Francisco E. de Aquino Leite
CATHEDRATICO DE INGLEZ DO GYMNASIO DE RIBEIRÃO PRETO

ARITHMETICA PREPARATORIA

METHODO BRASILEIRO

1927
EDITORES: IRMÃOS FERRAZ
RUA BRIGADEIRO TOBIAS, 28 — SÃO PAULO

ARITHMETICA PREPARATORIA

QUATRO OPERAÇÕES FUNDAMENTAES DE INTEIROS, FRACÇÕES ORDINARIAS E DECIMAES,

INCLUINDO : - **NUMERAÇÃO** E **"TABOADAS BRASILEIRAS"** PELO "METHODO DOS COMPLEMENTOS", "CALCULO SUCCESSIVO", "METHODO DE PAUSAS" E CALCULO MENTAL.

30,0-

METHODO BRASILEIRO

REMODELAÇÃO DO CURSO ELEMENTAR DE ARITHMETICA E GUIA DO PROFESSOR

POR

Francisco E. de Aquino Leite

CATHEDRATICO DE INGLEZ DO GYMNASIO DE RIBEIRÃO PRETO

1927

EDITORES: IRMÃOS FERRAZ

RUA VERGUEIRO, 48-A — SÃO PAULO

A' MEMORIA

DE

MEUS PAES

A' MEMORIA

DE

MINHA FILHA QUERIDA,

A U R E A

A'

JUVENTUDE BRASILEIRA

DEDICA ESTE LIVRO,

O AUTOR.

INTRODUCÇÃO

Bem a contra gosto nosso, vem o presente trabalho á luz da publicidade bastante tardiamente, varios motivos tendo para isso concorrido, entre os quaes o de, em regra, poucos instantes de lazer sobrarem ao professor, para divulgar, como deve, por meio do livro, os melhores ensinamentos colhidos na ardua, e ao mesmo tempo difficil, pratica do magisterio.

Representa elle o resultado de observação acurada, e de não pequeno esforço despendido para bem ensinar arithmetica nas classes que durante longos annos regemos no Collegio Methodista local, e em nossas aulas particulares.

A muitos se afigurará grande ousadia tentar alguem modificar os processos seculares seguidos até o presente no ensino dessa materia: mais ainda no ensino de suas "primeiras letras", que são os algarismos chamados arabicos, ou numeros simples, usados nessa tão util quão singela e engenhosa "linguagem dos numeros", que é a — "numeração decimal".

Entretanto, guiado pela observação e auxiliado pelo esforço proprio de bem fazer e de beneficiar a infancia, alliviando-a do trabalho por demais arido e penoso de sobrecarregar a memoria, atrophiando-a, atacámos o problema, resolvendo-o conforme vae exposto na presente obra, justificado o nosso proceder com a apresentação e historico dos motivos que nos levaram a esse arriscado tentame, nas linhas abaixo.

Além de outras materias, ensinavamos arithmetica no collegio supra mencionado, cabendo-nos a regencia das duas classes mais adiantadas.

Como tivessemos occasião de observar que alumnos que estavam resolvendo problemas de fracções vacillavam *nas operações de inteiros, commettendo mesmo erros em* pequenas e simples contas de "sommar"; *perplexo diante de tal* "anomalia" *levamo-la ao conhecimento da directora, que se promptificou a tomar as providencias necessarias.*

Sujeitas as classes ao exame de "taboadas", verificou-se que a deficiencia era real, em todas ellas, a ponto de alumnas que já estavam fazendo contas de divisão, vacillarem na somma de "3 em 3", partindo de 1, 2, ou 3.

*Aproveitamos a opportunidade para relatar facto identico observado pelo Dr. Mario de Assis Moura, nosso illustrado companheiro de trabalho no Gymnasio, a quem somos grato pela esclarecida "apre*ciação" *com que honrou o nosso modesto trabalho.*

Nas suas "Instrucções sobre o Ensino Primario", publicadas para uso das escolas municipaes desta cidade, das quaes era zeloso e perspicaz "inspector", *criticando a inconsequencia de alguns professores, entre outras muito justas observações, cita o seguinte facto, que põe ao vivo a falha, que é geral, sinão mundial, existente no ensino das quatro operações elementares de arithmetica:*

"Vi uma menina que fazia admiravelmente a divisão, só titubeando nos restos, *e sahindo ás vezes com um extranhissimo erro no tirar* 4 *de* 7 *ou* 2 *de* 8.

Submetti essa alumna a um apertado exame das taboas de multiplicar e de dividir: nem um erro ao menos. Mas, nas taboas de sommar e de subtrahir, só de maravilha acertava, terminando por confessar, enrubescida, que só sabia fazer a conta pelos dedos.

Ora, está claro que, como não é facil multiplicar ou dividir com o auxilio dos dedos, a menina ficou firmissima, por decoração, nas taboas respectivas; entretanto, como o esforço de estudo não era tão indispensavel nas operações de sommar e subtrahir, ella abdicou delle para descançar no primitivo contador *com que Deus nos dotou".*

Fomos, então, incumbido tambem da regencia das classes mais atrazadas do collegio, ficando ao nosso encargo classes de arithmetica.

Concluimos, para logo, que a falha existente na pratica do calculo de "taboadas", isto é, de "numeros simples", provinha do defeito do methodo americano, em que a preoccupação de de desenvolver o "raciocinio" por meio dos problemas, *relega para segundo plano, esquecendo-a mesmo, a "mechanica dos numeros" que é a* base *para a resolução de qualquer problema, que ficará sem "solução correcta", falhando aquella pratica* inseparavel auxiliar indispensavel, *sob pena de embaraçar o seu progresso: o mesmo no que diz respeito ao ensino das "quatro operações", o qual deve ser precedido de uma* boa pratica *do "calculo de numeros simples", que é igualmente a* base *ou fundamento dessas operações.*

A correcção a fazer devia ser operada com rapidez, para não prejudicar as classes, e as taboadas usuaes, por deficientes, não satisfaziam, pelo que resolvemos então supprir essa deficiencia com trabalho proprio.

E' facto commum o espirito apprender uma combinação, falhando na sua inversá *equivalente, por ser, como na* addição, mais facil, *a summa* do maior com o menor, *do que o* inverso, *dando-se facto semelhante nas outras operações.*

Convencido da vantagem de aproveitar as "inversões", baseadas nas "propriedades" das operações, organizámos duas "taboas" ou "quadros" para a addição *e* multiplicação, *partindo das* sommas de parcellas iguaes, *que desde logo illustravam a* multiplicação por 2, *e* dos productos iguaes, *que davam os* quadrados *dos* numeros simples, *completando a taboada de* 1, *no primeiro quadro, reduzida a de* 9 *a uma unica combinação, de* 9+9, *e* 9×9; *ou, no segundo, que preferimos, por melhor se prestar á applicação do "methodo dos complementos", a de* 9 *completa, e a de* 1 *sómente com* 1+1 *e* 1×1, invertendo as parcellas *e os* factores differentes *nas outras* sommas *e* productos: *semelhantemente, organizámos as taboas de* subtracção e divisão, alternando restos com diminuidores, *e* divisores com quocientes.

Reflectindo sobre o facto de que as "sommas usuaes", parciaes, *compõem-se de* mais de duas parcellas, *portanto, que essa operação é feita por "addição successiva"* de numeros simples, *entre si, e sommados com numeros* compostos de dezenas *e de numeros* entre dezenas, *resolvemos organizar o "quadro de sommas successivas", partindo das "repetições" do* algarismo das unidades *de* numeros simples *das sommas de numeros* impares e pares, *isto é, das sommas successivas de "2 em 2", a partir de* 1 *e de* 2.

Experimentando e observando, descobrimos por nós mesmo, as leis geraes, aliás já conhecidas, porém esquecidas e não aproveitadas, as quaes regem a "repetição do algarismo das unidades" das sommas *ou* subtracções, multiplicações *ou* divisões *de* "numeros simples", *feitas* successivamente.

Conseguimos então organizar o "quadro geral" das sommas successivas, *explicado no texto, limitando-o primeiro, e granduando-o no limite dos primeiros* numeros simples, *e no limite de cada uma das* dezenas, *successivamente, isto é, até* 10, *até* 20, *e até a primeira* centena; *e assim por diante.*

Com essa pratica da "somma successiva", como póde ser verificado por qualquer professor, vimos logo que tinhamos conseguido acabar de vez, *com uso do* "primitivo contador *com que Deus nos dotou", no dizer pittoresco e expressivo do Dr. Mario Moura.*

E' que, feita a pratica conforme indicamos nos quadros graduados de sommas e subtracções successivas, *não só o alumno* não tem tempo *para essa pratica perniciosa, como tambem* dispensa esse recurso extremo, *visto ter que operar* progressivamente, *partindo das combinações dos* primeiros numeros simples, *para a de* numeros compostos com numeros simples, *isto é,* do mais facil para o mais difficil, *ou,* do simples para o complexo, *praticando* todas as inversões sem sentir,—*natural, espontaneamente.*

Mesmo assim, caso haja algum alumno recalcitrante, basta ao professor appellar para o infallivel "Kamerade!"

Praticando, "á risca", o "calculo successivo" como indicamos sómente com essa pratica o alumno poderá tornar-se um "bom calculista", obtendo esse resultado suavemente *sem a* monotonia *e* aridez *dos processos até hoje usados, e, melhor ainda, sem os defeitos e entraves do calcular defeituoso, taes como* o repizar de palavras dispensaveis, *que só servem de "atravancar"* o caminho ao pensamento, retardando-o.

Apresentam essas "taboadas" dupla vantagem:—a de servirem para o calculo de todas as *operações de* "composição" *e* "decomposição", *e a vantagem inestimavel de se basearem na "serie natural dos numeros inteiros", estando a sua feitura e comprehensão* ao alcance de qualquer criança *que,* por si só, *podé* escreve-las *e dellas se utilizar.*

De longa data notaramos a identidade do algarismo das unidades dos quadrados dos numeros simples, "dois a dois", os de 1 *e* 9, 2 *e* 8, 3 *e* 7, 4 *e* 6, *destacando-se o de* 5, *escripto com* 2 *e* 5, *isto é,* 25.

Esforçando-nos por simplificar os calculos de "numeros simples", e reflectindo sobre essa identidade, da qual pareceu-nos que podiamos tirar proveito, vimos que esses numeros eram respectivamente complementos um do outro, os de cada par.

Isso levou-nos a estudar a "*terminação*" *dos outros productos, conseguindo destacar duas* "*leis*" *ou* "*propriedades geraes*" *que regem a terminação dos* "*productos de numeros simples*", *uma das quaes, por ser mais simples e pratica, aproveitámos para* descobrir *o* algarismo das unidades *de um* producto maior *de* dois numeros simples, *por meio do* producto menor *dos seus respectivos* complementos.

Conseguindo fazer a demonstracção dessas "*propriedades*", *descobrimos ao mesmo tempo o processo para achar tambem* algarismo das dezenas do producto maior, *completando-o assim, o que nos pareceu de real vantagem, e nos levou a organizar o quadro para obter os* productos maiores *aos quaes demos, por isso, o nome de —* "*derivados*", *por meio dos* productos menores *dos seus complementos, ou —* "primitivos".

Descoberta a relação existente entre o producto de dois numeros simples, e o dos seus complementos respectivos, *podendo por meio do* producto menor, de dois numeros simples, *formar com extrema simplicidade e facilidade* o producto maior, dos seus complementos, *estavamos com o espirito preparado para resolver e remover as difficuldades da* somma *e da* subtracção.

Conseguimos assim transformar a somma *de* numeros simples maiores, *isto é, daquelles cuja somma é* maior que 10, *mais difficil, em uma* subtracção de numeros simples, no liimte de 10, *mais facil.*

Melhor ainda, conseguimos transformar a subtracção de numeros simples, subtrahidos de numeros compostos, desde 10 até 18, inclusive, em uma simples somma, no limite de 10, *sobretudo com vantagem extraordinaria no caso de ser o* algarismo do diminuendo menor que o do diminuidor.

Animado com esses resultados esboçámos as nossas "*taboadas*", *faltando-nos apenas resolver o problema referente á divisão. Logo depois deixavamos de ensinar arithmetica no* "*Collegio Methodista*", *acreditando que as falhas que apontámos foram corrigidas.*

Em o numero de Março de 1912 *da* "*Revista do Ensino*", *publicámos um artigo em que expuzemos e demonstrámos as duas* "*propriedades*" *referentes* á multiplicação; *nesse artigo promettiamos terminar o trabalho esboçado annos antes, paralysado por circumstancias diversas, que não cabe aqui mencionar.*

*Ha pouco mais de um anno, retomámos o trabalho havia tanto tempo interrompido, e conseguimos, com intima satisfação, descobrir o processo para determinar o algarismo do quo*ciente *da* divisão *de um numero* qualquer *de* dois algarismos *por um* numero simples (*taboada*), *e, consequentemente, os* algarismos do quociente da divisão de um numero composto qualquer *por um* numero simples ou composto.

Dizemos, com intima satisfacção, *porque estamos convencido do não pequeno beneficio que vamos prestar, não só ás crianças, como aos proprios adultos, alliviando a todos do penoso, já agora inutil trabalho de fatigar a memoria para descobrir o algarismo do quociente, o que será feito de ora em diante por meio de duas* insignificantes subtracções, no limite de 10.

Cremos não errar dizendo que transformámos a divisão *em a* mais facil das quatro operações, relativamente, de a mais difficil que era dantes, *verdadeiro* "*espantalho*" *da criançada*: *o mesmo no que diz respeito á* subtracção, *tornada* mais facil que a somma.

E' de notar-se que, com o ser a arithmetica a sciencia do numero, e, portanto, da ordem *e* do methodo, *devendo o ensino da parte pratica de tão util disciplina, obedecer á* progressão numerica natural, *em todas as suas partes, tenha sido até aqui transmittido mais ou menos illogica e desorientadamente.*

Tal facto é reconhecido em livros de publicação recentissima, pelos seus autores, os quaes reincidem, aliás, nos mesmos erros seculares, taes como a da organização inutil de exercicios numericos em livro, a esmo, sem obedecer ás leis uteis e curiosas que regem as combinações dos numeros simples, base dos calculos posteriores dos numeros compostos.

Por isso, baseámos o nosso modesto trabalho nessas leis, taes como as da applicação dos complementos de numeros simples, *as quaes descobrimos por nós mesmo, ás* "*quatro operações*" *dos numeros do systema decimal, como ficou explicado acima.*

E' excusado dizer que em tudo fizemos trabalho proprio, fundado na experiencia e acurada observação das combinações e factos numericos.

Applicadas essas "leis" *ou* "propriedades" *dos numeros, vê-se que* — (*a*) *para* sommar *e* (*b*) *para* subtrahir *numeros simples, basta* decorar até o limite de 10; (*c*) *para* multiplicar, *basta* decorar até o limite de 25, *que é o maior dos* "*productos primitivos*"; (*d*) *para* dividir, *basta igualmente* decorar até este ultimo limite: *as combinações acima dos limites mencionados são obtidas das* combinações inferiores, mais simples,—dirivando-as *destas ultimas, isto é,*—

(*a*)—*As sommas de numeros simples, entre si,* acima de 10, *e de* numeros compostos com numeros simples, *baseiam-se nas* subtracções mais simples, *no limite de* 10, *e vice-versa;*—

(*b*)—*As subtracções de* numeros simples, de numeros compostos, *baseiam-se nas* sommas mais simples, *no limite de* 10, *o que é de real vantagem.*

(*c*)—*Na multiplicação, os* productos acima de 25 *são obtidos* —(1) por comparação *com os dos seus correspondentes menores,* productos dos complementos dos seus factores, *os quaes dão o* algarismo das unidades:—(2) *por meio de* uma subtracção simples,—no limite de 10, *para se achar o* algarismo das dezenas, *e*—(3) *com a* somma de uma dezena *quando ha uma no producto menor, ou de duas no unico producto* 5×6=30, *derivado de* 5×4=20.

(*d*)—*Na divisão, os quocientes das divisões com* dividendos acima de 25, *são obtidos por meio de* duas subtracções simples,—no limite de 10, *e* verificados por multiplicação *do quociente achado pelo divisor, em cada caso.*

O trabalho de decoração final dos resultados obtidos é feito por meio das "taboadas circulares" *methodizadas por nós, por meio da* "*taboada successiva geral*" *baseada nas* "*leis de repetição*" *do algarismo das unidades das sommas successivas dos numeros simples,* *e firmada com a pratica das operações de numeros compostos, facilitada e simplificada pelo "methodo de pausas" e "calculo mental".*

Parecerá, talvez, que nos estendemos demasiado na parte referente á divisão e multiplicação *applicada á* resolução dos problemas; *justificamos, porém, o nosso proceder, dizendo que assim fizemos porque os problemas que envolvem essas duas operações são os que offerecem maior difficuldade para serem resolvidos, sobretudo os de "razão inversa".*

Neste particular, isto é, na "methodização do ensino da resolução dos problemas", achamos que ha grande lacuna nos compedios actualmente em uso.

Os problemas são dados, ás vezes, em grande numero, porém sem a menor indicação ou explicação que os classifique, ou que esclareça a sua resolução, ou então são explicados um por um *em livros* para o professor, sómente: *o mesmo quanto aos dados dos problemas, os quaes nem sempre correspondem a assumptos da vida pratica que os tornem mais attrahentes e mais proveitosos.*

Sempre nos impressionou desagradavelmente o facto de os alumnos se exprimirem mal *nas classes de arithmetica, particularmente na linguagem applicada aos problemas; por isso, apresentamos alguns problemas resolvidos na forma que nos pareceu mais clara e proveitosa, tanto para a linguagem como para a indicação das operações que dão a "solução" e o resultado.*

Os problemas resolvidos devem ser apresentados nos cadernos, sob essa forma, devendo as operações effectuadas ser conservadas em borrão, *o qual servirá para* conferir *os resultados em aula, quando necessario.*

Por acharmos ser exercicio de inestimavel valor, tanto para a pratica de linguagem como para o desenvolvimento do raciocinio, a "formulação" e "redacção" dos problemas, aconselhamos o aproveitamento dos "dados", a cada um occulto, correspondendo um problema; ou então, um problema "escolhido" será dado, para que o alumno formule outro semelhante, mudando os dados, *isto é, os* numeros sómente, *ou os* numeros *e os* nomes, *guiado nesse trabalho pelo professor, até se habilitar a faze-lo por si mesmo.*

A pratica geralmente seguida de apresentar o problema resolvido, desordenadamente, *aproveitando os quadros das operações effectuadas, achamos que deve ser abolida, por defeituosa e mesmo prejudicial.*

Estendemo-nos tambem na parte referente á "numeração decimal", por estarmos convencido da necessidade de methodizar esse ensino, afim de evitar o caso semelhante ao das operações de numeros simples, isto é, o de se encontrarem alumnos que, matriculados nos Gymnasios, não sabem escrever numeros, *surpresa desagradavel para o lente da cadeira, o qual se vê obrigado a ensinar o que já devia estar sabido, ou a exigir* escripta *e* leitura *de* numeros *nos exames de admissão.*

Conjuntamente com a "numeração", demos a "formação" dos numeros, ponto de partida natural, tanto de "numeração falada" *como da* "escrita", *por nos parecer que só assim devem ser ensinadas com proveito, admittida a sua separação sómente sob o ponto de vista theorico, o que não cabe em compendios que se destinam ao ensino pratico e elementar das operações numericas.*

Outrosim, distribuimos o estudo da "numeração" em quatro partes, *como melhor nos pareceu, acompanhando o desenvolvimento do calculo das operações, conforme já é feito, com alguma differença, nas "instrucções" para o ensino de arithmetica nas escolas, e não como é praticado nos compedios, escravizados á rotina e á theoria, falta grave, mórmente si se consideram os que se destinam ao ensino elementar.*

Quanto á distribuição do ensino das "quatro operações", achamos mais pratica a que fizemos, terminando primeiro o calculo da somma *e o da* subtracção, *derivando as taboadas de* multiplicar *e de* dividir *das* sommas *e* subtracções successivas, *progressivamente, ensinando estas, primeiro, para depois tratar daquellas operações.*

Discordamos da orientação em virtude da qual as operações de "fracções decimaes" são tratadas logo após ás operações de "inteiros", pelo facto de serem os numeros decimaes formados como os numeros inteiros, na razão decupla, *por poderem ser escritos* em continuação *destes, para a direita, e por serem, por isso, as operações de decimaes* mais simples *que as de "fracções ordinarias".*

Si a formação dos numeros decimaes é a mesma que a dos numeros inteiros, nem por isso deixam elles de ser, em primeiro lugar, um caso particular das fracções, *em geral, por serem formados pela* subdivisão *da unidade* na razão decupla, *ao passo que os inteiros são formados nessa mesma razão, porém, pela* repetição *da unidade: d'ahi o serem os inteiros representados em* serie crescente, *para a esquerda, e os decimaes, em* serie decrescente, *para a direita.*

Si a addição e a subtração de decimaes operam-se e demonstram-se do mesmo modo que para os inteiros, não acontece o mesmo com a multiplicação e divisão em que a demonstração é feita indirectamente, *considerando as alterações soffridas pelo producto e quociente, em consequencia da abstracção ou afastamento da virgula nos termos operados.*

Como consequencia do esforço para facilitar a divisão de decimaes, é essa operação reduzida a um unico caso, *ao qual se reduzem os outros, o da divisão de um* decimal por um inteiro, *ou ainda de um* inteiro por outro, *com o inconveniente de zeros accrescentados ao divisor.*

Tal recurso contribue para incutir no espirito do alumno que a divisão por um decimal só póde ser feita transformando-o em inteiro, *o que não é exacto, visto como, por meio da fórma ordinaria demonstram-se,* directamente, *os casos de multiplicação de decimaes, e deduz-se a "regra geral" para effectuar essa operação, como si os numeros fossem inteiros, sem altera-los e,* por inversão, *a divisão; isto é, —*

(*a*) — *O producto tem tantas casas decimaes quantas as de um factor, si um só é decimal, ou a* somma *do numero de casas decimaes dos dois factores, si ambos são decimaes.*

(*b*)—*Uma vez que o dividendo é o producto do divisor pelo quociente, o numero de casas decimaes deste ultimo é dado pelo numero* de casas decimaes do dividendo menos o numero de casas decimaes do divisor.

