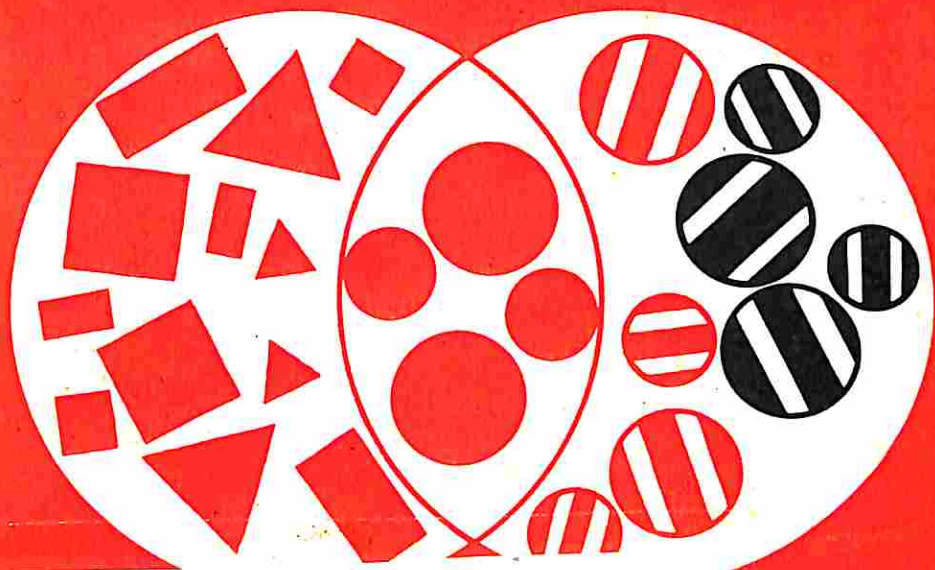


La matemática moderna en la enseñanza primaria

Z. P. DIENES



GH00823

LA MATEMATICA
MODERNA
EN LA ENSEÑANZA
PRIMARIA

LA MATEMATICA
MODERNA
EN LA ENSEÑANZA
PRIMARIA

GEMAT
DIGITALIZADO

*Manual de 1968
Espana*

Z. P. DIENES

Profesor de la Universidad de Adelaida

LA MATEMATICA MODERNA EN LA ENSEÑANZA PRIMARIA

Traducción y presentación

de

ALVARO BUJ GIMENO

Adjunto a la Cátedra de Pedagogía General de la Universidad de Madrid
Jefe del Departamento de Manuales Escolares del C.E.D.O.D.E.P.

EDITORIAL TEIDE ★ BARCELONA

← 6400828 --

EDUARDO BONET, profesor de la Universidad de Barcelona,
cuida de esta colección ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA MODERNA.

La matemática moderna en la Enseñanza Primaria

Los primeros pasos en matemáticas

1. *Lógica y juegos lógicos*
2. *Conjuntos, números y potencias*
3. *Exploración del espacio y práctica de la medida*

Título original:
*La mathématique moderne dans
 l'Enseignement Primaire*
 © 1965 OCDL,
 65, rue Claude Bernard, Paris 5^e

Derechos de la edición en castellano:
 EDITORIAL TEIDE, S. A. - Bori y Fontestá, 18 - Barcelona-6

IMPRENTA JUVENIL - Dr. Rizal, 14 - Barcelona-6

Dep. legal B. 14.124 - 1967
 Printed in Spain

PRESENTACIÓN

La Matemática moderna en la enseñanza primaria es la parte general e introductoria de una colección de textos didácticos que aparecen con el epígrafe general de «Los primeros pasos en matemáticas» (1).

Es bien sabido que la escuela primaria extiende su misión cultural cimentándola en cuatro aspectos: la lengua hablada y oída, la lengua escrita, el lenguaje del esquema espacial y el de los números. Los cuatro podrían ser interpretados como ayudas formales para la inteligencia. El campo matemático trata de construir, a través de la complejidad de las vivencias del espacio y los números, un mundo único plenamente objetivado.

Contar, medir y construir fueron las primeras operaciones aritméticas de la humanidad. La matemática es ciencia de representaciones, de esquemas, de abstracciones. Nutriéndose de contenidos conceptuales, para manejarlos y relacionarlos con comodidad y rapidez, se vale de símbolos, es decir, de representaciones formales de los mismos, y traduce los juicios lógicos que relacionan dichos conceptos mediante leyes formales entre sus símbolos representativos; y esto de tal forma que, combinando con corrección tales transformaciones, acaba el matemático por olvidarse de los contenidos conceptuales. Descansando dichos contenidos en las reglas

(1) En esta colección aparecerán traducidos al castellano, por Editorial Teide: I. *Lógica y juegos lógicos*; II. *Conjuntos, números y potencias*; III. *Exploración del espacio y práctica de la medida*.

simbólicas que sabe le conducirán a resultados infalibles, por ser traducción de las leyes del razonamiento matemático.

Todo el proceso de condensación simbólica y formalización del razonamiento han hecho posible toda la progresión de abstracciones y generalizaciones creciente que constituyen la matemática de hoy. Los conceptos expresados mediante formas nuevas engendran a su vez nuevos conceptos, que, inmediatamente, necesitan de nuevas formas de simbolización, y este proceso se repite así sucesiva e indefinidamente.

Esta tendencia actual de la matemática como ciencia exige también una evolución en la didáctica de esta materia; se podría resumir como la primacía de la ley sobre el concepto, evolución que conduce a su vez a la primacía del arte de aprender sobre el arte de enseñar.

La introducción de la matemática moderna en la Escuela Primaria lleva de la mano consideraciones no sólo de carácter didáctico, sino incluso, previamente, otras de tipo científico. Se plantea la necesidad de considerar dos campos: el de las estructuras matemáticas y el de las estructuras mentales. Las aportaciones más interesantes, a nuestro parecer, proceden de los estudios extensos y profundos realizados por el psicólogo ginebrino Jean Piaget, quien, siguiendo la línea de sus conocidas investigaciones sobre la génesis del conocimiento infantil, estudia las relaciones entre las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. Se plantea la cuestión de saber si las propiedades estructurales de la matemática surgen como un descubrimiento de las cualidades objetivas de los entes matemáticos, o si, por el contrario, estos últimos resultan como consecuencia de las estructuras de nuestra propia actividad mental. Piaget llega a la conclusión de que las estructuras operatorias de la inteligencia manifiestan desde su origen los tres grandes tipos de organización que corresponden a aquellos que en matemáticas dan lugar a las estructuras algebraicas, las estructuras de orden y las estructuras topológicas. Es evi-

dente que, emitida esta tesis, se invierte el camino para llegar a un método sólido en la enseñanza matemática. De aquí surge la necesidad de llegar a una serie de actividades en la enseñanza de esta materia, que faciliten el dinamismo de reversibilidad y de equivalencia; en el campo de la geometría se precisa la adquisición consciente de una serie de relaciones asociadas a una dinámica perceptiva y activa, realizada con el uso de instrumentos elementales.

Desde este punto de vista resulta errónea la programación clásica en compartimientos separados. En efecto, dicha presentación no tuvo en cuenta la génesis del pensamiento matemático de la humanidad y la evolución genética en el pensamiento del niño, cuyo desarrollo es concéntrico y no radial. Hemos de admitir que se escamoteaba el proceso intuitivo e inductivo. También ha habido un descuido de la captación de intereses del niño, tratando de suplir esta falta de intuición natural mediante el recurso de estímulos coactivos secundarios y extremadamente artificiosos.

Quizá mediante las reflexiones anteriores puede entenderse fácilmente la presentación actual del saber matemático, de la que es una muestra patente el texto que consideramos.

Desde otro punto de vista ocurre que las nuevas estructuras matemáticas tienden a una mayor generalización, y el estudioso que reflexione sobre el particular no tardará en percatarse de que las parcelas de la ciencia matemática estudiadas al modo tradicional no son sino sectores muy concretos y casos particulares de esta nueva estructuración. Fácil es comprenderlo cuando se aprecia el estudio de la numeración en las operaciones aritméticas elementales, así como en la presentación de los conocimientos geométricos. En el primer caso la numeración decimal, tradicional en el tratamiento de este sector, es un caso particular de la numeración en general que ahora se estudia en cualquier base; respecto a nociones geométricas, puede verse que, lejos de seguir las enseñanzas de Euclides, se comienza ahora por introducir propiedades típicas del espacio; es decir, en lugar de comenzar por el punto,

la línea y las figuras geométricas planas, se habla de *frontera* y de nociones tales como, *dentro y fuera, delante y detrás, antes y después*, y así sucesivamente.

* * *

Pasando ahora a la innovación que la enseñanza de la matemática actual supone en el sector de la Escuela Primaria, caben algunas consideraciones, imprescindibles, por otra parte, para una inteligencia correcta de este texto. Por ejemplo, se admite hoy que ya desde la escuela materna el niño ha de ocuparse de esta matemática. El mundo del mañana exigirá a todos ciertos conocimientos, y no solamente a los que van a acceder a estudios superiores, sino incluso también a aquellos que no pasen del certificado de estudios primarios. Cuanto antecede no pretende afirmar, en absoluto, que existan reglas bien definidas sobre lo que el niño puede o no aprender en estos dos primeros años; sin embargo, los estudios ya realizados, de carácter experimental, permiten al maestro conocer una serie de actividades relativas a este sector que tienen cabida, con carácter general, ya en estas primeras edades del niño.

El texto sirve de introducción al plan de esta colección sobre «Primeros pasos en matemáticas», que comprende tres fascículos. El primero, sobre la adquisición de determinadas relaciones lógicas por los niños; el segundo se propone introducir el número tratando de las propiedades de conjuntos y conduce a la noción de potencia; el tercero trata, brevemente, de las aplicaciones prácticas de los números a situaciones que implican medidas de longitud, peso, capacidad, tiempo, superficie, y así sucesivamente, suponiendo una iniciación a la geometría. La adquisición de las relaciones lógicas debe desarrollarse paralelamente a la de los otros aspectos.

Este cambio en la estructura lleva consigo también una transformación en el quehacer del maestro y de los niños. En la clase predomina desde ahora la situación de aprendizaje antes que la

de enseñanza; la enseñanza frontal, que se dirige a toda la clase, deja paso a la enseñanza por pequeños grupos, facilitando la individualización.

También se introduce el procedimiento de discusión entre los niños. Los errores cometidos por los niños deben ser descubiertos por los mismos niños; las reglas de este juego matemático son fáciles y no habrá dificultad en que la verdad aflore de la discusión. De esta forma la verdad se admite por sí misma, más que por el maestro encargado de arbitrarla. Sin embargo, esto no elimina, ni mucho menos, la acción del maestro, que ha de estar en permanente vigilia para encauzar la actividad y actuar en el momento oportuno, siempre con una previsión detallada del desarrollo de la clase. Sabemos que es tentador interponerse y facilitar inmediatamente el proceso, cuando los niños cometen un error, para decirles en el acto cómo deben hacerlo. Se trata ahora de que el maestro sepa conducir al niño hasta que descubra por sí mismo la situación correcta; de esta forma los niños fijan mejor la solución que cuando es el maestro quien dice lo que deben hacer.

Esta metodología lleva implícita, como puede apreciarse, una serie de condicionamientos desde el punto de vista de la auténtica actividad de los niños, y facilita realmente la verdadera autoformación.

Quizá la contribución más costosa viene de parte del material manipulable que ha de ser manejado tanto por el maestro como por el discípulo. Tiene dos explicaciones fundamentales: de una parte el costo del material; de otra, y esto es altamente positivo, la necesidad de una organización perfecta. Antes de comenzar la clase el profesor necesitará hacer un esquema en la pizarra, dejando constancia de los nombres del grupo o de los niños que intervienen, al lado de los elementos del esquema, a fin de que toda la actividad quede bien organizada; de otra forma, hay caos, pérdida de tiempo y mediocres condiciones de estudio. También existe la exigencia de que el material tenga un lugar bien determinado. El

maestro pedirá a los niños que lo preparen antes de usarlo, lo devuelvan después a su sitio, disponiéndolo en cajas ordenadas en el armario, etc. Se desprende de esta consideración que el uso del material exige de por sí y «a priori» la necesidad de un hábito operativo de orden que, por otra parte, tiene alta correlación con actividades específicas del aprendizaje matemático.

* * *

Creemos haber hecho algunas reflexiones acerca de las exigencias de esta nueva estructura matemática y de las aplicaciones didácticas que lleva consigo. *La Matemática moderna en la enseñanza primaria* supone una valiosa aportación al campo didáctico en el ámbito de nuestra escuela y es justo agradecer a la Editorial Teide la presentación en castellano de esta obra, que ha de marcar una pauta indeleble en la actualización y perfeccionamiento de la enseñanza de las matemáticas en el sector de la Escuela Primaria.

A. B. G.

PREFACIO

Este libro se propone hacer una demostración de cómo puede guiarse a los niños en el aprendizaje de la matemática «moderna»; espero convencer así, al menos a algunos educadores, de que la renovación actual en la enseñanza de la matemática debe comenzar ya desde la escuela maternal, pues es a esta edad cuando produce mayor efecto, si se propone a los niños experiencias entretenidas y se les aficiona a las actividades matemáticas. No se trata en modo alguno de trampear, desnaturalizando el pensamiento matemático «moderno», sino de adaptarlo a las capacidades de cada edad en particular.

Este libro hace referencia a William Hull, que fue el pionero del empleo de los bloques lógicos, a Paul Rosenbloom y Patrick Suppes, que fueron los primeros en enseñar los conjuntos a los niños, y por último, a la obra del mismo autor, relativa a la introducción explícita de las potencias y de los diversos sistemas de numeración. Las sugerencias presentadas aquí representan un ensayo de síntesis de todas estas investigaciones; su formulación práctica ha sido elaborada en Adelaida (Australia) en el curso de los años 1962-64, y prosigue todavía actualmente. Después de estos dos años de trabajo se ha visto que se pueden definir algunas

aproximaciones y ciertos métodos que son adecuados a la mayoría de los niños normales. Esas aproximaciones y métodos son los que se consignan en este libro.

El fin perseguido no es otro que la comprensión completa de todos los detalles de la actividad matemática por todos los niños de la escuela. Apenas resulta necesario decir que es difícil alcanzar tal fin. La comprensión matemática universal puede obtenerse a condición de ponerle precio. ¿Cuál es el precio? Una gran cantidad de material didáctico. Los materiales descritos en este libro no están concebidos para «demostraciones» hechas por el maestro, sino que se trata de instrumentos de investigación y descubrimiento para ser puestos en manos de los niños. En cada clase debe haber una cantidad suficiente de material a disposición de todos los niños. Favoreciendo el trabajo por grupos y organizando el empleo del tiempo de manera que todas las lecciones de matemática no se den en todas las clases a la vez, se puede reducir notablemente el precio del equipo.

En el costo total del precio que hay que pagar para obtener la plena comprensión matemática, es necesario introducir igualmente la voluntad por parte del maestro de enseñar lo que se podría llamar una «nueva matemática» o al menos la «antigua» matemática considerada desde un nuevo punto de vista. El antiguo punto de vista consiste en mirar la enseñanza de la matemática como el aprendizaje de procesos mecanizados. El nuevo punto de vista consiste en mirar estos procesos como formando un enlace de estructuras cada vez más complejas; se trata de poner a los niños en situación de descubrir cuáles son estas estructuras, cómo están constituidas y cómo se enlazan unas con otras, y hacerlo colocándolos en situaciones que ilustren concretamente estas estructuras. Para llegar a este modo de enseñanza el maestro ha de cambiar

completamente de actitud. La «respuesta» correcta pasa a segundo plano; la aptitud esencial consiste en saber encontrar el camino a través de situaciones cada vez más complejas; hay que poner el acento en la actividad dinámica del investigador (buscar) más que en el aspecto estático de la «respuesta». La visión de la estructura de los procesos es más importante que el simbolismo formal que los expresa.

La actividad investigadora de los niños, aislados o por pequeños grupos, predomina en adelante sobre la lección magistral dada por el maestro frente a su clase; la discusión colectiva conduce a conclusiones debidamente registradas, a condición de que el maestro sepa respetar el dinamismo constructivo del pensamiento del niño.

Numerosos trabajos están actualmente en curso tanto desde el punto de vista de la psicología teórica como desde el punto de vista de la pedagogía práctica sobre los medios de realizar esta comprensión matemática universal. Éste es el fin que intentan alcanzar varios centros de enseñanza situados en distintos puntos del globo y enlazados entre sí bastante débilmente por el organismo llamado «Grupo Internacional de Estudio para la Enseñanza de las Matemáticas». El cuerpo docente y la administración entre los que están vinculados a este organismo que se ocupan de adoptar nuevos métodos o nuevos programas son invitados a tomar contacto con el centro más próximo. Constantemente se van creando nuevos centros; aconsejamos, en caso de que interese su conocimiento, la consulta de la lista puesta al día por el Secretariado de Palo Alto. Estos centros aseguran la ejecución de la investigación, la formación del personal y la difusión de las más recientes informaciones. Toda persona aislada puede adherirse al grupo de estudios mediante una cotización anual, recibiendo entonces el bo-

letín trimestral, así como toda información que pida al respecto. Hay que esperar que este Grupo de Estudio continúe desarrollándose y se convierta en un instrumento cada vez más eficaz al servicio de todos los que se interesan por la difusión de la comprensión matemática.

Florence, 8 de enero de 1964.

I. INTRODUCCIÓN

El proceso para la adquisición de las nociones abstractas en matemáticas se puede descomponer sumariamente en tres fases:

1.^a En una fase preliminar de tanteo, las reacciones en distintas situaciones se ensayan más o menos al azar, como en la actividad exploradora del niño. Esta fase puede llegar a ser una fase de maduración, si se eligen situaciones en las que la actividad lúdica se canalice en la forma de «juegos» con reglas definidas; lo cual puede dar como resultado una conciencia más clara de la dirección en que se preparan los nuevos descubrimientos.

2.^a Después viene generalmente una fase intermedia más estructurada: se captan las reglas que ligan entre sí los procesos, se «juega» con estas reglas, y el pensamiento aparece más consciente y más dirigido. Se puede así acceder al *instante del descubrimiento*, instante en el que el esquema director aparece bruscamente en la organización de conjunto.

3.^a Al descubrimiento, una vez logrado, le sigue la necesidad irresistible de explotar el nuevo descubrimiento. Este aprovechamiento puede hacerse en una forma sabia examinando el contenido: ¿hasta qué punto se ha comprendido por completo?, que es el procedimiento de marcha *analítica*; o bien, de forma más corriente,

buscando situaciones en las que el descubrimiento permita dominar: es el procedimiento *práctico*.

