dienes-golding

3

PRIMEIROS PASSOS EM MATEMÁTICA

exploração do espaço

HERDER

EXPLORAÇÃO DO ESPAÇO

E

PRÁTICA DA MEDIÇÃO

Z. DIENES e E. W. GOLDING

Os primeiros passos em Matemática

III

EXPLORAÇÃO DO ESPAÇO E PRÁTICA DA MEDIÇÃO

EDITÔRA HERDER
SÃO PAULO
1969

Tradução de Euclides José Dotto, feita segundo a [illegible] francesa, publicada com o título: *Les premiers pas en mathématique: Exploration de l'espace et pratique de la mesure*, por O.C.D.L. - Paris, 1966.

O título original é: *First years in mathematics: Exploration of space and practical measurement.*

Impresso na República Federativa do Brasil
Printed in the Federative Republic of Brazil

ÍNDICE

PRIMEIRA PARTE

A EXPLORAÇÃO DO ESPAÇO

APÊNDICE I

JOGOS CONDUCENTES A ALGUMA COMPREENSÃO DA GEOMETRIA

SEGUNDA PARTE

PRÁTICA DA MEDIÇÃO

APÊNDICE II

JOGOS DESTINADOS À INTRODUÇÃO DA PRÁTICA DA MEDIÇÃO

JOGOS CONDUCENTES À COMPREENSÃO DA MEDIÇÃO DE COMPRIMENTO

JOGOS CONDUCENTES À COMPREENSÃO DA MEDIÇÃO DO TEMPO

JOGOS CONDUCENTES À COMPREENSÃO DA CAPACIDADE

JOGOS CONDUCENTES À COMPREENSÃO DO PÊSO

JOGOS CONDUCENTES À COMPREENSÃO DA ÁREA

PRIMEIRA PARTE

A EXPLORAÇÃO DO ESPAÇO

1. Idéias fundamentais

A geometria é a exploração do espaço. Uma criança, desde seu nascimento, explora o espaço. Primeiramente olha-o, depois sonda-o com seus braços e pernas visando a descoberta, e enfim nêle se desloca. É preciso um tempo bastante longo para desenvolver as idéias de perspectiva, de distância, de profundidade, noções como as de *dentro* e *fora*, *diante* e *atrás*, *antes* e *depois*, e assim por diante. Quando a criança chega à escola, algumas destas idéias estão bastante adiantadas — precisa estimulá-las e ampliá-las multiplicando as experiências ao alcance dela. Mas, antes disto, a professôra deverá esforçar-se em descobrir a que ponto cada criança chegou individualmente, os conceitos que já se formaram. Felizmente são as próprias lições destinadas a orientar o ensinante nesta descoberta que podem ser utilizadas para auxiliar as crianças menos experientes na formação conceptual. Em todo o caso, lembremo-nos sempre de que os conceitos não se ensinam — tudo o que se pode fazer é criar, apresentar as situações e as ocorrências que ajudarão as crianças a formá-los. No jardim de infância, é sobretudo à formação de conceitos que precisa consagrar o ensino, muito mais que à aquisição de fatos.

As primeiras noções de geometria não têm nada a ver com a medida. Uma criança preocupa-se muito pouco com a distância exata dos objetos, ou de seus movimentos, ou do ângulo sob o qual as coisas são vistas. Tudo isso, ela o nota, de alguma maneira, implìcitamente. O que a interessa especialmente é procurar as coisas — deslocar-se no espaço para fazer aquilo que deseja. O que importa é que, se há certas coisas, por exemplo, bombons em uma caixa, precisa abrir esta caixa para poder tirá-los. É, portanto, uma descoberta importante para ela que haja caixas abertas e caixas fechadas. As portas às vêzes estão abertas, às vêzes fechadas, e ela dá-se conta de que não pode nem entrar em uma sala e nem dela sair a não ser por uma porta — ou janela — aberta. Por isso a idéia de "abertura", de "passagem", inclui-se entre as que lhe importam.

Entre idéias de mesma ordem, encontra-se a do "verso das coisas". Ainda bebêzinho, surpreendemo-lo interessando-se pelo que há do outro lado da porta aberta e, mais tarde, ao terminar de desenhar em um lado de uma fôlha, descobre que pode virá-la e desenhar no outro lado também. Da mesma forma dá atenção a "dentro" e "fora", às "aberturas", a "diante" e "atrás", etc. É por essas noções, qualificadas em geometria de "topológicas", que é preciso começar aqui.

2. Topologia

Topologia é o estudo das propriedades do espaço não afetadas por deformações contínuas. Por conseguinte, se quisermos ficar dentro do domínio da topologia, é-nos permitido encurvar ou distender as fronteiras, mudar-lhes a forma à vontade, mas não rasgá-las, nem arrebentá-las, tampouco operar algum furo na superfície. Se tomarmos, por exemplo, um balão inflado, podemos inflá-lo ainda mais, ou deixar escapar o ar. Nestas operações com o balão, ficamos dentro dos limites da topologia. Logo que a válvula esteja fechada, tem-se ainda um balão com ar dentro, podendo ser utilizado, tal qual é, num jôgo. Mas, a partir do momento em que se faz nêle um furo, ou se abre a válvula, com a fuga do ar, não é mais um balão — pelo menos não um balão que se lance ao ar para jogar. Se o inflarmos, mas deixando aberta a válvula, ou não fechando a saída com

um barbante, êle se propulsa sòzinho por reação. É um jôgo muito divertido para as crianças, senão para seus pais, que acham nisso uma distração, pois mostra a diferença que há entre uma coisa sem furo e a mesma com furo. A diferença é importante — quando o balão tem um orifício, é um avião a jato, quando sem, é um simples balão.

Outra idéia muito importante, sob o aspeto topológico, é a de *fronteira*. Depois de uma criança jogar num jardim circundado por um muro, sabe que não pode sair de lá sem passar por cima dêste muro. É uma experiência bastante diferente da que se adquire em uma sala com porta. Pode-se trepar o muro e, sem necessitar abrir a cancela, encontrar-se do lado de fora, quando seria impossível num quarto o mesmo processo, porque não se pode transpor a parede e nem passar por cima da porta.

O que fecha o jardim é uma fronteira que confina um espaço a duas dimensões, isto é, uma superfície, ao passo que as paredes, o soalho, o fôrro, a porta e as janelas constituem fronteiras de um espaço a três dimensões. As fronteiras de um espaço a três dimensões são em si de duas dimensões — as paredes, o chão, são superfícies planas (de duas dimensões). Então, para fechar um espaço a três dimensões (volume), precisa espaços a duas dimensões (superfícies). Mas para encerrar um espaço a duas dimensões, como o jardim, é suficiente um espaço com uma só dimensão (por exemplo, uma linha mais ou menos curva, traçada ao redor do jardim, para assinalar onde termina e onde começam os jardins vizinhos). Mesmo que não haja barreira, há fronteira, e a criança o sabe muito bem, pois entende a proibição de franqueá-la para ir à casa dos vizinhos sem pedir autorização. No jardim, ela pode ir para diante, para trás, para o lado, etc., mas não pode flutuar no ar, pois, se fôsse o caso, não estaria mais no jardim.

No quarto, pelo contrário, ela poderia trepar, inclusive pairar no ar e permaneceria ainda no quarto. Para sair do quarto, ser-lhe-ia necessário passar através da parede, ou do fôrro, ou pela abertura constituída pela porta, ou janela. Existe grande diferença entre o espaço encerrado por um quarto e o delimitado por um jardim, e há uma não menor diferença entre as fronteiras dos mesmos espaços.

Podem-se oferecer às crianças alguns jogos interessantes com as fronteiras. Suponhamos ter que lidar com um espaço de duas dimensões; um jardim, um pátio. Consideremo-lo tão grande que não se lhe possam ver as fronteiras em nenhuma direção e tracemos-lhe fronteiras a nosso arbítrio. Por exemplo, disponhamos ao acaso no chão certo número de aros com diâmetros variados, cuidando para que não se toquem. Pode-se colocar aros pequenos dentro de grandes. Depois diga-se às crianças que se repartam como bem entenderem, algumas externamente a qualquer aro, outras no interior dum aro isolado, terceiras entre um aro pequeno e um grande. Pergunta-se então à classe se é possível, por exemplo, a Pedro ir visitar Francisca sem atravessar nenhuma "fronteira". Repita-se o exercício diversas vêzes, nomeando crianças diferentes — às vêzes será possível, outras vêzes não.

A professôra vai sugerir, por exemplo, que, no caso de se poder ir duma repartição a outra sem cruzar fronteira alguma, talvez as duas partes estejam no mesmo domínio. Se tal não é viável, pelo contrário, é que estas duas partes não estão no mesmo domínio. Aliás, podemos perguntar-nos quantos domínios há no espaço considerado. Alguns dêstes domínios são interiores aos aros, outros não o são. Outros ainda serão de forma circular. Domínios há que estão no exterior dum aro pequeno mas no interior dum grande. As crianças não tardarão, em presença de qualquer número de aros jogados ao chão, em objetivar quantos domínios ficam determinados, seja na aula ou no pátio. Para facilitar-lhes a compreensão, sobretudo às mais lentas, pode-se representar numa fôlha de papel o chão da aula com os aros e pintar de côres diferentes os diversos domínios.

Desde que esteja bem estabelecido o que precede, após ter escrito, quem sabe, no quadro-negro, o número de domínios,

pode-se entrar no jôgo seguinte. Qualquer ponto da circunferência de um aro é ponto de uma fronteira. Tome-se, pois, um ponto duma fronteira e, partindo dêste ponto, tire-se outra fronteira, quer usando um cascalho, quer uma barra de giz, até atingir outro ponto qualquer da mesma fronteira ou de uma segunda fronteira. Após isto, pergunta-se às crianças se conseguem fazer o mesmo passeio que antes, sem franquear nenhuma fronteira. A resposta talvez seja que não é mais possível, porque se tornou necessário atravessar a nova fronteira, mas pode também suceder que se possa atingir o mesmo ponto de destinação por outro itinerário, que evite atravessá-la. Se fôr êste último o caso, as crianças verão que não foi criado nenhum domínio suplementar e que se pode muito bem acrescentar fronteiras sem acrescentar domínios. Isto feito, pergunte-se às crianças se há meios de aumentar o número de fronteiras, sempre sem acrescer os domínios. Se o número inicial de domínios fôr bastante elevado, precisará talvez certo tempo antes de chegar a uma impossibilidade. Como as crianças tinham começado com a idéia de que se poderia acrescentar fronteiras indefinidamente, é com surprêsa que toparão com o fato. Algumas continuarão, aliás, a experimentar — é preciso deixá-las fazer. Que tracem linhas mais e mais complicadas, contornando em espirais as fronteiras já assentadas, não se apercebendo que suas tentativas são vãs — virá o momento em que, à fôrça de tentar sem resultado, se implantará nelas a convicção de que é impossível. Com relação aos mestres, deixamos-lhes descobrir êles mesmos as leis que regem esta situação — número de domínios criados com determinado número de aros, número de fronteiras suplementares que podem, em cada caso, traçar-se sem aumentar o número de domínios, etc. Isto é inteiramente alheio às crianças, das quais não se pode exigir, a esta idade, tais pesquisas. Cabe a elas tão-sòmente um jôgo com os espaços, destinado a fazê-las refletir.

