $\mathbb{D}(0,0)$  por meio do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(0,0) = \min & \pi(m_1, n_1 | 0,0) \cdot d(m_1, n_1) + \pi(m_1, n_2 | 0,0) \cdot d(m_1, n_2) \\ & + \pi(m_2, n_1 | 0,0) \cdot d(m_2, n_1) + \pi(m_2, n_2 | 0,0) \cdot d(m_2, n_2) \\ & + \pi(m_3, n_1 | 0,0) \cdot d(m_3, n_1) + \pi(m_3, n_2 | 0,0) \cdot d(m_3, n_2) \end{aligned}$$

s.a:

$$\begin{aligned} \pi(m_1, n_1 | 0,0) + \pi(m_1, n_2 | 0,0) &= P(m_1) \\ \pi(m_2, n_1 | 0,0) + \pi(m_2, n_2 | 0,0) &= P(m_2) \\ \pi(m_3, n_1 | 0,0) + \pi(m_3, n_2 | 0,0) &= P(m_3) \\ \pi(m_1, n_1 | 0,0) + \pi(m_2, n_1 | 0,0) + \pi(m_3, n_1 | 0,0) &= P'(n_1) \\ \pi(m_1, n_2 | 0,0) + \pi(m_2, n_2 | 0,0) + \pi(m_3, n_2 | 0,0) &= P'(n_2) \\ \pi(\cdot, \cdot | 0,0) &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Em que:

$$\begin{aligned} P(m_1) &= 0.5 & P'(n_1) &= 0.5 \\ P(m_2) &= 0.3 & P'(n_2) &= 0.5 \\ P(m_3) &= 0.2 \end{aligned}$$

Para as distâncias entre cenários dos estágios diferentes a  $T$ , a distância entre nós leva em conta a distância probabilística dos nós sucessores; portanto, precisa-se somar a distância entre cenários e a distância aninhada condicionada encontrada na etapa recursiva anterior, como se mostra a seguir:

$$\begin{aligned}
d(m_1, n_1) &= \left| \xi_2^1 - \xi_2^1 \right| + \mathbb{D}(m_1, n_1) = |2.4 - 2.1| + 0.75 = 1.05 \\
d(m_1, n_2) &= \left| \xi_2^1 - \xi_2^2 \right| + \mathbb{D}(m_1, n_2) = |2.4 - 2.9| + 1.86 = 2.36 \\
d(m_2, n_1) &= \left| \xi_2^2 - \xi_2^1 \right| + \mathbb{D}(m_2, n_1) = |3.0 - 2.1| + 1.65 = 2.55 \\
d(m_2, n_2) &= \left| \xi_2^2 - \xi_2^2 \right| + \mathbb{D}(m_2, n_2) = |3.0 - 2.9| + 1.70 = 1.80 \\
d(m_3, n_1) &= \left| \xi_2^3 - \xi_2^1 \right| + \mathbb{D}(m_3, n_1) = |3.0 - 2.1| + 1.53 = 2.43 \\
d(m_3, n_2) &= \left| \xi_2^3 - \xi_2^2 \right| + \mathbb{D}(m_3, n_2) = |3.0 - 2.9| + 0.66 = 0.76
\end{aligned}$$

A solução do problema de PL (2.32) para encontrar a distância aninhada dos nós raízes da árvore é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(0,0) &= 1.217 \\
\pi(m_1, n_1 | 0,0) &= 0.5 \\
\pi(m_1, n_2 | 0,0) &= 0.0 \\
\pi(m_2, n_1 | 0,0) &= 0.3 \\
\pi(m_2, n_2 | 0,0) &= 0.0 \\
\pi(m_3, n_1 | 0,0) &= 0.0 \\
\pi(m_3, n_2 | 0,0) &= 0.2
\end{aligned}$$

De acordo com (2.29), a distância aninhada entre as árvores em estudo é:

$$\mathbb{D}_r(\mathbb{P}, \mathbb{P}') = \mathbb{D}_r(0,0) = 1.217 \tag{2.33}$$

O plano de transporte para os nós do estágio  $T$  é encontrado de acordo com (2.28):

$$\begin{aligned}
\pi(i_1, j_1) &= \pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) \cdot \pi(m_1, n_1 | 0, 0) = 0.20 \\
\pi(i_1, j_2) &= \pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) \cdot \pi(m_1, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_2, j_1) &= \pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) \cdot \pi(m_1, n_1 | 0, 0) = 0.05 \\
\pi(i_2, j_2) &= \pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) \cdot \pi(m_1, n_1 | 0, 0) = 0.25 \\
\pi(i_1, j_3) &= \pi(i_1, j_3 | m_1, n_2) \cdot \pi(m_1, n_2 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_1, j_4) &= \pi(i_1, j_4 | m_1, n_2) \cdot \pi(m_1, n_2 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_2, j_3) &= \pi(i_2, j_3 | m_1, n_2) \cdot \pi(m_1, n_2 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_2, j_4) &= \pi(i_2, j_4 | m_1, n_2) \cdot \pi(m_1, n_2 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_3, j_1) &= \pi(i_3, j_1 | m_2, n_1) \cdot \pi(m_2, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_3, j_2) &= \pi(i_3, j_2 | m_2, n_1) \cdot \pi(m_2, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_3, j_3) &= \pi(i_3, j_3 | m_2, n_2) \cdot \pi(m_2, n_2 | 0, 0) = 0.15 \\
\pi(i_3, j_4) &= \pi(i_3, j_4 | m_2, n_2) \cdot \pi(m_2, n_2 | 0, 0) = 0.15 \\
\pi(i_4, j_1) &= \pi(i_4, j_1 | m_3, n_1) \cdot \pi(m_3, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_4, j_2) &= \pi(i_4, j_2 | m_3, n_1) \cdot \pi(m_3, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_5, j_1) &= \pi(i_5, j_1 | m_3, n_1) \cdot \pi(m_3, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_5, j_2) &= \pi(i_5, j_2 | m_3, n_1) \cdot \pi(m_3, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_6, j_1) &= \pi(i_6, j_1 | m_3, n_1) \cdot \pi(m_3, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_6, j_2) &= \pi(i_6, j_2 | m_3, n_1) \cdot \pi(m_3, n_1 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_4, j_3) &= \pi(i_4, j_3 | m_3, n_2) \cdot \pi(m_3, n_2 | 0, 0) = 0.08 \\
\pi(i_4, j_4) &= \pi(i_4, j_4 | m_3, n_2) \cdot \pi(m_3, n_2 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_5, j_3) &= \pi(i_5, j_3 | m_3, n_2) \cdot \pi(m_3, n_2 | 0, 0) = 0.02 \\
\pi(i_5, j_4) &= \pi(i_5, j_4 | m_3, n_2) \cdot \pi(m_3, n_2 | 0, 0) = 0.02 \\
\pi(i_6, j_3) &= \pi(i_6, j_3 | m_3, n_2) \cdot \pi(m_3, n_2 | 0, 0) = 0.00 \\
\pi(i_6, j_4) &= \pi(i_6, j_4 | m_3, n_2) \cdot \pi(m_3, n_2 | 0, 0) = 0.08
\end{aligned}$$

Note que o cálculo da distância aninhada foi realizado através da resolução de uma sequência de problemas de transporte lineares entre os nós das árvores. O número de variáveis de cada subproblema depende



do número de nós sucessores e dos nós avaliados, o que em geral resulta em um problema bem comportado e de baixo custo computacional.

É importante ressaltar que o cálculo recursivo da distância aninhada elimina as dependências lineares na obtenção das restrições do problema de transporte, sendo assim, um método eficiente para encontrar a distância probabilística entre árvores multiestágio.

Conforme visto, a distância aninhada é uma métrica adequada para encontrar a distância probabilística que existe entre duas árvores multiestágios. A importância desta métrica é que consegue captar o incremento da informação com o tempo das variáveis aleatórias multiestágio. O cálculo da distância aninhada é feito de forma recursiva, sendo assim um problema de programação linear com um custo computacional relativamente baixo, adequado para problemas de grande porte. A forma recursiva é um cálculo exato do problema da distância aninhada entre duas árvores de cenários.

Até o momento somente se tem apresentado como calcular a distância multiestágio entre duas árvores, no próximo capítulo se indicará como utilizar o cálculo da distância aninhada para encontrar uma árvore reduzida que tenha a menor distância possível com respeito a uma árvore original dada.

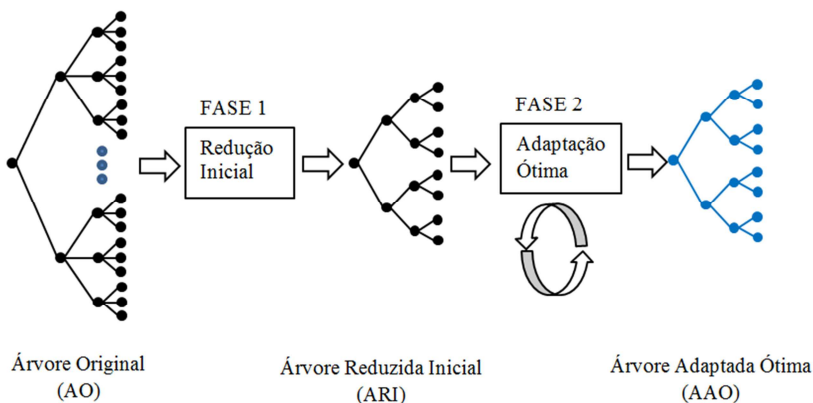


### 3. ALGORITMO DE REDUÇÃO DE ÁRVORES DE CENÁRIOS

Este capítulo visa apresentar o algoritmo de redução de árvores de cenários multiestágio, desenvolvido em (KOVACEVIC; PICHLER, 2012), o qual tem como elemento principal os conceitos da distância aninhada apresentados no capítulo anterior. Além disso, mostram-se alguns aprimoramentos para reduzir árvores de cenários de vazões de afluências incrementais de problemas de planejamento hidrotérmico.

De forma sucinta, o algoritmo proposto aqui para a redução de uma AO, tem duas fases: (i) a primeira, conhecida como redução inicial, fornece uma árvore reduzida inicial (ARI) com um tamanho adequado previamente definido; porém, sem garantir uma proximidade probabilística com respeito à árvore original; (ii) a segunda aproxima iterativamente as realizações e probabilidades da árvore reduzida de modo que seja obtida a menor distância aninhada com respeito à AO; ao final desta fase é obtida uma árvore reduzida adaptada ótima (AAO). De forma ilustrativa, este processo é apresentado na Figura 3.1.

**Figura 3.1 – Diagrama Esquemático do algoritmo de redução de árvores de cenários.**



Dentro do processo de redução, a menor distância aninhada encontrada é entre a AO e a AAO, isto é:

$$\mathbb{D}_r(AO, AAO) \leq \mathbb{D}_r(AO, ARI).$$

Deste modo, o propósito a seguir é apresentar os detalhes da fase 1 e 2 do algoritmo de redução de árvores de cenários. Para tornar a apresentação didática, os algoritmos são apresentados com base em exemplos ilustrativos com árvores de pequeno porte.

### 3.1 FASE 1: REDUÇÃO INICIAL

A primeira fase do algoritmo de redução tem o intuito de obter uma árvore reduzida inicial com um tamanho preestabelecido. Além disso, pretende-se obter uma árvore reduzida que seja um bom ponto de partida para o processo iterativo da fase de adaptação ótima (Fase 2). Neste trabalho é utilizada uma heurística sugerida por (PFLUG, 2013), a qual realiza cálculos da distância aninhada entre as subárvores formadas em cada estágio da árvore original, como é indicado no Algoritmo 3-1. Contudo, esta heurística é aplicável para casos exclusivos em que o número de aberturas por estágio na árvore original for igual em cada nó predecessor. Assim, para outras estruturas de árvores de cenários devem ser desenvolvidos outros métodos que encontrem o tamanho desejado da árvore reduzida. No caso de árvores de cenários de grande porte, esta heurística poderia implicar um alto custo computacional no cálculo de múltiplos problemas da distância aninhada.

#### Algoritmo 3-1: Algoritmo de Redução Inicial.

1. Definir o número de nós por estágio para a árvore reduzida<sup>4</sup>;
2. Inicializar  $t=2$ , isto é, começar no primeiro estágio estocástico;
3. Definir as subárvores de todos os nós associados ao estágio  $t$  da árvore original, sucessores de um mesmo nó em  $t-1$ . Cada subárvore está formada por um nó do estágio  $t$  como nó raiz, além de seus respectivos nós sucessores até o estágio final  $T$ ;
4. Calcular a distância aninhada entre todas as subárvores do estágio  $t$ , por meio do cálculo recursivo da distância aninhada definido em (2.23) – (2.26). Recomenda-se utilizar  $r=2$ ;
5. Identificar as subárvores que tenham a menor distância aninhada;
6. Combinar as subárvores identificadas no Passo 5. Para este fim, realiza-se a média entre as realizações de cada par de

---

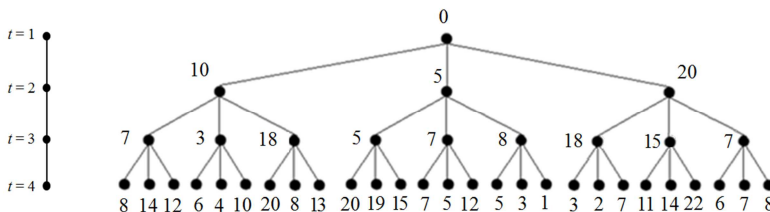
<sup>4</sup> A estrutura da árvore reduzida é um dado de entrada do algoritmo; portanto, o número de aberturas da árvore reduzida por estágio deve ser fornecido.

nós análogos em cada estágio. Além disso, atualizam-se as probabilidades da árvore dependendo do número de nós resultantes no estágio  $t$ , supondo que a ocorrência de cada nó da árvore resultante é equiprovável;

7. Se o número de nós no estágio  $t$  for igual ao número de nós prefixados para a árvore reduzida (Passo 1), fazer  $t = t+1$ . Caso contrário, voltar ao Passo 3;
8. Se  $t > T$  então finalizar, caso contrário, voltar ao Passo 3.

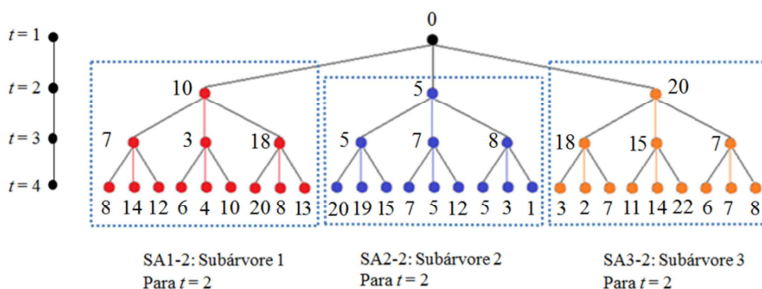
Para auxiliar na compreensão do algoritmo de redução inicial, considere uma árvore original equiprovável com  $T=4$  e 3 aberturas por estágio, isto é, 27 cenários, conforme mostra a Figura 3.2. Os valores indicados acima de cada nó da árvore correspondem aos valores das realizações. Pretende-se reduzi-la a uma árvore com 2 aberturas por estágio, ou seja, com um total de 8 cenários. Na sequência, utiliza-se o algoritmo de redução inicial, descrevendo o passo a passo realizado.

**Figura 3.2 – Exemplo de árvore para redução inicial.**



Inicializando  $t=2$ , identificam-se 3 subárvores possíveis, correspondentes aos 3 nós deste estágio sucessores do nó 0, como é apresentado na Figura 3.3:

**Figura 3.3 – Subárvores obtidas para  $t=2$ .**



O próximo passo consiste em calcular as distâncias aninhadas entre as subárvores apresentadas. Os resultados são apresentados a seguir:

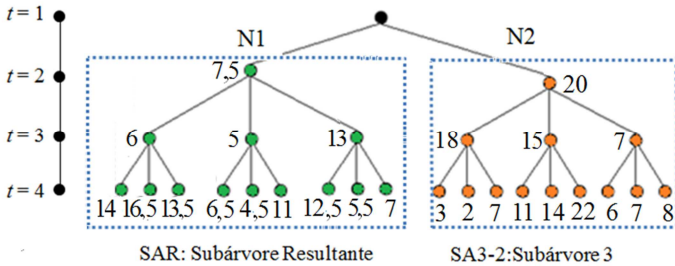
$$\mathbb{D}_2(\text{SA1-2}, \text{SA2-2}) = 106,78$$

$$\mathbb{D}_2(\text{SA1-2}, \text{SA3-2}) = 164,67$$

$$\mathbb{D}_2(\text{SA2-2}, \text{SA3-2}) = 307,44$$

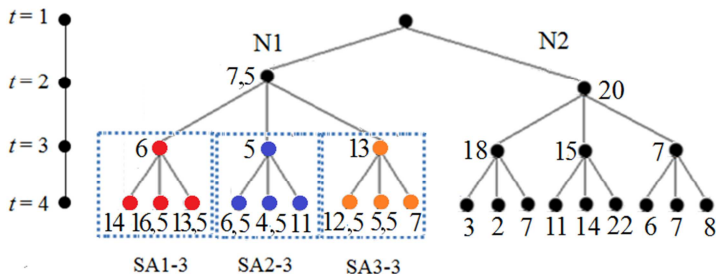
Assim, as subárvores SA1-2 e SA2-2 são combinadas seguindo as indicações do Passo 6 do Algoritmo de Redução Inicial. Os novos nós da Subárvore Resultante (SAR) são obtidos pelos valores médios das realizações dos nós correspondentes das subárvores em todos os estágios respectivos. Uma ilustração da árvore resultante deste processo é indicada na Figura 3.4:

**Figura 3.4 – Árvore resultante do processo de combinação em  $t=2$ .**



Nota-se que, neste ponto, para  $t=2$  o número de aberturas é igual a 2, como este é o número de realizações predefinido para cada estágio da ARI pode-se prosseguir ao estágio seguinte, isto é,  $t= 3$ . O processo repete-se identificando as possíveis subárvores do novo estágio em avaliação; primeiro para os nós sucessores de N1, e depois para os nós sucessores de N2. A Figura 3.5, mostra este processo de maneira ilustrativa.

**Figura 3.5 – Subárvores obtidas para o nó N1 em  $t=3$ .**



Calcula-se a distância aninhada entre as subárvores SA1-3, SA2-3 e SA3-3. Os resultados encontrados indicam-se a seguir.

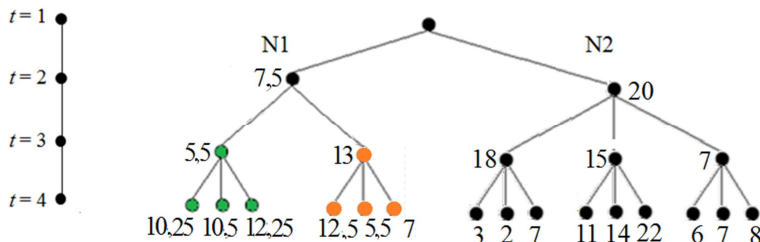
$$\mathbb{D}_2(\text{SA1-3}, \text{SA2-3}) = 56,83$$

$$\mathbb{D}_2(\text{SA1-3}, \text{SA3-3}) = 92,00$$

$$\mathbb{D}_2(\text{SA2-3}, \text{SA3-3}) = 65,17$$

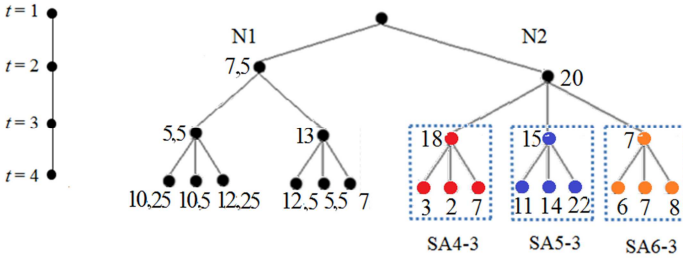
Neste caso, a menor distância aninhada encontrada é entre as subárvores SA1-3 e SA2-3 então, por conseguinte, as realizações e probabilidades dessas subárvores são combinadas. A árvore resultante é apresentada na Figura 3.6.

**Figura 3.6 – Árvore resultante do processo de combinação dos nós sucessores de N1 em  $t=3$ .**



Com respeito aos nós sucessores de N2 considerando  $t=3$ , repete-se o mesmo procedimento como se mostra esquematicamente na Figura 3.7

**Figura 3.7 – Subárvores obtidas para o nó N2 em  $t=3$ .**



As distâncias aninhadas entre as subárvores conformadas pelos nós sucessores ao nó N2 se mostram na sequência:

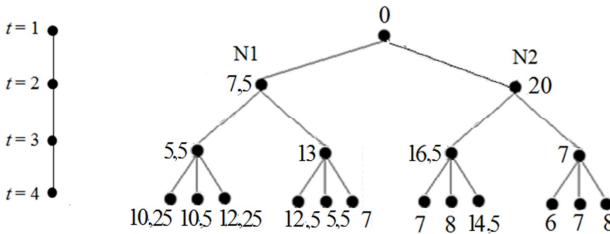
$$\mathbb{D}_2(\text{SA4-3}, \text{SA5-3}) = 151,33$$

$$\mathbb{D}_2(\text{SA4-3}, \text{SA6-3}) = 267,00$$

$$\mathbb{D}_2(\text{SA5-3}, \text{SA6-3}) = 259,00$$

A estrutura da árvore após a combinação das subárvores com a menor distância aninhada encontrada para o nó N2 em  $t=3$  é apresentada na Figura 3.8.

**Figura 3.8 – Árvore resultante do processo de combinação dos nós sucessores de N2 em  $t=3$ .**

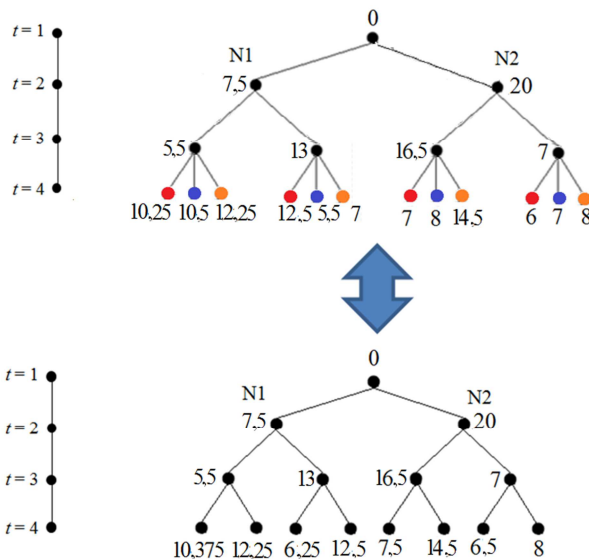


Percebe-se que o número de nós sucessores em  $t=3$  é igual ao número requerido para a árvore reduzida. Assim, continua-se o processo para o seguinte estágio, isto é,  $t=4$ . Para os nós do último estágio, calcula-se a distância entre as realizações, para por fim, combinar da



mesma maneira até ter somente 2 nós em cada abertura da árvore em  $t=4$ . Este processo é indicado na Figura 3.9.

**Figura 3.9 – Processo de combinação dos nós do último estágio.**



Observe-se que ao final do processo no estágio  $t=4$ , a estrutura da árvore reduzida requerida é obtida. As probabilidades de cada realização em cada estágio de tempo é igual a 50%, lembrando que é suposto que a ocorrência de qualquer realização é equiprovável.

Sendo que a combinação de subárvores em todos os estágios é baseada na distância aninhada, é obtida uma primeira boa aproximação da árvore reduzida. Esta árvore é denominada como árvore reduzida inicial, é o ponto de partida para a Fase 2 do algoritmo de redução, que será descrito a seguir.

### 3.2 FASE 2: ADAPTAÇÃO ÓTIMA

No tocante à segunda fase do algoritmo de redução, denotada como adaptação ótima, atualizam-se de forma iterativa todas as realizações e probabilidades da árvore reduzida. Deste modo, obtém-se uma árvore com tamanho reduzido que tem a menor distância aninhada

possível com respeito à árvore original. Para isto, segue-se o seguinte algoritmo proposto por (KOVACEVIC; PICHLER, 2012).

Algoritmo 3-2: Algoritmo de Adaptação Ótima.

1. Inicializar  $k=0$ . Sejam<sup>5</sup>  $q^0$  e  $P^0$ , respectivamente os vetores com as realizações e probabilidades da árvore reduzida inicial. Calcular a distância aninhada com norma euclidiana<sup>6</sup> entre a árvore original e a árvore reduzida inicial (obtida na Fase I: Redução Inicial). Assim, obtêm-se o plano de transporte e a distância aninhada entre estas duas árvores, isto é,  $\pi^0(m_t, n_t)$  e  $\mathbb{D}_2^0$  respectivamente;
2. Fazer  $k=k+1$ . Atualizar as realizações da árvore reduzida, com base em (3.1).

$$(q_t^{n_t})^k = \sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \frac{\pi^{k-1}(m_t, n_t)}{\sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \pi^{k-1}(m_t, n_t)} \cdot \xi_t^{m_t}, \quad (3.1)$$

em que,

- $(q_t^{n_t})^k$  Realização atualizada na iteração  $k$  da árvore reduzida, associada com o nó  $n_t$  pertencente ao estágio  $t$ ;
- $\xi_t^{m_t}$  Realização da árvore original, associada com o nó  $m_t$  pertencente ao estágio  $t$ .

Os nós  $m_t$  e  $n_t$ , referem-se a qualquer nó da árvore original e reduzida respectivamente, inclusive, aos nós do último estágio  $T$ .

O cálculo explícito indicado em (3.1), somente é possível de se obter quando é utilizada a norma euclidiana ( $r=2$ ) no problema da distância aninhada. Deste modo, garante-se que esta forma de atualização é a melhor escolha possível para as realizações da árvore reduzida (KOVACEVIC; PICHLER, 2012), como é mostrado a seguir:

<sup>5</sup> O sobrescrito nas realizações e probabilidades da árvore reduzida denota a iteração  $k$  do processo iterativo de atualização.

<sup>6</sup> O cálculo da distância aninhada com Norma Euclidiana ( $r=2$ ) é conveniente para a Fase 2 do algoritmo de redução, dada a possibilidade de encontrar uma expressão explícita para a atualização das realizações da árvore reduzida (KOVACEVIC; PICHLER, 2012).

