MARGARITA COMAS

METODOLOGÍA DE LA ARITMÉTICA Y LA GEOMETRÍA

Los CUADERNOS DE TRABAJO aspiran a facilitar el trabajo docente del magisterio ofreciéndole las normas materiales y métodos de la educación nueva, activa, en una forma práctica, de aplicación inmediata a la realidad escolar.

Huyen de toda disquisición teórica, abstracta, como es frecuente en las obras metodológicas y, teniendo en cuenta las necesidades del desarrollo infantil, los CUADERNOS DE TRABAJO exponen la materia en una forma concreta, acomodada a la labor diaria de la escuela.

Provistos de numerosos ejercicios, problemas y grabados, los CUADERNOS DE TRABAJO son la mejor guía didáctica que puede ponerse en manos del maestro, quien no tiene a veces oportunidad para recoger los materiales necesarios para sus lecciones.

Sin embargo, no son los CUADERNOS DE TRABAJO sustitutivos de la actividad del magisterio, sino que incitan a éste a plantear cuestiones y estudios que enriquecen su labor educativa.

EDITORIAL LOSADA, S. A.
ALSINA 1131 • BUENOS AIRES

METODOLOGÍA DE LA ARITMÉTICA Y LA GEOMETRÍA

PUBLICACIONES DE LA REVISTA DE PEDAGOGÍA

DIRECTOR
LORENZO LUZURIAGA

CUADERNOS DE TRABAJO

1

MARGARITA COMAS

METODOLOGÍA DE LA ARITMÉTICA Y LA GEOMETRÍA

(TERCERA EDICIÓN)

EDITORIAL LOSADA, S. A.
BUENOS AIRES

Queda hecho el depósito que
previene la ley núm. 11723

PRINTED IN ARGENTINE

Pellegrini, Impresores - Alvarez Jonte 2315 - Buenos Aires

CAPÍTULO PRIMERO

CONSIDERACIONES GENERALES

Desearíamos que este cuaderno de trabajo hiciera para el maestro sobre todo para el maestro de pueblo, que es el que por su aislamiento necesita especialmente de apoyo y ayuda, más fácil y más fecunda la preparación de la clase, sugiriéndole ideas, problemas, caminos; pero en modo alguno sustituyéndose a su propia personalidad, nunca haciendo de él un mero repetidor. La enseñanza es una ciencia y como tal resulta posible fijarle normas, leyes, reglas, pero también es, y por encima de todo, un arte, y por lo tanto no puede nada sustituir a la expresión del yo interior del artista que es el maestro; cada uno de éstos tiene su personal manera de enseñar, como todo pintor tiene la suya de pintar, y si es bueno ver, observar, saber, cómo hacen los demás, ningún pintor que merezca su nombre se conformaría con ser el mero reflejo de otro, aunque el modelo fuera un genio. Suponiendo, pues, que resultara posible condensar en un libro detalladamente la mejor manera de desenvolver todos los puntos que comprende la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, con métodos, procedimientos, material, etc., no sería deseable tomar dicha obra como modelo servil, sino a modo de agitador del propio pensar y hacer.

Por esto no nos inquieta que la extensión de este cuaderno haga imposible ocuparnos de todas las cuestiones que acostumbran intervenir en la formación matemática de los alumnos; a nuestro modo de ver es suficiente presentar algunas de ellas concretamente, en sus diferentes fases de desarrollo, de forma que se vea la aplicación de los principios pedagógicos más importantes (o considerados actualmente como tales) y las demás, si acaso, de un modo breve, a guisa de programa, indicando material, libros, ejercicios, etc., para que el maestro pueda desenvolverlas sin demasiado esfuerzo *. Hacemos más hincapie en la geometría que en la aritmética porque por un criterio estrechamente utilitario se halla aquélla un poco abandonada en gran parte de nuestras escuelas, que dedican a su compañera el mayor tiempo posible, y esto a pesar de que la geometría es quizá la rama de la matemática que más naturalmente interesa al niño (que la hace, sin saberlo, en muchos de sus juegos), siendo también el nexo natural entre las demás y base de otras materias, la geografía, por ejemplo, que se enseñan en todas las escuelas y que en algunas de sus partes resulta completamente memorista y antipedagógica sin el fundamento geométrico (trazado de planos y mapas, longitudes y latitudes, etc.). Tiene la geometría, por otra parte, un gran valor educativo al contribuir como ninguna ciencia a aclarar el concepto del espacio, no sólo en un sentido estático, sino también en el dinámico. **

Trabajo personal. — No se concibe la escuela activa,

* El camino que indicamos, en cada caso, para enfocar las diferentes cuestiones no pretende ser único, ni siquiera el mejor, sino uno de los que se consideran hoy día buenos (y a modo de ejemplo). Tampoco es necesario seguir el mismo orden ni la separación de cuestiones (los quebrados, por ejemplo, se estudian en muchas escuelas buenas a la par de los enteros), pero en toda obra precisa una prelación.

** En nuestro caso particular existe además otra razón: el haber publicado "Revista de Pedagogía" una aritmética que resume aproximadamente nuestra manera de pensar sobre el asunto para los últimos grados, mientras que no se ha hecho para geometría nada parecido.

la escuela educadora, sin el trabajo personal del niño en las diferentes ramas de la enseñanza; pero hay entre ellas, a este respecto, diferencias de grado, y en las matemáticas tiene tal importancia dicho trabajo (porque los conceptos matemáticos no admiten vaguedades, porque en esta disciplina más que en otras son sensibles las diferencias de nivel entre los alumnos, y porque los conocimientos están tan íntimamente relacionados que permiten graduar con exactitud las dificultades), que desde hace mucho tiempo, incluso en la época memorista, es costumbre intercalar en los libros de texto y de consulta ejercicios y problemas que cada uno debe resolver de por sí, y por esto también en aritmética es donde más pronto han surgido y se han perfeccionado los métodos de enseñanza llamados individuales y se han completado con más rapidez las técnicas para que los niños puedan trabajar solos en el descubrimiento de nuevas verdades y afianzamiento de las ya conocidas (Winnetka, Dalton, Mackinder). En uestras escuelas es particularmente interesante la preparación de esta labor individual, porque si bien es quizá pronto para adoptar el sistema en su totalidad, pues hay que perfeccionar antes la educación social que es un contrapeso indispensable, resulta que parcialmente es innecesaria y en una forma o en otra se viene aplicando desde muy antiguo, porque teniendo con mucha frecuencia el maestro gran número de alumnos de todas edades y condiciones, se ve precisado a dejar que nos trabajen solos mientras él se ocupa de otros. Por ello, ha parecido conveniente indicar aquí, a modo de ejemplo, la manera de proceder en algunos casos.

Método. — Aunque refiriéndose a las ciencias, en su estado actual, para adultos, pueda decirse que los métodos matemáticos, por ejemplo, son distintos de los históricos o de los lingüísticos, tratándose de la enseñanza a niños, como lo principal es la adaptación al estado mental de éstos y su sistemático perfeccionamiento, tienen todas ellas que pasar por las tres fases características de la evolución del pensar: experimental, intuitiva y racional. La aritmética y la geometría empiezan, pues, por ser como la física o la historia, natural, materias experimentales y de observación, desligándose después poco a poco del material concreto, y, por fin, del recuerdo sensible de éste, para llegar, en los grados superiores de la enseñanza, a la pura abstracción. En general se empieza manipulando los objetos acerca de los cuales hay que calcular (manzanas, abalorios, niños, pelotas), pasando después sucesivamente, al manejo de otros objetos que representan los que sirven de base al cálculo (palillos y fichas por ganado, salvajes, niños), a los dibujos u otros representaciones similares, ya de las mismas cosas, ya de sus sustitutos (rayas por palillos y niños o árbole, circulitos por fichas y manzanas, etc.), a las imágenes mentales de los objetos o sus representaciones (por ejemplo, memoria visual del cuadro que insertamos después para facilitar el estudio de la numeración), y, por último, el pensar abstracto.

Historia. — Conviene recordar que el proceso seguido por la humanidad para la formación de los conocimientos científicos es, en sus grandes líneas, el que mejor se adapta a la adquisición de dichos conocimientos por el niño, pues que la verdad biológica del paralelismo entre el desenvolvimiento del individuo y el de la especie no se refiere sólo al desarrollo físico, y como existen aún pueblos, que se hallan en un estado análogo al de nuestros antepasados hace más de dos mil años, resulta muy instructivo el estudio, junto a la historia de cada ciencia, el estudio de la misma entre los habitantes menos civilizados de la tierra, pues de este modo consiguen aclararse algunos puntos que aquélla deja oscuros. Así se sabe hoy que, en su origen, respondieron las matemáti-

cas a una necesidad práctica: en la lucha con su medio físico, descubrió nuestro lejano abuelo las ideas más sencillas y fundamentales acerca del número, la forma, el espacio, etc.; este estímulo, que pudiéramos llamar práctico, nunca cesa, y en nuestros días sigue contribuyendo a los progresos (en la ingeniería, por ejemplo); pero está en cierto modo oscurecido por otros dos que aparecen más tardíamente y que van luego adquiriendo importancia: los factores que pudiéramos llamar científico (afán de sistematizar), y estético (estudiar por el gusto de saber, por el placer que ello proporciona). Pero el alumno de la escuela primaria sobrepasa apenas el primer estadio, y carece, por lo tanto, de sentido el hacerle estudiar aritmética y geometría de un modo abstracto y sistemático; lo natural es hacerle descubrir cada una de las cuestiones importantes como las descubrió el hombre primitivo, aunque los trámites puedan, naturalmente, abreviarse, como se abrevia en el desenvolvimiento del individuo la evolución de la especie. Por esto se piensa en la actualidad, por ejemplo, que empezar por la demostración clásica del valor de los ángulos del triángulo o del teorema de Pitágoras, es un absurdo aun para los alumnos del bachillerato, si antes no se han comprobado experimentalmente estas verdades mediante triángulos recortados de papel o algún procedimiento intuitivo parecido, pues que los hombras han necesitado siglos para pasar de un estadio al otro. Pero como en la enseñanza, lo mismo que en todo, es muy difícil mantenerse en un correcto término medio, resulta que ahora se quejan en algunos países de que, por hacer excesivo hincapié en la base concreta, se descuida la parte esencial, el razonamiento; nosotros no hemos caído en este defecto, estamos, por el contrario, faltos de elementos intuitivos, pero bueno es saber que existe para prevenirnos a tiempo, no vaya después a resultar la reacción excesiva.

Uso de varios sentidos. — Otro punto interesante que hay que tener en cuenta es que en la fase experimental de las matemáticas no es sólo el sentido de la vista el que actúa o debe actuar, como se ha venido haciendo tradicionalmente, sino que, para que la imagen sea lo más completa posible, precisa que intervenga el acto, el sentido muscular, etc. "Los niños deben hacer", dice hoy todo el mundo, y *hacer* no es sólo *ver*. En este aspecto ha sido muy fecunda la obra de la Dra. Montessori.

Símbolos. — Los símbolos aritméticos, como los químicos y como todos los símbolos en general, son principalmente un modo de abreviar, haciendo así posibles operaciones que de otra forma fuera dificilísimo abarcar; su valor no puede, por tanto, apreciarse por los que no sienten aún tal necesidad. Por esto se cree actualmente que conviene realizar durante bastante tiempo cálculos y operaciones de un modo puramente mental o escribiendo las cantidades con palabras, hasta que sean los mismos niños los que reclamen un medio más breve de fijar los datos y el resultado. Más tarde, cuando su desenvolvimiento intelectual lo permita, pueden introducirse del mismo modo los símbolos algebraicos, que no serán así nunca a modo de cuco que asusta o de complicaciones sin sentido, como ocurre ahora muchas veces, sino una especie de "taquigrafía" que simplifica las cosas y que, por lo tanto, es muy apreciada y se desea conocer bien.

Correlación de materias. — Como lo importante en la enseñanza matemática elemental no es la cantidad, sino la calidad de los conocimientos; como en la escuela primaria, felizmente, no hay prisa, no tiene importancia el que se pase un año sin poder aprender tal o cual punto del programa; y como el deseo de realizar el plan completo de un curso sistemático lleva frecuentemente a forzar la marcha con tal de tratar todas las cuestiones propuestas, da más resultado, sobre todo al principio, la

agrupación de unas cuantas verdades fundamentales alrededor de un problema práctico que interese a los niños resolver. Así se sigue el camino marcado por la historia, y así, forzosamente, hay que adoptar el método natural, pasando de lo concreto a lo abstracto, de lo particular a lo general, del hacer al pensar. Por esto conviene que la aritmética y la geometría estén íntimamente relacionadas entre sí y con otras disciplinas escolares, que son las que pueden plantear los problemas cuyas soluciones son motivo del descubrimiento de los principios matemáticos; sirven, especialmente, la geografía, los trabajos manuales y el dibujo (estos últimos, a su vez pueden ser una contribución al estudio de otros temas, verbigracia, de un período histórico, si quieren reproducirse o imitarse objetos entonces en uso). Se establece así una correlación entre todas las materias del programa, que dejarán de ser los departamentos aislados, y a veces cuidadosamente separados, que resultan a menudo en la actualidad, con grave daño para la formación del alumno. De cuando en cuando convendrá, naturalmente, hacer en el momento oportuno una revisión sistemática de lo aprendido, encajando cada asunto en el lugar que le corresponde, estableciendo entre ellos las necesarias relaciones, haciendo que vayan formando un todo orgánico en vez de ser una serie de conocimientos dispersos, esporádicos; pero del mismo modo que para clasificar una biblioteca lo primero que se necesita es tener libros, para organizar los conocimientos precisa haberlos adquirido y no únicamente tener un remedo de ellos mediante la simple superposición de lo que han aprendido otros.

Proyectos. — De ahí que sea interesante discurrir proyectos, unas veces generales, para todas o casi todas las materias de la enseñanza, y otras parciales a fin de llegr al descubrimiento de algunas interesantes propiedades matemáticas. Así como Egipto pudo tener una primera noción del teorema de Pitágoras por las necesidades de su agrimensura, el niño conseguirá llegar a parecido resultado si se propone dividir el campo escolar en parcelas para cultivarlo entre las diferentes secciones, o si desea medirlo por otra razón cualquiera, o si queriendo hacer el plano de un cierto terreno necesita tomar de él algunas dimensiones que se puedan fijar exactamente. En la escuela de Decroly, por ejemplo, se parte para el estudio de las matemáticas de las ocupaciones siguientes: * distribución del alimento a los animales, el peso y la contabilidad de esta nutrición, la compra y la comprobación de las cantidades entregadas por el comerciante, la compra y la venta de objetos para la clase (tienda escolar), la administración económica de un periódico, la compra de las provisiones para la cantina escolar, el consumo de estas provisiones por días, por meses, por semanas, la contabilidad de las comidas tomadas por los niños, los gastos de transporte de la casa a la escuela y viceversa, la compra de las primeras materias para el trabajo manual, el cálculo de precio de los objetos fabricados en dicha clase; medidas de los propios niños (pesos y tallas) con representaciones gráficas de pérdidas y ganancias; medición de la temperatura dentro y fuera de la clase, de la del agua, de la de los niños y los animales domésticos; medida del agua caída al llover, de la duración del día, etc.; la compra y la utilización de las semillas y de las plantas para el jardín y para el adorno de la clase; el dibujo de gráficas indicando los progresos en distintos juegos y concursos, etcétera.

Extractamos de otra obra de esta misma editorial **, a título de ejemplo, un proyecto complejo, princi-

* DECROLY ET HAMAÏDE: *Le calcul et la mesure au premier degré de l'Ecole Decroly.* Delachaux et Niestlé. Neuchatel, 1932.

** M. COMAS: *El método de proyectos en las escuelas urbanas.* Buenos Aires, Losada, 1951.

palmente de geografía y geometría, para niños de ocho a nueve años.

Con motivo de la visita al parque zoológico, al de atracciones, a la sesión infantil de un teatro, etc., se plantea el problema de "saber ir", pues el maestro asegura que no llevará ningún alumno que no sea capaz de encontrar solo el camino, ya que si en la aglomeración se extraviara podría ocurrirle una desgracia. Se discute el asunto, se consulta el plano de la ciudad "lo mismo que hacen las personas mayores", y, como es natural, no se entiende; algunos proponen preguntar el camino en sus casas o a un guardia en la calle, pero se demuestra que tales procedimientos están muy expuestos a error. Así nace el proyecto de aprender a manejar el plano. Como el de la ciudad parece muy complicado se resuelve empezar por otro más sencillo... Plano de la clase hecho en el suelo; al principio se contentarán probablemente los alumnos con trazar líneas más o menos paralelas a los dos lados * indicando, eso sí, todos los detalles, muebles, huecos, cuadros. Se observa que unas cosas resultan demasiado pequeñas, otras demasiado grandes. ¡Si tomáramos medidas!, dice alguien. Pero no podemos dibujarla tan grande como es: primera idea de magnitudes proporcionales; hacer las líneas cinco, diez veces menores. Se traslada el plano al papel "porque en el suelo se va a borrar"; hay que hacerlo más pequeño aún, nueva relación proporcional (emplear al principio papel cuadriculado y convenir en que cada cuadro representa un metro, dos, etc.). Ahora se presenta otro problema que no existía cuando dibujábamos en el suelo por ser entonces paralelas las líneas y sus representaciones; el de la orientación. ¿Cómo sabremos lo que en nuestro papel representa la derecha, la izquierda? Los hombres

* Este puede ser también un punto de partida para el estudio de figuras semejantes.

han hecho un convenio (puntos cardinales, etc.). Como queremos que nuestros planos resulten lo más bonitos posible, procuraremos que las líneas sean bien derechas: trazado de paralelas, perpendiculares; uso de la regla y después del cartabón *. Indicación del sitio donde están los muebles, las ventanas. Dibujo de un plano en el encerado y trazado de itinerario a los distintos lugares de la clase, pasando por determinados sitios, yendo en tal dirección, torciendo a la derecha, etc., (niños divididos en bandos, unos proponen, otros obedecen, haciendo de verdad el recorrido, dibujando con tiza de color sobre el plano etc.). Ordenes por escrito. Trazado de itinerario sobre el plano, lectura de los mismos a viva voz.

Aplicación de las nociones adquiridas al dibujo de un plano de los alrededores de la escuela; se toman medidas, y, si el maestro cree a los alumnos suficientemente preparados, se introduce la medición de ángulos; si es demasiado pronto, se trazan las calles a ojo. Igualdad de ángulos por yuxtaposición, ídem usando el transportador; fabricación de uno de estos aparatos simplificado; introducción de la noción de ángulos opuestos por el vértice, y comprobación práctica de su igualdad como medio de medir los ángulos salientes (esquinas), colocando sobre ambas paredes dos reglas que se cruzarán, y en cuyo ángulo entrante se puede aplicar un transportador, o adoptar un trozo de cartón que se coloca a su vez sobre éste; hacer lo mismo con los ángulos adyacentes, etcétera. Uso de los puntos cardinales como medio de comparación y de mediación de ángulos formados por fachadas, calles,etc.; manejo empírico de la brújula. Uno de los planos dibujados en el encerado, el que mejor resulte, se copiará después en papel fuerte y colores

* Puede seguirse también ahora el estudio de los ángulos rectos y oblicuos, de los rectos y convergentes, etc., siguiendo un camino análogo al que indicamos más adelante.

atractivos y se guardará en el museo, sacándolo cuando se juegue, como repaso, a esconderse en una determinada calle, o a buscar cierto edificio según las indicaciones que sus compañeros le den, etc.; se harán copias reducidas que guardarán los alumnos.

Después de esto se está ya preparado para manejar el plano de la ciudad, punto de partida del proyecto, y con él se harán ejercicios de lectura análogos a los que acabamos de describir, insistiendo especialmente en el camino del parque, teatro, o lo que sea, que se tomó como motivo inicial.

Otros ejemplos de proyectos. — El deseo de adquirir para la escuela algo que interese mucho a los niños, verbigracia, un aparato de cine, puede ser causa de interesantes estudios matemáticos. Después de preguntar el precio, cabe, por ejemplo, calcular el valor según los descuentos que diferentes casas puedan conceder, teniendo en cuenta el destino que ha de dársele y los pocos fondos de que se dispone. ¿Cuánto tendría que poner cada alumno si se repartiera el gasto en partes iguales? (razón para hacer una división aproximada por decimales). Como resultará demasiado para reunirlo todo a la vez, se piensa en la ventaja de una hucha, (contabilidad que pueden llevar los pequeños). ¿Se podría ir pagando a medida que se recogiera? Ventas a plazos y al contado; observar prácticamente las diferencias de precios, buscar la razón. También cabría pedir prestada al Banco una suma suficiente para pagar el aparato, e ir amortizando capital e intereses con el dinero que se fuera recogiendo. Visita a un Banco para obtener todos los informes necesarios y deducir en consecuencia cuál es el procedimiento que más conviene. Idea de lo que es pagaré, una letra, un cheque, etc. Noción del valor del capital. Como un buen medio de allegar recursos para amortizar el dinero invertido es aprovechar el aparato para dar algunas sesiones a las familias, que acudirían pagando cada una una pequeña cantidad, interesa hacer el cálculo de lo que podría recogerse: capacidad de la sala, número de personas que pueden colocarse en ella, cantidad probable de concurrentes teniendo en cuenta la matrícula y el número de individuos de cada familia (término medio después de hacer una estadística y una gráfica), valor de lo que se recaudará haciendo pagar 5, 10, 15 centavos por persona, un peso por familia, etcétera. Viene después, si el aparato se adquiere, la realización de todas las operaciones proyectadas, la confección de papeletas de entrada para la sesión, la elección de taquillero entre los que mejor sepan calcular rápidamente y manejar la moneda, etc., etc.

La organización de una excursión proporciona también motivo para un verdadero cursillo de matemáticas, aritmética y geometría, al estudiar o confeccionar el mapa y reproducirlo en pequeño para que uno lo enseñe en su casa, calcular el coste, repartir equitativamente los gastos, etc. Otros proyectos que pueden emprenderse son, por ejemplo, para alumnos algo mayores, el estudio de los grandes servicios de una ciudad, el de los beneficios producidos por el cultivo de algún producto típico de la región, por ejemplo, la naranja de Tucumán (término medio de producción de naranjas por árbol, precio de venta, cálculo del valor del producto de cada naranjo, gastos por árbol, labores, abono, riego, renta de la tierra, gastos de exportación, impuestos, etc., etc.) ; la instalación de una granja escolar, la organización económica de una fiesta, de una tómbola, la instalación de un campo de juegos (medidas, planos, coste del alquiler, de la preparación, sociedad deportiva para hacerse cargo de estos, gastos, cuota necesaria dado el número de socios probables, etc.), el planeamiento de un jardín (distribución de macizos, plantas necesarias, coste, etc.).

CAPÍTULO II

LA NUMERACIÓN

PRIMER GRADO

Primera etapa: del 1 al 10. — El objeto de estas primeras lecciones de aritmética es completar y sistematizar los conocimientos adquiridos esporádicamente por el niño antes de su asistencia a la escuela, fijar en su mente las combinaciones numéricas hasta 10, acostumbrarle a aplicar estos conocimientos a nuevos casos y enseñarle los símbolos de dichos números y los significados de los signos +, —, =, y más tarde, ×.

Material: Fichas (preferentemente con dos caras distintas), palillos, monedas, botones, cuentas o abalorios para enhebrar, y si es posible, las barras de la Dra. Montessori (de 1 *dm* a 1 *m*, divididas en *dm* pintados de diferente color) y las tarjetas y cuadros señalados en las páginas 23 y 24.