Pode-se propor-lhes também uma espécie de "puzzle". A maioria delas já viu jogos de paciência dêste gênero, onde se ajustam peças de formas e côres diferentes. O resultado assemelha-se bastante com o mapa político do Brasil, onde as côres distinguem os Estados. Mandam-se as crianças primeiro construir um "mapa" dêste tipo, de forma qualquer, com várias côres. Depois se lhes propõe recomeçar, mas com apenas seis côres, e com a recomendação de que dêem um jeito de não aparecerem dois "países" da mesma côr lado a lado, "para não enganar-se". Enfim, último jôgo, se lhes pede repitam mais uma vez, empregando o menor número possível de côres diferentes. Pouco importam as formas que escolherem, contanto que realizem ao menos cinco divisões (de fato, esperam-se muito mais!).

Pode-se sempre (no estado atual de nosso conhecimento) atingir êsse resultado com quatro côres, mas não se conseguiu ainda demonstrá-lo. Ninguém ainda foi capaz de realizar um agrupamento dêste gênero que *necessite* mais de quatro côres e, apesar disso, nunca foi estabelecido que êste número seja suficiente. É um problema matemático até hoje sem solução.

Incitar-se-ão em seguida as crianças a fazer outros desenhos que precisem ainda menos côres — duas, depois três, depois quatro, complicando as linhas. Se elas julgam necessitar cinco ou seis côres, sejam convidadas a reconsiderar sua escolha e a ordem na qual foram dispostas, até que baixem a quatro.

Assim, nossas crianças interessaram-se no que chamamos de propriedades "topológicas" do espaço, nas fronteiras, nas "portas", nos espaços e nos "domínios", sem atenção especial na medida. Encontram-se abaixo, pág. 20, outros jogos destinados a favorecer o desenvolvimento dêstes conceitos. Note-se que vão terminar, progressivamente na medida, mas não imediatamente. A observar também que se faz às crianças traçar linhas e formas, fronteiras e outras coisas interessantes, mas que, a êste estádio, é vivamente aconselhado executar tôdas estas operações no chão, a fim de que as crianças possam contorná-las, percorrê-las, ou franqueá-las a pé. Não estão ainda mentalmente preparadas aos desenhos geométricos de formato

pequeno realizados sôbre uma fôlha de papel, e é preciso não lhos impor demasiadamente cedo.

3. Emprêgo das transformações na geometria

Esta etapa do desenvolvimento comporta a introdução das transformações geométricas organizadas em volta das noções de *simetria* e *rotação*. Sublinhemos que aqui precisa ação e atenção, mas salientemos também e sobretudo que não está em nosso propósito fazer disto um veículo duma teoria qualquer, que não esteja ao nível das crianças. A primeira série de jogos será formada de jogos de rotação e interessa a simetria.

3.1. *Jogos de virar — Transformações simétricas*

Quando se segura com os dedos uma forma simétrica simples e se lhe imprime uma "rotação de 180 graus" * ao redor de seu eixo de simetria, vê-se que esta transformação "transporta" cada um dos pontos da figura a uma nova posição, ainda que a forma, em si, ocupe o mesmo lugar no espaço. Tal é verdadeiro para todos os pontos não situados sôbre o eixo de simetria, os outros mantêm-se fixos. Evidentemente não se trata de que as crianças, a esta idade, aprendam o que seja um eixo de simetria duma figura qualquer; os mestres bem sabem que todo retângulo tem dois eixos de simetria, todo triângulo eqüilátero, três, todo quadrado, quatro, e todo círculo, uma infinidade. Para conferir variedade ao jôgo, pode-se recorrer a formas diversas destas figuras geométricas simples, por exemplo, a uma fôlha de trevo ao invés dum triângulo, etc.

A partir dêsses elementos, podem-se organizar alguns jogos muito interessantes para as crianças. Por exemplo, pode-se começar com um 8, forma que, como o retângulo, tem dois eixos de simetria. Traça-se com giz, no chão, um grande 8, com a

* Na falta de um têrmo específico para designar êste movimento, referir-nos-emos a êle com o verbo "virar".

representação dos dois eixos de simetria, o eixo vertical por uma linha vertical verde, o eixo horizontal por uma linha horizontal vermelha. Toma-se também uma placa de madeira com forma semelhante, sôbre a qual se assinalam igualmente os eixos de simetria, mas sem colori-los. Participam do jôgo cinco crianças. A primeira, que chamaremos, se quiserem, condutora do jôgo, se posta no centro do oito, com a placa na mão. Cada uma das quatro outras ocupa, a título de quatro cantos, um dos setores do oito, que considerará seu campo, sua base. Suas iniciais constarão ali, no chão, a giz. As mesmas indicações figurarão sôbre a placa, no reto e no verso. O jôgo pode começar.

A primeira partida tem como objetivo fazer sentir às crianças que, se elas estivessem efetivamente "no seu campo" sôbre a placa de madeira, seriam levadas a uma nova posição, quando é virada. Ver no espaço não é sempre cômodo, sobretudo para certas crianças um pouco lentas, que podem ser auxiliadas fazendo um orifício na base correspondente, pelo qual se atravessa um palito. Quando se vira a placa, cada criança segue seu palito (com um pouco de dificuldade) e identifica sua nova posição. Em todo caso, as crianças admitem muito fàcilmente que uma viradela as faz mudar de lugar.

O segundo jôgo consiste em fazer às crianças acertar seu ponto de chegada em consonância com o que a condutora do jôgo anuncia. Por exemplo, ela diz "Eu viro verde" (o que significa que vai dar meia-volta em tôrno do eixo verde), executa ràpidamente o movimento, mas volta logo à posição original. Os colegas deixam então a presente base para ganhar o canto que crêem ser o seu. A condutora do jôgo repete então o movimento de antes, mantém a posição atingida e coloca a placa no chão. Pode-se assim ler nela os nomes (ou as iniciais) e cada uma pode verificar se acertou o lugar. Outra vez realiza-se o movimento em tôrno do eixo vermelho, ou ainda usam-se outras formas com outras viradas.

A seguinte pergunta traz uma variante: "Como chegar lá?" A condutora do jôgo diz a cada qual onde vai parar e as

quatro devem pensar no giro necessário para tanto. Mais tarde, é permitido valer-se de figuras mais complexas, mas é preferível assegurar-se antes de que as crianças compreenderam bem as figuras simples.

Um quarto jôgo consiste em resolver como se voltará à base com uma única viradela, a partir de qualquer posição diferente da posição de origem. Ao fim de algum tempo, pode-se ligar tudo isso a um ou outro dos jogos precedentes, constituindo o resultado um jôgo duplo. Em outros têrmos, a condutora do jôgo começa dizendo: "Eu vou virar vermelho": e os demais então pensam onde vão parar. Depois a condutora pergunta: "De que maneira é preciso virar para trazer vocês de volta para casa?" — A resposta é, evidentemente: "Vermelho". Ou ainda a condutora diz: "Você vai cair ali, você lá, você aqui e você nesse lugar, depois que eu tiver virado. De que modo é necessário que vire?" E as colegas raciocinam e respondem. Em seguida elas se deslocam para as novas posições e a condutora executa com a placa o movimento sugerido. Se a sugestão estiver errada, deverão voltar para casa e pensar de nôvo. Quando tiverem julgado certo e se encontrarem nas novas posições, a condutora pergunta:

"Como devo virar agora para reconduzir vocês novamente para as próprias bases?" A resposta correta será, é claro, "Fazer o mesmo movimento que nos trouxe aqui".

Pode-se igualmente associar duas viradas, por exemplo, uma vermelha e uma verde. Onde se encontrarão depois disso os jogadores? É bastante mais difícil e para começar, é preciso executar os dois giros separadamente e levar as crianças a ver claramente sua nova posição. Não lhes é necessário muito tempo, contudo, para descobrir qual será, no fim de duas viradas sucessivas. Em prosseguimento, inverte-se a ordem destas — verde primeiro e vermelho depois. Novamente, as crianças devem calcular suas novas posições.

O sexto tipo de jôgo consiste em perguntar às crianças, depois da execução de duas viradelas sucessivas, como podem retornar às suas bases mediante um só movimento. É difícil porque, para voltar à base, precisa executar com a placa uma rotação de meia-volta em seu plano, sem girar ao redor dum eixo, e as crianças necessitam muitas vêzes uma lição tôda para descobri-lo. Por isso impõe-se não ir depressa demais.

Cada um dêsses jogos pode — e deveria — ser praticado de nôvo com figuras mais difíceis, que tenham mais de dois eixos de simetria. Não é questão, naturalmente, de que as crianças retenham as soluções de memória. Para elas, trata-se apenas de elaborar, em cada caso, a solução por seu próprio esfôrço mental.

3.2. *Jogos de rotação*

Êstes jogos são levados a efeito similarmente, usando o mesmo tipo de diagrama no chão, o mesmo modo de marcar as bases, o mesmo número de crianças — uma para cada base — e uma condutora do jôgo que faz girar a placa em seu próprio plano em vez de revolvê-la ao redor dum eixo de simetria. Põe-se a placa de madeira no centro, no chão, e é girada de uma das quatro maneiras: uma volta, uma meia-volta, um quarto de volta à direita, um quarto de volta à esquerda. Êstes movimentos são adequados se resolvermos tomar como forma a de uma fôlha de trevo de quatro fôlhas, com quatro eixos de simetria e oito secções, assinaladas cada uma com o nome da criança da qual é a base.

O primeiro jôgo serve para familiarizar as crianças com os diferentes movimentos possíveis e com sua execução. Para começar, cada criança segura a parte da placa correspondente à sua base e segue o movimento, quando a condutora do jôgo a faz girar. Em princípio, alguns dos jogos anteriores deveriam ter-lhes ensinado a diferença entre "girar à direita" e "girar à esquerda", mas há criancinhas para quem é ainda difícil tal distinção por algum tempo. Cada movimento é demonstrado, fazendo as crianças deslocarem-se para a nova posição.

Finda esta preparação, introduzem-se jogos, seguindo a progressão exposta acima. A condutora do jôgo diz: "Vou dar meia-volta. Onde vão encontrar-se vocês?" Ela dá ràpidamente meia-volta à placa e logo a repõe na posição primitiva. As demais crianças se dirigem para suas novas posições, a condutora coloca a placa no chão, fixando-a na posição alcançada com a rotação de meia-volta e verifica-se a correção da situação de cada criança. Se houver êrro, tôdas voltam para seus lugares e recomeça-se.