La función psicológica, tanto en el procedimiento analítico como en el práctico, permite consolidar el nuevo descubrimiento clasificándolo en su lugar dentro de la trama de nuestros conceptos, de forma que se pueda encontrar de nuevo el concepto adecuado en el momento oportuno. Si el niño pregunta: «¿Hay que hacer una suma o una resta?», se hace evidente que esta puesta en lugar o clasificación no ha sido realizada, muy probablemente por haberse sacrificado las primeras fases del ciclo de que hablábamos.

La descripción anterior no menciona el papel desempeñado por los símbolos en el logro del descubrimiento. Este problema de los símbolos no es simple. Ciertos hechos aconsejan que es mejor introducir los símbolos después de alcanzado el descubrimiento, pues en ciertos casos la introducción prematura de los símbolos parece entorpecer el proceso de abstracción. En otros, por el contrario, se ha comprobado que el empleo de los símbolos acelera la aparición de los descubrimientos. No obstante se puede afirmar con seguridad que en nuestras clases abusamos excesivamente de los símbolos. Una serie de experiencias bien concatenadas, seguida de la introducción de los símbolos, es ciertamente más eficaz que los esfuerzos continuos por asociar los símbolos a su «significación» mediante «explicaciones». Se aprende mucho más con una serie de experiencias que con una serie de explicaciones.

Los fundamentos de la noción de número han dado lugar recientemente a un gran número de trabajos desde los puntos de vista lógico, matemático, filosófico y psicológico. Por no citar más que algunos recordemos los nombres de Hilbert, Torski, Church, Russel, Piaget, Inhelder. Los resultados de estos trabajos se intro-

ducen progresivamente en los sistemas escolares del mundo entero. A lo largo de esta obra tendremos en cuenta los descubrimientos más recientes, para sugerir posibles mejoras en las técnicas de enseñanza de las matemáticas, sobre todo en lo que concierne a los primeros años de la escuela primaria. Puesto que todo conocimiento se basa, en última instancia, en la experiencia, no es extraño que prefiramos recurrir a nuestra experiencia personal directa, y que encontremos en ella métodos de enseñanza más eficaces, especialmente en el caso de los niños.

A la luz de los problemas planteados en el curso de nuestras investigaciones de laboratorio, sugerimos la introducción de una serie de ejercicios ingeniosos susceptibles de guiar a los niños en el desarrollo lógico-matemático de los conceptos relacionados con la idea de número.

En lugar de dejar este desarrollo al azar, debemos ser capaces de construir un acercamiento racional en la adquisición del número, teniendo en cuenta el estado actual de nuestros conocimientos tanto en lo concerniente a la estructura del número como en el desarrollo del pensamiento en los niños. Esto no quiere decir que demos el problema por definitivamente solucionado, ni mucho menos. Las sugerencias que se dan en este libro no representan sino un primer intento por reunir en un todo coherente y rápidamente utilizable nuestros conocimientos sobre lo que los niños pueden aprender en matemáticas, y cómo pueden aprenderlo. Es muy cierto que serán posibles otras formas de aproximación y sin duda mejores. Pero el estado actual de la enseñanza de las matemáticas es hasta tal punto defectuoso, que es urgente dar desde el principio a los profesores un conjunto de sugerencias tan coherentes como sea posible.

El número es una abstracción. Los números no tienen existencia real. Los números son *propiedades*, pero se trata de propieda-

des relativas a conjuntos de objetos, no a los objetos mismos. La propiedad designada por el vocablo «dos» no podrá nunca aplicarse a objetos definidos, a sucesos o entidades de cualquier naturaleza, sino solamente a los conjuntos de tales objetos, sucesos o entidades. Por esto existe un mundo intermedio entre el de los objetos y el de los números, a saber *el mundo de los conjuntos*. Hasta una época reciente este mundo no formaba parte de situaciones vividas en nuestras escuelas, quedaba reservado a los estudiantes de las Universidades. Las páginas que siguen explicarán cómo se pueden introducir los conjuntos en primer lugar, de manera que sirvan inmediatamente para construir los números.

Las relaciones entre conjuntos llevan a consideraciones de orden *lógico*, mientras que las propiedades de los conjuntos nos conducen a consideraciones de orden *matemático*. Más adelante se encontrará la descripción de una serie de experiencias que integrarán en un todo orgánico la adquisición de los conceptos de la lógica, de los conjuntos y de los números.

II. LOS CONJUNTOS Y LAS OPERACIONES CON LOS CONJUNTOS

Los conjuntos están constituidos por elementos. El conjunto de niños de la clase de primer año tiene por elementos los niños de esta clase. Los conjuntos pueden estar formados por no importa qué tipo de elementos: objetos, sucesos, ideas e incluso por otros conjuntos. La idea de «pertenecer a» o de «ser un elemento de» es un concepto muy importante cuando se habla de conjuntos. Antes de poder decir que un conjunto está definido, importa precisar con claridad no sólo de qué elementos está formado, sino también cuáles son todos los objetos (incluso aunque no existan más que en el pensamiento) que *podrían* ser elementos del conjunto en cuestión. Si consideramos, por ejemplo, el conjunto formado por niños que tienen los ojos azules, suponemos implícitamente que ningún adulto podrá pretender formar parte de este conjunto. Esto lleva consigo el que debamos reconocer con certeza en qué momento un niño deja de serlo para convertirse en adulto. Será necesario del mismo modo precisar si pensamos en los niños de ojos azules que se encuentran en la clase, en la escuela, en el país o en el mundo entero.

Será necesario indicar el *universo* de los objetos susceptibles de entrar en la constitución del conjunto, antes de poder decir

que un atributo tal como «niños de ojos azules» define un conjunto.

Esta dificultad no se presenta si definimos nuestro conjunto enumerando todos sus elementos. Reaparece si nos ponemos a hablar de un conjunto formado por entidades que no pertenecen a un conjunto dado. Definamos un conjunto formado por dos niños, por ejemplo, Juan y Alicia; ¿cuáles son entonces los elementos del conjunto al que no pertenecen Juan y Alicia? ¿Qué elementos debemos incluir en él? ¿Será necesario incluir en él al monte Everest? Si no incluimos más que a niños, ¿a qué niños? Si el universo está definido como *todos los niños de la clase*, entonces el conjunto en cuestión estará formado por todos los niños de la clase a excepción de Juan y Alicia. Este es el *complemento* del conjunto que tiene por elementos a Juan y Alicia.

Cuanto precede puede ser motivo de discusiones apasionantes en una clase de niños. Haciendo que los niños participen en tales discusiones ponemos los fundamentos de un pensamiento lógico.

El segundo punto a discutir se refiere sin duda a la distinción entre el símbolo y lo que está simbolizado. Tomemos un conjunto, por ejemplo, Juan y Alicia, y situemos las dos imágenes en un paréntesis (mejor entre dos corchetes) para indicar que se trata de los elementos de un conjunto. ¿Pero de qué se trata? No son las imágenes, sino los mismos niños los que constituyen los elementos del conjunto. No se puede ofrecer un bombón al Juan de la imagen, ni dar un deber a hacer a la imagen de Alicia. Nunca insistiremos demasiado en cuanto acabamos de decir. Si los niños se habitúan a esta distinción, no se extrañarán al aprender que los signos 1, 2, 3, etc., no son realmente lo que se entiende por «uno», «dos», «tres». En efecto, «uno», «dos», «tres», no existen en la realidad: son abstracciones. Los signos son las imágenes destinadas a evocar

las abstracciones en cuestión. El signo 2 no es realmente «dos» de la misma forma que la palabra «verde» no es realmente verde.

Otro punto muy importante a discutir es la significación de las palabras «lo mismo» e «igual». Está claro que se da a estas palabras sentidos muy distintos, según el género de cosas de que se hable. Tomemos dos ejemplares del mismo libro. Se les puede situar sobre una mesa y decir: «Dame ése; no el que está al lado de la lámpara, sino el que está más cerca de ti»; lo que implica que estos dos libros no son idénticos. Otra vez se dirá que se trata del «mismo libro», para expresar que su contenido es idéntico. En el primer caso se trata de la identidad individual de los libros: los dos libros son diferentes, puesto que son objetos diferentes. En el segundo caso el término «el mismo» no se aplica a los libros, sino a su contenido impreso, dicho de otra forma a una cierta propiedad de estos libros. Cuando se dice viendo dos piezas de color verde que son «la misma cosa», significa que tienen el mismo color, aunque su forma sea diferente. Del mismo modo dos piezas cuadradas pueden ser consideradas como «la misma cosa», incluso aunque tengan colores diferentes, porque en este caso es la forma la que es idéntica. En cada uno de estos casos se aísla una cierta *propiedad* tal como el contenido, el color o la forma, y la expresión «lo mismo» se refiere a esta propiedad, no a los objetos en sí mismos. *Un objeto no es idéntico más que a sí mismo*, pero la propiedad de un objeto puede ser idéntica a la propiedad de otro objeto.

La definición de conjuntos por sus atributos llevará rápidamente a los niños a concebir conjuntos desprovistos de elementos. Por ejemplo el conjunto de todos los objetos verdes situados sobre la mesa del profesor no tendrá elementos, si no se encuentra ningún objeto verde sobre la mesa. Se dirá de tales conjuntos que son vacíos. Los niños se habituarán rápidamente a hablar de conjuntos

vacíos, lo que es una condición esencial para llegar a la noción de cero.

Después de este estudio de la pertenencia a un conjunto, de igualdad de conjuntos y finalmente de conjuntos vacíos, se pueden abordar las *operaciones sobre conjuntos*. Vamos a ver las más importantes.

a) *Reunión de conjuntos*. La reunión de dos conjuntos está formada por todos los elementos que pertenezcan bien sea a un conjunto, bien sea al otro, o a los dos a la vez. La reunión de los «chicos de la clase con el pelo de color castaño» con «los niños que tienen los ojos azules» es el conjunto formado por todos los niños que tengan al menos una de las propiedades enunciadas: pelo de color castaño u ojos azules. Se encontrará, pues, en esta reunión a todos los niños con ojos azules, así como a todos los niños que tienen el pelo de color castaño, comprendiendo también, por supuesto, a los que tienen a la vez los ojos azules y el pelo castaño. Es necesario poner múltiples ejemplos para ejercitar esta noción de reunión y estudiar ejemplos de conjuntos que se superpongan oponiéndolos a otros ejemplos de conjuntos distintos (o «disjuntos»). Hay que multiplicar estos ejemplos, antes de que el proceso de reunir quede totalmente claro. Se podrán utilizar cualquiera de los objetos presentes en la clase, o de objetos fabricados por los mismos niños. Por ejemplo, se puede formar un universo por medio de trozos de cartón sobre los cuales se dibujen imágenes de niños gruesos y de niños delgados, pero entonces algunos serán de niños y otros de niñas; cada cartón no llevará más que la imagen de un niño. Se podrá hablar también del conjunto de niños gruesos, del conjunto de niños delgados, del conjunto de niños y del conjunto de niñas. Será instructivo formar todas las

agrupaciones posibles: hay seis si se asocian los conjuntos por pares.

La reunión de {niños gruesos} y de {niños} (1) contendrá a todos los niños gruesos, tanto a los niños como a las niñas, y naturalmente a todos los niños, es decir, a los niños gruesos y a los niños delgados. Así la reunión comprenderá: a todas las niñas gruesas, a todos los niños gruesos y a todos los niños delgados; todas las niñas delgadas estarán excluidas. Ellas forman entonces el conjunto complementario del precedente, puesto que representan los elementos de nuestro universo que no pertenecen a la reunión.

Si se forma la reunión de {niños} y de {niñas}, se obtendrá la totalidad de los niños; más aún, en esta operación no se constata ya la superposición o recubrimiento parcial como en el caso de la reunión {niños gruesos} y {niños}. Se llega así a la operación siguiente, es decir, la que consiste precisamente en encontrar la zona de recubrimiento.

b) *Intersección de conjuntos*. La intersección de dos conjuntos está constituida por todos los elementos que pertenecen a la vez a los dos conjuntos. En el caso de los niños de ojos azules y niños de pelo castaño la intersección está formada por niños de ojos azules que tienen a la vez el pelo castaño. En el caso de conjuntos distintos (o disjuntos) la intersección será vacía.

Por ejemplo, no hay superposición entre las niñas y los niños. Un niño o es niña o niño, nunca las dos cosas a la vez. De suerte que la intersección de conjuntos {niños} y {niñas} es vacía. En el caso de {niños gruesos} y {niños} está claro que la intersección

(1) Para mantener una exposición más precisa en estos párrafos la palabra «niños» se referirá a ambos sexos, mientras que «niños» indicará sistemáticamente al sexo masculino y «niñas» al sexo femenino. (N. del R.)

es {niños gruesos}. Naturalmente, si no existen niños gruesos en la clase que se toma por universo, esta intersección se encontrará vacía igualmente.

c) *Conjuntos complementarios.* El conjunto complementario de un conjunto dado está formado de todos los elementos del universo de que se habla que no pertenecen a este conjunto. Por ejemplo, si el universo está formado por los niños de la clase y si el conjunto dado es el de los niños de ojos azules, entonces el conjunto complementario está formado por todos los niños de la clase que no tienen los ojos azules.

El complemento del conjunto {niños} es el conjunto {niñas}; el complemento del conjunto {niños gruesos} es {niños delgados}. El complemento del universo es naturalmente vacío y el complemento de un conjunto vacío no es otro que el universo.

Una noción importante a introducir es la de subconjunto. Por ejemplo, el conjunto de niños de ojos azules forma un subconjunto del conjunto de los niños de ojos azules y es también un subconjunto del conjunto de los niños, si se toma por universo a todos los niños de la clase. Hay que distinguir cuidadosamente los «subconjuntos» de los elementos. El subconjunto de los niños de ojos azules no puede ser un elemento del conjunto de los niños de ojos azules, porque el universo considerado está formado por niños tomados individualmente y no por conjuntos de niños. Es necesario distinguir bien las nociones «ser un subconjunto de» y «ser un elemento de». La confusión entre estas nociones conduciría más tarde a otras confusiones relativas a la multiplicación, los factores, etcétera.

Esta noción de subconjunto y su distinción de la noción de elementos exige una gran cantidad de ejercicios prácticos. Los ni-

ños deberán entrenarse en cambiar de universo, de manera que sepan siempre exactamente sobre qué trata el juego. El juego se hace sobre los elementos del universo. Si se modifica el universo se cambia de juego, nos ponemos a hablar de otra cosa. Por ejemplo, supongamos que hay en una habitación tres perros, dos gatos y cuatro niños. Si se toma por universo el conjunto de los seres presentes en la habitación, entonces los niños forman un subconjunto del universo. Pero si se cambia de idea decidiendo hablar de grupos de criaturas de la misma especie, entonces los elementos del universo serán: a) los grupos de niños; b) los grupos de perros; c) los grupos de gatos. Anteriormente, al hablar de criatura, se podían formar conjuntos de criaturas; por ejemplo el conjunto de los niños, o el conjunto de niños y perros, o el conjunto de perros salvajes y de gatos moteados, o el conjunto formado por María, Juan, el perro más feroz y el gato negro. Cuando se define que el conjunto está formado por seres de la misma especie, sólo el conjunto de niños pertenecen a este universo. He aquí otros elementos posibles que pertenecen a este universo:

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| A. {María, Juan y Susana} | B. {María, Susana} |
| C. {Los perros feroces} | D. {Todos los perros} |
| E. {Todos los gatos} | F. {El gato negro} |
| G. {Juan, etc.} | |

Los elementos F y G son conjuntos que comprenden un solo elemento. Importa no confundir el caso en que Juan es un elemento del universo con el caso del conjunto que comprende a Juan solamente, que pertenece a otro universo. Esto puede dar la impresión de que se trata de hilar demasiado fino, pero si se abandonan estas distinciones se desemboca en confusiones y contradicciones. Por

ejemplo, tomemos el universo formado por todos los conjuntos posibles de que se acaba de hablar y extraigamos de este universo los conjuntos que comprenden un solo elemento, o los conjuntos que comprenden dos elementos. Para más claridad demos un nombre a cada ser:

Niños : Juan, María, Susana, Miguel.

Perros : Pluto (es dulce), Tarzán (es feroz), Tigre (es muy feroz).

Gatos : Negro, Moteado.

Éste es el universo de los seres. El universo de los conjuntos de seres de la misma especie es mucho más numeroso. A continuación se halla clasificado según el número de seres que figuran en cada conjunto.

1 criatura por conjunto (conjunto E_1 de conjuntos):

{Juan} {María} {Susana} {Miguel} {Pluto}
{Tarzán} {Tigre} {Negro} {Moteado}

2 criaturas por conjunto (conjunto E_2 de conjuntos):

{Juan, María} {Juan, Susana} {Juan, Miguel}
{María, Miguel} {María, Susana}
{Susana, Miguel}
{Pluto, Tarzán} {Pluto, Tigre}
{Negro, Moteado}

3 criaturas por conjunto (conjunto E_3 de conjuntos):

{Juan, María, Susana} {Juan, María, Miguel}
{Juan, Susana, Miguel} {María, Susana, Miguel}
{Pluto, Tarzán, Tigre}

4 criaturas por conjunto (conjunto E_4 de conjuntos):

{Juan, María, Susana, Miguel}

Naturalmente no hay ninguna razón para restringir el universo al conjunto de los conjuntos de criaturas de la misma especie. Si se admiten otros conjuntos de criaturas, se obtendrá un universo todavía más numeroso.


El universo estudiado acaba de ser descompuesto en cuatro partes. La primera parte contiene los elementos que pertenecen a conjuntos de una criatura cada uno, el segundo contiene elementos que pertenecen a conjuntos de dos criaturas, etc. El «número 1» es una propiedad común a todos los elementos que pertenecen a la primera parte, el «número 2» es una propiedad común a todos los elementos que pertenecen a la segunda parte, y así sucesivamente.

El conjunto de los conjuntos del primer grupo, designado E_1 , tiene elementos que son por sí mismos conjuntos, y cada uno de estos conjuntos tiene la propiedad de no comprender por sí mismos más que un elemento, es decir, un solo ser. El conjunto de los conjuntos del segundo grupo, designado E_2 , tiene también elementos que son conjuntos, cada uno de estos conjuntos comprende dos elementos, es decir, dos seres. El conjunto de los conjuntos del tercer grupo, designado E_3 , tiene también elementos que son conjuntos, y cada uno de estos conjuntos posee la propiedad de tener tres elementos.

«Tener tres elementos» es una propiedad de los conjuntos que permite aislar un cierto conjunto de conjuntos a partir del universo de los conjuntos, a saber, el conjunto de los conjuntos en los que cada conjunto-elemento posee precisamente tres elementos. Es importante apercibirse de que «tener tres elementos», o «tres» para abreviar, es una propiedad que concierne a los conjuntos y no a los

elementos de los conjuntos. Las propiedades tales como «ser un muchacho», «ser grueso» o «tener el pelo negro» se aplican a los elementos del universo de los seres, no al universo de cualesquiera conjunto de criaturas.