Definindo:

$$f(q_t^{n_t}) = \sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \pi(m_t, n_t) \cdot \left\| \xi_t^{m_t} - q_t^{n_t} \right\|_2^2,$$

equivalente a :

$$f(q_t^{n_t}) = \sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \pi(m_t, n_t) \cdot (\xi_t^{m_t} - q_t^{n_t})^T \cdot \mathbf{I} \cdot (\xi_t^{m_t} - q_t^{n_t}).$$

Logo, a solução ótima  $\bar{q}_t^{n_t}$  do problema:

$$\min_{q_t^{n_t} \in \mathbb{R}^n} f(q_t^{n_t}),$$

é única e deve satisfazer  $\nabla f(\bar{q}_t^{n_t}) = 0$ . Note que:

$$\nabla f(\bar{q}_t^{n_t}) = 0 \rightarrow \sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \pi(m_t, n_t) \cdot 2 \cdot \mathbf{I} \cdot (\xi_t^{m_t} - \bar{q}_t^{n_t}) = 0.$$

A solução  $\bar{q}_t^{n_t}$  do sistema acima também é solução de:

$$\mathbf{I} \cdot \sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \pi(m_t, n_t) \cdot (\xi_t^{m_t} - \bar{q}_t^{n_t}) = 0.$$

Sendo  $\mathbf{I}$  uma matriz identidade, o sistema acima é satisfeito se, e somente se,

$$\sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \pi(m_t, n_t) \cdot (\xi_t^{m_t} - \bar{q}_t^{n_t}) = 0.$$

De onde:

$$q_t^{n_t} = \sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \frac{\pi(m_t, n_t)}{\sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \pi(m_t, n_t)} \cdot \xi_t^{m_t}.$$

3. Atualizar as probabilidades da árvore reduzida, baseado na solução do problema da distância aninhada de forma recursiva, tendo em conta que as probabilidades da árvore reduzida se convertem em variáveis de decisão. Para obter a distância  $d(i, j)$  entre dois cenários  $\xi^i$  e  $\xi^j$ , utiliza-se as realizações da árvore original e a última atualização das realizações da árvore reduzida (obtida no Passo 2). O problema associado é indicado a seguir:

$$\min_{\pi(\cdot, |m, n), P(\cdot | j, n)} \sum_{i \in m+, j \in n+} \pi(i, j | m, n) \cdot d(i, j)^2 \quad (3.2)$$

s.a:

$$\sum_{j \in n_+} \pi(i, j | m, n) = P(i | m) \quad (i \in m_+) \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in m_+} \pi(i, j | m, n) = P'(j | n) \quad (j \in n_+) \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_t} P'(j | n) = 1 \quad (3.5)$$

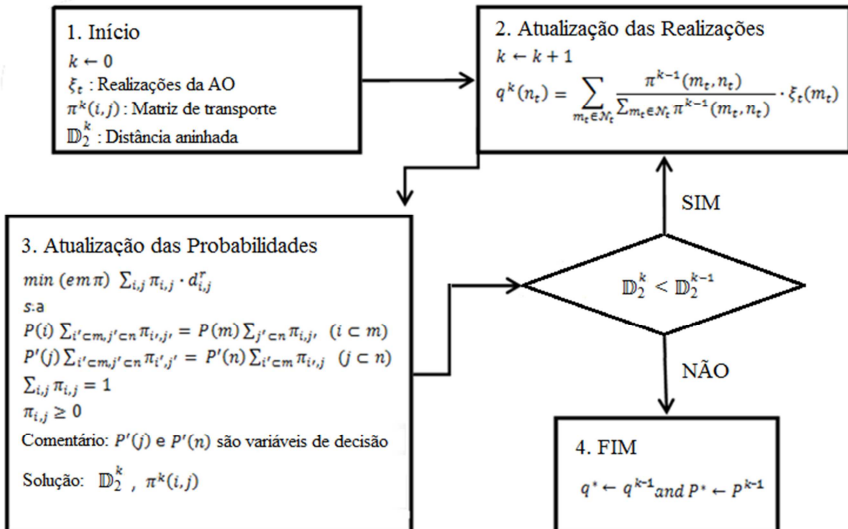
$$\pi(i, j | m, n) \geq 0 \quad (3.6)$$

Dado que as probabilidades da árvore reduzida em um mesmo estágio são variáveis de decisão, o problema de PL (3.2) - (3.6) deve ser formulado para todos os nós  $j \in \mathcal{N}_t$ . Além disso, da solução do problema, obtém-se a distância aninhada e o plano de transporte entre a árvore original e a atualização da árvore reduzida, isto é,  $\mathbb{D}_2^k$  e  $\pi^k(m_t, n_t)$ , respectivamente.

4. Se  $\mathbb{D}_2^k < \mathbb{D}_2^{k-1}$ , voltar ao Passo 2; caso contrário, pare, pois a árvore reduzida ótima é formada pelas realizações e probabilidades encontradas na iteração  $k-1$ , isto é,  $q^{k-1}$  e  $P^{*k-1}$ , respectivamente.

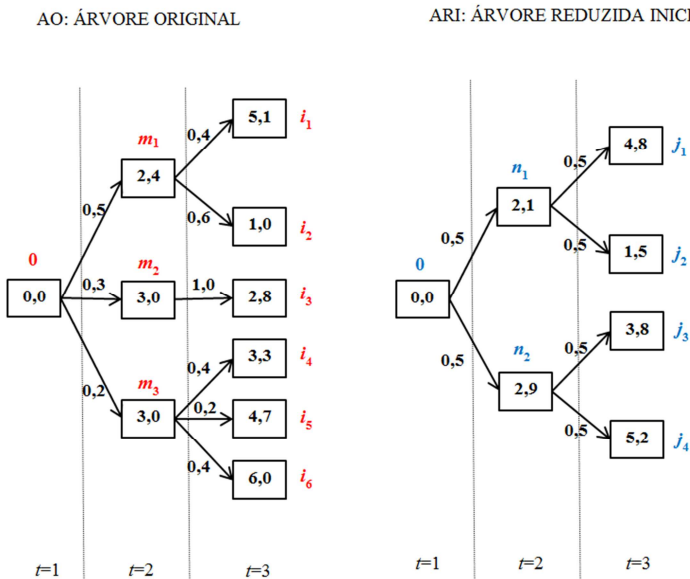
Na sequência um diagrama ilustrativo do algoritmo de adaptação ótima é apresentado na Figura 3.10.

**Figura 3.10 – Diagrama do algoritmo de adaptação ótima.**



Para auxiliar na compreensão do algoritmo de adaptação ótima, considere as árvores da Figura 3.11, nas quais os retângulos contêm os valores das realizações da variável aleatória e as setas contêm os valores das probabilidades. Nota-se que no exemplo a seguir, tem-se uma árvore original com 10 nós e 6 cenários e o objetivo final é encontrar as realizações e probabilidades de uma árvore com 7 nós e 4 cenários que tenha a menor distância aninhada em relação à AO.

**Figura 3.11 – Exemplo de árvores para o processo de adaptação ótima.**



Nota-se que as árvores da Figura 3.11 são as mesmas apresentadas na Figura 2.8, utilizadas no exemplo de cálculo da distância aninhada de forma recursiva na seção 2.4.2. Porém, neste exemplo, além de encontrar a distância aninhada entre árvores, o interesse é adaptar a árvore denotada como ARI com respeito à AO.

Conforme mostra o Algoritmo 3-2, o primeiro passo consiste em resolver o problema da distância aninhada de forma recursiva por meio do problema de PL (2.23) – (2.26) com  $r=2$ . Procedendo-se desta maneira, isto é, seguindo os mesmos passos ilustrados no capítulo anterior tem que a distância aninhada é:

$$\mathbb{D}_2^{k=0}(0,0) = 1,96 \quad (3.7)$$

Por sua vez, associado com (3.7) tem-se o seguinte plano de transporte:

$$\begin{array}{ll}
 \pi(i_1, j_1) = 0,20 & \pi(i_4, j_1) = 0,00 \\
 \pi(i_1, j_2) = 0,00 & \pi(i_4, j_2) = 0,00 \\
 \pi(i_1, j_3) = 0,00 & \pi(i_4, j_3) = 0,08 \\
 \pi(i_1, j_4) = 0,00 & \pi(i_4, j_4) = 0,00 \\
 \\
 \pi(i_2, j_1) = 0,05 & \pi(i_5, j_1) = 0,00 \\
 \pi(i_2, j_2) = 0,25 & \pi(i_5, j_2) = 0,00 \\
 \pi(i_2, j_3) = 0,00 & \pi(i_5, j_3) = 0,02 \\
 \pi(i_2, j_4) = 0,00 & \pi(i_5, j_4) = 0,02 \\
 \\
 \pi(i_3, j_1) = 0,00 & \pi(i_6, j_1) = 0,00 \\
 \pi(i_3, j_2) = 0,00 & \pi(i_6, j_2) = 0,00 \\
 \pi(i_3, j_3) = 0,15 & \pi(i_6, j_3) = 0,00 \\
 \pi(i_3, j_4) = 0,15 & \pi(i_6, j_4) = 0,08 \\
 \\
 \pi(m_1, n_1) = 0,50 & \pi(m_2, n_2) = 0,30 \\
 \pi(m_1, n_2) = 0,00 & \pi(m_3, n_1) = 0,00 \\
 \pi(m_2, n_1) = 0,00 & \pi(m_3, n_2) = 0,20
 \end{array} \tag{3.8}$$

De posse dos resultados apresentados em (3.7) e (3.8), ajusta-se  $k=k+1$ , e começa-se o processo de atualização das realizações e probabilidades da árvore reduzida.

- Iteração  $k=1$

Com base em (3.1) bem como utilizando o plano de transporte (3.8), realiza-se a primeira atualização das realizações da árvore ARI.

$$\begin{aligned}
 (q_3^i)^1 &= \frac{\pi(i_1, j_1)}{\pi(i_1, j_1) + \dots + \pi(i_6, j_1)} \cdot \xi_3^{i_1} + \frac{\pi(i_2, j_1)}{\pi(i_1, j_1) + \dots + \pi(i_6, j_1)} \cdot \xi_3^{i_2} \\
 &+ \frac{\pi(i_3, j_1)}{\pi(i_1, j_1) + \dots + \pi(i_6, j_1)} \cdot \xi_3^{i_3} + \frac{\pi(i_4, j_1)}{\pi(i_1, j_1) + \dots + \pi(i_6, j_1)} \cdot \xi_3^{i_4} \\
 &+ \frac{\pi(i_5, j_1)}{\pi(i_1, j_1) + \dots + \pi(i_6, j_1)} \cdot \xi_3^{i_5} + \frac{\pi(i_6, j_1)}{\pi(i_1, j_1) + \dots + \pi(i_6, j_1)} \cdot \xi_3^{i_6}
 \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
 (q_3^i)^1 &= \frac{0,20}{0,2+0,05+0+0+0+0} \cdot 5,1 + \frac{0,05}{0,2+0,05+0+0+0+0} \cdot 1,0 \\
 &+ \frac{0,00}{0,2+0,05+0+0+0+0} \cdot 2,8 + \frac{0,00}{0,2+0,05+0+0+0+0} \cdot 3,3 \\
 &+ \frac{0,00}{0,2+0,05+0+0+0+0} \cdot 4,7 + \frac{0,00}{0,2+0,05+0+0+0+0} \cdot 6,0
 \end{aligned}$$

$$(q_3^i)^1 = 4,28$$

Acima  $(q_3^i)^1$  é o primeiro valor atualizado da realização no nó  $j_1$ . De forma análoga são encontrados os valores atualizados para as realizações do estágio  $T$  da árvore reduzida, apresentados a seguir.

$$(q_3^{j_2})^1 = 1,00$$

$$(q_3^{j_3})^1 = 3,11$$

$$(q_3^{j_4})^1 = 3,98$$

Para atualizar as realizações dos nós  $n_1$  e  $n_2$ , procede-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 (q_2^a)^1 &= \frac{\pi(m_1, n_1)}{\pi(m_1, n_1) + \dots + \pi(m_3, n_1)} \cdot \xi_2^{m_1} + \frac{\pi(m_2, n_1)}{\pi(m_1, n_1) + \dots + \pi(m_3, n_1)} \cdot \xi_2^{m_2} \\
 &\quad + \frac{\pi(m_3, n_1)}{\pi(m_1, n_1) + \dots + \pi(m_3, n_1)} \cdot \xi_2^{m_3} \\
 (q_2^b)^1 &= \frac{\pi(m_1, n_2)}{\pi(m_1, n_2) + \dots + \pi(m_3, n_2)} \cdot \xi_2^{m_1} + \frac{\pi(m_2, n_2)}{\pi(m_1, n_2) + \dots + \pi(m_3, n_2)} \cdot \xi_2^{m_2} \\
 &\quad + \frac{\pi(m_3, n_2)}{\pi(m_1, n_2) + \dots + \pi(m_3, n_2)} \cdot \xi_2^{m_3}
 \end{aligned}$$

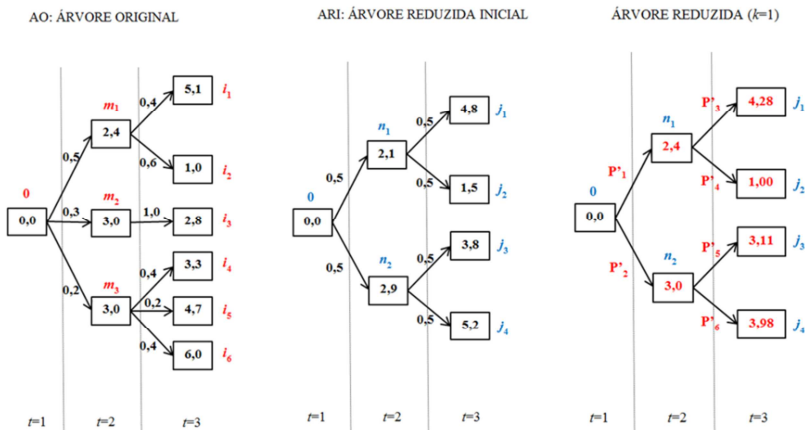
portanto:

$$\begin{aligned}
 (q_2^a)^1 &= \frac{0,5}{0,5+0+0} \cdot 2,4 + \frac{0,0}{0,5+0+0} \cdot 3,0 + \frac{0,0}{0,5+0+0} \cdot 3,0 = 2,4 \\
 (q_2^b)^1 &= \frac{0,0}{0+0,3+0,2} \cdot 2,4 + \frac{0,3}{0+0,3+0,2} \cdot 3,0 + \frac{0,2}{0+0,3+0,2} \cdot 3,0 = 3,0
 \end{aligned}$$

Assim, neste ponto tem-se a primeira atualização das realizações da ARI. Portanto, o próximo passo consiste em atualizar as probabilidades da árvore resolvendo (3.2) - (3.6), isto é, atualizar as probabilidades baseando-se no cálculo da distância aninhada de forma recursiva. De forma ilustrativa, apresenta-se um resumo do estado da árvore reduzida até este ponto do algoritmo na Figura 3.12, com os valores das realizações atualizados e as probabilidades como incógnitas.



**Figura 3.12 – Atualização das probabilidades da árvore reduzida.**



Como os cálculos devem ser feitos recursivamente, a seguir os resultados são apresentados no sentido inverso dos estágios, isto é, de  $t=3$  a  $t=2$ .

- Para  $t=3$

De acordo com o Passo 3 do Algoritmo 3-2, para encontrar as probabilidades ótimas da árvore reduzida, a distância aninhada e o novo plano de transporte com respeito à árvore original, resolve-se o seguinte problema de PL:

$$\begin{aligned}
& \min_{\pi(\cdot, \cdot, \cdot), P'} \pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) \cdot d(i_1, j_1)^2 + \pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) \cdot d(i_1, j_2)^2 \\
& \quad + \pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) \cdot d(i_2, j_1)^2 + \pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) \cdot d(i_2, j_2)^2 \\
& \quad + \pi(i_1, j_3 | m_1, n_2) \cdot d(i_1, j_3)^2 + \pi(i_1, j_4 | m_1, n_2) \cdot d(i_1, j_4)^2 \\
& \quad + \pi(i_2, j_3 | m_1, n_2) \cdot d(i_2, j_3)^2 + \pi(i_2, j_4 | m_1, n_2) \cdot d(i_2, j_4)^2 \\
& \quad + \pi(i_3, j_1 | m_2, n_1) \cdot d(i_3, j_1)^2 + \pi(i_3, j_2 | m_2, n_1) \cdot d(i_3, j_2)^2 \\
& \quad + \pi(i_3, j_3 | m_2, n_2) \cdot d(i_3, j_3)^2 + \pi(i_3, j_4 | m_2, n_2) \cdot d(i_3, j_4)^2 \\
& \quad + \pi(i_4, j_1 | m_3, n_1) \cdot d(i_4, j_1)^2 + \pi(i_4, j_2 | m_3, n_1) \cdot d(i_4, j_2)^2 \\
& \quad + \pi(i_5, j_1 | m_3, n_1) \cdot d(i_5, j_1)^2 + \pi(i_5, j_2 | m_3, n_1) \cdot d(i_5, j_2)^2 \\
& \quad + \pi(i_6, j_1 | m_3, n_1) \cdot d(i_6, j_1)^2 + \pi(i_6, j_2 | m_3, n_1) \cdot d(i_6, j_2)^2 \\
& \quad + \pi(i_4, j_3 | m_3, n_2) \cdot d(i_4, j_3)^2 + \pi(i_4, j_4 | m_3, n_2) \cdot d(i_4, j_4)^2 \\
& \quad + \pi(i_5, j_3 | m_3, n_2) \cdot d(i_5, j_3)^2 + \pi(i_5, j_4 | m_3, n_2) \cdot d(i_5, j_4)^2 \\
& \quad + \pi(i_6, j_3 | m_3, n_2) \cdot d(i_6, j_3)^2 + \pi(i_6, j_4 | m_3, n_2) \cdot d(i_6, j_4)^2
\end{aligned} \tag{3.9}$$

s.a:

$$\begin{aligned}
& \pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) + \pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) = 0, 4 \\
& \pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) + \pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) = 0, 6 \\
& \pi(i_1, j_3 | m_1, n_2) + \pi(i_1, j_4 | m_1, n_2) = 0, 4 \\
& \pi(i_2, j_3 | m_1, n_2) + \pi(i_2, j_4 | m_1, n_2) = 0, 6 \\
& \pi(i_3, j_1 | m_2, n_1) + \pi(i_3, j_2 | m_2, n_1) = 1, 0 \\
& \pi(i_3, j_3 | m_2, n_2) + \pi(i_3, j_4 | m_2, n_2) = 1, 0 \\
& \pi(i_4, j_1 | m_3, n_1) + \pi(i_4, j_2 | m_3, n_1) = 0, 4 \\
& \pi(i_5, j_1 | m_3, n_1) + \pi(i_5, j_2 | m_3, n_1) = 0, 2 \\
& \pi(i_6, j_1 | m_3, n_1) + \pi(i_6, j_2 | m_3, n_1) = 0, 4 \\
& \pi(i_4, j_3 | m_3, n_2) + \pi(i_4, j_4 | m_3, n_2) = 0, 4 \\
& \pi(i_5, j_3 | m_3, n_2) + \pi(i_5, j_4 | m_3, n_2) = 0, 2 \\
& \pi(i_6, j_3 | m_3, n_2) + \pi(i_6, j_4 | m_3, n_2) = 0, 4
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) + \pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) &= P_3^1, \\
\pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) + \pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) &= P_4^1, \\
\pi(i_1, j_3 | m_1, n_2) + \pi(i_2, j_3 | m_1, n_2) &= P_5^1, \\
\pi(i_1, j_4 | m_1, n_2) + \pi(i_2, j_4 | m_1, n_2) &= P_6^1, \\
\pi(i_3, j_1 | m_2, n_1) &= P_3^1, \\
\pi(i_3, j_2 | m_2, n_1) &= P_4^1, \\
\pi(i_3, j_3 | m_2, n_2) &= P_5^1, \\
\pi(i_3, j_4 | m_2, n_2) &= P_6^1, \\
\pi(i_4, j_1 | m_3, n_1) + \pi(i_5, j_1 | m_3, n_1) + \pi(i_6, j_1 | m_3, n_1) &= P_3^1, \\
\pi(i_4, j_2 | m_3, n_1) + \pi(i_5, j_2 | m_3, n_1) + \pi(i_6, j_2 | m_3, n_1) &= P_4^1, \\
\pi(i_4, j_3 | m_3, n_2) + \pi(i_5, j_3 | m_3, n_2) + \pi(i_6, j_3 | m_3, n_2) &= P_5^1, \\
\pi(i_4, j_4 | m_3, n_2) + \pi(i_5, j_4 | m_3, n_2) + \pi(i_6, j_4 | m_3, n_2) &= P_6^1,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$P_3^1 + P_4^1 = 1 \tag{3.12}$$

$$P_5^1 + P_6^1 = 1 \tag{3.13}$$

$$\pi(\cdot, \cdot | \cdot, \cdot) \geq 0 \tag{3.13}$$

Em (3.14), apresentam-se as distâncias entre cada par de cenários  $d(i, j)$ .

$$\begin{aligned}
d(i_1, j_1)^2 &= |5,1 - 4,28|^2 = 0,67 & d(i_2, j_1)^2 &= |1,0 - 4,28|^2 = 10,75 \\
d(i_1, j_2)^2 &= |5,1 - 1,00|^2 = 16,81 & d(i_2, j_2)^2 &= |1,0 - 1,00|^2 = 0,00 \\
d(i_1, j_3)^2 &= |5,1 - 3,11|^2 = 3,96 & d(i_2, j_3)^2 &= |1,0 - 3,11|^2 = 4,45 \\
d(i_1, j_4)^2 &= |5,1 - 3,98|^2 = 1,25 & d(i_2, j_4)^2 &= |1,0 - 3,98|^2 = 8,88 \\
\\
d(i_3, j_1)^2 &= |2,8 - 4,28|^2 = 2,19 & d(i_4, j_1)^2 &= |3,3 - 4,28|^2 = 0,96 \\
d(i_3, j_2)^2 &= |2,8 - 1,00|^2 = 3,24 & d(i_4, j_2)^2 &= |3,3 - 1,00|^2 = 5,29 \\
d(i_3, j_3)^2 &= |2,8 - 3,11|^2 = 0,096 & d(i_4, j_3)^2 &= |3,3 - 3,11|^2 = 0,036 \\
d(i_3, j_4)^2 &= |2,8 - 3,98|^2 = 1,39 & d(i_4, j_4)^2 &= |3,3 - 3,98|^2 = 0,46 \\
\\
d(i_5, j_1)^2 &= |4,7 - 4,28|^2 = 0,176 & d(i_6, j_1)^2 &= |6,0 - 4,28|^2 = 2,96 \\
d(i_5, j_2)^2 &= |4,7 - 1,00|^2 = 13,69 & d(i_6, j_2)^2 &= |6,0 - 1,00|^2 = 25,0 \\
d(i_5, j_3)^2 &= |4,7 - 3,11|^2 = 2,53 & d(i_6, j_3)^2 &= |6,0 - 3,11|^2 = 8,35 \\
d(i_5, j_4)^2 &= |4,7 - 3,98|^2 = 0,52 & d(i_6, j_4)^2 &= |6,0 - 3,98|^2 = 4,08
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Os resultados da solução do problema de PL (3.9) a (3.13), são dados por:

$$\begin{array}{ll}
\pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) = 0,4 & \pi(i_4, j_1 | m_3, n_1) = 0,0 \\
\pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) = 0,0 & \pi(i_4, j_2 | m_3, n_1) = 0,4 \\
\pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) = 0,2 & \pi(i_5, j_1 | m_3, n_1) = 0,2 \\
\pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) = 0,4 & \pi(i_5, j_2 | m_3, n_1) = 0,0 \\
\pi(i_1, j_3 | m_1, n_2) = 0,0 & \pi(i_6, j_1 | m_3, n_1) = 0,4 \\
\pi(i_1, j_4 | m_1, n_2) = 0,4 & \pi(i_6, j_2 | m_3, n_1) = 0,0 \\
\pi(i_2, j_3 | m_1, n_2) = 0,6 & \pi(i_4, j_3 | m_3, n_2) = 0,4 \\
\pi(i_2, j_4 | m_1, n_2) = 0,0 & \pi(i_4, j_4 | m_3, n_2) = 0,0 \\
\pi(i_3, j_1 | m_2, n_1) = 0,6 & \pi(i_5, j_3 | m_3, n_2) = 0,2 \\
\pi(i_3, j_2 | m_2, n_1) = 0,4 & \pi(i_5, j_4 | m_3, n_2) = 0,0 \\
\pi(i_3, j_3 | m_2, n_2) = 0,6 & \pi(i_6, j_3 | m_3, n_2) = 0,0 \\
\pi(i_3, j_4 | m_2, n_2) = 0,4 & \pi(i_6, j_4 | m_3, n_2) = 0,4
\end{array} \tag{3.15}$$

$$P_3^1 = 0,4 \quad P_5^1 = 0,4$$

$$P_4^1 = 0,6 \quad P_6^1 = 0,6$$

Assim, com o plano de transporte indicado em (3.15) e as distâncias entre cada par de nó mostradas em (3.14) pode se obter as distâncias aninhadas entre os nós predecessores  $m$  e  $n$ , como se apresenta a seguir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_2(m_1, n_1) &= \pi(i_1, j_1 | m_1, n_1) \cdot d(i_1, j_1)^2 + \pi(i_1, j_2 | m_1, n_1) \cdot d(i_1, j_2)^2 \\
&\quad + \pi(i_2, j_1 | m_1, n_1) \cdot d(i_2, j_1)^2 + \pi(i_2, j_2 | m_1, n_1) \cdot d(i_2, j_2)^2 \\
\mathbb{D}_2(m_1, n_2) &= \pi(i_1, j_3 | m_1, n_2) \cdot d(i_1, j_3)^2 + \pi(i_1, j_4 | m_1, n_2) \cdot d(i_1, j_4)^2 \\
&\quad + \pi(i_2, j_3 | m_1, n_2) \cdot d(i_2, j_3)^2 + \pi(i_2, j_4 | m_1, n_2) \cdot d(i_2, j_4)^2 \\
\mathbb{D}_2(m_2, n_1) &= \pi(i_3, j_1 | m_2, n_1) \cdot d(i_3, j_1)^2 + \pi(i_3, j_2 | m_2, n_1) \cdot d(i_3, j_2)^2 \\
\mathbb{D}_2(m_2, n_2) &= \pi(i_3, j_3 | m_2, n_2) \cdot d(i_3, j_3)^2 + \pi(i_3, j_4 | m_2, n_2) \cdot d(i_3, j_4)^2 \tag{3.16} \\
\mathbb{D}_2(m_3, n_1) &= \pi(i_4, j_1 | m_3, n_1) \cdot d(i_4, j_1)^2 + \pi(i_4, j_2 | m_3, n_1) \cdot d(i_4, j_2)^2 \\
&\quad + \pi(i_5, j_1 | m_3, n_1) \cdot d(i_5, j_1)^2 + \pi(i_5, j_2 | m_3, n_1) \cdot d(i_5, j_2)^2 \\
&\quad + \pi(i_6, j_1 | m_3, n_1) \cdot d(i_6, j_1)^2 + \pi(i_6, j_2 | m_3, n_1) \cdot d(i_6, j_2)^2 \\
\mathbb{D}_2(m_3, n_2) &= \pi(i_4, j_3 | m_3, n_2) \cdot d(i_4, j_3)^2 + \pi(i_4, j_4 | m_3, n_2) \cdot d(i_4, j_4)^2 \\
&\quad + \pi(i_5, j_3 | m_3, n_2) \cdot d(i_5, j_3)^2 + \pi(i_5, j_4 | m_3, n_2) \cdot d(i_5, j_4)^2 \\
&\quad + \pi(i_6, j_3 | m_3, n_2) \cdot d(i_6, j_3)^2 + \pi(i_6, j_4 | m_3, n_2) \cdot d(i_6, j_4)^2
\end{aligned}$$

Portanto, as distâncias mostradas em (3.16) têm os seguintes valores:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_2(m_1, n_1) &= 0,4 \cdot 0,67 + 0,0 \cdot 16,81 \\ &+ 0,2 \cdot 10,75 + 0,4 \cdot 0,0 = 2,42\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_2(m_1, n_2) &= 0,0 \cdot 3,96 + 0,4 \cdot 1,25 \\ &+ 0,6 \cdot 4,45 + 0,0 \cdot 8,88 = 3,17\end{aligned}$$

$$\mathbb{D}_2(m_2, n_1) = 0,6 \cdot 2,19 + 0,4 \cdot 3,24 = 2,61$$

$$\mathbb{D}_2(m_2, n_2) = 0,6 \cdot 0,096 + 0,4 \cdot 1,39 = 0,614$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_2(m_3, n_1) &= 0,0 \cdot 0,96 + 0,4 \cdot 5,29 \\ &+ 0,2 \cdot 0,176 + 0,0 \cdot 13,69 \\ &+ 0,4 \cdot 2,96 + 0,0 \cdot 25,00 = 3,33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_2(m_3, n_2) &= 0,4 \cdot 0,036 + 0,0 \cdot 0,46 \\ &+ 0,2 \cdot 2,53 + 0,0 \cdot 0,52 \\ &+ 0,0 \cdot 8,35 + 0,4 \cdot 4,08 = 2,15\end{aligned}$$

Finalizado o terceiro estágio, resolve-se então o mesmo problema para o estágio anterior, levando-se em conta a distância aninhada encontrada para os nós  $m$  e  $n$ .