No jôgo seguinte, a condutora diz: "Depois de eu girar a placa, você estará lá. Como é que vou girá-la?" Cada uma se coloca e tôdas tentam conjeturar como a placa deve girar. Depois, a condutora dá a rotação à placa e confere-se.

Outro jôgo consiste em descobrir o movimento necessário para retornar ao ponto de partida, após um movimento anterior. Assim, após um deslocamento provocado por "um quarto de volta à direita", precisa, evidentemente, para voltar à posição original "um quarto de volta à esquerda", e assim por diante.

Agora combinam-se duas rotações. Por exemplo, a condutora diz: "Vou dar à placa meia-volta, depois um quarto de volta à direita. Onde é que vocês vão parar?" As crianças colocam-se, verifica-se e a pergunta seguinte pode ser: "E agora, que é preciso fazer para tornar à base?" A resposta é, claramente: "Um quarto de volta à esquerda".

3.3. *Jogos combinados*

Há, naturalmente, bastante probabilidade de que as crianças desejem combinar jogos de virar com jogos de rotação; deve-se deixá-las fazer, porque isso mantém os espíritos em estado de alerta. Por exemplo, os jogadores deixam suas bases por duas viradas sucessivas e voltam a elas por uma rotação. Quando se permite, quando se estimulam mesmo as crianças a inventarem jogos, elas o fazem com grande satisfação e, freqüentemente, aconteceu conosco que conseguimos a introdução simultânea de jogos de virar e de rotação.

3.4. *Jogos de caçar*

Os jogos de caçar podem ser efetivados com ambas as transformações de virar e de rotação. A "lebre" anuncia ao "caçador" os dois movimentos que vai fazer (por exemplo, uma virada verde seguida duma virada vermelha) e ocupa a posição que daí resulta. O "caçador" está obrigado a pegá-la de nôvo, isto é, conseguir a mesma posição, graças a *uma única* transformação, que poderá ser uma virada ou uma rotação, de conformidade com aquilo que está autorizado a fazer. Quanto à "lebre", é preciso que seja capaz de retornar à sua base com um só movimento, que será, naturalmente, o movimento inverso daquele do caçador, se os dois jogadores partiram da mesma base.

Suponhamos que se jogue de caçar ùnicamente com rotações. A criança condutora do jôgo se mantém no centro do diagrama e os dois jogadores aguardam no mesmo setor. A lebre diz: "Vou dar um quarto de volta à direita, depois meia-volta", o que executa. O caçador diz: "Eu vou pegar-te de nôvo por um quarto de volta à esquerda", o que é a solução certa, como o mostrarão em seguida a condutora, girando sua placa, e o caçador, reunindo-se à lebre. Agora, a fim de voltar para casa com um único movimento, a lebre deve fazer o inverso do movimento do caçador; como êste último está a um quarto de volta à esquerda, fará um quarto de volta à direita.

3.5. *Diversas maneiras de realizar transformações simétricas*

Suponhamos que as crianças tenham descoberto os quatro eixos de simetria do quadrado, ou da fôlha de trevo de quatro fôlhas, pelo método de virar. Por exemplo, descobriram que o quadrado à esquerda da fig. 1 se torna o quadrado da direita

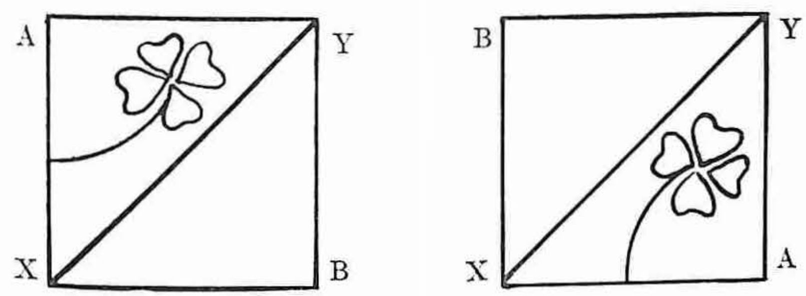


Fig. 1

virando-o ao redor do eixo XY, de sorte que os pontos A e B se permutam, ao passo que os pontos X e Y se mantêm fixos. É recomendável, aliás, valer-se de quadrados de matéria plástica transparente para esta demonstração, a fim de permitir às crianças notarem bem a orientação e a posição da flor após o movimento. Melhor ainda é dispor de dois quadrados transparentes; pode-se assim superpor o quadrado "virado" e o quadrado "não-virado", e comparar dêste modo as duas posições da flor mais fàcilmente. O estado inicial e o estado final são simultâneamente visíveis, e a criança prevê melhor qual será a situação depois de uma virada.

Tomemos agora uma criança que, após certo número de experiências pessoais, compreendeu bem a informação acima. Demos-lhe um espelhozinho dotado de duas superfícies refletoras, uma de cada lado. Peçamos-lhe que disponha o espelho em relação ao quadrado florido de tal maneira que, olhando no espelho, veja a flor como se o quadrado tivesse sido "virado". Muitas crianças encontram aqui grande dificuldade. Há inclusive as que se estiram no chão segurando o espelho horizontalmente acima da cabeça. Quando, finalmente, a criança descobre que é necessário colocar o espelho verticalmente sôbre a diagonal XY, que sentimento de triunfo! Parece que, para uma criança desta idade, "encontrar a imagem no espelho" e "girar a figura ao redor de seu eixo de simetria" sejam duas atividades muito diferentes. Aliás, de fato o são. Sòmente o conteúdo matemático é o mesmo. Descobrir a similitude matemática entre duas maneiras de realização da mesma transformação simétrica, está talvez aqui o primeiro passo da criança em direção ao que há de abstrato numa transformação que interessa a simetria.

A etapa seguinte do jôgo dos espelhos pode consistir na criação de imagens aparentes a partir de materiais concretos. Por exemplo, constrói-se com fósforos a letra L dum lado do espelho (de preferência um espelho com duas faces refletoras, fixo num plano vertical). A maioria das crianças, quando é convidada a construir a imagem do L através do espelho, esquece de inverter a construção do L. Surpreendem-se enormemente ao ver que aquilo que fizeram não é o que enxergam no espelho. Uma grande quantidade de exercícios dêste gênero faz penetrar na inteligência das crianças o caráter essencialmente "inversor" dos espelhos e, é claro, em geral, das transformações simétricas.

Passa-se ao estágio seguinte com a utilização de dois espelhos. São colocados ainda em planos verticais que fazem entre si um ângulo reto. O melhor é obter que as crianças os disponham tão perto um do outro quanto possível, de maneira que apareça um "canto". Constrói-se então ou desenha-se alguma coisa no canto e, atrás de cada espelho, constrói-se a imagem desta coisa. Muito ràpidamente as crianças descobrem que se apresenta outra imagem, que é a reflexão da reflexão em cada um dos espelhos. Em cada espelho há uma reflexão do outro espelho e êste espelho refletido dá outra imagem. As crianças querem construir também esta imagem. A professôra deve cuidar para que elas reinvertam suas figuras. A quarta "construção" não será mais uma reflexão mas uma versão "devolvida" da construção original.

Uma variante interessante dêsse jôgo obtém-se colocando letras, preferencialmente letras maiúsculas, no canto formado pelos dois espelhos. Descobre-se que determinadas letras são

completamente insensíveis a êste tipo de tratamento e permanecem obstinadamente as mesmas letras que eram antes, ao passo que outras, mais delicadas, alteram-se num dos espelhos, ou no outro, ou nos dois simultâneamente. Por entre as letras interessantes, citemos Z, M e S, que mudam em um ou no outro espelho e, entretanto, aparecem corretas na imagem do canto. Dispondo-se de letras de matéria plástica ou de madeira, podem usar-se para esta finalidade, e pode perguntar-se às crianças o que precisaria fazer nas letras, *na realidade*, para que elas fiquem como sua imagem no espelho. Por vêzes é necessário virá-las de uma maneira, por vêzes de outra, por vêzes girá-las em seu próprio plano. Êste jôgo de "virar" ou de "rotação" obedece às mesmas regras que aquêle que descrevemos em *Lógica e jogos lógicos*, em 10.4.

Caso se possuam triângulos eqüiláteros de madeira ou de plástico, pode-se cômodamente valer dêles para dispor os dois espelhos num ângulo de 60°. As crianças têm então a surprêsa de descobrir que, construindo alguma coisa no cinto, vêem seis construções (incluindo a real) e não mais quatro. Algumas crianças soltam exclamações maravilhadas. Outras querem construir "estrêlas" de seis pontas e mais figuras de seis pontas que resultam do material empregado para a construção.

Evidentemente pode-se prosseguir nesta direção dispondo os espelhos em ângulos de 45°, o que fornece oito construções. Duas construções não consecutivas podem superpor-se por rotação, mas não acontece o mesmo com duas vizinhas.

Deixemos claro que de modo nenhum se pretende fazer "aprender" uma explicação matemática, qualquer que seja, do que precede. Os jogos e atividades que temos descrito não têm outro fim senão o de abrir às crianças janelas que dão sôbre diversos campos de pesquisa, para que, quando chegar o momento, as idéias que desenvolverem sejam baseadas em situações já familiares para elas.

APÊNDICE I

JOGOS CONDUCENTES A ALGUMA COMPREENSÃO DA GEOMETRIA

Daremos aqui apenas alguns exemplos de cada tipo de jogos; competirá ao mestre levar avante os pormenores, multiplicando os jogos ao redor de um tipo, seja com o fim de insistir no mesmo conceito, ou em conceitos análogos.

1.1. *Emprêgo dos atributos*

É à compreensão de atributos tais como *longo*, *curto*, *rugoso*, *liso*, *grande*, *pequeno*, *reto*, *torto*, *pontudo*, *rombo*, *redondo*, *chato*, etc. que visam êstes jogos.

Para isso repartem-se as crianças em grupinhos de seis a oito e a cada grupo entrega-se uma bandeja com, por exemplo, um lápis comprido e um curto, um bastonete reto e um torto, uma caixa grande e uma pequena, uma fôlha de papel rugoso e uma de papel para escrever, uma forma arredondada, um bastonete agudo, um dado, etc.

Diz-se às crianças que escolham um objeto qualquer na bandeja. A professôra pede, por exemplo: "Janete, você quer trazer-nos uma caixa grande?" Ou: "Paulinho, quer você dar-me uma fôlha de papel rugoso?" Precisa proporcionar a cada criança oportunidade de escolher ela mesma cada tipo de objeto e anotar cuidadosamente aquelas que não são capazes de desempenhar a tarefa. Cumpre tomá-las à parte, estas, e multiplicar os exercícios particularmente. Em certos casos, será necessário selecionar um par de artigos e fazê-los comparar. Por exemplo, um lápis "apontado" e outro "sem ponta", uma caixa "grande" e outra "pequena", e assim por diante.