Un conjunto de muchachos no puede ser un muchacho; por consiguiente «ser un muchacho» no puede aplicarse a ningún conjunto de criaturas, sino solamente a una criatura. Inversamente el «tener tres elementos» no puede aplicarse a una criatura aislada, sino solamente a un conjunto de criaturas aisladas. No se facilitan las adquisiciones del niño cuando se escribe en los libros de texto del alumno cosas como esta:

●●● = 3 o lo que es peor todavía  = 3

El primer miembro de la «ecuación» es un conjunto o mejor todavía el símbolo de un conjunto; el segundo miembro es una propiedad del conjunto. No se puede decir que una propiedad es idéntica a aquello que posee la propiedad. La rojez no es idéntica al objeto que es rojo, de la misma forma que «tres» no es idéntico a un conjunto de tres objetos.

d) *Diferencia de dos conjuntos.* Extrayendo un subconjunto de un conjunto se forma la *diferencia* entre dos conjuntos. Si partiendo del conjunto de niños de ojos azules de la clase, se quita el conjunto de niños de ojos azules, queda el conjunto de niñas de ojos azules de la clase. El conjunto de niñas de ojos azules es la diferencia entre el conjunto de niños de ojos azules y el conjunto de muchachos de ojos azules. Sobre esta operación entre conjuntos reposa la noción de sustracción.

Es posible que el subconjunto sea idéntico al conjunto, por ejemplo, es posible que no exista en la clase niña alguna de ojos azules. En este caso la diferencia es un conjunto vacío. Hay en esto una dificultad que no es preciso introducir desde el principio. Los subconjuntos que no son idénticos a los conjuntos de que forman parte se llaman subconjuntos *en sentido estricto*. Por ejemplo, el conjunto de los muchachos de una clase es un subconjunto en sentido estricto del conjunto formado por todos los niños de la clase, si existen niñas en la clase, pero no en el caso de que la clase no comprenda más que a muchachos.

Las operaciones que acabamos de estudiar sobre conjuntos son los preliminares necesarios para el estudio de las operaciones sobre los números. Como ya hemos dicho los números son propiedades de los conjuntos. Cuando se habla de números, se habla de propiedades. El universo en que se aplican estas propiedades está formado por *conjuntos*; los elementos de estos conjuntos son generalmente objetos o sucesos. A partir del universo de todos los conjuntos posibles, se pueden extraer aquellos que tienen la propiedad de comprender precisamente dos elementos. En efecto, «dos» es la propiedad común a todos los conjuntos posibles que comprenden dos elementos. De la misma forma que «creando» conjuntos a partir de sus elementos creamos esta vez un nuevo universo, el de los números. No es necesario añadir que este proceso es ilimitado. El arte del matemático consiste en la creación continua de nuevos universos y en la investigación de las propiedades en torno a los elementos de estos universos. Los niños pueden desde la escuela maternal entrar en el juego de estas creaciones, así como en el juego del examen de cada nueva especie de criaturas.

III. ATRIBUTOS Y OPERACIONES LÓGICAS

a) DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL LÓGICO

Ya hemos hablado de las propiedades de los elementos de un conjunto. Dado un universo, una propiedad define un conjunto, a condición de ser lo suficientemente precisa, para que cualesquiera pueda examinar los elementos del universo y decidir si este elemento posee o no el atributo en cuestión. Si se considera por ejemplo un universo de objetos coloreados en rojo, azul o amarillo, el atributo «azul» será suficientemente preciso, puesto que en este caso no importa quién pueda decir si un objeto es azul o no. Pero, por el contrario, si los objetos del universo tienen tonalidades que pasan gradualmente del azul al violeta y después al rojo, el atributo «azul» no se presta ya a una distinción totalmente precisa. Si deseamos que los niños trabajen sobre los atributos, es esencial colocarles en situaciones en que puedan efectuar discriminaciones válidas.

Para trabajar sobre los atributos sugiero el empleo de un juego de piezas concebido en la forma siguiente (1):

(1) Editorial Teide prepara una serie de ejercicios progresivos destinados a las escuelas maternas y las primeras clases de enseñanza primaria. Los alumnos de las últimas clases que no han tenido ocasión de descubrir los elementos de la noción de conjunto en el primer grado tendrán gran ventaja en hacer ejercicios de este tipo. (N. del E.)

- 1.º Unas piezas serán rojas, otras azules y otras amarillas;
- 2.º Unas piezas serán de forma redonda, otras cuadradas, otras triangulares (1) y otras rectangulares (1);
- 3.º Unas piezas serán gruesas y otras delgadas;
- 4.º Unas piezas serán grandes y otras pequeñas.

Si se quiere que todas las combinaciones posibles de estos atributos estén representadas en el universo de las piezas, y cada una por una sola pieza, se forma un universo de cuarenta y ocho piezas diferentes (2). Este conjunto, ordenado en una caja de cartón, será situado sobre las mesas de los alumnos.

(1) Si los niños desconocen el «triángulo» y el «rectángulo», no se trata en absoluto de inculcarles estos dos conceptos. En una primera fase se preguntará a los niños el nombre de las piezas. En una clase maternal en París los niños han llamado al triángulo el *puntiagudo* y al rectángulo el *largo*. Conformémonos con estos nombres. Apelando al sombrero de Cadet Russel se puede llamar al triángulo el *tricornio* y al rectángulo se le llamará *barra* tomando como referencia una barra de chocolate. (Nota de la ed. francesa.)

(2) En efecto, el conjunto tendrá 48 piezas diferentes, ya que resulta de combinar los atributos, por ejemplo, en la forma siguiente:
Partamos de la forma de las piezas. Hay cuatro formas: redonda, cuadrada, triangular y rectangular. Las piezas redondas pueden ser:

redonda roja gruesa grande	redonda azul gruesa grande
» » » pequeña	» » » pequeña
» » delgada grande	» » delgada grande
» » » pequeña	» » » pequeña
redonda amarilla gruesa grande	
» » » pequeña	
» » delgada grande	
» » » pequeña	

Así obtenemos doce piezas redondas diferentes. Si hacemos lo mismo con las piezas cuadradas, triangulares y rectangulares, obtenemos también doce diferentes; en total son: cuatro por doce = cuarenta y ocho piezas distintas. (Nota del traductor.)

b) JUEGOS PRELIMINARES

Los niños comenzarán por jugar con estas piezas como con un juego de construcción y tratarán de realizar conjuntos figurativos; después querrán emprender la clasificación de las piezas, convendrá encaminarles en este sentido. Una pila de piezas rojas, otra de azules, otra de amarillas: he aquí la clasificación por colores. Se pueden hacer también cuatro montones según la forma, o dos según el espesor, o dos montones según la magnitud. Esto es el preliminar indispensable para clasificaciones de tipo más complejo, tales como las que hacen intervenir a la vez la forma y el color, y así sucesivamente. Al cabo de cierto tiempo será corriente oír decir a los niños: «Falta en mi caja el «triángulo azul grande y grueso»; ¿quién me lo ha cogido la última vez?». Los niños aprenderán así a designar las piezas por sus cuatro atributos. Se les encomendará que jueguen al «objeto escondido». Uno de los niños, mientras sus compañeros cierran los ojos, saca una de las piezas y la esconde; los demás niños deben identificar a continuación la pieza que falta. Se puede imaginar también una variante del juego del «retrato»: un niño piensa en una pieza, los otros deben adivinar esta pieza haciendo el menor número posible de preguntas.

Después de esto se pide a los niños que elijan dos piezas y expliquen en cuántos aspectos se diferencian. Por ejemplo, un «círculo grande delgado y rojo» difiere de un «rectángulo grande delgado azul» en dos aspectos, y así sucesivamente. Cuando se haya adquirido este concepto, se puede introducir un juego análogo al «dominó»: se trata de formar una cadena de piezas, de forma que cada una de ellas difiera de la precedente en un solo atributo o en dos atributos, y así sucesivamente. Se da a este juego un ca-

ATRIBUTOS Y OPERACIONES LÓGICAS

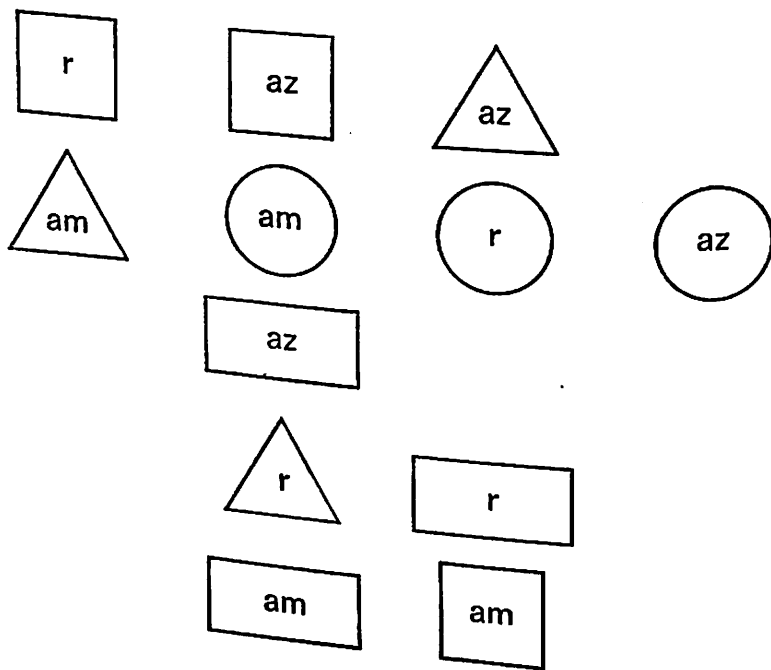
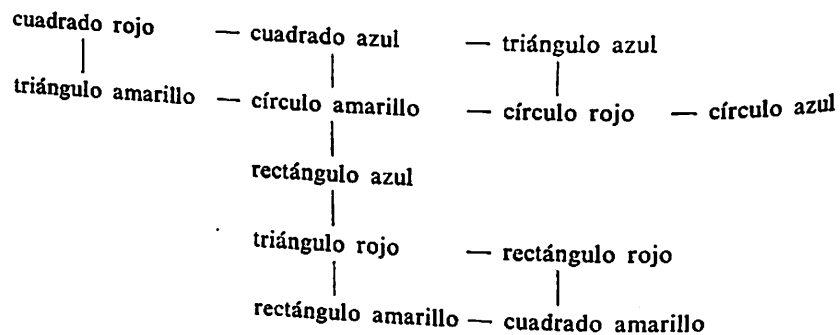


Fig. 1

rácter de competición más apremiante, si se encadenan las piezas en una dirección perpendicular diferenciándose en dos atributos. Por ejemplo, si nos limitamos a las piezas gruesas y grandes (es decir, no haciendo variar más que la forma y el color) se llega a configuraciones como las representadas en la página 24.

Cada vez que hay una variación de un solo atributo se desplaza de izquierda a derecha, y cada vez que hay una variación de dos atributos se desplazan de arriba abajo (1).

En fin, se introducirá un «juego de negación» haciendo elegir a un niño una pieza que tenga el «atributo contrario» de un atributo dado. Por ejemplo, si un niño toma las piezas amarillas, otro deberá tomar las piezas que no son amarillas («no-amarillas»); si un niño toma círculos rojos, otro deberá tomar piezas que no sean círculos rojos («no-círculos rojos»). Esto nos conducirá a un estudio más sistemático de la conexión que existe entre «y» y «no».

c) CONJUNCIONES

Para llegar a esta noción lo mejor es valerse de los diagramas de Venn de complejidad creciente. Se colocan o dibujan en el suelo dos círculos: uno que lleve, por ejemplo, la etiqueta «rojo» y otro la etiqueta «cuadrado». Se sitúan las piezas rojas y solamente las rojas en el interior del círculo «rojo»; las piezas cuadradas y solamente las cuadradas en el interior del círculo «cuadrado». Ningún objeto rojo puede estar situado en la parte exterior del círculo «rojo», y ningún objeto cuadrado en el exterior del círculo «cuadrado». Los cuadrados rojos estarán situados en la región de superposición de los dos círculos (es decir, en la intersección del

(1) Cf. «Lógica y juegos lógicos» (en esta misma colección).

«conjunto rojo» y del «conjunto cuadrado»). Las piezas que no sean ni rojas ni cuadradas permanecerán en el exterior de los dos círculos a la vez (fig. 2).

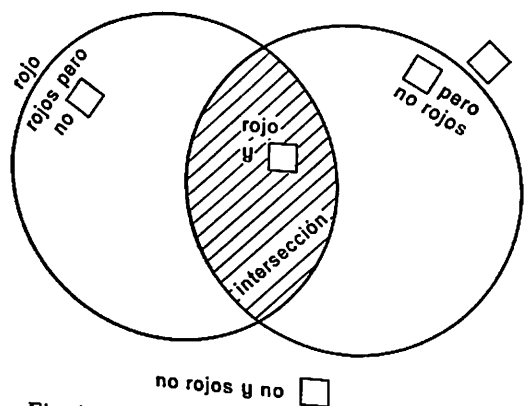


Fig. 2. Diagrama de Venn de dos atributos.

Se puede realizar el mismo juego con otros atributos y hacer aparecer eventualmente la negación de algunos atributos: por ejemplo, un círculo puede llevar la etiqueta «no rojo», en cuyo caso todas las piezas rojas están situadas en el exterior y todas las piezas no-rojas en el interior de este círculo. Es posible aumentar el número de atributos hasta tres al nivel del primero (1) y segundo año de la escuela primaria (7-8 y 8-9 años) (fig. 3).

Los atributos tales como «rectángulo rojo» se llaman atributos «conjuntivos». En el caso de «rectángulo rojo delgado» se trata de la conjunción de tres atributos. El «nombre» de cada pieza es la conjunción de cuatro atributos: un atributo cuádruple define en

(1) En España para niños de 2.º y 3.º curso (7-8 y 8-9 años). (N. del T.)

nuestro universo un conjunto que comprende cada uno un solo elemento. Algunas combinaciones de atributos definen conjuntos vacíos, como por ejemplo «círculo cuadrado».

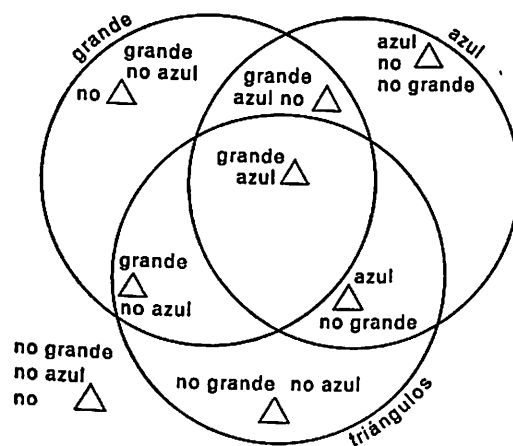


Fig. 3. Diagrama de Venn de tres atributos.

d) DISYUNCIONES

Asociando atributos como «rojo o rectangular» se obtienen atributos «disyuntivos». Los niños parece que encuentran mayores dificultades en dominarlos. Para llegar a ellos de forma intuitiva deben reunir todas las piezas que posean o bien el atributo rojo o bien el atributo rectangular.

Hay que precisar bien que la disyunción *no es exclusiva*, sino *inclusiva*: en el ejemplo citado se reunirán las piezas que sean rojas, rectangulares, o las dos cosas a la vez. El conjunto obtenido será la reunión de los conjuntos definidos por cada uno de los atributos que constituyen la disyunción (fig. 4).

Excluimos temporalmente del juego las piezas que no sean ni rojas ni cuadradas. Observando el diagrama se ve en seguida que si se toma en el conjunto una pieza que no es roja, será forzosa-

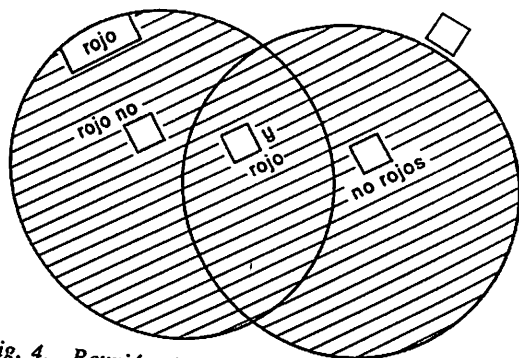


Fig. 4. Reunión de conjuntos «rojo» y «cuadrado».

mente cuadrada; si se toma una pieza que no es cuadrada, será forzosamente roja. Así el conjunto disyuntivo conduce a una implicación:

Si no-rojo, entonces cuadrado.

Si no-cuadrado, entonces rojo.

e) IMPLICACIONES

Tras lo que acabamos de ver, las disyunciones llevan en sí el germen de los «razonamientos». Por ejemplo, imaginemos que se reúnen en un montón todas las piezas que son redondas o azules; si se toma de este montón una pieza que no es redonda, entonces debe ser una pieza azul; si se toma una pieza que no es azul, tiene que ser una pieza redonda. Una vez que los niños han formado conjuntos disyuntivos análogos, se pide a un grupo de niños que

extraigan cada uno una pieza de tal conjunto, asegurándose de que esta pieza *no posea* uno de los atributos que definen la disyunción; ellos se dan cuenta de que la pieza elegida *posee entonces el otro atributo*. En el caso de montón «redondo o azul» si se dice a los niños que cojan una pieza cualquiera que no sea redonda, cada uno de ellos se apercibirá de que tiene en las manos una pieza azul. Algunos podrán comprender entonces que decir: «redondo o azul» es tanto como decir: «si no es redonda, entonces será azul».

Se puede complicar el juego introduciendo negaciones. Se pide a los niños que amontonen todas las piezas que no son azules o no son redondas; y se forma de este modo la reunión del conjunto «azul» con el conjunto «no-redondo». Después se dice a los niños que tomen todas las piezas redondas en el montón así formado: se darán cuenta de que son todas azules. Aparece así que el montón «no-redondo o azul» es también el montón «si es redondo, entonces es azul». El mismo montón puede ser descrito de dos formas distintas o llevar dos nombres diferentes (fig. 5).

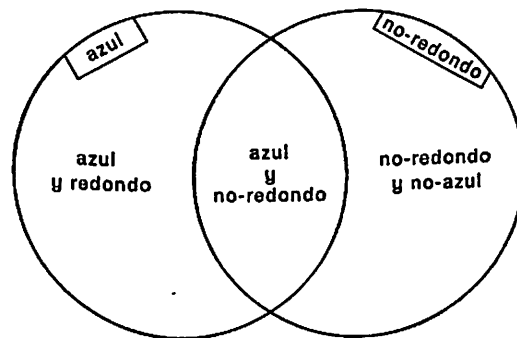


Fig. 5. Reunión de conjuntos «azul» y «no-redondo».