- o Para  $t=2$

Para o estágio  $t=2$ , tem-se o PL a seguir.

$$\begin{aligned}\min_{\pi(\cdot, \cdot), P} & \pi(m_1, n_1 | 0,0) \cdot d(m_1, n_1)^2 + \pi(m_1, n_2 | 0,0) \cdot d(m_1, n_2)^2 \\ & + \pi(m_2, n_1 | 0,0) \cdot d(m_2, n_1)^2 + \pi(m_2, n_2 | 0,0) \cdot d(m_2, n_2)^2 \\ & + \pi(m_3, n_1 | 0,0) \cdot d(m_3, n_1)^2 + \pi(m_3, n_2 | 0,0) \cdot d(m_3, n_2)^2\end{aligned}\quad (3.17)$$

s.a:

$$\begin{aligned}\pi(m_1, n_1 | 0, 0) + \pi(m_1, n_2 | 0, 0) &= 0,5 \\ \pi(m_2, n_1 | 0, 0) + \pi(m_2, n_2 | 0, 0) &= 0,3\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\pi(m_3, n_1 | 0, 0) + \pi(m_3, n_2 | 0, 0) &= 0,2 \\ \pi(m_1, n_1 | 0, 0) + \pi(m_2, n_1 | 0, 0) + \pi(m_3, n_1 | 0, 0) &= P_1^1 \\ \pi(m_1, n_2 | 0, 0) + \pi(m_2, n_2 | 0, 0) + \pi(m_3, n_2 | 0, 0) &= P_2^1\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$P_1^1 + P_2^1 = 1\tag{3.20}$$

$$\pi(\cdot, \cdot | \cdot, \cdot) \geq 0\tag{3.21}$$

As distâncias  $d(m, n)^2$ , obtém-se como se mostra na sequência.

$$\begin{aligned}d(m_1, n_1)^2 &= |2,4 - 2,4|^2 + \mathbb{D}_2(m_1, n_1) = 2,42 \\ d(m_1, n_2)^2 &= |2,4 - 3,0|^2 + \mathbb{D}_2(m_1, n_2) = 3,53 \\ d(m_2, n_1)^2 &= |3,0 - 2,4|^2 + \mathbb{D}_2(m_2, n_1) = 2,97 \\ d(m_2, n_2)^2 &= |3,0 - 3,0|^2 + \mathbb{D}_2(m_2, n_2) = 0,614 \\ d(m_3, n_1)^2 &= |3,0 - 2,4|^2 + \mathbb{D}_2(m_3, n_1) = 3,69 \\ d(m_3, n_2)^2 &= |3,0 - 3,0|^2 + \mathbb{D}_2(m_3, n_2) = 2,15\end{aligned}$$

Por fim, resolvendo (3.17) a (3.21) obtém-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}P_1^1 &= 0,5 \\ P_2^1 &= 0,5 \\ \mathbb{D}_2^{k=1}(0, 0) &= 1,83\end{aligned}\tag{3.22}$$

Com o seguinte plano de transporte:



$$\pi(m_1, n_1 | 0, 0) = 0,5$$

$$\pi(m_1, n_2 | 0, 0) = 0,0$$

$$\pi(m_2, n_1 | 0, 0) = 0,0$$

$$\pi(m_2, n_2 | 0, 0) = 0,3$$

$$\pi(m_3, n_1 | 0, 0) = 0,0$$

$$\pi(m_3, n_2 | 0, 0) = 0,2$$

De (3.7) e (3.22), tem-se que  $\mathbb{D}_2^{k=1} < \mathbb{D}_2^{k=0}$ . Por conseguinte, requer-se de uma nova iteração, isto é,  $k=k+1$ .

o        Iteração  $k=2$

Realizando cálculos análogos aos apresentados para  $k=1$ , encontram-se os seguintes resultados para  $k=2$ :

$$q_{n_1}^2 = 2,40$$

$$q_{n_2}^2 = 3,00$$

$$q_{j_1}^2 = 3,73$$

$$q_{j_2}^2 = 1,00$$

$$q_{j_3}^2 = 3,18$$

$$q_{j_4}^2 = 4,08$$

$$P_1^2 = 0,5 \quad P_4^2 = 0,6$$

$$P_2^2 = 0,5 \quad P_5^2 = 0,4$$

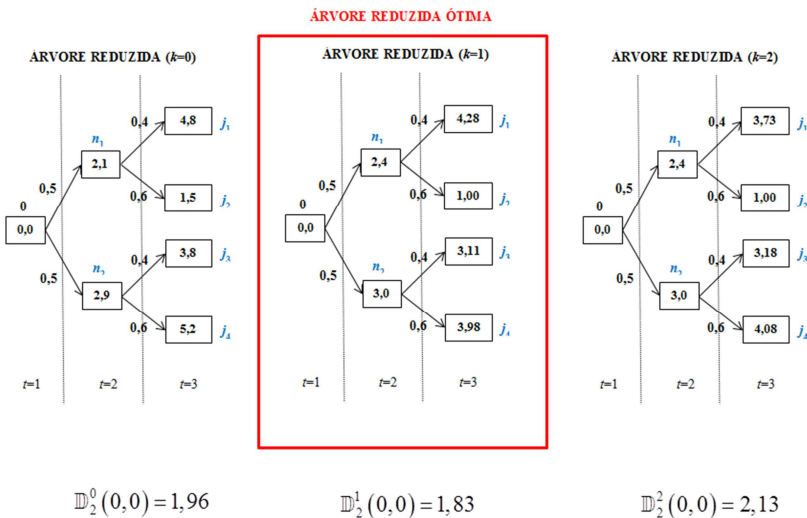
$$P_3^2 = 0,4 \quad P_6^2 = 0,6$$

$$\mathbb{D}_2^{k=2}(0,0) = 2,13$$

Nota-se que,  $\mathbb{D}_2^{k=2} > \mathbb{D}_2^{k=1}$ , ou seja, a árvore reduzida encontrada na iteração  $k=1$  tem maior proximidade probabilística do que a árvore da iteração  $k=2$ . Portanto, finaliza-se o processo iterativo e a árvore reduzida ótima está composta pelas realizações  $q^1$  e probabilidades  $P^1$ .

Com intuito didático, apresenta-se na Figura 3.13, a evolução das realizações e probabilidades da árvore reduzida.

Figura 3.13 – Evolução da árvore reduzida.



### 3.3 ÁRVORES MULTIVARIADAS

No caso de árvores multivariadas, isto é, árvores que em cada nó possui uma realização vetorial<sup>7</sup>  $\xi_r \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ , a norma euclidiana de ordem  $r=2$  é dada por:

$$d(\xi_r, \xi'_r)^2 = (\xi_r - \xi'_r)^T \cdot \mathbf{I} \cdot (\xi_r - \xi'_r), \quad (3.23)$$

em que,

$\mathbf{I}$  Matriz identidade de ordem  $N \times N$

Neste trabalho, o qual consideram-se árvores de cenários de afluências, propõe-se utilizar ao invés da matriz identidade em (3.23), matrizes que capturem a informação da natureza do problema. Duas alternativas são analisadas: a primeira, dada por uma matriz diagonal composta pela ponderação da capacidade nominal de potência máxima de cada usina; e a segunda, composta pela matriz de correlação de cenários entre as usinas do sistema. Deste modo, o problema da

<sup>7</sup>Por exemplo, em árvores de cenários hidrológicos, o tamanho  $N$  do vetor das realizações representa o número de usinas.

distância aninhada resolvido no Passo 1 e no Passo 3 do Algoritmo 3-2 (de adaptação ótima), tem as seguintes alternativas:

$$d(\xi, \xi')^2 = (\xi_t - \xi'_t)^T \cdot PN \cdot (\xi_t - \xi'_t), \quad (3.24)$$

ou

$$d(\xi, \xi')^2 = (\xi_t - \xi'_t)^T \cdot Co^{-1} \cdot (\xi_t - \xi'_t), \quad (3.25)$$

em que,

$PN$  Matriz de ponderação da potência nominal da usina.  
 $Co$  Matriz inversa de correlação.

Neste sentido, obtêm-se planos de transporte que contém mais informação da natureza do sistema e são utilizados na atualização das realizações da árvore reduzida. A atualização das realizações da árvore reduzida continua sendo a indicada em (3.1) como é mostrado a seguir:

Seja  $A$  uma matriz simétrica definida positiva qualquer (todos os autovalores são reais e positivos), e definindo:

$$f(q_t^{n_i}) = \sum_{m_i \in \mathcal{N}_i} \pi(m_i, n_i) \cdot \|\xi_t^{m_i} - q_t^{n_i}\|_A^2,$$

que é equivalente a :

$$f(q_t^{n_i}) = \sum_{m_i \in \mathcal{N}_i} \pi(m_i, n_i) \cdot (\xi_t^{m_i} - q_t^{n_i})^T \cdot A \cdot (\xi_t^{m_i} - q_t^{n_i}).$$

Assim, a solução ótima  $\bar{q}_t^{n_i}$  do problema:

$$\min_{q_t^{n_i} \in \mathbb{R}^n} f(q_t^{n_i}),$$

é única e deve satisfazer  $\nabla f(\bar{q}_t^{n_i}) = 0$ . Deste modo:

$$\nabla f(\bar{q}_t^{n_i}) = 0 \rightarrow \sum_{m_i \in \mathcal{N}_i} \pi(m_i, n_i) \cdot 2 \cdot A \cdot (\xi_t^{m_i} - \bar{q}_t^{n_i}) = 0.$$

Portanto, a solução  $\bar{q}_t^{n_i}$  do sistema acima também é solução de:

$$A \cdot \sum_{m_i \in \mathcal{N}_i} \pi(m_i, n_i) \cdot (\xi_t^{m_i} - \bar{q}_t^{n_i}) = 0.$$

Sendo  $A$  definida positiva, o sistema acima é satisfeito se, e somente se,

$$\sum_{m_i \in \mathcal{N}_i} \pi(m_i, n_i) \cdot (\xi_t^{m_i} - \bar{q}_t^{n_i}) = 0.$$

De onde:

$$q_t^{n_t} = \sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \frac{\pi(m_t, n_t)}{\sum_{m_t \in \mathcal{N}_t} \pi(m_t, n_t)} \cdot \xi_t^{m_t}.$$

Note que a forma de atualização das realizações da árvore reduzida independe de  $A$  (definida positiva). Nesse sentido, a matriz  $A$  poderia ser a identidade, ou a matriz inversa de correlações, ou uma matriz diagonal (com a diagonal positiva), entre outros. É assim como se conclui que a distância  $\|\cdot\|_A^2$  não altera a maneira de atualizar a árvore reduzida, mas altera a escolha dos planos de transporte ótimos  $\pi$  (os PLs dos problemas da distância aninhada serão diferentes, para diferentes matrizes  $A$ ).

## 4. MODELAGEM DO PROBLEMA E FERRAMENTAS DE AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo é apresentada a modelagem do problema e as ferramentas para avaliar a qualidade das árvores reduzidas. Primeiro é descrita a configuração hidrotérmica base, bem como os principais dados usados nos estudos. Na sequência, indica-se a modelagem das incertezas e do problema de planejamento da operação hidrotérmica. Por último, são introduzidos os conceitos para a avaliação dos resultados, baseados no teste de Kolmogorov-Smirnov e na brecha de otimalidade.

### 4.1 SISTEMA BASE

O sistema hidrotérmico utilizado para este estudo é composto por um único sistema elétrico com cinco usinas termelétricas (UTE) e quinze hidrelétricas (UHE). A potência instalada das UTEs é de 1.275 MW e das UHEs é de 7.620 MW. Naturalmente, o sistema base foi escolhido convenientemente para simular as características reais de um sistema com predominância hídrica. No entanto, são consideradas as seguintes simplificações:

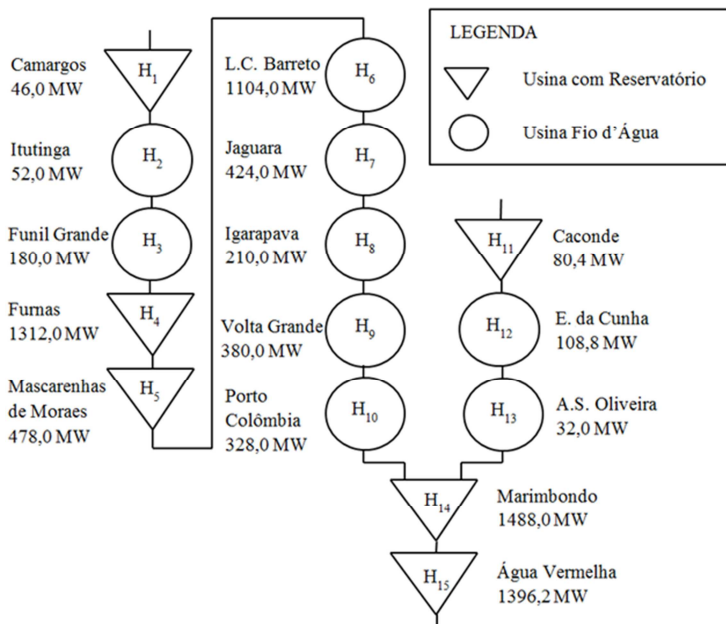
- Como dado de entrada, a demanda é igual para todos os estágios;
- Não são considerados patamares de carga, com o fim de obter um benefício no tempo computacional da solução do problema. Os patamares de carga são relevantes quando é necessário aprimorar as políticas operativas de sistemas hidrotérmicos que tenham uma quantidade bastante limitada de recursos hídricos;
- É considerado um único sistema, o qual opera como uma barra única;
- Neste trabalho, os estudos propostos têm decisões mensais, dessa forma, o tempo de viagem da água não é um parâmetro relevante e pode ser desprezado.

Na sequência são descritos os dados que compõem as usinas para todos os estudos.

### 4.1.1 Sistema hidrelétrico

O sistema hidrelétrico está composto por 15 usinas acopladas em cascata, conforme disposto na Figura 4.1.

**Figura 4.1 – Diagrama esquemático do sistema hidrelétrico.**



Os dados utilizados são referentes às usinas hidrelétricas da Bacia do Rio Grande, localizada na região sudeste do Brasil. Os valores dados em MW na Figura 4.1 correspondem à potência máxima nominal de cada usina. Adicionalmente, a água viaja no sentido apontado pelos triângulos. Com respeito à função de produção, considera-se um modelo com um fator de produção constante (QUINTERO, 2013). Deste modo, a função é dada por:

$$ph(q_h) = \rho_h \cdot q_h, \quad (4.1)$$

em que:

$ph$	potência gerada (MW);
$\rho_h$	produtibilidade (MW/(m <sup>3</sup> /s));
$q_h$	vazão turbinada na usina (m <sup>3</sup> /s).

Na Tabela 4.1 são apresentados os dados mais relevantes para cada usina do parque hidrelétrico em estudo. Por exemplo, apresenta-se os limites de vazão turbinada máxima  $Q^{\max}$ , volumes mínimos e máximos dos reservatórios<sup>8</sup>,  $V^{\min}$  e  $V^{\max}$  respectivamente, bem como o fator de produção associada a cada usina  $\rho$ .

**Tabela 4.1 – Dados das UHEs do sistema.**

UHE	Nome UHE	$Q^{\max}$ m <sup>3</sup> /s	$V^{\min}$ hm <sup>3</sup>	$V^{\max}$ hm <sup>3</sup>	$\rho$ MW/(m <sup>3</sup> /s)
H <sub>1</sub>	Camargos	220	120	792	0,178266
H <sub>2</sub>	Itutinga	236	11	11	0,244686
H <sub>3</sub>	Funil-Grande	585	304	304	0,345744
H <sub>4</sub>	Furnas	1688	5733	22950	0,747494
H <sub>5</sub>	Mascarenhas de Moraes	5220	1540	4040	0,315994
H <sub>6</sub>	L.C. Barreto	2028	1423	1423	0,562731
H <sub>7</sub>	Jaguara	1076	450	450	0,404259
H <sub>8</sub>	Igarapava	1480	480	480	0,152539
H <sub>9</sub>	Volta Grande	1584	2244	2244	0,247221
H <sub>10</sub>	Porto Colômbia	1988	1524	1524	0,203826
H <sub>11</sub>	Caconde	94	51	555	0,775442
H <sub>12</sub>	E. Da Cunha	148	14	14	0,746079
H <sub>13</sub>	A.S. Oliveira	178	25	25	0,206450
H <sub>14</sub>	Marimbondo	2944	890	6150	0,466324
H <sub>15</sub>	Água Vermelha	2958	5856	11025	0,456836

Neste trabalho, o vertimento máximo,  $S^{\max}$ , é modelado sem nenhuma restrição.

<sup>8</sup> Os casos em que  $V^{\min}$  e  $V^{\max}$  são iguais, representam as usinas fio d'água, as quais não tem capacidade de armazenamento.

### 4.1.2 Sistema termelétrico

Na Tabela 4.2 são apresentados os principais dados das usinas utilizadas que compõem o parque termelétrico, os quais correspondem ao limite máximo de potência gerada  $\bar{g}$  e ao custo incremental de geração *cts* de cada usina. Os valores mínimos para a potência gerada são iguais a zero.

**Tabela 4.2 – Dados das UTEs do sistema.**

UTE	$\bar{g}$	<i>cts</i> <sup>9</sup>
	MW	R\$/MW
T <sub>1</sub>	350	10
T <sub>2</sub>	300	20
T <sub>3</sub>	275	40
T <sub>4</sub>	200	70
T <sub>5</sub>	150	100

O déficit é modelado como uma UTE com capacidade infinita e custo incremental de geração igual a 500 R\$/MW. A presença da variável do déficit garante sempre uma solução viável para o problema.

## 4.2 MODELAGEM DAS INCERTEZAS DO SISTEMA

O intuito desta seção é introduzir a modelagem das incertezas do sistema. Para este fim, primeiro é indicado o conceito de modelo independente para gerar cenários de vazões afluentes e formas de geração de cenários para uma bacia hidrográfica. Além disso, apresentam-se alguns tipos de árvores de cenários de vazões afluentes incrementais.

### 4.2.1 Modelo independente de geração de cenários

Para simplificar o processo de geração de cenários de afluências, neste trabalho, é utilizado o modelo independente de geração de cenários. De forma geral, é um modelo que não utiliza nenhuma informação das realizações de estágios de tempo anteriores para gerar

<sup>9</sup> O símbolo R\$ representa a moeda atual do Brasil.



novos valores; deste modo, pode ser interpretado como um caso particular do modelo periódico autorregressivo (CHARBENEAU, 1978). Além disso, o modelo independente usa a informação da média e variância dos dados do histórico, assumindo que as vazões afluentes incrementais seguem uma distribuição LogNormal, i.e.,  $y=e^x$  (HIPEL; MCLEOD, 1994). Na prática o sorteio da vazão é feito com base em uma distribuição Normal com média zero e variância unitária, como segue:

$$y = e^{(\eta\sigma_x + \mu_x)}, \quad (4.2)$$

em que:

$x$	Variável aleatória com distribuição Normal, $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ ;
$\mu_x$	Média da variável $x$ ;
$\sigma_x$	Desvio padrão da variável $x$ ;
$y$	Vazão afluente incremental com distribuição LogNormal.
$\eta$	Variável aleatória com distribuição Normal, $N(0,1)$ .

Os parâmetros  $\mu_x$  e  $\sigma_x$  são calculados pelo seguinte equacionamento:

$$\mu_x = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln(y_k), \quad (4.3)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\ln(y_k) - \mu_x)^2}, \quad (4.4)$$

em que:

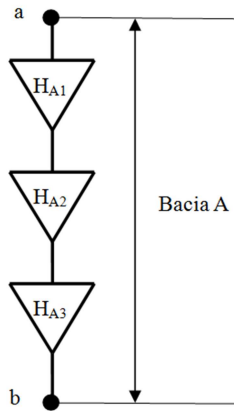
$y_k$	vazão afluente incremental histórica de um mês do ano $k$ ;
$n$	Número total de amostras da vazão afluente incremental.

#### 4.2.2 Formas do sorteio de vazões de aflências incrementais

O sorteio de vazões afluentes incrementais para uma bacia hidrográfica pode ser realizado de duas formas: (i) um único sorteio do

valor de afluência para a bacia inteira, ou por outro lado, (ii) realizar um sorteio para cada usina. Naturalmente, o modelo independente da geração de cenários por bacia obtém-se a partir do histórico de todas as afluências das usinas pertencentes ao longo da bacia hidrográfica. Para explicar este conceito, considere o exemplo da Figura 4.2 composto pela Bacia A, na qual se encontram dispostas três usinas com reservatório como se mostra a seguir:

**Figura 4.2 – Bacia hidrográfica exemplo.**



Considere como informação histórica disponível das vazões afluentes incrementais para as usinas  $H_{A1}$ ,  $H_{A2}$  e  $H_{A3}$  os valores indicados na Tabela 4.3:

**Tabela 4.3 – Dados históricos de vazões afluentes incrementais das usinas  $H_{A1}$ ,  $H_{A2}$ ,  $H_{A3}$ .**

Vazões afluentes incrementais ( $m^3/s$ )									
Ano	Janeiro			Fevereiro			Março		
	$H_{A1}$	$H_{A2}$	$H_{A3}$	$H_{A1}$	$H_{A2}$	$H_{A3}$	$H_{A1}$	$H_{A2}$	$H_{A3}$
1931	178	996	214	371	2056	354	326	1543	304
1932	449	1300	218	344	1293	252	214	1038	236
1933	287	636	204	161	367	101	147	371	100
1934	196	736	161	96	474	99	112	499	104
1935	242	1221	279	381	1664	302	184	1100	250

Com base na informação da Tabela 4.3 e o equacionamento de (4.3) e (4.4), obtêm-se os parâmetros do modelo independente de geração de cenários para cada usina como segue:

**Tabela 4.4 – Parâmetros do modelo independente das usinas  $H_{A1}$ ,  $H_{A2}$ ,  $H_{A3}$ .**

Usina	Janeiro		Fevereiro		Março	
	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$
$H_{A1}$	5,5431	0,3272	5,4691	0,5534	5,2153	0,3597
$H_{A2}$	6,8475	0,2791	6,8553	0,6918	6,6837	0,5318
$H_{A3}$	5,3562	0,1752	5,2639	0,5486	5,1904	0,4695

De outro modo, os parâmetros para o modelo independente de geração de cenários por bacia são obtidos a partir da agregação das afluições históricas por período das usinas pertencentes à bacia, isto é:

$$y_{BH} = \sum_{k=1}^U y_{UH_k}, \quad (4.5)$$

em que:

- $y_{BH}$  vazão afluyente incremental histórica da bacia por ano em um estágio de tempo;
- $y_{UH_k}$  vazão afluyente incremental histórica da usina  $k$  por ano em um estágio de tempo;
- $U$  número total de usinas pertencentes à bacia.

Por exemplo, considere o mês de janeiro de 1931 indicado na Tabela 4.3. O valor histórico da vazão afluyente para a bacia neste período é calculado como:

$$y_{BH} = y_{H_{A1}} + y_{H_{A2}} + y_{H_{A3}} \rightarrow y_{BH} = 178 + 996 + 214 = 1388$$

Analogamente, são calculados todos os valores históricos das vazões afluentes incrementais da bacia. Os resultados são apresentados na Tabela 4.5:

**Tabela 4.5 – Dados históricos de vazões afluentes incrementais da Bacia A.**

Vazões afluentes incrementais (m <sup>3</sup> /s)			
Bacia A			
Ano	Janeiro	Fevereiro	Março
1931	1388	2781	2173
1932	1967	1889	1488
1933	1127	629	618
1934	1093	669	715
1935	1742	2347	1534

Deste modo, a partir da informação da Tabela 4.5, obtém-se os parâmetros do modelo independente para a geração de cenários de afluições por bacia:

**Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo independente da bacia A.**

Bacia	Janeiro		Fevereiro		Março	
	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$
A	7,2613	0,2325	7,2370	0,6345	7,0647	0,4826

Assim, a partir do modelo independente por bacia se geram os sorteios dos valores da afluição da bacia como um todo. Contudo, precisa-se conhecer o valor da afluição por usina; portanto, o interesse é distribuir esse valor sorteado de acordo com a porcentagem de aporte do valor histórico da vazão afluente da usina no total histórico da bacia. Primeiramente, calcula-se o valor de ponderação de cada usina  $pa_x$  em cada ano do histórico como segue:

$$pa_x = \frac{y_{UH_k}}{y_{BH}}. \quad (4.6)$$

Desta forma, calculam-se os valores de ponderação para as usinas  $H_{A1}$ ,  $H_{A2}$  e  $H_{A3}$  da Figura 4.2. Por exemplo, para a usina  $H_{A1}$  no ano 1931 o valor  $pa_{1931}$  é obtido como  $pa_{1931}=178/1388$ .