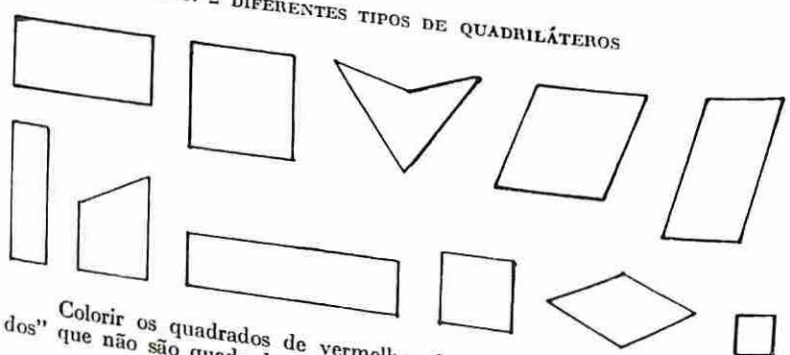
Com grande diversificação dos objetos, pode-se controlar se êste ou aquêle conceito se formou bem e contribuir eventualmente em seu desenvolvimento.

1.2. *Formas*

Êstes jogos conduzem ao reconhecimento das formas como quadrado, triangular, redondo, retangular (longo).

É preferível, neste tipo de jogos, começar com tôda a classe, porque é pouco provável que muitos alunos tenham já tido a ocasião de descobrir estas diferentes formas. Utilizam-se as "peças lógicas" ou recortem-se, em papelão, vários exemplares de cada forma, com diversos tamanhos. É útil colorir algumas.

FIG. 2 DIFERENTES TIPOS DE QUADRILÁTEROS



Colorir os quadrados de vermelho, de azul os retângulos "compridos" que não são quadrados.

A professôra escolhe uma forma e manda as crianças procurarem as que são "parecidas". Pode-se, em seguida, discutir as peças apresentadas, traçar delas um grande modêlo no chão, para que as crianças possam postar-se ao redor. Depois dá-se-lhe um nome. Passadas assim tôdas as formas, pode-se per-

sonalizar o jôgo, fazendo cada criança por sua vez escolher uma forma para si.

1.3. *Côres*

Êstes jogos conduzem ao reconhecimento das côres mais freqüentes, o vermelho, o amarelo, o verde, o azul, o branco e o prêto. Põem-se vários objetos com côres iguais às referidas numa bandeja e pede-se às crianças escolham "alguma coisa verde", "alguma coisa amarela", etc. Sem demora poder-se-á pedir um "lápis verde", etc. Percebe-se que há grande diferença entre as aptidões das crianças em reconhecer as côres com segurança. Quando se constatar que foi atingido um grau satisfatório de precisão no reconhecimento das côres, poderá combinar-se êste jôgo com o precedente.

1.4. *Relações espaciais simples*

Aqui os jogos encaminham o desenvolvimento de outros conceitos, tais como de *perto*, *dentro*, *fora*, *prestes a*, *sob*, *antes*, *após*, etc. Precisa fazer as crianças trabalharem em grupos relativamente reduzidos, e cada grupo deve dispor duma bandeja com capacidade de conter um número bastante elevado de objetos. A professôra, ou um monitor de grupo, diz, então, por exemplo, a uma criança: "Maria, faça o favor de colocar o lápis comprido na caixa grande". Ou: "Gilberto, queira pôr o dado sôbre a caixa pequena". E assim por diante. Aqui ainda é necessário verificar a formação dos conceitos, um por um, em tôdas as crianças.

Não ignoramos que tôdas as boas professôras nos jardins da infância conhecem e aplicam êste gênero de jogos desde muito tempo, e, se os mencionarmos aqui, é apenas com a finalidade de sermos completos e com suposição de que algum professor ou professôra faltos ainda de um pouco de experiência não teriam pensado nêles, porque a formação correta dêstes conceitos é fundamental para o tipo de geometria de que vamos tratar aqui. Se nós sugerimos a realização dêstes jogos em grupos, temos em vista fornecer a cada criança o maior número possível de experiências ao longo duma aula. O que é principalmente necessário é estimular a discussão, incluindo-se aqui a contestação de alunos referentemente a resultados ou respostas de outros, com a intervenção da professôra só no caso de ser absolutamente indispensável.

1.5. *Combinação de conceitos*

Não esqueçamos que, mesmo se êsses exercícios tomaram muito tempo no comêço do ano, as crianças ao nosso cuidado não sabem ainda ler e não se adaptam portanto a instruções escritas. O professor preparou cartazes nos quais se encontram instruções como: "Colocar o lápis grande vermelho na pequena xícara branca". Depois de baralhá-las, manda cada criança, por sua vez, tirar uma e êle mesmo lê em voz alta o que está escrito. Se a operação foi executada corretamente, a criança toma uma ficha. Se um colega lhe observa, com razão, que se enganou e retifica, é êste outro que tem direito à ficha. No fim o professor conta as fichas e proclama o vencedor.

1.6. *Prática dos conceitos*

Põe-se no chão o maior número possível de objetos com tôdas as formas e côres. Um primeiro aluno, indicado por sorteio, diz: "Atenção! Vejo alguma coisa vermelha, adivinhem o que é". As demais crianças procuram diversos objetos vermelhos e perguntam ao que falou se é isto. A criança que acertar proporá o objeto seguinte a adivinhar. Marcam-se pontos com fichas.

A etapa seguinte consiste em pensar em objetos que não se encontram no chão, mas em qualquer lugar da sala e mesmo no pátio — precisa procurá-los com os olhos e até deslocando-se.

1.7. *Fronteiras e domínios*

Recomenda-se realizar êste jôgo no pátio. Divide-se a classe em dois grupos, talvez em meninos e meninas. Os meninos têm dois campos, situados a alguma distância um do outro, cercados cada um por uma fronteira, e as meninas têm um único campo, também cercado por sua fronteira. As meninas entram em seu campo e os meninos, em um dos dois seus. Ao sinal convencionado, os meninos mudam de campo, mas se uma menina conseguir pegar um menino tocando-o, quando ainda fora do campo, êste menino deverá juntar-se às meninas e ajudar a pegar os outros meninos. A partida termina no momento em que todos os meninos foram pegos. Depois podem-se permutar equipes e campos, passando os meninos a pegar as meninas.

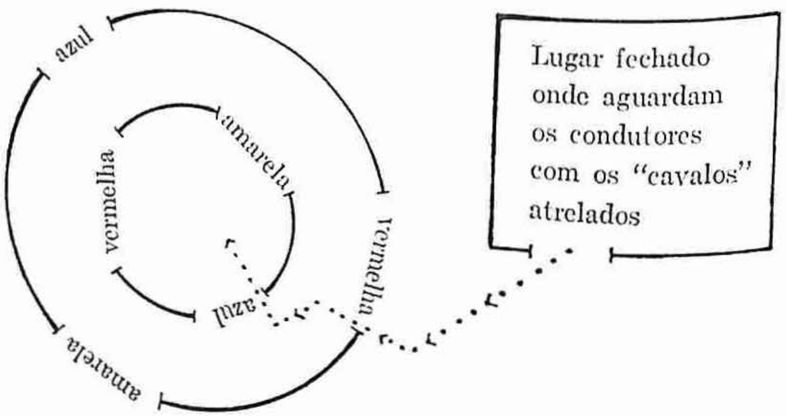
Durante êsses jogos, usar-se-ão tôdas as vêzes que fôr necessário os têrmos "fronteira" e "domínio" ou "campo".

1.8. *Fronteiras e passagens*

A maioria das crianças gostam de brincar "de cavalo", ou "de trem", ou "de Zorro". Duas crianças são os cavalos, amarrados por uma corda cujas extremidades são seguradas por um "condutor", ou "cocheiro". Podem-se utilizar êstes jogos para introduzir a noção de "passagem", ou de "porta". No chão do pátio traçam-se duas circunferências concêntricas de grandes dimensões (dois "pátios"), cada uma com uma porta azul, uma porta vermelha e uma porta amarela, mas dispostas de tal maneira que a porta de certa côr de um dos recintos não seja vizinha da porta de mesma côr do outro recinto. Começa-se dizendo ao condutor, mas só a êle: "Você conduzirá seus "cavalos" ao parque do meio, mas passando sòmente pelas portas azuis". Os "cavalos" não sabem por quais portas cumpre passar e é o condutor que deve guiá-los, servindo-se das rédeas. Êle ganhará, se acertar com o caminho mais curto. Repete-se, invertendo os papéis.

Fig. 3 A PASSAGEM DAS PORTAS VERMELHAS E AZUIS

O caminho mais curto está indicado pelo pontilhado.



Pode-se também fazer o exercício da volta ao lugar da atrelagem.

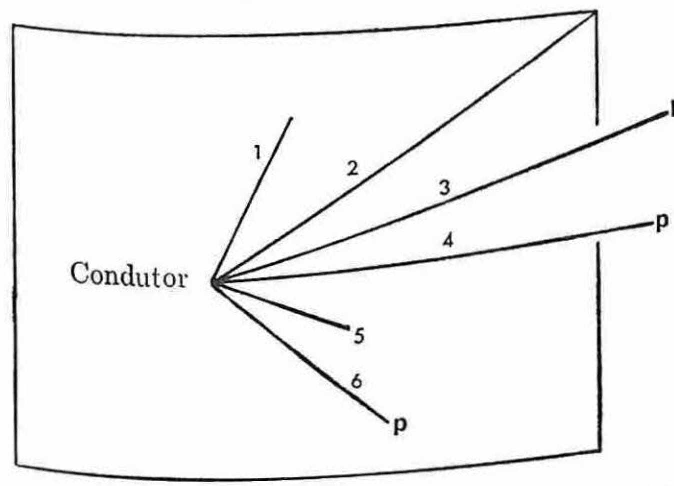
Na etapa seguinte, o condutor deve utilizar duas côres (por exemplo, vermelho e azul), e sabe que terá de passar pela porta externa vermelha e pela porta interna azul. As demais crianças ficam atentas para contestar o itinerário escolhido e mostrar que havia um mais curto, se fôr o caso. Se os "cavalos" passam sôbre as fronteiras, em vez de entrarem por uma porta, isso vale uma falta à equipe, que perde um ponto.

1.9. *Salas e portas*

Êste jôgo realiza-se numa sala com apenas uma porta. A professôra preparou prèviamente vários pedaços de barbante de diferentes comprimentos e diversos cartões, a maior parte dos quais sem nenhuma inscrição, mas alguns dêles apresentam o desenho de uma porta. Cada criança tirará um barbante de uma caixa, mantida acima de sua cabeça, a fim de impedi-la

de ver o que toma. Misturam-se os cartões para depois pô-los no chão, todos com o verso para cima. Cada criança tira um. Em seguida uma das crianças se posta no ponto central da sala e tôdas as outras lhe fazem segurar uma das extremidades de seu barbante, afastando-se dela o quanto pode. Sòmente as que sortearam um cartão com a representação de uma porta têm o direito de abrir a porta e franqueá-la. Isto significa que há dois fatôres determinantes da distância de que cada criança é autorizada a afastar-se — o comprimento do barbante e o direito de passar a porta. Se a criança se afastou o mais possível, mas sem poder sair da sala, deve enrolar o que lhe sobra de barbante. É vencedora aquela que conseguiu ir mais longe. O acento, dessa maneira, encontra-se sôbre a importância das aberturas, num espaço de três dimensões.