Se han excluido temporalmente del juego las no-azules. Todas las piezas restantes son azules o no-redondas. Acabamos de ver que si se toma en el conjunto una pieza redonda, es forzosamente azul; aún más, si se toma una pieza no-azul es forzosamente no-redonda. De esta forma el conjunto disyuntivo estudiado conduce a dos implicaciones.

Si es redondo, entonces es azul.

Si no-azul, entonces es no-redondo.

Importa destacar que lo inverso no es verdadero: si se toma una pieza azul, no es forzosamente redonda; si se toma una pieza no-redonda, no es forzosamente no-azul.

La negación puede combinarse también con los juegos de disyunción o de conjunción. La consigna «dame todas las piezas que no sean azules o redondas» conduce a reunir las piezas que son «a la vez no-azules y no-redondas». Hay, una vez más, dos nombres distintos para un mismo montón. Del mismo modo el montón formado por todas las piezas que «no son a la vez redondas y azules» se podía haber formado también diciendo a los niños: «reunidas todas las piezas que son no-redondas o no-azules».

Se puede introducir la negación de otro modo formando desde el principio el montón «no-azul o redondo» (es decir, la unión de las piezas no azules y de las redondas); entonces la negación será «a la vez azul y no-redondo», y así sucesivamente. Se percibirá a partir de este momento que se hace urgente imaginar un modo de notación simbólica, sin la cual no es posible observar y discutir los resultados obtenidos.

En la escuela maternal y en el primer año de escuela primaria (de 5 a 8 años) bastará al principio emplear las palabras *y*, *o*, *no*, etcétera, impresas sobre trozos de cartón, así como los nombres

de los atributos. Para los niños que no saben todavía leer, algunos atributos podrán estar simbolizados por dibujos representando las formas o por pequeñas manchas de pintura. Las nociones de grande, pequeño, grueso y delgado pueden en rigor representarse por símbolos figurativos sin pretensión.

La dificultad comienza con los montones más complejos, para los cuales el agrupamiento de los símbolos plantea problemas de significación. Así, en los símbolos siguientes:

No (redondo y azul)

no quiere decir lo mismo que:

(No redondo) y (azul)

lo que hace necesario el uso de paréntesis o de dispositivos análogos. Esta dificultad ligada a la función de los símbolos puede ser salvada eligiendo distintos métodos convenidos para expresar las conjunciones, las disyunciones y las negaciones. Estos métodos se describen a continuación y pueden ser utilizados con niños de segundo curso de escuela primaria (8-9 años) (1).

f) SIMBOLISMO LÓGICO

El simbolismo comienza naturalmente por los atributos primitivos: color, forma, tamaño, grosor. Se designan los montones o conjuntos mediante nombres tales como el conjunto rojo, el conjunto cuadrado, el conjunto delgado, etc. Estas especificaciones particulares o valores de los atributos constituyen nombres valederos para los conjuntos. Después viene la negación. La letra mayúscula N puede situarse delante del nombre de un conjunto y esto cons-

(1) Tercer curso de escolaridad obligatoria, en España. (N. del T.)

tituirá un nuevo nombre: el del conjunto complementario. Por ejemplo si **am** significa «amarillo», **Nam** representa todas las piezas que no son amarillas. Se convendrá en que este símbolo **N** se relaciona únicamente con el nombre que le sigue inmediatamente, puesto que **Nam** es el nombre de un conjunto, de la misma forma que lo es **NNam**; éste es el conjunto de todas las piezas del universo que no pertenecen al conjunto «no-amarillo», pues **NNam** tiene el mismo significado que **am**. Las negaciones en el plano lógico se corresponden con los complementos en el plano de los conjuntos; la negación de la negación de un atributo no es otra cosa que el atributo primitivo; el complemento del complemento de un conjunto no es otra cosa que el complemento primitivo.

Podemos introducir inmediatamente los símbolos para las conjunciones. El símbolo usual será la mayúscula **K** con abreviaturas tales como:

am, az, r, ca, tr, re, ro, gr, de, ge, pe

para los once tipos de atributos que existen en nuestro universo de piezas. Convendremos en que la letra **K** se relaciona únicamente con dos nombres de conjuntos que la siguen inmediatamente.

Así:

K az ca significa «a la vez azul y cuadrado»

K Naz ca significa «a la vez no-azul y cuadrado»

En este último ejemplo se recordará que la letra **N** se relaciona únicamente con azul y no con cuadrado, como antes hemos acordado; no hay pues confusión posible entre «no azul y cuadrado» y «no-azul y cuadrado»: el primero debe escribirse **N Kaz ca**, el

segundo **K Naz ca**; en el primer caso **K az ca** es el nombre del conjunto que sigue inmediatamente a **N**, puesto que **Kaz** no es nombre de conjunto; en el segundo caso el nombre **az** es el nombre del conjunto que sigue inmediatamente a **N**, y por consiguiente **N** no se relaciona con **ca**. No hay pues necesidad de recargar la escritura con paréntesis.

Se puede naturalmente formar la conjunción de una conjunción ya formada y de otros atributos: esto lleva consigo el empleo de un segundo símbolo **K**. Por ejemplo: **K de K Naz ca** significa «a la vez delgado y a la vez no azul y cuadrado», lo cual es lo mismo que escribir:

K K de Naz ca, es decir: «a la vez delgado, no-azul y cuadrado».

Un juego instructivo consiste en hacer imaginar nombres de conjuntos a algunos niños y hacer formar estos conjuntos a otros niños. O, al revés, unos pueden construir conjuntos, después otros niños darles nombre. Hay que hacer notar que el mismo conjunto puede tener varios nombres, como acabamos de ver.

Para poner en evidencia este hecho, se puede utilizar un juego concebido en la siguiente forma: se constituyen los cuatro conjuntos definidos por símbolos tales como, por ejemplo, **K am tr**, **K Nam tr**, **Kam N tr**, **K Nam N tr**; se pueden poner de manifiesto estos conjuntos dibujando un diagrama de Venn por medio de una cerca «triangular» y poniendo el nombre correspondiente sobre cada uno de los campos que se forman; después uno mezcla las letras que componen los símbolos. Pueden presentarse tres casos:

1.º La nueva composición no es un nombre de conjunto, es decir, que su escritura no está de acuerdo con las reglas previamente establecidas.

2.º La nueva combinación representa otro nombre del mismo conjunto.

3.º La nueva combinación representa el nombre de otro conjunto.

Supongamos, por ejemplo, que se parte del símbolo **K Nam tr** y que se barajan las letras. Si se escribe **Nam Ktr**, esto no es un nombre de conjunto, puesto que el símbolo **K** debe referirse a dos nombres de conjuntos situados inmediatamente tras él. Si se escribe **Kam tr N** tampoco responde a ningún nombre de conjunto, puesto que la letra **N** no va seguida de ningún nombre de conjunto. Si se escribe **K tr Nam**, éste es otro nombre para el mismo conjunto; pero si se escribe **K Ntr am**, se obtiene entonces el nombre de otro conjunto representado sobre el mismo diagrama de Venn. De la misma forma **N Kam tr** es también un nombre de conjunto; es el conjunto de las piezas que no son a la vez amarillas y triangulares, es decir, la reunión del conjunto de piezas no-amarillas con el de las piezas no-triangulares; si están suficientemente familiarizados con los juegos precedentes, los niños reconocerán que este conjunto es también el complemento del conjunto «amarillo y triangular» (fig. 6). El espacio señalado con las líneas onduladas es el conjunto definido por el atributo **N**; el espacio cubierto por líneas rectas está definido por el atributo **Nam**; el espacio libre en el centro está definido por el atributo **Kam Δ**. La unión de los dos primeros conjuntos está pues definido por el atributo disyuntivo:

$$A \text{ N am } N \Delta \text{ (1)}$$

(1) El atributo **A** se define en la página 36.

que es también claramente el complemento del tercer conjunto, es decir, de aquel que se encuentra en el centro del diagrama, y otro nombre para la reunión de los dos primeros conjuntos es pues:

$$N \text{ K am } \Delta$$

Ésta es una de las reglas de De Morgan uniendo conjunciones, disyunciones y negaciones. Las otras tres se obtienen definiendo

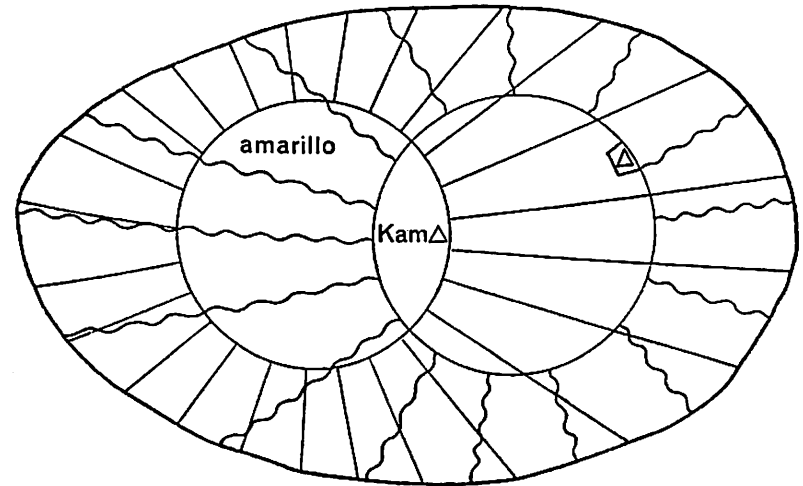


Fig. 6

los círculos originales por medio de la negación de atributos, es decir, por ejemplo: **N am** para uno y **Δ** para el otro, o **am** para uno y **N Δ** para el otro, o bien **N am** para uno y **N Δ** para el otro.

g) RELACIÓN ENTRE LA LÓGICA Y LOS CONJUNTOS (1)

Todos estos juegos se hacen mucho más fáciles de entender y de manejar, si se establece la correspondencia siguiente entre el lenguaje de los conjuntos y el lenguaje de la lógica:

complementos de conjuntos	\Leftrightarrow	negaciones de atributos
intersecciones de conjuntos	\Leftrightarrow	conjunciones de atributos
reuniones de conjuntos	\Leftrightarrow	disyunciones de atributos

o en términos más sencillos: los complementos corresponden a «no», las intersecciones a «y», las reuniones a «en».

h) DESARROLLOS ULTERIORES

Para completar la tabla, es necesario introducir un símbolo para las disyunciones; este símbolo es generalmente **A**. Como más arriba se ha dicho, se convendrá en que el símbolo **A** se relaciona con los dos nombres de conjuntos que le siguen inmediatamente. Por ejemplo, **A Nam re** significa: «Reunir todas las piezas que son no-amarillas o rectangulares»; se reconocerá que esta consigna está también representada por **N Kam N re**.

Quienes estén familiarizados con el cálculo proposicional se apercebirán de que los juegos en cuestión descansan sobre lo que se llaman «tautologías» en el cálculo. Se puede imaginar un juego que corresponda a cada tipo de tautología a la vez en un nivel experimental y en un nivel simbólico: la manipulación de las pie-

(1) Se encontrarán numerosos ejemplos de cálculo proposicional en el juego «Wff and proof». (Cf. Laboratorio de matemática de O. C. D. L.)

zas representan un juego a nivel experimental, la combinación de los cartones que llevan los símbolos representa un juego a nivel simbólico. Se pueden así introducir otros elementos del cálculo proposicional, por ejemplo traduciendo «si... luego» por un símbolo de implicación: este símbolo será normalmente **C**. Por ejemplo. **C tr az** significa: «Si en este conjunto se toma un triángulo, será forzosamente azul»; se recordará que tal conjunto se puede formar siguiendo la notación **A N tr az**, es decir: «Reunir todas las piezas que son no triángulos o azules».

De la misma forma se podrá introducir un símbolo para la equivalencia, por ejemplo **E**. Entonces, **E az tr** significa: «Si se toma una pieza azul, es forzosamente triangular y si se toma un triángulo es forzosamente azul». Es la conjunción de dos implicaciones **C az tr** y **C tr az** y por consiguiente la notación **E az tr** equivale a **K C az tr az**.

IV. EL NÚMERO Y EL ORIGEN DE SU NOTACIÓN

a) EL NIVEL DE ABSTRACCIÓN DEL NÚMERO

El número es una propiedad de los conjuntos. Después de haberse familiarizado con los conjuntos, los niños no encuentran dificultad en decir alguna cosa *relativa* a los conjuntos y en clasificar dentro de la misma clase todos los conjuntos de los que se puede decir la misma cosa. Hay que percatarse de que cuando se pasa de los conjuntos a los números se cambia de universo: se pasa del universo de los objetos al de los conjuntos. «Amarillo» es una propiedad ligada a un conjunto de objetos de los que hemos venido hablando, por ejemplo, al conjunto de los triángulos grandes delgados o al de los círculos pequeños y gruesos. «Dos» es una propiedad ligada a conjuntos tales como el de los círculos azules gruesos o al de los rectángulos amarillos pequeños. «Cuatro» es una propiedad de los conjuntos tales como el de los cuadrados rojos o el de los triángulos azules. Se podrá emplear la letra N como abreviatura para designar «el número de los elementos del conjunto»; no hay riesgo en confundirla con la N de la negación. Es más, es muy útil enseñar a los niños lo antes posible que el mismo símbolo puede representar cosas distintas, de la misma forma que símbolos distintos pueden significar la misma cosa. Im-

porta dejar bien sentado que los símbolos no son en modo alguno propiedades de las cosas simbolizadas, sino simples convencionalismos destinados a evocar lo que se trata de simbolizar.

El símbolo N {círculos pequeños gruesos}

representa así el número de los elementos que forman el conjunto de todos los círculos pequeños gruesos. Encontramos que es la misma propiedad que está representada por

N {rectángulos pequeños delgados}

y se convendrá en situar el signo $=$ entre estos símbolos. Este signo de igualdad no se relaciona con los conjuntos en cuestión, sino con la propiedad que tienen de común: su número. El símbolo 3, en efecto, es utilizado para designar una propiedad común a un gran número de conjuntos, a saber los conjuntos formados por tres elementos. Esta transición del mundo de los conjuntos al mundo más abstracto de los números será facilitada mediante instrumentos de trabajo, destinados tanto a los alumnos como a los profesores, de los que se encontrará la indicación en las referencias. Se pasa del universo de los objetos al universo de los conjuntos, y las propiedades que permiten clasificar los objetos no definen conjuntos sino números; hay en esto un gran salto en la abstracción, pero a los niños les encanta dar este salto, a condición de que se les faciliten las experiencias convenientes para fundamentar esta nueva abstracción.

El número de los elementos de un conjunto vacío se designa mediante la cifra cero. Se escribe simbólicamente

$$N \{ \quad \} = 0$$

Por ejemplo, se tienen N {triángulos cuadrados} = 0, porque

$$\{\text{triángulos cuadrados}\} = \{ \quad \}$$

b) LA ADICIÓN DE NÚMEROS

La etapa siguiente en el proceso de aprendizaje parece definida naturalmente, como la construcción de las operaciones sobre los números, a imagen de las operaciones sobre conjuntos. Después de haber comprendido la distinción entre números y conjuntos, la igualdad de los números, los conjuntos vacíos y el número cero, es posible introducir la noción de adición sobre la noción de reunión de conjuntos. Pero se presenta una dificultad: los conjuntos que poseen elementos comunes, una vez reunidos, no dan el mismo resultado numérico que los conjuntos del mismo número que no tienen elementos comunes. Por ejemplo:

$$N \{\text{cuadrados grandes delgados}\} = 3$$

$$N \{\text{cuadrados azules delgados}\} = 2$$

la reunión de estos dos conjuntos está formada por cuadrados delgados que son grandes o azules, lo que da cuatro elementos solamente: los números «no se suman». Pero si se toman

{cuadrados grandes delgados} reunidos con {cuadrados grandes gruesos}

se obtiene:

$$N \{\text{cuadrados grandes delgados}\} + N \{\text{cuadrados grandes gruesos}\} = 3 + 3 = N \{\text{cuadrados grandes}\} = 6$$

en este caso los números «se adicionan». Por lo tanto la operación de adición de números reposa sobre la operación de conjuntos que *no tienen elementos comunes*, es decir, cuya intersección es vacía. Serán necesarios muchos ejercicios prácticos para comprender esta noción. Mediante otras formas de presentación, especialmente la de Suppes, se evita esta complicación eliminando la reunión de conjuntos que tienen elementos comunes. Nosotros vemos en este método el inconveniente de que los niños aprenden desde el comienzo un caso particular y deben realizar en seguida un proceso de generalización, para poder dominar la situación lógica completa, cuando esta última se presenta. La experiencia hace pensar que los niños tienen más dificultad en generalizar un concepto ya formado, que en formarlo partiendo de un concepto más general.

c) LA SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS

La operación que consiste en formar la diferencia de dos conjuntos lleva naturalmente a la operación que permite encontrar la diferencia de dos números, es decir, la sustracción. Cuando de un conjunto se retira uno de sus subconjuntos, se obtiene el conjunto-diferencia entre el conjunto y su conjunto. La reunión del conjunto-diferencia y del subconjunto vuelve a dar el conjunto primitivo del que se había partido. En lo anteriormente expuesto se ve la relación inversa entre la adición y la sustracción.

El conjunto de niños gruesos es un subconjunto de todos los niños (situados en alguna parte, por ejemplo, en la clase). Si se retira el conjunto de niños gruesos del conjunto de todos los niños, queda el conjunto-diferencia, a saber, el conjunto de niños de la clase que no son gruesos. Reuniendo el conjunto-diferencia con el conjunto de niños gruesos se vuelve a encontrar el conjunto de

todos los niños; no se ha hecho más que volver a reunir lo que se acababa de separar. Este simple hecho es la base de la sustracción; pero mientras que la diferencia entre conjuntos es una operación sobre conjuntos, la diferencia entre números es una operación hecha sobre los números, los cuales son propiedades de los conjuntos. Recordemos que no hay que confundir una propiedad (el número) con lo que posee esta propiedad (el conjunto), pues se cambia de universo de un caso a otro. En el lenguaje ordinario no es preciso nunca perder de vista aquello de que se habla, lo que tiene el riesgo de ocurrir cuando se utilizan símbolos en los que las relaciones mutuas no son tan claras.

d) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS

La consideración de conjuntos conducirá a la operación aritmética de multiplicación. Cuando se efectúa una multiplicación, se cambia de universo sobre la marcha, y esto es precisamente lo que introduce una dificultad a propósito de este concepto. En un producto uno de los factores se refiere a los conjuntos, el otro a conjuntos de conjuntos. Separemos por ejemplo nuestro universo de piezas de madera en cuatro conjuntos:

$K \text{ d gr}, K \text{ g gr}, K \text{ d pe}, K \text{ g pe}$

En lugar de considerar el universo formado de 48 piezas de madera, podemos considerar el universo formado por todos los conjuntos de piezas que se puedan extraer del primitivo universo de 48 piezas; hemos escrito anteriormente un conjunto de 4 elementos que pertenecen a este nuevo universo; cada elemento de este conjunto comprende por sí mismo 12 elementos tomados del

universo primitivo de 48 objetos. Se puede escribir, pues, simbólicamente:

$$N \{K \text{ d } g, K \text{ g } gr, K \text{ d } p, K \text{ gr } p\} = 4$$

pero $N \{K \text{ d } gr\} = 12$

$$N \{K \text{ gr } g\} = 12$$

$$N \{K \text{ d } p\} = 12$$

$$N \{K \text{ d } p\} = 12$$

La operación de multiplicación consiste en tomar el primero de estos conjuntos, el de cuatro elementos, después de «descender de un nivel» pasando del universo de los conjuntos de cosas a los universos de cosas, y en fin, de encontrar el número que es la propiedad del conjunto así obtenido. En nuestro ejemplo el conjunto «de nivel inferior» tiene 48 elementos; esto es lo que expresa la multiplicación de apariencia tan sencilla como esta:

$$4 \times 12 = 48$$

Los niños pueden adquirir mucha práctica en los cambios de universo, antes de alcanzar estos procesos de descendimiento de nivel. Incluso cuando los niños permanecen en el interior del mismo universo, será necesario siempre recordarles cuál es este universo, haciéndoles presente que se deben dar cuenta de lo que están diciendo. Es asombroso ver como los mismos adultos olvidan fácilmente este aspecto tan importante.