Por último, obtém-se para cada usina o valor de ponderação da vazão afluyente incremental total  $pa_{total_k}$ , como a soma de todas as ponderações calculadas por ano dividido pelo número total de anos do histórico  $n_{ano}$ , como segue:

$$pa_{total_k} = \frac{1}{n_{ano}} \sum_{x=1}^{n_{ano}} pa_x, \quad (4.7)$$

Deste modo, calculam-se todos os valores de ponderação para conhecer a afluência em cada usina a partir de um sorteio realizado por bacia. Para o exemplo, os valores para as usinas  $H_{A1}$ ,  $H_{A2}$  e  $H_{A3}$  são apresentados na Tabela 4.7:

**Tabela 4.7 – Valores de ponderação da vazão afluyente incremental para as usinas  $H_{A1}$ ,  $H_{A2}$ ,  $H_{A3}$ .**

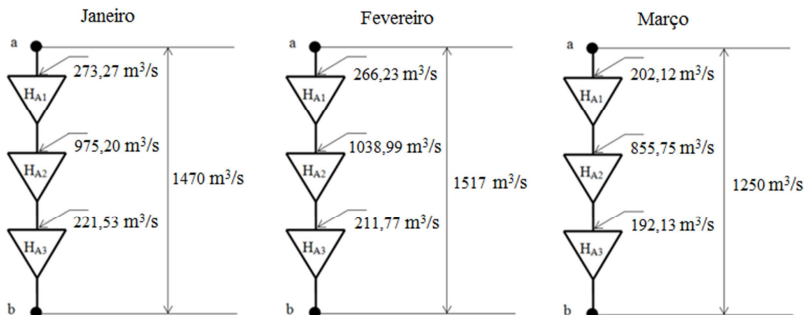
<i>pa<sub>total</sub></i>			
<b>Usina</b>	<b>Janeiro</b>	<b>Fevereiro</b>	<b>Março</b>
<b><math>H_{A1}</math></b>	0,1859	0,1755	0,1617
<b><math>H_{A2}</math></b>	0,6634	0,6849	0,6846
<b><math>H_{A3}</math></b>	0,1507	0,1396	0,1537

Assim, o valor da vazão afluyente incremental para cada usina pertencente a uma bacia é calculado como:

$$y_{U_k} = pa_{total_k} \cdot y_B, \quad (4.8)$$

Por exemplo, suponha que é realizado um sorteio dos meses de janeiro, fevereiro e março para a bacia A da Figura 4.2 utilizando os parâmetros do modelo independente da bacia A indicados na Tabela 4.6. Os valores sorteados para a bacia A e a respectiva distribuição das afluências nas usinas é indicada na Figura 4.3:

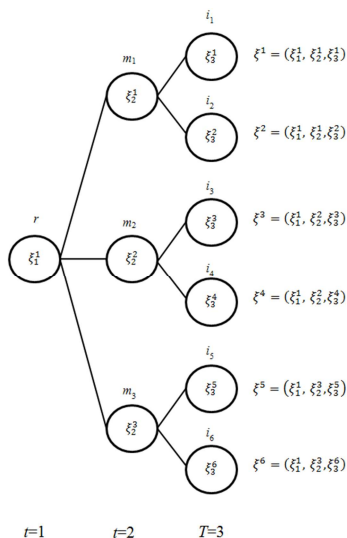
**Figura 4.3 – Representação da distribuição da vazão afluyente incremental da bacia nas usinas associadas.**



### 4.2.3 Tipos de sorteio das árvores de cenários

O sorteio dos cenários das árvores pode ser dividido em dois tipos: (i) árvores com uma amostra diferente em cada abertura, isto é, para qualquer  $m \in \mathcal{N}_t$ , com  $t < T$ , seus respectivos conjuntos  $m_+$  possuem diferentes realizações; (ii) árvores com amostra comum, as quais caracterizam-se por ter o mesmo conjunto  $m_+$  para qualquer nó  $m \in \mathcal{N}_t$ , com  $t < T$ . Para ilustrar estes conceitos considere a Figura 4.4:

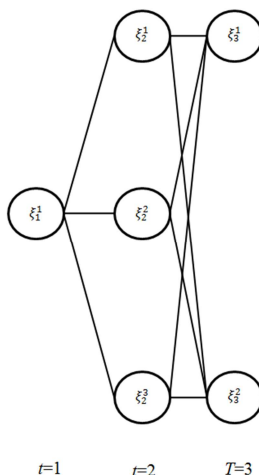
**Figura 4.4 – Exemplo para tipos de sorteios de árvores de cenários.**



O caso de amostras diferentes significa que as realizações dos nós sucessores de  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  da árvore da Figura 4.4 podem ser diferentes. Ao contrário, se a árvore de cenários é formada com amostra comum significa que  $\xi_3^1 = \xi_3^3 = \xi_3^5$  e  $\xi_3^2 = \xi_3^4 = \xi_3^6$ , conseqüentemente,  $m_{1+} = m_{2+} = m_{3+}$ .

Devido à característica das árvores de amostra comum, os possíveis cenários podem ser representados como se indica na Figura 4.5.

**Figura 4.5 – Representação árvore de cenários com amostra comum.**



### 4.3 MODELAGEM DO PROBLEMA DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA

Esta seção tem o intuito de apresentar o problema do planejamento energético a ser resolvido, neste trabalho, com a técnica da Decomposição Aninhada (BIRGE; LOUVEAUX, 2011) a partir da definição de uma árvore de cenários de aflúncias de um horizonte em estudo. De forma geral, trata-se de um problema de otimização que procura minimizar em cada estágio  $t$  o custo de operação do sistema, composto pelo custo do despacho termelétrico e do déficit de energia, somado ao custo esperado de operação dos estágios futuros. Por outro lado, as restrições do problema correspondem a um conjunto de equações e inequações que equivalem às seguintes condições: (i) o atendimento à demanda de energia; (ii) o balanço hídrico dos

reservatórios; (iii) os limites quantitativos de todas as variáveis do modelo; e, (iv) a aproximação linear da função de custo futuro (FCF) de cada estágio.

Nesse contexto, para cada nó da árvore de cenários associado com uma vazão afluyente incremental sorteada  $\xi_t^i$  resolve-se o seguinte problema (LARROYD, 2012), onde a variável  $\alpha_T$  é definida como zero:

$$f_t^{\omega_t^i} = \min \sum_{k \in K} \sum_{u \in T_k} cst_u \cdot g_{ut}^{\xi_t^i} + \alpha_{t+1} \quad (4.9)$$

s.a:

$$\sum_{h \in H_k} \rho_h \cdot q_{ht}^{\xi_t^i} + \sum_{u \in T_k} g_{ut}^{\xi_t^i} + \sum_{e \in \Omega_k} (I_{ekt}^{\xi_t^i} - I_{ket}^{\xi_t^i}) = l_{kt} \quad (4.10)$$

$$v_{h,t+1}^{\xi_t^i} + U(ct \cdot q_{ht}^{\xi_t^i} + ct \cdot s_{ht}^{\xi_t^i}) = v_{ht}^{\xi_t^i} + ct \cdot \xi_{ht}^i \quad (4.11)$$

$$\underline{g}_u \leq g_{ut}^{\xi_t^i} \leq \bar{g}_u \quad (4.12)$$

$$\underline{I}_{ek} \leq I_{ekt}^{\xi_t^i} \leq \bar{I}_{ek} \quad (4.13)$$

$$\underline{I}_{ke} \leq I_{ket}^{\xi_t^i} \leq \bar{I}_{ke} \quad (4.14)$$

$$\underline{v}_h \leq v_{h,t+1}^{\xi_t^i} \leq \bar{v}_h \quad (4.15)$$

$$q_{ht}^{\xi_t^i} + s_{ht}^{\xi_t^i} \geq \underline{q}_h \quad (4.16)$$

$$q_{ht}^{\xi_t^i} \leq \bar{q}_h \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{t+1} + \sum_{h \in H_k} \bar{\pi}_{hc,t+1}^{(\xi_t^i)_+} \cdot v_{h,t+1}^{\xi_t^i} \\ & \geq \frac{1}{n_t} \sum_{\xi_t^i \in (\xi_t^i)_+} z_{c,t+1}^{\xi_t^i*} + \sum_{h \in H_k} \bar{\pi}_{hc,t+1}^{(\xi_t^i)_+} \cdot v_{h,t+1}^{\xi_t^i*} \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\forall h \in H_k, \forall u \in T_k, \forall e \in \Omega_k, \forall k \in K, \forall c \in C_t,$$

em que:



$K$	Conjunto de subsistemas elétricos;
$k$	Índice associado ao conjunto de subsistemas;
$\Omega_k$	Conjunto dos subsistemas conectados ao subsistema $k$ ;
$e$	Índice associado ao conjunto dos subsistemas conectados ao subsistema $k$ ;
$T_k$	Conjunto de unidades termelétricas no subsistema $k$ ;
$u$	Índice associado ao conjunto de unidades termelétricas no subsistema $k$ ;
$H_k$	Conjunto de unidades hidrelétricas no subsistema $k$ ;
$h$	Índice associado ao conjunto de unidades hidrelétricas no subsistema $k$ ;
$C_t$	Conjunto de cortes de Benders <sup>10</sup> que aproximam a FCF do estágio $t$ ;
$c$	Índice associado ao conjunto de cortes de Benders que aproximam a FCF do estágio $t$ ;
$f_t^{\xi_r^i}$	Custo total de operação (R\$) associado ao problema do nó da vazão afluyente incremental sorteada $\xi_r^i$ no estágio $t$ ;
$cst_u$	Coefficiente linear de custo (R\$/energia) da função de custo de produção da unidade termelétrica $u$ ;
$l_{kt}$	Demanda (energia) do subsistema $k$ no estágio $t$ ;
$g_{ut}^{\xi_r^i}$	Produção (energia) da unidade térmica $u$ para o nó da vazão afluyente incremental sorteada $\xi_r^i$ no estágio $t$ ;
$\underline{g}_u, \bar{g}_u$	Limites mínimo e máximo de produção (energia) da unidade termelétrica $u$ ;
$I_{ekt}^{\xi_r^i}$	Intercâmbio (energia) do subsistema $e$ para o subsistema $k$ , para o nó da vazão afluyente incremental sorteada $\xi_r^i$ no estágio $t$ ;
$I_{ket}^{\xi_r^i}$	Intercâmbio (energia) do subsistema $k$ para o subsistema $e$ , para o nó da vazão afluyente incremental sorteada $\xi_r^i$ no estágio $t$ ;
$\underline{I}_{ek}, \bar{I}_{ek}$	Limites mínimo e máximo de intercâmbio (energia) do subsistema $e$ para o subsistema $k$ ;
$\underline{I}_{ke}, \bar{I}_{ke}$	Limites mínimo e máximo de intercâmbio (energia) do subsistema $k$ para o subsistema $e$ ;
$\rho_h$	Coefficiente linear de produção (energia/hm <sup>3</sup> /s/m) da função de produção da unidade hidrelétrica $h$ ;

<sup>10</sup> A FCF é aproximada como uma função linear por partes, cada aproximação é denominada de corte de Benders. (BENDERS, 1962).

$s_{ht}^{\xi_t^i}$	Vazão vertida ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) da unidade hidrelétrica $h$ para o nó da vazão afluente incremental sorteada $\xi_t^i$ no estágio $t$ ;
$q_{ht}^{\xi_t^i}$	Vazão turbinada ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) da unidade hidrelétrica $h$ para o nó $\omega_t^i$ no estágio $t$ ;
$\underline{q}_h, \bar{q}_h$	Limites mínimo e máximo de vazão turbinada ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) da unidade hidrelétrica $h$ ;
$v_{h,t+1}^{\xi_t^i}$	Volume armazenável final ( $\text{hm}^3$ ) do reservatório da unidade hidrelétrica $h$ para o nó da vazão afluente incremental sorteada $\xi_t^i$ no estágio $t$ . Note que é o volume inicial para o problema do estágio $t+1$ ;
$v_{ht}^{\xi_t^i}$	Volume armazenável inicial ( $\text{hm}^3$ ) do reservatório da unidade hidrelétrica $h$ para o nó da vazão afluente incremental sorteada $\xi_t^i$ no estágio $t$ ;
$\underline{v}_h, \bar{v}_h$	Limites mínimo e máximo de volume armazenável ( $\text{hm}^3$ ) da unidade hidrelétrica $h$ ;
$\xi_{ht}^i$	Vazão afluente sorteada $i$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) associada à unidade hidrelétrica $h$ no estágio $t$ .
U	Matriz incidência das unidades hidrelétricas do sistema;
$ct$	Constante de conversão de $\text{m}^3/\text{s}$ para $\text{hm}^3$ ;
$\alpha_{t+1}$	Custo total esperado do estágio $t+1$ ;
$(\xi_t^i)_+$	Conjunto dos nós sucessores do nó da vazão afluente incremental sorteada $\xi_t^i$ ;
$\bar{\pi}_{hc,t+1}^{(\xi_t^i)_+}$	Média dos multiplicadores de Lagrange de (4.11), $\pi_{h,t+1}^{\xi_{t+1}^i} \forall \xi_{t+1}^i \in (\xi_t^i)_+$ , da unidade hidrelétrica $h$ no estágio $t+1$ , que compõe o $c$ -ésimo corte de Benders que pertence ao conjunto $C_t$ no estágio $t$ .

De forma sucinta, (4.9) é a função objetivo que minimiza o custo total de operação do problema do nó da vazão afluente incremental sorteada  $\xi_t^i$  no estágio  $t$ . Com respeito às restrições do problema, (4.10) representa a condição de atendimento à demanda dos subsistemas  $k$ ; além disso, (4.11) corresponde ao balanço hídrico de cada usina hidrelétrica considerada. As restrições que limitam as variáveis do problema são (4.12)-(4.18). Note que os volumes armazenados dos reservatórios correspondem as variáveis de estado do modelo, que acoplam os problemas de nós em estágios subsequentes. Portanto, a decisão do volume inicial de um determinado reservatório no estágio  $t+1$  é tomada no estágio  $t$ .

Com respeito aos termos dos cortes de Benders definidos em (4.18), o multiplicador de Lagrange  $\pi_{h,t+1}^{\omega_{t+1}^i}$  associado com (4.11) para uma determinada hidrelétrica  $h$ , corresponde ao Valor da Água (VA) (LARROYD, 2012). Assim,  $\bar{\pi}_{hc,t+1}^{\omega_t^i}$  corresponde ao VA esperado para os problemas de  $(\omega_t^i)_+$  do estágio  $t+1$ . Nesse sentido, quando o VA é repassado ao estágio  $t$  em um corte  $c \in C_t$ , o mesmo reflete aos problemas de  $t$  as consequências futuras de decisões do uso da água no estágio atual. Por exemplo, quanto maior for o valor de  $\bar{\pi}_{hc,t+1}^{\omega_t^i}$  maior é o sinal econômico para armazenar água na usina  $h$  para os estágios subsequentes.

A estratégia de solução utilizada neste trabalho para resolver o problema de planejamento hidrotérmico é a Decomposição Aninhada (DA) (GLASSEY, 1973; BIRGE; LOUVEAUX, 2011; FINARDI; DECKER; MATOS, 2013). Esta metodologia obtém de forma iterativa a FCF de todos os estágios em duas etapas conhecidas como Etapa Progressiva e Etapa Regressiva, os detalhes da DA são introduzidos e exemplificados no Apêndice.

Por último, a FCF encontrada para cada um dos estágios é interpretada como a política de operação do sistema dado que determina a decisão de uso da água em cada um dos estágios de planejamento. A avaliação de uma determinada política de operação se realiza em uma etapa denominada de simulação da operação, na qual se verifica o desempenho da mesma na operação do sistema para inúmeras séries de afluência (detalhes são indicados no Apêndice). Deste modo, a comparação das políticas operativas obtidas a partir de uma árvore original e de uma árvore reduzida é um indicador de avaliação da qualidade da solução obtida pela árvore reduzida.

#### 4.4 AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DAS ÁRVORES REDUZIDAS

Esta seção tem o intuito de apresentar a forma de avaliar a qualidade das árvores reduzidas obtidas a partir do algoritmo de redução. Como apresentado em capítulos anteriores, as árvores aproximadas garantem a menor distância aninhada possível com respeito a uma árvore original. Contudo, o interesse neste ponto é avaliar a qualidade da solução obtida a partir da árvore de cenários reduzida. Especificamente no contexto do planejamento energético, isso significa determinar quão próximas se encontram as políticas de operação e a

solução do problema hidrotérmico conseguidas a partir da árvore reduzida, em comparação com as obtidas da árvore original. Para este fim, realizam-se as seguintes análises:

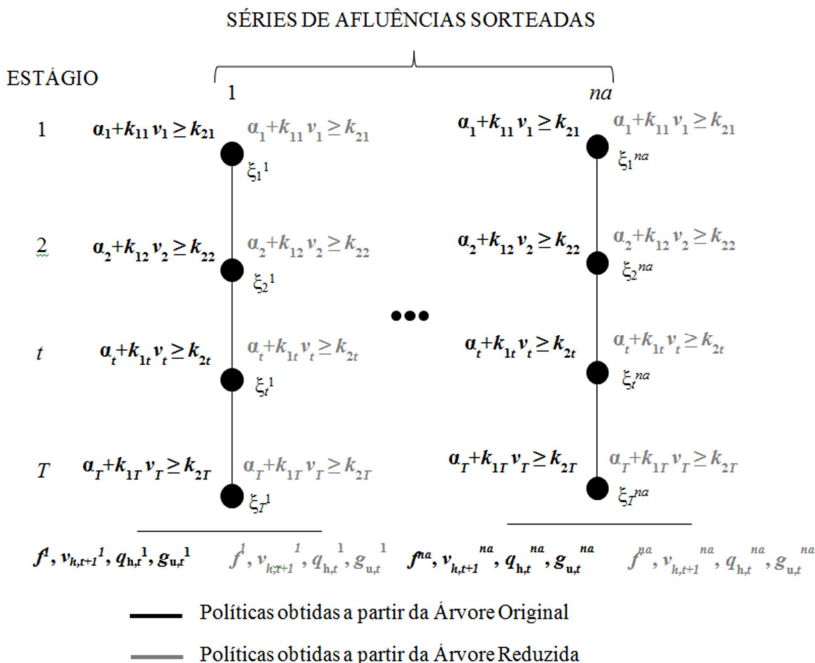
- Simulação operativa das políticas obtidas da árvore original e da árvore reduzida, com o fim de obter uma análise estatística da solução do problema;
- Brecha de otimalidade para avaliar a qualidade das políticas operativas obtidas a partir da árvore reduzida.

Estas duas estratégias de análise são detalhadas nas duas próximas seções.

#### **4.4.1 Simulação Operativa**

A simulação operativa é uma etapa de avaliação do desempenho de uma determinada política de operação. Assim, encontra-se o comportamento da operação do sistema hidrotérmico para inúmeras séries de afluências diferentes daquelas nas quais foi obtida a política. As séries utilizadas devem ser obtidas do mesmo modelo independente e para o mesmo horizonte de estudo do problema. Os atributos que podem ser observados nos resultados destas simulações são diversos, como o custo esperado da operação, o déficit, o armazenamento de volume esperado, geração termelétrica e hídrelétrica. Neste sentido, o objetivo é comparar os resultados da simulação operativa das políticas de operação da árvore original com as políticas da árvore reduzida. De forma didática, apresenta-se um esquema do processo de avaliação da simulação operativa na Figura 4.6.

**Figura 4.6 – Diagrama do processo da simulação operativa.**



No diagrama apresentado na Figura 4.6 é indicado de forma ilustrativa o processo da simulação operativa. O primeiro passo é realizar um sorteio das vazões de afluentes incrementais criando um número total de cenários  $na$ . Posteriormente, soluciona-se o problema (4.9)-(4.18) incluindo as políticas operativas da árvore original, assim, obtém-se  $na$  valores do custo de operação  $f_t$ , do volume final de cada estágio  $v_{h,t+1}$ , do turbinamento  $q_{ht}$  e da geração térmica  $g_{ut}$  em cada estágio, entre outros. Do mesmo modo, e mantendo os mesmos valores de vazões de afluentes sorteados, resolvem-se os  $na$  problemas incluindo neste caso as políticas obtidas da solução da árvore reduzida. Desta forma, uma análise estatística dos  $na$  resultados do custo total esperado de operação obtidos com ambas políticas operativas é realizada através do teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) (MASSEY, 1951).

De forma sucinta, o teste K-S mede a adesão estatística entre duas distribuições de probabilidade independentes. Para este fim, comparam-se as distribuições empíricas de probabilidade acumulada obtidas de

duas amostras diferentes<sup>11</sup>. A hipótese nula do teste é que as duas distribuições são aderentes e é rejeitada se:

$$D_{ns,ns'} > kstat, \quad (4.19)$$

$$kstat = c(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{na + na'}{na \cdot na'}} \quad (4.20)$$

em que,

$D_{ns,ns'}$	Máxima diferença entre as duas distribuições em avaliação;
$kstat$	Parâmetro estatístico de teste K-S;
$c(\alpha)$	Parâmetro que depende do nível de confiança $\alpha$ . Ver Tabela 4.8;
$na$	Número de amostras da distribuição 1;
$na'$	Número de amostras da distribuição 2.

A máxima diferença entre as distribuições em avaliação é calculada como:

$$D_{ns,ns'} = \sup_x |F_{1,na}(x) - F_{2,na'}(x)|, \quad (4.21)$$

em que,

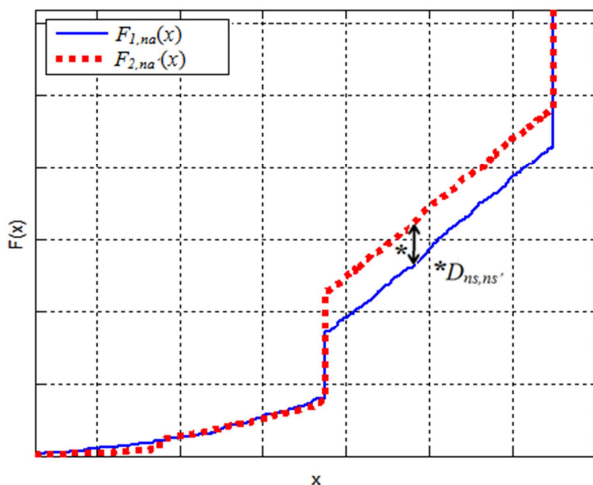
$F_{1,na}(x)$	Função de distribuição empírica acumulada da amostra 1;
$F_{2,na'}(x)$	Função de distribuição empírica acumulada da amostra 2;

De forma ilustrativa o estatístico de teste K-S,  $D_{ns,ns'}$ , apresenta-se na Figura 4.7:

---

<sup>11</sup> Neste caso, as duas amostras referem-se aos resultados da simulação operativa ( $f_t$ ,  $q_{ht}$ ,  $g_{ut}$ , entre outros) das políticas da árvore original e da simulação com as políticas da árvore reduzida respectivamente.

**Figura 4.7 – Esquema do teste Kolmogorov-Smirnov.**



Por último, o valor de  $c(\alpha)$  é obtido da Tabela 4.8:

**Tabela 4.8 – Valores de  $c(\alpha)$  dependendo do nível de confiança  $\alpha$ .**

$\alpha$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
$c(\alpha)$	1,22	1,36	1,48	1,63	1,73	1,95

#### 4.4.2 Brecha de otimalidade

A brecha de otimalidade é uma das formas de avaliar a qualidade da política operativa obtida ao final de um processo de otimização sob incerteza (RUSZCZYŃSKI; SHAPIRO, 2003). Avaliar a qualidade de uma política de operação significa verificar se as FCFs fornecem uma boa aproximação dos custos futuros de operação, comparados com os obtidos de um problema original. Especificamente neste trabalho, a brecha de otimalidade é utilizado para avaliar a política operativa obtida da solução via DA de uma árvore reduzida.

De forma sucinta, a brecha de otimalidade é um intervalo de confiança que, de forma simples, é dado pela diferença entre um limite superior e um limite inferior; intuitivamente quão menor seja esta diferença, maior a qualidade da solução em avaliação. Estes limites são definidos a seguir.

#### 4.4.2.1 Cálculo do limite superior

De forma geral, o cálculo do limite superior quando a árvore original não é conhecida, isto é, quando o espaço amostral  $\Xi$  com distribuição de probabilidade  $P$  for contínuo, começa realizando um sorteio para a obtenção de novos cenários independentes da árvore de cenários. Esses cenários são utilizados para simular as FCFs encontradas na DA, em que o limite superior é calculado pelo valor esperado do custo total (RUSZCZYŃSKI; SHAPIRO, 2003).

Para o cálculo do limite superior, denominado  $U_{Nu}$ , pode-se seguir o seguinte algoritmo:

Algoritmo 4-1: Algoritmo do cálculo do limite superior. (DE MATOS, 2012)

1. Carregar a informação da FCF obtida na DA
2. Sortear  $N_u$  cenários do espaço amostral  $\Xi$  com distribuição de probabilidade  $P$
3. Fazer  $cen=1, \dots, N_u$   
     Fazer  $t = 1, \dots, T$   
         Construa o PL para o cenário  $cen$  e estágio  $t$ ;  
         Resolva o problema (4.9)-(4.18);  
     Fim  
     Calcular o custo total de operação do cenário  $cen$ ,  $Z_{SUP}^{cen}$ ;  
     Fim
4. Calcular o valor esperado ( $U_{Nu}$ ) e o desvio padrão ( $S_U$ ) do Limite Superior.

Em que:

$$U_{Nu} = \frac{1}{N_u} \sum_{cen=1}^{N_u} Z_{SUP}^{cen}, \quad S_U = \sqrt{\frac{1}{N_u - 1} \sum_{cen=1}^{N_u} (Z_{SUP}^{cen} - U_{Nu})^2}$$

No caso particular em que o espaço amostral  $\Xi$  com distribuição de probabilidade  $P$  é discretizado e, portanto, a árvore de cenários é conhecida (AO), o cálculo do limite superior resume-se a encontrar o custo de operação do sistema com os cenários da AO adicionando os cortes da AR no problema (4.9)-(4.18). Em outras palavras, realiza-se uma Etapa Progressiva (ver o Apêndice) na AO com as FCFs da AR. Neste caso, o limite superior é um valor determinístico.



#### 4.4.2.2 Cálculo do limite inferior

No caso geral, isto é, quando o espaço amostral  $\Xi$  com distribuição de probabilidade  $P$  for contínuo, sendo a árvore original desconhecida, o cálculo do limite inferior é realizado sorteando  $N_l$  árvores de cenários independentes e otimizando-as. Assim, o limite inferior é formado pelo valor esperado do custo total de operação considerando que as  $N_l$  árvores de cenários são equiprováveis. O cálculo do limite inferior, denominado  $L_{N_l}$ , pode ser descrito no seguinte algoritmo:

Algoritmo 4-2: Algoritmo do limite inferior (DE MATOS, 2012)

1. Sortear  $N_l$  árvores do processo original, com  $n$  aberturas;
2. Fazer  $narv = 1, \dots, N_l$   
     Resolver a árvore  $narv$  com a DA;  
     Armazenar o  $Z_{INF}$  obtido na última iteração da DA;  
     Fim
3. Calcular o valor esperado ( $L_{N_l}$ ) e o desvio padrão ( $S_L$ ) do limite inferior.

Em que:

$$L_{N_l} = \frac{1}{N_l} \sum_{narv=1}^{N_l} Z_{INF, narv}, \quad S_L = \sqrt{\frac{1}{N_l - 1} \sum_{narv=1}^{N_l} (Z_{INF, narv} - L_{N_l})^2}$$

Para o caso particular no qual a árvore de cenários é conhecida, o  $L_{N_l}$  é determinístico e está dado pelo custo de operação total da árvore original, utilizando a política ótima.

#### 4.4.2.3 Estimação da brecha de otimalidade para otimização estocástica

No caso em que tanto o limite superior e inferior são determinísticos, a brecha de otimalidade é definida como:

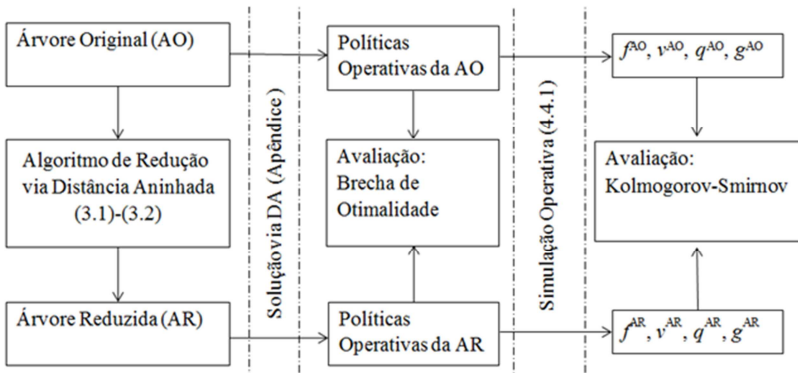
$$GAP = \frac{(U_{N_u} - L_{N_l})}{L_{N_l}} \cdot 100\%, \quad (4.22)$$

Naturalmente quão menor seja a brecha de otimalidade a qualidade da política operativa da árvore reduzida é maior. Neste estudo a brecha de otimalidade é considerada aceitável, quando for menor ou igual a 1%.