Se van contando diferentes objetos, llegando al principio sólo hasta tres, y aumentando luego el número: libros que hay en la mesa, cristales de la ventana, niños en un banco, monedas en la mano, etc. Repetición correcta de las palabras. Se inventa algún juego para que tenga interés el contar arriba y abajo, por ejemplo, se imagina que el espacio entre dos libros sobre el pupitre es el corral del ganado y que las fichas son las ovejas que va encerrando por la noche el pastor, contándolas a medida que entran: una, dos, tres, etc. A la mañana siguiente se sacan contando las que van quedando dentro: nueve, ocho, siete. Se pueden introducir más adelante variaciones, haciendo que las fichas representen mulas o bueyes que entran en el establo por parejas, y entonces se cuenta: dos, cuatro, seis, y al revés, seis, cuatro, dos. Otro juego apropiado es el de hacer con bloques o dados una doble escalera ascendente y descendente, contando a medida que se suben y se bajan los escalones. Si se tienen las barras del sistema Montessori se las colocan por orden, se cuentan las divisiones y las barras, se nombra a éstas por los decímetros que tienen, etc. (no insistimos por ser el sistema muy conocido).

Se hacen sumas y restas muy sencillas: En el primer pupitre hay dos niños, si quitamos uno ¿cuántos quedan? ¿Cuánto son dos monedas y una moneda? Hay cuatro niños en la pizarra, se van dos a su sitio, ¿cuántos quedan? ¿Don manzanas y tres manzanas? Cuatro gomas, se pierden tres, ¿cuántas quedan? Luisita compró cinco castañas y dió dos a Pepe, ¿cuántas comió? Como todos quieren contestar y no hay manera de saber quién lo dice bien, se sugiere que mejor sería poner la respuesta en la pizarrita, y así el maestro puede verlas una después de otra; pero en vez de escribir los números con letras se usa una abreviatura más fácil, 3.

Ejercicio y problemas resueltos oralmente, primero con cantidades no mayores de cinco, después hasta nueve. Por ejemplo: Supongamos que cinco de las fichas son cinco árboles, el viento tira dos, ¿cuántos quedan de pie? Jorge tiene cuatro monedas en su bolsillo derecho y tres en el izquierdo, ¿cuántas en total? En la selva hay seis tigres, los cazadores matan dos, ¿cuántos quedan? Una ardilla recoge ocho nueces y después de comer un rato le quedan dos, ¿cuántas comió? (Fijarse en la sustitución del objeto real por el recuerdo).

Se puede hacer también, si no se abusa, algunos ejercicios de este tipo. Dice el maestro: ¿tres y uno?, ¿uno y dos?, ¿dos y cuatro?, ¿tres y tres?, y los niños van contestando; o se preguntan unos niños a otros formando bandos. Se siente así cada vez más la necesidad de la representación escrita y se va aprendiendo el valor de las diferentes cifras.

Para variar, se puede reproducir, como hace Decroly, los ejercicios y las rondas que los niños ejecutan en sus juegos libres o en sus clases de rítmica, usando habas, fichas u otros objetos cualesquiera para representar a los alumnos, con lo cualse acostumbran éstos a agruparlos dos a dos, tres a tres, etc., y colocarlos de diferentes modos, en filas paralelas, en círculos, formando cruz, etcétera, con todo el interés que tienen para los pequeños las imitaciones de actos humanos.

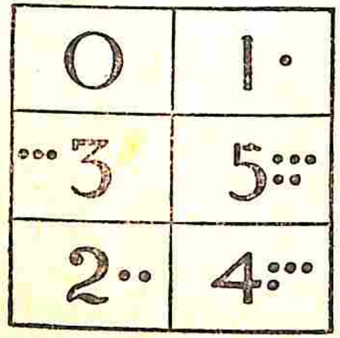


Fig. 1.

Se insiste sobre el valor de las cifras.

Para que los niños se afirmen en el conocimiento de las cifras puede emplearse con éxito el material que aconseja Miss Mackinder * y que les permite trabajar, en gran parte, solos: unas tarjetas en las que se han cosido abalorios y otras del mismo tamaño con grandes cifras impresas, un indicador o cuadro mural (fig. 1) dividido en seis partes conteniendo cada una una cifra y el número correspondiente de pequeños círculos, ambos de un color determinado y diferente de los demás, y también dos tableros (fig. 2) conteniendo uno las cifras y el otro el número correspondiente de circulitos, habiendo debajo de unas y otros espacios vacíos para colocar unas tarjetas que se guardan en una bolsa colgada de dichos tableros (que pueden ser cartones).

El niño saca de una caja que ha colocado en su pupitre (después de ir solo a buscarla) una tarjeta con una cifra o un grupo de abalorios, y con ella en la mano se dirige al indicador y busca la cifra o el grupo análogo,

* Véase *El método Mackinder*, por Margarita Comas, Buenos Aires, Losada, 1945.

observa cuáles son el grupo o la cifra asociados con él, cuenta uno a uno los elementos del grupo y vuelve a su sitio a colocar juntos la cifra y el grupo correspondiente de abalorios. Una vez aparejadas todas las tarjetas de la caja ha terminado la tarea y enseña el resultado a la maestra que hace algunas preguntas para cerciorarse (en-

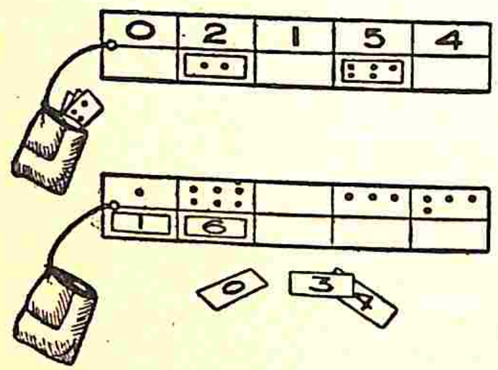


Fig. 2.

séñame la cifra 3, dame 2 porotos, etc.); si como es probable, la seguridad no es completa, se vuelve sobre el mismo proceso usando diferente material los tableros y los cartoncitos de las bolsas a fin de que no llegue el cansancio.

Cuando se comprueba que el niño ya no cuenta los abalorios y botones, que ya no siente la necesidad de recurrir a la tarjeta en que están cosidos para comprender el valor del signo se pasa a otro cuadro mural en que están representados el resto de las cifras y se le dan nuevas cajas de tarjetas; en ellas los números están también dispuestos sobre la base tres así: 5 ∴., 6 ∴:, 9 ⁝⁝⁝, etc.

Pueden usarse además con este objeto las tarjetas de la primera serie de Winnetka * que tienen en un lado un grupo de animales y en el otro la cifra correspondiente

* Véase *El sistema de Winnetka en la práctica*, por Juan Comas. Publicaciones de la "Revista de Pedagogía", Madrid, 1930.

(fig. 3). Para cada número hay tres cartoncito a fin de representar tres combinaciones posibles.

Una vez aprendido el valor de las cifras, pueden hacerse algunos ejercicios para afianzar los conocimientos.

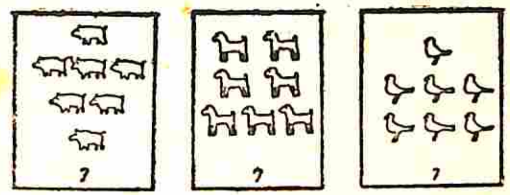


Fig. 3.

Da buen resultado el que recomienda la Dra. Montessori y que puede hacerse en cualquier escuela porque no necesita material: en una caja se tienen numerosas hojas de calendario (de las cuales se han recortado las partes superior e inferior que contienen letras) con cifras, preferentemente rojas, del 0 al 9; los papelitos están doblados cuidadosamente, y los niños los van sacando uno a uno, llevándoselos a sus respectivos sitios; allí mira cada uno el suyo sin que nadie lo vea, lo vuelve a doblar "para guardar el secreto", y después, dejándolo sobre el pupitre (con lo cual tiene que conservar el recuerdo mientras va, viene y busca), se acerca a una mesa donde hay gran número de objetos fáciles de manejar (cubos, fichas, etc.), toma la cantidad que le ha tocado en suerte (nada si tiene el cero), los coloca en el pupitre dos a dos formando columna y espera a que la maestra pase para comprobar.

Conocimiento más detenido de cada uno de los nueve primeros números. Tomemos, por ejemplo, el 5. Cada niño tiene frente a él, en el pupitre, 5 palillos, 5 fichas, 5 monedas; se señalan otros grupos de 5 objetos (dedos de la mano, botones de un traje). Se escribe: 5 peras, 5 palillos, 5 dedos, etc. Hagamos un grupo de 5 alumnos, ¿cuántos niños y cuántas niñas pueden entrar (si no hay alumnos más que de un sexo, se pueden representar las dos modalidades por los colores de las fichas). Cinco niños, 4 niños y 1 niña, 3 niños y 2 niñas, 2 niños y 3 niñas, 1 niño y 4 niñas, o 5 niñas. Hay 5 niños de pie al lado del maestro, si vuelven 2 a sus sitios, ¿cuántos quedarán? Se pasa después a otro tipo de problemas en que hay más de una operación, y las fichas o los palillos representan los diferentes objetos: Había 5 gusanos en el sendero, un hombre aplastó 1, un pájaro comió 2, ¿cuántos quedan? Antonio tenía 5 avellanas, las cascó y encontró 3 vacías que tiró, alguien le dió 2 más y perdió 1, ¿cuántas le quedaron? El paso siguiente es dejar los objetos a un lado: Un nio tenía 5 gatitos, vendió 2 de sus gatitos a otro niño, ¿cuántos quedan?

El análisis puede completarse imaginando varias maneras de colocar 5 objetos. ¿Qué dibujos podemos hacer con las 5 fichas? (En algunos casos pueden ser los mismos niños los que hagan de fichas, desplazándose), y también reconociendo rápidamente grupos no mayores de 5 objetos que se lanzan al aire o que se enseñan por un instante.

Como hay que evitar a toda costa que los niños se aburran y pierdan interés, no conviene prolongar el análisis de un número, hasta agotarlo, sino que es mejor variar los ejercicios, introduciendo de cuando en cuando cuestiones nuevas y sugestivas, al mismo tiempo que, con diferente material, se afianza lo ya conocido.

En relación con esta composición y descomposición de los números se introducen, cuando llega el momento oportuno, los signos +, —, = a manera de abreviaciones. Se parte, por ejemplo, de un problema sencillo. Chita tenía tres bombones, su mamá le dió dos más, ¿cuántos tuvo entonces? Los niños escriben la respuesta 5 "porque tres y dos son cinco". Indiquémoslo con cifras que es más corto y se ve mejor; así, 3 + (y) 2 = (son) 5. Los niños hacen

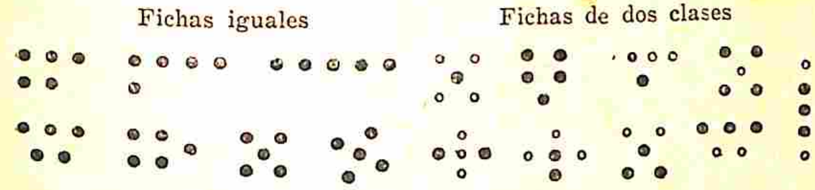


Fig. 4.

combinaciones con los dos colores de las cifras y las anotan a continuación, y en otros casos el maestro es quien escribe la igualdad que ellos traducen por la colocación de las fichas, o él dispone las fichas y ellos escriben la igualdad.

$3+2=5$ $3+1=4$ $2+1+2=5$

Del mismo modo se aprende el signo —, y cuando ya conocen los tres pueden repartírseles tarjetas con operaciones indicadas para que las resuelvan individualmente, ayudándose con fichas o abalorios, y escriban los resultados; cabe también dibujar combinaciones de circulitos u otros dibujos que los niños deben traducir en cifras. Ejemplos de tarjetas:

3+1=	2+2=	1+3=	3−1=	4−3=	2+1+2=
1+2=	1+3=	2+3=	4−2=	3−2=	4+1−2=
2+2=	2+3=	2+2=	3−3=	5−2=	5−1−1=
1+4=	4+1=	3+2=	3−2=	4−1=	2+3−4=
3+2=	3+1=	1+4=	2−1=	5−4=	3+1−2=

(El recortado de las tarjetas puede constituir para los niños un excelente ejercicio de trabajo manual o de geometría, y el poner las operaciones indicadas es para el maestro labor sencilla que le evita otras).

Segunda etapa: Del 10 al 100. — Se parte de la comprensión (no del mero enunciado) del hecho que los números grandes pueden manejarse por ser considerados en la práctica como formados por agrupaciones de otros más pequeños.

a) Supongamos que nos proponemos averiguar si en la clase hay más niños que niñas o viceversa; como son muchos y no sabríamos contarlos podemos irlos tomando uno a uno y formando parejas; quedan 3 niñas sin pareja, y por lo tanto hay 3 niñas más que niños. El mismo procedimiento puede aplicarse para comparar el número de muñecas y vestidos que para ellas se tienen, de soldados y caballos, etc. Puede después recurrirse a los palillos que representarán caballos y las fichas que representarán coches o bien niños y pasteles, y en los casos en que el número inferior sea conocido se expresará el superior en función de aquel, verbigracia, 14 será 6 más 8.

b) Después de comparar, por ejemplo, dos grupos de 32 fichas y 25 palillos, 1 a 1, y ver que la diferencia es 7, podemos querer saber cuántos hay en cada grupo, y como en conjunto no somos capaces de contarlos, podríamos hacer montones de 3, de 4, etc., y así nos daríamos cuenta de la cantidad. Agrupando en 5 los palillos y las fichas resultan 5 montones de los primeros y de las segundas 6 y sobran 2; comparando los montones se ve, pues, que la diferencia es, según habíamos visto, 7 (5 + 2). Se repiten las agrupaciones con otros números y otras bases, siendo el 10 una de tantas.

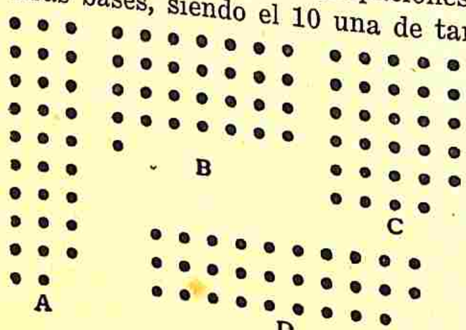


Fig. 5.

A. Nueve *treses* y dos, o

B. Cuatro *sietes* y uno, o

C. Cinco *cincos* y cuatro, o

D. Dos *dieces* y nueve.

c) La numeración decimal. De 10 a 20, se describen y se representan números descomponiéndolos en grupos de 3, 4, 5, etcétera.

Se dice entonces a los niños que para mejor entenderse y probablemente a causa de los dedos de la mano, las gentes han resuelto hacer montones, grupos, siempre de 10. Cada uno en su sitio coloca ahora en el pupitre, agrupándolos por dieces, manojos de palillos comprendidos entre 10 y 19. Se nombran los grupos dando los nombres de 11 a 15 como abreviaturas de 10 y 1, 10 y 2, etc. Como el grupo de 10 palillos se repite en todos los números lo sujetamos con una goma para más facilidad.

Problema: Juan tiene 10 confites, su tío le dió dos más, ¿cuántos tiene ahora? (Se resuelven con ayuda de los palillos que representan confites).

Luisa compra un armarito para su muñeca por ocho monedas y una mesita por cinco, ¿cuánto gasta? (Un peso = diez monedas).

José tenía 16 canicas y jugando perdió siete, ¿cuántas le quedan?

Ejercicios: Con ayuda del material concreto pueden los niños resolver adiciones y sustracciones, que pondrá el maestro en el encerado o estarán escritas en tarjetas:

9+2	9+4	9+8	9+9	8+3	8+8
8+7	7+4	7+7	7+6	7+9	6+5
6+9	5+6	5+9	4+8	3+9	7+9

11 − 2	11 − 4	11 − 5	11 − 8	12 − 3	12 − 4
12 − 9	12 − 8	13 − 4	13 − 7	13 − 5	14 − 5
14 − 9	15 − 9	16 − 7	17 − 9	17 − 8	18 − 9

En esta etapa se repetirán los ejercicios indicados antes para reconocimiento de los números como grupos de elementos. Por ejemplo:

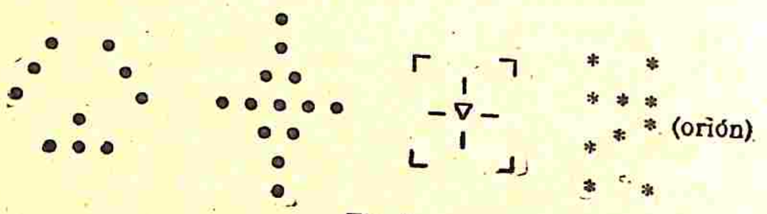


Fig. 6.

De 20 a 100. Se colocan 19 palillos en el pupitre, se añade uno más; hay dos grupos de 10, son *veinte*. Algunos ejemplos de números entre 20 y 30. Nomenclatura. Ejercicios de contar con palillos, haciendo montones de diez y atándolos con una goma; ídem con otros objetos. El maestro dice una cantidad y los niños ponen sobre su pupitre los objetos correspondientes, mostrando claramente la agrupación por dieces; otras veces enseña el maestro los objetos y dicen los niños el nombre.

Problema: Un ganadero tenía 25 bueyes, compró 20 más, ¿cuántos poseía entonces? El pupitre representa el campo; se colocan palillos (dos paquetes y cincos sueltos) que representan los bueyes; se introducen luego los que se acaban de comprar, se cuenta: 45.

Problema: En la clase había el año pasado 31 niños, ahora hay 39, ¿cuántos ha aumentado la matrícula? Los niños pueden representarse por fichas; se cuentan primero 31, poniendo cada 10 en una bolsita; después se cuenta 39, haciendo lo mismo: hay igual número de bolsas, pero las fichas sueltas son diferentes; se restan éstas.

Problema: La sección primera y la segunda de la escuela hacen juntas una excursión, ¿cuántos boletos del ferrocarril hay que comprar si en la primera hay 27 niños y en la segunda 34? (Los niños pueden representarse en este caso por circuitos de los cuales cada 10 se encierran en un rectángulo).

En cuanto se han familiarizado los alumnos un poco con los números hasta 100, se siente la necesidad de escribirlos, como se hacía con los más pequeños. Supongamos que queremos escribir el número 43; está formado por cuatro haces o *decenas* de palillos y tres palillos sueltos o *unidades*.

Cuarenta y tres	= 4 haces	+ 3 palillos.	
	= 4 decenas	+ 3 unidades.	
	= 4 d	+ 3 u	

Ejercicio de escritura de cantidades en esa forma hasta que resulte completamente familiar. Se piensa después en que si convenimos en poner los haces o decenas siempre a la izquierda podría suprimirse la d y la u. así: 43. Ejercicios.

¿Cómo escribiremos 20 canicas? Veinte son 2 decenas; podremos, pues, poner 2 d; pero hemos dicho que las decenas se colocan siempre a la izquierda de las unidades y que haciéndolo así no hay necesidad de escribir la inicial; como aquí no hay unidades, es decir, hay cero, será 20.

Ejercicio: El maestro indica un número, por ejemplo, 52, y los niños cuentan los palillos correspondientes y escriben 52; el maestro escribe otras veces un símbolo en la pizarra y los niños dicen lo que representa y colocan sobre su pupitre los palillos indicados. Una manera de aumentar el interés es dividir la clase en dos partidos que alternativamente hacen uno u otro papel.

Para afianzar estas nociones puede usarse una variante del ejercicio antes indicado con las hojas del calendario: En una caja hay números del 10 al 19, y los niños deben sacarlos y hallar su significado poniendo al lado los abalorios correspondientes; un niño toma, verbigracia, el 16, lo copia en su pizarrita, coloca 10 abalorios enhebrados en un alambre y 6 sobre la pizarrita, los cuenta todos juntos y halla que 16 significa 16. De la misma manera procede con los demás términos y al acabar lleva la pizarrita a la maestra para que ésta compruebe. Cuando el niño está completamente seguro de que 10 abalorios son una decena, se le entrega una permanente como indica la figura 7 y también una nueva serie de tarjetas con los números de 20 a 29. Cuando las domina se le dan otras de 30 a 39, y así sucesivamente.

Un buen motivo para cálculos numerosos e interesantes de composición de números es el arreglo de una mesa: cada niño tiene una cuartilla, palillos (mejor de dos longitudes) y fichas (preferible de dos colores o tamaños), y tienen que poner la mesa "para una familia compuesta, por ejemplo, de padre, madre, hijos e hijas"; diferentes maneras de colocarse, cantidad de cucharas, tenedores y platos necesarios según el menú, etc. A medida que se adelanta en comprensión puede aumentarse el número de individuos, la complicación del menú, las condiciones para la colocación. Con el mismo objeto puede discurrirse la colocación en la sala de clase de pupitres individuales y bipersonales, sentando en ellos niños y niñas en combinaciones diversas, dejando pupitres vacíos, etc.

Problemas: María tiene 5 estampas y Juanita tres veces más, ¿cuántas tiene ésta? Juan compró un caballo por 8 monedas (ochenta centavos) y Pepe le dijo: "el mío vale cuatro veces más", ¿cuánto vale el de Pepe? En una

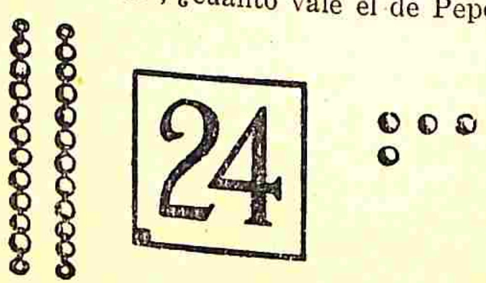


Fig. 7.

jaula hay 6 conejos, Miguel quiere contar las patas y no puede, ¿sabemos nosotros cuántas hay?

En esta etapa empieza a ser más útil el signo de dividir. Se reparten 8 abalorios entre 4 cajitas, 10 canicas entre 2 niños, 12 lápices entre 4 alumnos. Se calcula cuánto costará una goma si dos han valido 4 monedas, un libro si media docena valen 2 pesos, etc. Se escriben los resultados:

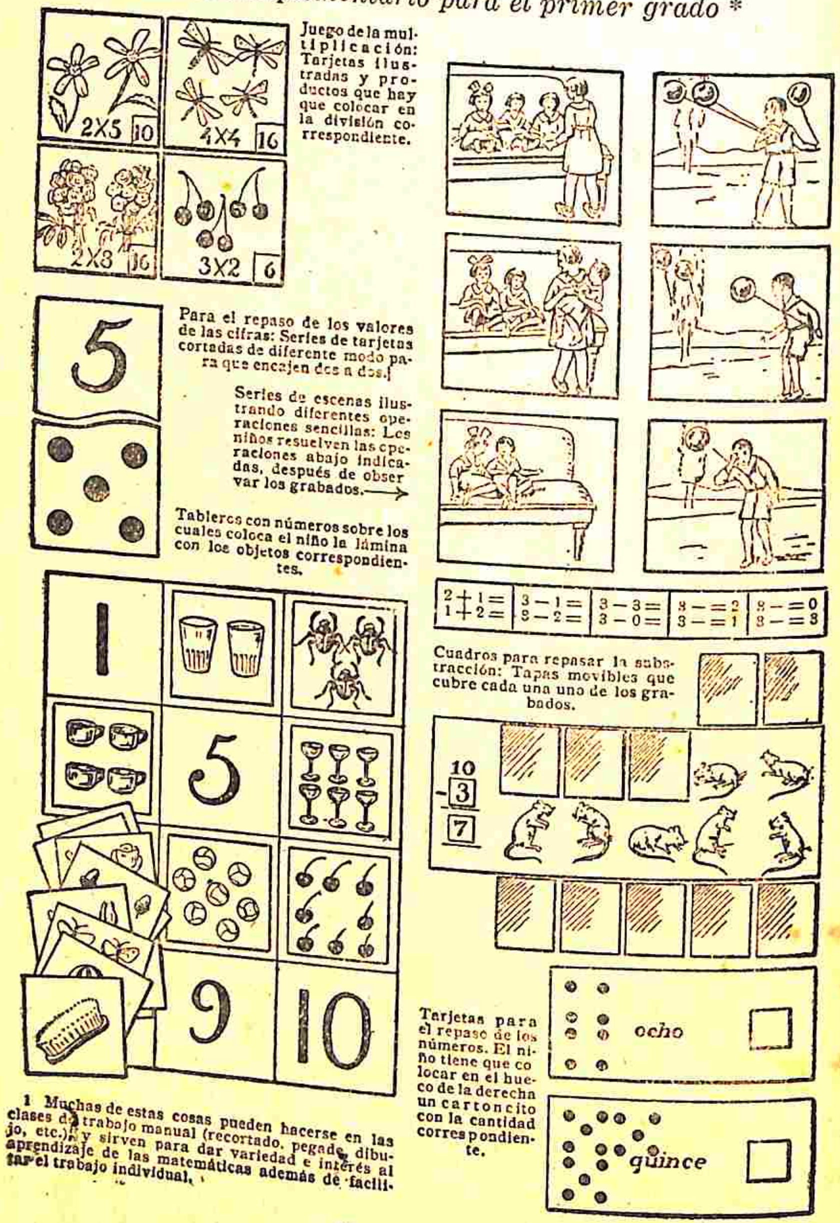
8:4 = , 10:2 = , 12:4 = , 10:5 =

SEGUNDO GRADO

No es necesario detallar la labor de este grado como hemos hecho con el primero, ya que aquél puede servir, en cierto modo, de modelo, y también lo que para el superior se ha consignado en la aritmética. En el primer año se cuentan cantidades hasta mil, y en el segundo se puede llegar quizá hasta al millón, aunque esto no tiene importancia, porque, en el fondo, tales magnitudes no se conciben, hasta mucho más adelante, y lo que interesa es la comprensión del mecanismo.