Para adquirir práctica en este proceso de «cambio de nivel sobre la marcha», es necesario, obvio es decirlo, utilizar otros muchos materiales junto a los bloques lógicos. Por ejemplo, un universo podrá ser un montón de manzanas, y otro estará formado por todos los conjuntos posibles, grandes y pequeños, que se pueden extraer del primer universo de manzanas. Para destacar la diferencia de na-

turaliza de estos conjuntos, se les puede situar en platillos de cartón o en cualquier otra especie de recipiente. Por ejemplo, se forman cuatro conjuntos de tres manzanas cada uno:

El número que es la propiedad de cada conjunto de manzanas es el 3 (aquí se trata de manzanas).

El número que es la propiedad del conjunto de los conjuntos de manzanas es el 4 (aquí se trata de conjuntos).

El número que es la propiedad del conjunto de todas las manzanas es el 12 (aquí se trata de nuevo de manzanas).

e) PARES DE NÚMEROS Y CONJUNTOS FORMADOS POR ESTOS PARES

Un número es un enunciado relativo a los elementos del universo de los conjuntos. Después de haber creado los números de esta forma, podemos hacer los elementos constitutivos de un nuevo universo, y volver a empezar enunciando las propiedades relativas a los elementos de este nuevo universo. Por ejemplo, se puede pensar en los números que poseen la propiedad de ser superiores a 6 en una unidad. Entonces encontramos que solamente un elemento del nuevo elemento posee esta propiedad: el número 7. Así *el conjunto de los números* que poseen la propiedad o el atributo indicado no comprende más que un elemento, el número 7; esto puede simbolizarse de la manera siguiente:

$$\{6 + 1 = ()\} = \{7\}$$

Se puede formar todavía otro universo considerando pares de números tomados en un cierto orden. Los elementos de este universo estarán simbolizados por pares tales como (1,4), (9,5), (0,3), (4,1),

así sucesivamente. Los pares (1,4) y (4,1) deben ser considerados diferentes; si decidimos considerarlos como no formando más que un mismo par, esto querría decir simplemente que entonces estamos pensando en otro universo. Nunca se destacará lo suficiente el hecho de que lo que se tome como «diferente» o «lo mismo» depende enteramente de la definición del universo considerado.

Si se quiere que los niños adquieran una experiencia concreta con relación al manejo de universos abstractos, tales como el de los pares ordenados, basta con darles una colección de fichas, por ejemplo unas rojas y otras verdes, y decirles que el universo estará de ahora en adelante formado por «pilas de fichas». Para simbolizar estas pilas se convendrá en escribir desde el principio el número de fichas verdes, después una coma, y después el número de fichas rojas. Por ejemplo (1,4) simboliza una ficha verde y 4 rojas, mientras que (4,1) simboliza 4 fichas verdes y una ficha roja. Entonces se les puede hacer que imaginen los atributos susceptibles de aplicarse a este nuevo universo; uno de estos atributos será, por ejemplo: «el número de fichas verdes reunido con el número de fichas rojas da 6»; los elementos del conjunto que este atributo permite constituir a partir del universo de los pares son:

- (0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,0).

Se puede imaginar otro atributo, por ejemplo: «hay dos fichas rojas más que verdes en la pila». He aquí algunos elementos del conjunto así definido:

- (0,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,7), etc.

Se puede designar el primer conjunto por S (abreviatura para 6 en todo) y el segundo por D (abreviatura para «dos rojas de más»);

los niños pueden construir estas pilas y utilizar un diagrama de Venn para estudiar las relaciones mutuas entre estos conjuntos y sus complementos; por ejemplo, no habrá más que un solo elemento del universo en la intersección de S y D, éste será el par (2,4): éste es el conjunto definido y exige que los dos atributos se apliquen *simultáneamente* al mismo par. Si se designan los atributos de los conjuntos S y D por las letras minúsculas s y d respectivamente, la fórmula que define la intersección será $K \ s \ d$. Se trata de resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas, puesto que cada atributo s y d se expresa matemáticamente por una ecuación: la primera ecuación se escribe $x + y = 6$ y la segunda: $x + 2 = y$, designando por x el número de fichas verdes y por y el de fichas amarillas. Un diagrama de Venn de dos círculos distribuirá el universo de la forma siguiente (fig. 7):

Los niños se interesarán por construir un gran número de pilas y situarlas inmediatamente en los campos convenientes del diagrama

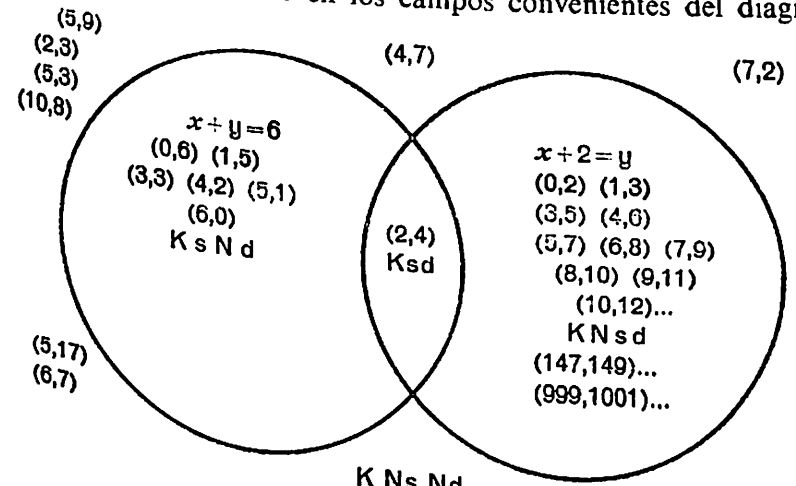


Fig. 7

ma; pueden hacer apuestas para situar correctamente las pilas que se les dan.

En un estadio más avanzado se aumentará el número de atributos formando un diagrama de Venn de tres círculos. Se puede, por ejemplo, tomar de nuevo como universo los números (y no los pares de números), y considerar los tres atributos siguientes (se supone que los conceptos en cuestión son ya familiares a los alumnos):

p: «es un número primo»,

s: «es la suma de dos cuadrados»,

q: «es igual a un múltiplo de cuatro aumentado en una unidad».

El diagrama muestra 8 conjuntos simbolizados en la forma siguiente:

KK Np Ns Nq
 KK p Ns Nq
 KK s Np Nq
 KK q Ns Np
 KK Ns p q
 KK Np s q
 KK Nq s p
 KK s q p

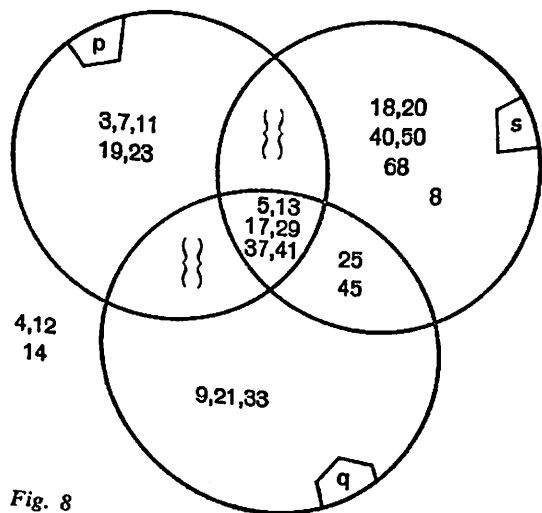


Fig. 8

Hay que hacer notar sobre estos ocho conjuntos que el quinto y el séptimo son vacíos. Esto no es una coincidencia, sino la consecuencia de un teorema matemático muy conocido sobre los números primos. Hay que hacer constar que la intersección de los conjuntos S Q es el mismo conjunto que la intersección de los conjuntos P Q; en el universo considerado los símbolos $K p s$ y $K p q$ dan lugar al mismo conjunto: son símbolos equivalentes. Se puede enunciar este hecho escribiendo $E K p s K p q$ — abreviatura simbólica que quiere decir:

«todo número primo que sea la suma de dos cuadrados es siempre igual a un múltiplo de cuatro aumentado en una unidad, o todo número primo igual a un múltiplo de cuatro aumentado en una unidad es igual a la suma de dos cuadrados». Este tipo de ejercicios únicamente va dirigido a los niños mejor dotados. Si lo hemos dado aquí es para mostrar hasta qué punto la lógica aprendida por los niños será *más tarde* aplicada por ellos.

Guiando a los niños hasta la consecución de una conciencia explícita de las componentes lógicas de enunciados matemáticos, damos a sus adquisiciones matemáticas un valor de transferencia que convendrá a otras situaciones de la vida adulta tanto en el campo científico como en el de la vida corriente.

f) INTRODUCCIÓN DE POTENCIAS

Acabamos de esbozar los métodos gracias a los cuales los niños pueden adquirir sólidos fundamentos para comprender los conceptos sobre los números. Pero estos conceptos por sí mismos no son suficientes, si no se acompañan de medios de comunicación que permitan expresar estos conceptos en las situaciones vividas. La información relativa a los números debe circular constantemente

de una persona a otra, y el código que permite esta transmisión consiste en un sistema de símbolos apropiados. En nuestra civilización occidental este sistema se llama «numeración de posición»: el valor de cada símbolo depende no solamente de su forma, sino más bien de su posición con relación a los otros; este valor ligado a la posición se designará mediante la expresión «valor posicional». El valor posicional mismo resulta de la noción de potencia; esta noción de potencia corresponde a la partición de los conjuntos en conjuntos que comprenden cada uno el mismo número de elementos, conjuntos que a su vez están divididos en conjuntos de igual número, y así sucesivamente.

Por ejemplo, 64 objetos se pueden dividir en 8 grupos de 8 objetos cada uno. La primera cifra 8 hace relación al universo de los conjuntos, la segunda cifra 8 se refiere al universo de los objetos. Cuando se «desciende de un nivel» pasando del conjunto de 8 conjuntos al conjunto de 64 objetos, se efectúa sobre los conjuntos una operación sobre la cual, como ya hemos visto, se funda la multiplicación de 8 por 8. Se dice que 64 es la segunda potencia de 8, porque hemos reducido dos niveles a uno solo; partiendo del universo de los conjuntos de conjuntos y del universo de los conjuntos llegamos al universo de los conjuntos. Se puede representar simbólicamente en esta forma:

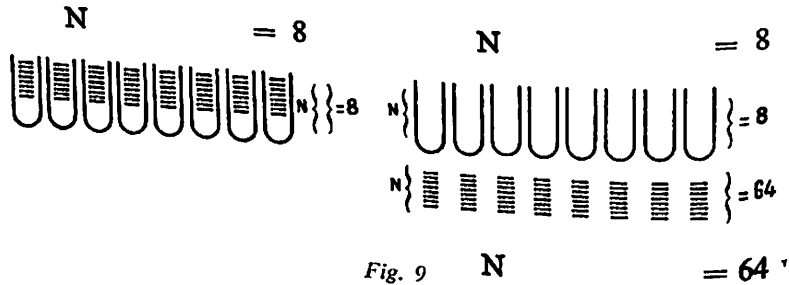


Fig. 9

Consideremos ahora tres universos: los conjuntos, los conjuntos de conjuntos y los conjuntos de los conjuntos de conjuntos; se dirá que estos universos son respectivamente del primero, segundo y tercer nivel. Tomemos 64 objetos; se pueden imaginar 16 conjuntos de 4 objetos cada uno en el primer nivel, es decir, en el nivel de los conjuntos; la cifra 4 es un símbolo que hace referencia al universo de los conjuntos que se pueden extraer de los 64 objetos. Se puede entonces cambiar de nivel y pensar en el universo de los conjuntos de conjuntos concebibles; se elegirá 4 entre los 16 conjuntos construidos y este número 4 hará referencia en adelante a un conjunto cuyos elementos son por sí mismos conjuntos (se trata de conjuntos de 4 objetos). Se puede cambiar de nivel una vez más y pensar en el tercer universo, aquel cuyos elementos son conjuntos de conjuntos: hay 4 conjuntos de esta especie; esta vez el número 4 se refiere a un conjunto cuyos elementos son conjuntos de conjuntos. Volviendo a descender del tercero al primer nivel (el del universo de los conjuntos), se encuentra el número 64, que expresa la propiedad del conjunto inferior, cuyos elementos son objetos: este 64 es una propiedad del conjunto de los conjuntos y no de los objetos mismos. Se dirá que 64 es la tercera potencia de 4, puesto que han sido precisos 3 universos de niveles distintos para pasar de 4 a 64. Si se consideran conjuntos formados por 2 elementos en lugar de 4, serán necesarios 6 universos antes de alcanzar los objetos y se dirá que 64 es la sexta potencia de 2.

Es posible e incluso absolutamente necesario facilitar a los niños experiencias concretas para construir las situaciones que correspondan a las potencias de los números. Se puede, por ejemplo, contar la historia de una escuela en la que el día de apertura cada niño debe buscarse dos amigos; al día siguiente, que será el primer día de clase propiamente dicho, todos los niños irán a la es-

cuela en grupos de a tres. Puede ocurrir que uno o dos alumnos lo hayan comprendido mal; entonces se extenderán sobre la mesa varias fichas y se dirá a los niños que estas fichas representan a los alumnos, pidiéndoles que formen los grupos que vienen a clase el primer día. El segundo día de clase cada uno de los grupos del primer día deberá venir acompañado de otros dos grupos análogos: éstos son los grupos del segundo día. El tercer día, cada uno de los grupos del segundo día deberá venir acompañado de otros dos grupos del segundo día; se forman así los grupos del tercer día, y así sucesivamente. No hay necesidad de calcular la magnitud de cada grupo en la numeración decimal; bastará con escribir 3^0 , 3^1 , 3^2 , 3^3 , 3^4 , diciendo:

El número de personas por grupo el día de apertura es: 3^0 ó 1.

El número de personas por grupo el primer día es: 3^1 ó 3.

El número de personas por grupo el segundo día es: 3^2 ó 9 y así sucesivamente.

Se pueden practicar otros juegos con escuelas de dos, escuelas de cuatro, incluso escuelas de diez. Los grupos de niños que proceden de escuelas diferentes pueden reunirse para hacer excursiones, otros pueden retirarse o adoptar distintos medios de transporte, de modo que se introduzcan adiciones y sustracciones en distintos sistemas de numeración, lo cual contribuirá a formar la noción de valor posicional. Para ganar tiempo en la construcción de conjuntos que representan distintas potencias, se puede utilizar un material preparado especialmente imaginado para el manejo de las diversas bases de numeración. Estos materiales se describen en artículos citados como referencia, acompañados de instrucciones

detalladas para su empleo; gracias a ellos se mejorará considerablemente la profundidad de la abstracción y la generalidad de los conceptos matemáticos correspondientes con relación a los métodos pedagógicos tradicionales.

g) PROCESO A SEGUIR EN EL ESTUDIO DE LAS POTENCIAS

Éste es el juego de los «agrupamientos» que servirá en primer lugar para la introducción de potencias. Lo mejor que puede hacerse es agrupar a los niños en la clase. Supongamos por ejemplo que hay treinta y un niños; se decide que éste sea el «día de apertura de la escuela», los niños se ponen a jugar y cada uno se busca un compañero; el primer día de clase propiamente dicho todos los niños (puede ocurrir que excepto uno) deberán venir a la escuela por pares, entonces se decide que ahora es el primer día y se forman los pares; se obtiene una distribución análoga a ésta («grupos del primer día»):

```

oo oo oo oo oo oo oo      oo o
oo oo oo oo oo oo oo

```

En el segundo día de clase cada par debe asociarse a otro par, para formar conjunto. Los pares que ya están reunidos deben permanecer agrupados. Se obtiene la distribución siguiente para el segundo día («grupos del segundo día»):

```

oo oo oo oo oo oo oo      oo o
oo oo oo oo oo oo oo

```

En el tercer día cada grupo del segundo día debe asociarse a un grupo análogo y se obtendrá así los «grupos del tercer día»:

```
0000 0000 0000 00
0000 0000 0000 00 00 0
```

y los del cuarto día:

```
0000
0000 0000 00
0000 0000 00 00 0
0000
```

Se imaginan juegos similares con otras «bases»: en lugar de asociarse a un compañero, cada niño tomará dos y constituirá el primer día de los grupos de tres; el segundo día se formarán grupos de nueve; los grupos se asociarán de tres en tres el tercer día y se tendrá la figura siguiente:

```
000 000 000
000 000 000 000 0
000 000 000
```

Se pasará en seguida al «juego de cuatro», al «juego de cinco», al «juego de seis», etc. Por ejemplo, en el juego de cuatro el agrupamiento se habrá formado desde el segundo día de la forma siguiente:

```
0000
0000 000000
0000 000000 000
0000
```

Un grupo del segundo día; tres grupos del primer día, el grupo del día de apertura (aislado).

En el juego de cinco, el agrupamiento será:

```
00000
00000
00000
00000 00000 0
00000
```

y así sucesivamente. Se puede también llegar hasta el juego de diez lo que daría lugar a:

```
000000000
000000000 0
000000000
```

Estos juegos facilitan las primeras experiencias que introducen a la noción matemática de potencia de una base dada. Hay lugar entonces a introducir un simbolismo, lo que puede hacerse de distintas formas. Por ejemplo, un tipo de simbolismo bastante «suave» podría ser el siguiente:

	Grupos del 4.º día	Grupos del 3.º día	Grupos del 2.º día	Grupos del 1.º día	Grupos del día de apertura
juego de 2	1	1	1	1	1
juego de 3		1	0	1	1
juego de 4			1	3	3
juego de 5			1	1	1
.....					
juego de 10				3	1
juego de 11				2	9

Un tipo de simbolismo más «enrevesado» consiste en utilizar las cifras simultáneamente en varias formas distintas, puesto que para conocer el número de personas presentes en un grupo se tiene necesidad de saber dos cosas:

1.º Cuál es el juego que se está practicando: de 2, de 5, de 4, etcétera.