#### 4.4.3 Processo de Redução e Avaliação

O processo de redução e avaliação dos resultados é feito conforme a Figura 4.8.

**Figura 4.8 – Diagrama do processo de avaliação das árvores de cenários reduzidas.**



Observa-se que o processo começa com a redução da árvore AO, obtendo assim uma AR. Na sequência, estas árvores são resolvidas via DA e, em consequência, encontram-se as políticas operativas tanto para a AO quanto para a AR. Depois, tem-se as etapas de avaliação dos resultados obtidos, realizando-se a simulação operativa das políticas da AO e da AR. Como resultado desta etapa, tem-se uma análise da simulação por meio do teste K-S do custo total de operação e do despacho hidrotérmico. Adicionalmente, as políticas da AR são avaliadas com a brecha de otimalidade.

## 5. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados os resultados do algoritmo de redução e de avaliação das árvores de cenários obtidos. Os resultados estão divididos para o caso univariado e multivariado. Com fins didáticos, é apresentado um exemplo ilustrativo com árvores originais de pequeno porte. Finalmente, mostram-se diferentes casos de redução, com os quais são avaliados os esforços computacionais, a qualidade das árvores reduzidas e, para o caso multivariado, os efeitos de utilizar diferentes matrizes definindo a função distância no algoritmo de redução via distância aninhada.

Os casos de estudo estão baseados nas seguintes premissas:

- O sistema hidrotérmico utilizado é o definido na Seção 4.1;
- A árvore de cenários original univariada é a indicada na Seção 5.1.1;
- A árvore de cenários original multivariada é a indicada na Seção 5.1.2;
- O volume inicial de uma usina com reservatório é suposto como 50% da capacidade total de armazenamento da mesma;
- Em cada nó da árvore de cenários resolve-se o problema de PL (4.9)-(4.18);
- O método de solução do problema de planejamento utilizado é a DA, introduzida no Apêndice;
- A árvore reduzida é obtida a partir do Algoritmo 3-1 e Algoritmo 3-2, detalhados no Capítulo 3;
- A avaliação da qualidade da árvore reduzida é feita com os critérios indicados na Seção 4.4.
- O teste de K-S do custo total de operação é realizado com base na simulação operativa de 2000 cenários de vazões afluentes, com isto e um nível de confiança de 5%,  $kstat=0,043$ . Assim, se o valor de  $D_{ns,ns}$  obtido entre as duas distribuições empíricas acumuladas for menor que  $kstat$ , então, existe uma aderência estatística entre as distribuições em avaliação.

Nestes estudos, os resultados foram obtidos em um computador Intel Xeon X5680 de 3,33 GHz. A implementação computacional é feita

em ambiente Matlab no Windows XP 64 Bits e para resolver cada problema de PL foi utilizado o pacote computacional Gurobi 5.4.1.

### 5.1 Árvores Bases

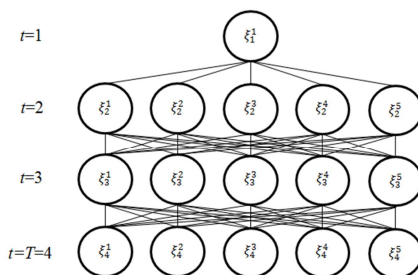
O intuito desta seção é definir uma árvore base, tanto para o caso univariado (usinas hidrelétricas são agregadas em bacias), quanto para o multivariado (hidrelétricas são consideradas individualmente). Para este fim, é utilizado o modelo independente para a geração de cenários de vazões afluentes incrementais. Além disso, a árvore gerada é do tipo da amostra comum como é realizado no caso brasileiro dentro do contexto da Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE); contudo, resolve-se a árvore com o algoritmo exato da DA, introduzido em (GLASSEY, 1973) e (BIRGE; LOUVEAUX, 2011) e explicada de forma sucinta no Apêndice. Adicionalmente, aproveitam-se as características do sorteio por bacia hidrográfica e do sorteio por usina, para obter uma árvore univariada e multivariada, respectivamente.

Neste trabalho, a árvore de cenários base é realizada para o sistema hidrelétrico apresentado na seção 4.1.1 e, portanto, o sorteio das vazões é baseado nos valores históricos da Bacia do Rio Grande. Além disso, a árvore base tem como características uma discretização mensal, quatro estágios sendo o mês de Julho o estágio determinístico, e cinco aberturas por estágio<sup>12</sup>, portanto, o número total de cenários é igual a 125.

A estrutura da árvore de cenários base se apresenta de forma ilustrativa na Figura 5.1. Ressalta-se que a estrutura da árvore para os casos univariado e multivariado é o mesmo, com a diferença de que as realizações  $\xi_t^i$  para o caso univariado são escalares e no caso multivariado são vetores.

---

<sup>12</sup> Refere-se ao número de discretizações do espaço amostral para cada estágio.

**Figura 5.1 – Estrutura da árvore de cenários base.**

### 5.1.1 Árvore original univariada base

A árvore original univariada (AOU) base é definida com os parâmetros obtidos do histórico da Bacia do Rio Grande indicados na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1 – Parâmetros do modelo independente da Bacia do Rio Grande.**

Mês	Bacia do Rio Grande	
	$\mu_x$	$\sigma_x$
Julho	7,0802	0,2605
Agosto	6,9066	0,2460
Setembro	6,8656	0,3218
Outubro	6,9961	0,3463

Deste modo, realiza-se um sorteio das vazões afluentes incrementais mensais dos estágios em estudo, obtendo as realizações indicadas na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2 – Realizações da AOU base.**

Estágio (mês)	Sorteio afluência (m <sup>3</sup> /s)				
Julho	$\xi_1^1=84$				
Agosto	$\xi_2^1=851$	$\xi_2^2=1336$	$\xi_2^3=829$	$\xi_2^4=760$	$\xi_2^5=811$
Setembro	$\xi_3^1=797$	$\xi_3^2=801$	$\xi_3^3=1015$	$\xi_3^4=900$	$\xi_3^5=1158$
Outubro	$\xi_4^1=813$	$\xi_4^2=1441$	$\xi_4^3=648$	$\xi_4^4=1480$	$\xi_4^5=1004$

### 5.1.2 Árvore multivariada base

A árvore original multivariada (AOM) base é obtida a partir de um sorteio das vazões afluentes incrementais de cada usina. Os parâmetros do modelo independente para cada usina do sistema são indicados nas Tabelas 5.3 a 5.5:

**Tabela 5.3 – Parâmetros modelo independente usinas H<sub>1</sub>-H<sub>2</sub>-H<sub>3</sub>-H<sub>4</sub>- H<sub>5</sub>.**

Mês	H <sub>1</sub>		H <sub>2</sub> <sup>13</sup>		H <sub>3</sub>		H <sub>4</sub>		H <sub>5</sub>	
	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$
Julho	4,28	0,24	0,00	0,00	4,49	0,27	5,78	0,30	4,00	0,44
Agosto	4,13	0,23	0,00	0,00	4,32	0,29	5,57	0,31	3,77	0,50
Setembro	4,14	0,32	0,00	0,00	4,30	0,37	5,57	0,43	3,76	0,45
Outubro	4,32	0,30	0,00	0,00	4,47	0,41	5,75	0,38	3,88	0,58

**Tabela 5.4 – Parâmetros modelo independente usinas H<sub>6</sub>-H<sub>7</sub>-H<sub>8</sub>-H<sub>9</sub>- H<sub>10</sub>.**

Mês	H <sub>6</sub>		H <sub>7</sub>		H <sub>8</sub>		H <sub>9</sub>		H <sub>10</sub>	
	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$
Julho	2,62	0,31	1,79	0,33	2,81	0,32	3,59	0,30	4,43	0,30
Agosto	2,38	0,36	1,56	0,36	2,55	0,36	3,37	0,32	4,19	0,36
Setembro	2,21	0,44	1,32	0,43	2,34	0,46	3,24	0,40	4,10	0,45
Outubro	2,31	0,51	1,28	0,63	2,45	0,51	3,35	0,44	4,26	0,45

**Tabela 5.5 – Parâmetros modelo independente usinas H<sub>11</sub>-H<sub>12</sub>-H<sub>13</sub>-H<sub>14</sub>- H<sub>15</sub>.**

Mês	H <sub>11</sub>		H <sub>12</sub>		H <sub>13</sub>		H <sub>14</sub>		H <sub>15</sub>	
	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$	$\mu_x$	$\sigma_x$
Julho	3,34	0,27	2,90	0,33	0,02	0,11	5,58	0,50	4,99	0,38
Agosto	3,17	0,28	2,74	0,36	0,00	0,00	5,44	0,48	4,87	0,32
Setembro	3,16	0,38	2,73	0,45	0,01	0,08	5,36	0,52	4,78	0,37
Outubro	3,36	0,41	2,86	0,47	0,03	0,16	5,40	0,57	4,81	0,62

<sup>13</sup> Os valores de média e desvio padrão iguais a zero decorre ao fato que H<sub>2</sub> está poucos quilômetros a jusante de H<sub>1</sub>.

Com base nos parâmetros do modelo independente de cada usina pertencente à Bacia do Rio Grande, realiza-se um sorteio das vazões afluentes incrementais obtendo as realizações indicadas na Tabela 5.6.

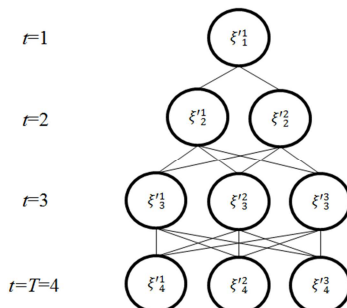
**Tabela 5.6 – Realizações da AOM base.**

Estágio (mês)	Sorteio afluência (m <sup>3</sup> /s)																
Julho	$\xi_1^1$	[84	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1	358	270]	<sup>T</sup>
Agosto	$\xi_2^1$	[54	1	60	185	28	9	4	14	27	82	19	21	1	350	120]	<sup>T</sup>
	$\xi_2^2$	[65	1	52	379	120	10	6	24	51	34	18	13	1	119	118]	<sup>T</sup>
	$\xi_2^3$	[83	1	85	237	64	15	4	25	35	53	28	13	1	308	93]	<sup>T</sup>
	$\xi_2^4$	[57	1	62	350	21	9	5	8	32	32	25	18	1	182	157]	<sup>T</sup>
	$\xi_2^5$	[58	1	76	286	45	13	6	21	21	35	30	14	1	391	111]	<sup>T</sup>
Setembro	$\xi_3^1$	[84	1	125	318	57	7	3	22	22	65	13	20	1	266	109]	<sup>T</sup>
	$\xi_3^2$	[45	1	78	107	47	7	4	21	22	129	27	9	1	294	152]	<sup>T</sup>
	$\xi_3^3$	[39	1	91	176	61	11	5	14	19	34	18	8	1	329	123]	<sup>T</sup>
	$\xi_3^4$	[70	1	55	227	49	16	4	4	34	38	35	13	1	306	127]	<sup>T</sup>
	$\xi_3^5$	[47	1	35	94	21	6	4	11	18	38	37	16	1	169	141]	<sup>T</sup>
Outubro	$\xi_4^1$	[45	1	110	553	34	10	6	26	15	32	24	17	1	248	85]	<sup>T</sup>
	$\xi_4^2$	[95	1	75	327	101	13	3	5	25	77	24	22	1	180	170]	<sup>T</sup>
	$\xi_4^3$	[46	1	92	555	35	4	6	20	40	149	16	11	1	445	534]	<sup>T</sup>
	$\xi_4^4$	[78	1	120	284	48	11	4	30	46	60	35	12	1	100	123]	<sup>T</sup>
	$\xi_4^5$	[49	1	123	181	36	8	1	19	24	119	34	26	1	879	114]	<sup>T</sup>

### 5.1.3 Estrutura árvore reduzida base

No exemplo proposto, a AR tem um total de 18 cenários correspondentes a 14% do total de cenários da AO. A estrutura da AR é indicada de forma ilustrativa a seguir na Figura 5.2.

**Figura 5.2 – Estrutura da árvore reduzida.**



## 5.2 Árvores Univariadas

Esta seção apresenta os resultados do processo para a obtenção e avaliação da árvore reduzida univariada (ARU) de um exemplo ilustrativo. Na sequência, indica-se a solução da AOU base com as respectivas políticas operativas obtidas. Logo, indica-se o processo iterativo de redução até a obtenção da ARU e, posteriormente, a solução via DA da mesma. Por último, realizam-se os testes de K-S e a brecha de otimalidade para verificar a qualidade da ARU.

### 5.2.1 Solução da árvore original

A solução da AOU base via DA é indicada na Tabela 5.7; na mesma, indica-se o custo ótimo de operação, o número de iterações, o tempo computacional e o conjunto de restrições encontradas durante o processo iterativo de solução, que representa as políticas operativas para decidir o uso da água em cada estágio de tempo.

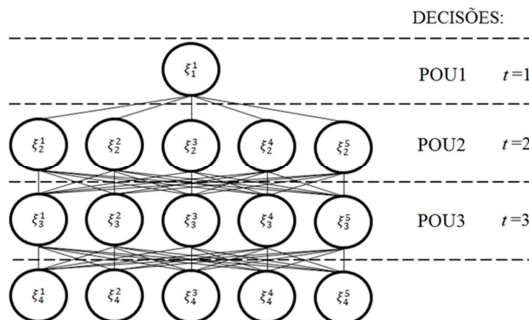
**Tabela 5.7 – Resultados da AOU base.**

<b><i>csup</i> (R\$)</b>	693.086,37
<b>Iterações</b>	22
<b>Tempo (s)</b>	298
<b>Políticas operativas</b>	-POU1 (Políticas operativas da AOU base para $t=1$ ) -POU2 (Políticas operativas da AOU base para $t=2$ ) -POU3 (Políticas operativas da AOU base para $t=3$ )

O conjunto de restrições que representam o valor de custo futuro e decidem o uso da água em cada estágio da AOU base, definem-se como POU1, POU2 e POU3 para os estágios  $t=1$ ,  $t=2$  e  $t=3$  respectivamente. De forma ilustrativa é apresentada a Figura 5.3.



**Figura 5.3 – Esquemático das políticas operativas para cada estágio de decisão da AOU base.**



### 5.2.2 Redução da árvore original

A redução da AOU base é realizada com base nos algoritmos 3-1 e 3-2, detalhados no Capítulo 3. Assim, a evolução da ARU ao longo das iterações do algoritmo de redução é indicada a seguir. Os resultados apresentados para cada iteração incluem as realizações das vazões afluentes com suas probabilidades de ocorrência; além disso, indica-se o valor da distância aninhada da árvore reduzida com respeito à árvore original.

**Tabela 5.8 – ARU. Iteração  $k=1$ .**

Estágio	Vazão afluente incremental ( $m^3/s$ )	Probabilidade (pu)
$t=1$	$\xi_1^1=84$	$p_1^1=1$
$t=2$	$\xi_2^1=798$ $\xi_2^2=1336$	$p_2^1=0,50$ $p_2^2=0,50$
$t=3$	$\xi_3^1=850$ $\xi_3^2=1015$ $\xi_3^3=1158$	$p_3^1=0,33$ $p_3^2=0,33$ $p_3^3=0,33$
$t=4$	$\xi_4^1=731$ $\xi_4^2=1460$ $\xi_4^3=1004$	$p_4^1=0,33$ $p_4^2=0,33$ $p_4^3=0,33$
Distância aninhada		$\mathbb{D}_2^{k=1} = 99.886,78$

**Tabela 5.9 – ARU. Iteração  $k=2$ .**

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)	Probabilidade (pu)
$t=1$	$\xi_1^1=84$	$p_1^1=1$
$t=2$	$\xi_2^1=794$ $\xi_2^2=1041$	$p_2^1=0,80$ $p_2^2=0,20$
$t=3$	$\xi_3^1=1101$ $\xi_3^2=799$ $\xi_3^3=903$	$p_3^1=0,40$ $p_3^2=0,40$ $p_3^3=0,20$
$t=4$	$\xi_4^1=1054$ $\xi_4^2=714$ $\xi_4^3=1464$	$p_4^1=0,40$ $p_4^2=0,20$ $p_4^3=0,40$
Distância aninhada		$\mathbb{D}_2^{k=2} = 24.199,83$

**Tabela 5.10 – ARU. Iteração  $k=3$ .**

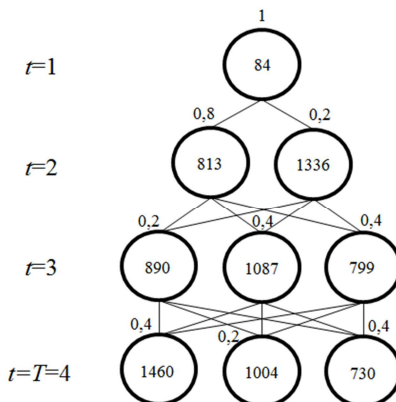
Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)	Probabilidade (pu)
$t=1$	$\xi_1^1=84$	$p_1^1=1$
$t=2$	$\xi_2^1=813$ $\xi_2^2=1336$	$p_2^1=0,80$ $p_2^2=0,20$
$t=3$	$\xi_3^1=890$ $\xi_3^2=1087$ $\xi_3^3=799$	$p_3^1=0,20$ $p_3^2=0,40$ $p_3^3=0,40$
$t=4$	$\xi_4^1=1460$ $\xi_4^2=1004$ $\xi_4^3=730$	$p_4^1=0,40$ $p_4^2=0,20$ $p_4^3=0,40$
Distância aninhada		$\mathbb{D}_2^{k=3} = 5.823,69$

**Tabela 5.11 – ARU. Iteração  $k=4$ .**

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)	Probabilidade (pu)
$t=1$	$\xi_1^1=84$	$p_1^1=1$
$t=2$	$\xi_2^1=813$ $\xi_2^2=1336$	$p_2^1=0,80$ $p_2^2=0,20$
$t=3$	$\xi_3^1=890$ $\xi_3^2=1087$ $\xi_3^3=799$	$p_3^1=0,20$ $p_3^2=0,40$ $p_3^3=0,40$
$t=4$	$\xi_4^1=1460$ $\xi_4^2=1004$ $\xi_4^3=730$	$p_4^1=0,40$ $p_4^2=0,20$ $p_4^3=0,40$
Distância aninhada		$\mathbb{D}_2^{k=3} = 5.823,69$

Note que na iteração  $k=4$  não se encontrou uma diminuição da distância aninhada  $\mathbb{D}_2$  com respeito à iteração imediatamente anterior. Portanto, a árvore reduzida para o caso do exemplo univariado é a encontrada na iteração  $k=3$ , indicada na Tabela 5.10. De forma ilustrativa, a árvore de cenários reduzida para o caso base univariado é indicada na Figura 5.4, os valores dentro do círculo correspondem às realizações da vazão afluyente e, os valores fora são referentes à probabilidade de ocorrência.

**Figura 5.4 – Árvore de cenários reduzida caso base univariado.**



O tempo computacional utilizado em cada iteração para encontrar a árvore reduzida resultante é indicado na Tabela 5.12.

**Tabela 5.12 – Tempo computacional utilizado para encontrar a ARU.**

<b>Iteração<sup>14</sup></b>	<b>Tempo Computacional (s)</b>
1	6,98
2	3,31
3	3,28
4	3,26
Total	16,86

<sup>14</sup> A iteração 1 corresponde à fase de Redução Inicial (Algoritmo 3-1). Por outro lado, as iterações subsequentes estão associadas com a fase de Adaptação Ótima (Algoritmo 3-2).

### 5.2.3 Solução da árvore reduzida

Para a solução da ARU é utilizada a DA como metodologia de solução. O interesse particular é encontrar o conjunto de restrições que descrevem as políticas operativas obtidas a partir da ARU. Os resultados encontrados são apresentados na Tabela 5.13.

**Tabela 5.13 – Resultados para a ARU.**

<b><i>csup</i> (R\$)</b>	688.163,7
<b>Iterações</b>	16
<b>Tempo (s)</b>	7,59
<b>Políticas operativas</b>	-PRU1 (Políticas operativas da ARU para $t=1$ ) -PRU2 (Políticas operativas da ARU para $t=2$ ) -PRU3 (Políticas operativas da ARU para $t=3$ )

O tempo computacional empregado na solução via DA da árvore reduzida mais o tempo do processo de redução é comparado com o tempo de solução da árvore original, como é indicado na Tabela 5.14. Note que o tempo utilizado no processo completo da árvore reduzida é significativamente menor, isto é, 8% do tempo da solução da árvore original. Assim, no contexto do esforço computacional, esta árvore reduzida é uma alternativa viável.

**Tabela 5.14 – Tempo computacional da solução da AOU base e ARU.**

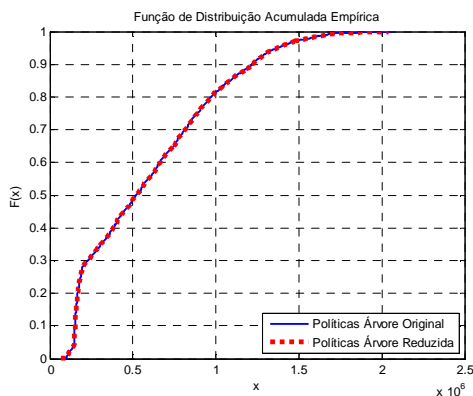
Árvore	Tempo Computacional (s)		
	DA	Redução	Total
AOU base	298,0	-	298,0
ARU	7,7	16,8	24,5

## 5.2.4 Avaliação da qualidade da solução da ARU

### 5.2.4.1 Teste Kolmogorov-Smirnov

Para o caso univariado as distribuições acumuladas do custo total de operação simulado com as políticas da AOU base e da ARU tem o comportamento indicado na Figura 5.5.

**Figura 5.5 – Teste K-S – Custo total da árvore univariada.**



Note que as distribuições acumuladas apresentadas na Figura 5.5 são praticamente iguais, a máxima distância encontrada entre elas é  $D_{ns,ns'}=0,005$ . Assim, verifica-se que as distribuições do custo total são aderentes estatisticamente ( $D_{ns,ns'} < kstat$ ).

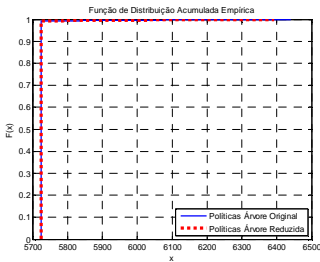
Por outro lado, é realizada uma comparação do despacho hidrotérmico obtido com as políticas operativas da AOU base e da ARU. Assim, é realizada uma análise dos valores médios e dos quantis da potência hidrelétrica, potência térmelétrica e déficit encontrado em cada estágio. Os valores obtidos da simulação operativa são indicados na Tabela 5.15.

**Tabela 5.15 – Resultados médios da simulação operativa. Caso univariado.**

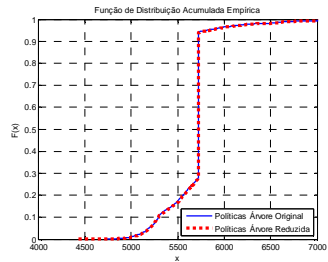
Grandeza [MWMês]	Estágio	Política Operativas								
		$\mu$			Quantil 25%			Quantil 75%		
		AOU base	ARU	Erro (%)	AOU base	ARU	Erro (%)	AOU base	ARU	Erro (%)
Potência Hidrelétrica	$t=1$	5725	5725	0,00	5725	5725	0,00	5725	5725	0,00
	$t=2$	5727	5727	0,00	5725	5725	0,00	5725	5725	0,00
	$t=3$	5662	5665	0,05	5664	5672	0,14	5725	5725	0,00
	$t=4$	5196	5194	0,04	4447	4443	0,09	5940	5944	0,07
Potência Termelétrica	$t=1$	1275	1275	0,00	1275	1275	0,00	1275	1275	0,00
	$t=2$	1273	1273	0,00	1275	1275	0,00	1275	1275	0,00
	$t=3$	1245	1244	0,08	1275	1275	0,00	1275	1275	0,00
	$t=4$	1073	1072	0,09	1060	1056	0,38	1275	1275	0,00
Déficit	$t=1$	0	0	0,00	0	0	0,00	0	0	0,00
	$t=2$	0	0	0,00	0	0	0,00	0	0	0,00
	$t=3$	92,80	90,82	2,13	0	0	0,00	61,39	52,89	13,85
	$t=4$	730,82	733,91	0,42	0	0	0,00	1278	1283	0,39

O erro encontrado para os valores médios e quantis do despacho hidrotérmico em cada estágio a partir das políticas operativas da ARU é aceitável. Este resultado é um indicativo da alta qualidade da ARU. Para verificar esta hipótese, apresentam-se os testes de K-S dos valores simulados do despacho hidrotérmico. Assim, os testes para a potência hidrelétrica gerada em cada estágio são apresentados na Figura 5.6, Figura 5.7 e Figura 5.8.

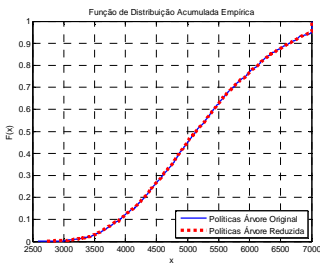
**Figura 5.6 – Teste K-S –  
Potência hidrelétrica em  $t=2$ -  
Árvore univariada.**



**Figura 5.7 – Teste K-S –  
Potência hidrelétrica em  $t=3$ -  
Árvore univariada.**

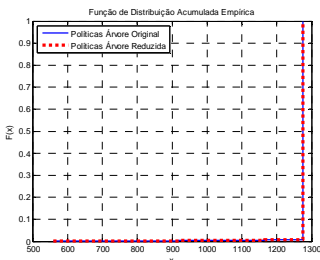


**Figura 5.8 – Teste K-S –  
Potência hidrelétrica em  $t=4$ -  
Árvore univariada.**

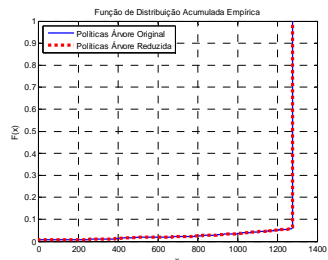


Analogamente os resultados dos testes K-S para a geração termelétrica em cada estágio são apresentados na continuação.

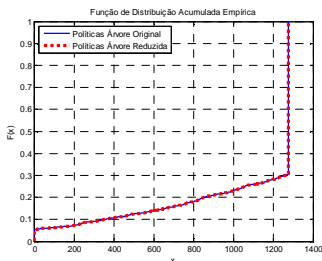
**Figura 5.9 – Teste K-S –  
Potência termelétrica em  $t=2$ -  
Árvore univariada.**



**Figura 5.10 – Teste K-S –  
Potência termelétrica em  $t=3$ -  
Árvore univariada.**



**Figura 5.11 – Teste K-S –  
Potência termelétrica em  $t=4$ -  
Árvore univariada.**



Os valores de  $D_{ns,ns'}$  das figuras 5.9 a 5.11 são indicados na Tabela 5.16. Note que para todos os casos  $D_{ns,ns'} < kstat$  e, portanto, conclui-se uma alta aderência estatística entre as variáveis em avaliação.