Si o dividendo tem menor numero de casas decimaes que o divisor, conclúe-se que se deve igualar o numero de casas decimaes do dividendo (producto) e divisor (factor), por meio de zeros accrescentados á direita do dividendo, devendo então o quociente ser inteiro, si a divisão é possivel, porque a differença do numero de casas é zero, e porque o dividendo e o divisor são da mesma especie ou denominação.

O accrescentamento de zeros é igualmente necessario, em qualquer caso, quando o dividendo é numericamente menor que o divisor.

Tratadas as fracções decimaes antes das ordinarias, fica tambem sem explicação o facto de ser o producto menor que o multiplicando, ou o quociente maior que o dividendo, por ser o multiplicador ou o divisor menor que a unidade, isto é, por serem esses termos "fracções", o que só pode ser demonstrado considerando a "definição geral" de multiplicação que abrange o caso de um multiplicador fracção: o mesmo quanto á divisão.

A noção geral de fracção occorre quasi concomitantemente com a da unidade inteira, e não vemos o inconveniente em serem as operações de fracções consideradas logo após ás de inteiros, para em seguida serem tratadas as fracções decimaes como um caso particular das fracções, em geral, que o são, e não como uma continuação dos numeros inteiros.

Transmittido, desde o começo, com a clareza necessaria, o ensino das operações de fracções ordinarias, constitúe um dos melhores exercicios de raciocinio do curso de arithmetica, parecendo-nos descabido e incoherente o serem tratadas essas operações, como temos visto, até depois das operações de numeros complexos e cambio, quando fazem ellas parte do estudo das quatro operações fundamentaes, e o completam.

A tendencia que se nota em dar demasiada importancia ao desenvolvimento do raciocinio por meio da resolução dos problemas de concretos, faz com que se despreze o exercicio do raciocinio por meio dos "calculos arithmeticos", que são assim aprendidos mechanica e materialmente, sem a indispensavel e exacta comprehensão de cada um.

No calculo de fracções ordinarias, por exemplo, ensina-se a fazer a "reducção" de duas fracções ao mesmo denominador, multiplicando sempre — em cruz, dando a unidade para denominador dos termos inteiros.

Assim procedendo, despreza-se o proveitoso exercicio de raciocinio fornecido pela "propriedade" em que se baseia essa reducção, perfeitamente ao alcance da intelligencia infantil, comtanto que seja ensinada essa alteração da fórma com a conservação do valor de uma fracção, praticamente, por meio de exemplos simples e graduados, a partir de $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ etc., (Quadro XXIII).

Na multiplicação e divisão de fracções, insiste-se igualmente em dar aos termos inteiros a fórma de fracção, com a unidade para denominador.

Ora, em primeiro lugar, a unidade como denominador, não tem significação nos calculos de fracções, tanto que sómente se lê — sobre um; em segundo lugar, como na reducção ao mesmo denominador, dando-se o denominador 1 ao multiplicador ou ao divisor, que são os numeros operadores, despreza-se o raciocinio util fornecido pela "propriedade" que ensina a alteração do valor de uma fracção por multiplicação ou divisão de um dos termos por um mesmo numero.

Essa "propriedade", bem como a da inalterabilidade do valor de uma fracção por multiplicação ou divisão de ambos os termos por um mesmo numero,—já devem ter sido ensinadas e raciocinadas antes das operações de fracções, as quaes nellas se baseiam, e fornecem a util applicação dessas mesmas "propriedades" para a comprehensão dos calculos e desenvolvimento do raciocinio.

Na multiplicação, o caso do multiplicando inteiro fica incluido na "regra geral" de multiplicação por uma fracção, baseada na multiplicação do multiplicando, seja elle qual fôr, pelo numerador do multiplicador, e na divisão do resultado pelo denominador.

Na divisão, o caso do dividendo inteiro está incluido na "regra geral" de divisão por uma fracção, isto é, na multiplicação do dividendo, seja elle qual fôr, pelo divisor fracção invertido, baseada na divisão do dividendo pelo numerador, e na multiplicação do resultado pelo denominador.

De mais vantagem nos parece ainda a applicação das "definições geraes" de multiplicação e divisão, isto é,—formar o producto do multiplicando assim como o multiplicador é formado da unidade, e, inversamente, na divisão,—o quociente do dividendo, assim como a unidade é formada do divisor.

Considerando as difficuldades do ensino das operações de fracções ordinarias, dividimo-lo em duas partes, bem como o da "divisibilidade" dos numeros, isto é, a primeira, introductoria, precedida apenas dos "caracteres particulares de divisibilidade" dos numeros, sem a applicação da "reducção" de fracções ao minimo denominador commum, e sem a "reducção" de fracções á expressão mais simples; a segunda, final, e de recapitulação da primeira, com a applicação dessas reducções, precedida do estudo completo da divisibilidade dos numeros.

Somos de parecer que seja empregado, quando possivel, mais de um processo para resolver o mesmo calculo, preferindo-se sempre o mais racional ou aquelle que melhor se prestar a ser demonstrado, de modo a facilitar a comprehensão e assim desenvolver o raciocinio: os processos puramente mechanicos devem ser usados como exercicio suplementar, sómente no caso de facilitarem o calculo.

A muitos póde parecer que traz confusão o ensinar a operar um calculo qualquer por mais de um processo; a pratica nos ensinou, porém, que tal não se dá, uma vez que se obtenha a comprehensão exacta do processo ou processos empregados: muito ao contrario, assim procedendo, conseguiamos despertar o interesse e o estimulo da parte dos alumnos, em nossas classes, os quaes porfiavam em operar o mesmo calculo, por dois ou mais processos.

A falta de esforço para obter a comprehensão exacta dos processos usados nos calculos de arithmetica, ao alcance da intelligencia infantil, explica a aversão notoria observada da parte da maioria das crianças, desde que começam o estudo dessa, aliás, tão util disciplina.

O ensino puramente material ou mechanico do calculo, sem ser acompanhado do indispensavel exercicio de raciocinio, do qual resulta a compresensão, não desperta o interesse desejado, nem o que é aprendido, permanece, com proveito para a intelligencia do alumno.

O methodo que adoptámos tem em vista facilitar o calculo dos numeros de modo a tornar o trabalho tão attrahente quanto possivel, aproveitando as bellezas das propriedades e das combinações numericas, familiarizando o alumno com os numeros e com as operações que com elles podem ser effectuadas, sem difficuldade e sem fadiga, nem sua consequencia inevitavel, — a aversão pelo estudo de arithmetica, — base das mathematicas, a um tempo, sciencia e arte, cuja importancia na vida pratica ninguem póde contestar.

A objecção que poderá ser feita contra o processo que adoptamos da applicação dos "complementos" dos numeros simples, a que démos o nome de "methodo dos complementos", de que a criança encontrará difficuldade em apprehender a applicação dessas "propriedades", responderemos que, uma vez bem aprendidas de cór as combinações até 10, e até 20, mais facilmente e em menos tempo aprenderá a criança a applicação de tão simples processo, do que exclusivamente decorando, uma por uma, todas as outras combinações acima de 10.

Quando nada, ninguem de bôa fé contestará que a applicação do methodo á divisão está ao alcance de qualquer criança, logo que possa ou que comece a apprender essa operação.

Ninguem tampouco poderá negar a vantagem de se obterem os algarismos altos do quociente de uma divisão por processo tão simples quanto expedito, com o maximo de segurança contra erros possiveis, e melhor ainda,—com o minimo esforço, sem fatigar o espirito, reservando a applicação da memoria, sómente ao indispensavel ou inevitavel.

Por experiencia propria e sem exagero, affirmamos que, applicando os rocessos que indicamos, podemos calcular com rapidez e exactidão que dantes nunca conseguiramos.

Devemos declarar que, de modo algum, somos "calculista": ao contrario, a difficuldade com que sempre lutámos para operar com numeros, foi um dos motivos que nos levaram a executar este trabalho, com o intuito de prestar beneficio ao ensino.

Como é commum entre a maioria das crianças, desde cedo tomámos irreprimivel aversão pelo estudo de arithmetica, a ponto de declarar ao director do primeiro collegio que frequentámos, com a espontaneidade propria da idade infantil, — que poderiamos estudar tudo, menos — "arithmetica": só muito mais tarde adquirimos algum gosto por essa materia, depois de ter feito o estudo de algebra, e depois que nos dedicámos ao ensino de ambas.

Tem sido dito e repetido que não se explica porque as crianças que, antes de frequentarem as aulas de arithmetica, fazem com naturalidade e sem desprazer as suas contas infantis, tomam irreprimivel aversão pelo estudo dessa materia, logo que começam a estuda-la: a razão está, ao nosso ver, na applicação dos processos até aqui usados no ensino de tão util quão indispensavel disciplina.

Quanto ao que denominamos "methodo de pausas" e "calculo mental", praticado pelo menos quanto á somma, por muitos guarda-livros experimentados, estamos convencido de que póde ser conseguido por qualquer alumno, uma vez que o exercicio do "calculo successivo" e o das "taboadas circulares" seja seguido, á risca.

Basta experimentar para se convencer qualquer de que, em vez de pensar numas tantas palavras que só servem de estorvo ao pensamento e gastam tempo, pensando-se sómente na operação e nos numeros operados, o resultado é obtido com muito mais rapidez e exactidão.

Basta igualmente attentar para o facto de que, mesmo na pratica usual, no começo, é sempre empregado maior numero de palavras taes como os verbos, até obter a comprehensão necessaria, não ficando esse numero reduzido ao minimo porque não se continúa a pratica, mais que possivel, util e necessaria, da sua "reducção final".

Ora, tal processo não é mais que a continuação e termo dessa "reducção" do numero de palavras empregadas, até a sua suppressão quasi total, cujo objectivo é permittir ao pensamento a maxima liberdade, sem o "entrave" de palavras dispensaveis ou inuteis.

Cremos que é maior o tempo gasto em pensar com um maior numero de palavras usadas para se obter o resultado de uma operação de dois numeros simples, do que o tempo gasto para se fazerem as "pausas" necessarias para se obter o mesmo resultado sem o uso da maior parte dellas, faladas ou simplesmente—pensadas.

No começo, as pausas serão, naturalmente, mais longas, mórmente para os alumnos tardos, diminuindo gradualmente a sua duração até obter o maximo de rapidez e exactidão do calculo, consequencia natural da maxima rapidez do pensamento.

Para que o "methodo" possa ser applicado com resultado desejavel, a quasi totalidade do texto é destinada ao professor.

Devemos dizer que a parte das taboadas que tinhamos terminado foi applicada com os melhores resultados no excellente "Collegio Rodrigues" que funccionou nesta cidade, annos atraz.

Caso o "methodo" que apresentamos encontre acceitação geral, é nossa intenção organizar os "quadros" de taboadas, numeração, diagrammas e fracções, sob a fórma de "mappas" com explicações resumidas, para serem usados nas escolas e collegios.

Outrosim, em nova edição, será o trabalho refundido em todas as suas partes, com a addição de problemas escolhidos, para cada uma das operações, tanto de inteiros como de fracções, e mais tarde completado o curso de arithmetica.

Esperançoso de que o resultado do nosso esforço venha prestar algum beneficio á mocidade de nossa terra, dar-nos-emos por bem pago das fadigas que elle nos custou, si tal acontecer.

Acceitamos de bom grado a critica razoavel, bem como suggestões para que possamos aperfeiçoar o nosso despretencioso trabalho, tanto quanto correcções dos erros que nelle deve de haver, pelo que de antemão nos confessamos penhorado.

O · Autor.

Agradecimento

A' digna Camara Municipal de Ribeirão Preto, aos meus illustrados companheiros da Congregação do Gymnasio, aos distinctos professores e professoras, aos meus caros ex-alumnos, ex-alumnas, e alumnos do Gymnasio, o meu profundo reconhecimento pelo espontaneo auxilio prestado a publicação deste modesto trabalho, sob a fórma de uma homenagem que tanto me honra e desvanece; em particular, á minha dedicada ex-alumna, professora Olga Barretto, pela captivante iniciativa dessa manifestação, tanto quanto ás suas gentís auxiliares: será, para mim, motivo de dobrada satisfação, si o livro corresponder á sympathica expectativa com que aguardaram a sua publicação, e á confiança com que o patrocinaram.

Ao meu bom amigo e collega do Gymnasio, Dr. Mario de Assis Moura, os meus sinceros agradecimentos pela esclarecida "apreciação contida na carta que teve a gentileza de me dirigir, bem como pelas bondosas palavras de estimulo e conforto que a acompanharam; outrosim, ao sr. professor Octavio Silveira, digno Inspector Regional, confesso-me penhorado pela amabilidade das expressões constantes da carta com que distinguiu o meu trabalho.

Terminando, não posso esquecer os meus amaveis editores, a quem sinceramente sou grato pela boa vontade com que se encarregaram da publicação deste livro, bem assim pelo desvelo e esforço empregados para que a obra sahisse bem acabada e de aspecto attrahente.

Ribeirão Preto, Dezembro-26.

FRANCISCO E. DE AQUINO LEITE.

Illmo. Sr. Professor Francisco E. de Aquino Leite.

Saudações attenciosas.

Permitta que lhe manifeste a grata impressão que me deixou o exame de suas "Taboadas Brasileiras pelo methodo dos complementos", trabalho que o Sr. submette ao meu desvalioso juizo antes de o mandar para o prélo.

Dediquei uma parte da manhã de hoje a familiarizar-me com os seus *quadros*, principalmente aos que se referem á multiplicação e á divisão com restos, e enthusiasmei-me com a maneira curiosa e intelligentemente desenvolvida pelo autor ao organizal-os.

Afigurou-se a mim que esses *quadros* conseguirão fatalmente operar nas creanças o milagre de interessal-as nos resultados da formação e decomposição dos numeros, fazendo-as aperceber-se, além disso, natural, espontanea, immediata e praticamente, das relações apparentemente *magicas* entre os *complementos*, com aquella periodicidade ou *rotativismo* do ultimo algarismo dos productos da multiplicação por um numero dado.

Eu já lhe havia feito vêr que condemno todos os apparelhos de mechanização do ensino da Arithmetica, sejam ainda quadros ou diagrammas, quando, em opposição, ao aproveitamento *directo e actual* para o calculo, possam atrofiar o raciocinio ou simplesmente retardal-o; mas vejo com satisfacção nas "Taboadas Brasileiras", que esse *resultado actual* que a creança achará logo para a operação que se lhe propõe, vae logica e *indirectamente* interessal-a na descoberta dos segredos do *apparelho* que a soccorreu, preparando esse *interesse* as suas intimidades com o jogo dos numeros.

A meu vêr, pois, as suas "Taboadas" têm o *valor directo* de dispensadoras das fadigas da decoração, e o grande e precipuo *valor indirecto* de preparadoras da creança para as surprezas, — porque não dizer "para os arcanos"?—das sciencias exactas.

Prosiga no seu proposito de trazer ao ensino mais essa contribuição; ella assenta bem no dedicado professor, que tem consagrado sua existencia e sacrificado sua saúde ao proveito de tão Santo Ministerio.

Do am.º e adm.or

Mario de Assis Moura

Rib. Preto, 8 de Fevereiro de 1925.

Exmo. Sr. Francisco de Aquino Leite

RIBEIRÃO PRETO

Aprouve á vossa bondade valer-se da minha pobre experiencia didatica para fazer ligeira apreciação do vosso trabalho inedito — "TABOADAS BRASILEIRAS PELO METHODO DOS COMPLEMENTOS, PAUSAS, CALCULOS SUCCESSIVOS E CALCULOS MENTAES".

A simples inspecção das provas originaes e a demonstração verbal que fizestes, desdo logo, convenceram-me tratar-se de um plano de lições habilmente concebido e brilhantemente executado. Só mesmo uma cerebração como a vossa, investigadora e forte, lucida e equilibrada, penetrando as verdades mathematicas com aguda sagacidade, poderia conceber e realizar, no assumpto, obra acabada de mestre.

Estudando a numeração, as quatro operações fundamentaes sobre inteiros e fracções e a sua methodização á resolução de problemas — as TABOADAS BRASILEIRAS se enquadram nos programmas das nossas escolas primarias. Estou certo de que, publicadas, prestarão reaes serviços, revolucionando os processos até agora seguidos no ensino arithmetico, os quaes, a despeito das tinturas modernas que os recommendam, não têm surtido satifactorios resultados.

Está claro que o prestimo da vossa obra não se revelará nas mãos dos alumnos, senão nas dos professores, que, se conduzirem a processação conforme o vosso plano engenhoso, conseguirão seguramente, a desejada efficiencia em tão util ensino. Sobretudo, essa foi a vossa preoccupação central—o alvo mathematico será attingido: rapidez e exactidão nos calculos.

Oxalá não se faça esperar e muito breve venha a lume o vosso esplendido livro, dando, assim, aos nossos professores primarios um tratado arithmetico elementar attrahente e original, porque, com luz propria, novos caminhos palmilhando e novos artificios inventando, collimastes o objectivo procurado: — contribuir para aperfeiçoar, em nossas escolas primarias, a importante e educativa sciencia dos numeros.

Com as minhas calorosas felicitações, acceitae, Exmo. Sr., a affirmação do distincto apreço e alta estima do vosso

Coll.ª, patricio e admor.

Octavio da Costa Silveira, Inspector Escolar.

TABOADAS BRASILEIRAS

OPERAÇÕES NO LIMITE DE 10.

INDICAÇÕES GERAES

1.ª — Opere-se, primeiro, com **objectos**; depois, com **algarismos**, e, por ultimo, faça-se o "calculo mental".

2.ª — Disponham-se os objectos em linha horizontal, da esquerda para a direita, contando-os em seguida, escrevendo depois os algarismos correspondentes.

3.ª — Faça-se uso, primeiro, da **linguagem completa**, empregando **conjuncções, preposições e verbos, que deverão ser supprimidos, gradualmente**, até que o alumno consiga fazer o calculo com o **minimo** de palavras applicando o "methodo de pausas", e, por fim, o "calculo mental".

4.ª — Faça-se a **somma** e a **subtracção**, com **objectos**, operando sempre, — primeiro a somma do numero **maior** com o **menor**; depois, por **inversão natural**, a somma do **menor** com o **maior**, como se vê nas taboadas, nas quaes a cada uma das sommas corresponde uma subtracção, inverso dessa somma.

5.ª — Chame-se a attenção do alumno para a **somma** dos numeros collocados symetricamente em **série** (progressão por differença): do **primeiro** com o **ultimo**, do **segundo** com o **penultimo**, do **terceiro** com o **ante-penultimo**, e assim por diante, somma essa **igual** ao **numero seguinte** acima do numero **maior** da série, o qual serve de **base** á taboada e lhe dá o **nome**.

Quando a somma é um **numero par**, o **numero intermedio** da série é **metade** da somma, ou o seu **dobro** é igual á somma.

6.ª — Na **somma**, empregue-se a conjuncção **e**, e depois o adverbio **mais** que a substitúe, interpretando o signal de **sommar**.

7.ª — Ensine-se a subtracção **directa**, empregando o verbo **tirar**, após o nome do **diminuidor**, ou a palavra **menos**, nome do signal de subtrahir, após o nome do **diminuendo**, e a subtracção **indirecta**, empregando a preposição **para**, e, por fim, a conjuncção **e**, após o nome do **diminuidor**,—abreviando e simplificando sempre o calculo.