Fig. 4 SALAS E PORTAS



Dos seis jogadores, o número 2 tirou o barbante mais comprido, mas tocou-lhe uma carta nula e não pode ir mais longe, além do ângulo.
O número 6, por sua vez, sorteou um P (desenho de uma porta), mas um barbante muito curto. Terá a vantagem maior o jogador que tirar um barbante longo e fôr capaz de transpor a porta, graças à carta que o autoriza a tanto.

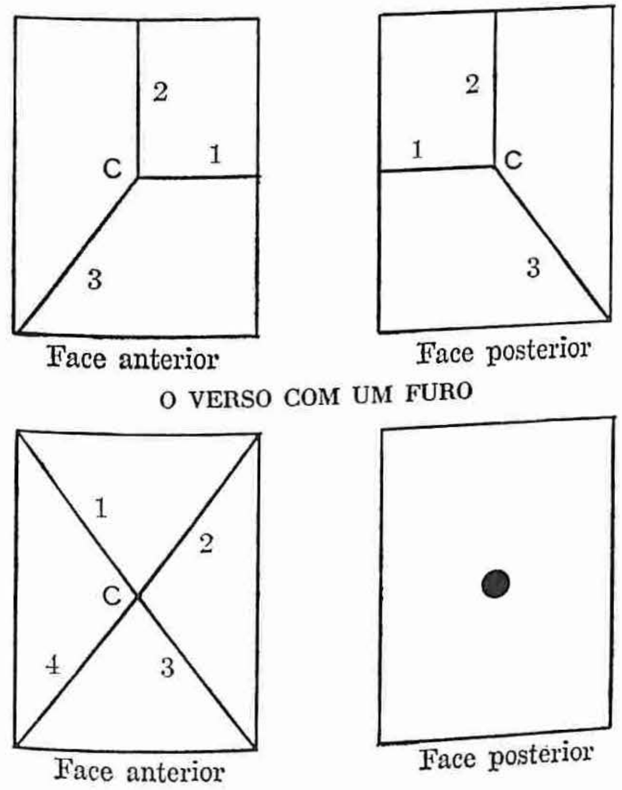
Pode-se variar o jôgo fazendo tomar ao arbítrio posições diferentes na sala. As crianças verão ràpidamente as diferenças que daí resultam.

1.10. *O verso*

No jôgo precedente era necessário determinar a criança que iria "mais perto" e a que iria "mais longe" em direções arbitrárias. Êste, agora, destina-se a aprofundar a mesma idéia de "ponto mais próximo", ou de "ponto mais afastado", de um ponto de partida. Para isso, servimo-nos de um quadro-negro com ambas as faces acessíveis, assinalando um ponto de partida no centro de uma das faces. Tôdas as crianças da equipe escolhem ao acaso um barbante, do qual vão servir-se para determinar um ponto sôbre o quadro-negro. Organiza-se então um concurso entre as crianças, onde cada qual procura marcar o ponto que, segundo ela, é o mais afastado do ponto de partida. "Medem-se" em seguida as tentativas de cada criança comparando os comprimentos dos pedaços de barbante.

A professôra chama, a seguir, a atenção sôbre o fato de que o quadro-negro possui outra face e que talvez se possa chegar mais longe do ponto de partida, usando as duas faces do quadro. Resulta daí alguma reflexão, porque certas crianças, quando experimentam servir-se da outra face do quadro-negro, não atinam que há mais de uma maneira de atingir o ponto de chegada a partir do ponto inicial. Para ilustrar: partindo do centro da face anterior do quadro-negro, algumas crianças vão transpor o lado menor, outras o lado maior, para, na face posterior, prosseguir em outra direção. Se lhes acontece, atrás da pedra, ir além do ponto oposto ao da partida, elas se aproximam, ao ultrapassá-lo, dêste ponto de partida. Todos êsses exercícios acarretam muitas discussões e portanto muitas reflexões — é ùnicamente o que importa.

FIG. 5 OS PONTOS MAIS AFASTADOS DE C



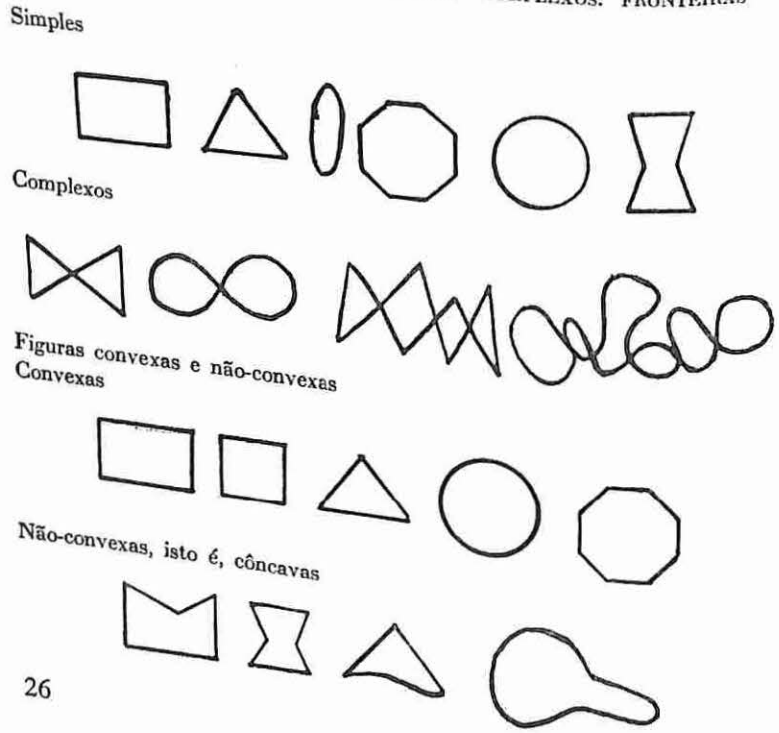
1.11. *Verso e furos*

Êste jôgo é análogo ao precedente, é apenas uma variante dêle, uma variante muito importante. Ao invés de utilizar um quadro-negro, é levado a efeito com uma fôlha de papelão de dimensões aproximadas às dêste quadro. Aqui ainda há um ponto de partida, mas desta vez faz-se um buraco no cartão, após o que recomeça a tentativa de achar o ponto mais afastado, ou o mais próximo, do ponto de partida. As crianças dão-se conta de que a presença dum furo modifica completamente o aspecto do problema da distância entre pontos situados de cada lado de um quadro, pois que se pode fazer passar o barbante pelo buraco.

1.12. *As fronteiras consideradas como caminhos*

Divide-se a classe em grupos e atribui-se a cada grupo, como "base" ou "domínio", uma parcela do pátio de recreio. No interior de seu domínio, cada grupo tem a autorização de delimitar várias bases. Indica-se a cada grupo que experimente desenhar diferentes tipos de bases. Algum vai querer desenhar bases circulares, outro, experimentar traçar fronteiras formadas de segmentos retilíneos, aqui com três lados, lá com quatro, ou mais ainda. A maioria preferirá, digamos assim, "caminhos

FIG. 6 "CAMINHOS" SIMPLES E "CAMINHOS" COMPLEXOS: FRONTEIRAS

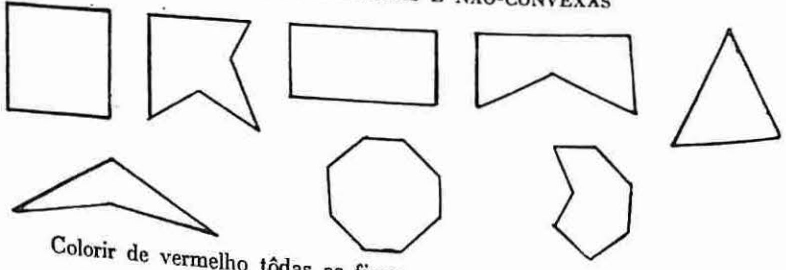


simples", isto é, traçados simplesmente ao redor da base. Após ter traçado caminhos redondos, os grupos desenham quadriláteros de diversos aspectos. A maior parte dêles são figuras "convexas", isto é, figuras no interior das quais é possível deslocar um segmento retilíneo entre dois pontos, sem sair dos limites da figura. Poucas crianças, neste estádio, tendem a traçar figuras "côncavas". Mas há algumas. Por isso pode-se introduzir a idéia de figuras convexas e de figuras côncavas e voltar-se para as diferentes formas até aqui apresentadas pelas crianças. As crianças podem examinar os diversos tipos de quadriláteros (figuras de quatro lados) e decidir quais são quadrados, quais são "compridos", isto é, retângulos, e quais não são nem uma coisa nem outra.

No fim da discussão sôbre essas figuras, pergunte-se às crianças se não haveria outra sorte de fronteiras ou de "caminhos" que se poderiam utilizar. O que se tenta introduzir aqui são os "caminhos complexos". Examinemos um "caminho", ou uma fronteira, em forma de 8. É a forma mais simples de "caminho complexo", já que os lados têm apenas um ponto comum. Pode ocorrer que um tal "caminho" seja construído por uma criança sem sugestão nenhuma. Com efeito, no caso de sugerir às crianças experimentarem desenhar um "caminho", que seja diferente de todos os que se traçaram até agora, há probabilidade de elas descobrirem o tipo em questão. Considerando que as crianças têm geralmente a impressão de que um caminho dêsses envolve realmente mais duma base ou região, é preferível, a esta altura, falar em "caminhos" a falar em "fronteiras".

Assim, graças a esta série de jogos, as crianças se puseram ao nível de discutir e aprender as noções de "figura convexa" e de "figura côncava", e de "caminhos simples ou complexos", partindo de seus conhecimentos no domínio das figuras simples em geral.