En este segundo grado las operaciones fundamentales son ya algo separado del mero contar, con individualidad y nombre propios, y en ellas el elemento escrito tiene la parte necesaria para que puedan manejarse cantidades mayores, aunque nunca deben dejarse los ejercicios puramente mentales; probablemente es mejor dividir el período en dos etapas, primer año y segundo, graduando las dificultades (cifras del minuendo menores o mayores que las del sustraendo, multiplicaciones y divisiones por una o más cifras, disminución progresiva del material concreto, etc.). Como para realizar bien las operaciones no hay más secreto que el tener una representación clara de la composición decimal de los números, creemos es muy útil hacer, al principio sobre todo, numerosas sumas y

Material complementario para el primer grado *



Juego de la multiplicación: Tarjetas ilustradas y productos que hay que colocar en la división correspondiente.

Para el repaso de los valores de las cifras: Series de tarjetas cortadas de diferente modo para que encajen dos a dos.

Series de escenas ilustrando diferentes operaciones sencillas: Los niños resuelven las operaciones abajo indicadas, después de observar los grabados.

Tableros con números sobre los cuales coloca el niño la lámina con los objetos correspondientes.

Cuadros para repasar la substracción: Tapas movibles que cubre cada una uno de los grabados.

Tarjetas para el repaso de los números. El niño tiene que colocar en el hueco de la derecha un cartoncito con la cantidad correspondiente.

1 Muchas de estas cosas pueden hacerse en las clases de trabajo manual (recortado, pegado, dibujo, etc.), y sirven para dar variedad e interés al aprendizaje de las matemáticas además de facilitar el trabajo individual.

Figs. 8 a 13.

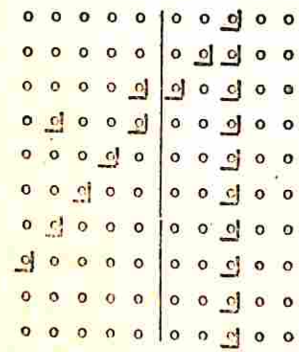


Fig. 14.

restas mentales a base del cuadro (fig. 14). De él se tiene un modelo mural, en el que se puede marcar con tiza, con cada fila de circulitos de un color distinto, o por lo menos que no se repita hasta la mitad (verde, rojo, marrón, azul, amarillo verde), y los chicos se hacen una copia cada uno. Cuando se halla dificultad en una operación, por ejemplo, sumar 7 a 25, en vez de recurrir como en el grado anterior y contar palillos, botones, etc., se emplea el cuadro, que tiene la ventaja de poner continuamente de manifiesto la composición decimal. Se hacen primero ejercicios de buscar en él números cualesquiera, lo cual es fácil gracias a la línea que lo divide por la mitad. Así, 12 (10+2), será una fila entera y dos circulitos más que la mitad de la tercera, etc. (para facilitar más se puede escribir, al principio al menos, con tiza, al final de cada fila, el número de circulitos que preceden). Para la suma indicada más arriba, buscaremos primero 25 y los señalaremos, diciendo después: "hasta el final de la fila, 5, para 7 faltan 2", tomamos, pues, 2 de la otra y resulta 32. Se hacen a continuación ejercicios con varios sumandos, y otros en que se suma o se resta constantemente la misma cantidad, con lo cual se obtienen curiosos resultados (partiendo de cualquier número, 8, por ejemplo, y añadiendo siempre 10, las sumas forman una línea vertical;

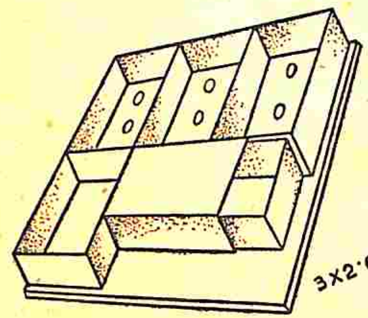


Fig. 15.

añadiendo 5, dos líneas verticales; añadiendo 9, una línea inclinada, especie de escalera, etc.).

Las tablas de sumar y restar son innecesarias; con los ejercicios indicados los niños no tendrán dificultad para realizar dichas operaciones. Pero la tabla de multiplicar debe aprenderse para poder calcular con una rapidez aceptable. Lo primero es que los niños aprendan su mecanismo, y para ello lo mejor es construirla, al menos parcialmente. Con el manejo del cuadro que indicábamos antes resulta muy fácil para el 2, 5, 3 y 10; los otros números ofrecen más dificultades y a veces conviene recurrir para ellos al uso de palilos u otros objetos concretos. En el material autoinstructivo de Miss Mackinder hay una serie de cuadros bandejitas y una caja que sirve para que el niño adquiera práctica en dicha tabla al realizar las operaciones indicadas en series bien graduadas de tarjetas (figs. 15 y 16); el alumno escribe en su pizarrita la primera operación de la tarjeta que ha tomado; por ejemplo, 2×3=, coloca dos porotos en cada una de las tres primeras bandejas, averigua cuántas ha empleado en total, y completa la ecuación poniendo un 6 en el segundo miembro; hace después lo mismo con todas las operaciones indicadas en esta tarjeta y en otras análogas. Cuando el niño se da cuenta de que ya no necesita objetos materiales para calcular las respuestas pide a la profesora que "juegue a cojerle", por ejemplo, en la tabla de dos, y si la prueba sale bien toma unas tarjetas de diferente color para repasar y luego otras para dividir por el mismo número.

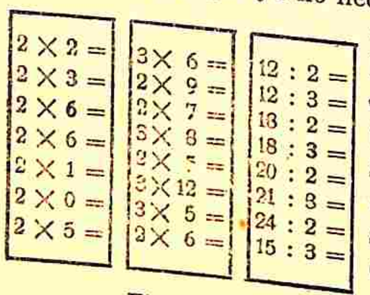


Fig. 16.

Una vez sabida la tabla conviene hacer numerosos ejercicios con objeto de afianzarla. Hay que recordar los

tres aspectos que puede presentar el producto de dos números: ¿Cuánto es 4 por 5?, ¿cuántos cinco hacen 20?, ¿qué número repetido cuatro veces da 20? Otro tipo de pregunta es el siguiente: ¿Cuánto es 4 por 6?, ¿cuántas veces dos es esto? (lo que resulta 24), ¿cuántas veces tres?, ¿cuántos ochos hay en 40?, ¿cuántos cuatros?, ¿cuántos doce? Para dar variedad pueden usarse diferentes medios, por ejemplo, el juego del reloj (fig. 17) que consiste en una esfera de reloj con numeración arábiga en la que se escribe con tiza, en el centro, una cifra cuyo producto por la hora que señala el maestro deben dar rápidamente los niños; a veces el ejercicio será oral y otras escrito y las contestaciones pueden referirse propiamente a la multiplicación o a la división: 3 × 4 = 12 y 12 : 3 = 4.

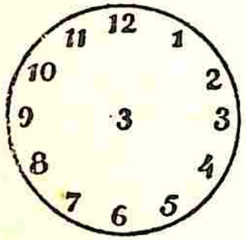


Fig. 17

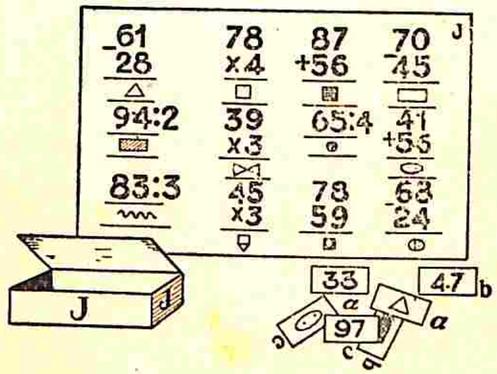


Fig. 18.

Problemas adecuados para esta etapa: En el escaparate de una frutería hay siete cestillos conteniendo cada uno cinco melocotones, ¿cuántos melocotones hay entre todos ellos?

Si un tendero tiene 42 naranjas y desea ponerlas en cestas de 6 cada una, ¿cuántas necesita?

Tengo 5 sobres conteniendo cada uno 4 sellos y 7 cada uno con 3, ¿cuántos hay en total?

Como en este grado precisa hacer numerosos ejercicios escritos para adquirir práctica, y el maestro necesita poderlos corregir rápidamente porque si no pierden los niños interés, creo interesante dar a conocer el procedimiento empleado por Miss Mackinder: para hacer posible la corrección con una simple ojeada aconseja esta autora escribir una progresión al preparar las tarjetas que tienen que calcular los niños y buscar luego operaciones que deban dar por resultado los términos de la misma; así no hay más que mirar para darse cuenta del error. Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 42 \\ -\;27 \\ \hline 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 63 \\ -\;36 \\ \hline 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 97 \\ -\;58 \\ \hline 39 \end{array} \quad \begin{array}{r} 80 \\ -\;29 \\ \hline 51 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ -\;8 \\ \hline 63 \end{array} \quad \begin{array}{r} 91 \\ -\;16 \\ \hline 75 \end{array} \quad \begin{array}{r} 94 \\ -\;7 \\ \hline 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ +\;45 \\ \hline 125 \end{array} \quad \begin{array}{r} 67 \\ +\;73 \\ \hline 140 \end{array} \quad \begin{array}{r} 111 \\ +\;17 \\ +\;27 \\ \hline 155 \end{array} \quad \begin{array}{r} 102 \\ +\;25 \\ +\;43 \\ \hline 170 \end{array} \quad \begin{array}{r} 92 \\ +\;64 \\ +\;29 \\ \hline 185 \end{array} \quad \begin{array}{r} 823 \\ +\;112 \\ +\;112 \\ \hline 1.100 \end{array}$$

Como si las unidades y las decenas son correctas es bastante probable que lo sean también las centenas, puede formarse la progresión considerando solamente las dos últimas cifras, como en el último ejemplo de los anteriores y en los siguientes:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\;2 \\ \hline 46 \end{array} \quad \begin{array}{r} 67 \\ \times\;2 \\ \hline 134 \end{array} \quad \begin{array}{r} 74 \\ \times\;3 \\ \hline 222 \end{array} \quad \begin{array}{r} 83 \\ \times\;3 \\ \hline 410 \end{array}$$

Otra manera de simplificar es tener de antemano preparadas las respuestas a los ejercicios que los niños reali-

zan y que éstos van a buscar, una vez terminado su trabajo, para comprobar por sí mismos los resultados. Se tienen para ello unos tableros con 12 operaciones indicadas en cada uno (fig. 18), operaciones que los niños copian y resuelven en sus cuadernos; después sacan del armario la caja correspondiente de respuestas (tablero y caja llevan la misma letra) y comparando los dibujos que hay debajo de cada operación y en el reverso de las tarjetas van colocando las soluciones en su sitio y viendo si se han equivocado.

TERCER GRADO

De la numeración en este grado no nos ocupamos porque todos los libros tratan bastante bien el tema; al lector que le interese conocer nuestra manera de pensar sobre el asunto puede consultar la Aritmética antes mencionada. Además, para los muchachos mayores, al contrario de lo que pasa con los pequeños, queda tal cuestión completamente desglosada del resto de la aritmética, formando sólo un capítulo del contenido total: de ahí su menor importancia relativa.

CAPÍTULO III

FRACCIONES

PRIMER GRADO

Objetivo: Dar idea de los números fraccionarios de términos más pequeños, 1/2, 1/3, 1/4... y manipulaciones sencillas con los mismos. (Puede hacerse este estudio paralelamente al de los números enteros, pero en muchos casos es mejor esperar a dominar los nueve primeros).

Material: Nuez, manzana, panecillo, etc. (algunos partidos por la mitad), naranja dividida en tres partes, en cuatro; metro dividido en decímetros y medios decímetros, doble decímetro, sirviendo regla, dividido en centímetros y medios centímetros; porotos, garbanzos, abalorios, fichas, palillos, una esfera de reloj en cartón con manecillas movibles; balanza y algunas pesas, medidas en litro, medio litro, doble litro; trozos de bramante y de cinta; cuartillas abundantes, pizarritas individuales y papel cuadriculado.

1/2. — Se enseña una nuez y media nuez, se parte también una manzana, un panecillo, una cuartilla, un rectángulo o un círculo, dibujado en el encerado; se miran, se tocan, se habla sobre ellos, y después de repetir varias veces las palabras uno y medio se escribe el símbolo respectivo, en el encerado: 1/2. Se colocan al lado de este último símbolo representaciones de diversos objetos, y se lee: media manzana, media nuez, etc. Se copia en la pizarrita. Se pide media cuartilla, media naranja. ¿Cuántas medias cuartillas hay en una cuartilla? ¿Cuántas medias nueces en una nuez? ¿Cuántas medias naranjas en una naranja? El maestro enseña dos trozos de papel de igual ancho y longitud diferente. ¿Cuál es el mayor? Se superponen. ¿Quién es más alto, Juan o Pedro? El libro azul es mitad más ancho que el negro (después de superponerlos); el negro es doble del azul. Otros ejemplos: ¿Cuál es más ancho, el encerado o el mapa? No se pueden superponer, nos valemos de una cinta para comparar. Se efectúan algunas medidas con el metro dividido en decímetro y 1/2 decímetro. Se dibuja en el encerado o en el suelo un rectángulo dividido en decímetro y 1/2 decímetro o en metros y medios metros, trazando en él varias líneas paralelas como indica la figura 19; se supone que es un camino recorrido por automóviles de juguete (mejor si se tiene en la realidad) o por caracoles, o por lo menos niños a pie cojo o en patinete, y se juega a acertar:

¿Cuanto ha andado el auto de Antonio? ¿Cuánto el de

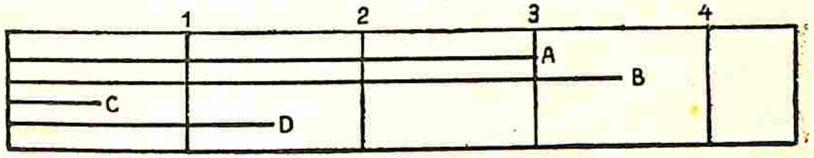


Fig. 19.

Dionisio? ¿Cuánto el de Carmen? ¿Cuánto entre dos de ellos? Ejercicios, primero orales y luego anotando en el cuaderno.

A = ?, B = ?, C = ?, A + C = ?, B + C = ?, D + B = ?

A + A = ?, 2 A = ?, 2 C = ?, 2 C + A = ?

Se hacen dibujar en la pizarrita o en el cuaderno líneas de longitudes variables, medidas en centímetros y medios centímetros; se suman; se restan (siempre sumas inferiores a 10).

Se escribe en el encerado para leer y copiar después de comprobarlo prácticamente, 1/2 manzana + 1/2 manzana = 1 manzana, 1/2 manzana × 2 = 1 manzana, 1 manzana : 2 = 1/2 manzana, etcétera. Se repite cambiando el nombre de los objetos, y, finalmente, en abstracto.

Ejercicio: Se pide a los niños que dibujen media circunferencia, que vean cuántas medias cuartillas pueden sacar de una cuartilla, cuántas nueces son cuatro medias nueces, etc.

Valiéndose de porotos o abalorios averiguar cuál es la mitad de 2, de 4, de 6. Idem de 3, de 5, etc., usando trozos de cinta o cuartillo. Resolución de pequeños problemas: ¿Cuántas manzanas se necesitan para dar de merendar media a cada uno de cuatro niños? Tres pasteles entre dos niños, ¿a cuánto tocan cada uno? Se tiene cuatro chorizos, ¿cuántos niños pueden comer a medio cada uno? Se reparten seis calcomanías entre dos niños, ¿a cuántas tocan cada uno?

Ejercicio: Cada niño hace en su pizarrita o cuaderno algunos ejercicios análogos a los descritos, usando unas veces el material concreto de que se trata, otras haciendo que los palillos o los porotos representen personas, ganado, etc., y otras valiéndose de dibujos. Por ejemplo:

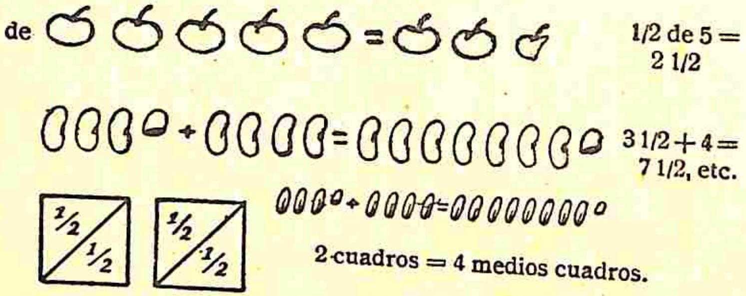


Fig. 20.

1/4. — Se dibuja en el encerado una circunferencia, un cuadrado, un rectángulo dividido por la mitad y se repasan las nociones adquiridas: 1/2 círculo + 1/2 círculo = 1 círculo, 1/2 círculo multiplicado por 2 = 1 círculo, etc. Se compara el litro y el medio litro, ¿cuál es mayor? Se llena de agua el medio litro y se vierte en el litro; no está lleno; se repite la operación. 1 litro = 2 medios litros. 1/2 litro × 2 = 1 litro. Se divide una cuartilla en dos, y cada una de las partes por la mitad: esto se llama un cuarto; una cuartillo tiene dos mitades y cuatro cuartos. Se divide en cuartos la circunferencia anteriormente dibujada, y también el cuadrado y el rectángulo: ídem una naranja. Ejercicios análogos a los hechos para afirmar el concepto de mitad.

1/4 de naranja + 1/4 de naranja = ? 1/4 de cuartilla + 1/4 de cuartilla = ? Los niños doblan una tira de papel por la mitad: 1 = ? 1/2, y cada mitad es doblada a su vez. 1/2 = ? 1/4. 1 = ? 1/4 (se desdobla la tira para verla entera).

Fig. 21.

Observando la figura 21 se resuelven, primero oralmente y luego por escrito, algunas operaciones sencillas: 1/4 + 1/4 = ?, 1/4 × 2 = ?, 1/2—1/4 = ?, 3/4—1/4 = ?, etcétera.

A base de una figura análoga á la que se dibujó en el suelo o en el encerado al estudiar 1/2, se hacen ejercicios de suma y resta de cuartos, escribiendo primero en el encerado y después cada uno en su propio papel (fig. 22).

Hallar 1/4 de 8 manzanas, de 2 cuartillas, de 4 abalorios; los 3/4 de 8 porotos, de 4 pasteles, de 6 panecillos; los 2/4 de un pastel, de galletas. Averiguar qué relación guardan 2 pesos con 4 pesos, 3 lápices con 6 lápices (todo ello a base de problemas reales); repartir, por ejemplo, un cestito de fruta entre cuatro hermanas, etc. Recortando un círculo en sectores y superponiéndolos para que coincidan, comparar 1/2 y 1/4, 3/4 y 2/4, etc. En una hora la manecilla recorre todo el círculo, ¿cuánto recorrerá en 1/4?

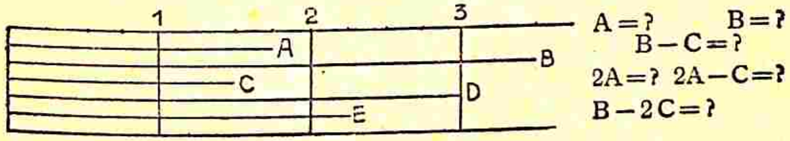


Fig. 22.

¿1 hora cuántos cuartos? 1 hora = ? medias horas, 1/2 hora + 1/4 = ? 1/2 hora — 1/4 = ? 1 peseta = 4 reales, 1 real = ? de peseta, 1 real + 2 reales = ?

División de figuras geométricas en cuartos como motivo decorativo, coloreando diferentes partes y aprovechando para ver que 1/4 de 4 = 1, 3/4 de 4 = 3, etc. (fig. 23).

Ejercicio: Primero oralmente, entre todos, y luego ca-

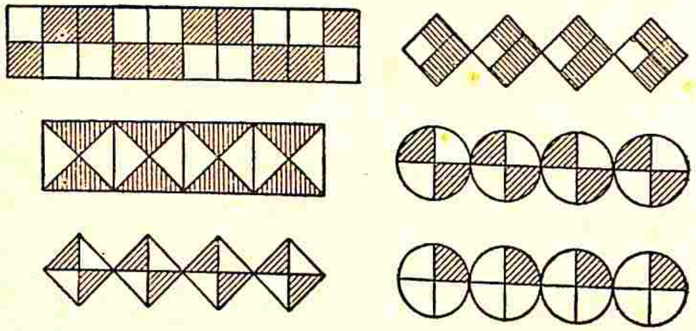


Fig. 23.

da uno de por sí, resuelven pequeños problemas. ¿5 naranjas entre 4 niños? Para un dibujo se necesita 1/2 cuartilla, ¿cuántas para que puedan hacerlo 7 alumnos? 1/4 de mi dinero es una moneda grande y una chica, ¿cuánto tengo?

1/3. — Doblar una cuartilla en tres partes iguales y también un círculo de papel: cada parte es un tercio. Se escribe dentro del símbolo y se hacen ejercicios.

1/3 de círculo + 1/3 de círculo = 2/3 de círculo, $1/3 \times 2 = 2/3$, $1/3 \times 3 = 3/3 = 1$.

Una manzana = ? tercios de manzana, una naranja = ?/3 de naranja, 2/3 de cuartilla — 1/3 de cuartilla = ? cuartilla.

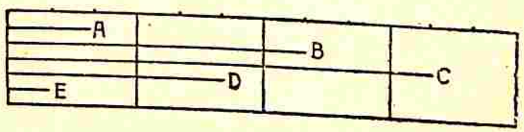


Fig. 24.

Ejercicio con la figura adjunta (fig. 24): A = ?, B = ?, A + B = ?, C + A = ?, 2 B = ?, etc.

Se escribe, se lee y se copia: 1 : 3 = 1/3, 1/3 + 1/3 = 2/3, 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1, ??? ??? ???

Se dividen seis abalorios, nueve porotos, tres canicas,

en tres partes: 6 : 3 = 2 = 1/3 de 6; 3 : 3 = 1 = 1/3 de 3; 9 : 3 = 3 = 1/3 de 9, etc.