8.ª — Depois de o alumno estar **sufficientemente pratico** no calculo **com objectos**, deverá copiar todo **o quadro**, preparando-se para o "calculo mental".

9.ª — Introduzam-se os calculos de **multiplicação** e **divisão**, sem empregar os signaes respectivos, derivando-os da **somma de parcellas iguaes** (multiplicação), e da **subtracção successiva de um mesmo diminuidor** até o **resto zero** (divisão exacta), ou um resto **menor** que o numero repetido (divisão com resto).

10.ª — Introduza-se a noção de **fracção**, praticamente, chamando a attenção do alumno para a **metade** ou **um meio** de um numero, o **terço** ou **terça parte**, o **quarto** ou **quarta parte**, e assim por diante.

ADDIÇÃO E SUBTRAÇÃO SUCCESSIVAS

QUADROS — II ATE' IX

Operem-se as **sommas successivas**, dando a cada alumno uma das **taboadas parciaes** ou uma das **sommas successivas**, primeiro, **ordenadamente**, depois, **salteado**, enunciando os **numeros** iniciaes com o **numero repetido** e as **sommas successivas**, que por sua vez servem como **parcellas**, até o **numero que falta** para completar o **total final** da taboada, usando a conjuncção **e**, que depois deve ser supprimida, bem como o **numero repetido**, bastando então enunciar o **numero inicial** com as **sommas successivas**, até **o que falta** para completar o **total**.

A **subtracção** é feita **invertendo** os calculos obtidos nas **sommas**, servindo o total final de **primeiro diminuendo**, e o que faltou na somma, para completa-lo, de **primeiro diminuidor**: os restos successivos servem, por sua vez, de **diminuendos**, e o numero repetido de **diminuidor.**

TABOADAS CIRCULARES — ATE' 10

INDICAÇÕES

Na **somma**, as **parcellas dadas** são escritas dentro do circulo, sem formar série, em volta da circumferencia, e o **total** da taboada **na** parte central, como segundo membro de uma igualdade em que o primeiro membro deve ser completado com uma das **parcellas dadas**, subentendida pelo parenthese e a outra a ser **descoberta pelo alumno**, subentendida pelo signal de interrogação que deve ser lido — "Quanto?".

O exercicio deve ser feito de **fóra para dentro** e **vice-versa**, invertendo a ordem das parcellas que deverão tambem ser lidas em dois sentidos: da **direita para a esquerda** e **vice-versa**, e **salteado.**

Estas taboadas devem ser usadas para o "calculo mental", como "**exercicio final**" nas sommas de **duas parcellas.**

Na **subtracção**, o **diminuendo**, que é o **total** da taboada de sommar, é collocado na parte central como primeiro termo do primeiro membro de uma igualdade que é completada com um dos **numeros menores** para **diminuidor**, subentendido, sendo o segundo membro o **resto**, a ser **descoberto pelo alumno**; ou, escreve-se o resto no segundo membro, e pede-se o **diminuidor**, fazendo uso do signal de interrogação para representar o **termo desconhecido** em ambos os casos.

METHODO DE PAUSAS

Desde que o alumno esteja **bastante corrente** na operação de **dois numeros simples**, applique-se este "methodo" que consiste em empregar o **minimo de palavras**, isto é, sómente o **nome** do **primeiro numero operado** e o do **resultado da operação**, com uma **pausa breve** entre os dois, e uma **longa final, omittindo o nome do segundo numero operado e o connectivo** que o liga ao **nome do resultado da operação**.

Isto se representa por meio de **uma virgula** para a **pausa breve**, e de um **ponto e virgula**, ou **ponto final**, para a **longa**.

Assim, na **somma**, dir-se-á, omittindo as palavras entre parenthese: 1, (e 1), 2; 1, (e 2), 3; 2, (e 2), 4; 3, (e 2), 5; 2, (e 3), 5; e assim por diante.

Na **subtracção**, dir-se-á, do mesmo modo: 2, (menos 1), 1; 3, (menos 2), 1; 4, (menos 2), 2; 5, (menos 2), 3; 5, (menos 3), 2; e assim por diante; ou, invertendo, na subtracção **indirecta.**

Na **somma** e na **subtracção successivas**, faz-se **pausa breve** entre o nome do numero inicial e o do primeiro resultado, entre o deste e o do segundo, e assim por diante até á ultima somma ou resto em que se faz **pausa longa final.**

A prattica deste "methodo" deve ser feita, no começo, "**pausada e vagarosamente**", isto é, **alongando** as pausas breves, para depois **encurta-las, gradualmente**, até que os alumnos consigam a indispensevel **rapidez de pensamento** e consequente **rapidez do calculo.**

Depois de feita a pratica com as combinações de **dois numeros**, os melhores resultados são obtidos com as "taboadas successivas", para sommar e subtrahir; com as "taboadas circulares", para completar a pratica dessas operações, e particularmente para a multiplicação e divisão.

O professor dará ou indicará o **primeiro numero**, esperando que o alumno dê o resultado, sem mencionar o nome do segundo termo da operação nem palavra alguma que embarace o pensamento: por fim, o alumno dará **sómente o resultado**, obedecendo apenas á **indicação** da operação, fazendo o **calculo puramente mental.**

PROBLEMAS

Problemas simples de sommar e de subtrahir devem ser propostos, constando os dados de numeros extrahidos de cada uma das taboadas, acompanhando o desenvolvimento destas.

Dêem-se a resolver, primeiro, problemas completos, **com a pergunta respectiva**, auxiliando o alumno a **descobrir a operação a effectuar.**

Em seguida, por ser **espontanea** a pergunta derivada do contexto do problema, ou por elle suggerida, formulem-se problemas, **sem a pergunta** respectiva **expressa**, para que o alumno **a faça e descubra por si mesmo** a operação a effectuar.

OPERAÇÃO A EFFECTUAR

Quando do contexto do problema se conclúe que os numeros que representam duas ou mais quantidades da mesma especie (parcellas) devem se **reunir** ou **ajuntar** para formar uma **quantidade maior**, (somma total), da **mesma especie** que as primeiras, trata-se de uma — **somma ou addição.**

Quando do contexto do problema se conclúe que de um numero que representa uma certa quantidade deve ser **tirado** ou **subtrahido** um outro que representa **uma parte** da primeira quantidade dada, isto é, quando se trata de achar—(1) a **differença** entre dois numeros, ou (2) de quantas unidades o maior **excede** o menor, ou ainda, (3) quantas unidades **faltam** ao numero menor para completar o maior, trata-se de uma — **subtracção.**

EXEMPLOS

PROBLEMAS

1.° Estavam 5 andorinhas pousadas sobre um telhado; logo depois juntaram-se a estas, mais 3. Quantas andorinhas se reuniram ao todo sobre o telhado?

(1) A operação a effectuar é uma **addição** porque o problema pede uma **somma** ou **total** de quantidades da mesma especie.

Solução:

(2) Reuniram-se ao todo sobre o telhado: $5+3=8$ andorinhas.

2.° Uma gallinha tirou uma ninhada de 10 pintos, 3 dos quaes morreram, criando-se os **restantes.** Quantos pintos criaram-se?

O problema é resolvido por uma **subtracção** porque pede o que **resta** de uma quantidade maior, da qual se tira uma parte.

Solução: — Criaram-se: $10-3=7$ pintos.

3.° Paulo tem 9 annos de idade, e José 6.

O problema admitte **tres perguntas,** todas resolvidas por uma mesma **subtracção,** porque póde pedir uma **differença,** um **excesso** ou uma **falta,** isto é:

1.ª Qual a differença de idade dos dois meninos?

Solução:

A differença de idade dos dois meninos é de: $9-6=3$ annos.

2.ª Quantos annos Paulo é **mais velho** (excesso) que José?

Solução: — Paulo é mais velho que José: $9-6=3$ annos.

3.ª Quantos annos José é **mais moço** (falta) do que Paulo?

Solução: — José é mais moço do que Paulo: $9-6=3$ annos.

Sempre que fôr possivel, uma vez resolvido um problema de addição formulem-se os problemas oppostos de **subtracção,** com os **mesmos dois dados,** ou com **dados differentes,** para serem resolvidos pelo alumno que, por fim, fará o exercicio **por si mesmo,** redigindo e resolvendo os problemas derivados do problema proposto.

Assim, o problema das andorinhas, de addição, dado acima, fornece o problema opposto de subtracção, isto é: —

Estavam 9 andorinhas pousadas num fio telegraphico, 4 das quaes voaram, ficando as restantes.

Quantas andorinhaes ficaram pousadas no fio?

Solução:—Ficaram pousadas sobre o fio: $9-4=5$ andorinhas.

Proceda-se do mesmo modo com os problemas de **subtracção,** dos quaes **se derivam dois** problemas, um de **addicção** e outro de **subtracção.**

SOMMA DE PARCELLAS IGUAES

MULTIPLICAÇÃO

1.° **Quantas** laranjas são precisas para distribuir com 4 meninos, dando 2 a **cada um?**

Solução: — São precisas: $2+2+2+2=8$ laranjas, isto é, 2 laranjas **repetidas 4 vezes** como parcella.

A operação pedida é portanto uma **somma de parcellas iguaes** (multiplicação) cujo resultado é o **producto.**

SUBTRACÇÃO SUCCESSIVA DE UM MESMO NUMERO

DIVISÃO

Decomponham-se os numeros por **subtracção successiva** de um **numero menor,** simples, applicada á **decomposição exacta** de **numeros** (divisor) **maiores** (dividendos), seguindo a ordem das perguntas e respostas, como se faz abaixo, para o numero 6:

Ex: (a)—Quantos 2,s **podem ser tirados** de 6, e quantos 3s?
(b)—Quantos 2s **ha** em 6, e quantos 3s?
(c)—Quantas vezes, 6 **contém** 2, e quantas vezes **contém** 3?

Solução: $6-2-2-2=0$ e $6-3-3=0$.

Portanto: —
(a) — De 6 podem ser tirados 3, 2s, ou 2,3s, exactamente.
(b) — Em 6 ha 3,2s, e 2,3s.
(c) — 6 **contém** 3,2s, e 2,3s.

Applique-se o mesmo processo á decomposição de um numero (dividendo) que deixa uma **sobra** ou **resto,** que se menciona após o **numero de vezes** (quociente) que **contém** um numero menor (divisor).

Ex.: Quantas vezes, 7 contém 3?

Solução: $7-3-3=1$.

R. 7 contém 3, **duas vezes,** com uma **sobra** ou resto, 1, menor que 3.

NOÇÕES GERAES DE DIVISÃO E FRACÇÃO

Quando se divide um numero inteiro qualquer em **duas** ou **mais** partes **iguaes** até **dez** partes, cada uma dessas partes, inclusive a unidade, é, respectivamente, $\frac{1}{\text{meio}}$ ou a **metade**, $\frac{1}{\text{terço}}$ ou a **terça** parte, etc., até $\frac{1}{\text{decimo}}$, ou **decima** parte do numero dado.

DIVISÃO POR 2

Dividindo 4 em duas partes iguaes, cada uma dellas é 2: portanto, 4 **contém** 2, **duas vezes**, e 2 é $\frac{1}{\text{meio}}$ ou a metade de 4.

Dividindo 6 em duas partes iguaes, cada uma dellas é 3: portanto, **6 contém** 3 **duas vezes**, e 3 é $\frac{1}{\text{meio}}$ ou a **metade de 6**.

Proceda-se do mesmo modo com 8 e 10, dividindo-os em duas partes iguaes (meios ou metades), 4 e 5, respectivamente.

DIVISÃO POR 3

Dividindo 6 em tres partes iguaes, cada **uma** dellas é 2: portanto, **6 contém** 2 **tres vezes**, e 2 é $\frac{1}{\text{terço}}$ ou a **terça** parte de 6.

Dividindo 9 em tres partes iguaes, cada uma dellas é 3: portanto, **9 contém** 3, **tres vezes**, e 3 é $\frac{1}{\text{terço}}$ ou a **terça** parte de 9.

DIVISÃO POR 4

Dividindo 8 em **quatro** partes **iguaes**, cada **uma** dellas é 2: portanto 8 **contém** 2, **quatro vezes**, e 2 é $\frac{1}{\text{quarto}}$ ou a quarta parte de 8.

DIVISÃO POR 5

Dividindo 8 em **quatro** partes **iguaes**, cada **uma** dellas é 2: portanto, 10 **contém** 2, **cinco vezes**, e 2 é $\frac{1}{\text{quinto}}$ ou a **quinta** parte de 10.

NUMEROS PARES

Os numeros, 2, 4, 6, 8, e 10, são **pares**, porque podem ser divididos em **duas** partes **iguaes**, ou **metades exactas**, compostas de **unidades inteiras**, ou em tantas vezes 2, quantas as unidades de **uma** dessas metades, como se vê no **Quadro I.**

Os quatro numeros simples, 2, 4, 6, e 8, e o 0 (zero) das unidades de 10, fornecem os cinco algarismos das **unidades, de terminação** dos demais numeros pares acima de 10.

NUMEROS IMPARES

Os numeros 1, 3, 5, 7, e 9, são **impares** porque não podem ser divididos, como os pares, em duas metades compostas de unidades inteiras, havendo sempre uma **sobra de uma unidade inteira**, que é dividida em **duas metades** ou **meios** cada um dos quaes completa a metade desses numeros.

Assim, si 1 é igual a $\frac{2}{\text{meios}}$ ou duas **metades, tem-se:**

$\frac{1}{\text{meio}}$ ou a metade de 3 = 1 e $\frac{1}{\text{meio}}$; $\frac{1}{\text{meio}}$ ou a metade de 5 = 2 e $\frac{1}{\text{meio}}$;
$\frac{1}{\text{meio}}$ ou a metade de 7 = 3 e $\frac{1}{\text{meio}}$; $\frac{1}{\text{meio}}$ ou a metade de 9 = 4 e $\frac{1}{\text{meio}}$;

Esses **cinco** numeros fornecem o algarismo das **unidades, de terminação** dos demais numeros impares acima de 9.

NUMERAÇÃO

QUADRO I

NUMEROS DIGITOS

■ um ou 1

■ ■ dois ou 2 = 2, 1 s ; ∴ 1 = 1 meio de 2

■ ■ ■ tres ou 3 = 3, 1 s ; ∴ 1 = 1 terço de 3

■ ■
■ ■ quatro ou 4 = 2, 2 s ; ∴ 2 = 1 meio de 4
= Quadrado de 2
4 = 4, 1 s ; ∴ 1 = 1 quarto de 4

■ ■
■ ■ ■ cinco ou 5 = 5, 1 s ; ∴ 1 = 1 quinto de 5

■ ■ ■
■ ■ ■ = seis ou 6 = { 2, 3s ; ∴ 3 = 1 meio / 3, 2s ; ∴ 2 = 1 terço / 6, 1s ; ∴ 1 = 1 sexto } de 6

■ ■ ■
■ ■ ■ ■ sete ou 7 = 7, 1 s ; ∴ 1 = 1 setimo de 7

■ ■ ■ ■
■ ■ ■ ■ = oito ou 8 = { 2, 4 s ; ∴ 4 = 1 meio / 4, 2 s ; ∴ 2 = 1 quarto / 8, 1 s ; ∴ 1 = 1 oitavo } de 8

■ ■ ■
■ ■ ■
■ ■ ■ nove ou 9 = 3, 3 s ; ∴ 3 = 1 terço de 9
= Quadrado de 3
9 = 9, 1 s ; ∴ 1 = 1 nono de 9

■ ■ ■ ■ ■
■ ■ ■ ■ ■ = dez ou 10 = { 2, 5s ; ∴ 5 = 1 meio / 5, 2s ; ∴ 2 = 1 quinto / 10, 1s ; ∴ 1 = 1 decimo } de 10

PRATICA. — Faça-se a pratica com **objectos**, que devem ser dispostos como os pequenos **quadrados** do «Quadro», destacando os numeros **multiplos** e os **factores** que os compoem.

NOTA — O signal ∴, de conclusão logica, lê-se : **portanto, logo,** etc

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO II

TABOADAS PROGRESSIVAS

TABOADA DE DOIS

■ ■ 1, (2)

1 + 1 = 2 2 — 1 — 1 = 0

2, 1 s = 2 2 = 2, 1 s

1 + ? = 2 ? ? + 1 = 2 ?

TABOADA DE TRES

■ ■ ■ 1, 2, (3)

1 + 1 + 1 = 3 3 — 1 — 1 — 1 = 0

3, 1 s = 3 3 = 3, 1 s

2 + 1 = 3 3 — 1 = 2

1 + 2 = 3 3 — 2 = 1

2 + ? = 3 ? 3 — ? = 2 ?

1 + ? = 3 ? 3 — ? = 1 ?

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO III

TABOADAS PROGRESSIVAS

TABOADA DE QUATRO

■■ | ■■ 1, 2, 3, (4)

1 + 1 + 1 + 1 = 4 4 — 1 — 1 — 1 — 1 = 0

4, 1 s = 4 4 = 4, 1 s

1

( )+?=4?

?+( )=4?

3 2

3 + 1 = 4 4 — 1 = 3

2 + 2 = 4 — 2 = 2

1 + 3 = 4 4 — 3 = 1

3

4-( )=?

4-?=( )?

2 1

TABOADA SUCCESSIVA

LIMITADA

(2)

1 + 2 + 1 = 4 4 — 1 — 2 = 1

2 + 2 = 4 4 — 2 — 2 = 0

2, 2 s = 4 4 = 2, 2 s

(3)

1 + 3 = 4 4 — 3 = 1

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO IV

TABOADAS PROGRESSIVAS

TABOADA DE CINCO

■■■■■ 1, 2, 3, 4, (5)

1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 5 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 = 0

5, 1 s = 5 5 = 5, 1 s

4

( )+?=5?

3 2

?+( )=5?

1

4 + 1 = 5 5 — 1 = 4

3 + 2 = 5 5 — 2 = 3

2 + 3 = 5 5 — 3 = 2

1 + 4 = 5 5 — 4 = 1

1

5-( )=?

2 3

5-?=( )?