**Tabela 5.16 –  $D_{ns,ns'}$  dos valores simulados da potência hidrelétrica e potência termelétrica. Caso univariado.**

Estágio	$D_{ns,ns'}$	
	$kstat = 0,043$ (2000 amostras)	
	Potência Hídrica	Potência Térmica
$t=1$	0	0
$t=2$	0,002	0
$t=3$	0,010	0
$t=4$	0,005	0

Com o fim de determinar a qualidade das políticas operativas da ARU, além dos resultados satisfatórios encontrados do teste K-S é calculado a brecha de otimalidade.

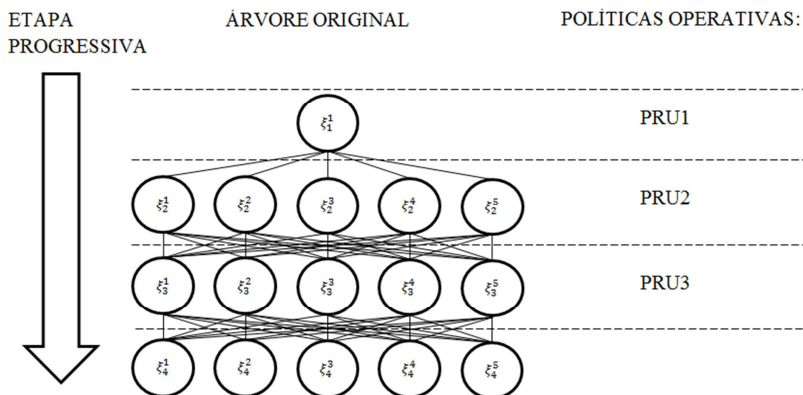
#### 5.2.4.2 Brecha de otimalidade

A brecha de otimalidade é obtida a partir da solução da AOU (limite inferior) e da realização de uma Etapa Progressiva da DA da AOU base incluindo o conjunto de restrições que representam a política



operativa obtida da ARU (limite superior). Este processo é ilustrado na Figura 5.12.

**Figura 5.12 – Processo de cálculo do limite superior. Caso univariado.**



**Tabela 5.17 – Brecha de otimalidade. Caso univariado.**

<b>Política Operativa</b>	<b><i>csup</i> (R\$)</b>	<b>Brecha de otimalidade (%)</b>
AOU base	693.086,4	
ARU	693.728,9	0,09

Tendo em conta que a redução da árvore reduzida é feita para 14% do número total de cenários da árvore original, o valor da brecha de otimalidade encontrada menor que 0,1% é satisfatório. Nesse sentido e tendo em conta os resultados prévios do teste de K-S, conclui-se que as políticas operativas da ARU representam adequadamente as políticas da AOU base.

### 5.2.5 Resultados Adicionais

Nesta seção são apresentados os resultados de diferentes reduções de três árvores originais univariadas diferentes. Os resultados são obtidos de forma análoga ao procedimento instruído anteriormente; isto é, a solução é obtida via DA e a avaliação da qualidade das árvores reduzidas é realizado com o teste de K-S e a brecha de otimalidade. A principal informação dos resultados obtidos é indicada na Tabela 5.18; a qual está estruturada da seguinte forma:

- Na primeira coluna, indica-se a AOU em estudo e as respectivas ARU;
- O número de aberturas por estágio e o número de cenários é indicada na coluna denominada estrutura da árvore. Por exemplo, para uma árvore com um total de três estágios e duas aberturas por estágio, a representação é dada como  $1 \times 2 \times 2 \rightarrow 4$ . Além disso, em cada árvore original é indicado o mês inicial onde inicia o horizonte de planejamento em estudo;
- Na coluna denominada *csup* é indicado o valor do limite inferior  $L_{NI}$  da brecha de otimalidade quando corresponde a uma árvore original e, para o caso de uma árvore reduzida, o *csup* corresponde ao limite superior  $U_{Nu}$ ;
- Com a informação do *csup* indicada para a árvore original e reduzida é calculado o valor da brecha de otimalidade de acordo com (4.22);
- Os resultados do teste de K-S do custo total de operação são obtidos a partir da simulação operativa de 2000 cenários de vazões afluentes. Além disso, apresenta-se a média do custo de operação obtido das políticas de operação da árvore original e reduzida;
- Por último é apresentado o tempo computacional utilizado na solução da árvore via DA e o tempo empregado na redução da árvore original.

**Tabela 5.18 – Resultados redução de diferentes árvores de cenários univariadas.**

Caso	Estrutura da Árvore / Número Cenários	c <sub>sup</sub> (R\$)	Brecha (%)	Simulação Operativa Custo Operativo (R\$)			Tempo (min)		
				K-S kstat =0,043	μ (R\$)	Erro μ (%)	Redução	DA	Total
AOU1	1×5×5×5×5 : 625 (Mês 6)	1983509	-	-	1966724	-	-	10,41	10,41
ARU11	1×2×5×5×5 : 250	1984346	0,04	0,0025	1967601	0,04	0,015	1,90	1,92
ARU12	1×2×2×2×5 : 40	1984577	0,05	0,0035	1967799	0,05	0,016	0,34	0,36
ARU13	1×5×2×2×2 : 40	2007918	1,23	0,0360	1942117	1,25	0,016	0,26	0,28
AOU2	1×10×10×10 : 1000 (Mês 7)	606494	-	-	596983	-	-	397,43	397,43
ARU21	1×3×5×8 : 120	606615	0,02	0,0055	597007	0,00	0,025	2,27	2,30
ARU22	1×8×5×3 : 120	606856	0,06	0,0050	597460	0,08	0,024	1,70	1,72
ARU23	1×2×7×7 : 98	607380	0,15	0,0050	596979	0,00	0,021	2,16	2,18
AOU3	1×20×20 : 400 (Mês 4)	4275	-	-	4571	-	-	13,58	13,58
ARU31	1×8×15 : 120	4282	0,16	0,0245	4566	1,25	0,022	2,33	2,35
ARU32	1×20×8 : 160	4400	2,92	0,0350	4833	7,15	0,017	1,53	1,55
ARU33	1×8×8 : 64	4402	2,96	0,0345	4828	7,05	0,017	0,88	0,90

Os resultados da Tabela 5.18 indicam, para todos os casos de estudo, uma vantagem computacional da redução de árvores de cenários. Note que o tempo empregado na redução e solução das árvores reduzidas é pelo menos 6 vezes menor ao tempo necessário para a solução da árvore original. Por outro lado, uma comparação dos resultados para as diferentes estruturas de árvores reduzidas de uma mesma árvore original são discutidas a seguir.

- AOU1:

Para as árvores reduzidas da árvore original AOU1, observa-se uma aderência estatística da simulação do custo médio obtido a partir das políticas operativas da árvore original e das árvores reduzidas propostas ( $D_{ns,ns'} < kstat$ ). Com respeito à brecha de otimalidade, note que a árvore ARU11, a qual mantém o maior número de cenários respeito à árvore original (40%), apresenta a maior proximidade das políticas operativas de decisão em cada estágio. Além disso, percebe-se

que a estrutura da árvore reduzida é uma característica determinante na obtenção das políticas operativas aproximadas; de acordo com os resultados obtidos, embora as árvores ARU12 e ARU13 tenham o mesmo número de cenários, ao manter o maior número de realizações na árvore reduzida nos últimos estágios se consegue captar maior informação dos cenários da árvore original. Desta forma, note que a árvore ARU12 obteve uma proximidade alta com respeito à árvore original, isto é, a brecha de otimalidade é menor a 0,1%. Por outro lado, a árvore ARU13, a qual mantém no segundo estágio o mesmo número de realizações da árvore original, tem uma brecha superior a 1%, o que significa uma diferença não aceitável das decisões em cada estágio a partir das políticas operativas da árvore reduzida. Por último, os valores médios do custo de operação obtidos da simulação operativa de 2000 séries de cenários afirmam que as políticas mais aderentes pertencem às árvores ARU11 e ARU12, com erros percentuais inferiores a 0,1%.

- AOU2:

Neste caso de estudo são obtidas árvores reduzidas de tamanhos menores a 15% da árvore original. Contudo, as árvores reduzidas propostas obtêm resultados satisfatórios no teste K-S do custo total de operação e as brechas de otimalidade obtidas são menores a 1%. Estes fatos indicam que as políticas operativas obtidas a partir das árvores reduzidas em estudo, representam adequadamente as funções de custo futuro obtidas a partir da árvore original. Novamente, percebe-se que a medida que se mantém um maior número de realizações nos últimos estágios a qualidade da árvore reduzida é maior, como se observa nos valores das brechas de otimalidade da árvore ARU21 e ARU22 respectivamente. Por último, note que a árvore ARU23 representa de forma adequada à árvore original apesar de ser a árvore reduzida que tem o menor número de cenários; estes resultados são obtidos devido à estrutura da árvore reduzida, a qual prioriza conservar o maior número de realizações nos últimos estágios.

- AOU3:

Este caso de estudo tem o intuito de determinar o comportamento das políticas operativas obtidas a partir de árvores reduzidas para períodos de planejamento com vazões afluentes favoráveis, isto é, períodos úmidos caracterizados pelo baixo custo de operação. Assim, todas as árvores reduzidas propostas aprovam o teste K-S para o custo

total de operação, contudo, somente a árvore ARU31 tem um valor de brecha de otimalidade menor a 1%. Note que a árvore ARU32 mantém o número total de realizações da árvore original no segundo estágio e, ainda assim, não consegue representar de forma adequada a árvore original (brecha > 1%). Por sua vez, a árvore ARU33 mostra que o tamanho da árvore reduzida não é adequado para representar a árvore original. Os resultados obtidos para este caso de estudo reafirmam a hipótese que as árvores que conservam um número maior de realizações nos últimos estágios conseguem obter uma melhor representação da árvore original.

- **Árvore de 7 estágios (AOU4):**

Na sequência é apresentado um caso de redução de uma árvore de cenários de 7 estágios e um total de 4096 cenários. Diferentes reduções são realizadas mantendo o maior número de realizações possíveis nos últimos estágios. A simulação operativa das funções de custo futuro é realizada com 10.000 cenários simulados, com isto o valor de  $kstat = 0,019$ . Os resultados do teste K-S, a brecha de otimalidade e os tempos computacionais são indicados na Tabela 5.19.

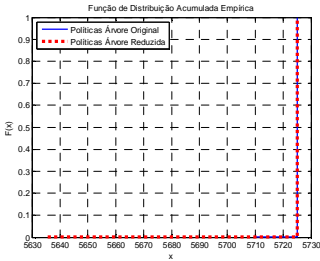
**Tabela 5.19 – Resultados da redução de árvore de 7 estágios.**

Caso	Estrutura da Árvore / Número Cenários	csup (R\$)	Brecha (%)	Simulação Operativa Custo Operativo (R\$)			Tempo (min)		
				K-S $kstat = 0,019$	$\mu$ (R\$)	Erro $\mu$ (%)	Redução	DA	Total
AOU4	1×4×4×4×4×4×4 : 4096 (Mês 7)	2295232	-	-	1958157	-	-	10000	10000
ARU41	1×2×2×4×4×4×4 : 1024	2295232	0,00	0,0010	1958053	0,01	0,019	41,46	41,48
ARU42	1×2×2×2×4×4×4 : 512	2295459	0,01	0,0013	1958520	0,02	0,022	4,14	4,16
ARU43	1×2×2×2×2×4×4 : 256	2301756	0,28	0,0094	1962870	0,24	0,020	1,86	1,88

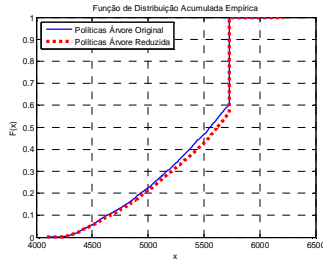
Os resultados encontrados para a redução da árvore original nas árvores ARU41, ARU42 e ARU43 foram satisfatórios. Nota-se que os testes de K-S são aprovados para a simulação operativa e o erro percentual do valor médio do custo operativo encontrado é menor que 0,5%, o que comprova a alta aderência estatística entre as amostras obtidas do custo total a partir das políticas operativas da árvore original e árvores reduzidas. Além disso, os valores da brecha de otimalidade obtidas mostram que as árvores reduzidas representam de forma

adequada à árvore original. Por último, com o fim de visualizar o comportamento das variáveis primais do problema, apresentam-se os resultados do teste K-S para a potência hidrelétrica gerada em cada estágio da árvore ARU42. Como pode ser observado nas figuras 5.13 a 5.18.

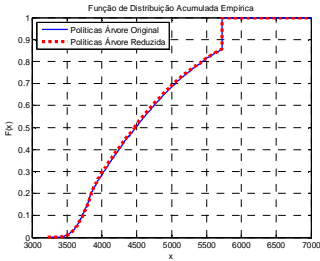
**Figura 5.13 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em  $t=2$ -  
 $D_{ns,ns'}=0,0$ .**



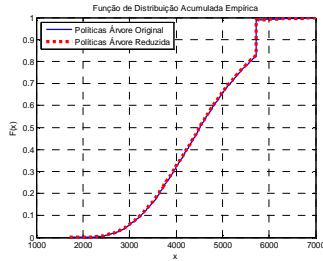
**Figura 5.15 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em  $t=3$ -  
 $D_{ns,ns'}=0,0427$ .**



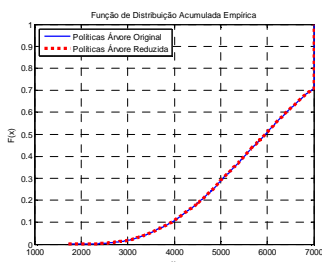
**Figura 5.14 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em  $t=4$ -  
 $D_{ns,ns'}=0,0129$ .**



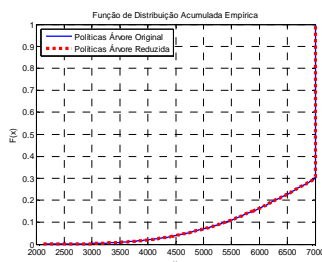
**Figura 5.16 – Teste K-S – Potência hidrelétrica em  $t=5$ -  
 $D_{ns,ns'}=0,0065$ .**



**Figura 5.17 – Teste K-S –  
Potência hidrelétrica em  $t=6$  –  
 $D_{ns,ns'}=0,0018$ .**



**Figura 5.18 – Teste K-S –  
Potência hidrelétrica em  $t=7$  –  
 $D_{ns,ns'}=0,0$ .**



Como pode ser observado, existe uma alta aderência estatística nas decisões tomadas em cada estágio com as políticas da árvore original AOU4 e da árvore reduzida ARU42. Note que somente o estágio de tempo  $t=3$  não atendeu os requisitos do teste K-S. Contudo, o desempenho das políticas de decisão da árvore reduzida é adequado, dado que, observa-se que a decisão de geração termelétrica e hidrelétrica do primeiro estágio é igual com a política da árvore original e da reduzida, como é indicado na Figura 5.19.

**Figura 5.19 – Decisão de geração termelétrica e hidrelétrica do primeiro estágio com as políticas operativas da AOU4 e ARU42.**

Caso	Potência Gerada em $t=1$ (MW)			
	Termelétrica	Erro (%)	Hidrelétrica	Erro (%)
AOU4	1275	0,00	5725	0,00
ARU42	1275		5725	

De forma análoga são apresentados os resultados para o caso multivariado, no começo é apresentado um exemplo ilustrativo do cálculo e da avaliação de árvores reduzidas e no final são ilustrados os resultados de estudo de casos propostos.

### 5.3 Árvores Multivariadas

Esta seção apresenta resultados numéricos do processo de redução de uma árvore de cenários multiestágio e a avaliação da qualidade da árvore reduzida. Neste caso, diferentes alternativas, indicadas na seção 3.3, para atualização das realizações da árvore reduzida são utilizadas. Assim, uma análise para aprimorar a obtenção de árvores reduzidas multiestágio é discutida a seguir.

#### 5.3.1 Solução da árvore original

Na Tabela 5.20 são apresentados os resultados obtidos pela metodologia de solução DA aplicada à AOM base de tamanho indicado na Figura 5.1.

**Tabela 5.20 – Resultados para a AOM base.**

<b><i>csup</i> (R\$)</b>	80.154,49
<b>Iterações</b>	31
<b>Tempo (s)</b>	563,54
<b>Políticas operativas</b>	-POM1 (Políticas operativas da AOM base para $t=1$ ) -POM2 (Políticas operativas da AOM base para $t=2$ ) -POM3 (Políticas operativas da AOM base para $t=3$ )

As políticas operativas POM1, POM2 e POM3 definem os critérios do uso da água para os estágios  $t=1$ ,  $t=2$  e  $t=3$  respectivamente. O valor *csup* indicado na Tabela 5.20 corresponde ao limite inferior  $L_{NI}$  da brecha de otimalidade.

#### 5.3.2 Redução da árvore original

Para o caso multivariado, apresentam-se as árvores reduzidas obtidas a partir de diferentes matrizes  $M$  utilizadas para encontrar a distância de ordem  $r=2$  entre cenários da árvore original e reduzida:  $d(\xi, \xi') = (\xi_r - \xi'_r)^T \cdot M \cdot (\xi_r - \xi'_r)$ . Deste modo, diferentes matrizes  $M$  proporcionam diferentes planos de transporte calculados a partir da distância aninhada e, portanto, diferentes atualizações das realizações são obtidas. Neste trabalho, são verificadas três alternativas para a matriz  $M$ .



- Matriz identidade: neste caso, a distância  $d(\xi, \xi')$  é simplesmente a distância Euclidiana, utilizada nos trabalhos (PFLUG; PICHLER, 2012; KOVACEVIC; PICHLER, 2012);
- Matriz inversa das correlações: neste caso, a distância  $d(\xi, \xi')$  resultante é conhecida como distância de Mahalanobis. Esta distância é utilizada em (DIAS, 2009);
- Matriz de ponderação das potências das usinas: a distância  $d(\xi, \xi')$  resultante é uma das contribuições deste trabalho.

### 5.3.2.1 Árvore reduzida multivariada – Matriz Identidade (ARMI)

Na sequência é apresentado o processo para a obtenção da árvore reduzida multivariada a partir da utilização da matriz identidade no cálculo da distância entre cenários.

$$d(\xi, \xi')^2 = (\xi_t - \xi'_t)^T \cdot I \cdot (\xi_t - \xi'_t),$$

Neste exemplo a matriz identidade  $I \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ , pois cada realização atualizada na árvore reduzida tem a informação do sorteio das vazões afluentes para cada uma das 15 usinas do sistema base. Na continuação são apresentadas as realizações e probabilidades da árvore reduzida obtidas em cada iteração do processo de redução:

**Tabela 5.21 – ARMI. Iteração  $k=1$ .**

Estágio	Vazão afluente incremental (m <sup>3</sup> /s)	Probabilidade (p.u)
$t=1$	$\xi_1^1 = [84 \ 1 \ 87 \ 319 \ 73 \ 17 \ 7 \ 22 \ 45 \ 103 \ 22 \ 23 \ 1 \ 358 \ 270]^T$	$p_1^1 = 1$
$t=2$	$\xi_2^1 = [62 \ 1 \ 71 \ 223 \ 42 \ 11 \ 4 \ 18 \ 28 \ 63 \ 24 \ 17 \ 1 \ 350 \ 111]^T$	$p_2^1 = 0,50$
	$\xi_2^2 = [61 \ 1 \ 57 \ 365 \ 70 \ 9 \ 5 \ 16 \ 41 \ 33 \ 21 \ 16 \ 1 \ 151 \ 138]^T$	$p_2^2 = 0,50$
$t=3$	$\xi_3^1 = [51 \ 1 \ 54 \ 148 \ 38 \ 10 \ 4 \ 10 \ 22 \ 37 \ 32 \ 14 \ 1 \ 243 \ 133]^T$	$p_3^1 = 0,33$
	$\xi_3^2 = [84 \ 1 \ 125 \ 318 \ 57 \ 7 \ 3 \ 22 \ 22 \ 65 \ 13 \ 20 \ 1 \ 266 \ 109]^T$	$p_3^2 = 0,33$
	$\xi_3^3 = [45 \ 1 \ 78 \ 107 \ 47 \ 7 \ 4 \ 21 \ 22 \ 129 \ 27 \ 9 \ 1 \ 293 \ 152]^T$	$p_3^3 = 0,33$
$t=4$	$\xi_4^1 = [66 \ 1 \ 104 \ 419 \ 54 \ 11 \ 5 \ 22 \ 26 \ 50 \ 27 \ 17 \ 1 \ 194 \ 115]^T$	$p_4^1 = 0,33$
	$\xi_4^2 = [45 \ 1 \ 92 \ 554 \ 35 \ 4 \ 6 \ 20 \ 40 \ 149 \ 16 \ 11 \ 1 \ 445 \ 534]^T$	$p_4^2 = 0,33$
	$\xi_4^3 = [49 \ 1 \ 123 \ 181 \ 36 \ 8 \ 1 \ 19 \ 24 \ 119 \ 34 \ 26 \ 1 \ 879 \ 114]^T$	$p_4^3 = 0,33$
Distância aninhada		$\mathbb{D}_2^{k=1} = 127.763,42$

**Tabela 5.22 – ARMI. Iteração  $k=2$ .**

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)														Probabilidade (p.u)	
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1	358	270]T	$p'_{1^1}=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[65$	1	63	339	69	10	5	18	40	37	23	15	1	182	129]T	$p'_{2^1}=0,40$
	$\xi_2^2=[61$	1	72	236	42	12	5	19	26	57	25	16	1	358	110]T	$p'_{2^2}=0,60$
$t=3$	$\xi_3^1=[45$	1	52	99	31	6	4	15	20	75	33	14	1	219	146]T	$p'_{3^1}=0,20$
	$\xi_3^2=[47$	1	81	172	56	11	4	13	23	53	23	9	1	318	130]T	$p'_{3^2}=0,40$
	$\xi_3^3=[78$	1	97	281	54	11	3	15	27	54	22	17	1	282	116]T	$p'_{3^3}=0,40$
$t=4$	$\xi_4^1=[67$	1	104	240	62	10	2	13	25	102	30	24	1	600	137]T	$p'_{4^1}=0,20$
	$\xi_4^2=[74$	1	109	343	56	11	4	24	36	58	30	15	1	146	125]T	$p'_{4^2}=0,20$
	$\xi_4^3=[46$	1	99	546	34	7	6	23	30	102	19	13	1	366	354]T	$p'_{4^3}=0,60$
Distância aninhada														$\mathbb{D}_2^{k=2} = 47.267,38$		

**Tabela 5.23 – ARMI. Iteração  $k=3$ .**

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)														Probabilidade (p.u)	
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1	358	270]T	$p'_{1^1}=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[61$	1	57	365	70	9	5	16	41	33	21	16	1	151	138]T	$p'_{2^1}=0,40$
	$\xi_2^2=[65$	1	74	236	46	12	4	20	28	57	26	16	1	350	108]T	$p'_{2^2}=0,60$
$t=3$	$\xi_3^1=[84$	1	125	318	57	7	3	22	22	65	13	20	1	266	109]T	$p'_{3^1}=0,20$
	$\xi_3^2=[46$	1	56	100	34	7	4	16	20	84	32	13	1	231	147]T	$p'_{3^2}=0,40$
	$\xi_3^3=[54$	1	73	201	55	14	4	9	27	36	26	11	1	317	125]T	$p'_{3^3}=0,40$
$t=4$	$\xi_4^1=[46$	1	92	555	35	4	6	20	40	149	16	11	1	445	534]T	$p'_{4^1}=0,20$
	$\xi_4^2=[49$	1	123	181	36	8	1	19	24	119	34	26	1	879	114]T	$p'_{4^2}=0,20$
	$\xi_4^3=[73$	1	102	382	61	11	4	20	29	56	28	17	1	176	126]T	$p'_{4^3}=0,60$
Distância aninhada														$\mathbb{D}_2^{k=3} = 18.790,86$		

**Tabela 5.24 – ARMI. Iteração  $k=4$ .**

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)													Probabilidade (p.u)		
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1	358	270]T	$p'_{1^1}=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[61$	1	57	365	70	9	5	16	41	33	21	16	1	151	138]T	$p'_{2^1}=0,40$
	$\xi_2^2=[65$	1	74	236	46	12	4	20	28	57	26	16	1	350	108]T	$p'_{2^2}=0,60$
$t=3$	$\xi_3^1=[84$	1	125	318	57	7	3	22	22	65	13	20	1	266	109]T	$p'_{3^1}=0,20$
	$\xi_3^2=[46$	1	56	100	34	7	4	16	20	84	32	13	1	231	147]T	$p'_{3^2}=0,40$
	$\xi_3^3=[54$	1	73	201	55	14	4	9	27	36	26	11	1	317	125]T	$p'_{3^3}=0,40$
$t=4$	$\xi_4^1=[46$	1	92	555	35	4	6	20	40	149	16	11	1	445	534]T	$p'_{4^1}=0,20$
	$\xi_4^2=[49$	1	123	181	36	8	1	19	24	119	34	26	1	879	114]T	$p'_{4^2}=0,20$
	$\xi_4^3=[73$	1	102	382	61	11	4	20	29	56	28	17	1	176	126]T	$p'_{4^3}=0,60$
Distância aninhada													$\mathbb{D}_2^{k=4} = 18.790,86$			

Devido ao fato de que a distância aninhada encontrada na iteração  $k=4$  é igual que a encontrada na iteração anterior; então, a árvore ARMI corresponde à árvore encontrada na iteração  $k=3$  indicada na Tabela 5.23. O tempo computacional utilizado no processo de redução é apresentado na Tabela 5.25.

**Tabela 5.25 – Tempo computacional utilizado para encontrar a ARMI.**

Iteração	Tempo Computacional (s)
1	7,15
2	4,07
3	3,27
4	3,27
Total	17,76

### 5.3.2.2 Árvore reduzida multivariada – Matriz de Ponderação das Potências das Usinas (ARMP)

A diferença em relação à seção anterior é que no cálculo da distância entre cenários utiliza-se uma matriz de ponderação das potências das usinas como segue.

$$d(\xi, \xi')^2 = (\xi_t - \xi'_t)^T \cdot PN \cdot (\xi_t - \xi'_t),$$

A matriz  $PN \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$ , é uma matriz diagonal que contém a informação da ponderação da capacidade nominal de potência máxima de cada usina do sistema base. Com base na informação do sistema hidrelétrico em estudo indicado na Tabela 4.1 é obtida a matriz  $PN$ .

$$PN = \text{diag}(PN_{H_1}, PN_{H_2}, \dots, PN_{H_{15}}),$$

$$\text{em que: } PN_u = \frac{\rho_u \cdot Q_u^{\max}}{\sum_{u \in T_k} \rho_u \cdot Q_u^{\max}} \quad \forall u \in T_k.$$

A atualização das realizações e probabilidades do processo de redução é indicada na sequência, nas tabelas 5.26 – 5.29.