Se dividen cuatro naranjas entre tres chicos: tocan a una y 1/3 por chico, 4 : 3 = 1 + 1/3 = 4/3, $1\,1/2 \times 2 = ?$, $1\,1/2 \times 3 = ?$, $1\,1/2 \times 4 = ?$, $2\,1/2 \times 4 = ?$, $3\,1/2 \times 2 = ?$

División de figuras geométricas en tercios como motivo decorativo, aprovechando para insistir en el cálculo (fig. 25):

Ejercicio: Tengo tres monedas, si tuviera 1/3 más de dinero podría ir al cine; ¿adivina cuánto vale la entrada?, ¿cuánto costaría la de dos personas?

Juan lleva en un bolsillo seis monedas y en el otro 1/3 menos, ¿cuánto tiene entre todo?

La ventana tiene de alto nueve palmos y está dividida en tres cristales, ¿cuál será la altura del visillo que tapa dos?

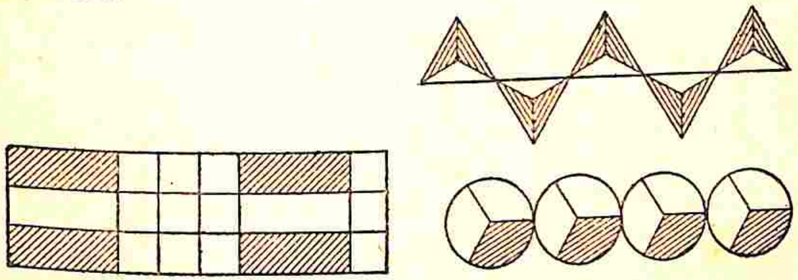


Fig. 25.

A 1/3 de torta por chico, ¿cuántas tortas se necesitan para seis hermanos?

SEGUNDO GRADO

Objetivo: Familiarizar a los alumnos con algunas de las operaciones y transformaciones de los números fraccionarios más sencillos y de uso corriente, preparando así el estudio sistemático del último grado.

Material: El mismo que para el grado anterior, pero en vez de usarlo continuamente servirá sólo para ilustrar los nuevos procesos que luego se continuarán en abstracto, volviendo a la comprobación práctica en cuanto haya la menor vacilación.

a) *Primera etapa: Repaso de las nociones adquiridas el año anterior.* — Dibujando en el encerado líneas divididas en decímetros y medios decímetros realizar los cálculos siguientes: 1/2 + 1/2 = ..., 2/3 + 1/3 = ..., 2/4 + 1/4 = ..., 1/2 × 3 = ..., 2 1/2 × 2 = ..., 1 1/2 × 4 = ..., 2 1/2 × 3 = ..., 1/2 × 6 = ..., 2 1/2 + 1/2 = ..., 3 + 1/2 + 2 = ..., 5 1/2 + 1/2 = ..., 3 1/2 + 1/2 + ? 1/2 = ...

Y también:

3 — 1/2 = ..., 4 — 1/2 = ..., 6 1/2 — 2 1/2 = ..., 5 — 1 1/2 = ..., 6 — 1/4 = ...

Problema: Si en un año hay doce meses, en medio año habrá... Si un trimestre tiene tres meses, en medio año habrá? trimestres, y un trimestre será = ? de año, etc.

Ejercicios y problemas de recapitulación (incluímos ejemplos referentes al quinto porque en muchos casos puede estudiarse esta fracción en el primer grado, a continuación del tercio): Ejemplo de ejercicio que en formas diversas conviene repetir varias veces:

Doblando una cuartilla en diferentes partes, pon, por orden de mayor a menor, los siguientes quebrados: 1/3, 1/5, 1/4, 1/2. Ponlos por orden de menor a mayor. Responde ahora a las siguientes preguntas (al principio hay que dar las instrucciones y hacer las preguntas oralmente).

1 hoja de papel — 1/4 = ... 1 hoja de papel — 1/3 = ...
1 — 1/5 = ... 1/3 + 1/3 + 1/3 = ... 1/3 × 3 = ...
1/2 × 2 = ... 1/4 × 4 = ... 1/5 × 5 = ... 1 : 3 = ...
1 : 2 = ... 1 : 4 = ... 1 : 5 = ...

Pueden tenerse una serie de tarjetas con operaciones indicadas que, según los casos, se repartirán a los niños

para que las resuelvan con ayuda de palillos, tiritas de papel o porotos, o se copiarán en el encerado para calcular entre todos.

Partiendo de la división y recorte de un círculo en sectores y de un cuadrado en partes iguales, realizar las operaciones siguientes:

1/2 + 1/4 = ..., 3/4 — 1/2 = ..., 2 + 1/2 + 1/4 = ..., 3 + 1/4 — 1/2 = ..., 5 1/2 — 1/4 = ..., 3/4 — ? = 2/4, 1 1/2 + ? = 2, 3 1/4 — ? = 2, 5 3/4 + ? = 6 1/2, 2 1/2 + ? = 5

(Si en el curso anterior se estudiaron quintos, sextos, séptimos, etc., hasta décimos, repasar los conceptos adquiridos en forma análoga a la indicada, y si no proceder para su estudio como se hizo entonces con mitades, cuartos y tercios).

Resolución de una serie de pequeños problemas, primero oralmente y después por escrito: ¿Qué fracción de semana son 2 días, 3 días, 5 días?

¿Cuánto gana por día una muchacha que recibe el sábado 18 pesos?

Para una excursión se han recogido 10 pesos y falta 1/5 más, ¿cuánto dinero se necesita?

En una página de álbum de sellos se llena 1/2 de la primera línea, toda la segunda, 1/4 de la tercera, 2/6 de la cuarta y 1/2 de la quinta, ¿cuántos sellos hay si caben 12 en cada línea?

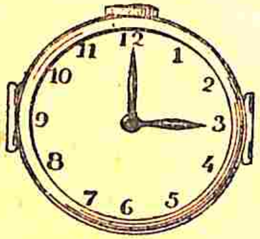


Fig. 26.

Juan propone un acertijo a Luisita: "En este sobre he encerrado 5/10 de peseta + 1/2 + 1/4, ¿cuánto dinero hay? ¿Podríais vosotros adivinarlo?

¿Qué parte del círculo abarcan ahora las manecillas del reloj? ¿Y cuando marca las 6? (fig. 26).

Un cuarto de hora, ¿qué parte del círculo es? ¿Y 5 minutos?

b) *Segunda etapa: equivalencias; algunas propiedades notables.* — Dividiendo círculos en 2, 4, 8, 3, 6, 9, sectores iguales, recortándolos y superponiéndolos, se van completando las siguientes igualdades:

1/2 = ?/4, 2/4 = ?/8, 1/3 = ?/6, 2/3 = ?/6,
1/2 = ?/8, = ?/6, 2/3 = ?/6 = ?/9

Los niños se ejercitan solos con rectángulos, cuadrados, cintas.

Se repite la operación con abalorios, porotos, etc.: se dividen tres montoncitos iguales de 8 abalorios cada uno, en mitades, en cuartos y en octavos; 1/2 del montón = 4 abalorios, 1/4 del montón = 2 abalorios, y 2/4 del montón = 4 abalorios... 1/8 del montón = 1 abalorio, y 4/8 del montón = 4 abalarios. Por lo tanto, 1/2 = 2/4 = 4/8. Ejercicios análogos con 9 porotos, 12 garbanzos, 15 habas. Insistir variando el material y las cantidades hasta que los niños se den cuenta de que en estas igualdades tienen los quebrados los términos múltiplos unos de otros (la palabra no es indispensable), es decir, que las fracciones que tienen los términos múltiplos son equivalentes.

Comparar, usando ilustraciones concretas (figuras geométricas divididas en partes,, grupos de pequeños objetos, los quebrados que se conocen ya bien, 2/5 y 3/5, 1/4 y 2/4, 3/6 y 5/6.

Fijarse que en cada caso es mayor la fracción (en este momento puede ser oprtuno introducir el nombre sin definiciones ni explicaciones) que tiene más partes, más quntos, más tercios, más sextos; se dice también la que tene mayor *numerador*.

Comparar 1/2, 1/4 y 1/8; 2/3, 2/5 y 2/6; 3/4, 3/8 y 3/6. En cada grupo es mayor la fracción que tiene las

partes mayores, o, como se dice también, menor *denominador*.

Ejercicios orales: Escribe tres fracciones que tengan por denominador 5.

Escribe tres fracciones que tengan por numerador 2.

Escribe dos fracciones que valgan lo mismo que 1/2.

Escribe dos fracciones que valgan lo mismo que 4/6 y tengan los denominadores 3 y 12.

¿Cómo podríamos decir 3/9 con un numerador más pequeño?

Multiplica por 2, por 3 y por 4 el numerador y el denominador de la fracción 1/2 y señala en papel cuadriculado las fracciones resultantes: ¿cómo son?

Divide por 2 el numerador y el denominador de la fracción 2/4, ¿qué resulta?, ¿es mayor o menor que 2/4?

Dividamos dos circunferencias en cuartos, ¿cuántos resultan? Podemos escribir 2 = 8/4. Tenemos aún otra manera de escribir algunos números que conocemos, por ejemplo:

1 1/2 = 2/3, 2 1/2 = ..., 2 1/4 = 9/4,
1 1/3 = ...; 2 1/5 = ...,

y al revés:

3/2 = ..., 4/3 = ..., 5/2 = ..., 6/3 = ..., 5/4 = ...

Ejercicios: Construye una esfera de reloj y juega a las horas. Sustituye en los ejemplos siguientes los interrogantes por el número que corresponde.

1/12 = ?/60 4/12 = ?/60 6/12 = ?/60 11/12 = ?/60
15/60 = ?/4 30/60 = ?/2 3/12 = ?/4 9/12 = ?/4
5/12 = ?/60 6/12 = ?/60

c) *Tercera etapa: operaciones con los quebrados.* — Se recuerdan primero y se repasan mediante ejercicios las sumas y restas de quebrados de igual demonimador.

Problema: Supongamos que queremos averiguar si teniendo 1/2 y 1/4 de una ensaimada, nos queda una ensaimada completa. Vemos que no es posible decir una mitad y un tercio igual dos mitados o dos tercios, como no podemos decir una libra y un kilogramo = 2 libras ó 2 kilogramos; pero como sabemos que 1/2 = 2/4, diremos 2/4+1/4 = 3/4, y como una ensaimada = 4/4, resulta que nos falta aún 1/4. (Todo esto hay que hacérselo decir, naturalmente, a los niños).

Problema: Juan y Pedro discuten acerca de quién tiene más dinero. Juan enseña una monedita de dos reales y 9 perras gordas, Pedro 3 moneditas de dos reales y 2 perras gordas, ¿cuál tiene razón?

Dinero de Juan: 1/2 peseta + 9/10 de peseta.

Idem de Pedro: 3/2 + 2/10 de ídem.

Como no podemos sumar monedas de dos reales y perras gordas vamos a convertirlo todo en perras: siendo cada media peseta cinco perras, tendremos:

J. = 5/10 + 9/10 = 14/10 = 10/10 + 4/10 = 1 peseta + 4 perras.

P. = 3/2 + 2/10 = 15/10 + 2/10 = 17/10 = 10/10 + 7/10 = 1 peseta + 7 perras.

Por lo tanto, Pedro es más rico.

Problema: ¿qué cantidad de naranja es 1/2 — 1/3?

No podemos restar unidades y tercios, y tampoco sabemos convertir las mitades en tercios. Ayudémonos con una cuartilla: primero la dividimos a lo ancho en mitades; ahora la desdoblamos y vemos que se han formado unas divisiones pequeñas, sextos, de los cuales 1/2 tiene 3 y 1/3, 2. Diremos pues:

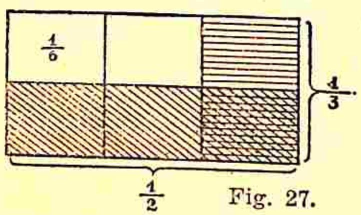


Fig. 27.

$$\left.\begin{array}{l} 1/2 = 3/6 \\ 1/3 = 2/6 \end{array}\right\} \quad 3/6 - 2/6 = 1/6 \qquad \text{(Fig. 27.)}$$

Ejercicios: 1/2 + 2/5 = ..., 1/3 + 1/4 = ...
2/3 + 2/7 = ..., 1/2 — 1/4 = ..., 2/3 — 2/5 = ...,
1 1/2 — 1/4 = ..., 2 1/2 + 1/3 = ..., 3 1/4 + 2/5 = ...,
1 1/3 — 1/2 = ..., 2 + 1/5 + 2/3 = ...

Algunos ejercicios de multiplicación de un quebrado por un entero, análogos a los hechos en el grado anterior, pero con cantidades mayores, empezando por un problema y aun sin definición alguna; después multiplicación de quebrados sencillos.

Problemas: Cada niño de la clase tiene media cuartilla; son 20, ¿cuántas cuartillas se han usado? Una goma vale 2 perras gordas, 2/10 de peseta, ¿cuánto valen media docena?

1/4 × 3 = ..., 2/6 × 2 = ..., 1/8 × 5 = ...,
3/4 × 2 = ..., 1/7 × 6 = ..., 4/6 × 3 = ...
3/9 ... = 6/9, 4/10 ... = 8/10, 2/8 ... = 8/8,
1/5 ... = 3/5, 3/7 ... = 15/7

¿Cuál es el doble de 2/5? ¿Y tres veces 1/2? ¿Y cuatro veces 2/8?

¿Cuál es el tercio de 3/6? ¿Y la mitad de 4/7? ¿Y el quinto de 5/10?

¿Cuál es la mitad de media cuartilla? Escribimos, pues, 1/2 de 1/2 = 1/4.

¿Qué parte es una perra gorda de dos realicos? ¿Y dos realicos de una peseta? Podemos, pues, escribir: 1/5 de 1/2 = 1/10.

Hemos visto, además, hace poco, que 1/2 de 3/4 = 1/6.

Podemos comprobar todo esto con una tira de papel (figura 28).

1/2 de 1/4=1/8   8=2×4   1=1×1

1/2 de 1/3=1/6   6=2×3   1=1×1

2/3 de 1/2=2/6   6=2×3   2=1×2

etcétera, etc.

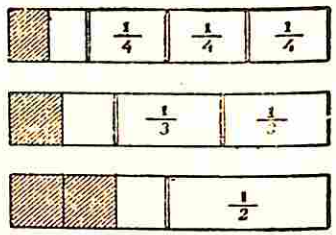


Fig. 28.

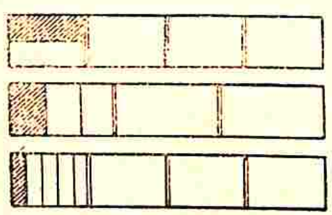
Ejercicios orales: Averiguar cuál es el tercio de 1/2, el cuarto de 1/3, la mitad de 1/5.

Escribir la segunda parte de estas igualdades: 1/2 de 2/5 = . . ., 2/3 de 2/4 = . . ., 3/4 de 3/5 = . . .

Algunos ejercicios de división de un quebrado por un entero:

Problema: 3/4 de ensaimada repartidos entre 3 chicos, ¿a cuánto tocan?

Por subdivisiones de una tira de papel se resuelven las operaciones siguientes (fig. 29):



1/4 : 2 = 1/8

1/3 : 3 = ?/9

1/4 : 5 = . . .

Fig. 29.

TERCER GRADO

Para este grado seguimos en líneas generales la aritmética repetidamente mencionada de esta misma editorial y, por lo tanto, indicaremos sólo las cuestiones a tratar. El material queda reducido esencialmente al papel cuadriculado y a la esfera de reloj. Se recurre a las representaciones gráficas cuando se trata de un concepto nuevo.

Primera etapa: Revisión de lo aprendido en cursos anteriores. — Un problema concreto, por ejemplo, la necesidad de dividir una circunferencia en partes iguales, vuelve a dar actualidad al tema de las fracciones. Para ver "si nos acordamos de lo del año pasado" se trata de resolver los ejercicios del libro. Cada uno de por sí empieza a trabajar en las páginas 125 y 126 (equivalencias de fracciones y operaciones sencillas). Se hacen después en el encerado las correcciones de los casos dudosos, y a continuación se lee lo que dice el libro para deducir el concepto de fracción, explicando lo que no quede claro y los niños pregunten. Escritura de las definiciones esenciales en el cuaderno de cada uno. Resolución individual de los problemas y ejercicios de la página 127 y otros análogos que surjan de momento.

Segunda etapa: Comparación de fracciones. — Fracciones propias e impropias y números mixtos. Reducción de fracciones ordinarias a decimales. Algunas propiedades interesantes de las fracciones (operaciones con los dos términos, simplificación, comparación de numeradores y denominadores). Marcha indicada en el libro (páginas 127 a 134) realizando los ejercicios y problemas propuestos y otros análogos.

Las etapas siguientes comprenden las operaciones con fracciones, suma, resta, multiplicación y división, en los casos generales que pueden ser de interés por su importancia teórica o por la utilidad práctica. En el libro comprende esta parte las páginas 124 y siguientes. Hay numerosos ejercicios, pero convendrá que el maestro discurra otros, además, que se refieran especialmente a las condiciones locales o de actualidad.

Ultima etapa: recapitulación (escritos).

Ejercicios: Divide una cuartilla en diez partes iguales, toma dos y escribe la fracción que esta cantidad representa; toma tres, una, cuatro, ¿qué clases de quebrados resultan? Súmalos. ¿Cuál es el resultado?

¿Cuántos cuartos tiene una manzana? ¿Cuántos quintos? ¿Cuántos doceavos?

Dos es... de seis.

Cinco es... de diez.

Tres es... de 15.

Cuatro es... de 12.

¿Cuántos tercios hay en cuatro unidades? ¿Cuántos en cinco, en ocho? ¿Cuántos quintos hay en cuatro, en cinco, en ocho? ¿Cuántos doceavos?

Convierte las fracciones siguientes *:

sextos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	quinceavos $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}$	sextos $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$	dieciochoavos $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{6}$	doceavos $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$	veinteavos $\frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
doceavos $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$	quinceavos $\frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$	cuartos $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	octavos $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$	dieciseisavos $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{16}$	treintavos $\frac{2}{5}, \frac{1}{6}$

Escribe en forma fraccionaria o mixta los decimales siguientes:

0'02, 1'04, 0'15, 0'23, 4'5, 3'75, 0'25, 0'50.

Busca la mitad de 1/2, 2, 2 1/2, 4 1/2, 3 1/2.

Busca la cuarta parte de 32, 25, 42, 8 1/2.

Busca las tres cuartas partes de 32, 48, 36, 100.

La cuarta parte de un número es 20, ¿cuál es éste?

CAPÍTULO IV

PESAS Y MEDIDAS

a) *Mediciones como medio de entrar en relación con las magnitudes y base natural para los ejercicios de cálculo.* — La medida es comparación de dos magnitudes y siguiendo el proceso natural hay que empezar por comparar muchos objetos a fin de llegar a sustituir la comparación grosera y superficial por la medida precisa. Así se hace en todas las escuelas activas; en la del "Ermitage" (Decroly), por ejemplo, tienen para ello en cuenta las etapas y cuestiones siguientes:

1ª Comparación de cualidades que no pueden traducirse por números (color, gusto, olor) y de las que son susceptibles de medida cuantitativa.

2ª Estimación aproximada de las cantidades, usando términos globales de comparación (mucho, poco, más, menos, demasiado, bastante, tanto como, etc.).

3ª Comienzo de la medición de cantidades continuas y discretas usando medidas naturales (palmo, pie, paso, pulgada, dedo, puñado, el grueso de la muñeca, el tamaño de un huevo, etc.).

4ª Se hacen lo más pronto posible comparaciones acerca del peso, el tiempo, el valor económico (moneda), lo mismo que sobre las cantidades especiales.

5ª Para la medida del espacio se consideran las unidades de volumen al mismo tiempo o antes que las de superficie y longitud.

6ª Se pasa gradualmente de las unidades naturales a las convencionales del sistema métrico y a las medidas de tiempo.

En todas las etapas los ejercicios son numerosos y sirven de base al conocimiento de la numeración y a las operaciones fundamentales.

Ejercicios: Se colocan frutos (nueces, piñas, castañas, avellanas), semillas, cantos rodados, cajitas, etc., por orden de tamaño creciente y decreciente. Se comparan unos objetos con otros, ¿dos nueces son más o menos grandes que una piña? Una piña, ¿es más o menos grande que el puño? ¿Es el puño igual a la cabeza?

* Tomado de *El sistema de Winnetka en la práctica*, por Juan Comas. Publicaciones de la "Revista de Pedagogía", Madrid, 1930.

¿Dónde cabe más agua, en el vaso o en la botella? Se hace la prueba y se ve que en botella caben, por ejemplo, seis vasos. ¿Cuántas cucharadas de sopa hay en el plato? ¿Cuántos jarros de agua en el barreño? ¿Cuántos vasos en el acuario?

¿Cuál es más grande, el libro o el cuaderno? ¿La sala de primer curso o la de segundo? Se miden distintos objetos a palmos, a pasos, a pies; el resultado es diferente según quien mide: ¿Cuántos palmos de Juan? ¿Cuántos de Luis?

Utilizando una balanza rudimentaria hecha por los mismos niños para jugar a tiendas, se pesan diversos objetos ya sea que se emprenda el juego, ya que se tengan algunos animalillos que cuidar (conejitos de indias, tortugas, ratas blancas) y se quiera saber si engordan o cuánto comen, etc. (fig. 30). Las piedrecitas, los frutos secos o las semillas son los objetos que sirven al principio de término de comparación al pesar; más tarde, cuando se siente la necesidad de una mayor exactitud, se introducen las pesas más habituales en la región, libra, medio kilo, onza, etc. Si en la escuela hay báscula se pesan además unos niños a otros y van anotando ellos mismos las variaciones. También se miden, marcando al comenzar sencillamente una raya en la pared, después contando ya los palmos y los dedos y, por último, cuando se conocen estas medidas, usando una talla dividida en metros, decímetros, centímetros y medios centímetros.

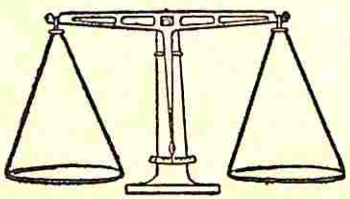


Fig. 30.

(Las comparaciones de barras, encajes, sólidos, etc., de la doctora Montessori corresponden a esta fase.)

b) *El sistema de pesas y medidas.* — Conocimiento y manejo de las medidas usuales. — El descubrimiento de que el pupitre mide 8 palmos de Juan, 7 palmos de Pepe, 9 de Antonio, produce el deseo de una medida más precisa: el palmo tipo, la vara, el metro *. Tampoco el vaso resulta término de comparación exacto, los hay grandes, los hay chicos: el litro. El ladrillo no es por su parte una medida segura para las superficies, porque son de diferentes tamaños: el m.2, el dm.2, el cm.2; se los obtiene de cartón, de papel fuerte, y se miden prácticamente las superficies con ellos.

Material: Un metro rígido y otro plegable, cintas de un metro de longitud, de 10 metros: doble decímetro dividido en centímetros; litro, doble y medio litro, decílitro, doble decílitro, botellas de litro, vasos de un decílitro, de dos decílitros (se mide el líquido con el decílitro y luego se echa en el vaso haciendo una señal en el envase); probeta graduada, balanza de Roberval y las rudimentarias hechas por los niños; kilogramos, doble kilogramo, medio kilogramo, decagramo, doble decagramo, hectogramo, gramo. Al principio no se establece relación entre la unidad y los múltiplos y divisores un poco alejados (por ejemplo, gramo y kilogramo), que se consideran como una cosa independiente, ni entre las diferentes medidas cúbicas, llegándose a ello de un modo paulatino.