2.º Qué día se ha formado el grupo: grupo del primer día, del segundo día, del tercer día, etc.

Se convendrá en describir la *magnitud* de un grupo escribiendo los dos datos anteriores: primero el número que caracteriza la naturaleza del juego, después en la parte superior derecha el número del día en que ha sido formado el grupo. Por ejemplo:

2^4 , significa: *el número de personas en un grupo del 4.º día para un juego de 2.*

4^2 , significa: *el número de personas en un grupo del 2.º día para un juego de 4.*

Estos dos números valen 16; pero esto es un caso matemático; se reconoce fácilmente que 2^3 (8) es diferente de 3^2 (9).

Se ve que el mismo número se escribe de dos formas distintas, como 2^3 y 8. Se deja a la opinión del maestro el elegir el símbolo que deba introducir en primer lugar y decidir el momento en que conviene introducirlo: no tenemos seguridad a este respecto para hacer una indicación científicamente válida.

Cada vez que se decide poner en práctica un juego, se elige un número a partir del cual se harán los agrupamientos; este número es la base del juego. El juego de a 2 utiliza la base 2, el juego de

a 3 la base 3, etc. La numeración ordinaria se funda en el agrupamiento de diez, es decir, sobre la base diez; la forma de escribir este número (o la «figura» de este número) es el símbolo 10, expresa que en el juego de a 10 diez personas u objetos forman un grupo del primer día (decena) y cero grupos del día de apertura (unidades); los grupos del segundo día o decenas de decenas forman las centenas y así sucesivamente.

h) EJERCICIOS DE CONTAR EN TODAS LAS BASES

Para consolidar los fundamentos matemáticos de la numeración, es importante estimular los ejercicios, contar en todas las bases posibles. Se pueden tomar objetos tales como fichas o alubias, y se las dispone en una larga serie de montoncitos, de forma que cada uno contenga un objeto más que el precedente; en cada montoncito se realizará el agrupamiento de acuerdo con las reglas del juego, según la base adoptada. Por ejemplo, en la base 3 se obtendrán las disposiciones de la página 58.

No es necesario alinear los montoncitos en configuraciones regulares (como han sido simbolizados en el cuadro mencionado) e incluso es mejor por diversas razones no hacerlo así. Un grupo de nueve objetos tiene siempre nueve objetos, bien estén estos objetos dispuestos en cuadro o en montón dentro de un cubilete de papel. Se podrán utilizar cubiletos o cajas de colores distintos para grupos de distinta cuantía, o tomar el material de «bloques aritméticos multibases» especialmente concebido para este fin. Variando las representaciones concretas se alcanza más fácilmente la naturaleza abstracta del concepto estudiado; si no es así las particularidades de la situación concreta toman cuerpo en el concepto, y se hace cada vez más difícil desprenderse de ellas en adelante.

o	o	o	o	o o	oo	oo	oo o
	o	o	o o	o	oo	oo o	oo o
		o	o	o o	oo	oo	oo
1	2	1 0	1 1	1 2	2 0	2 1	2 2
ooo	ooo	ooo o	ooo o	ooo o	ooo o	ooo o	ooo o
ooo	ooo o	ooo o	ooo o	ooo o	ooo o	ooo o	ooo o
ooo	ooo	ooo	ooo	ooo	ooo	ooo	ooo
1 0 0	1 0 1	1 0 2	1 1 0	1 1 1			
ooo o o	ooo oo	ooo oo	ooo oo o	ooo oo o	ooo oo o	ooo oo o	ooo oo o
ooo o o	ooo oo	ooo oo	ooo oo	ooo oo	ooo oo	ooo oo	ooo oo
ooo o	ooo oo	ooo oo	ooo oo	ooo oo	ooo oo	ooo oo	ooo oo
1 1 2	1 2 0	1 2 1	1 2 2				
ooo ooo	ooo ooo	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o
ooo ooo	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o
ooo ooo	ooo ooo	ooo ooo	ooo ooo	ooo ooo	ooo ooo	ooo ooo	ooo ooo
2 0 0	2 0 1	2 0 2	2 1 0				
ooo ooo o	ooo ooo o o	ooo ooo oo	ooo ooo oo	ooo ooo oo	ooo ooo oo	ooo ooo oo	ooo ooo oo
ooo ooo o o	ooo ooo o o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o
ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o	ooo ooo o
2 1 1	2 1 2	2 2 0					
ooo ooo oo	ooo ooo oo o	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo
ooo ooo oo o	ooo ooo oo o	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo
ooo ooo oo	ooo ooo oo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo
2 2 1	2 2 2	1 0 0 0					
ooooo ooo o	ooooo ooo o	ooooo ooo o	ooooo ooo o	ooooo ooo o	ooooo ooo o	ooooo ooo o	ooooo ooo o
ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo
ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo	ooooo ooo
1 0 0 1	1 0 0 2	1 0 1 0 etc.					

Fig. 10

Parece ser que los niños encuentran más dificultades con la base 2 que con las otras bases. Las bases 3 y 4 son aparentemente las más fáciles. De todas formas, es importante que aprendan a contar en cualquier base, a fin de alcanzar en toda su generalidad el concepto de agrupamiento por potencias sucesivas de la base, y que ésta no aparezca nunca como una receta arbitraria para comunicar las cantidades de una persona a otra.

Las «figuras numéricas» escritas bajo los montoncitos en el ejemplo precedente son naturalmente las figuras escritas en la base 3. Los niños deben aprender a escribir la figura correspondiente a un montoncito cualquiera e inversamente a encontrar el montón correspondiente a una figura dada. Se pueden organizar juegos entre los niños; uno de ellos dirá: «Yo pienso en el montoncito dos cero dos, ¿dónde está?» y el adversario debe formar el montoncito conveniente. Después se cambian los papeles, y el ganador será aquel que dé más respuestas correctas sobre cinco preguntas. Esto se puede hacer tanto con montones de fichas como con los bloques «multibases». Los grupos de una especie pueden ser alineados en correspondencia con los grupos de otra; así para la base 4 se pueden utilizar placas triangulares, puesto que cuatro triángulos equiláteros forman un triángulo semejante más grande; los triángulos más pequeños representan las unidades del «día de apertura», los de la siguiente dimensión representan los grupos del primer día, los de la magnitud siguiente los grupos del segundo día, y así sucesivamente. Se puede hacer una colección de triángulos, y hacerles corresponder un montón de fichas que contenga tantas fichas como unidades en triángulos hay.

Después de haber hecho ejercicios de contar en todas las bases, o al menos en un cierto número de ellas, se puede comenzar a asociar la noción de *cantidad* con la de *orden*. Ante una serie de co-

lecciones como la que acabamos de ver, se pueden hacer preguntas a los niños. La pregunta más sencilla consiste en mostrar dos montones contiguos y preguntar: «¿cuántas unidades más contiene la colección mayor que la pequeña?». Los niños no siempre comprenden el sentido exacto de esta pregunta; esto es frecuente en la manipulación de los bloques multibases, pues se corre el riesgo de olvidar que todas las piezas están construidas en última instancia por medio de cubos unidades.

Una pregunta más difícil consiste en mostrar dos colecciones separadas por una colección intermedia y preguntar cuál contiene más unidades, después cuántas más contiene la mayor que la otra. Para los niños no es evidente que al pasar de una colección a la siguiente el número aumenta en una unidad, que pasando de una colección a la precedente el número disminuye en una unidad, que saltando una colección el número aumenta (o disminuye) en dos unidades. Para saber esto es necesario comprender que «uno de más y uno de más hacen dos de más»; es mucho más difícil de comprender que «uno y uno hacen dos».

Hay dos aspectos en la conexión entre la cantidad y el orden:

- 1.º «más» está ligado al hecho de que se *avanza* en la siguiente, y «menos» está ligado al hecho de que se *retrocede*;
- 2.º cuando se pasa de una colección a otra, la cantidad aumenta tantas unidades cuantos pasos se *avanzan* hacia delante.

El primer punto es un aspecto cualitativo, el segundo un aspecto cuantitativo de la conexión. En el primero se trata de una *equivalencia lógica* entre:

«la colección A contiene más unidades que la colección B»
y

«la colección A está más lejos que la colección B avanzando en la serie» e inversamente, retrocediendo en la serie se encuentran menos unidades por colección. En el segundo aspecto se trata de una *igualdad matemática* entre:

«la cantidad que representa el exceso de unidades de la colección A sobre la colección B».

«el número de pasos que es necesario avanzar en la serie yendo de B a A». Es probable que la relación lógica sea captada antes que la relación matemática correspondiente.

Cuando se plantean preguntas manipulando los bloques multibases se puede preguntar, por ejemplo:

«¿Cuál es la colección que contiene una unidad más que ésta?»
«¿Cuál es la colección que contiene dos placas más que ésta?» y así sucesivamente.

Las series de cubos unidades, de barras, de placas, etc., deben encontrarse ante los niños, cuando se planteen estas preguntas; por ejemplo en la base 4 se podrá construir la serie siguiente:

1; 2; 3; 10; 11; 12; 13; 20; 21; 22; 23; 30; 31; 32; 33; 100;
101; 102; 103; 110; 111; 112; 113; 120; 121; 122; 123; 130;
132; 133; 200; 201; 202; 203; 210; 211; 212; 213; 220, etc.

Se puede comenzar mostrando el 103 y preguntando: «¿Cuál es la colección que contiene una barra más que ésta?». Es la colección que corresponde a la figura 113. Después se puede nombrar la figura numérica, en lugar de mostrar la colección, de forma que se establezca la ligazón entre el símbolo y el objeto simbolizado. Es necesario no olvidar de una vez para siempre que las

figuras numéricas se relacionan no con las colecciones reales, sino con los nombres de las unidades contenidas en estas colecciones.

Las colecciones por sí mismas son *conjuntos*.

Una propiedad de una colección es el *número* de unidades en que se puede descomponer. La figura numérica de base 4 escrita al lado de esta colección representa bajo forma simbólica la propiedad del conjunto.

A través de estos ejercicios los niños deben familiarizarse con el hecho de que un mismo *número* puede estar simbolizado por una gran variedad de *figuras*; los juegos que indicamos facilitan esta noción. El *número* treinta-y-uno es la propiedad del conjunto formado por los niños de la clase.

oooooooooooooooooooooooooooo

Pero la forma en que esta propiedad es expresada depende, entre otras causas, de la forma en que se agrupan los elementos del conjunto. Se expresará por 11111 en la base 2, por 1011 en la base 3, por 133 en la base 4, por 111 en la base 5, por 31 en la base 10, por 29 en la base 11, etc.

Se habrá anotado que el juego de a diez comporta la escritura 31 que es la más corriente. Todo el proceso de adquisición que acabamos de describir tiene por finalidad hacer capaces a los niños de *insertar* la notación decimal corriente en el esquema matemático más general y más extenso, que es el agrupamiento en conjuntos medidos por medio de las potencias de la misma base.

i) ALGUNAS PROPIEDADES FORMALES DE LAS CIFRAS

A través de los ejercicios de contar en las diversas bases será interesante suscitar algunos problemas y registrar ciertos hechos

relativos a las propiedades de las figuras numéricas y de las cifras que sirven para escribirlas. He aquí algunos ejemplos destacables de este tipo de propiedades:

En la base 3 las cifras de un número impar tienen por suma un número impar y las de un número par tiene por suma un número par.

En la base 3 todos los números divisibles por 3 no tienen unidades (es decir, que su última cifra es cero).

En la base 4 la última cifra de un número par es 0 ó 2 y la última cifra de un número impar es 1 ó 3.

En la base 4 las cifras de un número divisible por tres tienen por suma un número divisible por 3.

En la base 2 los números pares terminan en cero, los números impares en 1.

Los ejercicios de contar en las bases anteriormente citadas permitirán descubrir rápidamente estas propiedades y otras análogas.

Un ejercicio instructivo consiste en formar los dobles en la base 2, lo que conduce al proceso de la multiplicación. Para formar el doble de un número escrito en la base 2, se desplaza cada cifra un lugar hacia la izquierda y se pone un cero en el lugar de las unidades. En el caso de los treinta y un niños de la clase se tiene:

$$\text{doble de } 11111 = 111110$$

Se puede así calcular los dobles en otras bases, pero ya en la base 3 aparecen ciertas dificultades.

Cuando se duplica un número escrito en la base 2, se obtiene una serie de pares de piezas de magnitud creciente, cada magnitud está representada en adelante por un solo par. En la base 3, por

el contrario, algunas magnitudes se encontrarán dos veces, otras cuatro veces; las primeras permanecerán invariables, pero será necesario disociar los grupos de cuatro piezas y extraer tres, que se reemplazarán por una pieza de la magnitud inmediatamente superior.

j) ALGUNOS «HECHOS» RELATIVOS A LOS NÚMEROS

Para familiarizarse con las nociones tales como «dos de más», «tres de menos», etc., los niños deben desarrollar su experiencia de «hechos relativos a los números», por ejemplo con juegos de cartas o con mensajes secretos, en los cuales la elección de las cartas corresponde a problemas simples, como $2 + 3$. Por tanto será útil mostrar a los niños estos «hechos» bajo distintas formas, haciéndoles resolver pequeños problemas como el siguiente:

$$3 + 2 = 4 + \text{¿qué?}$$

que intervienen en problemas tales como en la base

$$4 \text{ 123 y 2 unidades de más} = \text{¿qué?}$$

Los hechos relativos a los números pueden enseñarse en las distintas bases: esto no es indispensable, pero entretiene. Por ejemplo en la base 3 se tiene:

$1 + 1 = 2$ $1 + 2 = 10$ $2 + 2 = 11$ y así sucesivamente, lo que se lee: «uno más uno es igual a dos», «uno más dos es igual a uno-cero», «dos más dos es igual a uno-uno», etc.

Será igualmente instructivo señalar un grupo de objetos y preguntar al niño que diga cuántos hay sucesivamente en varias bases. Por ejemplo, un grupo de siete niños dirá:

«dos-uno niños» en la base 3 (2 grupos de 3 y uno suelto);
 «uno-uno-uno niños» en la base 2 (un grupo de 4, un grupo de 2 y uno suelto);
 «uno-tres niños» en la base 4 (un grupo de 4 y 3 sueltos);
 «uno-dos niños» en la base 5 (un grupo de 5 y 2 aislados).

Muy pronto se oirá a los niños entablar conversaciones como la siguiente:

«Yo he invitado uno-uno amigos para mi aniversario.» — «Sí, ¿pero en qué base?» — «¡Tú sabes muy bien que tres es mi número preferido!». Así es como un niño sabe expresar sin ambigüedad que tiene cuatro invitados para su aniversario.

Hasta ahora hemos insistido sobre todo en esta sección sobre juegos a los que se entregan los niños, juegos cuyo objetivo final es hacer tomar conciencia de las relaciones que rigen a los números y de las propiedades que los caracterizan. Se puede decir que hemos tratado sobre todo de la fase inicial o fase de tanteo en el ciclo de formación del concepto de número. Los juegos así sugeridos han sido imaginados para acelerar el proceso de conceptualización, hasta el momento en que pueda comenzar la segunda fase, en la que aparece una actividad matemática conscientemente estructurada. A este estadio convienen muy particularmente los materiales fuertemente estructurados, especialmente los bloques multibases (1); estos materiales constituyen útiles preciosos para ayudar a los niños en el desarrollo de esta segunda fase de investigación y permitirles alcanzar al final del proceso una visión de conjunto de las propiedades de las operaciones elementales de los números.

(1) El material multibases forma parte del *laboratorio de matemáticas* (O. C. D. L.).

V. LA FASE ESTRUCTURADA: CONCEPTO DE VALOR POSICIONAL, ADICIÓN, SUSTRACCIÓN

a) CAMBIOS EN CANTIDADES EQUIVALENTES

Antes de introducir juegos más fuertemente estructurados respecto a las ideas desarrolladas en las secciones precedentes, debemos proceder a una revisión de las nociones ya aprendidas. Lo que más importa es verificar que los niños son capaces de designar las colecciones mediante números y de indicar las colecciones correspondientes a los nombres de números dados.

Por ejemplo, en la base 4 una colección que comprenda:

1 bloque, 3 placas, 2 barras y 3 unidades

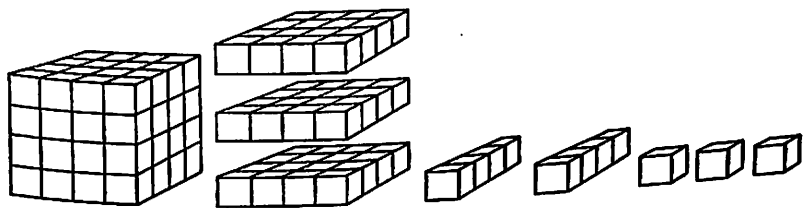


Fig. 11

debe ser identificado como conteniendo 1323 unidades, donde 1323 es la figura del número en la base 4, y se lee «uno-tres-dos-tres».

Pero dando por entendido que existen varias formas distintas de agrupar 1323 unidades, incluso con las piezas de la base 4:

6 placas, 6 barras y 3 unidades

contendrían el mismo número de unidades que anteriormente (a condición de utilizar la base 4 en los dos casos). Todas las formas posibles de reunir el mismo número de unidades constituyen los elementos de un *conjunto*; los elementos de estos conjuntos son ellos mismos también *conjuntos*, por ejemplo, los montones formados con 1323 unidades (base 4). Todos los elementos de este conjunto tienen la propiedad en común de contener 1323 unidades (base 4). Esta propiedad define el conjunto de estos conjuntos, distinguiéndolos entre el universo de las colecciones, de la misma forma que la propiedad rojo define un conjunto de piezas, cuando el universo está formado mediante las 48 piezas de la caja de material lógico. Es ahora cuando el entrenamiento en el cambio de universo comienza a producir sus frutos: los niños se encontrarán capaces de formar el conjunto de todas las colecciones posibles que correspondan a un número dado de unidades.