**Tabela 5.26 – ARMP. Iteração  $k=1$ .**

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)	Probabilidade (p.u)
$t=1$	$\xi_1^1 = [84 \ 1 \ 87 \ 319 \ 73 \ 17 \ 7 \ 22 \ 45 \ 103 \ 22 \ 23 \ 1 \ 358 \ 270]^T$	$p_1^1 = 1$
$t=2$	$\xi_2^1 = [61 \ 1 \ 57 \ 365 \ 70 \ 9 \ 5 \ 16 \ 41 \ 33 \ 21 \ 16 \ 1 \ 151 \ 138]^T$	$p_2^1 = 0,50$
	$\xi_2^2 = [63 \ 1 \ 74 \ 249 \ 46 \ 12 \ 5 \ 20 \ 26 \ 51 \ 27 \ 15 \ 1 \ 360 \ 109]^T$	$p_2^2 = 0,50$
$t=3$	$\xi_3^1 = [50 \ 1 \ 76 \ 154 \ 51 \ 10 \ 4 \ 15 \ 24 \ 82 \ 27 \ 10 \ 1 \ 305 \ 139]^T$	$p_3^1 = 0,33$
	$\xi_3^2 = [84 \ 1 \ 125 \ 318 \ 57 \ 7 \ 3 \ 22 \ 22 \ 65 \ 13 \ 20 \ 1 \ 266 \ 109]^T$	$p_3^2 = 0,33$
	$\xi_3^3 = [47 \ 1 \ 35 \ 94 \ 21 \ 6 \ 4 \ 11 \ 18 \ 38 \ 37 \ 16 \ 1 \ 169 \ 141]^T$	$p_3^3 = 0,33$
$t=4$	$\xi_4^1 = [66 \ 1 \ 104 \ 419 \ 54 \ 11 \ 5 \ 22 \ 26 \ 50 \ 27 \ 17 \ 1 \ 194 \ 115]^T$	$p_4^1 = 0,33$
	$\xi_4^2 = [46 \ 1 \ 92 \ 555 \ 35 \ 4 \ 6 \ 20 \ 40 \ 149 \ 16 \ 11 \ 1 \ 445 \ 534]^T$	$p_4^2 = 0,33$
	$\xi_4^3 = [49 \ 1 \ 123 \ 181 \ 36 \ 8 \ 1 \ 19 \ 24 \ 119 \ 34 \ 26 \ 1 \ 879 \ 114]^T$	$p_4^3 = 0,33$
Distância aninhada		$\mathbb{D}_2^{t=1} = 18.958,18$

Tabela 5.27 – ARMP. Iteração  $k=2$ .

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)													Probabilidade (p.u)		
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1	358	270] <sup>T</sup>	$p_1^1=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[65$	1	63	339	69	10	5	18	40	37	23	15	1	182	129] <sup>T</sup>	$p_2^1=0,40$
	$\xi_2^2=[61$	1	72	236	42	12	5	19	26	57	25	16	1	358	111] <sup>T</sup>	$p_2^2=0,60$
$t=3$	$\xi_3^1=[46$	1	52	99	31	6	4	15	20	75	33	14	1	219	146] <sup>T</sup>	$p_3^1=0,20$
	$\xi_3^2=[47$	1	81	172	56	12	4	13	23	54	23	9	1	317	130] <sup>T</sup>	$p_3^2=0,60$
	$\xi_3^3=[78$	1	97	281	54	11	3	15	27	54	22	17	1	282	116] <sup>T</sup>	$p_3^3=0,20$
$t=4$	$\xi_4^1=[57$	1	111	281	49	9	2	18	23	93	30	23	1	613	120] <sup>T</sup>	$p_4^1=0,20$
	$\xi_4^2=[84$	1	102	301	69	12	3	20	38	67	31	16	1	132	142] <sup>T</sup>	$p_4^2=0,60$
	$\xi_4^3=[46$	1	99	546	34	7	6	23	30	102	19	13	1	366	354] <sup>T</sup>	$p_4^3=0,20$
Distância aninhada													$\mathbb{D}_2^{k=2} = 7.286,12$			

Tabela 5.28 – ARMP. Iteração  $k=3$ .

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)													Probabilidade (p.u)		
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1	358	270] <sup>T</sup>	$p_1^1=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[61$	1	57	365	70	9	5	16	41	33	21	16	1	151	138] <sup>T</sup>	$p_2^1=0,40$
	$\xi_2^2=[65$	1	74	236	46	12	4	20	28	57	26	16	1	350	108] <sup>T</sup>	$p_2^2=0,60$
$t=3$	$\xi_3^1=[84$	1	125	318	57	7	3	22	22	65	13	20	1	266	109] <sup>T</sup>	$p_3^1=0,20$
	$\xi_3^2=[47$	1	35	94	21	6	4	12	18	38	37	16	1	169	141] <sup>T</sup>	$p_3^2=0,20$
	$\xi_3^3=[51$	1	75	170	53	12	4	13	25	67	27	10	1	309	134] <sup>T</sup>	$p_3^3=0,60$
$t=4$	$\xi_4^1=[46$	1	92	555	35	4	6	20	40	149	16	11	1	445	534] <sup>T</sup>	$p_4^1=0,20$
	$\xi_4^2=[49$	1	123	181	36	8	1	19	24	119	34	26	1	879	114] <sup>T</sup>	$p_4^2=0,20$
	$\xi_4^3=[73$	1	102	382	61	11	4	20	29	56	28	17	1	176	126] <sup>T</sup>	$p_4^3=0,60$
Distância aninhada													$\mathbb{D}_2^{k=3} = 2.500,84$			

Tabela 5.29 – ARMP. Iteração  $k=4$ .

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)	Probabilidade (p.u)
$t=1$	$\xi_1^1=[84 \ 1 \ 87 \ 319 \ 73 \ 17 \ 7 \ 22 \ 45 \ 103 \ 22 \ 23 \ 1 \ 358 \ 270]^T$	$p'_{1^1}=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[61 \ 1 \ 57 \ 365 \ 70 \ 9 \ 5 \ 16 \ 41 \ 33 \ 21 \ 16 \ 1 \ 151 \ 138]^T$	$p'_{2^1}=0,40$
	$\xi_2^2=[65 \ 1 \ 74 \ 236 \ 46 \ 12 \ 4 \ 20 \ 28 \ 57 \ 26 \ 16 \ 1 \ 350 \ 108]^T$	$p'_{2^2}=0,60$
$t=3$	$\xi_3^1=[84 \ 1 \ 125 \ 318 \ 57 \ 7 \ 3 \ 22 \ 22 \ 65 \ 13 \ 20 \ 1 \ 266 \ 109]^T$	$p'_{3^1}=0,20$
	$\xi_3^2=[46 \ 1 \ 35 \ 94 \ 21 \ 6 \ 4 \ 11 \ 18 \ 38 \ 37 \ 16 \ 1 \ 169 \ 141]^T$	$p'_{3^2}=0,20$
	$\xi_3^3=[51 \ 1 \ 75 \ 170 \ 53 \ 12 \ 4 \ 13 \ 25 \ 67 \ 27 \ 10 \ 1 \ 309 \ 134]^T$	$p'_{3^3}=0,60$
$t=4$	$\xi_4^1=[46 \ 1 \ 92 \ 555 \ 35 \ 4 \ 6 \ 20 \ 40 \ 149 \ 16 \ 11 \ 1 \ 445 \ 534]^T$	$p'_{4^1}=0,20$
	$\xi_4^2=[49 \ 1 \ 123 \ 181 \ 36 \ 8 \ 1 \ 19 \ 24 \ 119 \ 34 \ 26 \ 1 \ 879 \ 114]^T$	$p'_{4^2}=0,20$
	$\xi_4^3=[73 \ 1 \ 102 \ 382 \ 61 \ 11 \ 4 \ 20 \ 29 \ 56 \ 28 \ 17 \ 1 \ 176 \ 126]^T$	$p'_{4^3}=0,60$
Distância aninhada		$\mathbb{D}_2^{k=3} = 2.500,84$

A ARMP é encontrada na iteração  $k=3$ , indicada na Tabela 5.28. O tempo computacional das iterações necessárias no processo de redução da árvore original é indicado na Tabela 5.30, o qual não apresenta diferenças significativas com respeito ao esforço computacional utilizado no caso da ARMI.

Tabela 5.30 – Tempo computacional utilizado para encontrar a ARMP.

Iteração	Tempo Computacional (s)
1	7,16
2	3,47
3	3,56
4	3,65
Total	17,84

### 5.3.2.3 Árvore reduzida multivariada – Matriz inversa das correlações (ARMC)

Neste caso é utilizada a matriz inversa das correlações no cálculo da norma euclidiana entre cenários dentro do problema da distância aninhada. Essa matriz é obtida a partir do histórico de vazões das usinas e varia para cada estágio de tempo. Assim, tem-se que:

$$d(\xi, \xi')^2 = (\xi_t - \xi'_t)^T \cdot Co_t^{-1} \cdot (\xi_t - \xi'_t),$$

A seguir são apresentadas as iterações para a obtenção da árvore reduzida utilizando a matriz da inversa das correlações nas tabelas 5.31 – 5.34.

**Tabela 5.31 – ARMC. Iteração  $k=1$ .**

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)													Probabilidade (p.u)
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1 358 270] <sup>T</sup>	$p_1^1=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[62$	1	71	223	42	11	4	18	28	63	24	17	1 350 111] <sup>T</sup>	$p_2^1=0,50$
	$\xi_2^2=[61$	1	57	365	70	9	5	16	41	33	21	16	1 151 138] <sup>T</sup>	$p_2^2=0,50$
$t=3$	$\xi_3^1=[51$	1	54	148	38	10	4	10	22	37	32	14	1 243 133] <sup>T</sup>	$p_3^1=0,33$
	$\xi_3^2=[84$	1	125	318	57	7	3	22	22	65	13	20	1 266 109] <sup>T</sup>	$p_3^2=0,33$
	$\xi_3^3=[45$	1	78	107	47	7	4	21	22	129	27	9	1 294 152] <sup>T</sup>	$p_3^3=0,33$
$t=4$	$\xi_4^1=[66$	1	104	419	54	11	5	22	26	50	27	17	1 194 116] <sup>T</sup>	$p_4^1=0,33$
	$\xi_4^2=[46$	1	92	555	35	4	6	20	40	149	16	11	1 445 534] <sup>T</sup>	$p_4^2=0,33$
	$\xi_4^3=[49$	1	123	181	36	8	1	19	24	119	34	26	1 879 114] <sup>T</sup>	$p_4^3=0,33$
Distância aninhada													$\mathbb{D}_2^{k=1} = 1.009.442,92$	

**Tabela 5.32 – ARMC. Iteração  $k=2$ .**

Estágio	Vazão afluyente incremental (m <sup>3</sup> /s)													Probabilidade (p.u)
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1 358 270] <sup>T</sup>	$p_1^1=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[66$	1	74	226	46	12	4	19	29	61	25	16	1 341 107] <sup>T</sup>	$p_2^1=0,60$
	$\xi_2^2=[61$	1	61	349	65	10	5	17	37	34	23	15	1 199 132] <sup>T</sup>	$p_2^2=0,40$
$t=3$	$\xi_3^1=[50$	1	65	128	42	9	4	15	23	93	31	12	1 271 145] <sup>T</sup>	$p_3^1=0,20$
	$\xi_3^2=[42$	1	68	143	45	9	4	13	19	35	26	11	1 265 130] <sup>T</sup>	$p_3^2=0,40$
	$\xi_3^3=[78$	1	97	281	54	11	3	15	27	54	22	17	1 282 116] <sup>T</sup>	$p_3^3=0,40$
$t=4$	$\xi_4^1=[61$	1	122	223	41	9	2	23	33	95	34	20	1 568 117] <sup>T</sup>	$p_4^1=0,20$
	$\xi_4^2=[62$	1	105	442	50	11	5	23	24	47	26	17	1 205 110] <sup>T</sup>	$p_4^2=0,60$
	$\xi_4^3=[65$	1	85	464	61	8	5	14	34	120	20	15	1 339 388] <sup>T</sup>	$p_4^3=0,20$
Distância aninhada													$\mathbb{D}_2^{k=2} = 500.602,56$	

Tabela 5.33 – ARMC. Iteração  $k=3$ .

Estágio	Vazão afluente incremental ( $m^3/s$ )													Probabilidade (p.u)		
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1	358	270] <sup>T</sup>	$p'_{1^1}=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[65$	1	74	236	46	12	5	20	28	57	26	16	1	350	108] <sup>T</sup>	$p'_{2^1}=0,60$
	$\xi_2^2=[61$	1	57	365	70	9	5	16	41	33	21	16	1	151	138] <sup>T</sup>	$p'_{2^2}=0,40$
$t=3$	$\xi_3^1=[77$	1	90	272	53	12	3	13	28	51	24	17	1	286	118] <sup>T</sup>	$p'_{3^1}=0,40$
	$\xi_3^2=[45$	1	78	107	47	7	4	21	22	129	27	9	1	294	152] <sup>T</sup>	$p'_{3^2}=0,20$
	$\xi_3^3=[43$	1	63	135	41	9	4	13	19	36	27	12	1	249	132] <sup>T</sup>	$p'_{3^3}=0,40$
$t=4$	$\xi_4^1=[46$	1	92	555	35	4	6	20	40	149	16	11	1	445	534] <sup>T</sup>	$p'_{4^1}=0,20$
	$\xi_4^2=[49$	1	123	181	36	8	1	19	24	119	34	26	1	879	114] <sup>T</sup>	$p'_{4^2}=0,20$
	$\xi_4^3=[73$	1	102	382	61	11	4	20	29	56	28	17	1	176	126] <sup>T</sup>	$p'_{4^3}=0,60$
Distância aninhada													$\mathbb{D}_2^{k=3} = 244.884,37$			

Tabela 5.34 – ARMC. Iteração  $k=4$ .

Estágio	Vazão afluente incremental ( $m^3/s$ )													Probabilidade (p.u)		
$t=1$	$\xi_1^1=[84$	1	87	319	73	17	7	22	45	103	22	23	1	358	270] <sup>T</sup>	$p'_{1^1}=1$
$t=2$	$\xi_2^1=[65$	1	74	236	46	12	4	20	28	57	26	16	1	350	108] <sup>T</sup>	$p'_{2^1}=0,60$
	$\xi_2^2=[61$	1	57	365	70	9	5	16	41	33	21	16	1	151	138] <sup>T</sup>	$p'_{2^2}=0,40$
$t=3$	$\xi_3^1=[43$	1	63	135	41	9	4	13	19	36	27	12	1	249	132] <sup>T</sup>	$p'_{3^1}=0,40$
	$\xi_3^2=[77$	1	90	272	53	12	3	13	28	51	24	17	1	286	118] <sup>T</sup>	$p'_{3^2}=0,40$
	$\xi_3^3=[45$	1	78	107	47	7	4	21	22	129	27	9	1	294	152] <sup>T</sup>	$p'_{3^3}=0,20$
$t=4$	$\xi_4^1=[73$	1	102	381	61	11	4	20	29	56	28	17	1	176	126] <sup>T</sup>	$p'_{4^1}=0,60$
	$\xi_4^2=[46$	1	92	555	35	4	6	20	40	149	16	11	1	445	534] <sup>T</sup>	$p'_{4^2}=0,20$
	$\xi_4^3=[49$	1	123	181	36	8	1	19	24	119	34	26	1	879	114] <sup>T</sup>	$p'_{4^3}=0,20$
Distância aninhada													$\mathbb{D}_2^{k=3} = 244.884,37$			

Observe que a ARMC apresentada na Tabela 5.33, tem uma distância aninhada ( $\mathbb{D}_2^3=244.884,37$ ) maior comparando com as árvores ARMI ( $\mathbb{D}_2^3=18.790,86$ ) e ARMP ( $\mathbb{D}_2^3=2.500,84$ ). Este fato não é conclusivo para determinar a qualidade das árvores reduzidas em avaliação, devido à diferença entre a ponderação da distância entre cenários no problema da distância aninhada. Assim, a qualidade das reduções somente é determinada ao longo deste capítulo com base na brecha de otimalidade e testes de K-S.

Finalmente, na Tabela 5.35 é apresentado o tempo computacional para a obtenção da ARMC, não se observa diferenças significativas com os casos anteriores.



**Tabela 5.35 – Tempo computacional utilizado para encontrar a ARMC.**

<b>Iteração</b>	<b>Tempo Computacional (s)</b>
1	7,27
2	3,19
3	3,22
4	3,22
Total	16,90

### 5.3.3 Solução da árvore reduzida

Os resultados encontrados das árvores multivariadas encontradas na seção anterior são indicados na Tabela 5.36.

**Tabela 5.36 – Resultados das árvores reduzidas caso multivariado.**

<b>Árvore</b>	<b><i>csup</i></b>	<b>Iterações</b>	<b>Políticas Operativas</b>	<b>Tempo Computacional (s)</b>		
				<b>Redução</b>	<b>DA</b>	<b>Total</b>
AO	80.154,49	31	POM1 POM2 POM3	-	564,0	564,0
ARMI	75.513,49	35	PRMI1 (Políticas operativas da ARMI para $t=1$ ) PRMI2 (Políticas operativas da ARMI para $t=2$ ) PRMI3 (Políticas operativas da ARMI para $t=3$ )	17,8	24,5	42,3
ARMP	75.777,49	19	PRMP1 (Políticas operativas da ARMP para $t=1$ ) PRMP2 (Políticas operativas da ARMP para $t=2$ ) PRMP3 (Políticas operativas da ARMP para $t=3$ )	17,8	10,2	28,0
ARMC	74.148,55	26	PRMIC1 (Políticas operativas da ARMC para $t=1$ ) PRMIC2 (Políticas operativas da ARMC para $t=2$ ) PRMIC3 (Políticas operativas da ARMC para $t=3$ )	16,9	15,6	32,5

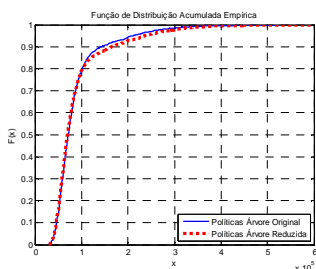
Percebe-se que o esforço computacional das árvores reduzidas representa, em geral, menos de 8% em todos os casos do tempo empregado na solução original. Por outro lado, com base nas políticas operativas e os *csup* indicados na Tabela 5.36 é realizada a avaliação da qualidade das árvores reduzidas na sequência.

### 5.3.4 Avaliação da qualidade das árvores reduzidas

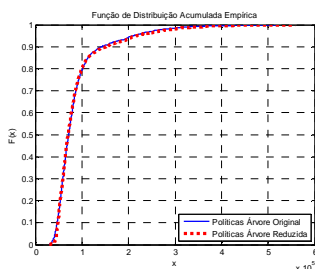
#### 5.3.4.1 Teste Kolmogorov-Smirnov

Na sequência são apresentados os resultados do teste K-S do custo total de operação para o caso multivariado. Assim, apresenta-se na Figura 5.20, Figura 5.21 e Figura 5.22 as distribuições do custo total obtidas das políticas da AO e da AR utilizando a matriz identidade, a matriz da ponderação das potências e a matriz da inversa das correlações, respectivamente.

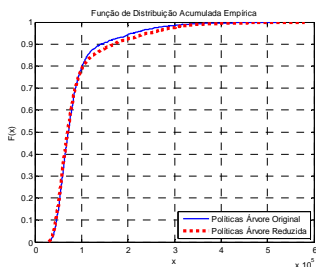
**Figura 5.20 – Teste Kolmogorov-Smirnov. ARMI.**



**Figura 5.21 – Teste Kolmogorov-Smirnov. ARMP.**



**Figura 5.22 – Teste Kolmogorov-Smirnov. ARMC.**



Percebe-se um desempenho similar entre as distribuições acumuladas da árvore original e árvore reduzida de cada caso de estudo. A distância  $D_{ns,ns}$  entre as distribuições acumuladas para cada um dos casos da redução da árvore multivariada é apresentada na Tabela 5.37.

**Tabela 5.37 – Valores  $D_{ns,ns}$  das distribuições acumuladas do caso multivariado.**

<b>Caso</b>	<b><math>D_{ns,ns}</math></b>
ARMI	0,0280
ARMP	0,0425
ARMC	0,0310

Note que todos os valores de  $D_{ns,ns}$ , indicados na Tabela 5.37, são menores que  $kstat=0,043$  (2000 amostras). Portanto, garante-se uma aderência estatística entre os valores de custo total obtidos da simulação operativa. Desta forma, afirma-se que as políticas obtidas das árvores reduzidas replicam em alta medida a tomada de decisões do uso da água obtidas da árvore original.

Para comprovar os resultados obtidos do teste KS, apresenta-se na continuação os valores médios simulados da potência hidrelétrica, potência termelétrica e déficit dos diferentes casos de estudo.

**Tabela 5.38 – Resultados médios da simulação operativa. Caso multivariado.**

Grandeza Média [MWmês]	Estágio	Resultados Simulação Operativa das Políticas Operativas						
		Árvore Original	ARMI	Erro ARMI (%)	ARMP	Erro ARMI (%)	ARMC	Erro ARMI (%)
Potência Hidrelétrica	t=1	6075	6075	0,00	6075	0,00	6075	0,00
	t=2	6077	6118	0,67	6057	0,33	6146	1,14
	t=3	6331	6327	0,06	6346	0,24	6316	0,24
	t=4	6216	6179	0,60	6212	0,06	6161	0,88
Potência Termelétrica	t=1	925	925	0,00	925	0,00	925	0,00
	t=2	923	882	4,44	943	2,17	854	7,48
	t=3	669	673	0,60	654	2,24	684	2,24
	t=4	759	788	3,82	760	0,13	803	5,80
Déficit Médio	t=1	0	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	t=2	0	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	t=3	0	0	0,00	0	0,00	0	0,00
	t=4	25	33	32,00	28	12,00	35	40,00

Na Tabela 5.38, percebe-se que os erros percentuais do despacho hidrotérmico médio de todas as políticas em avaliação das AR são, pelo menos para um estágio, maiores a 1%; este valor é o limiar considerado como aceitável. Além disso, note que os erros percentuais do déficit médio no último estágio apresentam valores superiores a 30%. Nesse sentido, existe uma alta probabilidade de que as políticas das árvores reduzidas não representem as políticas da árvore original. Para verificar esta hipótese são apresentados os testes K-S realizados para cada uma das políticas de operação em avaliação, como segue na Tabela 5.39.

**Tabela 5.39 –  $D_{ns,ns'}$  dos valores simulados da potência hidrelétrica e potência termelétrica. Caso multivariado.**

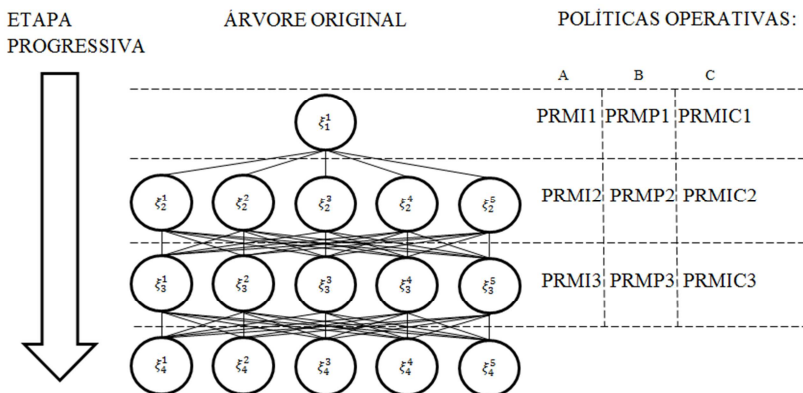
Estágio	$D_{ns,ns'}$					
	$kstat = 0,043$ (2000 amostras)					
	ARMI		ARMP		ARMC	
	Potência Hídrica	Potência Térmica	Potência Hídrica	Potência Térmica	Potência Hídrica	Potência Térmica
$t=1$	0	0	0	0	0	0
$t=2$	0,2910	0,2910	0,2250	0,2250	0,2805	0,2805
$t=3$	0,0635	0,0635	0,0565	0,0565	0,0565	0,0565
$t=4$	0,0420	0,0420	0,0130	0,0130	0,0550	0,0550

Note que na maioria dos casos acima  $D_{ns,ns'} > kstat$ , e, portanto, os testes K-S determinam que não existe uma aderência estatística entre os valores simulados do despacho hidrotérmico das políticas da AO e as ARs. Em razão da estrutura da árvore reduzida no caso multivariado não conseguir aproximar de forma satisfatória as políticas da AO. Nesse contexto, uma solução é diminuir o tamanho da redução, i.e., aumentar o número de cenários da AR para captar mais informação da AO.

Além disso, ressalta-se que apesar de que os testes do K-S do custo total são satisfatórios, as políticas de decisão entre a AO e as ARs são diferentes. Em outras palavras, a árvore reduzida se aproxima à solução da árvore original com decisões diferentes sobre o uso da água em cada estágio. No entanto, neste estudo, as políticas operativas obtidas da árvore reduzida são o principal critério de avaliação da qualidade da mesma.

#### 5.3.4.2 Brecha de otimalidade

O processo do cálculo do limite superior da brecha de otimalidade para o caso multivariado é ilustrado na Figura 5.23.

**Figura 5.23 – Processo de cálculo do limite superior. Caso multivariado.**

A brecha de otimalidade encontrada é indicada na Tabela 5.40.

**Tabela 5.40 – Brecha de otimalidade. Caso univariado.**

Política Operativa	<i>csup</i> (R\$)	Brecha de otimalidade (%)
AO	80.154,5	-
ARMI	84.701,3	5,7
ARMP	84.834,7	5,8
ARMC	83.583,8	4,3

Devido aos resultados da brecha de otimalidade serem valores superiores a 1%, valor crítico considerado, comprova-se que as árvores ARMI, ARMP e ARMC não representam à AO multivariada. Assim, conclui-se que é necessário aumentar o número de cenários da árvore reduzida para conseguir captar toda a informação da árvore original.

### 5.3.5 Resultados Adicionais

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos do processo de redução de diferentes árvores de cenários multivariadas. Neste trabalho, diferentes matrizes são utilizadas dentro do processo iterativo de redução, com o fim de incorporar informação do sistema elétrico dentro das realizações da árvore reduzida. Para cada estudo de caso é indicada a brecha de otimalidade e o teste de K-S do custo de operação

obtido da simulação operativa das políticas operativas da árvore original e reduzida. Além disso, é apresentada uma comparação do tempo computacional empregado na solução via DA da árvore original e do tempo de redução somado com o tempo de solução da árvore reduzida. Estes resultados são indicados a seguir na Tabela 5.41.