Ejercicios: Se mide el largo de la clase, el ancho, el largo y el ancho de diferentes habitaciones de la casa, estableciendo comparaciones en cuanto al tamaño; se mide el largo de la calle donde está la escuela (uso del m. del Dm.); se mide el pupitre, el libro, la altura de la muñeca, la del gato, la longitud de la tortuga (uso del m., dm., cm.).

La necesidad de comprar cartulina para forrar un

* Actualmente están los niños tan familiarizados con el metro, el decímetro y el centímetro, que son para ellos medidas casi naturales; además, la numeración y los quebrados les han acostumbrado más conscientemente a su manejo, facilitando así la labor de este capítulo.

mapa que se deteriora o para poner un *passe-partout* a una lámina que les guste y que deseen colocar en la pared, obliga a calcular una superficie: primero se aplican realmente las medidas superficiales (m., dm.), después se las dibuja y, por último, cuando los mismos niños sugieren la solución, se multiplican las dos dimensiones halladas. ¿Cuánta tela necesitamos para hacer un tapete a la mesa, para forrar un cuaderno? ¿Cuál es la extensión de la sala de clase, del patio de la escuela, de campo de juegos *? ¿Cuál es la superficie de un estanque que tiene 4 metros de ancho por 5 1/2 metros de largo?

La instalación de un acuario y la lectura de las instrucciones que asignan para cada pez un espacio determinado es motivo para medir el volumen del recipiente, dando además ocasión para relacionar las medidas de capacidad y las cúbicas. Los primeros volúmenes de paralelepípedos se miden colocando dentro cubitos de un centímetro; se sustituyen después éstos por el dibujo sobre la base de todos los cuadrados de un centímetro que quepan, el cálculo de las capas de cubos que puedan colocarse unas sobre otras (se marca en una arista vertical la altura a que irín llegando las distintas capas) y el total de cubitos que así podían ponerse, y por último se llega a la multiplicación de las tres dimensiones. Se mide también el volumen de la sala de clase, el de alguna habitación de la casa de los niños, el de un cajón, el de una caja de zapatos, el de la casita de la muñeca. Se calcula el volumen de una cisterna, el de una piscina de natación, etc., etc.

Se mide arena, agua, semillas diversas, usando indistintamente medidas de capacidad y cúbicas. Se calcula a ojo la cantidad de porotos, de lentejas, de arena que hay en un montón, la de agua en un recipiente. Se halla

* Este es también el punto de partida para el cálculo de superficies irregulares, y uno de los infinitos motivos para relacionar la aritmética y la geometría.

la capacidad de distintas vasijas. Se suma, se resta, se calcula, en fin, a base de las cifras halladas,

Se pesan frutos, semillas, arena, agua, aceite (se aprende a descontar el peso del envase). Al pesar el agua repetidamente acaba por descubrirse la relación entre el litro y el kilo. Se plantean entonces problemas de equivalencia (¿cuánto pesan 50 cc. de agua?, ¿qué capacidad tienen?). Se pesa un litro de diversas sustancias (alcohol, arena, leche, aceite): densidad. Poniendo en un tubo de ensayo mercurio, agua y aceite se observa la ordenación por densidades, y de ahí que pueden surgir problemas interesantes respecto a la flotación. Cálculo de peso a ojo: comprobación. Algunos múltiplos y divisores del kilogramo.

Usando monedas verdaderas e imitaciones se da más verosimilitud al juego de comprar y vender y se familiarizan los niños con los valores de dichas monedas. Problemas de reducción de monedas.

Para el conocimiento del tiempo es un gran auxiliar el calendario de la naturaleza, que se hace en muchas escuelas como base de estudio de la historia natural, pues viendo los días que han pasado desde un acontecimiento interesante (nacimiento de los pollitos, germinación de un poroto, por ejemplo), o el que falta para otro de importancia (comienzo de la primavera, excursión a fecha fija, etc.), se afianza la noción de las medidas de tiempo conocidas y se adquiere verdadera conciencia de éste. Conviene tener, además del reloj de la escuela, uno de arena, y, como indicamos también en otro lugar, varios cuadrantes de cartón con manecillas movibles, que sirven, no sólo para aprender a conocer la hora, sino también para medida de ángulos y para familiarizarse con la numeración romana. Relación entre las distintas unidades de tiempo y pequeños problemas. La clase empieza a las ocho y acaba a mediodía, ¿cuántas horas dura? Para ir de Buenos

Aires a Córdoba se necesitan doce horas, ¿cuándo se llega saliendo a las nueve de la mañana? ¿Cuántas horas son un día y medio? ¿Y un cuarto de día? Dentro de hora y media sale el tren, ¿cuántos minutos nos faltan? ¿Cuántos minutos tiene un cuarto de hora?

c) *Conocimiento sistemático del sistema métrico.* — Con la base intuitiva que acabamos de indicar, puede emprenderse ya el estudio sistemático de las medidas del sistema métrico, siguiendo, por ejemplo, la marcha que indicamos en la aritmética *:

Necesidad de un sistema único de pesas y medidas y conveniencia de que éste sea decimal, demostradas por la práctica adquirida hasta ahora. ¿Por qué se llama métrico? Historia del metro (mejor en relación con la geografía) y concepto actual de esta medida. Mecanismo general de múltiplos y divisores. Medidas longitudinales; reducción de unas a otras; problemas. Otras medidas aún en uso y su equivalencia con el metro. Recuerdo de cómo se mide una superficie: medidas superficiales; por qué van de 100 en 100. Ejercicios de reducción. Otras medidas aún habituales y su equivalencia. Medidas de diferentes superficies reales e imaginarias. Medidas cúbicas, etc., etc.

* Loc. cit.

GEOMETRÍA

CAPÍTULO V

LA CONSTRUCCIÓN DE UN PUEBLO

PRIMERO Y SEGUNDO GRADOS

1. — *El prisma y elementos derivados*

a) *El cubo o exaedro.* — Indicaciones prácticas: El maestro se ha provisto de un cubo de madera de los de las cajas de construcción (puede también servir una caja de galletas) y de otra de cartón, y para los niños hay cartulina, papel, lápices negros y de colores, goma para pegar y un doble decímetro.

Problema inicial: La construcción de una aldea. Puede surgir en relación con la clase de geografía, de historia, de trabajo manual, o ser sencillamente el punto de partida de un proyecto. Pintando puertas, ventanas, etc., transforma el maestro en atractiva casita un cubo. Los niños la imitan en barro, quizá en plastilina. Alguien sugiere que en cartón sería más bonito y más duradero. ¿Cómo hacerlo?

Actividades derivadas. Se mira el cubo en todas direcciones, se le palpa, se cuentan sus caras, se miden con el doble decímetro a lo largo y a lo ancho, descubriendo que las dos dimensiones son iguales. Se intenta copiar una cara en el papel, otro quiere calcarla, y como no hay cubos para que calquen todos se calca una, se recorta, y sobre ella se recortan muchas iguales que se reparten.

Se deshace el cubo de cartón (para ver su desarrollo) y todos intentan reproducirlo en su cartulina usando la "cara de papel" como modelo de cada una de las del cubo, ya sea para calcar ya para medir y reproducir con la regla. Se recorta el dibujo obtenido, se dobla por los sitios indicados, se pega, y cuando está seco se pintan puertas, ventanas, etc. (fig. 31).

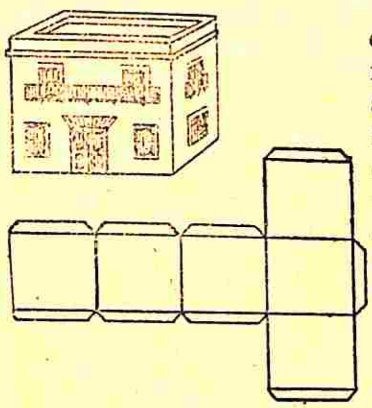


Fig. 31.

b) *El cuadrado.* — Indicaciones prácticas: El mismo material que en el caso anterior, más una plomada rudimentaria, papel cuadriculado y unas tiritas de cartón que, con chinches o encuadernadores, puede formar un paralelogramo articulado, cuadrado o rombo.

Problemas: Algunas casas "caen" hacia un lado, otras no han podido pegarse porque no "juntan", ¿cuál es la razón?

Actividades derivadas. Nuevo examen de la primitiva casita y de las copias. Las paredes de algunas de éstas no coinciden con la plomada, nos son *verticales*, las de aquélla sí. Se comprueba la verticalidad de las paredes de la clase, se buscan nuevas verticales, se dibujan verticales en el encerado. Se observa más detenidamente el cuadro que resultó de calcar una cara, lados, rincones o ángulos; los ladrillos son también cuadrados, tienen cuatro lados iguales y cuatro ángulos.

Con cuatro listoncitos iguales de madera o cartón o

con un metro plegable hace cada niño una figura articulada; ángulos rectos y oblicuos. No es cuadrado más que cuando los ángulos son rectos; la noción de ángulo recto es puramente intuitiva. Dibujo del cuadrado en papel cuadriculado. Obtención de un cuadrado mediante plegados y recortados. Aplicación a la casita. Buscar y recordar objetos cuadrados (pañuelos, cristales, etc.).

c) *El cuadrilongo o rectángulo.* — Indicaciones prácticas. El análisis de las figuras no debe proseguirse más que en la medida que interesa a los niños. El maestro se proveerá de una o varias cajas rectangulares (alguna de ellas apropiada para transformarse en "casa"), de un metro, y de tiritas de cartón o listoncitos para hacer un paralelogramo articulado de lados desiguales.

Problema: ¿Es cuadrada la sala de clase?

Actividades. Se mide lo largo y lo ancho de la clase (¿hace falta medir los otros dos lados?, si los niños no están muy seguros debe efectuarse la medida). Supongamos que tiene seis metros por ocho y medio; se señala con tiza por donde tendría que pasar la pared para ser cuadrada la habitación. Se hace después en el papel cuadriculado un dibujo con la figura de la sala suponiendo que cada metro es un cuadro. Cuadrilongo o rectángulo. Se buscan otras figuras parecidas en la escuela, otros rectángulos; se recuerda los que se conocen.

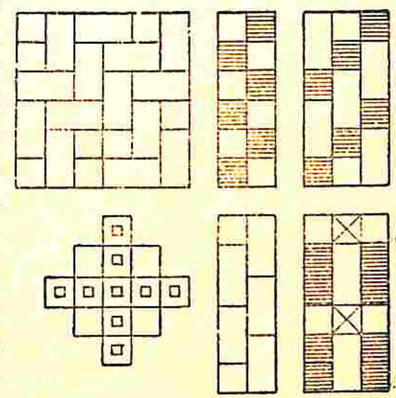


Fig. 32.

Se repite en el rectángulo articulado el experimento del cuadro. Consecuencia respecto de los ángulos.

Se observan las cajas traídas: caras cuadradas, caras rectangulares. Aplicación a la construcción de casas más altas, más largas.

Para enladrillar las casas y para pintarlas exteriormente se inventan diferentes dibujos a base de cuadrados, rectángulos o sus combinaciones (fig. 32).

d) *En ángulo recto. Ángulos agudos y obtusos.* — Indicaciones prácticas. Como es esencial que la idea de ángulo encierre no sólo la diferente dirección de dos líneas, sino también la de un movimiento alrededor, la de giro, el maestro procurará desde el principio no descuidar este segundo aspecto que se olvida con frecuencia. El material puede consistir en un doble decímetro articulado que se doblará en forma de ángulo, tiritas de cartón y chinches para que se construyan ángulos los niños, abundantes cuartillas, un abanico japonés, etc.

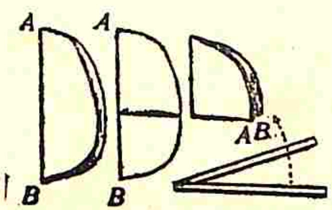


Fig. 33.

Problema: ¿Cómo construiremos un ángulo recto si no tenemos papel cuadriculado? (Puede surgir en relación con la construcción de una nueva casa de cartón, con la de una plaza cuadrada en el pueblo que están haciendo, o con la limitación de una parcela de jardín, etcétera).

Actividades. Se observa (suponiendo los ángulos de un cuadrado, de un rectángulo, y uno de los de éstos a los de un libro, la habitación, etc.) que los ángulos rectos son iguales; por lo tanto, teniendo uno se pueden construir todos los que se quieran. Podríamos tomar uno de los que ofrece una cuartilla, pero quizá se equivocaron al cortarla, además es muy blanda y se dobla. Más seguro es doblar un papel dos veces (fig. 33), haciendo que al producir el segundo doblez coincidan los bordes del primero.

Aplicación de este medio al dibujo de rectángulos y cuadrados para construir casitas y como medio de adornar las paredes exteriores de las mismas o de imitar los ladrillos. Ángulos que no son rectos; más abiertos, más cerrados. Formar ángulos rectos, agudos y obtusos abriendo y cerrando una puerta, un libro, un abanico japonés, un cuadrilátero articulado, etc. (fig. 34).

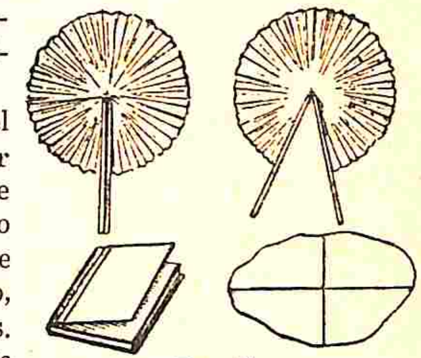


Fig. 34.

Deshacer pliegues del improvisado transportador y observar las líneas que se han formado: cuatro ángulos iguales porque coinciden y, por lo tanto, si uno es recto lo son todos. Las líneas *perpendiculares forman cuatro ángulos rectos.*

Dibujo en el encerado de ángulos rectos, agudos y obtusos en posiciones variadas.

Recortado de diversas clases de ángulos.

2. — *La pirámide y elementos derivados.*

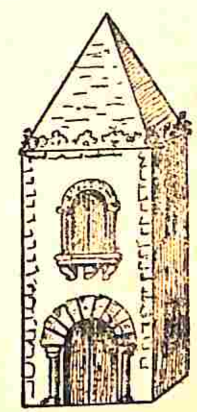


Fig. 35.

a) *La pirámide cuadrangular.* — Indicaciones prácticas. Un paralelepípedo apuntado por una de sus bases y decorados convenientemente, puede representar la torre de la iglesia y ser, por lo tanto, un modelo sugestivo. Se necesita también una representación de las pirámides de Egipto, cartulina, papel, goma y lápices. (Fig. 35).

Actividades. Con plasticina o barro se intenta moldear algo parecdo a la torre, después de observarla, tocarla, compararla con las cajas y tubos conocidos. Colocando sobre una caja de tinta Waterman una punta, *pirámide*, tenemos algo semejante a la torre. Como caja o *prismas*, nos fijamos más detenidamente en la pirámide. Una ya conocemos, la de las caras nos es familiar, es un cuadrado; las otras cuatro tienen tres lados. Se calca una de éstas, se la recorta, se cortan otras iguales. (Figura 36).

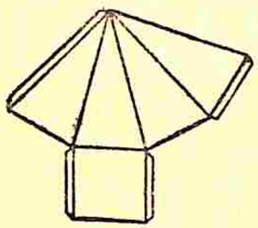


Fig. 36.

Se deshace la pirámide para ver cómo está hecha, y se la imita colocando convenientemente las caras recortadas antes junto con el cuadrado. Se recorta el dibujo, se pega, se pone en el lugar correspondiente del "pueblo".

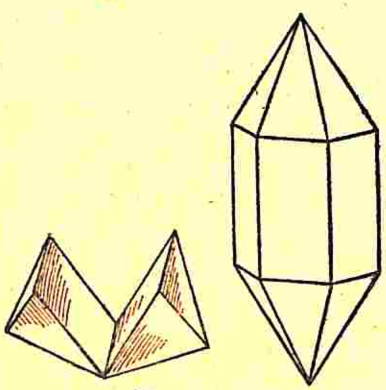


Fig. 37.

Observación de un grabado de las pirámides de Egipto, de un cristalito de cuarzo, de un octaedro hecho de jabón o de patata que se parte por la mitad, viéndose que está formado por dos pirámides; recordar objetos que tengan la forma de pirámide. (Fig. 37).

b) *El triángulo.* — Indicaciones prácticas. Es posible que en este momento sean los niños mismos los que

quieran ver de más cerca la nueva figura que han encontrado. Si no es así, y si parece oportuno llevar en esta dirección el interés, encontrará el maestro mil medios: por ejemplo, en relación con el problema planteado anteriormente del trazado de ángulos rectos, sobre todo si hay que hacerlo en el jardín, puede enseñarles a que en un cordel hagan nudos a distancias de 3, 4 y 5 metros, poniendo una estaca en cada nudo y cerrando la figura para formar un triángulo según la antigua práctica egipcia; o también puede construirse con tres tiritas de cartón y encuadernadores una figura, observando que, a diferencia del cuadrado, es rígida, y siendo éste motivo para investigar sus propiedades; si los niños son despiertos o algo grandecitos, cabe enfocar el asunto lo mismo que se hizo con el cuadrado, preguntándose de qué manera podrá construirse un triángulo como los de la pirámide, sin necesidad de calcar. (Figura 38).

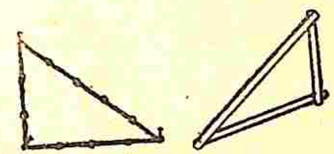


Fig. 38.

Actividades. Observación de uno de los triángulos recortados, lados, ángulos. Observación de otros triángulos. Medida de los lados con el doble dm.: unas veces son los tres iguales, otras hay dos, otras ninguno (según las circunstancias se aprende o no el nombre). Poniendo papel de calcar sobre uno de los ángulos se hace otro igual recortándolo después en papel fuerte; comparación con los demás ángulos del triángulo. Clases de ángulos en-

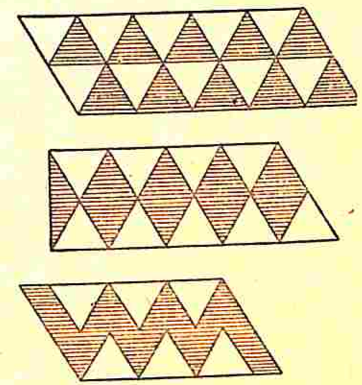


Fig. 39.

contrados. Se hace una lista de varios triángulos y las cases de ángulos que poseen así:

Triángulo ABC: A, recto; B, agudo; C, agudo.

Triángulo CDE: C, agudo; D, agudo; E, agudo.

Triángulo A'B'C': A', obtuso; B', agudo; C', agudo, etc. Ninguno tiene dos rectos, ni dos obtusos. Se intenta construir uno con estos elementos; no se consigue.

(Si se partió del problema de construir un triángulo igual a otro sin calcar, ver pág. 87).

Lista de objetos con figura triangular. Fig. 39).

Aplicación del triángulo a la decoración.

3. — *Conocimiento somero de los cuerpos de revolución.*

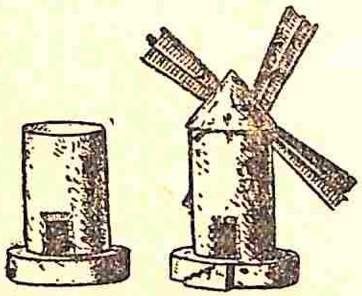


Fig. 40.

a) *El cilindro.* — Indicaciones prácticas. El maestro se proveerá de postales o grabados en que haya molinos, de un molino rudimentario hecho de cartón, de un compás, de chinches, de dibujo, hilo, papel, etc.

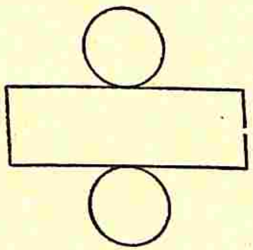


Fig. 41.

Problema: ¿Cómo podríamos poner en nuestro "pueblo" un molino que sea tan bonito como éste? (Fig. 40).

Actividades. Observación del modelo: no se ven caras, todo el lado es continuo, redondo, y si se quita la parte de las aspas puede rodar. Viendo en el grabado algún molino sin aspas y sin la parte cónica pensamos que

podemos hacer la construcción en dos partes: primero, la que tiene forma de tubo y luego la otra. La que tiene forma de tubo, *cilindro,* se termina por arriba y por abajo en una etapa redonda, como una moneda, un *círculo.* Deshacemos el cilindro y lo imitamos mediante un rectángulo y dos círculos iguales obtenidos calcando una moneda (la longitud del cilindro se obtiene por tanteo en este primer ensayo). Dibujo de puerta, ventana, etc.

Observación y recuerdo de objetos cilíndricos (lápiz, cañería del agua, del gas, cuerpo de una botella, patas de la mesa, columnas, etc.).

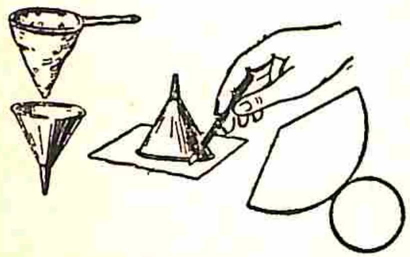


Fig. 42.

b) *El cono.* — Indicaciones prácticas. El mismo molino de antes, **un colador de café,** una manga de cazar mariposas, un embudo u otros objetos cónicos de uso corriente. Cartulina, etc., como en el caso anterior.

Actividades. Aplicando una cuartilla contra las paredes del embudo y recortando lo que sobra por abajo, se tiene aproximadamente la superficie lateral del cono. Colocando el embudo sobre otro papel y siguiendo el contorno de la base se tiene la figura de ésta, un círculo. Desarrollo del cono. Obtención de la punta o *cono* del molino, de cucuruchos para poner dulces, etc. (Los dos perímetros se igualan a tanteo). (Fig. 42).

El molino puede terminarse colocando mediante un alfiler un dispositivo más o menos en forma de cometa que represente las aspas.

c) *La circunferencia.* — Indicaciones prácticas. El maestro tiene que decidir en cada caso si sus alumnos están dispuestos para manejar el compás o si es mejor valerse sólo de un hilo que se sujeta con una chinche en el centro, pasándose el lápiz por un asa que se hace en el otro extremo. Desde luego conviene que los alumnos conozcan este procedimiento y también que se acostumbren a dibujar a pulso. Material: hilo, chinche, compás.

Problema: ¿Cómo hacer para dibujar las bases del cilindro o del cono cuando no es adecuado el tamaño de una moneda grande o una chica?

Muchos niños habrán visto quizá una noria, y algunos habrán cuidado del mulo que da vueltas; recordar que la huella de sus pies forma una marca redonda, una *circunferencia*. Podemos seguir el mismo procedimiento, imaginando que el lápiz son los pies del mulo y el hilo el largo palo o malacate a que va sujeto. El maestro traza una circunferencia en el encerado, los niños en el

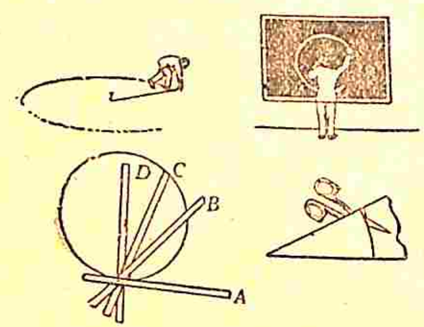


Fig. 43.

papel. Acortando o alargando el hilo, el *radio*, se dibujan circunferencias mayores o menores. (Fig. 43). Por el procedimiento usado al trazarla queda patente la propiedad de los puntos de la circunferencia de equidistar del centro, pero es inútil intentar la definición por ahora.

Recortado de algunas circunferencias dibujadas, se doblan por la mitad, *diámetro;* ver que se doble que el

radio. Se fija en un punto de la circunferencia una tirita de papel mediante una chinche y se la hace girar alrededor: tangente, secante, cuerda; variación de la longitud de ésta. Se obtienen circunferencias aproximadas doblando un papel varias veces y cortando.