FIG. 7 FIGURAS CONVEXAS E NÃO-CONVEXAS

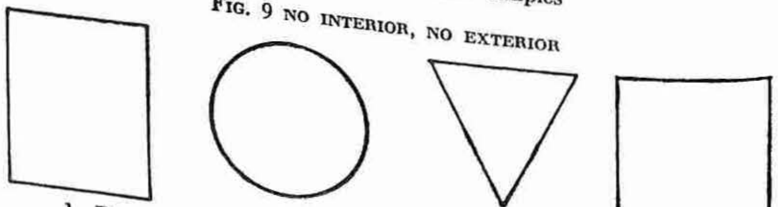


Colorir de vermelho tôdas as figuras convexas

FIG. 8 "CAMINHOS" SIMPLES E COMPLEXOS

Colorir de vermelho todos os "caminhos" simples

FIG. 9 NO INTERIOR, NO EXTERIOR



1. Desenhe uma linha no interior do triângulo.
2. Desenhe um triângulozinho no interior do círculo.

3. Faça um ponto grosso no exterior do quadrado.
4. Desenhe uma linha curta no exterior do retângulo.

1.13. *Fronteiras e domínios*

Já descrevemos êste jôgo no texto. Convenciona-se com as crianças, "para rir", que o pátio de recreio, ou a sala de aula, em que se joga, se estenda muito, muito longe e que não tenha fronteiras. Vamos agora construir "fronteiras nossas", por exemplo, com aros de diversos tamanhos. Tomemos cinco crianças, mandando-as escolher seus aros — três grandes e dois pequenos, por exemplo. Cada qual vai colocar seu aro em algum lugar no pátio, não importa onde, com a condição de que os aros não se toquem. Depois de cada criança depor seu aro, ficará dentro dêle — é o seu domínio — com o direito de ali passear à vontade, mas com a obrigação de não transpor as fronteiras. Se perguntarmos então "Quantas fronteiras construímos", a resposta será, naturalmente, "Cinco". Se, em seguida, dissermos "E domínios, quantos formamos?", talvez alguém responda de nôvo "Cinco". Mas desta vez a resposta é falsa, porque há um domínio grande, situado no exterior de todos os aros, onde podemos também passear sem atravessar as fronteiras. Ponhamos aí uma criança — tôdas as outras vêem então que há precisamente seis domínios.

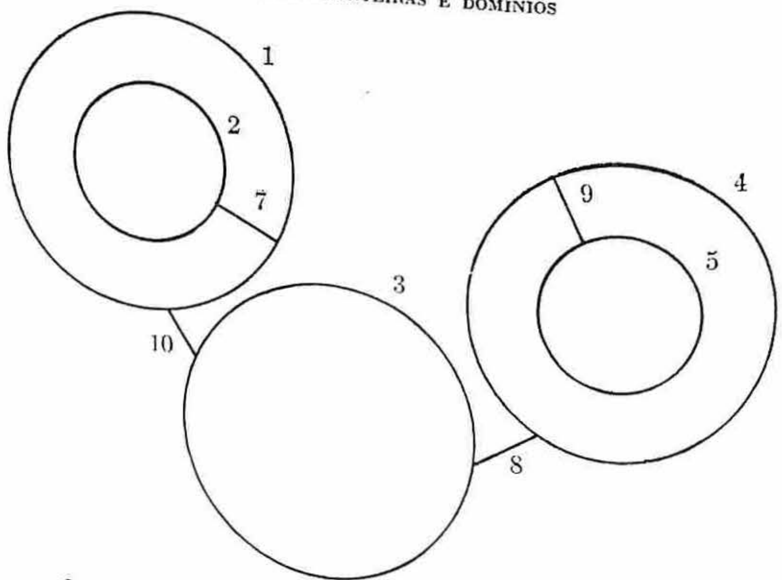
Recolhamos agora os aros e experimentemos dispô-los diferentemente. Haveria necessàriamente sempre seis domínios? Existe outra maneira *possível* de colocar os aros de modo que não se toquem? As crianças descobrem sem demora que se podem colocar os pequenos dentro dos grandes. Ainda uma vez, examina-se o número de domínios, e constata-se surpreendentemente que são sempre seis, mesmo que resulte no encurtamento de alguns dos possíveis passeios.

Precisa repetir êsse jôgo com menos aros, depois com mais, a fim de dar oportunidade aos jogadores de descobrir bem quantos domínios e quantas fronteiras se obtêm em cada caso.

1.14. *Aumentar o número de fronteiras*

Voltemos aos nossos cinco aros e aos nossos seis domínios. Explica-se às crianças que elas têm o direito de unir por uma linha um ponto qualquer de uma fronteira com outro ponto qualquer de outra fronteira, como bem entenderem. O mais simples é fazer um traçado a giz, ou com um pauzinho, mas pode-se também fazer uma carreira de pedrinhas, etc. Depois pergunta-se: "Quantas fronteiras temos agora?" A resposta

FIG. 10 FRONTEIRAS E DOMÍNIOS



Suponha que comecemos com os aros 1 a 5, utilizando-os como fronteiras. Contar os 6 domínios. Traçar a fronteira 7. Podemos sempre fazer os mesmos passeios, temos portanto ainda 6 domínios. Acrescentemos a fronteira 8 e teremos ainda a mesma situação. A mesma coisa com o acréscimo da fronteira 10. As seis pessoas podem fazer ainda os mesmos passeios em seus domínios, sem estarem obrigadas, para isso, a cruzar uma fronteira. Poderemos nós ligar fronteiras sem que apareçam novos domínios? Se sim, onde poderemos traçar a fronteira 11, com êsse objetivo? Que acontece, quando iniciamos com 4 fronteiras, ou 6, e assim por diante? Pode-se descobrir uma lei?

é: "Cinco, mas uma é complexa". Continuando a interrogar: "E domínios, quantos?" — Muitas crianças acharão que são sete. Basta, então, pôr os jogadores a caminhar em seus domínios para ver quais percursos podem efetuar. Um dos jogadores vai reparar que seu itinerário está interrompido. Mas resulta daí nôvo domínio?" Perguntemos-lhe se pode ainda ir em todos os lugares que podia atingir antes e êle perceberá que efetivamente pode, mesmo que lhe seja necessário, para tanto, fazer uma volta. Acrescentou-se uma fronteira, mas sem aumentar o número de domínios.

Experimenta-se então unir duas outras fronteiras, depois duas outras ainda, e é sempre a mesma conclusão: acrescentaram-se fronteiras, não se aumentou o número de domínios, pois que cada criança pode tôda vez atingir, sem atravessar fronteiras, todos os pontos que podia alcançar anteriormente.

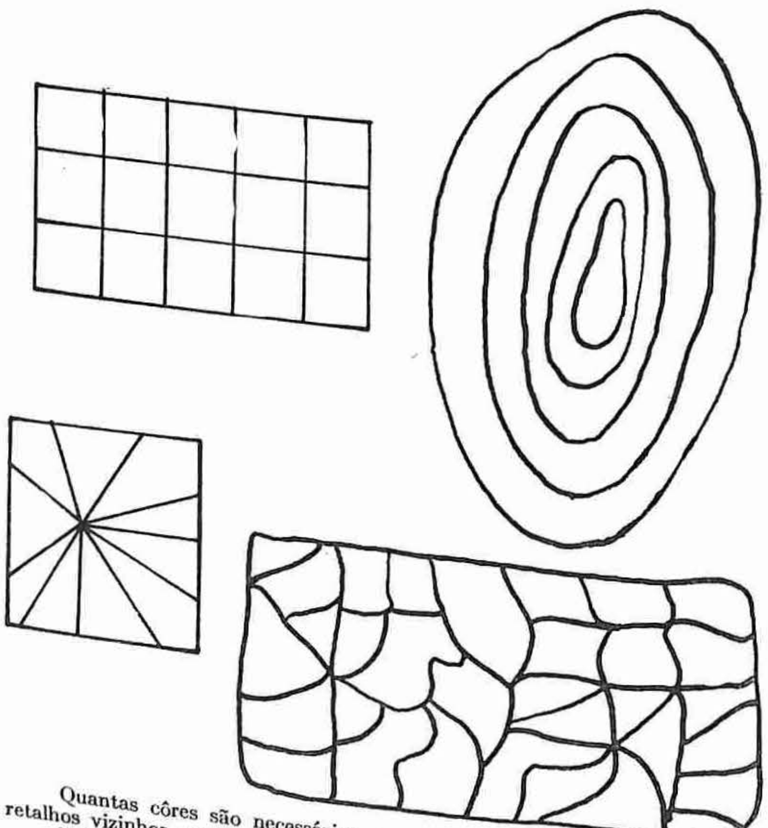
Chega contudo um momento quando, seja qual fôr a nova fronteira traçada, não se pode evitar de aumentar o número de domínios. (O mestre descobrirá logo o momento em que isso acontece, mas as crianças ficarão intrigadas, porque acreditavam ter estabelecido que o número de domínios não aumentaria, com qualquer modificação das fronteiras. É necessário deixá-las experimentar os desenhos mais complicados, até que se convençam).

1.15. *Jogos de "puzzle" (ou de colcha de retalhos)*

Já descrevemos êste jôgo anteriormente, pág. 5. Quando as crianças alcançam mais idade, pode-se levá-las a colorir mapas políticos, mas ao nível do jardim da infância elas não sabem ainda o que seja um mapa e, por isso, convém apresentar-lhes o exercício sob uma forma diferente. Para o caso em que as crianças não tenham ainda visto nada de semelhante, mostre-se-lhes uma roupa de retalhos, ou, na falta desta, ilustrações dêste gênero de roupas em revistas ou jornais de modas. Confecciona-se roupa de retalhos unindo retalhos de tecidos de diversas côres, atendendo a que não haja nunca dois da mesma côr contíguos, um pouco como um manto de arlequim. Começa-se indicando às crianças que tracem, numa fôlha de papel, fronteiras variadas e, depois, que devem colorir os "territórios" usando tôdas as côres possíveis.

No seguinte jôgo, manda-se colorir com o mínimo de côres possível, cuidando bem que não apareçam duas repartições

FIG. 11 COLCHAS FEITAS PELA JUNÇÃO DE RETALHOS



Quantas côres são necessárias a você nestas colchas para que dois retalhos vizinhos nunca tenham a mesma côr? Pode você inventar um modêlo que necessite mais de 4 côres?

vizinhas com mesma côr. É preciso que não haja uma secção vermelha ao lado de outra vermelha, uma secção verde ao lado de outra verde, e assim por diante. O vencedor é aquêle que conseguiu empregar o menor número de côres, respeitando a regra.

É possível, neste último caso, tanto quanto se sabe, descer até quatro côres. Ninguém conseguiu jamais pintar um "manto de palhaço", onde *precisasse necessàriamente* mais de quatro côres, mas também nunca foi demonstrado que quatro côres sejam *sempre suficientes*.

Pode-se, agora, dizer às crianças imaginem modelos nos quais não haja sequer necessidade de quatro côres. Nós indicamos (na Fig. 11) um, onde bastam apenas duas. Vejamos se as crianças encontram um para o qual sejam suficientes três.

1.16. *Dobradura de papéis*

A esta altura, a maioria das crianças já teve ocasião de fazer dobraduras. Em tódo o caso, recomendamos os exercícios baseados em dobradura como preparação a certos exercícios posteriores. Seria muito proveitoso às crianças adquirir empìricamente noções de simetria, por dobramento segundo um eixo de simetria (que elas descobrirão por si mesmas e que não se trata absolutamente de ensinar!), atendendo a que as secções simétricas se recubram exatamente.