4

TABOADA SUCCESSIVA

LIMITADA

(2)

1 + 2 + 2 = 5 5 — 2 — 2 = 1

2 + 2 + 1 = 5 5 — 1 — 2 = 2

(3)

1 + 3 + 1 = 5 5 — 1 — 3 = 1

2 + 3 = 5 5 — 3 = 2

(4)

1 + 4 = 5 5 — 4 = 1

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO V

TABOADAS PROGRESSIVAS

TABOADAS DE SEIS

■■■ | ■■■ 1, 2, 3, 4, 5, (6) ■■ | ■■ | ■■

5
2 ( )+?=6? 3
?+( )=6?
1 4

5 + 1 = 6	6 − 1 = 5
4 + 2 = 6	6 − 2 = 4
3 + 3 = 6	6 − 3 = 3
2 + 4 = 6	6 − 4 = 2
1 + 5 = 6	6 − 5 = 1

1
4 6−( )=? 3
6−?=( )?
5 2

TABOADA SUCCESSIVA

LIMITADA

(2)

1 + 2 + 2 + 1 = 6 6 − 1 − 2 − 2 − 1
2 + 2 + 2 = 6 6 − 2 − 2 − 2 = 0
3, 2 s = 6 6 = 3, 2 s

(3)

1 + 3 + 2 = 6 6 − 2 − 3 = 1
2 + 3 + 1 = 6 6 − 1 − 3 = 2
3 + 3 = 6 6 − 3 − 3 = 0
2, 3 s = 6 6 = 2, 3 s

(4)

1 + 4 + 1 = 6 6 − 1 − 4 = 1
2 + 4 = 6 6 − 4 = 2

(5)

1 + 5 = 6 6 − 5 = 1

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO VI

TABOADAS PROGRESSIVAS

TABOADA DE SETE

■■■■■■■ 1, 2, 3, 4, 5, 6, (7)

6
3 4
( )+?=7?
?+( )=7? 2
5
1

6 + 1 = 7	7 − 1 = 6
5 + 2 = 7	7 − 2 = 5
4 + 3 = 7	7 − 3 = 4
3 + 4 = 7	7 − 4 = 3
2 + 5 = 7	7 − 5 = 2
1 + 6 = 7	7 − 6 = 1

1
4 3
7−( )=?
2 7−?=( )?
6 5

TABOADA SUCCESSIVA

LIMITADA

(2)

1 + 2 + 2 + 2 = 7 7 − 2 − 2 − 2 = 1
2 + 2 + 2 + 1 = 7 7 − 1 − 2 − 2 = 2

(3)

1 + 3 + 3 = 7 7 − 3 − 3 = 1
2 + 3 + 2 = 7 7 − 2 − 3 = 2
3 + 3 + 1 = 7 7 − 1 − 3 = 3

(4)

1 + 4 + 2 = 7 7 − 2 − 4 = 1
2 + 4 + 1 = 7 7 − 1 − 4 = 2
3 + 4 = 7 7 − 4 = 3

(5)

1 + 5 + 1 = 7 7 − 1 − 5 = 1
2 + 5 = 7 7 − 5 = 2

(6)

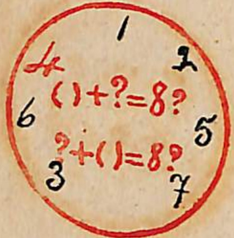
1 + 6 = 7 7 − 6 = 1

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

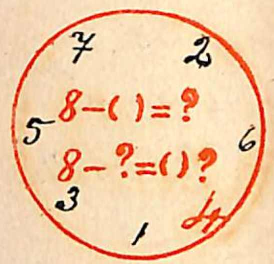
QUADRO VII — TABOADAS PROGRESSIVAS

TABOADA DE OITO

▪▪▪▪ | ▪▪▪▪ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, (8) ▪▪ | ▪▪ | ▪▪ | ▪▪



7 + 1 = 8	8 − 1 = 7
6 + 2 = 8	8 − 2 = 6
5 + 3 = 8	8 − 3 = 5
4 + 4 = 8	8 − 4 = 4
3 + 5 = 8	8 − 5 = 3
2 + 6 = 8	8 − 6 = 2
1 + 7 = 8	8 − 7 = 1



TABOADA SUCCESSIVA

LIMITADA

(2)

1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8
2 + 2 + 2 + 2 = 8
4, 2 s = 8

8 − 1 − 2 − 2 − 2 = 1
8 − 2 − 2 − 2 − 2 = 0
8 = 4, 2 s

(3)

1+3+3+1=8
2+3+3=8
3+3+2=8

8−1−3−3=1
8−3−3=2
8−2−3=3

(4)

1+4+3=8
2+4+2=8
3+4+1=8
4+4=8
2, 4 s = 8

8−3−4=1
8−2−4=2
8−1−4=3
8−4−4=0
8 = 2,4 s

(5)

1+5+2=8
2+5+1=8
3+5=8

8−2−5=1
8−1−5=2
8−5=3

(6)

1+6+1=8
2+6=8

8−1−6=1
8−6=2

(7)

1+7=8

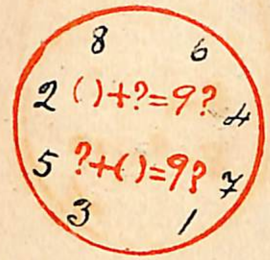
8−7=1

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

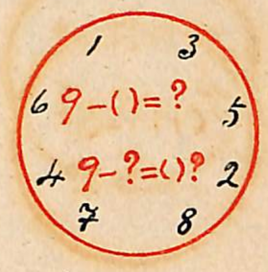
QUADRO VIII — TABOADAS PROGRESSIVAS

TABOADA DE NOVE

▪▪▪ | ▪▪▪ | ▪▪▪ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (9)



8 + 1 = 9	9 − 1 = 8
7 + 2 = 9	9 − 2 = 7
6 + 3 = 9	9 − 3 = 6
5 + 4 = 9	9 − 4 = 5
4 + 5 = 9	9 − 5 = 4
3 + 6 = 9	9 − 6 = 3
2 + 7 = 9	9 − 7 = 2
1 + 8 = 9	9 − 8 = 1



TABOADA SUCCESSIVA

LIMITADA

(2)

1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9
2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9

9 − 2 − 2 − 2 − 2 = 1
9 − 1 − 2 − 2 − 2 = 2

(3)

1+3+3+2=9
2+3+3+1=9
3+3+3=9
3, 3 s = 9

9−2−3−3=1
9−1−3−3=2
9−3−3=0
9=3, 3 s

(4)

1+4+4=9
2+4+3=9
3+4+2=9
4+4+1=9

9−4−4=1
9−3−4=2
9−2−4=3
9−1−4=4

(5)

1+5+3=9
2+5+2=9
3+5+1=9
4+5=9

9−3−5=1
9−2−5=2
9−1−5=3
9−5=4

(6)

1+6+2=9
2+6+1=9
3+6=9

9−2−6=1
9−1−6=2
9−6=3

(7)

1+7+1=9
2+7=9

9−1−7=1
9−7=2

(8)

1+8=9

9−8=1

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO IX

TABOADAS PROGRESSIVAS

TABOADA DE DEZ

NUMEROS COMPLEMENTARES

■■■■■ | ■■■■■ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10) ■■ | ■■ | ■■ | ■■ | ■■

6 9 7 8 ( )+?=10? 2 5 ?+( )=10? 4 3 1

9 + 1 = 10
8 + 2 = 10
7 + 3 = 10
6 + 4 = 10
5 + 5 = 10
4 + 6 = 10
3 + 7 = 10
2 + 8 = 10
1 + 9 = 10

10 − 1 = 9
10 − 2 = 8
10 − 3 = 7
10 − 4 = 6
10 − 5 = 5
10 − 6 = 4
10 − 7 = 3
10 − 8 = 2
10 − 9 = 1

1 3 4 10−( )=? 5 2 10−?=( )? 8 7 9 6

TABOADA SUCCESSIVA

LIMITADA

(2)

1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 10
2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10
5,2 s = 10

10 − 1 − 2 − 2 − 2 − 2 = 1
10 − 2 − 2 − 2 − 2 2 = 0
10 = 5,2 s

(3)

1 + 3 + 3 + 3 = 10
2 + 3 + 3 + 2 = 10
3 + 3 + 3 + 1 = 10

10 − 3 − 3 − 3 = 1
10 − 2 − 3 − 3 = 2
10 − 1 − 3 − 3 = 3

(4)

1 + 4 + 4 + 1 = 10
2 + 4 + 4 = 10
3 + 4 + 3 = 10
4 + 4 + 2 = 10

10 − 1 − 4 − 4 = 1
10 − 4 − 4 = 2
10 − 3 − 4 = 3
10 − 2 − 4 = 4

(5)

1 + 5 + 4 = 10
2 + 5 + 3 = 10
3 + 5 + 2 = 10
4 + 5 + 1 = 10
5 + 5 = 10
2, 5 s = 10

10 − 4 − 5 = 1
10 − 3 − 5 = 2
10 − 2 − 5 = 3
10 − 1 − 5 = 4
10 − 5 − 5 = 0
10 = 2, 5 s

(6)

1 + 6 + 3 = 10
2 + 6 + 2 = 10
3 + 6 + 1 = 10
4 + 6 = 10

10 − 3 − 6 = 1
10 − 2 − 6 = 2
10 − 1 − 6 = 3
10 − 6 = 4

(7)

1 + 7 + 2 = 10
2 + 7 + 1 = 10
3 + 7 = 10

10 − 2 − 7 = 1
10 − 1 − 7 = 2
10 − 7 = 3

(8)

1 + 8 + 1 = 10
2 + 8 = 10

10 − 1 − 8 = 1
10 − 8 = 2

(9)

1 + 9 = 10

10 − 9 = 1

COMPLEMENTOS — Dois numeros que se completam para formar a **primeira dezena, DEZ**, ou outra unidade qualquer **immediatamente superior** á de ordem mais elevada desses numeros, se dizem **complementos** um do outro, ou **complementares.**

Insista-se particularmente no **conhecimento perfeito** das combinações desta taboada, para que o alumno se habilite a comprehender e a effectuar os calculos pelo «METHODO DOS COMPLEMENTOS», afim de **facilita-los.**

NUMERAÇÃO DECIMAL

PRIMEIRA PARTE

FORMAÇÃO DOS NUMEROS — NUMERAÇÃO FALADA E ESCRITA

(DESDE 1 ATE' 30)

ARITHMETICA é a parte elementar da **sciencia** dos numeros e **a arte** de calcular.

QUANTIDADE é tudo o que se póde **contar, medir, pesar**, ou **calcular.**

UNIDADE é **um**, uma só coisa ou objecto.

Unidade **inteira** é uma só coisa **inteira, um todo indiviso.**

NUMERO é **uma** ou **mais unidades** da **mesma especie** ou do **mesmo nome**, quando **contadas** ou **calculadas.**

Numero **inteiro** é um numero composto de **unidades inteiras.**

Numero **abstracto** é aquelle que é usado **sem o nome** da sua unidade.

Numero **concreto** é aquelle que é usado **com o nome** da sua unidade.

Os numeros são **enunciados** por meio de **palavras**, e **representados** por meio de caracteres chamados **algarismos.**

NUMERAÇÃO é o processo usado para **enunciar e representar** os numeros por meio de um **numero limitado de palavras, — "numeração falada"**, e algarismos. — **"numeração escrita"**, o que constitúe um **"systema de numeração".**

Contem-se nove objectos da mesma especie e **escrevam-se** os **nomes dos numeros** e os **numeros representados** pelos algarismos respectivos, ou **numeros simples**, com o seu valor expresso em **unidades simples**, do seguinte modo:

1 = uma	unidade	simples, ou	**um**	6 = seis	»	»	» **seis**
2 = duas	uninades	»	» **dois**	7 = sete	»	»	» **sete**
3 = tres	»	»	» **tres**	8 = oito	»	»	» **oito**
4 = quatro	»	»	» **quatro**	9 = nove	»	»	» **nove**
5 = cinco	»	»	» **cinco**				

NOTA: O signal (=), ou **signal de igualdade**, lê-se IGUAL A...

Os **algarismos** que representam os **numeros simples, por terem valor**, chamam-se **significativos**, em opposição a um outro, o **zero** ou **nada (0), que não tem valor** ou **insignificativo**, mas que **auxilia a representar** os numeros **acima de 9**, os quaes são escritos com **mais de um algarismo, e por isso** são chamados **compostos.**

A unidade póde ser **simples** ou **collectiva.**

UNIDADE SIMPLES, é **um, uma** só **coisa inteira**, isoladamente.

UNIDADE COLLECTIVA é um **grupo** de unidades da **mesma especie**, considerada como uma nova **unidade**, assim como, **par, dezena, duzia, cento** ou **centena, milheiro** ou **milhar, conto** ou **milhão.**

Contam-se unidades collectivas como se fossem **unidades simples.**

ORDEM ou CASA é o lugar occupado por um **algarismo em um numero composto.**

As **ordens** ou **casas** contam-se **da direita para a esquerda**, occupando o primeiro algarismo, **á direita**, a casa das **unidades simples** ou da **primeira ordem.**

FUNCÇÃO DO ZERO. O **zero** indica que **não** ha **unidades** na casa por elle occupada, **conserva-lhes, porém, o nome, para exprimir o valor do algarismo ou algarismos, á esquerda** delle.

PRIMEIRA DEZENA

Juntando **uma unidade** ao numero 9, obtem-se uma **unidade collectiva de segunda ordem** ou uma **dezena**, que equivale a **dez** unidades simples, ou ao numero **dez (10)**, que é representado pelo algarismo 1, á direita do qual se escreve um **zero** que indica a **falta** de unidades simples ou da **primeira ordem, conservando-lhes porém o nome** para exprimir o valor do algarismo das **dezenas**, á esquerda, isto é: **9 unidades + 1 unidade = 10 (dez)** unidades = **dezena** ou **dez**.....

NOTA: O signal (+), ou signal de **addição**, lê-se — MAIS.

BASE de um systema de numeração é o numero que indica **quantas unidades** de uma **ordem qualquer** são necessarias para formar **uma unidade immediatamente superior.**

O systema de numeração geralmente adoptado chama-se — "**systema decimal**" por ter por base o numero **10**, isto é, por serem as **unidades collectivas** das **diversas ordens** formadas de **dez em dez**, ou na **razão decupla**.

LEI FUNDAMENTAL NA NUMERAÇÃO FALADA: **Dez unidades de uma ordem qualquer formam uma de ordem immediatamente superior**, e, reciprocamente, **uma unidade de uma ordem qualquer vale dez de ordem immediatamente inferior.**

LEI FUNDAMENTAL DA NUMERAÇÃO ESCRITA: **Um algarismo qualquer escrito á esquerda de um outro, representa unidades dez vezes maior que as desse outro**, e, reciprocamente, — **um algarismo qualquer escrito á direita de um outro, representa unidades dez vezes menores que as desse outro.**

Assim, dez **unidades simples** ou de **primeira ordem**, formam **uma dezena** ou **uma unidade de segunda ordem**, e, vice-versa, **uma dezena** vale **dez unidades simples.**

Igualmente, em o numero 10, o algarismo 1, **á esquerda**, representa **uma dezena** ou **unidade collectiva de segunda ordem, dez vezes maior** que as representadas pelo zero, — **á direita**, isto é, **unidades simples**, ou de **primeira ordem**, e, vice-versa, o **zero, á direita**, representa **unidades simples**, ou **de primeira ordem, dez vezes menores** que a **unidade** de **segunda** ordem representada pelo algarismo 1, ou **uma dezena, á esquerda.**

Os **dez algarismos** usados no **systema decimal** chamam-se **arabicos**, por terem sido introduzidos na Europa, no seculo XIII, pelos **arabes**, que os importaram da India, onde são usados **ha mais de dois mil annos.**

Os **dez algarismos**, ou **numeros simples**, chamam-se tambem **digitos** (dedos) por indicarem a **contagem — pelos dedos.**

Os algarismos teem **dois valores: — absoluto** e **relativo.**

VALOR ABSOLUTO é o valor que o algarismo tem **pela sua fórma, isoladamente**, representando **unidades simples.**

VALOR RELATIVO é o valor que o algarismo tem conforme a **ordem** ou casa que occupa em um **numero composto**, em relação aos demais algarismos do numero.

Assim, em o numero 10, o algarismo 1 tem o **valor relativo** de **uma dezena** ou dez **unidades** simples, e, **isoladamente**, representa **uma unidade simples**, ou simplesmente **uma unidade**, ou **um.**

O valor relativo de cada um dos algarismos que entram na composição de um **numero**, é **expresso representando sempre — unidades simples**: — assim, o numero 10 representa **dez unidades simples, valor relativo expresso** do algarismo 1.

Juntando ao numero 10, ou **primeira dezena, uma unidade** successivamente, ou **cada um** dos **numeros simples**, successivamente, e escrevendo cada um dos **algarismos significativos** no lugar do **zero** da casa das **unidades** da primeira dezena (10), obteem-e os **nove numeros seguintes compostos de uma dezena e de unidades, cujos nomes** são formados combinando o nome dez com o nome **de cada um dos numeros simples**, ligados pela approximativa **e**, excepto os **cinco primeiros** que são derivados contractos, a saber: —

1	dezena	+1	unidade	=(10+1)	unidades	=11	(onze)
1	"	+2	unidades	=(10+2)	"	=12	(doze)
1	"	+3	"	=(10+3)	"	=13	(treze)
1	"	+4	"	=(10+4)	"	=14	(quatorze)
1	"	+5	"	=(10+5)	"	=15	(quinze)
1	"	+6	"	=(10+6)	"	=16	(dezeseis)
1	"	+7	"	=(10+7)	"	=17	(dezesete)
1	"	+8	"	=(10+8)	"	=18	(dezoito)
1	"	+9	"	=(10+9)	"	=19	(dezenove)

Inverta-se, **decompondo** cada um dos numeros em uma dezena e **unidades.**

SEGUNDA DEZENA

Juntando **uma unidade** ao numero 19, completam-se **duas unidades collectivas** de segunda **ordem**, ou **duas dezenas**, equivalendo a vinte **unidades** ou ao numero **vinte (20)** que é representado pelo algarismo 2, das **dezenas**, á **direita** do qual se escreve um zero que indica **a falta de unidades simples** ou de **primeira ordem**, como se fez para a **primeira dezena**, 10, isto é: —

19 unidades+1 unidade=20 (**vinte**) unidades=**2 dezenas** ou vinte.

Inverta-se, decompondo **duas dezenas** em **unidades.**

PRATICA

Formação dos Numeros entre a Primeira Dezena e a Segunda.

Tome-se um numero qualquer de objectos, entre dez e vinte: contem-se **dez unidades**, ou uma **dezena**, que se escreve, 10; contem-se as unidades **restantes**, cujo numero se junta a 10, escrevendo em igualdade, á direita, o numero composto do algarismo 1 das **dezenas** e do algarismo das **unidades**. Ex.:

1 dezena+7 unidades=10 unidades+7 unidades=17 unidades.

Inverta-se, **decompondo** os numeros em **dezenas** e **unidades.**

Juntando ao numero 20 ou segunda dezena, **uma unidade**, successivamente, ou os nove **numeros** simples, successivamente, e escrevendo cada um dos **nove algarismos** no lugar do **zero** das **casas das unidades** da **segunda dezena (20)**, obteem-se os **nove numeros seguintes**, compostos de **duas dezenas** e de **unidades**, cujos **nomes** são formados ligando a vinte os nomes de cada um dos **nove numeros simples** por meio da conjuncção **e**, a saber:

2 dezenas	+1	unidade	=(20+1)	unidades	=21 (vinte e um)
2 "	+2	"	=(20+2)	"	=22 (vinte e dois)
2 "	+3	"	=(20+3)	"	=23 (vinte e tres)
"		"		"	
"		"		"	
"		"		"	
"		"		"	
2 "	+9	"	=(20+9)	"	=29 (vinte e nove)

TERCEIRA DEZENA

Juntando uma unidade ao numero 29, completam-se **tres unidades collectivas** de **segunda ordem** ou **tres dezenas**, equivalendo a **trinta unidades**, ou ao numero **trinta** (30), que é representado pelo algarismo 3, das **dezenas**, á direita do qual se escreve um **zero** que indica a **falta** de unidades da **primeira ordem**, como se fez para a **primeira dezena**, 10, e para a **segunda**, 20, isto é:

29 unidades+1 unidade=30 unidades=3 dezenas ou **trinta.**

Inverta-se, decompondo **tres dezenas** em **unidades.**

PRATICA

Formação dos Numeros entre a Segunda Dezena e a Terceira.

Tome-se um numero qualquer de objectos entre **vinte** e **trinta**: contem-se de **dez em dez**, formando **duas** dezenas ou **vinte** unidades, ou o numero 20, que se escreve; conte-se a "sobra" de **unidades**, cujo numero se junta a 20, escrevendo em igualdade, á **direita**, o numero composto do algarismo 2, das **dezenas**, e do algarismo das **unidades**. — Ex.:

2 dezenas+6 unidades=20 unidades+6 unidades=26 unidades.

Inverta-se, **decompondo** os numeros em **dezenas** e **unidades.**

NOTA: O professor ou professora poderá arranjar **pequenos saccos redondos** cerrados por um cordel, de **tres tamanhos**, sendo **dez** para as **dezenas**, **dez** para as **centenas**, e **um** para **um milhar**, o que bastará para a explicação e comprehensão da "formação" e "decomposição" das **unidades collectivas superiores**, e dos numeros compostos dessas unidades com "sobra" de **unidades inferiores.**

Cada um conterá **uma dezena**, **uma centena** e **um milhar**, de objectos, respectivamente, — **grãos de feijão, de milho, olhos de cabra**, etc., ou então, preparando o alumno para a comprehensão do **systema metrico**, encommendará ao marceneiro **vinte** pequenos **cubos** de madeira (**unidades**) de **um centimetro de aresta**, dez pequenas **barras** de **um decimetro** de comprimentro e **um centimetro quadrado** de secção (**dezenas**) cada uma dividida em **dez centimetros cubicos**, (uma dezena), separados por meio de traços a fogo; **dez** pequenos quadros de **um decimetro de lado** e de **um centimetro de espessura** (centenas) divididos do mesmo modo, a fogo, em **cem centimetros cubicos** (**uma centena**); e **um cubo de um decimetro de aresta** dividido do mesmo modo em **mil centimetros cubicos (um milhar).**

ADDIÇÃO

QUADRO X

METHODO DOS COMPLEMENTOS — SOMMAS REDUZIDAS

Si as **sommas** de dois **numeros simples** são **menores que 10**, isto é, si qualquer delles é **menor que o complemento do outro**, ou **igual**, só podem ser aprendidas praticamente pelo **processo puramente mnemonico**; mas, si essas sommas são **maiores que 10**, isto é, si qualquer dos numeros é **maior que o complemento do outro**, podem ser **reduzidas** a subtracções mais simples, facilitando o calculo, de accordo com a seguinte: —

PROPRIEDADE: Quando a **somma** de dois **numeros simples** é **maior que 10**, isto é, quando qualquer delles é **maior que o complemento do outro**, essa somma é igual a 10 **mais a differença** entre qualquer delles e o **complemento do outro.**

Demonstração: — Seja a somma, 9+8 ou 8+9.