Al querer usar la circunferencia como motivo decorativo, inscribiendo en ella, por ejemplo, un cuadrado, surge la necesidad de dividirla en partes iguales: doblados sucesivos, observación de los pliegues formados; son perpendiculares: deducción de la regla para inscribir un cuadrado.

Usando papel cuadriculado se dibujan a ojo varias circunferencias tangentes como motivo decorativo, se dividen en partes, se sombrean y, si viene el caso, se aprenden nombres: sector, segmento, corona.

Circunferencias secantes, concéntricas, etc. Dibujos variados. (Figura 44).

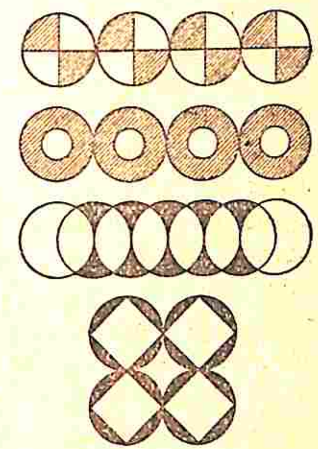


Fig. 44.

d) *La esfera.* — Indicaciones prácticas. La esfera es un objeto de difícil análisis para el niño y, por lo tanto, lo conveniente en este caso es poner a su disposición diferentes tipos para que las maneje, las haga rodar, las divida por la mitad, etc.

Observaciones del niño: no se puede tomar un molde con papel como en el caso del cono (embudo), del tubo, etc. No se puede dibujar encima ninguna recta, ni aplicar plano de lápiz. Rueda muy fácilmente: eje. Círculos máximos y menores (relacionar con geografía).

4. — *Afianzamiento de las nociones adquiridas desglosando algo más las de línea recta, curva, etc., y los conceptos de las distintas figuras conocidas.*

a) *Las líneas.* — Indicaciones prácticas. Se procurará hacer surgir la necesidad del dibujo de una recta, sea para indicar calles del "pueblo" que se está construyendo, sea para colocar una fila de árboles en el paseo, etc. Material necesario: cuerda, regla, alfileres, papel, plomada.

Actividades. Presentado el problema del trazado de una recta, se ensaya con una regla, que en algunos casos resulta corta, con un papel doblado que parece poco resistente y seguro para un trazado largo; procurar que alguien recuerde entonces cómo marcan los surcos los labradores: cuerdas tirantes. Se resuelve por este medio la dificultad. Si la cuerda es corta y los niños están preparados, se les reparten alfileres y se propone que con este elemento tracen una recta (si hay peligro de que se lastimen lo hace el maestro en su mesa con ayuda de dos o tres, o si se dispone de jardín se sustituyen ventajosamente en éste los alfileres por estacas). Ensayos: comprobación con una regla, una cuerda (para el desarrollo detallado de esta cuestión, ver pág. 76).

Las dos filas de árboles de la avenida son *paralelas*. (Simple constatación sin definiciones). Trazado de paralelas con la regla y el cartabón. Otras rectas paralelas: lados del rectángulo, del cuadrado.

La farola es *perpendicular* al suelo. Trazado de perpendicuares con la regla y el cartabón. Buscar perpendiculares. (Figura 45).

El agua del lebrillo está *horizontal*. La cadena de la lámpara está *vertical*. La caña está *inclinada*. Dibujar líneas en estas tres direcciones. Buscarlas en los objetos de alrededor o que se recuerden. Ensayos con la plomada.

El canal forma una línea recta, el río forma una línea *curva*. Recordar líneas rectas (lados cuadrados, triángulos, etc.). Recordar líneas curvas (circunferencias).

b) *Las figuras.* — Indicaciones prácticas. Un proyecto complementario, la construcción de un jardín, por

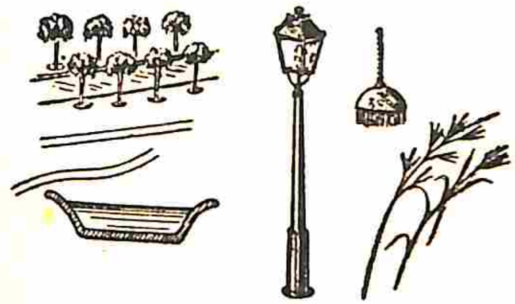


Fig. 45.

ejemplo, puede volver a dar actualidad a las figuras geométricas, su construcción, etc., ofreciendo motivo para afianzar y ampliar las nociones adquiridas. Pretexto análogo ofrece la decoración de una cubierta de libro, de un tapete para la mesa, etc.

Actividades. Discutido el proyecto en clase cada niño hace para sí un bosquejo a pulso sobre papel cuadriculado; después que la clase lo ha visto se hace en grande con los instrumentos adecuados, aprovechando para insistir sobre los nombres de las figuras dibujadas, y descubriendo, al tomar medidas, algunas propiedades nuevas, por ejemplo, que dos triángulos iguales unidos por la base forman un paralelogramo, que las diagonales de un rectángulo son iguales, que las del cuadrado son iguales y perpendiculares, etc.

Conocimiento de otros polígonos: pentágonos, exágonos, etc. Distinciones entre los distintos paralelogramos y cuadraláteros.

Conocimiento de otras curvas, elipse, por ejemplo.

CAPÍTULO VI

SENCILLO ANALISIS DE LAS FIGURAS

TERCER GRADO

1. — *Distinción y relación entre superficie, línea y punto.*

Indicaciones prácticas: El material necesario consiste, sencillamente, en unas cuartillas. Como es éste un tema en el que la aplicación del procedimiento activo encuentra, al decir de las gentes, mucha dificultad, he creído interesante extractar la lección hecha acerca de él por un prestigioso pedagogo inglés. *

Se reparten pedazos de papel a los niños y se les pide que hagan un cuadrado; lo recortan y se plantea en seguida la cuestión: ¿qué significa "un cuadrado"? Observando la figura y recordando lo hecho el año anterior, dirá algún alumno, seguramente, que es "una figura con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos". El maestro toma entonces uno de los cuadrados, lo alabea, y pregunta si sigue mereciendo tal nombre. Como consecuencia se conviene en añadir el calificativo "plana" a la definición. Surge entonces el problema: ¿cómo sabremos si una figura es plana? De los intentos de definición dados por los niños, va tratándose de deducir el concepto;

* BENCHARA BRANDFORD: *Mathematical Education.* Clarendon Press, Oxford, 1921.

y, como seguramente habrá una cierta confusión entre superficie en general y superficie plana, se procede, para aclarar el asunto, a observar los objetos de alrededor, procurando distinguir las superficies de los sólidos, las líneas y los puntos, y también unas superficies de otras (planas y curvas). Se hace en el encerado una lista. He aquí la que resultó en el caso citado:

I. Puntos o esquinas: punta de lápiz, esquina del pupitre, rincón de la sala.

II. Líneas o bordes: *a)* Líneas rectas: el borde del pupitre, la línea entre el techo y la pared, el filo de la puerta, etc. *b)* Líneas curvas: el borde del extremo de la chimenea, las cejas. *b)* Redondas o curvas: superficie de la pelota, de la columna, los labios, las orejas, etc.; también es curva la línea hecha con tiza en una pelota.

III. Superficies: *a)* Planas: pupitre, encerado, piso, etc.; cara, etcétera.

IV. Sólidos: pelota, cuerpo humano, etc.

Se ve entonces que los puntos o esquinas limitan líneas, que las líneas o bordes limitan y separan superficies, y que las superficies limitan o separan los cuerpos.

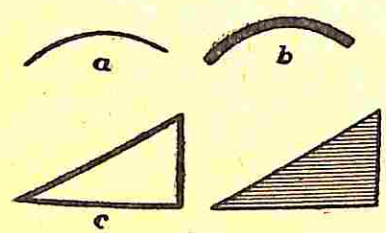


Fig. 46.

Problemas que se plantean y resuelven: Buscar sólidos que no tengan esquinas. ¿Cuántos bordes o líneas tiene una caja? ¿Y una mesa con cuatro patas rectas? Describir o definir más exactamente un cuadrado.

Para aclarar la idea de línea se pide a un niño que dibuje una en el encerado y lo hace supongamos más o menos como indica la figura *a;* entonces el maestro traza otra muy gruesa, *b,* por ejemplo. (Fig. 46). ¿Es una? ¿Son dos? Se conviene en que con la tiza se dibujan siempre pequeñas superficies. Al querer medir la superficie del triángulo *c*, ¿qué línea o límite tomaremos, el de dentro o el de fuera? Se va así afinando el concepto de línea. Se trata entonces de averiguar cuál es la diferencia entre la línea recta y la curva, llegándose a la conclusión de que aquélla es la distancia más corta entre dos lugares; lo cual plantea a su vez el problema del tamaño del punto que marca desde donde hay que empezar a medir, y muestra la necesidad de ser precisos en las definiciones.

Problemas: ¿Cuántas líneas pueden trazarse entre dos puntos? ¿Cuántas de éstas son rectas?

2.—*Un conocimiento más completo de la línea recta.*

Primer problema: Se marcan dos puntos en el encerado y se pide que se les una mediante una línea recta. Como la regla no alcanza se resuelve poniendo entre los dos un bramante "bien tirante" para que la distancia sea lo más corta posible, y se marca con tiza la dirección indicada. Segundo problema: Se fijan los alfileres diagonalmente en un largo pupitre y se pide la distancia entre ellos, permitiendo usar sólo el doble decímetro y un bramante. A poco que discurran los niños se llega al resultado tomando la distancia con el bramante y midiendo luego éste cuidadosamente. Tercer problema: Medir la distancia de la escuela al ayuntamiento que está en frente, sin disponer de un bramante bastante largo para ir de un punto a otro. O también medir en la escuela la distancia entre dos chinches clavadas en la tarima, o entre dos árboles del jardín, disponiendo sólo de un bramante de metro y medio. Surgirá inmediatamente la dificultad de que "no hay camino trazado para aplicar el bramante". ¿Cómo saber en qué dirección hay que ir? Si se empieza por tanto observarán en seguida algunos que "se tuercen". Se piensa entonces en poner un alfiler o un palito señalando cada vez el final del bramante en lugar de colocar allí el

dedo, y al hacer esto se cae en la cuenta de que mejor sería empezar por situar los alfileres en los puntos convenientes de modo que estuvieran en fila y no se torcieran. Hemos llegado al uso de las visuales como medio de trazar líneas rectas y el concepto de la recta (si no a la definición) como una serie de puntos en la misma dirección.

Una vez colocados de modo conveniente los alfileres, se aplica, sucesivamente, sobre la línea señalada el trozo de bramante, que entra, supongamos ocho veces y media, y no tenemos más que hacer un pequeño cáculo para saber que la distancia es de $8\ 1/2 \times 1\ 1/2 = 12\ 3/4$ (conviene siempre que se pueda relacionar la geometría con la aritmética y viceversa).

3.—*El ángulo.*

Indicaciones prácticas: Se trata de profundizar la idea de ángulo en los dos aspectos indicados en otra ocasión y de aplicar el conocimiento a casos prácticos introduciendo la noción de medida y, por lo tanto, la posibilidad de sumar, restar, etc. Un doble decímetro plegable resulta, según dijimos antes, material muy útil, y aún mejor un ángulo de brazos articulados hecho por el mismo maestro o por los niños como trabajo manual mediante dos listoncitos doblados dos veces; son también necesarias cuartillas, un trozo de papel transparente y unas tarjetas o cartulinas.

Proceso. Se coloca el ángulo de madera plegado como indica la figura A contra el encerado y manteniendo quieto uno de los brazos se va separando, abriendo, el otro; se ha formado un ángulo. Con la tiza se siguen los bordes interiores o exteriores de los listones: resulta otro ángulo "copia" del primero. Se cierra el improvisado transportador y se pide a algún niño que lo abra "como antes"; varios ensayos hasta caer en la cuenta de que el que se dibujó en el encerado puede servir de patrón. Por comparación con él se ve también que la longitud de los lados no influye en el tamaño del ángulo. Observación y recuerdo de ánguos formados por cruces de calles, de carreteras, de líneas de trenes o tranvías. (Fig. 47).

Se plantea entonces el problema de doblar en un papel un ángulo igual al que hay dibujado en la pizarra: tanteos. Se coloca después sobre el ángulo una hoja de papel transparente, se calcan los lados. ¿Cómo llevar ahora este ángulo a otra parte del encerado? Ensayos para llegar a la conclusión de que puede hacerse fácilmente señalando tres puntos (pinchando con un alfiler, por ejem-

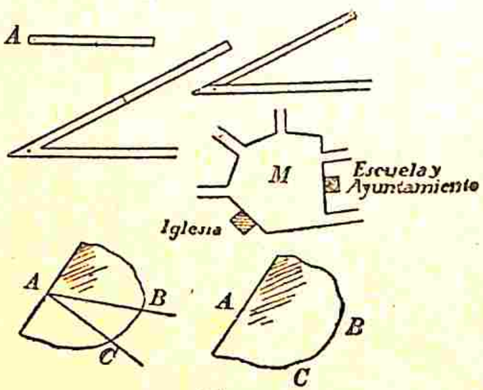


Fig. 47.

plo), uno en cada uno de los lados y el tercero en el vértice. Ejercicios: Copia de ángulos del encerado al papel y viceversa, apicación a la obtención de un plano semejante al que ha hecho el maestro de los macizos del jardín o de los alrededores de la escuela, por ejemplo (fig. M).

Al familiarizarse con esta manera de copiar ángulos se descubre al fin que el papel transparente no es necesario y que el mismo efecto produce un papel limpio cualquiera de un tamaño apropiado, que se coloca sobre el ángulo, y en el cual se señalan el vértice y los puntos en que los lados se cruzan con la línea del borde; hasta colo-

car después dicho papel en el sitio donde se quiere dibujar el ángulo, marcar los puntos con lápiz y unirlos mediante rectas. Así se refresca una antigua noción (dos puntos determinan una recta) que adquiere nuevo interés al aparecer de modo diferente.

El descubrimiento hecho respecto de la manera de copiar ángulos, puesto en palabras de los chicos convenientemente criticadas, puede finalmente expresarse en su cuaderno así: "conociendo la posición del vértice y de un punto cualquiera en cada lado del ángulo, conocemos el tamaño de éste y podemos hacer otro igual".

Problemas: Dibujar un ángulo igual a otro dado; dibujar un ángulo igual a otro dado con el vértice en un punto conocido; ídem con un vértice en una determinada línea recta; ídem con el vértice en un punto señalado en una determinada línea recta; ídem con un trazo coincidiendo con una determinada línea recta; ídem satisfaciendo al mismo tiempo estas dos últimas condiciones. ¿Puede reproducirse un ángulo conociendo tres puntos cualesquiera de su límite? (La solución colectiva de cada uno de estos problemas puede sugerir el descubrimiento de nuevas verdades).

SUMA DE ÁNGULOS

¿Pueden sumarse los ángulos? Este concepto aparentemente sencillo ofrece muchas dificultades a los niños y hasta a los adultos analfabetos. Después de plantear la cuestión con motivo de un caso práctico (averiguar, por ejemplo, cuál es la posición de un barco que colocado en la línea AB, dirección de Sóller a Barcelona, ha girado a causa de viento primero, un ángulo a hacia la derecha, después otro, b, a la izquierda, y por último c a la derecha otra vez), se puede empezar por dividir en dos un ángulo de papel, doblando y luego recortando; se juntan las dos partes otra vez y el ángulo que resulta, el primitivo, es evidentemente la suma de otros dos. Se divide después otro ángulo en tres partes, se reúnen en órdenes diferentes para volver a tener el original. Se repite la operación aumentando el número de divisiones hasta que los niños comprenden claramente que los ángulos pueden sumarse y que el orden de adición es indiferente.

Con el transportador de dos brazos representado más arriba, colocado sobre el encerado manteniendo un lado fijo, se hace girar el otro, primero una cierta cantidad, hasta llegar a una línea marcada, después más lejos para alcanzar una segunda posición que se señala de antemano; así se ve de nuevo la unión de dos ángulos en uno, mediante el segundo aspecto, la rotación.

Ejercicios: Con un sencillo transportador de papel, sumar dos ángulos dibujados en el encerado o en un papel. Añadir a estos dos otro ángulo cualquiera. Añadir otro aún sumando así cuatro ángulos juntos.

Por el mismo procedimiento se pueden restar ángulos: restar los dos ángulos dibujados en el encerado, ¿qué queda? Restar del ángulo A los ángulos B y C. Idem de los ángulos A, B y B sumados los D y E.

Dibujar un ángulo doble del A. Idem otro tres veces mayor que C. Dibujar un ángulo igual a la mitad de B. Idem otro igual a la cuarta parte de E.

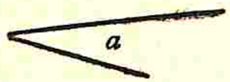


Fig. 48.

Problemas: Resolución del problema del barco origen de la cuestión estudiada.

Dos líneas de tranvía forma un ángulo igual a a; ¿podríais dibujarlas? (Figura 48).

Fig. 49.

Estando en la Pampa, tiene un explorador que tomar un determinado sendero que, según una indicación que lleva escrita, debe hallarse girando a la derecha un ángulo igual al que acompaña (figura 49), después de colocarse de espaldas a una roca señalada mirando bien derecho frente a sí; ¿podríais dibujar el sendero?

Un girasol, volviéndose siempre cara al sol, gira primero un ángulo igual a c, y luego otro igual a d, ¿cuánto ha girado en total?

Una veleta tenía una dirección coincidiendo con la línea AB, ha girado a la derecha un ángulo igual a a y a la izquierda otro igual a b, ¿cómo está colocada ahora? (los ángulos a y b *variarán;* al principio será mayor a, pero luego será mayor b).

MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS

Indicaciones prácticas. Con una tarjeta de visita, usada a modo de transportador, se hacen ejercicios de comparación de ángulos hasta que quedan claros los conceptos de igual, mayor y menor, y surge la necesidad de una unidad. De ahí viene el volver la vista al ángulo recto, que es el que sabemos tener una magnitud fija. Como es muy grande se subdivide: grados. La tarjeta subdividida sirve para realizar las medidas. Complemento. Suplemento. Multiplicación y división de ángulos. (Fig. 50).

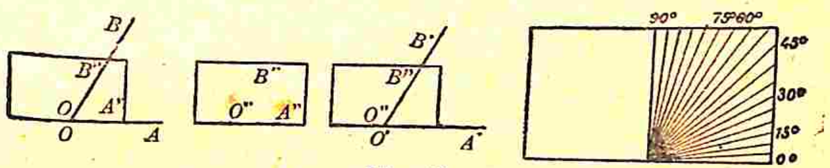


Fig. 50.

(Conviene que la división en partes o grados no se introduzca hasta que se hayan dado los niños cuenta del tamaño excesivo del ángulo recto. El que sean 90° y no 100° el número habitual de divisiones obedece a razones que por el momento los niños comprenden difícilmente, y se les dice así si lo preguntan).

Problemas: Un ángulo de 40° y otro de 30° se tienen que restar de un ángulo recto, ¿cuánto valdrá el ángulo que queda?

Dibuja en el papel tres ángulos, mídelos con el transportador, y di en cada caso lo que le falta para valer un recto.

Dibuja un ánguo igual a 2 a, otro igual a 3 b, otro igual a 4 c. Di su valor en grados, sabiendo que $a = 40^\circ$, $b = 115^\circ$, $c = 75^\circ$. Comprueba, tomando medidas, los resultados obtenidos. (Fig. 51.)

Sabiendo que los ángulos que juntos valen un recto se llaman complementarios, di cuál es el conjunto de un ángulo de 60°, el de uno de 45°, el de uno de 83°. Sabiendo que los ángulos que valen juntos 180°, o sea un ángulo llano o dos rectos, se llaman suplementarios, dibuja el suplementario de los ángulos a y b.

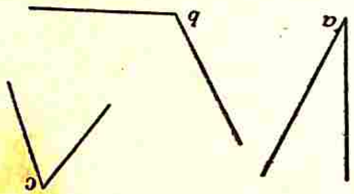


Fig. 51.

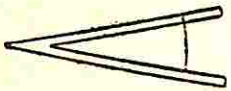


Fig. 52.

¿Cuál es el suplemento de un ángulo de 110°? ¿Y el de uno de 45°?

Tenemos tres ángulos de 83, 54 y 27 grados; si los sumamos, ¿cuál será su suplemento?

El suplemento de un ángulo es de 25 grados, ¿cuál es este ángulo? ¿Y su mitad?

Divide un ángulo de 120 grados en tres partes iguales, ¿cuánto valdrá cada una?

EL ÁNGULO Y EL ARCO

En el ángulo articulado que venimos usando (fig. 52), se clava una chinche de modo que la punta salga por la cara ventral, si así puede decirse, del brazo que se hace girar, señalando así sobre el papel, o mejor sobre un cartón, una ranura en forma de arco. Cuando los dos brazos son perpendiculares, ángulo recto, se ha descrito un cuadrante; cuando están en línea recta, ángulo llano, dos

rectos, se ha dibujado media circunferencia, etc. El ángulo y el arco son resultados del mismo giro, tienen el mismo número de grados (puesto que la circunferencia se ha dividido en 360, correspondiendo así también 90 al ángulo recto) : se puede, pues, tomar el segundo, que es más fácil de medir, como medida del primero. Observar experimentalmente que cuando coinciden los ángulos lo hacen también los arcos descritos con el mismo radio. Trazado de ángulos iguales usando el procedimiento corriente del compás. Uso del transportador semicircular.

Problemas y ejercicios: ¿Cuál es el ángulo que forma ahora este abanico? Sabiendo que cuando está abierto del todo abarca 170° representa en un círculo la posición de las varillas terminales (Fig. 53).

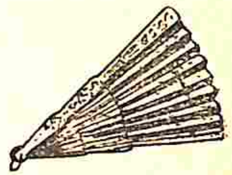


Fig. 53.

¿Qué parte de la circunferencia abarca un águlo de 60 grados?

El reloj: Observa el reloj y di en grados y en fracción de circunferencia qué ángulo recorre la manecilla pequeña cuando pasa de las 12 a las 3. ¿Y cuando va de la 1 a las 7? ¿Y a las 8 1/2?

Son las 3 1/2. A las 4 1/4 se merienda, ¿cuánto tiempo falta? ¿Qué camino tiene aún que recorrer cada una de las agujas del reloj.

La rosa de los vientos. El viento era N. Ahora es N.E., ¿qué angulo forma la veleta con su primitiva dirección?

CAPÍTULO VII

PRIMERAS NOCIONES DE GEOMETRIA DE POSICIÓN. EL TRIÁNGULO

El tesoro escondido. Se cuenta, por ejemplo, una historia de piratas y de dinero que han escondido, sin posibilidad de dejar señal exterior por el peligro de que lo encuentren otros: ¿cómo saber dónde está? También puede surgir el problema en relación con un modelo de dibujo que precisa colocar al otro día exactamente en el mismo sitio para que pueda aprovecharse lo hcho ya, o con el juego del escondite, etc.

Para hallar la solución se coloca sobre la mesa una lenteja, verbigracia, que va a representar el tesoro, el modelo de dibujo, etcétera, y se discute lo que puede hacerse para saber el sitio en que está si acaso la quitamos; la señal con tiza no sirve "porque la verían los que quisieran apoderarse de las riquezas". ¡Si supiéramos a qué distancia está el borde de la mesa!, dirá alguien; ¿de cuál?, pregunta el maestro. Comprobación experimental de que con uno no basta. Coordenadas (no hace falta naturalmente, el nombre). Se averiguan, midiendo, las coordenadas de la lenteja; se la quita, se la coloca, mediante éstas, otra vez en el mismo sitio. Ejercicios de "acertar" distintos lugares de los cuales se conocen las coordenadas. Interpretación de algún escrito referente a un tesoro, por ejemplo: "cavar a diez pasos de la gran encima, cuando se ve el picacho X por sobre la roca Z".