En efecto, deben llegar a *transformar* un elemento de este conjunto en otro *cambiando* ciertas piezas de madera por otras que representen cantidades equivalentes. Esta posibilidad o imposibilidad de construir una colección dada mediante un número limitado por medio de tales cambios es la que permitirá en definitiva saber que esta colección es (o no) un elemento del conjunto considerado; cada vez que se pueda transformar de este modo una colección en otra, se sabrá que estas dos colecciones pertenecen al mismo conjunto. Para encontrar el nombre del número común a todos los elementos de este conjunto basta con transformar la colección hasta obtener *las menos piezas posibles*. Por ejemplo, partiendo de

{6 placas, 6 barras, 3 unidades}
se forma {7 placas, 2 barras, 3 unidades}
y en fin {1 bloque, 3 placas, 2 barras, 3 unidades}

lo que representa el *mínimum* de piezas: se cambian cada vez cuatro piezas de una especie por una pieza de la magnitud superior, y la operación ya no es posible una vez más; es pues cierto que el nombre del número de colecciones de este conjunto es (1, 3, 2, 3) en la base 4. Es importante comprender que todas las colecciones del conjunto tienen el mismo nombre; por ejemplo las dos colecciones

6 placas, 6 barras, 3 unidades:
1 bloque, 3 placas, 2 barras, 3 unidades

contienen el mismo número de unidades y llevan el mismo nombre que se expresa por: 1323 en la base 4. Cualquier otra colección que contuviese el mismo número de unidades (dicho de otra manera la misma cantidad de madera) llevaría el mismo nombre; pasamos así del universo de las colecciones al de los conjuntos de colecciones.

Será necesario practicar estos cambios durante bastante tiempo, antes de que las distintas formas de composición parezcan naturales. Por ejemplo, se pedirá a dos niños que construyan cada uno con piezas de madera un edificio según su idea, utilizando exactamente la misma cantidad de madera: los dos edificios serán totalmente diferentes el uno del otro reuniendo el mismo número total de unidades. Se verificará cambiando piezas por cantidades equivalentes, hasta que se obtengan con el *mínimum* de piezas posibles; en este momento los dos niños deberán poseer el mismo

número de piezas de cada especie. Por ejemplo, operando en la base 5,

uno de los niños habrá tomado 9 placas, 7 barras, 7 unidades
y el otro 10 placas, 3 barras, 2 unidades.

Después de haber realizado los cambios hasta el *mínimum* de piezas, llegarán los dos a

2 bloques, ninguna placa, 3 barras, 2 unidades

y el número correspondiente se escribirá 2032 en la base 5, que es el nombre que representa también a las dos colecciones primitivas. Si los dos niños no hubieran llegado al mismo nombre del número, sería por no haber utilizado la misma cantidad de madera.

b) CAMBIOS CON MONEDA

Se puede organizar un juego de cambios, dando premios a las piezas utilizadas. Si se opera en la base 5, se dirá a los niños que jueguen a que están en un país donde las piezas de moneda se cambian por colecciones de cinco. Se convendrá por ejemplo que:

- 5 piezas rojas valen 1 pieza azul,
- 5 piezas azules valen 1 pieza verde,
- 5 piezas verdes valen 1 pieza amarilla, y así sucesivamente.

Para representar las piezas de moneda se tomarán fichas de color en plástico o en cartón que fácilmente se pueden encontrar. Se convendrá que se puede comprar un cubo de madera con una pieza roja. Los niños necesitarán algún tiempo para comprender que se puede comprar una barra con una pieza azul, una placa con una

pieza verde y un bloque con una pieza amarilla. Un tercer niño desempeñará el papel de banquero y hará el cambio de piezas de moneda por otras de valor equivalente. Por ejemplo, se da a cada niño 4 piezas amarillas para empezar; ¿qué pasa si uno de ellos desea comprar una placa?, ¿o dos barras?, ¿o una unidad? Pueden «razonar» como sigue:

- 5 placas valen tanto como un bloque de madera;
- 5 piezas verdes valen una pieza amarilla;
- 1 bloque se compra con una pieza amarilla;

luego (conclusión): una placa se compra con una pieza verde.

De esta forma el niño presenta en la banca una pieza amarilla: el banquero deberá darle a cambio 5 piezas verdes; el niño irá entonces hacia el vendedor de madera (cuyo papel será desempeñado por otro niño), pedirá una placa y pagará con una pieza verde.

Después de haber descubierto que se puede comprar una placa con una pieza verde, se repetirá el mismo proceso con barras y después con las unidades. También se puede jugar a la inversa: cada niño recibe un montoncito de fichas rojas (se necesitarán 250 para representar la cantidad de madera citada anteriormente: es demasiado para que un niño pueda reconocerlo sin error). El razonamiento se desarrolla entonces como sigue:

- 1 barra comprende 5 unidades;
- 1 pieza azul vale 5 piezas rojas;
- 1 unidad se compra con una pieza roja;

luego (conclusión): 1 barra se compra con una pieza azul.
Otra variante del juego consiste en comprender el valor en mo-

nada de cada pieza de madera y que los niños descubran las relaciones entre las piezas de moneda. Por ejemplo se conviene que:

- 1 unidad se compra con una pieza roja;
- 1 barra se compra con una pieza azul;
- 1 placa se compra con una pieza verde;
- 1 bloque se compra con una pieza amarilla;

Se pregunta entonces al banquero cuántas piezas rojas vale una pieza azul, suponiendo que el vendedor de madera haga pagar siempre el mismo precio por unidad, cualquiera que sea la cantidad de madera vendida.

El «razonamiento» se desarrolla como sigue:

- 1 barra comprende 5 unidades;
- 1 barra se compra con una pieza azul;
- 1 unidad se compra con una pieza roja;

luego (conclusión): 1 pieza azul vale 5 piezas rojas (ya que 1 pieza azul permite comprar la misma cantidad de madera que 5 piezas rojas).

Se combinará el juego de bloques y el juego de moneda haciendo construir a dos niños dos casas distintas que contengan la misma cantidad de madera. Los niños no deben extrañarse al ver que sus dos casas tienen el mismo valor en moneda.

Se llega por fin al juego de la banca, en el cual no se cambia más que la moneda. El problema a resolver consiste en transformar cualquier colección de piezas de moneda en una colección diferente, pero comprendiendo el menor número posible de piezas de moneda. Por supuesto, este juego puede también utilizar monedas reales.

(Para las monedas inglesas)

Si se dispone de bloques de base 2, la unidad costará 3 peniques, la pieza siguiente 6 peniques, la siguiente 1 chelín y así sucesivamente. Este sistema de moneda de base 2 permite una versión simplificada del juego anteriormente descrito.

c) PRIMER JUEGO DE VALORES POSICIONALES (CON BLOQUES MULTIBASES)

Todos los juegos precedentes conducen a los niños hacia el descubrimiento de la noción de «valor posicional». Se puede introducir otro juego con ayuda de un dado; tratándose de la base 2, por ejemplo, se escribirá sobre sus caras 0 y 1. Si se trata de la base 3, habrá dos ceros, dos unos y dos doses grabados sobre las caras (pues sobre un cubo hay seis caras). Este juego lo pueden practicar tres o cuatro niños, uno de ellos desempeñando el papel de anotar los puntos conseguidos cada vez que se tira el dado. La primera vuelta aporta el número de bloques de la potencia superior: por ejemplo, supongamos que en un juego de base 3 las piezas más grandes sean las barras de bloques, la anotación de las tiradas podrá entonces reunirse de esta forma:

NOMBRES	1. ^a vuelta (barras y bloques)	2. ^a vuelta (bloques)	3. ^a vuelta (placas)	4. ^a vuelta (barras)	5. ^a vuelta (unidades)
Miguel	1	0	2	1	1
Susana	2	0	0	1	1
Pedro	0	2	2	2	2

El ganador es aquel que obtiene la mayor cantidad de madera y no el mayor número de piezas. En este caso, es evidente que Susana es la que ha ganado el juego, Miguel es el segundo y Pedro el tercero. La mayor parte de los niños, por el contrario, dirán al leer la tabla que es Pedro quien ha ganado. Esto prueba que la noción de valor posicional no ha sido asimilado todavía: es necesario comprender que la primera vuelta es la que tiene importancia decisiva. Se puede hacer jugar separadamente a dos grupos diferentes y después cambiar los cuadros de anotaciones; cada grupo entonces debe decidir quién es el vencedor del otro grupo, sin más que leer la tabla. Si hay contestación, se reconstruyen las colecciones a partir de los cuadros de anotación y se compara experimentalmente las cantidades en cuestión.

Este juego puede realizarse en todas las bases. Es necesario comprobar antes de empezar que todos los jugadores tengan en la mano el dado conveniente. Las cifras grabadas sobre las caras del dado no deben sobrepasar el número de la base disminuido en una unidad. En la base diez, es preciso utilizar dos dados a la vez.

d) SEGUNDO JUEGO DE VALORES POSICIONALES (CON ÁRBOLES)

Otro tipo de juego a realizar paralelamente con el precedente es el *juego del árbol* (1). Sobre hojas de cartón o planchas de madera se dibujan árboles de base 2, de base 3, o de base 4. Véase en la figura 12 el dibujo de un árbol de base 2.

Unos cartoncitos en los que se halla escrito en cada uno la inicial del nombre de uno de los jugadores se sitúan en la base

(1) Este juego alcanza plena eficacia, si el *árbol* ha sido dibujado en el patio de juego o sobre el suelo de la clase para permitir a los alumnos «trepar» o descender, es decir, moverse sobre las líneas del dibujo.

del árbol. La primera tirada de dados permite a cada jugador trepar a la altura de las primeras ramas, cuyo emplazamiento está

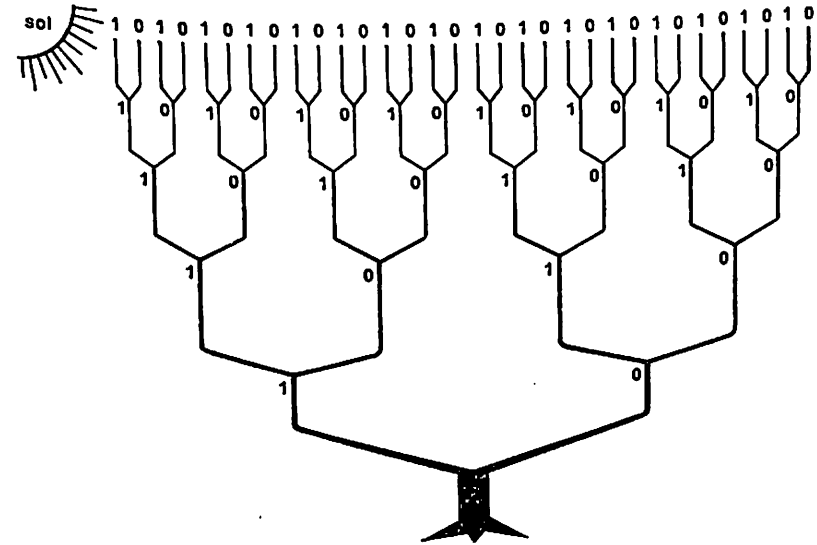


Fig. 12

determinado por la tirada del dado. De esta forma se continúa subiendo un escalón por cada tirada hasta llegar al vértice, de acuerdo con el gráfico de la figura 12:

NOMBRE	1. ^{er} nivel	2. ^o nivel	3. ^{er} nivel	4. ^o nivel
Miguel	1	0	2	1
Susana	2	0	0	2
Pedro	0	2	2	

Se explica a los niños que se trata de un árbol frutal que está expuesto al sol por su lado izquierdo, por lo tanto las frutas maduran más de prisa cuanto más a la izquierda están situadas sobre

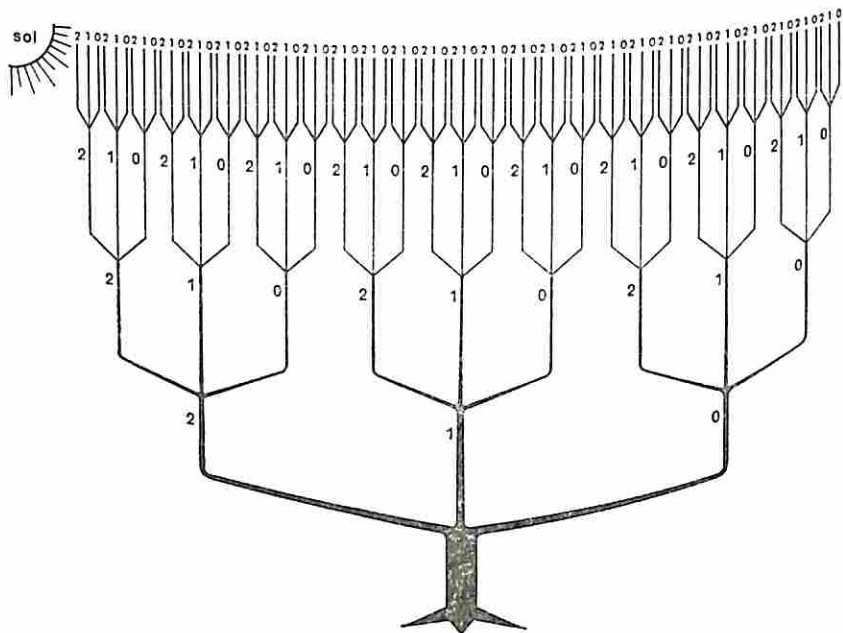


Fig. 13. Dibujo de un árbol de base 3.

la línea de las ramas superiores; el fruto que está más a la izquierda es pues el más rico en azúcar: cuanto más vamos hacia la derecha, tanto más verdes y ácidos están los frutos; el último de la derecha tiene el gusto de un limón verde. El ganador será aquel que llegue hasta el fruto más rico en azúcar. Así se ve que es

Susana la que ha ganado, seguida de Miguel, mientras que Pedro tiene el fruto más ácido.

e) COMPARACIÓN DE DOS JUEGOS DE VALORES POSICIONALES

Se puede establecer una comparación entre los dos juegos precedentes: A cada tirada de dados corresponde de una parte un recorrido ascendente a lo largo del árbol y de otra parte una colección de piezas de madera. Para que los dos juegos sean comparables, debe haber tantos niveles sobre el árbol como tipos diferentes de piezas de magnitud sucesiva. En nuestro ejemplo, el juego del árbol tiene cuatro niveles (base 3) que corresponden a la utilización de cuatro tipos de piezas: las barras de bloques, los bloques, las placas y las barras; o bien los bloques, las placas, las barras y las unidades. El caso del árbol de cinco niveles (base 2) corresponde a un juego de bloques, que comprende cinco tipos de piezas de magnitud sucesiva.

El juego del árbol permite estudiar problemas de tipo «uno de más» o «uno de menos». Por ejemplo, en la base 3 se obtiene la serie de tiradas (1, 2, 2, 2). ¿Cuál es la serie de tiradas que debe hacer el adversario para desplazar al primero o tener un lugar sobre el árbol? (Es visiblemente 2, 0, 0, 0.) Esta pregunta es difícil, pues supone previamente una comprensión perfecta de las propiedades de valor posicional. Se podrán plantear de la misma forma problemas del tipo «dos de más» o «dos de menos».

Cuanto precede se puede comparar con la búsqueda de una colección que sobrepase en una unidad una colección dada. Así en la base 3:

1 bloque, 2 placas, 2 barras, 2 unidades

la colección buscada es: 2 bloques, que corresponde a la figura numérica 2000. De esta forma se pueden familiarizar con la práctica de los nombres de los números que corresponden a diversas situaciones, y por otro lado a familiarizarse con la práctica de los recorridos ascendentes a lo largo del árbol. Todavía más, aislando los nombres de número, se estudia directamente la correspondencia entre las colecciones de piezas de madera y los recorridos en el árbol. Un niño indicará un punto en el vértice del árbol, otro deberá formar la colección de piezas de madera que corresponde al recorrido que conduce a este punto; inversamente, un niño formará una colección de piezas de madera, otro deberá encontrar el recorrido correspondiente sobre el árbol.

f) ADICIÓN

Tras haber encuadrado en su lugar el concepto de valor posicional por medio de los juegos que acabamos de describir, se puede utilizar este concepto para introducir la adición y la sustracción en su forma estructurada. Ya se han efectuado adiciones de números pequeños, y ya se ha tenido ocasión de alcanzar esta operación de adición de conjuntos disjuntos. Se puede ahora formar la reunión de dos conjuntos de piezas de madera correspondiente a dos tipos numéricos distintos.

Por ejemplo, tomemos las dos colecciones siguientes en la base 4:

1 bloque, 2 placas, 3 barras, 2 unidades; nombre del número: 1232.

1 bloque, 3 placas, 3 barras, 2 unidades; nombre del número: 1332.

La *reunión* de estas dos colecciones contendrá:

2 bloques, 5 placas, 6 barras, 4 unidades; nombre del número:

3230, ya que la colección así formada se puede transformar en otra que pertenezca a la misma clase numérica conteniendo:

3 bloques, 2 placas, 3 barras, 0 unidades.

En efecto, reuniendo los dos conjuntos anteriormente citados:

bloque, placa, placa, barra, barra, barra, unidad, unidad;

bloque, placa, placa, placa, barra, barra, barra, unidad, unidad;

se obtiene un conjunto reunión, que contiene efectivamente:

2 bloques, 5 placas, 6 barras, 4 unidades.

Este conjunto no es *idéntico* al que hemos descrito anteriormente (3, 2, 3, 0), pero se puede transformar uno en el otro siguiendo las reglas de cambio; así, aunque no sean idénticos, las dos colecciones contienen el mismo *número* de unidades y esta propiedad de equivalencia es la que permite saber que las dos colecciones pertenecen a la misma clase numérica designada por la figura 3230 en la base 4.

	Grupo del 4.º día	Grupo del 3.º día	Grupo del 2.º día	Grupo del 1.º día	Grupo del día de apertura
Clase A		1	2	0	1
Clase B		1	1	2	2
Reunión de dos clases	1	0	1	0	0

Se pueden también realizar adiciones según el mismo proceso en juegos de base 2, base 3, base 4, etc., en las situaciones de agrupamiento de niños indicadas anteriormente (pág. 53). Dos clases de niños, agrupadas ambas según el juego de a 3 por ejemplo, se reúnen para una lección común. ¿Cómo se agruparán en esta reunión de tipo general? Se podrá operar según el cuadro anterior.

Se puede comparar esta operación con el ejercicio de adición correspondiente efectuado sobre los bloques asimilando los cubos unidades a los niños.

g) SUSTRACCIÓN

Ya en los casos elementales hemos asociado la sustracción de números con la operación correspondiente sobre conjuntos; la diferencia entre dos números corresponde a la diferencia entre dos conjuntos. Parece fácil introducir el problema presentando al niño un bloque y preguntándole lo que quedará, si se lleva una placa; al principio será necesario reemplazar el bloque por el número conveniente de placas, después retirar una placa. Se complica la operación retirando del bloque una barra o incluso una unidad. Después se retirarán varias piezas a la vez; finalmente se pueden efectuar sustracciones como ésta: De un bloque se retiran

2 placas, 1 barra, 3 unidades
(base 4)

queda 1 placa, 2 barras, 1 unidad
(base 4)

Se irán complicando progresivamente los problemas, por ejemplo, partiendo de una colección que comprenda varias piezas, para

retirar otra colección. Nunca hay que perder de vista a lo largo de este estudio que no se trata de quitar realmente madera a partir de un bloque, como podría hacerse con una sierra; se trata de formar la diferencia entre un conjunto equivalente al primer bloque y el conjunto equivalente a la colección que hay que sustraer. Así en un bloque el número de unidades es igual al número de unidades contenido en:

3 placas, 3 barras, 4 unidades;

y de este conjunto podemos retirar un subconjunto formado de:

2 placas, 1 barra, 3 unidades.