Juntando a 9, o seu **complemento**, 1, e subtrahindo-o de 8; ou, juntando a 8, o seu **complemento**, 2, e subtrahindo-o de 9, as duas sommas **não se alteram**, e tem-se, effectuando:

(1) 9+8=(9+1)+(8—1)=10+7=dez e sete=17.

(2) 8+9=(8+2)+(9—2)=10+7=dez e sete=17.

Outra demonstração:

Escrevendo em lugar de 9, o seu valor, 10—1, ou, em lugar de 8, o seu valor, 10—2, invertendo e reduzindo, tem-se:

(1) 9+8=10—1+8=10+(8—1)=10+7=dez e **sete**=17.

(2) 8+9=10—2+9=10+(9—2)=10+7=dez e **sete**=17.

APPLICAÇÃO: Na pratica. comquanto a "propriedade" seja **geral**, e por ser mais simples a subtracção com diminuendos e diminuidores **menores**, é preferivel seguir as taboadas de 9, 8, 7, ou 6, isto é, basta juntar a 10 a differença entre o **numero menor** e **1, 2, 3**, ou **4**, **complementos** respectivos de 9, 8, 7, e 6, ficando a taboada de 5 incluida nas demais.

Uma vez obtida a differença, que é o **algarismo das unidades** da somma, este, por **semelhança de nome** e comparação, **suggere** a somma, isto é, as **differenças** desde 1 até 8, **suggerem** as **sommas**, desde **11 até 18.**

PRATICA DE NUMEROS CONCRETOS

Tome-se um numero qualquer de objectos, desde 11 até 18, inclusive, dispostos em **duas parcellas**; tire-se de uma dellas, de preferencia, da menor, o complemento da outra, e junte-se a esta: a somma das duas parcellas é, assim, igual a **10 mais a differença entre uma dellas e o complemento da outra.**

A differença, que é, em qualquer dos casos, o algarismo das unidades da somma, **suggere** esta, por **semelhança de nome e comparação,** isto é, os **numeros simples**, desde 1 até 8 suggerem as **sommas**, desde 11 até 18.

Escrevam-se, em seguida, os numeros que **representam** as parcellas, e opere-se como se vê no "Quadro", de accordo com a operação de concretos.

Ex.:

(1)	(2)
9 +7	7 +9
+1,—1	+3,—3
= 10+6	= 10 +6
dez e seis	dez e seis

ADDIÇÃO

QUADRO X

TABOADAS REDUZIDAS

REDUCÇÃO das **sommas** de **numeros simples**, desde 11 até 18 inclusive, ás sommas correspondentes de **uma dezena** com a **differença entre dois numeros simples**, pelo «METHODO DOS COMPLEMENTOS»

(2)

$$\left.\begin{array}{c} 2\ +9\\ (+8,\ -8)\\ \hline 10\ +1\end{array}\right\}=11$$

(9)

$$\left.\begin{array}{c} 9\ +2\\ (+1,\ -1)\\ \hline 10\ +1\end{array}\right\}=11$$

$$\left.\begin{array}{c} 9\ +3\\ (+1,\ -1)\\ \hline 10\ +2\end{array}\right\}=12$$

$$\left.\begin{array}{c} 9\ +4\\ (+1,\ -1)\\ \hline 10\ +3\end{array}\right\}=13$$

$$\left.\begin{array}{c} 9\ +5\\ (+1,\ -1)\\ \hline 10\ +4\end{array}\right\}=14$$

$$\left.\begin{array}{c} 9\ +6\\ (+1,\ -1)\\ \hline 10\ +5\end{array}\right\}=15$$

$$\left.\begin{array}{c} 9\ +7\\ (+1,\ -1)\\ \hline 10\ +6\end{array}\right\}=16$$

$$\left.\begin{array}{c} 9\ +8\\ (+1,\ -1)\\ \hline 10\ +7\end{array}\right\}=17$$

$$\left.\begin{array}{c} 9\ +9\\ (+1,\ -1)\\ \hline 10\ +8\end{array}\right\}=18$$

(3)

$$\left.\begin{array}{c} 3\ +8\\ (+7,\ -7)\\ \hline 10\ +1\end{array}\right\}=11$$

$$\left.\begin{array}{c} 3\ +9\\ (+7,\ -7)\\ \hline 10\ +2\end{array}\right\}=12$$

(8)

$$\left.\begin{array}{c} 8\ +3\\ (+2,\ -2)\\ \hline 10\ +1\end{array}\right\}=11$$

$$\left.\begin{array}{c} 8\ +4\\ (+2,\ -2)\\ \hline 10\ +2\end{array}\right\}=12$$

$$\left.\begin{array}{c} 8\ +5\\ (+2,\ -2)\\ \hline 10\ +3\end{array}\right\}=13$$

$$\left.\begin{array}{c} 8\ +6\\ (+2,\ -2)\\ \hline 10\ +4\end{array}\right\}=14$$

$$\left.\begin{array}{c} 8\ +7\\ (+2,\ -2)\\ \hline 10\ +5\end{array}\right\}=15$$

$$\left.\begin{array}{c} 8\ +8\\ (+2,\ -2)\\ \hline 10\ +6\end{array}\right\}=16$$

$$\left.\begin{array}{c} 8\ +9\\ (+2,\ -2)\\ \hline 10\ +7\end{array}\right\}=17$$

(4)

$$\left.\begin{array}{c} 4\ +7\\ (+6,\ -6)\\ \hline 10\ +1\end{array}\right\}=11$$

$$\left.\begin{array}{c} 4\ +8\\ (+6,\ -6)\\ \hline 10\ +2\end{array}\right\}=12$$

$$\left.\begin{array}{c} 4\ +9\\ (+6,\ -6)\\ \hline 10\ +3\end{array}\right\}=13$$

(7)

$$\left.\begin{array}{c} 7\ +4\\ (+3,\ -3)\\ \hline 10\ +1\end{array}\right\}=11$$

$$\left.\begin{array}{c} 7\ +5\\ (+3,\ -3)\\ \hline 10\ +2\end{array}\right\}=12$$

$$\left.\begin{array}{c} 7\ +6\\ (+3,\ -3)\\ \hline 10\ +3\end{array}\right\}=13$$

$$\left.\begin{array}{c} 7\ +7\\ (+3,\ -3)\\ \hline 10\ +4\end{array}\right\}=14$$

$$\left.\begin{array}{c} 7\ +8\\ (+3,\ -3)\\ \hline 10\ +5\end{array}\right\}=15$$

$$\left.\begin{array}{c} 7\ +9\\ (+3,\ -3)\\ \hline 10\ +6\end{array}\right\}=16$$

(5)

$$\left.\begin{array}{c} 5\ +6\\ (+5,\ -5)\\ \hline 10\ +1\end{array}\right\}=11$$

$$\left.\begin{array}{c} 5\ +7\\ (+5,\ -5)\\ \hline 10\ +2\end{array}\right\}=12$$

$$\left.\begin{array}{c} 5\ +8\\ (+5,\ -5)\\ \hline 10\ +3\end{array}\right\}=13$$

$$\left.\begin{array}{c} 5\ +9\\ (+5,\ -5)\\ \hline 10\ +4\end{array}\right\}=14$$

(6)

$$\left.\begin{array}{c} 6\ +5\\ (+4,\ -4)\\ \hline 10\ +1\end{array}\right\}=11$$

$$\left.\begin{array}{c} 6\ +6\\ (+4,\ -4)\\ \hline 10\ +2\end{array}\right\}=12$$

$$\left.\begin{array}{c} 6\ +7\\ (+4,\ -4)\\ \hline 10\ +3\end{array}\right\}=13$$

$$\left.\begin{array}{c} 6\ +8\\ (+4,\ -4)\\ \hline 10\ +4\end{array}\right\}=14$$

$$\left.\begin{array}{c} 6\ +9\\ (+4,\ -4)\\ \hline 10\ +5\end{array}\right\}=15$$

ADDIÇÃO

QUADRO XI

DESCRIPÇÃO E PRATICA

Cada taboada parcial começa com a somma do seu numero basico, com 1, e termina com a somma de parcellas **iguaes** a esse numero (**producto** desse numero por 2), invertida em cada uma a ordem das parcellas **differentes**, auxiliando assim o conhecimento das sommas do **maior** com o **menor**, o das sommas do **menor** com o **maior**.

Mostre-se que a inversão das parcellas não altera a somma. Faça-se a pratica das addições **acima de** 10, indicando-as **ordenadamente** e **salteado**, a partir da taboada de 9, para que os alumnos **por si mesmos** descubram as sommas, com o auxilio do "methodo dos complementos" (Quadro X), até que fiquem perfeitamente correntes na sua applicação, para depois serem as sommas decoradas.

TABOADA DE 10

As sommas de 10 (uma dezena) com os **numeros simples**, desde 1 até 9, inclusive, fazem-se substituindo o **zero** da casa das unidades de 10, por esses numeros, successivamente, o que dá as sommas respectivas, desde 11 até 19, comparadas as sommas, **nomes** e **numeros**, com os numeros simples correspondentes.

A somma de **duas dezenas**, 10+10=20, faz-se por comparação com a somma de **duas unidades**, 1+1—2, exprimindo os numeros em **dezenas e unidades**.

ADDIÇÃO

QUADRO XI

TABOADAS CORRELATIVAS

PARCELLAS, DESDE 1 ATE' 9

SOMMAS, DESDE 2 ATE' 18

(1)

1+1=2

(2)

2+1=3 1+2=3

2+2=4

(3)

3+1=4 1+3=4

3+2=5 2+3=5

3+3=6

(4)

4+1=5 1+4=5

4+2=6 2+4=6

4+3=7 3+4=7

4+4=8

(5)

5+1=6 1+5=6

5+2=7 2+5=7

5+3=8 3+5=8

5+4=9 4+5=9

5+5=10

(6)

6+1=7 1+6=7

6+2=8 2+6=8

6+3=9 3+6=9

6+4=10 4+6=10

6+5=11 5+6=11

6+6=12

(7)

7+1=8 1+7=8

7+2=9 2+7=9

7+3=10 3+7=10

7+4=11 4+7=11

7+5=12 5+7=12

7+6=13 6+7=13

7+7=14

(8)

8+1=9 1+8=9

8+2=10 2+8=10

8+3=11 3+8=11

8+4=12 4+8=12

8+5=13 5+8=13

8+6=14 6+8=14

8+7=15 7+8=15

8=8=16

(9)

9+1=10 1+9=10

9+2=11 2+9=11

9+3=12 3+9=12

9+4=13 4+9=13

9+5=14 5+9=14

9+6=15 6+9=15

9+7=16 7+9=16

9+8=17 8+9=17

9+9=18

TABOADA DE DEZ

10+1=11 1+10=11

10+2=12 2+10=12

10+3=13 3+10=13

10+4=14 4+10=14

10+5=15 5+10=15

6+10=16 10+6=16

7+10=17 10+7=17

8+10=18 10+8=18

9+10=19 10+9=19

10+10=20

SUBTRACÇÃO

QUADRO XII

METHODO DOS COMPLEMENTOS — SUBTRACÇÕES REDUZIDAS

A subtracção de numeros simples, entre si, é aprendida com a pratica, sómente com o auxilio da memoria, mas para subtrahir um numero simples de um numero composto, de 10 até 18, póde-se **reduzir** a subtracção a uma **addição** mais **simples**, simplificando o calculo, por meio da seguinte —

PROPRIEDADE: **Subtrahir um numero simples, de um numero composto** de dois algarismos, de 10 até 18, equivale a **sommar** com o **algarismo das unidades do diminuendo composto, o complemento do diminuidor simples.**

Demonstração: seja a subtracção, 18—9.

Decompondo o diminuendo em **dezenas** e **unidades**, invertendo e reduzindo, tem-se:

$$18-9=10+8-9=8+10-9=8+(10-9)=8+\underset{*}{1}=9.$$

Outra demonstração:

Decompondo o diminuendo em **dezenas** e **unidades**, 10+8; juntando-se-lhe 1, **complemento** do diminuidor 9, e ao **proprio diminuidor**, a differença **não se altera**, e tem-se, operando o segundo termo, e reduzindo:

$$18-9=(10+8+1)-(9+1)=10+8+1-10=8+\underset{*}{1}=9.$$

APPLICAÇÃO: Comquanto a "propriedade" seja geral, na pratica ditsinguem-se **dois casos**, a saber:

1.º Si o algarismo das **unida'des** do diminuendo é **maior** que o diminuidor simples, isto é, si o resto é um **numero composto**, póde-se tambem fazer a subtracção **por comparação com a de numeros simples**, como se vê no "QUADRO XIV".

2.º Si o algarismo das unidades do diminuendo é **menor** que o diminuidor simples, isto é, si o resto é um **numero simples** (taboada de subtrahir), applica-se a "propriedade", simplificando o calculo, reduzindo-o a uma **simples somma, no limite de 10**, isto é, junta-se ao algarismo das **unidades** do diminuendo, um dos numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ou 9, respectivamente **complementos** dos diminuidores 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, ou 1, como se vê no "QUADRO XII".

Como se vê, no caso do diminuidor 5, esse numero é sommado **directamente** com o algarismo das unidades do diminuendo, por ser **metade de 10**, ou por ser o **complemento de si proprio.**

Preparando o espirito do alumno para os calculos posteriores, para facilita-los, tendo em vista a maior difficuldade da subtracção, ha conveniencia em empregar **todos os connectivos admissiveis** nessa operação, depois de ter usado o verbo **tirar** ou outro equivalente, a começar pelo connectivo **menos**, nome do signal correspondente, o qual indica a subtracção **directa**, usado após o nome do algarismo do **diminuendo**; em seguida será usado o connectivo **de** (tirado **de**), após o nome do algarismo do **diminuidor**, o qual indica tambem a subtracção **directa**; por ultimo, serão usados os connectivos **para**, e **e**, na sua ordem, ambos indicando a subtracção **indirecta**, empregados após o nome do algarismo do **diminuidor**.

Em qualquer dos casos, a pratica deve ser feita empregando esses connectivos repetidamente nas "arguições", antes que o alumno os empregue por si mesmo, com a liberdade de preferir aquelle em cujo uso achar mais facilidade.

Na subtracção **indirecta** pelo "methodo dos complementos", o **mais simples de todos**, quando o algarismo das unidades do diminuendo composto é **menor** que o seu correspondente do diminuidor, que é o caso **mais difficil**, emprega-se o connectivo **e, de sommar**, após o nome do algarismo do **diminuendo** seguido do nome do **complemento** do algarismo correspondente do **diminuidor.**

Obs.: A applicação do "**methodo dos complementos**" póde tambem ser generalizada, estendendo-se ás subtracções de numeros simples, entre si, juntando ao numero **maior** o **complemento** do **menor**: neste caso, o resto é o **algarismo das unidades** do numero composto obtido por essa somma, não havendo, porém, vantagem nessa operação, visto como essas subtracções directas são as unicas aprendidas de cór, e por demais simples, dispensando, por isso, outro qualquer auxilio.

Demonstração: Seja 8—3, a subtracção a effectuar.

Juntando 7, complemento do diminuidor, a ambos os termos, e reduzindo, tem-se:

$$8-3=(8+7)-(3+7)=\underset{*}{1}5-10=\underset{*}{5}.$$

PRATICA DE NUMEROS CONCRETOS

Tome-se para diminuendo um numero qualquer de objectos, desde 11 até 18, inclusivé; decomponha-se em uma **dezena** (10) e **unidades**; tome-se um diminuidor qualquer **maior** que o numero de **unidades** do diminuendo, e subtraia-se de 10: o resultado, que é o **complemento do diminuidor, sommado** com as **unidades** do diminuendo dá a **differença** entre os dois numeros e objectos.

Escrevam-se, em seguida, os numeros que **representam** o diminuendo e o diminuidor, e opere-se como se vê no "Quadro", de accordo com a operação de concretos, ou como no exemplo seguinte:

1)
$$\begin{array}{rl} 15 = & 10+5 \\ -\ 7 = & -7 \\ \hline (8) = & 3+5=5+3=8. \end{array}$$

ou, 2) $15-7=10+5-7=10-7+5=(10-7)+5=\underset{*}{3}+5=5+\underset{*}{3}=8.$

No caso do diminuidor 5, basta sommar o algarismo das unidades do diminuendo com 5, por ser este numero complemento de si proprio:

Ex.:

$$\begin{array}{rl} 13 = & 10+3 \\ -\ 5 = & -5 \\ \hline (8) = & 5+3=3+5=8. \end{array}$$

ou, $13-5=10+3-5=10-5+3=(10-5)+3=5+3=3+5=8.$

SUBTRACÇÃO

QUADRO XII

TABOADAS REDUZIDAS

REDUCÇÃO das subtracções de numeros simples, de numeros compostos desde 11 até 18, em que o algarismo das unidades é menor que o diminuidor simples a sommas correspondentes de numeros simples pelo «METHODO DOS COMPLEMENTOS».

(2)

$\left.\begin{array}{c}11-2\\1+8\\10\end{array}\right\}=9$

(9)

$\left.\begin{array}{c}11-9\\1+1\\10\end{array}\right\}=2$

$\left.\begin{array}{c}12-9\\2+1\\10\end{array}\right\}=3$

$\left.\begin{array}{c}13-9\\3+1\\10\end{array}\right\}=4$

$\left.\begin{array}{c}14-9\\4+1\\10\end{array}\right\}=5$

$\left.\begin{array}{c}15-9\\5+1\\10\end{array}\right\}=6$

$\left.\begin{array}{c}16-9\\6+1\\10\end{array}\right\}=7$

$\left.\begin{array}{c}17-9\\7+1\\10\end{array}\right\}=8$

$\left.\begin{array}{c}18-9\\8+1\\10\end{array}\right\}=9$

(3)

$\left.\begin{array}{c}11-3\\1+7\\10\end{array}\right\}=8$

$\left.\begin{array}{c}12-3\\2+7\\10\end{array}\right\}=9$

(8)

$\left.\begin{array}{c}11-8\\1+2\\10\end{array}\right\}=3$

$\left.\begin{array}{c}12-8\\2+2\\10\end{array}\right\}=4$

$\left.\begin{array}{c}13-8\\3+2\\10\end{array}\right\}=5$

$\left.\begin{array}{c}14-8\\4+2\\10\end{array}\right\}=6$

$\left.\begin{array}{c}15-8\\5+2\\10\end{array}\right\}=7$

$\left.\begin{array}{c}16-8\\6+2\\10\end{array}\right\}=8$

$\left.\begin{array}{c}17-8\\7+2\\10\end{array}\right\}=9$

(4)

$\left.\begin{array}{c}11-4\\1+6\\10\end{array}\right\}=7$

$\left.\begin{array}{c}12-4\\2+6\\10\end{array}\right\}=8$

$\left.\begin{array}{c}13-4\\3+6\\10\end{array}\right\}=9$

(7)

$\left.\begin{array}{c}11-7\\1+3\\10\end{array}\right\}=4$

$\left.\begin{array}{c}12-7\\2+3\\10\end{array}\right\}=5$

$\left.\begin{array}{c}13-7\\3+3\\10\end{array}\right\}=6$

$\left.\begin{array}{c}14-7\\4+3\\10\end{array}\right\}=7$

$\left.\begin{array}{c}15-7\\5+3\\10\end{array}\right\}=8$

$\left.\begin{array}{c}16-7\\6+3\\10\end{array}\right\}=9$

(5)

$\left.\begin{array}{c}11-5\\1+5\\10\end{array}\right\}=6$

$\left.\begin{array}{c}12-5\\2+5\\10\end{array}\right\}=7$

$\left.\begin{array}{c}13-5\\3+5\\10\end{array}\right\}=8$

$\left.\begin{array}{c}14-5\\4+5\\10\end{array}\right\}=9$

(6)

$\left.\begin{array}{c}11-6\\1+4\\10\end{array}\right\}=5$

$\left.\begin{array}{c}12-6\\2+4\\10\end{array}\right\}=6$

$\left.\begin{array}{c}13-6\\3+4\\10\end{array}\right\}=7$

$\left.\begin{array}{c}14-6\\4+4\\10\end{array}\right\}=8$

$\left.\begin{array}{c}15-6\\5+4\\10\end{array}\right\}=9$

SUBTRACÇÃO

QUADRO XIII

DESCRIPÇÃO E PRATICA

Cada taboada parcial começa com a subtracção de 1 e termina com a subtracção em que o diminuidor e o resto são **iguaes ao seu numero basico,** inverteno as subtracções em que o **diminuidor** e o **resto** são **differentes,** isto é, **o diminuidor** e o **resto** são respectivamente **o resto** e **o diminuidor** da nova operação, auxiliando assim as subtracções de diminuidores **menores** as de diminuidores **maiores.**

Explique-se a subtracção como o **inverso** da addição, de duas parcellas, isto é, como a operação em que se dá uma **somma** de **duas parcellas** e **uma dellas** para se achar a **outra.**

Faça-se a pratica das subtracções com diminuendos acima de 10, indicando-as ordenadamente e salteado, a partir da taboada de 9, para que os alumnos **por si mesmos descubram** os restos com o auxilio do "methodo dos complementos" (Quadro XII), para depois serem decorados.