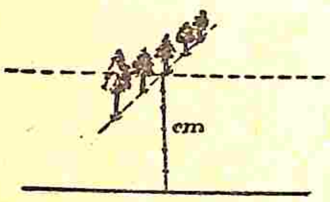


Fig. 54.

Problemas: Señala en el encerado un sitio que diste 11 decímetros del lado vertical y 8 del horizontal.

Busca en el patio de la escuela el lugar donde está escondida una moneda, sabiendo que desde él se ven en fila los pinos de la avenida, y que dista 6 m. de la pared S. (Fig. 54).

Busca tres puntos necesarios en tu pupitre y da las indicaciones necesarias para encontrarlos.

El problema resuelto anteriormente de fijar la posición de un punto en un plano se hace más complejo cuando en vez de un punto sólo nos interesa un grupo de ellos, una figura, y puede ser el origen de una interesante investigación acerca de la igualdad de figuras. Detallaremos sólo el caso del triángulo.

Problema. Se está dibujando un objeto de forma paralelepípeda, un libro, por ejemplo, y teniendo que dejarlo sin acabar por ser la hora de matemáticas, convendría que señaláramos el sitio para que éste el día que viene en la misma posición. ¿Cómo hacerlo? La solución propuesta probablemente por los niños, marcar con tiza una línea alrededor del borde, se rechaza por la facilidad de que sea borrada impensadamente por alguien. Se piensa entonces en marcar la posición de los vértices, cosa que sabe hacerse ya. ¿Cuántos? Poniendo en vez del libro un trozo de papel de su misma forma se ve pronto que con señalar la mitad basta, y la mitad es un triángulo. Señalando, pues, los tres vértices, tenemos la posición del triángulo y por lo tanto la del libro; pero ¿son necesarios los tres vértices? De la observación de la figura se deduce que basta con dos con tal de saber hacia qué lado cae el tercero. Se fija, pues, la posición de los vértices A y B, indicando en qué lado cae C y queda resuelto el problema. (Figura 55).

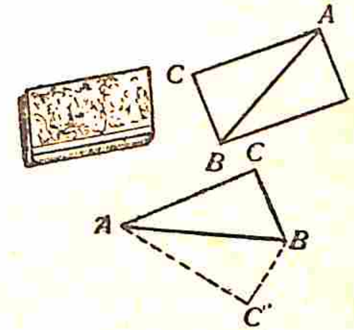


Fig. 55.

Ejercicios: Suponiendo que cada dm. es un metro, dibujar en la pizarra la posición que ocupa en el jardín un macizo de forma cuadrada, tres de cuyos vértices distan respectivamente A, 2 m. del muro Sur y otros 2 del Este;

B, 2 m. del Sur y 3 1/2 del Este; *D*, 4 1/2 del Sur y 2 del Este.

Colocar este velador triangular en la posición que ocupaba antes, sabiendo que una de sus patas distaba 1,75 m. de la pared que da a la calle y 0,85 de la perpendicular, la otra 2,30 y 0,85, respectivamente, y la tercera queda hacia el lado contrario de la pared más próxima.

Dice el documento que hace referencia a un tesoro: "En medio del sendero que sigue el mismo camino que el sol hay una gran encina, al N. de ésta los restos de un pozo abandonado, y a 3 m., en dirección del N. E., existe una piedra plana medio enterrada: levantadla". ¿Podríamos nosotros encontrarlo? Haced el plano.

Problema: Si lo que deseáramos no fuera colocar un triángulo en la misma posición que estaba, sino hacer otro igual que el dado, ¿necesitaríamos los mismos datos? ¿Nos bastará, por ejemplo, saber lo que distan unos de otros los vértices?

Se clavan en la mesa tres alfileres o tres chinches en los vértices del triángulo dado, y por ellas se hace pasar un hilo blanco que se anuda cuidadosamente: tenemos un triángulo igual a él. Con tinta se señala sobre el hilo el lugar correspondiente a los vértices. Al llegar a otro sitio dicho hilo y colocar en las marcas los alfileres, se reproduce el triángulo propuesto. (Fig. 56). Para comprobarlo se señala con lápiz los lados de este segundo triángulo y se recortan las dos figuras, superponiéndolas. Otra comprobación: se dice a los niños que construyan cada uno en su papel un triángulo cuyos lados sean, por ejemplo, de 3, 4 y 5 cm.; se recortan y se colocan unos sobre otros: son iguales, Los niños enuncian entonces el descubrimiento hecho y lo aplican a diferentes casos.

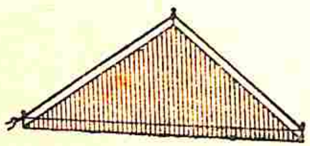


Fig. 56.

Ejercicios: Construir un triángulo equilátero igual a otro que tiene de lado 3 centímetros.

Construir un ángulo isósceles sabiendo que el lado que se repite es de 4 cm. y el otro de 5 1/2.

Construir un triángulo escaleno cuyos lados son de 7, 4 1/2, y 8 centímetros.

Problemas: ¿Podremos construir un triángulo igual a otro sin medir los tres lados? Se ensaya la reproducción, en papel, de un triángulo de cartón o madera: calcando dos lados queda resuelto el problema. Se intenta reproducir el triángulo cortando dos tiritas de cartón iguales a dos lados y uniéndolas por el vértice: no sabemos cuánto hay que cerrar o abrir el ángulo. No son, pues, bastante dos lados, hace falta el ángulo comprendido. Ejercicios como en el caso anterior. Enunciado de la nueva verdad descubierta.

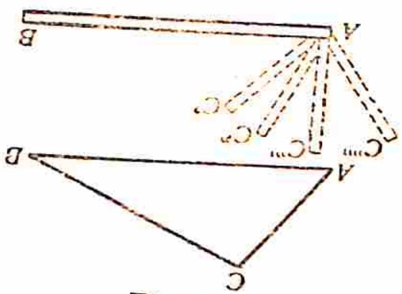


Fig. 57.

Problema: ¿Se necesitan siempre dos lados al menos? Intentemos tomar sólo uno. Cortamos una tira de cartulina de igual longitud que el lado *AB*, por ejemplo (fig. 57): en sus extremos sujetamos unas chinches con otras dos tiras, y luego, colocando esta figura sobre el triángulo que queremos copiar, de modo que coincidan la tira primera y *AB*, hacemos girar las otras dos hasta que formen ángulos iguales a *A* y *B*; observamos que automáticamente estas tiras se juntan en el vértice *C*. Ejercicios de construcción de triángulos dados un lado y los ángulos adyacentes. Enunciado del nuevo caso de igualdad.

Problema: ¿Podemos construir un triángulo igual a otro sin medir ningún lado? Se dibujan en el encerado tres ángulos y se propone a los niños que construyan con ellos un triángulo. Observación de los resultados obtenidos: los triángulos son desiguales, una vez construído el primer ángulo no se sabe dónde colocar el segundo; indeterminación; por lo tanto, hace falta un lado. (Fig. 58). Los triángulos resultantes tiene una forma parecida (semejanza); además, construídos los dos primeros ángulos, no hay necesidad de medir el tercero: con sólo juntar los lados de los otros resulta la medida deseada. Se prueba con otros pares de ángulos; siempre que forman triángulo, tenemos el tercer ángulo sin necesidad de medir, pero a veces "no se juntan", parecen demasiado grandes.

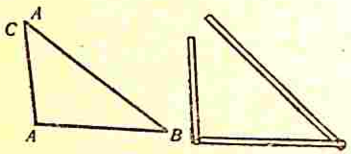


Fig. 58.

¿Ocurre también esto con los lados? Se prueba y se ve que no. Como consecuencia nos planteamos el problema: ¿Qué tamaño máximo pueden tener dos ángulos para formar con ellos triángulo? ¿Hay alguna relación entre los ángulos de un triángulo que explique por qué cuando se tienen dos se sabe, sin medir, el valor del tercero?

Se hace una tabla de valores de ángulos medidos con el transportador: a primera vista no se descubre nada de particular, pero al sumar los valores hallados se ve que la suma es aproximadamente constante, 180°. Se miden los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

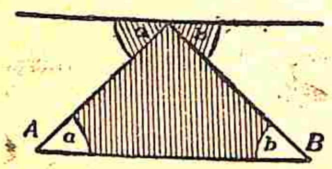


Fig. 59.

Se toman tres ángulos cualesquiera que sumen 180°, y con ellos inténtase formar triángulo: resulta imposible. Se repite la experiencia con ángulos cuya suma sea mayor y menor de 180°: la figura no se cierra. Se recortan dos de los ángulos de diferentes triángulos y se colocan junto al tercero como indica la fig. 59: resulta un ángulo plano.

En un triángulo construído con alfileres y un hilo (figura 60) se va habriendo de un modo continuo uno de los ángulos y se observa lo que ocurre con los otros. ¿Puede un triángulo tener dos ángulos rectos o dos obtusos? Enunciado de la curiosa propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo.

Si no en el mismo curso, en el siguiente, puede ser interesante continuar la investigación de este sugestivo descubrimiento, y tratar de obtener de él una prueba más general: Se toman dos triángulos rectángulos iguales y se hacen coincidir por la hipotenusa: resulta un paralelogramo, un rectángulo. Cualquier rectángulo puede dividirse en dos triángulos iguales (se hace la prueba cortando y superponiendo). Como un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos, los de cada triángulo que lo forman valdrán indudablemente dos y, por lo tanto, los dos agudos de los mismos, uno. (Fig. 61).

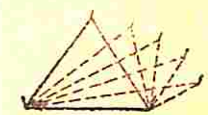


Fig. 60.

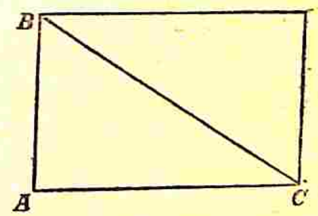


Fig. 61.

Un triángulo cualquiera puede dividirse en dos triángulos rectángulos, cada uno de los cuales vale, según acabamos de ver, dos rectos, en total, pues, cuatro rectos; pero como al hacer la división se han añadido precisamente dos rectos, *a* y *b*, resulta que los ángulos primitivos debían valer, a la fuerza, dos. Puede razonarse también así: $ABD+BAD$ (ángulos agudos de uno de los triángulos rectángulos) = 1 ángulo recto; $BCD+DBC$ (ángulos agudos del otro triángulo rectángulo) = 1 ángulo recto, luego $ABD+BAD+BCD+DBC =$ 2 ángulos rectos, pero $ABD +DBC+ABC$, o ángulo *B*, *BAD* es el ángulo *A*, y BCD

el ángulo C, por tanto, $A+B+C=2$ rectos (Fig. 62) *.

Ejercicios y problemas: Construcción de triángulos rectángulos iguales a otros dados: diferentes casos. Construcción de triángulos cualesquiera = a otros dados: casos. En un triángulo rectángulo un ángulo agudo vale 20°, ¿cuánto valen los otros?

Un triángulo rectángulo es isósceles, ¿cuánto valen sus ángulos?

¿Cuánto vale el ángulo de un triángulo equilátero?

Hallar una relación cuantitativa entre el ángulo exterior de un triángulo y los dos internos no adyacentes (este ejercicio habrá que hacerlo entre todos, en el encerado).

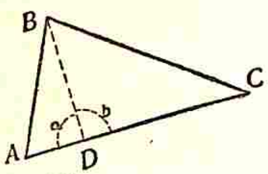


Fig. 62.

En un triángulo obtusángulo vale uno de los ángulos agudos 25 grados y el exterior del obtuso 60, ¿cuánto vale el otro agudo?

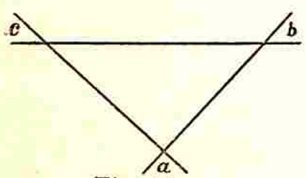


Fig. 63.

Construye una figura como la del diagrama (Fig. 63), con tres líneas que se corten formando ángulos a de 98 gradós y b de 45. Calcula el valor de los diez ángulos restantes basándote en las verdades recientemente descubiertas. Compruba con el transportador los valores hallados y haz una tabla con las dos series de resultados.

Se desea saber la distancia que hay de A a B' y, como no es posible medir a través del río; se nos ocurre hacer lo indicado en la adjunta; sabiendo que por construcción son iguales los ángulos 1 y 2, 3 y 4, di lo que hay que

* Comprendida bien esta verdad puede tomársela como punto de partida para el descubrimiento de otros que son su consecuencia: valor de los ángulos de un paralelogramo, de un cuadrilátero cualquiera, de un polígono de mayor número de lados, de los ángulos externos, etc., y que pueden encontrar solos los niños.

hacer para hallar la longitud que deseamos y por qué razón (Fig. 64).

Con una escuadra de as que usan los dibujantes, que tienen los ángulos agudos de 45° y que por lo tanto es un triángulo isósceles, cabe decir, como indican las adjuntas figuras, una serie de experimentos interesantes, aplicación de las verdades aprendidas en las últimas clases y que pueden ser punto de partida para el descubrimiento de otras nuevas. Se pueden, por ejemplo, medir alturas de objetos, calcular distancias inaccesibles, etc.

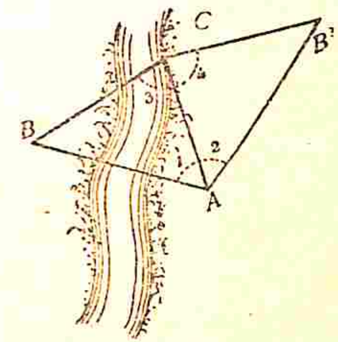


Fig. 64.

Fig. 65. 1ª Siendo el ángulo A de 45°, el triángulo ABC es isósceles, y por lo tanto, por ser los catetos iguales se puede medir el horizontal en vez del vertical.

Fig. 65, 2. Para medir la distancia AB, siendo B inaccesible, se enfila primero B desde A poniendo el carta-

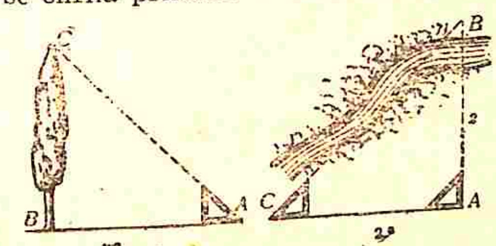


Fig. 65.

bón horzontal; se le tralasda paralelamente a sí mismo hasta que se enfila B por la hipotenusa, y se tiene entonces que por ser el triángulo ABC isósceles basta medir AC para tener AB.

También el *gnomon* es una aplicación de la misma propiedad de los triángulos rectángulos, como indica la figura, y puede ser fácilmente manejado por los niños. Tales de Mileto midió por este procedimiento la altura de las pirámides de Egipto unos seiscientos años antes de Jesucristo.

Se clava el gnomon en el suelo y se espera a que su sombra sea igual a su altura; en este momento el triángulo es isósceles. (Fig. 66). Cualquier otro objeto que

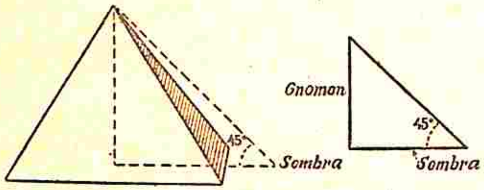


Fig. 66.

proyecte entonces su sombra está en las mismas condiciones y se puede medir la altura por la longitud de la sombra. (Este problema puede ser el punto de partida del estudio de la proporcionalidad) *.

Problemas y ejercicios: Para medir la torre de una iglesia nos alejamos de su pie 15 metros hasta llegar a ver el extremo en línea recta con la hipotenusa de la escuadra de dibujante. ¿Cuál será la altura si del pie de la torre al centro de la misma hay 4 metros?

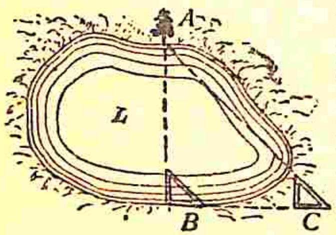


Fig. 67.

¿Podrías decir la anchura del lago *L* sabiendo que para enfilar el árbol *A* que está en la otra orilla hemos tenido que trasladar el cartabón de *B* a *C* 60 metros? (Fig. 67).

* Véase *Aritmética*, por Margarita Comas, pág. 168. Publicaciones de la "Revista de Pedagogía", Madrid, 1928.

El gnomon, da una sombra igual a la mitad de su altura, ¿cuál será la altura de un edificio que en este momento da una sombra de 9 metros?

Con motivo de la formación de un macizo en el jardín, o de la necesidad de levantar un plano del campo que requiera el trazado de una o varias perpendiculares como punto de referencia, se recuerda la propiedad ya conocida de que si en un cordel se hacen 12 partes iguales y se forma con él un triángulo poniendo estacas (vértices) en las divisiones 4, 7 y 12, el ángulo formado en la división 4 es recto. Construímos en el papel, por procedimientos análogos, un triángulo rectángulo, y trazando perpendiculares por las divisiones o nudos, formamos sobre cada uno de los lados un cuadrado dividido en cuadraditos iguales. (Fig. 68). Se cuentan y se ve que en el cuadrado levantado sobre la hipotenusa hay el mismo número que en los dos construídos sobre los catetos. Se enuncia el descubrimiento hecho: "en este triángulo rectángulo, el cuadrado dibujado...".

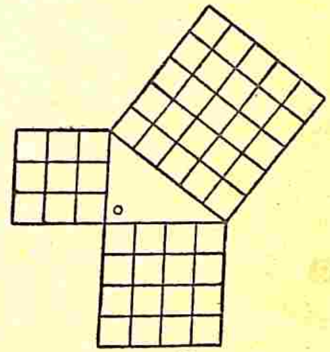


Fig. 68

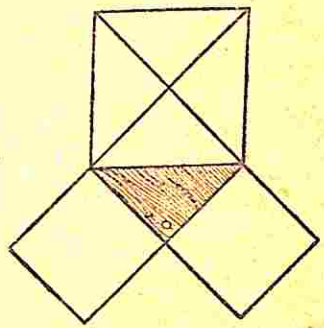


Fig. 69

Problema: ¿Será cierta tan interesante propiedad para otros triángulos rectángulos o se verificará sólo en este caso particular?

Se dibuja en el papel un triángulo rectángulo isósceles de lados cualesquiera, y sobre éstos se construyen cuadrados como en la adjunta figura; ¿qué se observa?

Comprobación: recortando un triángulo igual al primitivo y superponiéndolo a cada uno de los demás. (Fig. 69).

Dibujamos un triángulo rectángulo escaleno y sobre sus lados tres cuadrados: recortamos estos cuadrados y los pesamos: el cuadrado construído sobre la hipotenusa pesa igual que los otros dos juntos. A ver si podemos probarlo de otro modo.

Tomamos un triángulo rectángulo cualquiera, por ejemplo, el cartabón de dibujo; medimos cuidadosamente sus catetos y construímos un cuadrado de lado igual a la suma de ambos. (Fig. 70.) Si sobre este cuadrado aplicamos sucesivamente el cartabón y señalamos las distintas posiciones que ocupa, como indica la figura *A*, veremos que en el centro queda una cuadrado igual al de la hipotenusa; es decir, que el cuadrado grande se compone de cuatro triángulos y un cuadrado que tiene por lado la hipotenusa.. Si sobre el primitivo cuadrado u otro igual aplicamos la escuadra, según indica la figura *B*, vemos que caben cuatro triángulos más dos cuadrados, uno de lado igual al cateto mayor y otro igual al cateto menor. ¿Cómo podemos enunciar ahora la propiedad?

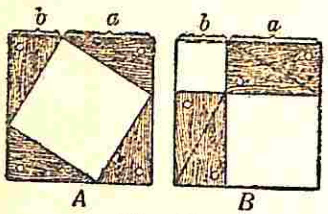


Fig. 70.

Ejercicios y problemas:

Aquí tengo un triángulo rectángulo cuyos catetos son, respectivamente, de 6 y de 8 centímetros, adivina cuál será la hipotenusa, resolviendo el primero el problema gráficamente y después por cálculo.

¿Podríamos saber el valor de la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden, respectivamente, 3 y 4 centímetros? ¿Por qué? Enuncia la regla.

La antena colocada diagonalmente entre dos esquinas opuestas de un terrado mide aproximadamente 8 me-

tros. Sabiendo que uno de los lados del terrado no llega bien a 7 metros, di cuál será el otro.

En un campo rectangular quieren dos amigos ir de un ángulo al opuesto. Juan, que no quiere ensuciarse los zapatos, sigue las paredes y Pedro cruza el campo, ¿cuánto tiene que andar más Juan que Pedro si la longitud de las paredes es de 15 y 28 metros?

Una habitación cuadrada tiene 5 metros de lado, ¿cuál será la longitud de su diagonal? ¿Y la de su perímetro?

En el ensanche de una ciudad Pilar tiene que ir de su casa, *A*, a la escuela, *B*, ¿cuánto terreno ganaría si pudiera marchar en línea recta sabiendo que el ancho de las calles es de 10 metros y la longitud de las manzanas de 60? (fig. 71).

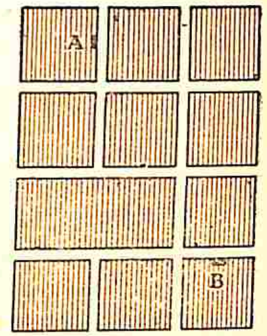


Fig. 71.

CAPÍTULO VIII

Á R E A S

PRIMER GRADO

a) Cuadrado, paralelogramo, triángulo, cuerpos compuestos de estas caras, superficies irregulares.

La familiaridad adquirida en aritmética con las medidas superficiales es la base para el estudio de las áreas. Por aquéllas sabe ya el niño que un cuadrado de un decímetro de lado tiene 10 = 10 × 100 cm.². Se vuelve sobre el mismo proceso con diferente motivo, el de ver, por ejemplo, cuánta cartulina se necesita para una de las casitas del pueblo que se está construyendo. Se cuadricula en centímetros una de las caras del cubo que representa la casa:

tantas filas a tantos cuadrados por fila son... Se cuentan después las caras, 6, y se multiplica esta cantidad por el número correspondiente de centímetros cuadrados. Se resuelven otros problemas análogos: área de un ladrillo, área de un pañuelo, área del tablero de jugar a las damas, madera necesaria para tapar la boca cuadrada de una cisterna que tiene 6 1/2 decímetros de lado. Los cristales de la ventana del cuarto de Juanito tienen 2 decímetros de ancho por otros 2 de alto, ¿cuánto papel traslúcido se necesita para cubrirlo si hay tres filas de a tres? Explica con tus propias palabras cómo se halla el área de un cuadrado.

Problema: ¿Habrá bastante con esta hoja de papel para hacer una de las casitas?

Seguramente los niños propondrán medir lo largo y lo ancho de la misma, multiplicar una cantidad por otra y comparar el resultado con lo que encontramos antes se necesita para recortar la casa. Si no ocurre así, se volverá a la división en filas y columnas de cuadros, insistiendo con problemas análogos hasta dominar el proceso. Ejercicios: Adivinar, sin contarlos, cuántos ladrillos tiene el salón de la clase. Hallar el área del cuaderno, del pupitre, del encerado, de la ventana, de la puerta. Decir y escribir en el cuaderno cómo se halla la superficie de un rectángulo.

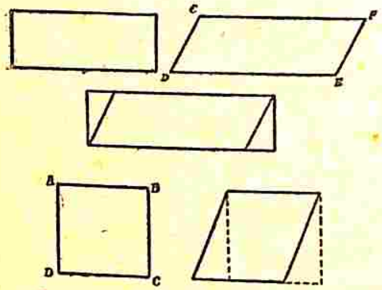


Fig. 72.