É preciso que êstes exercícios não sejam complicados demais, porque a experiência mostra que, nesta idade, a maioria das crianças é incapaz de um trabalho de precisão; se a operação a realizar fôr demais complexa e depender de dobraduras prévias precisas, arriscar-se-á a fracassar. Insistimos, uma vez mais, sôbre o fato de que procuramos, aqui como alhures, que *a aquisição de um conceito se verifique pela experiência pessoal das crianças*; as intervenções da professôra devem reduzir-se a um mínimo; o ideal seria mesmo que a professôra não interviesse nunca, fôsse qual fôsse a mediocridade das realizações das crianças.

1.17. *Primeiro jôgo de virar*: *"Onde se vai parar?"*

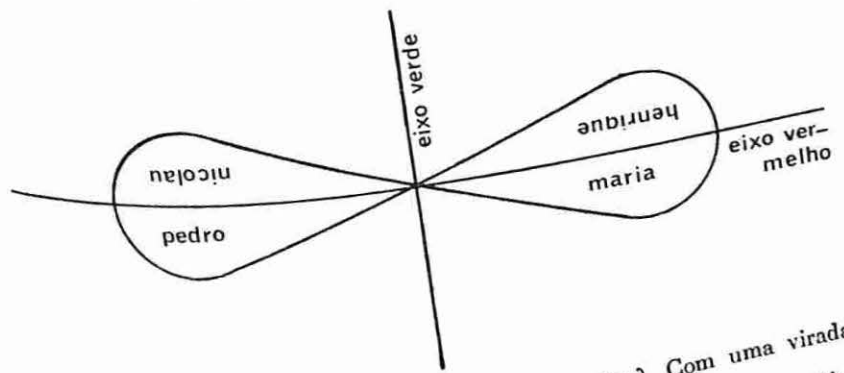
Começa-se por desenhar no chão um grande 8. Depois traçam-se seus dois eixos de simetria — um eixo longitudinal vermelho e o outro eixo transversal verde. Assim o 8 fica dividido em quatro secções, constituindo cada uma o campo de um jogador, o que se deixa assente com a inscrição do nome do titular nesse campo. No centro do 8 posta-se um quinto aluno, o condutor do jôgo, que segura uma réplica, em tábua ou em papelão, do 8. Esta placa também está dividida em quatro campos e traz, ela também, os eixos de simetria, mas não coloridos. Marca-se a réplica da mesma maneira nas duas faces, e cuida-se que, no começo do jôgo, o condutor mantenha a placa na mesma posição que o desenho no chão. Todos os jogadores devem ter consciência do fato e ter tido a possibilidade de convencerem-se disso, verificando-o êles mesmos.

O condutor anuncia que vai segurar a placa pelas duas extremidades de um dos eixos de simetria ("pelas duas pontas dêste traço sôbre a placa" — não exigir das crianças o emprêgo das palavras complicadas de saída; isso virá mais tarde) e que vai virá-la. Executa o movimento lentamente e os demais jogadores têm o direito de pôr o dedo sôbre a parte da placa correspondente a seu campo e de seguir o movimento, ou ainda de segurar um barbante fixado na parte da placa correspondente a sua base, tudo isso para ver e sentir bem que, quando o movimento terminou, embora a placa pareça ter a mesma posição que no começo, em realidade, a posição de seu campo mudou. Experimenta-se de nôvo, depois dos jogadores terem mudado de lugar de acôrdo com a situação da placa virada. Recomeça-se várias vêzes, agora com um dos eixos, depois com o outro, até que todos tenham compreendido bem e estejam bem convencidos.

E agora, abordemos o primeiro gênero de jogos. "Onde precisa ir?" O condutor diz: "Eu vou virar o vermelho. Onde estarão vocês quando eu tiver terminado?" Enquanto diz isso, segura a placa pelas extremidades do eixo vermelho e a

vira, atendendo a que todos vejam bem o que êle faz, depois devolve à placa sua posição inicial. Os outros jogadores devem agora deslocar-se para suas novas posições. Pode acontecer que duas crianças queiram ocupar o mesmo lugar: deve-se deixá-las discutir até que se ponham de acôrdo. Finda a discussão, todos colocados, o condutor executa uma segunda vez a virada da placa, para depois pô-la no chão, no centro do 8, em sua nova posição. Como os nomes dos jogadores estão escritos nos quatro campos da placa, todos podem verificar se o movimento foi executado corretamente. Em seguida, cada qual volta à sua base de origem, o condutor repõe a placa em sua primeira posição e procede-se a outra partida. Pode-se

Fig. 12 o primeiro jôgo de virar



Onde vou eu parar com uma virada vermelha? Com uma virada verde?

Qual virada me conduzirá à casa de...? Qual virada me permitirá a volta para minha casa com um só movimento?

Aonde irei com uma virada verde, seguida de uma virada vermelha?

Aonde me levará uma virada vermelha, seguida de uma virada verde?

Que tipo de virada me conduzirá para casa com um só lance?

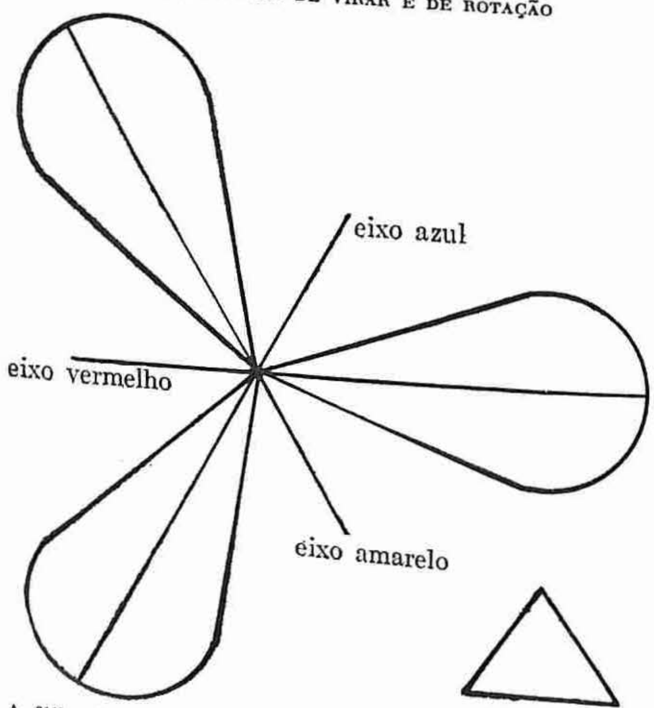
tornar o jôgo competitivo dando ao jogador bem sucedido uma ficha. No fim do jôgo é o mestre que indica o vencedor, caso as crianças ainda não saibam contar.

Podem-se complicar os jogos desta série, tomando como forma uma fôlha de trevo simples (três eixos de simetria), uma fôlha de trevo de quatro fôlhas (quatro eixos de simetria), ou qualquer outra figura com mais de dois eixos, depois do que se poderá passar às formas mais abstratas da geometria, quadrado, triângulo eqüilátero, retângulo, pentágono, hexágono, etc., às quais elas são assimiláveis.

1.18. *Segundo jôgo de virar: "Como fazer para chegar lá?"*

Começa-se ainda com um 8 traçado no chão, com seus dois eixos de simetria, com o condutor do jôgo no centro segurando

FIG. 13 JÔGO DE VIRAR E DE ROTAÇÃO

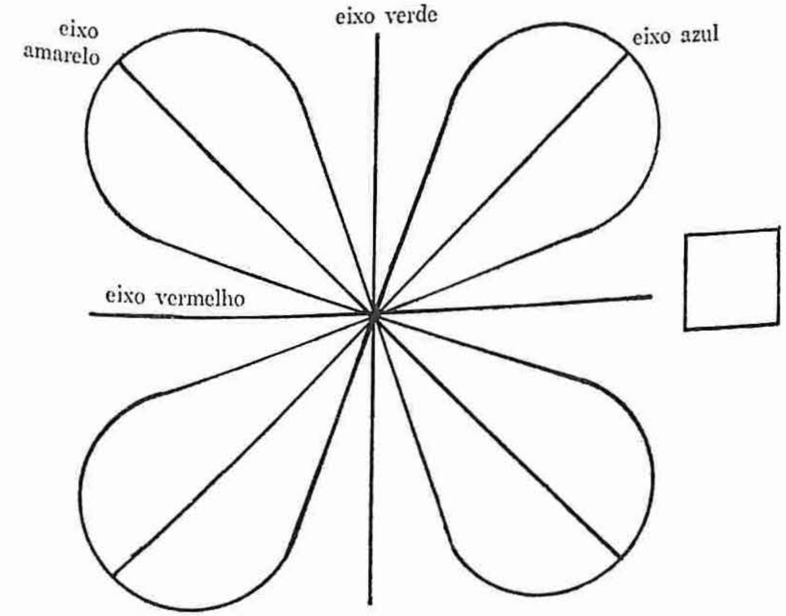


A fôlha de trevo (como o triângulo) tem três eixos de simetria.

sua placa e as bases assinaladas no chão e na placa. Desta vez o condutor diz: "Vou virar a placa e, quando tiver virado, Nicolau estará no lugar de Pedro. De que maneira é necessário que a vire? Será ao redor da linha vermelha, ou será ao redor da linha verde?" As crianças discutem e decidem, por exemplo, que será ao redor da linha verde. O condutor do jôgo faz como se lhe disse e põe a placa no chão, o que permite a todos verificar. Se houver engano, recomeça-se.

Pode-se complicar os jogos desta série, como na precedente, tomando formas mais complexas. À medida que o número de eixos de simetria aumenta, a partida torna-se mais difícil.

FIG. 14 JÔGO DE VIRAR E DE ROTAÇÃO



Fôlha de trevo de quatro fôlhas (ou quadrado) com quatro eixos de simetria

1.19. *Terceiro jôgo de virar: "Como voltar para casa com um só movimento?"*

Êste jôgo é uma combinação dos dois primeiros. Começa-se com o 8 e joga-se primeiramente de "Aonde é que se vai?". Quando os jogadores deixaram sua base e se encontram em sua nova posição, o condutor pergunta: "E agora, como é preciso que eu vire a placa para que leve vocês de volta para casa, com um único movimento"? Para o mestre é evidente que, se é uma viradela verde que os conduziu onde estão, será ainda uma viradela verde que os reconduzirá ao campo, mas para as crianças não é tão evidente. Naturalmente, com uma forma tão simples, o jôgo torna-se ràpidamente muito fácil, mas não ocorre o mesmo com formas mais complexas. Por isso é indispensável, também aqui, tentar complicar pouco a pouco o jôgo, e talvez algumas crianças tenham necessidade, para sair-se bem, duma experiência cuja aquisição requer bastante tempo.