TABOADA DE 10

Subtrahindo-se dos numeros compostos, desde 11 até 19, os numeros simples, desde 1 até 9, successiva e respectivamente, obtem-se **zero** na casa das **unidades:** portanto, o resto é **uma dezena:** ou 10, desde 11—1=10 até 19—9=10.

Subtrahindo-se dos numeros compostos, desde 11 até 19, uma dezena ou 10, successivamente, obteem-se restos iguaes ao algarismo das **unidades** do diminuendo, desde 11—10=1 até 19—10=9.

Exs.:

1) $\begin{array}{l}16\ =10+6\\ \underline{-6\ =\ \ -6}\\ (10)=10+0=10\end{array}$

ou, $16-6=10+6-6=10+(6-6)=10-0=10.$

2) $\begin{array}{l}16\ =\ 10+6\\ \underline{-10\ =-10}\\ (6)=\ \ 0+6=6.\end{array}$

ou, $16-10=10+6-10=10-10+6=(10-10)+6=0+6=6.$

A subtracção de **dezenas,** 20—10=10, uma dezena; faz-se por comparação com a subtracção de **unidades,** 2—1=1 (uma unidade), exprimindo os numeros em **dezenas** e **unidades.**

SUBTRACÇÃO

QUADRO XIII — TABOADAS CORRELATIVAS

DIMINUENDOS, DESDE 2 ATÉ 18 — DIMINUIDORES, DESDE 1 ATÉ 9

(1)

2 − 1 = 1

(2)

3 − 1 = 2 3 − 2 = 1
4 − 2 = 2

(3)

4 − 1 = 3 4 − 3 = 1
5 − 2 = 3 5 − 3 = 2
6 − 3 = 3

(4)

5 − 1 = 4 5 − 4 = 1
6 − 2 = 4 6 − 4 = 2
7 − 3 = 4 7 − 4 = 3
8 − 4 = 4

(5)

6 − 1 = 5 6 − 5 = 1
7 − 2 = 5 7 − 5 = 2
8 − 3 = 5 8 − 5 = 3
9 − 4 = 5 9 − 5 = 4
10 − 5 = 5

(6)

7 − 1 = 6 7 − 6 = 1
8 − 2 = 6 8 − 6 = 2
9 − 3 = 6 9 − 6 = 3
10 − 4 = 6 10 − 6 = 4
11 − 5 = 6 11 − 6 = 5
12 − 6 = 6

(7)

8 − 1 = 7 8 − 7 = 1
9 − 2 = 7 9 − 7 = 2
10 − 3 = 7 10 − 7 = 3
11 − 4 = 7 11 − 7 = 4
12 − 5 = 7 12 − 7 = 5
13 − 6 = 7 13 − 7 = 6
14 − 7 = 7

(8)

9 − 1 = 8 9 − 8 = 1
10 − 2 = 8 10 − 8 = 2
11 − 3 = 8 11 − 8 = 3
12 − 4 = 8 12 − 8 = 4
13 − 5 = 8 13 − 8 = 5
14 − 6 = 8 14 − 8 = 6
15 − 7 = 8 15 − 8 = 7
16 − 8 = 8

(9)

10 − 1 = 9 10 − 9 = 1
11 − 2 = 9 11 − 9 = 2
12 − 3 = 9 12 − 9 = 3
13 − 4 = 9 13 − 9 = 4
14 − 5 = 9 14 − 9 = 5
15 − 6 = 9 15 − 9 = 6
16 − 7 = 9 16 − 9 = 7
17 − 8 = 9 17 − 9 = 8
18 − 9 = 9

TABOADA DE DEZ

11 − 1 = 10 11 − 10 = 1
12 − 2 = 10 12 − 10 = 2
13 − 3 = 10 13 − 10 = 3
14 − 4 = 10 14 − 10 = 4
15 − 5 = 10 15 − 10 = 5
16 − 6 = 10 16 − 10 = 6
17 − 7 = 10 17 − 10 = 7
18 − 8 = 10 18 − 10 = 8
19 − 9 = 10 19 − 10 = 9
20 − 10 = 10

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

VALORES DOS TERMOS

Na addicção tem-se que —

1.° A ordem das parcellas não altera a somma.

2.° Numa somma de duas parcellas, uma dellas é igual á somma menos a outra.

Na subtracção, por ser o resto igual ao diminuendo menos o diminuidor, tem-se que —

1.° O diminuidor é igual ao diminuendo menos o resto.

2.° O diminuendo é igual ao diminuidor mais o resto.

TRIANGULO DAS OPERAÇÕES

Illustrem-se os **valores** acima, bem como a **opposição** das operações, por meio de dois pequenos triangulos equilateros, traçados um ao lado do outro, um para a **addição**, e outro para a **subtracção**, dispondo os numeros em volta de cada um, junto aos vertices, do seguinte modo:

a) Escrevam-se as parcellas fóra do triangulo, junto aos vertices dos angulos da base, ligadas pelo signal + (mais), a somma junto ao vertice do angulo superior, ligada a cada uma das parcellas pelo signal — (menos).

b) Escreva-se o diminuendo na posição da **somma**, o diminuidor e o resto na posição das **parcellas**, ligados do mesmo modo.

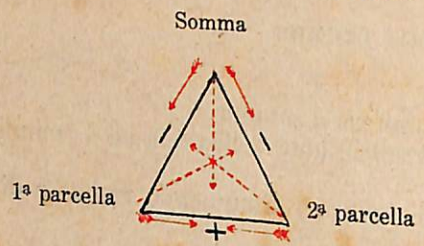
PRATICA

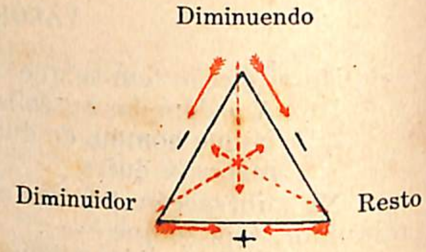
Em qualquer das operações dêem-se **dois termos** para se achar o **terceiro**, por meio delles, dispondo-os em volta de cada triangulo, como ficou explicado acima.

Dêem-se, primeiro, (a) as **parcellas** para se achar a **somma**, (a') o **diminuendo** e o **diminuidor** para se achar o **resto**; em seguida, dê-se, (b) e (c), a **somma** e **uma das parcellas** para se achar a **outra**, (b') o **diminuendo** e o **resto** para se achar o **diminuidor**, (c') o **diminuidor**, e o **resto** para se achar o **diminuendo**.

Pratique-se com exemplos extrahidos das taboadas: primeiro, com o **mesmo exemplo** para as duas operações, comparando-as e os resultados; em seguida, com **exemplos differentes**, comparando sempre.

DADOS GERAES





LEITURA DO DIAGRAMMA: O valor de um termo qualquer é dado pela leitura da operação dos termos no lado opposto, indicada pelas flechas e signaes.

ADDIÇÃO

QUADRO XIV — PRATICA

SOMMAS DE NUMEROS COMPOSTOS ENTRE 10 E 20 COM NUMEROS SIMPLES, LIMITADAS ATE' 20. — As sommas de numeros compostos, desde 11 até 19, inclusive, com numeros simples, quando a somma dos algarismos das unidades do numero composto com o numero simples é menor que 10, ou é 10, vão desde 12 até 20, inclusive, e se fazem por comparação com as sommas de numeros simples, isto é:

a) Si a somma do algarismo das unidades do numero composto com o numero simples é menor que 10, escreve-se o resultado, á direita da dezena do numero composto: essa somma suggere o resultado, por **semelhança** de **nome** e **comparação**, isto é, as sommas desde 2 até 9, suggerem as sommas respectivas, desde 12 até 19.

b) Si a somma é 10 (uma dezena), junta-se á dezena do numero composto, o que dá 10+10=20 (duas dezenas).

Exs.:

1)
$$\begin{array}{l} 15 = 10+5 \\ \underline{+3 = +3} \\ (18) = 10+8 = 18 \end{array}$$

ou, $15+3=10+5+3=10+(5+3)=10+8=18.$

2)
$$\begin{array}{l} 14 = 10+4 \\ \underline{+6 = +6} \\ (20)\ 10+10=20 \end{array}$$

ou, $14+6=10+4+6=10+(4+6)=10+10=20.$

SUBTRACÇÃO

QUADRO XIV

SUBTRACÇÃO DE NUMEROS SIMPLES, DE NUMEROS COMPOSTOS, DESDE 12 ATE' 20, INCLUSIVE'. — A subtracção de numeros simples, de numeros compostos, desde 12 até 19, inclusive, quando o algarismo das unidades do numero composto é **maior** que o numero simples, faz-se por comparação com a subtracção de numeros simples entre si, desde o diminuendo 2 até 9, isto é, junta-se a 10, dezena do diminuendo composto, a differença entre o algarismo das unidades desse numero e o numero simples: essa differença suggere o resultado, por semelhança de nome e comparação, isto é, os restos desde 1 até 8, suggerem os restos desde 11 até 18.

Exs.:

$$\begin{array}{l} 17 = 10+7 \\ \underline{-4 = -4} \\ (13) = 10+3 = 13 \end{array}$$

Ou, $17-4=10+7-4=10+(7-4)=10+3=13.$

Pelo "methodo dos complementos":

$$\begin{array}{l} 17 = 10+7 \\ \underline{-4 = -4} \\ (13) = 6+7=7+6=13. \end{array}$$

ou, $17-4=10+7-4=10-4+7=(10-4)+7=6+7=7+6=13$

Para subtrahir 5, basta sommar o algarismo das **unidades** do diminuendo, com 5.

Ex.:

$$\begin{array}{l} 19 = 10+9 \\ \underline{-5 = -5} \\ (14) = 5+9=9+5=14. \end{array}$$

ou, $19-5=10+9-5=10-5+9=(10-5)+9=5+9=9+5=14.$

A subtracção de numeros simples, de 20, compara-se com a subtracção desses numeros, de 10, visto como póde considerar-se 20 decomposto em duas dezenas, 10+10, de uma das quaes se subtrae o numero simples, e o resto somma-se com a outra.

Ex.:

1)
$$\begin{array}{l} 20 = 10+10 \\ \underline{-6 = -6} \\ (14) = 10+4=14 \end{array}$$

ou, $20-6=10+10-6=10+(10-6)=10+4=14.$

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO XIV — TABOADAS COMPARATIVAS

NUMEROS ENTRE 10 E 20 E NUMEROS SIMPLES

$$11 + 1 = 12$$
$$\left.\begin{array}{l}11 + 2\\ 12 + 1\end{array}\right\}=13 \quad \left.\begin{array}{l}11 + 3\\ 13 + 1\end{array}\right\}=14 \quad \left.\begin{array}{l}11 + 4\\ 14 + 1\end{array}\right\}=15 \quad \left.\begin{array}{l}11 + 5\\ 15 + 1\end{array}\right\}=16$$
$$\left.\begin{array}{l}11 + 6\\ 16 + 1\end{array}\right\}=17 \quad \left.\begin{array}{l}11 + 7\\ 17 + 1\end{array}\right\}=18 \quad \left.\begin{array}{l}11 + 8\\ 18 + 1\end{array}\right\}=19 \quad \left.\begin{array}{l}11 + 9\\ 19 + 1\end{array}\right\}=20$$
$$18 - 4 = 14$$
$$\left\{\begin{array}{l}19 - 5 = 14\\ 19 - 4 = 15\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}20 - 6 = 14\\ 20 - 4 = 16\end{array}\right.$$
$$20 - 5 = 15$$

$$12 + 2 = 14$$
$$\left.\begin{array}{l}12 + 3\\ 13 + 2\end{array}\right\}=15 \quad \left.\begin{array}{l}12 + 4\\ 14 + 2\end{array}\right\}=16 \quad \left.\begin{array}{l}12 + 5\\ 15 + 2\end{array}\right\}=17$$
$$\left.\begin{array}{l}12 + 6\\ 16 + 2\end{array}\right\}=18 \quad \left.\begin{array}{l}12 + 7\\ 17 + 2\end{array}\right\}=19 \quad \left.\begin{array}{l}12 + 8\\ 18 + 2\end{array}\right\}=20$$
$$16 - 3 = 13$$
$$\left\{\begin{array}{l}17 - 4 = 13\\ 17 - 3 = 14\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}18 - 5 = 13\\ 18 - 3 = 15\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}19 - 6 = 13\\ 19 - 8 = 16\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}20 - 7 = 13\\ 20 - 3 = 17\end{array}\right.$$

$$13 + 3 = 16$$
$$\left.\begin{array}{l}13 + 4\\ 14 + 3\end{array}\right\}=17 \quad \left.\begin{array}{l}13 + 5\\ 15 + 3\end{array}\right\}=18 \quad \left.\begin{array}{l}13 + 6\\ 16 + 3\end{array}\right\}=19 \quad \left.\begin{array}{l}13 + 7\\ 17 + 3\end{array}\right\}=20$$
$$14 - 2 = 12$$
$$\left\{\begin{array}{l}15 - 3 = 12\\ 15 - 2 = 13\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}16 - 4 = 12\\ 16 - 2 = 14\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}17 - 5 = 12\\ 17 - 2 = 15\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l}18 - 6 = 12\\ 18 - 2 = 16\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}19 - 7 = 12\\ 19 - 2 = 17\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}20 - 8 = 12\\ 20 - 2 = 18\end{array}\right.$$

$$14 + 4 = 18$$
$$\left.\begin{array}{l}14 + 5\\ 15 + 4\end{array}\right\}=19 \quad \left.\begin{array}{l}14 + 6\\ 16 + 4\end{array}\right\}=20$$
$$15 + 5 = 20$$
$$12 - 1 = 11$$
$$\left\{\begin{array}{l}13 - 2 = 11\\ 13 - 1 = 12\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}14 - 3 = 11\\ 14 - 1 = 13\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}15 - 4 = 11\\ 15 - 1 = 14\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}16 - 5 = 11\\ 16 - 1 = 15\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l}17 - 6 = 11\\ 17 - 1 = 16\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}18 - 7 = 11\\ 18 - 1 = 17\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}19 - 8 = 11\\ 19 - 1 = 18\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}20 - 9 = 11\\ 20 - 1 = 19\end{array}\right.$$

A somma de **numeros compostos** entre 10 e 20 com **numeros simples** acha-se tambem dentro desse limite, quando a somma do algarismo das unidades do numero composto com o numero simples é **menor** que 10, e se faz por com**paração** com a somma de numeros simples, comparando **nomes** e **numeros**. A subtracção se faz por **comparação** ou pelo «METHODOS DOS COMPLEMENTOS».

ADDIÇÃO

QUADRO XV — TABOADAS PROGRESSIVAS

TOTAES IGUAES

(ENTRE 10 E 20)

$$\left.\begin{array}{r}10+1\\ 9+2\\ 8+3\\ 7+4\\ 6+5\end{array}\right\}=11 \quad \left.\begin{array}{r}11+1\\ 10+2\\ 9+3\\ 8+4\\ 7+5\\ 6+6\end{array}\right\}=12 \quad \left.\begin{array}{r}12+1\\ 11+2\\ 10+3\\ 9+4\\ 8+5\\ 7+6\end{array}\right\}=13 \quad \left.\begin{array}{r}13+1\\ 12+2\\ 11+3\\ 10+4\\ 9+5\\ 8+6\\ 7+7\end{array}\right\}=14$$

$$\left.\begin{array}{r}17+1\\ 16+2\\ 15+3\\ 14+4\\ 13+5\\ 12+6\\ 11+7\\ 10+8\\ 9+9\end{array}\right\}=18 \quad \left.\begin{array}{r}16+1\\ 15+2\\ 14+3\\ 13+4\\ 12+5\\ 11+6\\ 10+7\\ 9+8\end{array}\right\}=17 \quad \left.\begin{array}{r}15+1\\ 14+2\\ 13+3\\ 12+4\\ 11+5\\ 10+6\\ 9+7\\ 8+8\end{array}\right\}=16 \quad \left.\begin{array}{r}14+1\\ 13+2\\ 12+3\\ 11+4\\ 10+5\\ 9+6\\ 8+7\end{array}\right\}=15$$

$$\left.\begin{array}{r}18+1\\ 17+2\\ 16+3\\ 15+4\\ 14+5\end{array}\right\}=19 \quad \left.\begin{array}{r}13+6\\ 12+7\\ 11+8\\ 10+9\end{array}\right\}=19 \quad \left.\begin{array}{r}19+1\\ 18+2\\ 17+3\\ 16+4\\ 15+5\end{array}\right\}=20 \quad \left.\begin{array}{r}14+6\\ 13+7\\ 12+8\\ 11+9\\ 10+10\end{array}\right\}=20$$

Continuando as sommas, ou **invertendo** as parcellas das sommas dadas, obteem-se as **inversões** completando as combinações que dão o **mesmo total**, como se fez nas taboadas até 10.

Como naquellas taboadas, faz-se a pratica dando **uma** das **parcellas** e a **somma**, para se achar a **outra**; primeiro, seguindo o «Quadro», depois, **salteado**, dispondo em **fórma circular**, escrevendo as parcellas de uma das columnas dentro do circulo para se obterem as outras.

Ex.: $8 + ? = 11$?; $? + 3 = 11$?

ADDIÇÃO

QUADRO XVI — TABOADAS SUCCESSIVAS

SOMMA SUCCESSIVA DE NUMEROS SIMPLES, DESDE 1 ATE' 20

(+ 2)
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, + 1
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, + 2 =20
10, 2 s =20

(+ 3)
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, + 1
2, 5, 8, 11, 14, 17, + 3 =20
3, 6, 9, 12, 15, 18, + 2

(+ 6)
1, 7, 13, 19, + 1
2, 8, 14, + 6
3, 9, 15, + 5
4, 10, 16, + 4 =20
5, 11, 17, + 3
6, 12, 18, + 2

(+ 5)
1, 6, 11, 16, + 4
2, 7, 12, 17, + 3
3, 8, 13, 18, + 2 =20
4, 9, 14, 19, + 1
5, 10, 15, + 5
4, 5, s =20

(+ 4)
1, 5, 9, 13, 17, + 3
2, 6, 10, 14, 18, + 2 =20
3, 7, 11, 15, 19, + 1
4, 8, 12, 16, + 4
5, 4 s =20

(+ 7)
1, 8, 15, + 5
2, 9, 16, + 4
3, 10, 17, + 3
4, 11, 18, + 2 =20
5, 12, 19, + 1
6, 13, + 7
7, 14, + 6

(+ 8)
1, 9, 17, + 3
2, 10, 18, + 2
3, 11, 19, + 1
4, 12, + 8
5, 13, + 7 =20
6, 14, + 6
7, 15, + 5
8, 16, + 4

(+ 9)
1, 10, 19, + 1
2, 11, + 9
3, 12, + 8
4, 13, + 7
5, 14, + 6 =20
6, 15, + 5
7, 16, + 4
8, 17, + 3
9, 18, + 2

(10)
1, 11, + 9
2, 12, + 8
3, 13, + 7 =20
4, 14, + 6
5, 15, + 5

6, 16, + 4
7, 17, + 3
8, 18, + 2 =20
9, 19, + 1
10 + 10

2, 10 s = 20

Nestas taboadas são supprimidas as **parcellas repetidas**, e indicada somente a **ultima**, com o signal respectivo.
Faz-se a pratica como se fez para as taboadas successivas anteriores, de sommar até a de 10, operando abreviadamente pelo «METHODO DE PAUSAS»

SUBTRACÇÃO

QUADRO XVII — TABOADAS SUCCESSIVAS

SUBTRACÇÃO SUCCESSIVA DE NUMEROS SIMPLES, DESDE 20 ATE' 0

(— 2)
1 = 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
20— 2 = 18, 16, 14, 12, 10, 8. 6, 4, 2, 0
20 = 10, 2 s

(— 3)
1 = 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1
20— 2 = 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0
3 = 17, 14, 11, 8, 5, 2

(— 6)
1 = 19, 13, 7, 1
2 = 18, 12, 6, 0
20 — 3 = 17, 11, 5
4 = 16, 10, 4
5 = 15, 9, 3
6 = 14, 8, 2

(— 5)
1 = 19, 14, 9, 4
2 = 18, 13, 8, 3
20 — 3 = 17, 12, 7, 2
4 = 16, 11, 6, 1
5 = 15, 10, 5, 0
20 = 4, 5 s

(— 4)
1 = 19, 15, 11, 7, 3
2 = 18, 14, 10, 6, 2
20 — 3 = 17, 13, 9, 5, 1
4 = 16, 12, 8, 4, 0
20 = 5, 4 s

(— 7)
1 = 19, 12. 5
2 = 18, 11, 4
3 = 17, 10, 3
20 — 4 = 16, 9, 2
5 = 15, 8, 1
6 = 14, 7, 0
7 = 13, 6

(— 8)
1 = 19, 11, 3
2 = 18, 10, 2
3 = 17, 9, 1
4 = 16, 8, 0
20 — 5 = 15, 7
6 = 14, 6
7 = 13, 5
8 = 12, 4

(— 9)
1 = 19, 10, 1
2 = 18, 9, 0
3 = 17, 8
4 = 16, 7
20 — 5 = 15, 6
6 = 14, 5
7 = 13, 4
8 = 12, 3
9 = 11, 2

(— 10)
1 = 19, 9
2 = 18, 8
20 — 3 = 17, 7
4 = 16, 6
5 = 15, 5

6 = 14, 4
7 = 13, 3
20 — 8 = 12, 2
9 = 11, 1
10 = 10 0

20 = 2, 10 s

Esta taboada, sendo o **inverso** da anterior, tem os **diminuidores** suppridos, sendo indicado apenas o **primeiro** com o respectivo signal.
A pratica faz-se como nas taboadas successivas anteriores, de **subtrahir**, operando abreviadamente pelo «METHODO DE PAUSAS».