Área del paralelogramo. Se comparan dos paralelogramos de cartulina o papel, un rectángulo y un romboide, de igual base y altura, ¿cuál será mayor? (fig. 72). Se pesan: parecen equivalentes. Se superponen, señalando con el lápiz lo que sobra por un lado y por el otro; se recorta lo señalado y se añade donde hace falta en cada caso: ahora las figuras son iguales. Comparación de un

cuadrado y un rombo de igual base y altura. ¿Cuál es el área del cuadrado *A B C D*? ¿Cuál es el área del rectángulo *C D E F*? ¿Cuál será el área del rombo? ¿Y la del romboide? ¿Cuál podemos decir que es el área de un paralelogramo?

Área del triángulo. Los niños saben que doblando por la mitad un paralelogramo resulta un triángulo. Cuando se presente el problema de averiguar el área de esta figura, en relación, por ejemplo, con la construcción de una pirámide, conviene insistir sobre dicho punto uniendo dos triángulos iguales recortados; ¿qué figura se forma? Un triángulo es, pues, la mitad de un paralelogramo que tenga su misma base y altura; ¿cuál será entonces su área? Ejercicios diversos: área de un macizo triangular del jardín, área de un velador de dicha forma, área lateral de la torre del pueblo en construcción. El tejado de una casita de muñecas está formado por cuatro triángulos iguales que tienen cada uno 5 centímetros de base y 3 de altura, ¿cuál será su área?

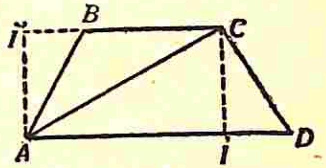


Fig. 73.

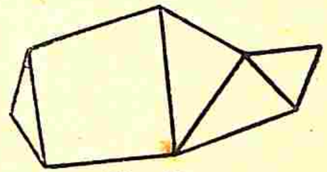


Fig. 74.

Si los muchachos son un poco mayorcitos o muy inteligentes, puede aprenderse en este momento a hallar el área de un trapecio, dividiéndolo diagonalmente en dos triángulos de igual altura que tienen por bases las del trapecio, y deduciendo la regla. Pero si la cosa parece prematura puede prescindirse muy bien de este conocimiento, pues si se forma un trapecio al dividir unas superficie irregular en otras conocidas para poderla medir, cabe transformarlo en dos triángulos (fig. 73).

Área de una superficie o de un polígono irregular. Se empieza por medir, mediante papel cuadriculado, las

superficies irregulares que interesen, dibujo, patrón, y también los polígonos. Supongamos ahora que el campo de la escuela tiene esta forma (fig. 74) y queremos hallar su superficie: se les sugiere a los niños, si a ellos no se les ocurre, que en la imposibilidad de cuadricular cabe trazar rectas para dividirlo en figuras conocidas, y se procede entonces a tomar las medidas necesarias para el cálculo. Igual se hace con un polígono irregular. Ejercicios numerosos.

SEGUNDO Y TERCER GRADOS

b) Los polígonos regulares, su construcción, su área y el área del círculo.

Indicaciones prácticas. Los polígonos regulares se introducen con motivo del trabajo manual o del dibujo de modo que sean los mismos niños los que pregunten cómo se trazan, ofreciendo así el punto de partida para el estudio de sus propiedades.

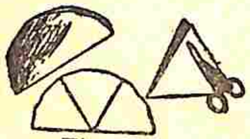


Fig. 75.

En el grado segundo pueden los niños desear dibujar un friso, por ejemplo, a base de exágonos, o hacer una rosa de los vientos de ocho puntas, o fabricar una gran cometa, o las aspas de un molino para ayudar a los pequeños en la construcción de su pueblo.

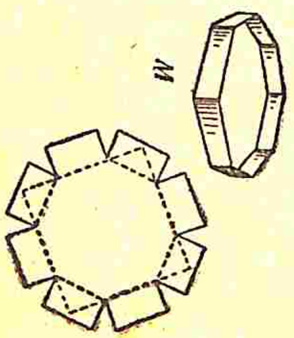


Fig. 76.

Se ensaya primero con dobleces sucesivos del papel (por la mitad y luego en tres partes o dividiendo sucesivamendos) y recortando con las tijeras (fig. 75); el exágono o el octógono obtenido se coloca sobre el papel y se calca.

Mejor será no tener que calcar, dibujando directamente en el papel: idea de dividir una circunferencia en partes iguales. ¿Cómo? Se va recordando: el diámetro la divide en dos partes iguales, los diámetros perpendiculares la dividirán en cuatro. En este momento se puede introducir la idea de la bisectriz para la división en 8, en 16.

Aplicación al objeto deseado (friso, etc.) y también a algún trabajo manual, por ejemplo, la construcción de la adjunta bandeja (fig. 76).

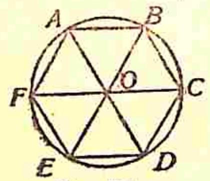


Fig. 77.

Si se trata de un exágono puede observarse, para copiarlo, uno dividido en triángulos: son equiláteros; podríamos construirlo repitiendo seis veces un triángulo de esta clase, pero resulta pesado. Miramos otra vez el modelo: haciendo centro en O hacemos pasar una circunferencia por *A*, pasa también por *B*, *C*, etc. Como *o A* es el radio y los triángulos son equiláteros bastará llevar el radio sobre la circunferencia para dividirla en seis partes iguales (fig. 77). Ejercicios y aplicaciones.

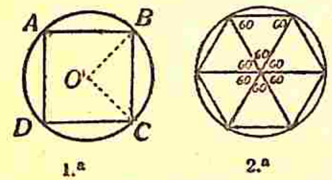


Fig. 78.

Con alumnos del último grado cabe investigar las siguientes cuestiones: lado del cuadrado inscrito en un círculo cuyo diámetro se conoce (aplicación del teorema de Pitágoras; véase fig. 78, 1ª). Por qué el lado del exágono es el radio ($180^\circ : 3 = 60^\circ$, $360^\circ : 6 = 60^\circ$; véase fig. 78, 2ª). Valor de la apotema del cuadrado, etc.

En relación con la bandeja recientemente construída (fig. 76, *M*) cabe plantearse la cuestión de la cartulina necesaria, es decir, el área: una primera solución puede ser recortar el octógono, aplicarlo sobre papel cuadriculado del que usan para gráficas, y ver los centímetros cuadrados que ocupa. Se procurará entonces recordar la división del exágono en triángulos. Áreas de cada triángulo. Al medir bases y alturas se ve que son iguales: área de uno de ellos y multiplicación por 8. Ejercicios con diferentes polígonos.

Recortando los triángulos que se forman en el octógono y colocándolos como indica la fig. 79 se forma un paralelogramo *equivalente* a dicho octógono (puesto que está formado por los mismos triángulos); el área de este paralelogramo es igual a la base por la altura o sea la mitad del *perímetro* por la *apotema*. ¿Cuál podemos decir entonces que es el área del octógono? ¿Y la de cualquier otro polígono regular?

Con los alumnos del curso superior se puede volver sobre este asunto llegando a la regla sin necesidad de recortar la figura por la suma de los triángulos separando el factor común:

$$S = \tfrac{1}{2}\,AB \times a + \tfrac{1}{2}\,BC \times a + \tfrac{1}{2}\,CD \times a \ldots =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(AB + BC + CD + \ldots) \times a = \textit{semiperímetro} \times a.$$

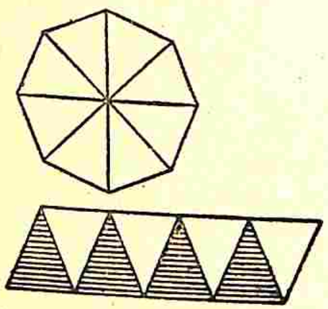


Fig. 79.

Ejercicios y problemas: Área de un ladrillo exagonal, área de una habitación con mosaico pentagonal (comparar el resultado con el que se halla por el producto de las dos dimensiones), área total de un prisma exagonal, ídem de una pirámide eptagonal, etc., etc.

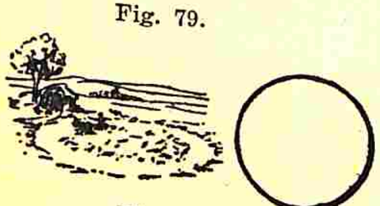


Fig. 80.

Problemas: ¿Cuántos ladrillos se necesitará para enladrillar la adjunta era? (fig. 80). Vamos a hacerlo en más pequeño a ver si

resulta más fácil: ¿cuánto papel se necesita para recortar este círculo? Primera solución: calcar la figura sobre papel cuadriculado o dibujar dentro cuadraditos de un centímetro. Segunda solución: intentamos dividir el círculo en partes como hicimos con el octógono; son casi triángulos y la figura resultante se parece mucho a un paralelogramo, cuya área es igual a la base por la altura. ¿Qué es la base? ¿Cuál es la altura? (fig. 81).

Así se plantea el problema de medir el perímetro o sea la longitud de la circunferencia. En el caso de la era podemos poner una cuerda bien tirante alrededor; se ensaya con un aro, con una rueda. Después de resolver el asunto del área de la era volvemos a preguntarnos:

¿Cómo podremos averiguar el perímetro de la circunferencia cuando esté, por ejemplo, dibujada en el papel y no sea posible poner una cuerda alrededor? Lo primero que se nos ocurre es ver si tiene este perímetro alguna relación con el radio o el diámetro que son líneas siempre fáciles de medir. Tomamos cuidadosamente el perímetro de un duro, de un aro de jugar, de una pulsera, de la rueda de la máquina de coser, etc. En cada caso dibujamos una línea recta de la misma longitud sobre la que aplicamos el diámetro correspondiente; ¿qué se observa?

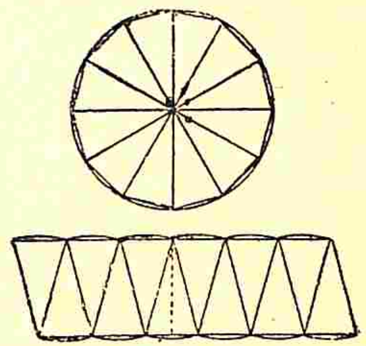


Fig. 81.

Comprobación: Medimos el diámetro de un lebrillo y resulta ser de 60 centímetros; multiplicando esta cantidad por poco menos de dicho perímetro. Se hace prácticamente. Se introduce entonces el valor de π. Problemas y ejercicios.

Los volúmenes. El camino es análogo al indicado para las áreas. Comenzaríamos por el paralelepípedo que llenaríamos, como indicamos en otro lugar (pág. 58), efectivamente, de cubitos de un centímetro; el paso siguiente es la cuadrícula de la base, llegándose por fin a la multiplicación de las tres dimensiones. A continuación estudio del cubo, el prisma triangular, la pirámide (conviene tener un modelo desmontable de prisma conteniendo tres), el poliedro regular (también modelito desmontable formado por pirámides), el cilindro, el cono y la esfera. El volumen del paralelepípedo se comprende fácilmente y, por lo tanto, desde el primer grado puede hallarse en el momento en que así haga falta para el trabajo que se esté haciendo; los demás será mejor dejarlos para más adelante cuando sean los mismos niños los que puedan sugerir las soluciones de

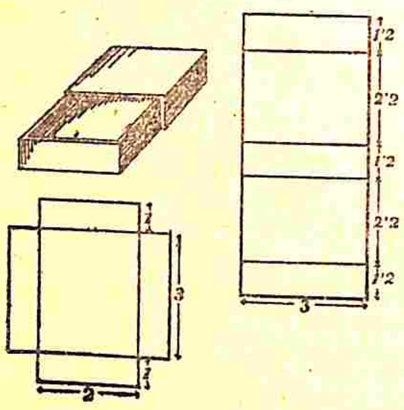


Fig. 82.

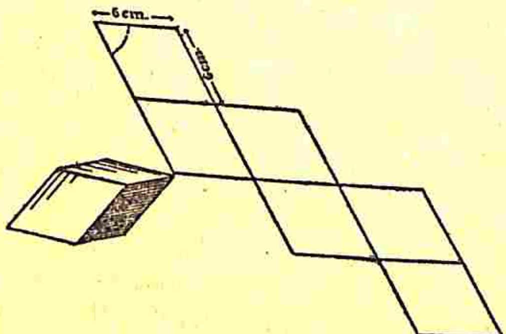


Fig. 83.

los problemas y construir los modelos. Una primera idea de la solución puede tenerse sumergiendo los distintos

cuerpos en agua y comparando la que desplazan; para ello va muy bien tener modelos en madera y una o varias probetas graduadas.

Ejemplo de ejercicios de recapitulación para alumnos del último grado (adecuado para trabajo personal):

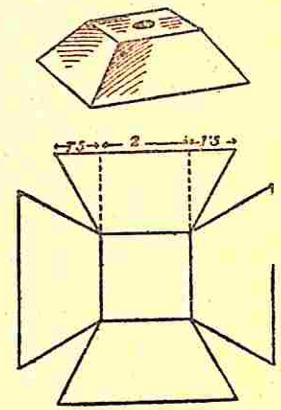


Fig. 84.

Fíjate en la caja *A* y en los dibujos de su desarrollo (fig. 82). Las medidas están en centímetros. Constrúyela de igual tamaño o de tamaño doble (más adelante puede hacerse triple, mitad, etc.). Contesta a las preguntas siguientes:

¿Cuántas cartulinas se necesitará para hacer el modelo (prescinde de lo que se pierde)? Saca el interior de la caja e imagina que es una cisterna y que los centímetros son metros, ¿cuánta agua podría contener?, ¿cuánto pesaría esta agua?

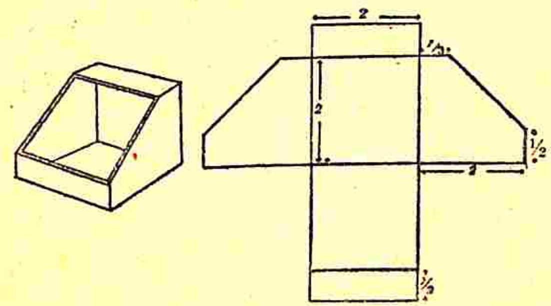


Fig. 85.

Construye este modelo según el adjunto esquema. Halla su superficie (fig. 83).

El perímetro de un paralelogramo es de 14,50 metros y uno de los lados tiene 4,35, ¿cuáles son las dimensiones de los otros lados?

El ángulo de un paralelogramo es de 81°, ¿cuáles serán los otros ángulos?, ¿cuántos paralelogramos pueden construirse con este dato?

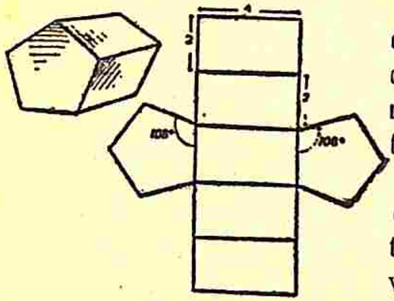


Fig. 86.

Corta un paralelogramo, dibuja una de sus diagonales, córtalo por dicha diagonal y muestra que los ángulos alternos internos son iguales.

Aquí tienes una pantalla (fig. 84). Constrúyela en cartulina con dimensiones tres veces mayores.

Para que dé más luz se la quiere forrar interiormente de blanco, ¿cuánto papel se necesita?

Suponiendo que el centro del desarrollo (cuadrado y círculo) representa un jardín con un estanque, calcula: *a)* la superficie del estanque; *b)* la del terreno que queda libre para cultivo; *c)* la superficie que tendría un caminito que diera vuelta al jardín por la orilla interior de la tapia y que tuviera 80 cm. de ancho.

Esta es una carbonera que ha perdido la tapa, ¿podrías tú hacerla? (fig. 85).

Construye el modelo con dimensiones dobles. Si un muchacho puede construirlo en hora y media (¿has tardado tú más o menos?) (di cuánto tiempo), ¿cuánto podría hacer en los seis días de la semana trabajando ocho horas diarias?

¿Cuánta cartulina se necesita para construir el modelo de las dimensiones indicadas? ¿Y con dimensiones dobles?

¿Cuánta cartulina se necesita para construir este prisma? (fig. 86).

¿Cuánta agua se podría poner dentro prescindiendo del grueso de las paredes?

¿Cuánto pesaría si fuera de hierro macizo (densidad 7,2?

Imagina que tu modelo representa un depósito que hay que llenar. Un caño podría llenarlo en veinte minutos, otro en quince, ¿cuánto tardarían los dos juntos?

Construye un cilindro que tenga 11 cm. de alto y 3 cm. de radio. ¿Qué volumen tendrá?, compruébalo echando cuidadosamente agua con una probeta graduada.

¿Cuántas vueltas podría dar en el espacio de 4 metros?

La rueda pequeña de una locomotora tiene *a* de diámetro, la grande *b*, ¿cuántas vueltas da la primera mientras la segunda gira 100?

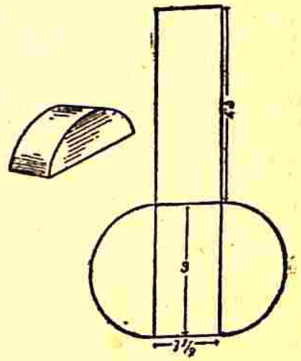


Fig. 87.

Construye un modelo como el adjunto (½ sección tronco árbol). ¿Cuánta cartulina necesitas? ¿Cuánta agua cabría? ¿Cuánta pesaría si fuera de piedra? (d 1,5) (figura 87).

BIBLIOGRAFÍA

A) METODOLOGIA, ORIENTACION PARA EL MAESTRO:

BENCHARA (RANFORD). — *Mathematical Education.* Oxford. Clarendon Press, 1921.

CARSON (G. St. L.). — *Essays on Mathematical Education.* Ginn & Co. London & Boston, 1913.

BOARD OF EDUCATION. — *Suggestions for the consideration of teachers & others concerned in the work of public elementary schools.* (Adaptado al español por "Revista de Pedagogía" con el título de *Guías didácticas.* 2 vols.).

COMAS (JUAN). — *El sistema de Winnetka en la práctica.* "Revista de Pedagogía", 1930.

COMAS (MARGARITA). — *Cómo se enseña la aritmética y la geometría.* 4ª ed. "Revista de Pedagogía".

— *El método Mackinder.* "Revista de Pedagogíia".

— *La enseñanza de las ciencias en Inglaterra.* Imp. Audrey, Santander.

— *El método de proyectos en las escuelas urbanas.* "Revista de Pedagogía".

DECROLY ET HAMAÏDE. — *Le calcul et la mesure au premier degré de l'Ecole Decroly.* Collection d'atualités pedagogiques. Delachaux et Niestlé. S. A. Neuchatel et París, 1932.

LLORCA (ANGEL). — *Los cuatro primeros años de escuela primaria.* Hernando. Madrid, 1929.

MAG DOUGALL'S. — *Handwork arithmetic tests.* Mac Dougall's educational Co. Ltd. London y Edimburgo.

MARTÍ ALPERA. — *Aritmética, geometría y trabajo manual.* Programas escolares. "Revista de Pedagogía", 1932.

MUSEO PEDAGÓGICO NACIONAL. — *Programas escolares.* (Alemania, Austria, Bélgica, etc.), 1928, 29, 30.

PÉREZ SOMOSA (Dr. J. ELPIDIO). — *Metodología de la aritmética elemental.* Cultural, S. A. Habana.

SÁNCHEZ PÉREZ. — *Notas de metodología matemática.* Asociación española para el progreso de las ciencias. Congreso de Oporto, 1921.

THORNLIKE, (E. L.). — *The Psychology of Arithmetic.* Macmillan & Co. New York.

WENTWORTH & SMITH. — *Aritmética moderna.* Ginn & Co. New York.

B) LIBROS PROPIAMENTE DE MATEMATICAS:

BOREL (EMILE). — *Arithmetique.* Id.: *Geometrie.* Varios grados, París.

COMAS (MARGARITA). — *Aritmética.* "Revista de Pedagogía", 1928.

CASANOVAS (CLOTA). — *Lecciones de Aritmética.* Imprenta Elzeviriana, Barcelona.

LLORCA (ANGEL). — *Aritmética* (primero y segundo grados). Hernando. Madrid, 1919.

LEMOINE. — *Arithmetique du certificat d'etudes.* Hachette, París.

LEYSENNE (P.). — *Nouveau cours d'arithmetique.* Armand Colin, París, 1926.

ROYER & COURT. — *Arithmetique du certificat d'etudes.* Armand Colin. París, 1926.

PALAU VERA. — *Aritmética. Geometría* (varios grados y varias ediciones, lujosas y económicas). Seix y Barral. Barcelona.

REY PASTOR Y PUIG ADAM. — *Elementos de Geometría.* Colección elemental intuitiva. Madrid, 1931.

TORROJA (RAMÓN). — *Cartilla de Geometría.* Librería Monserrat. Barcelona, 1931.

— *Cartilla de aritmética.* Librería Monserrat, Barcelona, 1931.

TREVOR DENNIS. — *An arithmetic for preparatory schools.* Bell & Son. Londres, 1925.

VENDELLÓS (C.) Y ESTEVE-LLACH (M.). — *Lliçons d'aritmética* (dos grados). Associació protectora de l'ensenyança catalana. Barcelona.

INDICE

ARITMÉTICA

GEOMETRÍA

ESTE LIBRO
SE TERMINO DE IMPRIMIR
EN "PELLEGRINI, IMPRESORES"
ALVAREZ JONTE 2315
BUENOS AIRES
EL DIA 24 DE NOVIEMBRE
DE 1952

PUBLICACIONES PEDAGÓGICAS

LA ESCUELA ACTIVA

INICIACIÓN GENERAL AL MÉTODO DECROLY, por *Decroly* y *Boon* (4ª ed.).
EL PLAN DE LOS GRUPOS DE ESTUDIO, por *E. R. Muguire* (3ª ed.).
LOS CENTROS DE INTERÉS EN LA ESCUELA, por *Clotilde G. de Rezzano* (4a ed.).
EL NUEVO PROGRAMA ESCOLAR, por *W. H. Kilpatrick y otros* (3ª ed.).
EL MÉTODO DE TRABAJOS POR EQUIPOS, por *María Luisa Navarro* (3ª ed.).
UN PROGRAMA DESARROLLADO EN PROYECTOS, por *M. E. Wells* (3ª ed.).
LA AUTONOMÍA EN LA ESCUELA, por *J. Piaget* y *J. Heller* (3ª ed.).
EL TRABAJO INDIVIDUAL SEGÚN EL PLAN DALTON, por *A. J. Lynch* (3ª ed.).
LAS ACTIVIDADES DIRIGIDAS, por *Dumas y otros* (2ª ed.).
LA ESCUELA VIVA, por *Olga Cossettini* (2ª ed.).
LA ESCUELA PÚBLICA RENOVADA, por *F. Bovesse.*
LA ESCUELA INDIVIDUALIZADA, por *Carleton H. Washburne* (2ª ed.).
EL MÉTODO DE PROYECTOS EN LAS ESCUELAS URBANAS, por *M. Comas* (2ª ed.).
EL MÉTODO DE PROYECTOS EN LAS ESCUELAS RURALES, por *F. Sáinz* (2ª ed.).
LA EDUCACIÓN FÍSICA E HIGIÉNICA, por *Myers y Bird*
EL FOLKLORE EN LA ESCUELA, por *Eduardo M. Torner* (2ª ed.).
LA COOPERACIÓN ESCOLAR, por *B. Profit.*
LA IMPRENTA EN LA ESCUELA, por *Herminio Almendros.*
LA PRÁCTICA DE LAS PRUEBAS MENTALES, por *J. Comas* y *R. Lago.*
LA ESCUELA DEL TRABAJO, por *José Mallart.*
UN NUEVO MÉTODO DE TRABAJO LIBRE POR GRUPOS, por *Roper Cousinet.*

OBRAS DE CONSULTA

MANUAL DE DIDÁCTICA Y ORGANIZACIÓN ESCOLAR, por *F. Martí Alpera y otros.*
ENCICLOPEDIA DE LA EDUCACIÓN MODERNA, por *Rievlin* y *Schueler* (2 vols.).

EDITORIAL LOSADA, S. A.
ALSINA 1131 ● BUENOS AIRES