**Tabela 5.41 – Resultados redução de diferentes árvores de cenários multivariadas.**

Caso	Estrutura da Árvore / Número Cenários	Matriz Norma	$c_{sup}$ (R\$)	Brecha (%)	Simulação Operativa Custo Operativo (R\$)			Tempo (min)		
					K-S $kstat = 0,043$	$\mu$ (R\$)	Erro $\mu$ (%)	Redução	DA	Total
AOM1	1×5×5×5×5 : 625	-	382073	-	-	430248	-	-	99,9	99,9
		I	382145	0,02	0,0195	429611	0,15	0,015	13,08	13,10
ARM11	1×2×5×5×5 : 250	$PN$	382145	0,02	0,0195	429611	0,15	0,017	13,15	13,17
		$Co^{-1}$	382164	0,02	0,0190	429640	0,14	0,011	16,09	16,10
ARM12	1×2×2×2×2×2 : 40	I	385160	0,81	0,0385	432560	0,54	0,016	2,19	2,21
		$PN$	383259	0,31	0,0350	432518	0,53	0,017	2,16	2,18
ARM13	1×5×2×2×2 : 40	$Co^{-1}$	382695	0,16	0,0240	430813	0,13	0,024	2,16	2,18
		I	388144	1,59	0,0285	437282	1,63	0,017	2,33	2,35
ARM13	1×5×2×2×2 : 40	$PN$	388095	1,58	0,0290	436816	1,53	0,015	2,37	2,39
		$Co^{-1}$	386054	1,04	0,0195	434517	0,99	0,024	2,41	2,43
AOM2	1×10×10×10 : 1000	-	71029	-	-	81815	-	-	397,4	397,4
		I	71937	1,28	0,0385	82853	1,27	0,025	7,21	7,24
ARM21	1×3×5×8 : 120	$PN$	71737	1,00	0,0380	82551	0,90	0,025	7,37	7,40
		$Co^{-1}$	71533	0,71	0,0170	83140	1,62	0,017	7,32	7,34
ARM22	1×2×7×7 : 98	I	73384	3,31	0,0315	84488	3,27	0,016	6,12	6,14
		$PN$	76024	7,03	0,0380	82551	0,90	0,024	6,03	6,05
ARM23	1×8×5×3 : 120	$Co^{-1}$	72643	2,27	0,0275	83394	1,93	0,022	6,02	6,04
		I	78157	10,0	0,1005	95603	16,85	0,027	9,27	9,30
ARM23	1×8×5×3 : 120	$PN$	75300	6,01	0,0755	95603	16,85	0,027	9,40	9,43
		$Co^{-1}$	74249	4,53	0,0650	89592	9,50	0,021	9,33	9,35

Caso	Estrutura da Árvore / Número Cenários	Matriz Norma	csup (R\$)	Brecha (%)	Simulação Operativa Custo Operativo (R\$)			Tempo (min)		
					K-S <i>kstat</i> =0,043	$\mu$ (R\$)	Erro $\mu$ (%)	Redução	DA	Total
AOM3	1×20×20 : 400	-	0,023	-		0,024	-	-	90,5	90,5
		I	0,023	0,00	0,0055	0,024	0,00	0,018	7,02	7,04
ARM31	1×8×15 : 120	PN	0,023	0,00	0,0055	0,024	0,01	0,023	7,39	7,41
		Co <sup>-1</sup>	0,023	0,00	0,0065	0,024	0,01	0,034	7,39	7,42
		I	0,023	0,00	0,0055	0,024	0,02	0,016	18,55	18,57
ARM32	1×20×8 : 160	PN	0,023	0,00	0,0075	0,024	0,01	0,020	18,63	18,65
		Co <sup>-1</sup>	0,023	0,00	0,0130	0,024	0,10	0,023	18,49	18,51
		I	0,023	0,00	0,0060	0,024	0,01	0,018	3,51	3,53
ARM33	1×8×8 : 64	PN	0,023	0,00	0,0065	0,024	0,01	0,021	3,60	3,62
		Co <sup>-1</sup>	0,024	0,43	0,0150	0,024	0,22	0,032	3,55	3,58

De forma geral, observa-se nos resultados que a redução de árvores de cenários diminuem de forma considerável os tempos computacionais, em pelo menos 5 vezes. Da mesma forma que o caso univariado, percebe-se um melhor comportamento das árvores que mantém o maior número de realizações nos últimos cenários. Além disso, observa-se um melhor desempenho das árvores de cenários reduzidas que incluem informação do sistema elétrico. Este tipo de análise é realizado em detalhe para cada caso de estudo na continuação.

- AOM1:

Para este caso de estudo, nota-se que todas as árvores reduzidas propostas atendem o teste K-S do custo total de operação simulado para as políticas obtidas da AO e da AR. Por outro lado, a brecha de otimalidade é aceitável somente para as árvores reduzidas ARM11 e ARM12 (menor que 1%). Note que a árvore ARM13 tem o mesmo número de cenários que a árvore ARM12 e, apesar disso, não representa adequadamente a árvore original. Uma hipótese é que a informação dos cenários originais é conservada se o maior número de realizações é mantido nos últimos estágios da árvore reduzida. Estes resultados são corroborados com os valores médios do custo total de simulação, observa-se que os menores erros percentuais são obtidos para as árvores ARM11 e ARM12.



Ressalta-se o efeito das matrizes  $PN$  e  $Co^{-1}$ , com a implementação das mesmas se obtém uma diminuição da brecha de otimalidade, em razão de que as realizações da árvore reduzida contém informação suficiente do sistema elétrico. Por exemplo, para a árvore ARM12, a diminuição da brecha é de 60% e 80% para os casos da matriz  $PN$  e  $Co^{-1}$  respectivamente.

Com respeito aos tempos computacionais encontrados, para uma redução do tamanho da árvore original em 60% (250 cenários) o esforço computacional é pelo menos 6 vezes menor. No caso das árvores com 40 cenários, os tempos são reduzidos até em 40 vezes.

- AOM2:

Neste caso de estudo, as reduções com a estrutura das árvores ARM21 e ARM22 cumprem o critério do teste K-S para a distribuição empírica do custo de operação total obtido com as políticas operativas da árvore original e árvore reduzida. Por outro lado, a árvore ARM23 não atende o critério K-S e as brechas de otimalidade obtidas são superiores ao limiar de 1%; ou seja, a árvore ARM23 não consegue captar a informação da árvore original porque não conserva o número suficiente de realizações no último estágio, mesmo tendo o mesmo número de cenários da árvore ARM21. Com respeito à árvore ARM22, observa-se que as brechas de otimalidade obtidas são superiores ao 1%, indicando que o tamanho da árvore não é adequado para representar a árvore original.

Em relação à árvore ARM21, observa-se que os casos com menores valores da brecha de otimalidade são encontrados quando se utilizam as matrizes  $PN$  e  $Co^{-1}$ . Nesse sentido, destaca-se a importância de incluir no modelo de decisão do problema da distância aninhada a informação do sistema elétrico e, portanto, encontrar planos de transporte mais adequados para a atualização iterativa das realizações da árvore reduzida. Por último, evidencia-se uma redução do esforço computacional de, aproximadamente 40 vezes.

- AOM3:

O intuito deste caso de estudo é verificar o comportamento das árvores reduzidas obtidas a partir de uma árvore de cenários de vazões afluentes otimistas, isto é, períodos úmidos. Nesse sentido, os resultados esperados são que as políticas de operação determinem utilizar a maioria

dos recursos hídricos e, portanto, obter baixos custos operativos. As políticas das árvores reduzidas obtidas refletem este comportamento como é comprovado com os testes de K-S e da brecha de otimalidade. Ressalta-se que como a solução do problema é trivial, não são notórias as diferenças entre as estruturas de árvores reduzidas nem o efeito de utilizar a matriz  $PN$  ou a matriz  $Co^{-1}$ . Contudo, verifica-se que a presença de cenários de vazões afluentes favoráveis as árvores reduzidas representam adequadamente a árvore original. Novamente a vantagem computacional é notória, com uma redução de pelo menos 5 vezes nos tempos de solução.

- Árvore de 7 estágios:

Em seguida são apresentadas diferentes reduções de uma árvore multivariada de 7 estágios e 4 aberturas por estágio, isto é, um total de 4096 cenários. Os resultados do teste K-S a partir da simulação operativa de 10000 cenários, as brechas de otimalidade obtidas e os tempos computacionais são indicados a seguir na Tabela 5.42.

**Tabela 5.42 – Resultados redução de árvore de 4096 cenários.**

Caso	Estrutura da Árvore / Número Cenários	Matriz Norma	$csup$ (R\$)	Brecha (%)	Simulação Operativa			Tempo (min)		
					Custo Operativo (R\$)			Redução	DA	Total
					K-S $kstat = 0,019$	$\mu$ (R\$)	Erro $\mu$ (%)			
AOM4	1×4×4×4×4×4×4 : 4096	-	595083	-	-	572184	-	-	>10000	>10000
		I	595162	0,01	0,0031	572197	0,00	0,01	288,65	288,66
ARM41	1×2×2×4×4×4×4 : 1024	$PN$	595218	0,02	0,0027	572434	0,04	0,01	183,36	183,37
		$Co^{-1}$	595158	0,01	0,0027	572164	0,00	0,01	319,14	319,15
		I	595605	0,09	0,0381	572004	0,03	0,01	26,70	26,71
ARM42	1×2×2×2×4×4×4 : 512	$PN$	597055	0,33	0,0027	572164	0,00	0,01	11,92	11,93
		$Co^{-1}$	596701	0,27	0,0389	572661	0,08	0,01	26,82	26,83
ARM43	1×2×2×2×2×4×4 : 256	I	600905	0,98	0,0518	575500	0,58	0,02	15,00	15,02
		$PN$	601438	1,07	0,0515	575351	0,55	0,02	14,80	14,82
		$Co^{-1}$	601699	1,11	0,0520	574708	0,44	0,01	3,80	3,81

De acordo aos resultados apresentados na Tabela 5.42, as árvores reduzidas do caso ARM43, com o 6,25% do tamanho da árvore original,

não representam a árvore original, visto que, o teste K-S do custo total de operação não é satisfatório ( $D_{ns,ns'} > kstat$ ); portanto, conclui-se que o tamanho da árvore reduzida deve ser maior. Nesse sentido, observa-se que aumentando ao dobro o número de cenários mantidos da árvore reduzida, caso da árvore ARM42, obtém-se somente para o caso da matriz *PN* uma árvore que cumpre os requisitos do teste K-S e da brecha de otimalidade; assim, verifica-se novamente a vantagem de atualizar a árvore reduzida com informação física do problema. Com respeito à árvore reduzida ARM41, a qual possui o maior tamanho de redução (25% do tamanho da árvore original), apresenta uma alta aderência estatística entre o custo total simulado com as políticas da árvore original e reduzida, de acordo com os testes K-S e a brecha de otimalidade menor que 0,05% em todos os casos. Adicionalmente, o esforço computacional é reduzido em torno de 30 vezes.



## 6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Ao longo deste trabalho foi abordada uma metodologia para a redução de árvores de cenários multiestágio no contexto da representação das incertezas nas vazões afluentes do problema do planejamento da operação energética de sistemas hidrotérmicos. O objetivo geral consiste em fazer uso de uma nova métrica probabilística, conhecida como distância aninhada, para obter uma árvore de cenário de tamanho limitado, denominada árvore reduzida, a partir da redução de uma árvore original. Para este fim, foi utilizado o algoritmo proposto por Kovacevic e Pichler (2012) que atualiza iterativamente as realizações e probabilidades da árvore reduzida, baseado nos planos de transporte ótimo obtidos da solução do PL associado ao problema da distância aninhada. Em geral, o algoritmo de redução teve um desempenho satisfatório em termos de estabilidade e tempo de execução. Contudo, ressalta-se que o tempo de execução é muito sensível ao tipo de amostra da AO; assim, para árvores iniciais com amostra comum, os tempos resultantes são muito favoráveis (como os indicados no Capítulo 5), em contrapartida, para uma AO com amostra diferente, os tempos do Algoritmo 3-2 para árvores de grande porte poderiam ser inclusive maiores do que o tempo de solução da AO.

Quando a norma euclidiana é utilizada para calcular as distâncias entre cenários, Kovacevic e Pichler (2012) mostraram que o algoritmo de redução de cenários proposto por eles pode ser significativamente simplificado (resultando no Algoritmo 3-2 apresentado no Capítulo 3), melhorando de forma significativa a eficiência do algoritmo em termos de tempo computacional. Foi mostrado neste trabalho que a versão simplificada do algoritmo de Kovacevic e Pichler (2012) é também válida quando outras distâncias entre cenários são empregadas. Mais especificamente, foi mostrado na Seção 3.3 que a função distância definida por  $d(\xi, \xi') = (\xi_r - \xi'_r)^T \cdot M \cdot (\xi_r - \xi'_r)$  com  $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$  uma matriz quadrada definida positiva, pode ser empregada pelo Algoritmo 3-2 sem prejuízos teóricos. Esta singela contribuição teórica resulta em uma contribuição prática interessante para o problema de otimização estocástica abordado neste trabalho. Foram propostas diferentes matrizes  $M$  para a função que calcula a distância entre cenários da árvore original e reduzida. Diferentes matrizes  $M$  definem diferentes planos ótimos de transporte e, conseqüentemente, diferentes árvores reduzidas. Quando a matriz  $M$  agrega características peculiares do problema do POE (por

exemplo, as correlações entre hidrelétricas ou as potências máximas de cada usina) a árvore reduzida resulta de melhor qualidade.

A proposta realizada para determinar a qualidade das árvores de cenários é baseada em determinar se o valor ótimo e as políticas operativas obtidas da solução do modelo de otimização associado com a árvore original e reduzida são semelhantes. Para isto, foram realizadas simulações operativas com um conjunto maior de cenários incluídos na árvore original e, dessa maneira, foram obtidas distribuições indicativas das variáveis do PMO. Para determinar se a distribuição fornecida pelas políticas operativas da árvore original e reduzida são aderentes, foi aplicado o teste de Kolmogorov-Smirnov. Além disso, foi calculada a brecha de otimalidade para determinar a proximidade das decisões tomadas em cada estágio com as políticas da AR no problema original. Naturalmente, foi encontrado que quanto menor é a redução realizada (ou seja, AR maior), melhores são os índices de desempenho. No entanto, a estrutura da árvore reduzida também tem uma influência importante na qualidade da solução: foi encontrado para o caso das árvores de cenários de amostra comum que é conveniente conservar o maior número de nós (ou aberturas da árvore) nos últimos estágios e reduzir o número de nós nos estágios iniciais. Em outras palavras, a árvore reduzida de amostra comum consegue captar a informação da árvore original se é mantido o maior número de realizações nos estágios próximos ao último estágio. Nesse contexto, árvores com tamanho menor, porém com uma melhor distribuição dos cenários conservados nos estágios finais, apresentam uma aderência estatística e índices de desempenho mais satisfatórios.

A metodologia de redução de cenários foi aplicada a diversas árvores de grande porte e, em geral, reduções com pelo menos um 20% do tamanho da árvore original apresentam índices de desempenho adequados. Quando a redução de cenários é mais conservadora nos estágios finais, as árvores reduzidas não somente apresentam índices estatísticos de boa qualidade, mas também apresentam brechas de otimalidade bastante pequenas, em torno de 1%. Como foi apresentado no Capítulo 5, as decisões fornecidas a partir das políticas da árvore reduzida diferem em média de 1% com respeito àquelas da árvore original. Além disso, o esforço computacional para resolver o POE foi reduzido significativamente em todos os casos de estudo apresentados. Normalmente, a redução do tempo computacional foi superior a 20 vezes (incluindo o tempo de redução de cenários e o tempo de resolução do POE definido a partir da árvore reduzida). No contexto do problema de otimização da operação energética, pode-se concluir que a metodologia de redução de cenários em árvores multiestágios utilizando

a distância aninhada se apresenta como uma ferramenta matemática de grande importância para auxiliar um planejamento energético confiável (em termos de representação das incertezas) e menos esforço computacional.

Para trabalhos futuros propõe-se o estudo de novas matrizes que incluam outras informações relevantes do sistema dentro do processo de redução, por exemplo, uma matriz diagonal com a produtividade acumulada de cada usina. Assim, as usinas que se encontrem no começo da cadeia da bacia hidrográfica seriam ponderadas com um grau de importância superior. Por sua vez, é importante explorar para árvores com amostras diferentes se as árvores reduzidas têm melhores índices de desempenho quando a redução de cenários é mais conservadora nos estágios finais. Além disso, para este tipo de árvores é necessário determinar a eficiência computacional do algoritmo de redução de cenários, pois devido a que as realizações são diferentes em cada abertura da árvore é necessário fazer o cálculo combinatório da distância aninhada entre todos os nós da árvore original e reduzida. Em consequência, para alguns casos de árvores de grande porte pode ocorrer que o tempo de redução seja maior do que o tempo de solução da árvore original, sendo este caso contraproducente. Por outro lado, no Algoritmo 3-1, novas heurísticas devem ser desenvolvidas para encontrar a ARI no caso em que a AO tenha diferente número de abertura no mesmo estágio. Por último, recomenda-se comparar estes resultados com outras metodologias de redução de árvores multiestágio, por exemplo a metodologia proposta por Heitsch e Romish (2009), e deste modo encontrar as semelhanças entre as diferentes métricas propostas.





## 7. APÊNDICE: DECOMPOSIÇÃO ANINHADA

A decomposição aninhada é uma estratégia de solução que trata o problema de planejamento energético de forma decomposta. Deste modo, precisa acoplar a solução individual de cada nó com a solução dos nós subsequentes de estágios futuros. Portanto, torna-se necessário adicionar informações ao problema do estágio atual sobre como os estágios futuros são afetados pelas decisões feitas no presente. Nessa direção, a DA adiciona ao estágio atual uma aproximação linear por partes que estima o custo esperado dos próximos estágios através de uma variável denominada custo futuro  $\alpha$ . Para uma abordagem teórica da DA, recomenda-se (BIRGE; LOUVEAUX, 2011) (DE MATOS, 2012).

De forma geral, o problema original é decomposto em uma série de subproblemas de menor tamanho. Assim, cada subproblema refere-se a um nó específico da árvore de cenários. Inicialmente, a DA realiza uma etapa denominada Progressiva, na qual se resolve sequencialmente os subproblemas de cada estágio, começando com o subproblema do primeiro estágio até os problemas relacionados com os nós do último estágio. Quando é finalizada uma etapa Progressiva, verifica-se o critério de parada da DA. Esta verificação consiste em comparar dois limites do valor ótimo, os quais são calculados em cada iteração, denominados como:

- Limite inferior (*cinf*): custo ótimo associado ao nó do primeiro estágio. Este custo durante as iterações é sempre mais otimista (menor ou igual) que o custo ótimo do problema.
- Limite superior (*csup*): custo esperado de todos os nós da árvore de cenários. Este valor sempre é maior ou igual ao custo ótimo do problema.

Logo, se a tolerância *tol* encontrada for menor ou igual a um valor definido  $tol_{max}$ , o processo da DA é finalizado. Com isto, garante-se uma diferença desprezível entre o *csup* e *cinf*. Se o critério de parada não é atendido, o próximo passo da DA consiste em realizar um processo denominado etapa Regressiva. De forma sucinta, a etapa Regressiva consiste em utilizar a informação obtida na etapa Progressiva para construir de forma iterativa as funções de custo futuro  $\alpha_t$ , sendo  $t=1,2,\dots,T-1$ . Para este fim, precisa-se do volume final e dos multiplicadores de Lagrange que representam a variação do custo total com respeito ao volume armazenado. Ao finalizar a etapa Regressiva é

começada uma etapa Progressiva até que a  $tol$  seja o suficientemente pequena ( $tol < tol_{max}$ ). De forma conceitual, apresenta-se um resumo do passo a passo realizado na metodologia de DA:

Algoritmo 7-1: Algoritmo da DA. Fonte: Finardi, Decker e Matos (2013).

1. Inicializar o número de iterações  $it=0$ . Assume-se que  $\alpha_t = 0 \quad \forall t$ , dado que, na primeira iteração todas as FCFs que representam custos de operação são relaxados;
2. Resolver o subproblema do primeiro estágio. O valor ótimo da função objetivo é igual ao limite inferior  $cinf$  da DA;
3. Para  $t=2$  até  $T$ . Cada nó do estágio  $t$  é caracterizado por ter um valor de vazão afluyente sorteada na árvore de cenários e um volume inicial obtido da solução do subproblema associado com seu respectivo nó predecessor. Assim, resolve-se o problema em cada nó do estágio  $t$ ;
4. O custo de operação esperado de todos os cenários sorteados na árvore de cenários, é igual ao limite superior do algoritmo da DA., denominado  $csup$ ;
5. Se  $tol = csup - cinf \leq tol_{max}$ , pare; caso contrário, passar ao Passo 6;
6. Para  $t=2$  até  $T$ . Obter o custo de operação e os multiplicadores de Lagrange associados com a restrição do balanço hídrico para cada nó associado ao estágio  $t$ . Utilize estes valores para calcular as restrições que aproximam a FCF do nó predecessor.
7. Fazer  $it = it+1$  e voltar ao Passo 2.

Ressalta-se que as FCFs determinam as decisões do uso da água em cada estágio. Na prática, estas funções representam a política de operação ótima, isto é, as restrições que determinam as decisões para obter o menor custo de operação. Adicionalmente, com estas funções é possível obter uma solução viável para qualquer número de cenários (independente daqueles em que as FCFs foram construídas), com base em uma única etapa Progressiva (FINARDI; DECKER; MATOS, 2013)

## REFERÊNCIAS

ANEEL, Agência Nacional de Energia Elétrica. **Banco de Informação de Geração**. Disponível em [www.aneel.gov.br](http://www.aneel.gov.br). Acessado em 2015.

BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. **Numerische Mathematik**, v. 4, n. 1, p. 238–252, 1962.

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to Stochastic Programming**. Springer, 2011.

CHARBENEAU, R. J. Comparison of the two- and three-parameter log normal distributions used in streamflow synthesis. **Water Resources Research**, v. 14, n. 1, p. 149–150, 1 fev. 1978.

CHIRALAKSANAKUL, A. **Monte Carlo Methods for Multistage Stochastic Programs**. Dissertation of Philosophy Doctor. The University of Texas at Austin, 2003.

DE MATOS, V. L. **Um modelo para o planejamento anual da operação energética considerando técnicas avançadas de otimização estocástica**. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2012.

DE OLIVEIRA, W. L. **Redução Ótima de Cenários em Programação Estocástica. Aplicação às Vazões Afluentes aos Aproveitamentos Hidroelétricos**. Dissertação de Mestrado em Matemática. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2007.

\_\_\_\_\_. **Métodos de feixes inexatos aplicados à programação estocástica**. Tese de Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação. UFRJ, 2011.

DE OLIVEIRA, W. L.; SAGASTIZÁVAL, C.; PENNA, D.D.J.; MACEIRA, M.E.P.; DAMÁZIO, J.M. Optimal scenario tree reduction for stochastic streamflows in power generation planning problems. **Optimization Methods and Software**, v. 25, n. 6, p. 917–936, 1 dez. 2010.

DE SOUZA, E. A. **O problema de Monge-Kantorovich para duas medidas de probabilidade sobre um conjunto finito**. Dissertação de Mestrado em Ciências. Universidade de São Paulo, 2009.

DIAS, D. **Definição da Árvore de Cenários de Afluências para o Planejamento da Operação Energética de Médio Prazo**. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica. PUC, 2009.

DOBRUSHIN, R. Prescribing a System of Random Variables by Conditional Distributions. **Theory of Probability & Its Applications**, v. 15, n. 3, p. 458–486, 1 jan. 1970.

DUDLEY, R. M. **Real Analysis and Probability**. Cambridge University Press, 2002.

DUPAČOVÁ, J.; GRÖWE-KUSKA, N.; RÖMISCH, W. **Scenario Reduction in Stochastic Programming: An Approach Using Probability Metrics**. Springer-Verlag, 2003.

EDWARDS, D. A. On the Kantorovich–Rubinstein theorem. **Expositiones Mathematicae**, v. 29, n. 4, p. 387–398, 2011.

FINARDI, E. C.; DECKER, B. U.; MATOS, V. L. DE. An Introductory Tutorial on Stochastic Programming Using a Long-term Hydrothermal Scheduling Problem. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 24, n. 3, p. 361–376, 24 abr. 2013.

GIBBS, A. L.; SU, F. E. On Choosing and Bounding Probability Metrics. **International Statistical Review**, v. 70, n. 3, p. 419–435, 1 dez. 2002.

GLASSEY, C. R. Nested Decomposition and Multi-Stage Linear Programs. **Management Science**, v. 20, n. 3, p. 282–292, 1 nov. 1973.

GROWE-KUSKA, N.; HEITSCH, H.; ROMISCH, W. **Scenario reduction and scenario tree construction for power management problems**. In: POWER TECH CONFERENCE PROCEEDINGS, 2003 IEEE BOLOGNA. jun. 2003.

HEITSCH, H.; ROMISCH, W. **Generation of multivariate scenario trees to model stochasticity in power management.** In: POWER TECH, 2005 IEEE RUSSIA. jun. 2005.

\_\_\_\_\_. Scenario Tree Modeling for Multistage Stochastic Programs. **Mathematical Programming**, v. 118, n. 2, p. 371–406, jan. 2009.

HIPPEL, K. W.; MCLEOD, A. I. **Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems.** Elsevier, 1994.

HOMEM-DE-MELLO, T. A Study of Scenario Generation for a Multi-Stage Stochastic Programming Model for Energy Planning in Brazil. **Universidad Adolfo Ibañez**, p. 1–23, 2012.

KANTOROVICH, L. V. On the translocation of masses. **Doklady Akademii Nauk**, p. 227–229, 1942.

\_\_\_\_\_. On a Problem of Monge. **Journal of Mathematical Sciences**, v. 133, n. 4, p. 1383–1383, 1948.

KOVACEVIC, R. M.; PICHLER, A. Scenario Trees - A Process Distance Approach. **Eprints for the Optimization Community**, 2012.

LARROYD, P. V. **Comparação de Políticas com Aversão a Risco para o Planejamento da Operação Hidrotérmica de Médio Prazo.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica., 2012.

MASSEY, F. J. The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit. **Journal of the American Statistical Association**, v. 46, n. 253, p. 68–78, 1 mar. 1951.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. **Technometrics**, v. 21, n. 2, p. 239–245, 1 maio 1979.

MIRKOV, R.; PFLUG, G. C. Tree Approximations of Dynamic Stochastic Programs. **SIAM Journal on Optimization**, v. 18, n. 3, p. 1082–1105, 2007.

MONGE, G. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. In: **The Collected Mathematical Papers**. Cambridge University Press, 1781.

NIEDERREITER, H. **Random Number Generation and quasi-Monte Carlo Methods**. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

PENNA, D. D. J.; MACEIRA, M. E. P.; DAMÁZIO, J. M. **Selective Sampling Applied to Long Term Hydrothermal Generation Planning**. In: 17TH POWER SYSTEMS COMPUTATION CONFERENCE. Sweden: 2011.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. A Decomposition Approach to the Economic Dispatch of Hydrothermal Systems. **IEEE Power Engineering Review**, v. PER-2, n. 10, p. 41–42, out. 1982.

PFLUG, G. C. Version-independence and nested distribution in multistage stochastic optimization. **SIAM Journal on Optimization**, v. 20, p. 1406–1420, 2009.

\_\_\_\_\_. **The generation of scenario trees for multistage stochastic optimization**. In: XIII INTERNATIONAL CONFERENCE ON STOCHASTIC PROGRAMMING. Italy: 2013.

PFLUG, G. C.; PICHLER, A. Approximations for Probability Distributions and Stochastic Optimization Problems. In: **Stochastic Optimization Methods in Finance and Energy**. Springer, 2011. p. 343–387.

\_\_\_\_\_. A Distance For Multistage Stochastic Optimization Models. **SIAM Journal on Optimization**, v. 22, p. 1–23, 2012.

QUINTERO, R. D. **Análise comparativa de diferentes simplificações para a função de produção hidrelétrica no contexto do planejamento da operação energética de curto prazo**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2013.

RACHEV, S. T.; RÜSCHENDORF, L. **Mass Transportation Problems**. New York: Springer-Verlag, 1998.

ROSEN, K. H. **Discrete Mathematics and its Applications**. MacGraw-Hill International, 1999.

RUSZCZYŃSKI, A.; SHAPIRO, A. Stochastic Programming Models. In: A. RUSZCZYŃSKI, AND A. S. (Ed.). . **Handbooks in Operations Research and Management Science**. Stochastic Programming. [s.l.] Elsevier, 2003. v. 10p. 1–64.

SZULGA, A. On minimal metrics in the space of random variables. **Theory Probab**, v. 27, n. 2, p. 401–405, 1982.

VASERSTEIN, L. N. Markovian processes on countable space product describing large systems of automata. **Problemy Peredachi Informatsii**, v. 5, n. 3, p. 64–72, 1969.

VILLANI, C. **Optimal Transport**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009.