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

TABOADA CIRCULARES

Cada uma das taboadas de **sommar** é organizada escrevendo as parcellas differentes dentro do circulo, em volta da circumferencia, e a parcella repetida na parte central, formando o primeiro membro de uma igualdade com uma das parcellas, subentendida por um parenthese, e o segundo membro formado pela somma subentendida pelo signal de interrogação que se lê: "Quanto?"

Faz-se a pratica operando de **fóra** para **dentro**, e, vice-versa; da **esquerda** para a **direita**, e, vice-versa; e, por ultimo, **salteado**, applicando o "**methodo de pausas**" e o "**calculo mental**".

Cada uma das taboadas de **subtrahir** é organizada escrevendo os diminuendos em volta da circumferencia, e o diminuidor repetido no primeiro membro de uma igualdade, com um dos diminuendos subentendido por um parenthese, e, no segundo membro, o resto pedido, subentendido pelo signal de interrogação.

Faz-se a pratica como na taboada de sommar.

Nas taboadas de **sommar** do "quadro" seguinte (XVII), dá-se a **somma** e **uma das parcellas**, para se achar a **outra**, subentendida pelo signal de interrogação (subtracção).

Nas taboadas de **subtrahir** dá-se o **diminuidor** ou o **resto**, para se achar o **diminuendo** subentendido pelo signal de interrogação (somma).

A pratica dos dois "quadros" de taboadas, (XVI, XVIII e XIX, deve ser feita operando com as taboadas do **mesmo numero**, conjunctamente, **duas a duas**, isto é: desde que se obtenha uma **somma**, é em seguida transformada em **diminuendo**, uma das parcellas em **diminuidor**, para se achar o **resto** que é a **outra parcella**; na **subtracção**, uma vez obtido um **resto**, é transformado em uma **parcella** que, sommada com a **outra**, que é o **diminuidor**, deve dar o **diminuendo**, ou o **diminuidor** é a **primeira parcella**, e o **resto**, a **segunda**.

Como estas taboadas contitúem o **exercicio final** de **sommas** e **subtracções** de **dois numeros simples**, a pratica dos dois "quadros" deve ser feita pelo "**methodo de pausas**" e, por fim, pelo calculo **puramente mental**, mencionando apenas o **resultado** — **somma** ou **differença, parcella, diminuendo** ou **diminuidor**.

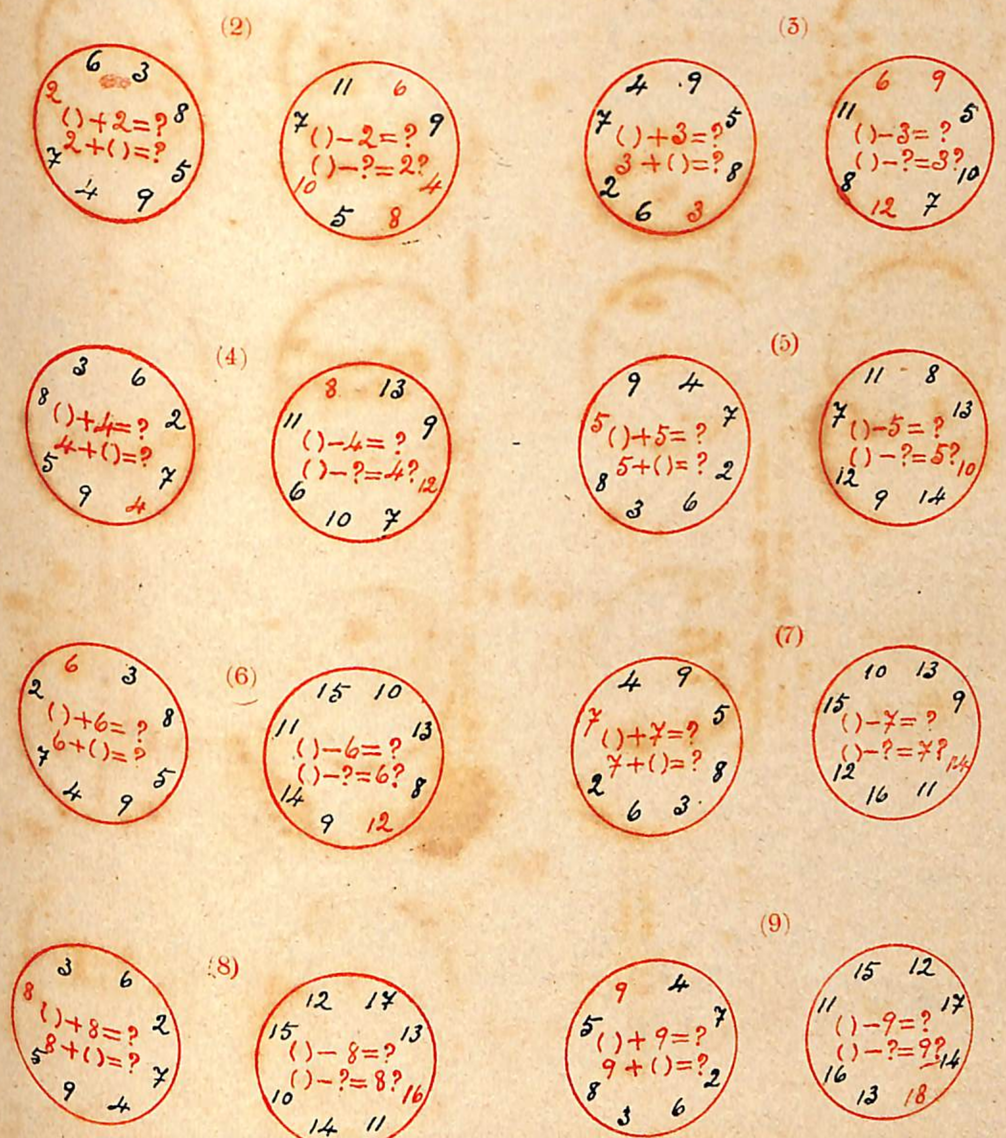
O **termo desconhecido** é sempre representado pelo signal de interrogação que se lê sempre: "Quanto?"

ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO XVIII — TABOADAS CIRCULARES

PARCELLAS E DIMINUIDORES, DE 2 ATE' 9

TOTAES E DIMINUENDOS, DE 4 ATE' 18



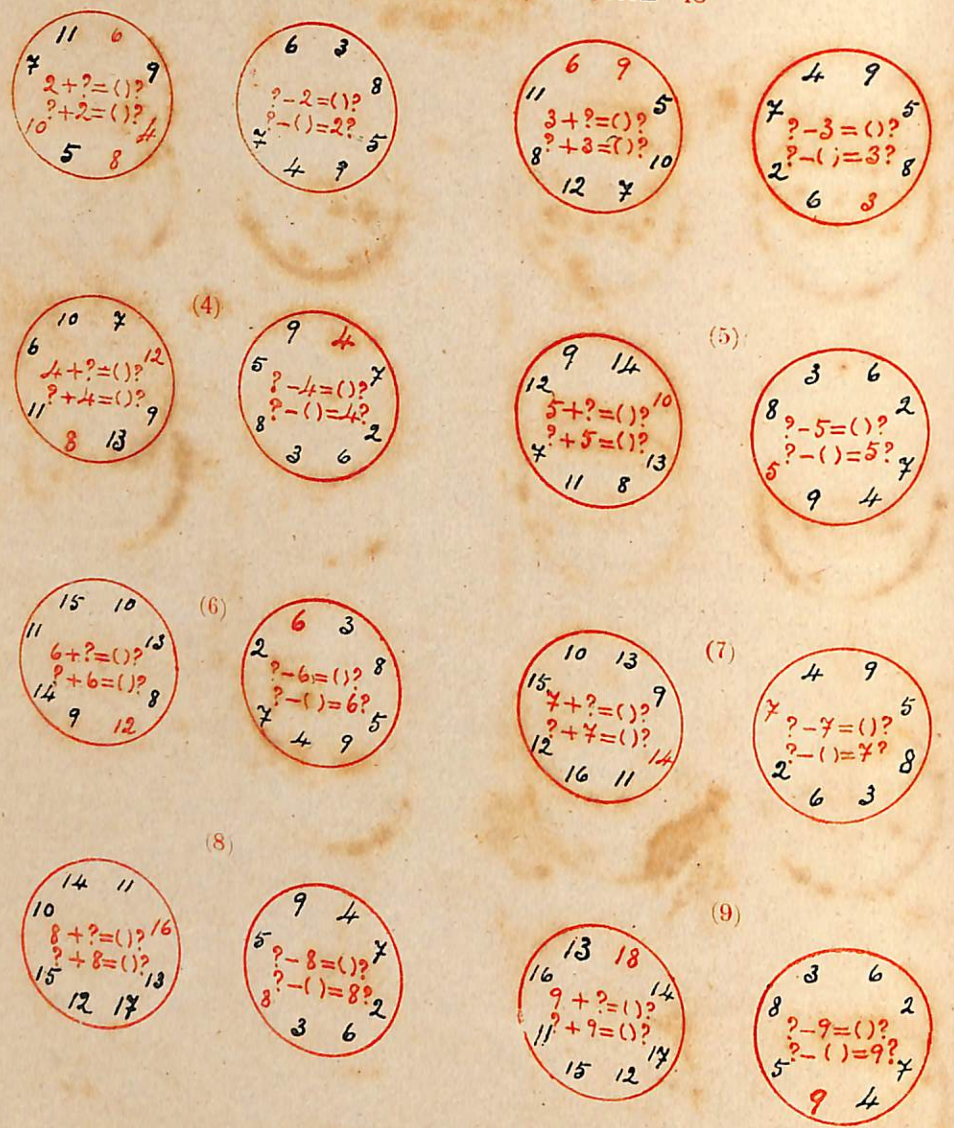
ADDIÇÃO E SUBTRACÇÃO

QUADRO XIX

TABOADAS CIRCULARES

PARCELLAS E DIMINUIDORES, DE 2 ATE' 9

TOTAES E DIMINUENDOS, DE 4 ATE' 18



MULTIPLICAÇÃO

A **somma abreviada** de **parcellas iguaes** constitúe uma nova operação, a — **multiplicação.**

A **parcella repetida** é o **multiplicando**, o **numero de vezes** que ella é repetida, o **multiplicador**, e o total, o **producto.**

Na multiplicação de **numeros concretos**, o producto é, portanto, da **mesma especie** que o **multiplicando**, por ser **directamente** formado deste ultimo, do mesmo modo que as parcellas são da **mesma especie** que a **somma**: o multiplicador é usado como **numero abstracto.**

O multiplicando e o multiplicador são os **factores** do producto porque ambos concorrem para formá-lo

Indica-se a multiplicação por meio do signal ×, que se lê — **multiplicado por**, ou, **vezes**, escrito entre o **multiplicando** (1.º factor) e o **multiplicador** (2.º factor) —

NUMEROS PRIMOS E MULTIPLOS

Os numeros dividem-se em **dois grupos** distinctos, a saber :—

1.º — Numeros que só podem ser formados por **uma unica somma** de parcellas iguaes á **unidade**, ou de **um só producto** de **dois factores**, respectivamente iguaes ao proprio numero e á unidade, e são chamados — **primos**, o primeiro e o **menor** dos quaes é o numero 2, além da **unidade**, que não se decompõe.

Um numero primo só póde representar uma **linha**, exactamente, isto é, **uma só dimensão.**

2.º — Numeros que pódem ser formados, além da repetição da **unidade**, por **um** ou **mais pares** de **sommas iguaes**, formados pela repetição de **uma mesma** parcella, ou de **duas** parcellas **differentes**, uma para cada somma, isto é, por **um** ou **mais pares** de **productos iguaes**, de **factores iguaes** (quadrados), ou **differentes**, além do **proprio numero** e da **unidade**, e são chamados — **multiplos**, o primeiro e o **menor** dos quaes é 4=2×2 (**quadrado de 2**).

Um **numero multiplo**, por meio do producto de seus factores póde representar: —

1.º — Uma **superficie**, — **rectangulo** ou **quadrado**, quando é o producto de **dois** factores, cada um dos quaes, **differentes** ou **iguaes**, representa uma das **duas** dimensões, — **comprimento** ou **largura.**

2.º — Um **volume**, — **parallelepipedo** ou **cubo**, quando é o producto de **tres** factores **differentes** ou **iguaes**, cada um dos quaes representa **uma das tres** dimensões, — **comprimento**, **largura**, e **altura** ou **profundidade.**

RECTANGULOS DOS NUMEROS MULTIPLOS

Observando os numeros que podem ser formados por uma **somma de parcellas iguaes** com suas unidades representadas por quaesquer **objectos** ou pelo algarismo 1, dispostos ordenadamente em **carreiras parallelas**, umas abaixo das outras, "em quadro", formando **rectan-**

gulos ou **quadrados**, ou por **unidades** dessas superficies (Quadro I), vê-se que —

1.º — A uma **parcella repetida**, com suas unidades dispostas em **carreiras parallelas**, corresponde **outra**, igualmente repetida, **differente** da primeira, ou **igual** a ella, com suas unidades dispostas em **columnas parallelas**.

2.º — A **somma** de **todas** as unidades das parcellas dispostas em **carreiras** parallelas é igual á **somma** de **todas** as unidades das parcellas dispostas em **columnas** do mesmo quadro, isto é, ambas **iguaes** ao numero dado.

3.º — O **numero** de **parcellas** com suas unidades dispostas **em carreiras** parallelas é igual ao **numero de unidades** de **cada uma das parcellas** com suas unidades dispostas **em columnas** parallelas, e vice-versa. Portanto, —

4.º — Os **prouctos** de uma das parcellas, tomada como **multiplicando**, pela outra, tomada como **multiplicador**, alternadamente, são **iguaes**, o que demonstra que — **o producto de dois factores não se altera, invertendo-se-lhes a ordem.**

ANALYSE DOS NUMEROS

DESDE 1 ATE' 20

Representando os numeros por meio de algarismos, e indicando as operações, vê-se que —

1.º — Os **numeros simples**, 1, 3, 5 e 7, são **primos**, porque só pódem ser formados pela **somma** de parcellas **iguaes** á **unidade**, isto é, pelo **producto** de cada um delles pela unidade.

2.º — O numero 4 é a somma de **duas** parcellas ou de **dois** factores **iguaes** a 2 (quadrado de 2), isto é:

$$2+2=2\times2=4$$

3.º — Os **numeros simples**, 6 e 8, pódem ser formados por **duas** sommas de **duas parcellas** repetidas, **differentes**, uma para cada somma, as quaes dão **dois productos iguaes** com seus **factores invertidos**, a saber:

$$\left.\begin{matrix}2+2+2=2\times3\\ 3+3=3\times2\end{matrix}\right\}=6$$

$$\left.\begin{matrix}2+2+2+2=2\times4\\ 4+4=4\times2\end{matrix}\right\}=8$$

4.º — O numero 9 é a **somma** de **tres** parcellas, ou o **producto** de **dois factores iguaes** a 3 (**quadrado** de 3), isto é:

$$3+3+3=3\times3=9$$

5.º — Os **numeros compostos**, 11, 13, 17, e 19, são **primos**.

6.º — Para cada um dos numeros, 10, 14 e 15, teem-se **dois productos** iguaes a esses numeros, cada um com **dois factores differentes e invertidos**, derivados respectivamente das **sommas** de parcellas iguaes a esses factores, a saber:

$$2\times5=5\times2=10$$
$$2\times7=7\times2=14$$
$$3\times5=5\times3=15$$

7.º — O numero 16, além de ser formado por **dois** productos iguaes, dos factores 2 e 8, invertidos, derivados respectivamente das sommas de parcellas iguaes a esses factores, póde tambem ser formado pela somma de **quatro** parcellas ou pelo producto de **dois factores iguaes** a 4, **(quadrado** de 4), isto é:

$$\left.\begin{matrix}4+4+4+4=4\times4\\ 2\times8=8\times2\end{matrix}\right\}=16$$

8.º — Cada um dos numeros, 12, 18 e 20, póde ser formado, respectivamente, por **quatro sommas** de **quatro parcellas** repetidas, **differentes**, uma para cada somma, as quaes dão **quatro productos** de **dois factores** cada um, distribuidos em dois **pares** de productos iguaes, os de cada par com seus factores invertidos, a saber:

$$\left.\begin{matrix}2\times6=6\times2\\ 3\times4=4\times3\end{matrix}\right\}=12 \qquad \left.\begin{matrix}2\times9=2\times9\\ 3\times6=6\times3\end{matrix}\right\}=18$$

$$\left.\begin{matrix}2\times10=10\times2\\ 4\times5=5\times4\end{matrix}\right\}=20$$

RECTANGULOS DOS NUMEROS MULTIPLIOS,

DESDE 4 ATE' 20

Da analyse dos numeros no limite de 20, vê-se que —

1.º — Os numeros 4 e 9 pódem representar sómente os **quadrados** respectivos de 2 e de 3, por serem os **quadrados** destes ultimos.

2.º — Os numeros, 6, 8, 10, 14 e 15, só pódem representar **um rectangulo** cujos **lados** são expressos pelos **factores** respectivos desses numeros.

Os numeros, 12, 16, 18 e 20 pódem representar **dois** restangulos, cada um, cujos lados são expressos pelos **dois pares** respectivos de factores desses numeros, sendo que **um** dos rectangulos de 16 é representado pelo **quadrado** de 4, por ser 16 o **quadrado** deste ultimo numero.

APPLICAÇÃO

O producto de **dois factores** encontra applicação pratica na determinação da **area** de uma **superficie rectangular** qualquer, isto é, do numero de **unidades quadradas da superficie** de um **rectangulo** ou **quadrado**, ou na determinação do numero de unidades da **mesma especie** distribuidas nessa superficie, assim como, — o numero de cadeiras numa sala, o de arvores frutiferas dum **pomar**, o de **cafeeiros** dum **talhão**, e cada um dos factores representa o numero de **quadrados** ou de **unidades** de **um dos factores** (multiplicando), o qual **deve ser repetido tantas vezes quantas as unidades** do **outro** (multiplicador), para se achar o **total** (producto) de **quadros** da superficie, ou de **unidades nella distribuidas.**

Si a superficie é um **quadrado**, os dois factores são **iguaes**, correspondendo aos **lados iguaes** do quadrado.

No caso de um **parallelogrammo**, a area é dada pelo **producto** de **dois factores**, que representam respectivamente a **base** e a **altura** do parallelogrammo, e que são os **dois lados** do rectangulo de **area equivalente.**

PRATICA

PROBLEMAS

Proponham-se problemas envolvendo a applicação do **producto** de **dois numeros simples**, e dos **numeros compostos** até **20**, para a determinação do numero de **quadros** de uma superficie rectangular, ou o numero de **unidades** distribuidas nessa superficie.

Para isso, tracem-se, no quadro negro ou no papel, **rectangulos** ou **quadrados** cujos lados, expressos por esses numeros, sejam divididos em **partes iguaes**; dividam-se os rectangulos ou quadrados em pequenos **quadros**, verificando os resultados, como ficou explicado acima.

Obtenha-se o mesmo resultado com **objectos** dispostos "em quadro".

Formulem-se pequenos problemas envolvendo esses numeros para determinar o "numero de quadros" de uma superficie ou de **objectos** nella distribuidos.

EXEMPLO

Quantas **mudas** de amores-perfeitos podem-se plantar dispondo-as em **4 carreiras** com **5 mudas** em **cada** carreira?