La diferencia de los conjuntos contiene 1 placa, 2 barras, 1 unidad. Expresando el número de unidades mediante signos en la base 4, resulta:

para el boque inicial	1000
para el subconjunto a sustraer	213
para el conjunto diferencia	121

Se puede invertir el problema y preguntar cuánto hay que añadir al número de unidades representado por 213 para obtener el número de unidades representado por 1000 (bien entendido, siempre en la base 4). Se encontrará la respuesta a esta pregunta situando el conjunto 2 placas, 1 barra, 3 unidades al lado de un bloque: se verá casi inmediatamente lo que falta en el primer conjunto, para obtener tantas unidades como en el segundo conjunto formado por un bloque único.

h) AGRUPAMIENTOS UTILIZANDO VARIAS BASES

Todos los problemas precedentes encuentran su equivalente en las situaciones relativas al agrupamiento de niños de una clase según las reglas de los diversos juegos de agrupamiento. Ciertamente llegará el momento en el transcurso de estos juegos en el que un niño pregunté por qué los grupos formados tienen siempre la misma magnitud: en efecto, esto no es absolutamente necesario y se pueden modificar voluntariamente las reglas de agrupamiento. Por ejemplo, se puede decir:

- el día de apertura todos los niños están aislados;
- el primer día se forman grupos de doce (tantos como sea posible);
- el segundo día se forman grupos de 36... etc.

Si existen cincuenta alumnos en la clase, el agrupamiento del segundo día será el siguiente (1):

grupos del 2.º día	grupos del 1.º día	grupos del día de apertura
1	1	2

Evidentemente se podrán introducir varias reglas correspondientes a las medidas de peso, capacidad, moneda, etc. Así se asegurará mediante este método que todas estas situaciones variadas sean

(1) Para los países en que las medidas anglosajonas están en uso podemos señalar que el problema corresponde exactamente al de la repartición de 50 pulgadas; un grupo contendrá 36 pulgadas (o sea una yarda), otro 12 pulgadas (o sea un pie) y quedarán 2 pulgadas aisladas.

consideradas por los niños como aspectos particulares de un mismo esquema general, y no como datos independientes, que es necesario aprenderlos de memoria separadamente. Así se llegará a la tercera y última fase del ciclo de formación del concepto: el de la *confirmación* y el de la *explotación*.

VI. APLICACIONES PRÁCTICAS DE LOS AGRUPAMIENTOS

Al llegar a la escuela, los niños ya están familiarizados con comparaciones como: «esto es más pesado que aquello», o «esto está más lejos que aquello» o «esto es más caro que aquello». Esto son experiencias cualitativas de la desigualdad; aún será necesario esperar mucho tiempo, antes de que los niños sean capaces de medir estas diferencias. Se hará referencia a los ejercicios preliminares antes sugeridos (pág. 80), en el curso de los cuales los niños deben no solamente decir si una colección es más grande que otra, sino evaluar la diferencia bajo la forma de una cantidad determinada de cubos unidades. Pero antes de abordar estos ejercicios con provecho, los niños deben ante todo (por medio de juegos) aprender a distinguir si dos colecciones contienen o no el mismo número de unidades. A este efecto se utilizarán las operaciones de cambio, y se proseguirán hasta el momento en que los niños sepan tomar por sí mismos las determinaciones relativas a estas situaciones.

Cuando se estudia la *medida de longitudes*, es importante darse cuenta de que la unidad de medida es arbitraria. La medida consiste en establecer la relación de dos longitudes dadas, una de las cuales se llama «la longitud unidad». Es absolutamente indiferente, desde el punto de vista matemático, tomar por «longitud unidad»

el metro patrón, el centímetro, la yarda, el pie, la milla, el año-luz, o bien la longitud de un lápiz o de un cuaderno. ¿Cuántos lápices se pueden colocar uno tras otro a lo largo del escritorio? Si el número no es exacto, se puede contar con otras «medidas»: gomas, botones o cualquier otro objeto que tengamos a mano; pero dando por entendido que es necesario comprobar que todos los lápices sean de igual longitud, así como las gomas o los botones. Después de haber procedido a estas operaciones de medida, será útil, en cada país, hacer saber a los niños que existen ciertos patrones oficiales de medida, tales como los centímetros, los pies, etc. Será interesante comparar los sistemas de unidades en uso de un país con los utilizados en otros países, por ejemplo, el sistema de centímetros y metros con las pulgadas, yardas y pies. Así los niños no correrán el riesgo de atribuir un carácter sagrado al sistema oficial de su país.

Se provocarán «situaciones de longitud» facilitando a los niños un gran número de reglas de madera de un centímetro, un decímetro y un metro; tendremos por ejemplo que:

2 longitudes de un metro, 27 longitudes de un decímetro y 14 longitudes de un centímetro

miden la misma longitud que:

3 longitudes de un metro, 15 longitudes de un decímetro y 34 longitudes de un centímetro.

Se buscará el menor número de piezas que permitan medir la misma longitud, o dicho abreviadamente: (4, 8, 4).

La misma situación se puede encontrar respecto a *los pesos*. Se tomará una balanza de platillo de modelo corriente (o un mo-

delo fabricado en el taller de la escuela) y se emplearán pesos señalados. Cuando el fiel está en equilibrio es que los dos platillos contienen el *mismo peso*.

Por ejemplo, se pondrá sobre un platillo 20 pesas de una onza y 2 de una libra y sobre el otro platillo 3 pesas de una libra y 4 de una onza; el equilibrio se ha realizado, ya que las dos colecciones tienen pesos iguales. La segunda colección es la más simple posible, pues el *número de pesas* será: 3 libras, 4 onzas para las dos colecciones.

Se efectuarán los mismos ejercicios con gramos, decigramos, hectogramos y kilogramos.

Las medidas de capacidad (pintas, cuartos y galón) pueden introducirse de la misma forma. Se establecerá la equivalencia de dos volúmenes, y el nombre del volumen se facilitará mediante la expresión más simple. (1)

Se efectuarán los ejercicios en litros, hectolitros, decilitros y centilitros.

Si se dispone de medidas escalonadas, los niños encontrarán el medio de pesar distintas cantidades de agua, haciendo la tara de un recipiente vacío situado sobre una balanza, y determinando las pesas que sean necesarias añadir para restablecer el equilibrio, cuando el recipiente está lleno. En el sistema métrico se descubrirá inmediatamente que un centímetro de agua pesa un gramo,

(1) Ejemplo para los países donde las medidas anglosajonas están en uso: tomando la serie de botellas siguientes: $\frac{1}{2}$ pinta, 1 pinta, 1 cuarto, $\frac{1}{2}$ galón, 1 galón, 2 galones, se obtendrá un excelente ejercicio poniendo en juego el sistema de numeración de base 2. Si por ejemplo se llenan de agua 3 botellas de $\frac{1}{2}$ pinta y 5 botellas de 1 pinta, se tratará de envasar la misma cantidad de agua en el menor número posible de botellas y se encontrará: 1 de $\frac{1}{2}$ galón, 1 de cuarto, 1 de $\frac{1}{2}$ pinta, es decir, 1101 en la base 2, siendo la unidad la media pinta.

o más rápidamente todavía que un litro de agua pesa un kilo. En el sistema de medidas anglosajón las relaciones numéricas entre pesos y capacidades son más complejas: se necesitará mucho tiempo para que los niños se den cuenta de que existe una relación, y todavía más tiempo para que establezcan esta relación.

Después de haber establecido las relaciones de equivalencia en todas estas situaciones, se efectuarán operaciones prácticas de medidas. Se podrán comparar longitudes; se medirá especialmente las tallas de los niños y se les clasificará según su estatura; se verificará experimentalmente colocando a los niños en fila por el orden de su talla: si no ha habido error, se deberá ver cómo decrecen regularmente las tallas a lo largo de la fila.

Se calcularán las sumas y las diferencias entre longitudes, pero siempre en un contexto de situaciones reales, como por ejemplo en el ejercicio siguiente (que hace intervenir a la vez la adición y la comparación de longitud):

«Deseo situar este escritorio y esta mesa uno a continuación de otro a lo largo de esta pared; veamos cuál es la longitud de esta pared y si esta longitud es suficiente, sin desplazar los muebles en cuestión.»

Se pueden imaginar ejercicios análogos relativos a pesos:

«Tomo el avión para Madrid y tengo derecho a 20 kilogramos de equipaje. Mi maleta vacía pesa 1 kilo, las ropas que quiero llevar pesan 7 kilos y además quiero llevar estos libros. ¿Me encontraré por encima del límite de los 20 kilos? ¿Si pasa de los 20 kilos, qué libros deberé dejar?»

Se pueden imaginar otros ejercicios sobre capacidades mediante cajas de botellas de leche destinadas a la escuela, haciendo interve-

nir a los alumnos ausentes, los recién llegados, etc. Conviene evitar los ejercicios artificiales, tales como los que se encuentran en los manuales escolares, y multiplicar en cambio los ejercicios prácticos sobre situaciones concretas de la vida corriente, hasta que el proceso de confirmación de los conceptos esté terminado. (1)

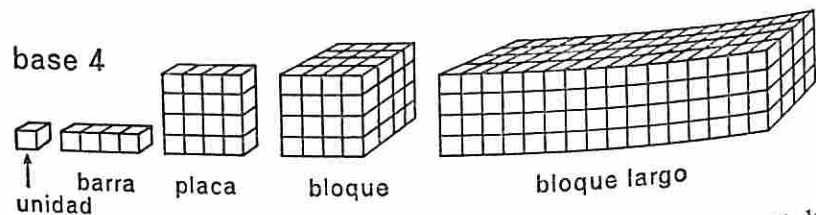
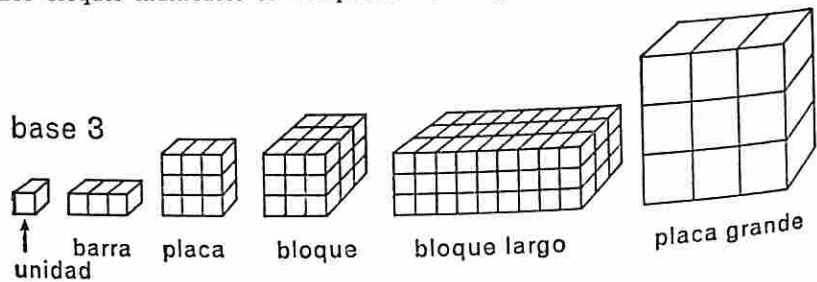
(1) Se encontrarán numerosos ejercicios «motivados» en «Los primeros pasos en Matemáticas», tomo III: «Exploración del espacio y medidas prácticas» (O. C. D. L.). Edición española en curso en esta misma colección.

BIBLIOGRAFÍA

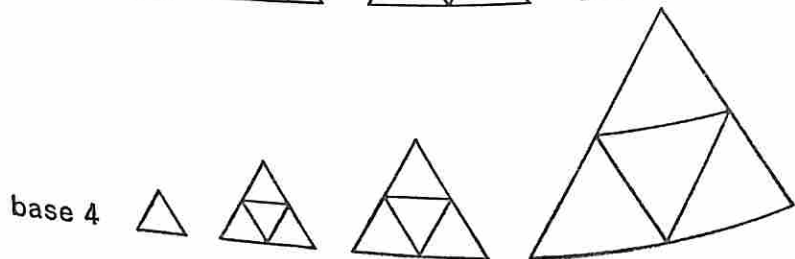
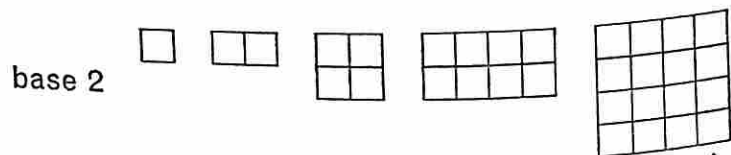
1. WILLIAM HULL: *Concept Work with young children*, vol. n.º 2 del Bulletin de l'I.S.G.M.L., abril 1963.
2. D. ARMINGTON, W. HULL, A. MALLET: *Further exploration with five years old*, vol. 1, n.º 3, del Bulletin de l'I.S.G.M.L., julio 1963.
3. PAUL ROSEMBLOOM: *Materials of the Minnesota School Mathematics Project*, University of Minnesota, Minneapolis, Minn. EE.UU. (En este texto se encuentran historias y ejercicios sobre el desarrollo de los conceptos de conjuntos y operaciones sobre conjuntos, también sobre los fundamentos de la idea de número y sobre experiencias geométricas.)
4. PATRICK SUPPES: *Sets and Numbers. Nos. 1, 1A, 2, 2A, 3, 3A*, L. W. Singer Company, New York, N.Y., EE.UU. (Contiene ejercicios graduados cuidadosamente sobre la formación del concepto de conjunto. Las operaciones sobre conjuntos y la formación de los conceptos de números, fundados sobre la cardinalidad.)
5. L. G. W. SEALTY: *Creative use of Mathematics in the junior school*, Basil Blackwell, Oxford, 1960.
6. Z. P. DIENES: *Multibase Arithmetic*, en «Grade Teacher», abril 1962.
7. Z. P. DIENES: *Building up Mathematics*, Hutchinson, Londres, 1960.
8. Z. P. DIENES: *Mathematics in the Primary School*, MacMillan, Melbourne, 1964.
9. SIR F. BARTLETT: *Thinking*, Londres, 1960.
10. ALLEN LAYMAN: *Law Scholl*, Yale University, Newhaven, Conn., EE.UU.

Anexo A

Los bloques multibase se componen de las piezas siguientes:



Según el mismo principio, existe en base 2, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 unidades, material en hojas de plástico.



Anexo B

Lista de Centros afiliados al I.S.G.M.L.
(Grupo Internacional de Estudio para la Enseñanza de las Matemáticas)

Leicestershire Mathematics Project,

Secretario: L. G. W. Sealy, *St. Helen's Cottage, Warrens Hill, Coalville, Leicester, Gran Bretaña.*

Surrey Mathematics Research Group,

Secretario: A. E. Adams, *Surrey County Council, Education Dpt. County Hall, Kingston-upon-Thames, Surrey, Gran Bretaña.*

National Foundation for Educational Research for England and Wales,

Secretario y director: Dr. W. D., *Wall, 79, Wimpole Street, Londres, W.1.*

C.E.P.A.M., Centre d'Etudes du Processus d'Apprentissage en Mathématique,
Secretario: R. Biemel, *65, rue Claude-Bernard, Paris-5.*

Institut de Psychologie de Florence,

Secretario y director: Alberto Marzi, *Via della Colonna, 17, Florencia, Italia.*

M. N. U. Recklinghausen, République fédérale d'Allemagne,

Secretario: Oberstudienrat Werner Boeddeker.

Budapest Mathematics Project,

Secretario: Tomás Varga, *6-8 Muzeum körút, Budapest VIII, Hungría.*

Philippines Mathematics Research Group,

Secretario: Ron Carlisle, *Peace Corps, Baguio City, República de las Filipinas.*

Adelaide Mathematics Project,

Secretario: Zoltan P. Dienes, *Educational Dept. University of Adelaide, S. A. Australia.*

Hilo Mathematics Research Group,

Secretaria: Mary Matayoshi, *Book, Nook, Hilo, Hawaii.*

Minnesota School Mathematics Center,

Secretario y director: Paul Rosenbloom, *University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, EE.UU.*

Madison Project,

Secretario y director: Robert Davis, *Webster College, St. Louis, Missouri, EE.UU.*

Institute of mathematics in the Social Sciences,

Secretario y director: Patrick Suppes, *Stanford University, Stanford, California, EE.UU.*

Australian Council for Educational Research,

Secretario: S. Dunn, *Melbourne, Australia.*

US Independent Schools Research Group,

Secretario: William Hull, *40, Reservoir Street, Cambridge, Mass., EE.UU.*

Université de Sherbrooke,

Sherbrooke, Québec, Canadá.

Education nouvelle,

Secretario: Gontran Trottier, *306 Est, rue Sherbrooke, Montréal 18, Canadá.*

Bureau central de l'ISGML:**Central Office of ISGML:**

200 California Avenue, Palo Alto, California, EE.UU.
Secretario: Adrian Sanford.

INDICE

<i>Presentación</i> , por Álvaro Buj Gimeno	VII
<i>Prefacio</i>	1
I. INTRODUCCIÓN	5
II. LOS CONJUNTOS Y LAS OPERACIONES CON LOS CONJUNTOS	9
a) Reunión de conjuntos	12
b) Intersección de conjuntos	13
c) Conjuntos complementarios	14
d) Diferencia de dos conjuntos	18
.	21
III. ATRIBUTOS Y OPERACIONES LÓGICAS	21
a) Descripción del material lógico	23
b) Juegos preliminares	25
c) Conjunciones	27
d) Disyunciones	28
e) Implicaciones	31
f) Simbolismo lógico	36
g) Relación entre la lógica y los conjuntos	36
h) Desarrollos ulteriores	39
IV. EL NÚMERO Y EL ORIGEN DE SU NOTACIÓN	39
a) El nivel de abstracción del número	41
b) La adición de números	42
c) La sustracción de números	43
d) Multiplicación de números	

e)	Pares de números y conjuntos formados por estos pares	45
f)	Introducción de potencias	49
g)	Proceso a seguir en el estudio de las potencias	53
h)	Ejercicios de contar en todas las bases	57
i)	Algunas propiedades formales de las cifras	62
j)	Algunos «hechos» relativos a los números	64
V.	LA FASE ESTRUCTURADA: CONCEPTO DE VALOR POSICIONAL, ADICIÓN, SUSTRACCIÓN	67
a)	Cambios en cantidades equivalentes	67
b)	Cambios con moneda	70
c)	Primer juego de valores posicionales (con bloques multibases)	73
d)	Segundo juego de valores posicionales (con árboles)	74
e)	Comparación de dos juegos de valores posicionales	77
f)	Adición	78
g)	Sustracción	80
h)	Agrupamientos utilizando varias bases	82
VI.	APLICACIONES PRÁCTICAS DE LOS AGRUPAMIENTOS	85
	<i>Bibliografía</i>	91
	<i>Anexo A</i>	92
	<i>Anexo B</i>	93
	<i>Índice</i>	95



***enseñanza
de la
matemática***

I