Solução e resultado: — Pódem-se plantar: $5+5+5+5=5\times4=20$ mudas de amores perfeitos.

Invertam-se os dados e formule-se o problema correspondente em que se dão 5 **carreiras** com 4 **mudas** em **cada uma**, o que dá a **somma** e **producto**, $4+4+4+4+4=4\times5=20$ **mudas** de amores- perfeitos, **iguaes** aos primeiros, porém os productos com os factores **invertidos**.

Formulem-se, por ultimo, os problemas **sem a pergunta**, a ser formulada pelo **proprio alumno**, com o auxilio do professor, até que o faça **por si mesmo**, e resolva o problema.

Assim, o mesmo exemplo acima póde ser formulado:

EXEMPLO

Uma menina plantou um certo numero de **mudas** de amores-perfeitos num canteiro dispondo-as em 5 **carreiras** com 4 **mudas** em **cada** carreira: ......?

Proponham-se problemas simples, de multiplicar, cujos dados envolvam os factores usados nas taboadas, até o ultimo producto. $10\times2=2\times10=20$: primeiro, com a pergunta **expressa**, por ultimo, sem ella, como no problema anterior.

Resolvam-se os problemas, primeiro, pela **somma** de **parcellas iguaes** donde se **derivará** a **multiplicação** a ser effectuada.

EXEMPLO

Quantas **laranjas** são precisas para distribuir com 4 **meninos**, dando **3 a cada um?**

Solução: São precisas 3 laranjas **repetidas** tantas **vezes** quantos os **meninos**, isto é: —

São precisas: $+3+3+3+3=3\times4=12$ **laranjas.**

COMPOSIÇÃO DE NUMEROS MULTIPLOS

PRODUCTOS DE DOIS FACTORES

Na **composição** de um numero multiplo por meio de um **producto** ou **productos** de **dois factores** occorrem dois casos, a saber:

1.° — O numero multiplo é formado por **um par** de **productos iguaes**, de **dois** factores **differentes** e **invertidos**, ou é **um só** producto de **dois** factores **iguaes** (quadrado).

2.° — O multiplo é formado por **um** ou **mais pares** de **productos iguaes**, de **dois** factores **differentes**, e **invertidos**, os de cada par, ou o **ultimo** é um producto de **dois** factores **iguaes**, e o numero é um **quadrado perfeito.**

Assim, para se **compor** um numero multiplo por meio de um **producto** ou **productos** de **dois factores**, opera-se conforme os casos acima, de accordo com a seguinte —

REGRA: Multiplica-se cada um dos numeros **primos menores**, a partir de 2, por si mesmo, e pelos numeros seguintes successivamente, até se achar o **primeiro producto igual ao numero dado**, notando-se que: —

1.° — Si o **primeiro producto** é o **quadrado de um numero primo**, ou si é o producto de **dois factores differentes**, o **segundo** dos quaes (multiplicador) é um **numero primo**, o numero dado é formado sómente por esse **quadrado**, ou sómente por **um par** de productos de **dois factores** primos, **differentes** e **invertidos.**

2.° — Si o **segundo factor** (multiplicador) do primeiro producto é um **numero multiplo**, isso indica que o numero dado póde ser formado por outro ou outros **pares** de **productos iguaes**, de factores **differentes** e **invertidos**, ou de **mais um** producto de **factores iguaes**, si o numero é um **quadrado perfeito.** Continua-se, então, a multiplicar, **reservando** os **pares** de **productos iguaes**, até se chegar a um producto que seja o **inverso do precedente**; ou até se chegar a um producto de **dois factores iguaes**, o que indica que o numero dado é um **quadrado perfeito: invertendo** os factores dos productos achados, ou **continuando a multiplicar**, obteem-se **todos** os productos de **dois factores, iguaes** ao numero dado.

Composição dos numeros multiplos no limite de 20. — Applicando a regra supra á composição dos numeros dos numeros multiplos no limite de 20, obteem-se os seguintes resultados:

$$2\times2=4;\ 3\times3=9$$

$$\left.\begin{array}{c}2\times3\\ \hline 3\times2\end{array}\right\}=6;\quad \left.\begin{array}{c}2\times4\\ \hline 4\times2\end{array}\right\}=8;\quad \left.\begin{array}{c}2\times5\\ \hline 5\times2\end{array}\right\}=10$$

$$\left.\begin{array}{c}2\times7\\ \hline 7\times2\end{array}\right\}\times 14;\quad \left.\begin{array}{c}3\times5\\ \hline 5\times3\end{array}\right\}=15$$

$$\left.\begin{array}{c}2\times6\\ 3\times4\\ \hline 4\times3\\ 6\times2\end{array}\right\}=12;\quad \left.\begin{array}{c}2\times8\\ 4\times4\\ \hline 8\times2\end{array}\right\}=16;\quad \left.\begin{array}{c}2\times9\\ 3\times6\\ \hline 6\times3\\ 9\times2\end{array}\right\}=18;\quad \left.\begin{array}{c}2\times10\\ 4\times5\\ \hline 5\times4\\ 10\times2\end{array}\right\}=20$$

DIVISÃO

A **divisão** propriamente dita tem por fim DIVIDIR um numero (dividendo) em tantas **partes iguaes** quantas as unidades de um outro (divisor), para se achar UMA **dessas partes** (quociente), o que corresponde a achar QUANTAS VEZES (quociente) o numero maior (dividendo) CONTE'M outro **menor** (divisor): quer isto dizer que o numero que representa UMA das **partes iguaes** em que o **dividendo** E' DIVIDIDO, indicado o numero dellas pelo numero de unidades do **divisor, é o mesmo** que indica o NUMERO de VEZES que o dividendo CONTE'M o divisor, e qualquer das operações dá o QUOCIENTE da divisão.

Assim, **dividindo** o numero 6 por 3, isto é, em **tres** partes iguaes, **divisor**, é **o mesmo** que indica o NUMERO de VEZES que 6 **contém** 3 é igualmente, 2, **quociente** da divisão em ambos os casos.

Das duas "noções" de divisão conclúe-se que: —

(a) **Dividir** um numero (dividendo) em tantas **partes iguaes** quantas as unidades de um outro (divisor), para se achar **uma** dellas (quociente), corresponde a **distribuir** todas as unidades do dividendo, **inteiras**, igualmente com todas as do divisor, **uma** para **cada uma** destas, de **cada vez**, cabendo tantas unidades do dividendo a **cada uma** das do divisor, quantas as do **quociente** que fica, assim, determinado.

(b) **Subtrahindo** de um numero **maior**, tomado como **dimiunendo inicial** (dividendo), outro **menor**, tomado com o **diminuidor successivo** (divisor), até se chegar a um **resto zero** (divisão exacta), ou a um **resto menor que o divisor** (divisão com resto), acha-se **quantas vezes** (quociente) o dividendo **contém** o divisor, **exactamente**, ou com uma **sobra** ou **resto** menor que este ultimo.

Donde se vê que a divisão póde ser considerada como o **inverso** da multiplicação, isto é, como uma **subtracção successiva**, ABREVIADA, em que se acha o **maior numero de vezes** (quociente) que um **mesmo diminuidor** (divisor) póde ser subtrahido successivamente de um **diminuendo inicial** (dividendo), com um resto **zero** (divisão exacta), ou um resto **menor que o divisor** (divisão com resto).

Especie do quociente. — Na divisão de **numeros concretos**, tem-se que: —

a) — No primeiro caso, o **quociente** é da **mesma especie que o dividendo**, por ser **uma das partes iguaes** em que este ultimo é dividido, indicado o numero dellas pelo das unidades do **divisor** usado como **numero abstracto**, ou por ser o **maior numero de unidades do dividendo** que **podem ser distribuidas, inteiras, igualmente com todas as do divisor.**

b) — No segundo caso, o divisor é da mesma **especie que o dividendo**, por ser nelle **contido tantas vezes** quantas as unidades do **quociente**, usado como **numero abstracto.**

A divisão é indicada — (a) pelo signal de divisão, ÷, que se lê — **dividido por,** escrito entre o dividendo e o divisor; (b) pelo **traço de fracção,** acima do qual se escreve o dividendo, e abaixo, o divisor; (c) pela **chave de divisão,** formada por duas linhas perpendiculares, para cima e para a direita, na qual se escreve o dividendo, á esquerda da primeira linha, o divisor, á direita, dentro do angulo, e o quociente abaixo da segunda linha; ou ainda, (d) por meio de dois traços de parenthese, **invertidos**, em que se escreve o dividendo, á esquerda, o divisor, entre os dois traços, e o quociente, á direita.

PRATICA

Opere-se com objectos, **gradualmente**, a partir dos numeros simples, até 20, na seguinte ordem:

1.º — Façam-se as divisões dos numeros que podem ser decompostos numa somma de **parcellas iguaes** (multiplos), isto é, que dão **divisões exactas.**

Empreguem-se e **comparem-se** os dois processos, **cada um com a sua linguagem**, e verifique-se que o quociente é expresso pelo **mesmo numero**, em ambos os casos, porém, que, no primeiro, indica **uma das partes iguaes** em que o dividendo **é dividido**, ou o **maior numero de unidades do dividendo, distribuidas, inteiras, igualmente com todas as unidades do divisor**, e, no segundo, o **maior numero de vezes** que o dividendo **contém** o divisor, **exactamente**, em ambos os casos.

2.º — (a) Façam-se as divisões desses numeros por outros **menores**, que não sejam nelles contidos exactamente, empregando os **dois processos**, e verifique-se a formação do resto, que indica uma

sobra de unidades do dividendo, **em numero menor** que o das do divisor, que não puderam ser distribuidas, **inteiras**, igualmente com **todas** as deste ultimo (1.ª noção), ou uma **sobra** de unidades do dividendo **menor que o divisor** (2.ª noção).

(b) Dividam-se, pelo mesmo processo, os numeros que não podem ser decompostos numa somma de parcellas iguaes (numeros primos), verificando do mesmo modo a formação dos quocientes e restos.

3.º — Verifique-se que os dividendos das divisões exactas são os **diminuendos iniciaes** das subtracções successivas de um mesmo **diminuidor** (divisor) até um resto **zero**, e correspondem aos **productos** que são os **totaes** das sommas successivas de uma mesma parcella (multiplicando) repetida um certo **numero de vezes** (multiplicador).

4.º — Verifique-se, finalmente, que o **resto** de uma divisão obtida pela subtracção successiva de um mesmo diminuidor (divisor), corresponde á parcella inicial **menor que a parcella repetida** de uma somma successiva assim começada.

DIVISORES E FACTORES

Quando a divisão de um numero por outro se faz **exactamente**, isto é, sem deixar resto, o dividendo é igual ao **producto do divisor pelo quociente**, e este, tomado por sua vez **como divisor**, dá tambem uma **divisão exacta**, cujo quociente é o **numero que serviu de divisor** na primeira divisão.

A divisão é, portanto, o **inverso** da multiplicação, isto é, o **producto**, tomado como **dividendo**, **dividido por um dos factores**, **dá o outro.**

Donde se vê que, na multiplicação, o **multiplicando** e o **multiplicador são**, ao mesmo tempo, **factores** e **divisores do producto**, do mesmo modo que, na divisão, o divisor e o quociente são, ao mesmo tempo, divisores ou factores do dividendo.

Toda divisão exacta dá, portanto, **um par** de **divisores** ou **factores**, que são, respectivamente, **divisor** e **quociente** de duas divisões do numero usado como **dividendo** por esses **divisores** ou **factores.**

DECOMPOSIÇÃO DE NUMEROS MULTIPLOS

PARES DE DIVISORES

Na **decomposição** de um numero multiplo em **um par ou pares** de divisores, occorrem dois casos, a saber:

1.º — A decomposição se faz por **uma só** divisão exacta que dá **um par** de **divisores** (divisor e quociente) **differentes**, ou **iguaes**, si o numero é um **quadrado perfeito.**

2.º — A decomposição se faz por **duas ou mais** divisões, cada uma das quaes dá **um par** de divisores (divisor e quociente) **differentes**, ou a ultima dá **divisores iguaes**, e o numero é um **quadrado perfeito.**

Assim, para se decompor um numero multiplo em **um par** ou **pares** de divisores, opera-se conforme com os casos acima, de accordo com a seguinte —

REGRA: Divide-se o numero dado pelos divisores primos, menores, successicamente, a partir de 2, reservando os **pares** de diivsores (divisor e quociente) das divisões exactas que os produzem, notando-se que: —

1.º — Si o numero dado é o **quadrado** de um numero **primo**, ou si o quociente da primeira divisão é um **numero primo**, o numero só póde ser decomposto em **um unico par** de divisores, **iguaes** ou **differentes**, dados pela primeira divisão, em cada caso.

2.º — Si o quociente da primeira divisão é um **numero multiplo**, continúa-se a dividir até se chegar a uma divisão cujo quociente seja **igual ao divisor da precedente immediata**, ou até se chegar a uma cujo quociente seja **igual ao divisor**, o que indica que o numero dado é um **quadrado perfeito**: continuando a dividir, obteem-se os **mesmos pares** de divisores, porém, em **ordem invertida**, até se chegar á divisão cujo **divisor** é o **quociente** da primeira.

Os diversos divisores ficam dispostos em **série crescente**, e os quocientes em **serie decrescente**, de sorte que o **primeiro divisor** é usado como **ultimo quociente**, e **vice-versa.**

Decomposição dos numeros multiplos, no limite de 20. — Applicando a regra supra á decomposição dos numeros multiplos, desde, 4 até 20, inclusive, obteem-se os seguintes resultados:

$4 \div 2 = 2, \therefore 4 = 2 \times 2$ $\qquad 9 \div 3 = 3, \therefore 9 = 3 \times 3$

$6 \div 2 = 3$
$6 \div 3 = 2$

$8 \div 2 = 4$
$8 \div 4 = 2$

$10 \div 2 = 5$
$10 \div 5 = 2$

$14 \div 2 = 7$
$14 \div 7 = 2$

$15 \div 3 = 5$
$15 \div 5 = 3$

$12 \div 2 = 6$
$12 \div 3 = 4$
$12 \div 4 = 3$
$12 \div 6 = 2$

$16 \div 2 = 8$
$16 \div 4 = 4$
$16 \div 8 = 2$

$18 \div 2 = 9$
$18 \div 3 = 6$
$18 \div 6 = 3$
$18 \div 9 = 2$

$20 \div 2 = 10$
$20 \div 4 = 5$
$20 \div 5 = 4$
$20 \div 10 = 2$

PROBLEMAS

Proponham-se problemas simples cujos dados envolvam os numeros empregados nas taboadas.

Resolvam-se, primeiro, os problemas **derivados** de cada um dos de multiplicação, verificando que **cada** problema de **multiplicação** dá **dois de divisão**, cada um dos quaes corresponde a uma das "noções desta operação, conforme é dado o **multiplicando** ou o **multiplicador**, usados como **divisor**, para se achar o **multiplicador** ou o **multiplicando**, usados respectivamente como **quociente.**

Demonstre-se a divisão, como se fez na "pratica" anterior, por meio da **distribuição** de todas as unidades do dividendo com todas as do divisor (1.ª noção), ou pela **subtracção successiva** do divisor, do dividendo, (2.ª noção), **exactamente**, ou com **resto.**

Verifique-se que, no primeiro caso, o quociente é da **mesma especie** que o dividendo, por ser **uma** das **partes iguaes** em que este ultimo **é dividido**, e, no segundo, de **especie differente**, e indica o **numero de vezes** que o dividendo **contém** o divisor da mesma especie.

Os problemas **derivados** dos de **multiplicação** devem ser **redigidos** pelos **proprios alumnos**, auxiliados pelo professor, até que possam faze-lo **por si mesmos.**

Por ultimo, serão dados quaesquer problemas de divisão, **directamente**, primeiro, com a pergunta **expressa** ou **inclusa**, e, depois, sem ella, para ser formulada pelo alumno.

Do problema de **multiplicação** dado acima, como modelo, bem como dos problemas de **areas** ou de **unidades distribuidas** "em quadro", **derivem-se** os correspondentes de **divisão**, como se vê dos derivados desse problema, a seguir: —

1.º — Distribuindo 12 laranjas com 4 meninos, quantas laranjas tocam a cada um?

Argumento e **solução:** Distribuindo as 12 laranjas com os 4 meninos, dando **uma a cada um, de cada vez**, vê-se que 12 laranjas ficam **divididas** em 4 **partes iguaes**, cabendo **uma** a **cada um** dos meninos, isto é: —

Tocam a cada menino: 12 laranjas÷4=3 laranjas.

2.º — Com quantos meninos podem-se distribuir 12 laranjas, dando 3 laranjas a cada um?

Argumento e **solução:** Si a cada menino tocam 3 laranjas, o **numero de vezes** que 3 laranjas pódem ser **subtrahidas**, successivamente, de 12, ou o numero de vezes que 12 laranjas contéem 3, dá o numero de meninos, isto é: —

Podem-se distribuir as 12 laranjas com: 12÷3=4 meninos.

MULTIPLICAÇÃO

QUADRO XX — TABOADAS DE MULTIPLICAR

PRODUCTOS DESDE 1 ATE' 20—FACTORES DESDE 1 ATE' 10

(1)
$1 \times 1 = 1$

(2)
$1 \times 2 = 2$ $2 \times 1 = 2$
$2 \times 2 = 4$

(3)
$1 \times 3 = 3$ $3 \times 1 = 3$
$2 \times 3 = 6$ $3 \times 2 = 6$
$3 \times 3 = 9$

(4)
$1 \times 4 = 4$ $4 \times 1 = 4$
$2 \times 4 = 8$ $4 \times 2 = 8$
$3 \times 4 = 12$ $4 \times 3 = 12$
$4 \times 4 = 16$

(5)
$1 \times 5 = 5$ $5 \times 1 = 5$
$2 \times 5 = 10$ $5 \times 2 = 10$
$3 \times 5 = 15$ $5 \times 3 = 15$
$4 \times 5 = 20$ $5 \times 4 = 20$

(6)
$1 \times 6 = 6$ $6 \times 1 = 6$
$2 \times 6 = 12$ $6 \times 2 = 12$
$3 \times 6 = 18$ $6 \times 3 = 18$

(7)
$1 \times 7 = 7$ $7 \times 1 = 7$
$2 \times 7 = 14$ $7 \times 2 = 14$

(8)
$1 \times 8 = 8$
$2 \times 8 = 16$ $8 \times 2 = 16$

(9)
$1 \times 9 = 9$ $9 \times 1 = 9$
$2 \times 9 = 18$ $9 \times 2 = 18$

(10)
$1 \times 10 = 10$ $10 \times 1 = 10$
$2 \times 10 = 20$ $10 \times 2 = 20$

Estas taboadas são **derivadas** das sommas **successivas** de **parcellas iguaes**, obtidas anteriormente, no limite de **20.**

DIVISÃO

QUADRO XX A — TABOADAS DE DIVIDIR

QUOCIENTES E DIVISORES DESDE 1 ATE' 10
DIVIDENDOS, DESDE 1 ATE' 20

(1)
$1 \div 1 = 1$

(2)
$2 \div 2 = 1$ $2 \div 1 = 2$
$4 \div 2 = 2$

(3)
$3 \div 3 = 1$ $3 \div 1 = 3$
$6 \div 3 = 2$ $6 \div 2 = 3$
$9 \div 3 = 3$

(4)
$4 \div 4 = 1$ $4 \div 1 = 4$
$8 \div 4 = 2$ $8 \div 2 = 4$
$12 \div 4 = 3$ $12 \div 3 = 4$
$16 \div 4 = 4$

(5)
$5 \div 5 = 1$ $5 \div 1 = 5$
$10 \div 5 = 2$ $10 \div 2 = 5$
$15 \div 5 = 3$ $15 \div 3 = 5$
$20 \div 5 = 4$ $20 \div 4 = 5$

(6)
$6 \div 6 = 1$ $6 \div 1 = 6$
$12 \div 6 = 2$ $12 \div 2 = 6$
$18 \div 6 = 3$ $18 \div 3 = 6$

(7)
$7 \div 7 = 1$ $7 \div 1 = 7$
$14 \div 7 = 2$ $14 \div 2 = 7$

(8)
$8 \div 8 = 1$ $8 \div 1 = 8$
$6 \div 8 = 2$ $16 \div 2 = 8$

(9)
$9 \div 9 = 1$ $9 \div 1 = 9$
$18 \div 9 = 2$ $18 \div 2 = 9$

(10)
$10 \div 10 = 1$ $10 \div 1 = 10$
$20 \div 10 = 2$ $20 \div 2 = 10$

Estas taboadas são **derivadas** das **subtracções successivas** anteriores, com restos iguaes a **zero**, no limite de **20.**