1.20. *Quarto jôgo de virar: "Aonde se vai com dois movimentos?"*

Uma vez mais, toma-se o 8 com as marcações habituais. As crianças já estão habituadas ao jôgo de "Aonde se vai?" e ficarão satisfeitas de executar um jôgo que comporte dois deslocamentos sucessivos, ao invés de um. O condutor diz, por exemplo: "Vou virar a placa duas vêzes consecutivas e é preciso que vocês achem onde estarão depois. Vou virar primeiro vermelho e depois verde. Vamos ver!" Após algumas discussões, os jogadores determinam sua localização final. (Como precedentemente, o condutor terá mostrado ràpidamente como vai virar a placa, repondo-a logo à sua posição original). As crianças executam o deslocamento, depois o condutor realiza os dois movimentos efetivamente e põe a placa no chão para produzir-se o contrôle. Em caso de êrro, cada qual dirige-se para seu campo e reinicia-se. O condutor pode, evidentemente, recomeçar invertendo a ordem das côres. Uma vez ainda, complicam-se progressivamente as formas, estando o interêsse

destas complicações ao mesmo tempo em obrigar as crianças a refletir e em impedi-las, pelo grande número de variantes, de reter as soluções de cor, pois que não se trata de ensinar casos, mas de exercitar seu raciocínio.

1.21. *Quinto jôgo de virar: "Como voltar à base com um só movimento após duas viradas sucessivas?"*

Quando as crianças compreenderam bem onde vão parar após duas viradas sucessivas, pode-se perguntar-lhes: "De que modo é necessário revirar a placa para levar vocês de volta à sua base com um só movimento?" Êste jôgo revela-se freqüentemente bastante difícil para as crianças, sobretudo se não derem suficiente atenção ao retôrno ao campo após uma única virada (talvez adivinhando que o movimento a executar é o inverso daquele de partida). Por isso é necessário fazer vários exercícios, muito cuidadosamente, com formas simples, a fim de assegurar-se de que as crianças não adivinham ao acaso, mas consideram efetivamente a forma e refletem sôbre o que vai passar-se. Elas terminam por descobrir que existe um movimento que as reconduz à base de uma só vez. Podem-se imaginar, aqui também, outros jogos utilizando formas mais complexas.

1.22. *Sexto jôgo de virar: jôgo de caçar*

Desta vez, embora conservando o traçado do 8, tomam-se apenas três jogadores — um condutor do jôgo, um "caçador" e uma "lebre". O caçador e a lebre partem do mesmo campo, que será o único marcado. A lebre diz, por exemplo, ao caçador: "Vou fazer dois movimentos — uma virada vermelha seguida de uma virada verde. Pegue-me numa só vez". O condutor executa as viradas e a lebre, o deslocamento. A seguir o caçador deve descobrir como pegar o outro jogador em uma única virada. Se conseguir, terá ganho a partida.

Pode-se, naturalmente, continuar com outras formas, e pode-se também mandar a lebre retornar a seu terreiro com um só movimento. Para isso, é claro, necessita executar o movimento inverso daquele do caçador; tal será fácil se ela foi pêga, mas, no caso contrário, terá que achar o caminho por si mesma.

1.23. *Primeiro jôgo de rotação: "Aonde se vai?"*

Vamos agora retomar todos os jogos que acabam de ser descritos, mas, desta vez, em lugar de serem séries de viradas, serão séries de rotações, isto é, a placa será girada em seu próprio plano. Para mudar um pouco, comecemos aqui, não mais com um 8, mas com uma fôlha de trevo de quatro fôlhas traçada no chão, dispondo o condutor igualmente duma placa com forma de fôlha de trevo do mesmo tipo. Traçam-se os quatro eixos de simetria e escreve-se, em cada um dos campos, o nome do jogador ao qual está afeto.

Como vimos precedentemente, há quatro movimentos de rotação possíveis — uma volta completa, meia-volta, um quarto de volta à direita (diremos "um à direita") e um quarto de volta à esquerda (diremos "um à esquerda"). Inicialmente os jogadores têm o direito de segurar a placa enquanto o condutor a faz girar, a fim de lhes fazer sentir e compreender bem que as bases mudam de lugar, quando a placa é girada, mesmo que *pareça* estar na mesma posição.

O condutor pergunte então aos jogadores: "Vou executar meia-volta. Onde estarão vocês então?" Mostra o movimento, executando-o ràpidamente e levando logo a placa à sua primeira posição. As crianças discutem, colocam-se, o condutor efetiva a rotação e põe a placa no chão para a verificação. Em caso de falha, cada qual retoma seu campo a fim de recomeçar. Depois executa-se uma volta completa, ou uma à esquerda, muda-se de formas, para terminar com formas geométricas puras.

1.24. *Segundo jôgo de rotação: "Como fazer para chegar lá?"*

Toma-se a fôlha de trevo com quatro eixos de simetria. Desta vez o condutor diz: "Vou girar a placa e, quando tiver terminado, Miguel estará no lugar de José. Como é que ela vai girar?" Novamente, as crianças discutem e dão a resposta, por exemplo: "Um à direita", ou "Uma meia-volta". O condutor faz então girar a placa conforme a resposta e verifica-se se os jogadores trocaram de lugar como o previsto.

Pode-se recomeçar com outras formas. Pode-se igualmente variar o jôgo, dizendo ao condutor que interrogue um único jogador cada vez, o que torna o jôgo competitivo, caso se achar oportuno.

1.25. *Terceiro jôgo de rotação: "Como voltar à base com um só movimento?"*

Utiliza-se ainda a fôlha de trevo anterior. O condutor provoca primeiramente um deslocamento por uma rotação simples e única. Depois, quando os jogadores já estiverem na nova posição, pergunta-lhes: "Que tipo de volta é preciso dar, agora, para retornar ao campo com um só movimento?" É evidente que êste movimento consiste no inverso do movimento de partida, mas as crianças não o discernem sempre de imediato e algumas experimentam dificuldade. Aqui também, pode-se variar o jôgo, dirigindo antes a pergunta à equipe tôda e depois a um só jogador cada vez. Podem-se igualmente empregar formas diferentes e mudar a posição inicial dos jogadores.

1.26. *Quarto jôgo de rotação: "Aonde se vai com dois movimentos consecutivos?"*

A mesma fôlha de trevo é usada. O condutor diz aos colegas: "Vou dar meia-volta e depois, uma à direita. Onde estarão vocês então?" Os jogadores refletem, discutem, tomam posição. O condutor executa a primeira rotação, faz uma pausa, realiza a segunda rotação e, enfim, põe a placa no chão em sua posição final. Os jogadores verificam suas posições e conferem seus nomes sôbre a placa. Caso tiverem-se enganado, voltarão para suas bases e tentarão de nôvo.

1.27. *Quinto jôgo de rotação: "Como reentrar em casa com um só movimento, após tê-la abandonado com dois movimentos sucessivos?"*

Os jogadores se colocam em seus respectivos campos, e o condutor joga de "Aonde se vai com dois movimentos?", jôgo no qual, em princípio, as crianças tiveram tempo de habituar-se. Com os jogadores em posições diferentes de suas bases próprias, o condutor pergunta: "E agora, como devo girar minha placa para que vocês voltem para casa com um só movimento?" Os jogadores discutem isso entre si e dão a resposta (por exemplo: "Dê um à direita"). O condutor executa a rotação e põe a placa no chão. É fácil, então, ver se a resposta estava certa, porque, se ela não o estava, os nomes dos jogadores não estarão diante de seus respectivos campos. Precisará então recomeçar.

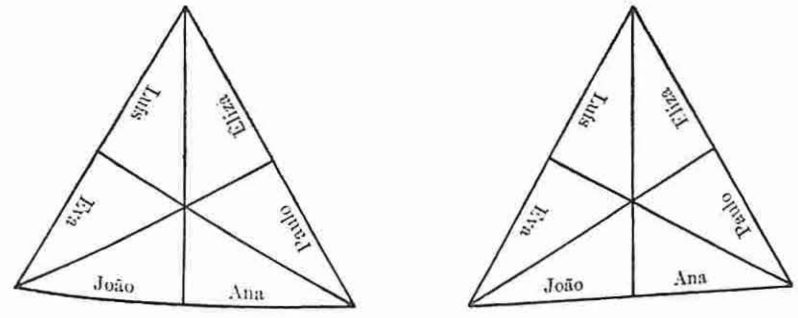
1.28. *Sexto jôgo de rotação: jôgo de caçar*

Êste jôgo se pratica como aquêle que foi descrito acima em 1.22. A "lebre" resolve, por exemplo, dar um quarto de volta à esquerda, depois meia-volta, com a obrigação para o "caçador" de pegá-la com um só movimento; todos vemos que êste deverá ser um quarto de volta à direita. Se a lebre tem que entrar de nôvo em seu terreiro com um único movimento, requerer-se-á um movimento inverso daquele do caçador, portanto um quarto de volta à esquerda.

Pode-se prosseguir, nesta série, tomando outras formas, e não esquecendo de estudar especialmente os efeitos da volta completa — que eqüivale à ausência de todo movimento.

Todos os jogos de que tratamos acima podem-se efetivar com duas figuras superpostas. Por exemplo, constroem-se os dois triângulos abaixo:

Fig. 15



Um dos triângulos levará inscrições nas duas faces (isto é, no reto e no verso, atendendo a que as inscrições no verso estejam exatamente abaixo das inscrições correspondentes no reto), ao passo que o outro conterá inscrições apenas numa face; pode-se, aliás, traçar êste último no chão, uma vez que será o triângulo fixo, enquanto que o primeiro será móvel. Graças a estas duas figuras, ao invés de fazer as crianças deslocarem-se, podemos limitar-nos a lhes fazer calcular a posição do triângulo, e as verificações se realizam superpondo os dois triângulos.

Pode-se, naturalmente, fazer o mesmo com outras figuras: quadrados, retângulos, losangos, algarismos 8, fôlhas de trevo com três ou quatro fôlhas, etc., para fazer as crianças compreenderem bem que se podem praticar os mesmos jogos com figuras bem diferentes.

Frisamos mais uma vez que, se nossos jogos são apresentados em uma certa ordem, é ùnicamente porque não pudemos proceder de outra forma; mas não há nenhuma necessidade de observar rìgidamente esta ordem. Com efeito, pode-se muito bem, por exemplo, combinar ràpidamente jogos de virar e jogos de rotação, tanto mais que isso é, às vêzes, necessário: assim, o movimento eqüivalente a duas viradas sucessivas ao redor de dois eixos de simetria diferentes não é uma virada ao redor de um eixo de simetria, mas uma rotação do plano da figura (1.21 acima).

Existe, entretanto, considerando-se o aspecto psicológico, uma certa ordem na sucessão das construções mentais, entre os jogos estado-operador-estado e os jogos operador-operador-operador. Os jogos de "Aonde se vai?" e de "Como chegar lá?" são jogos estado-operador-estado. No jôgo "Aonde se vai?" tem-se um primeiro estado e o operador que age sôbre êste estado e a questão está em saber qual estado se obtém, quando determinado operador age sôbre determinado estado. No jôgo "Como chegar lá?" dão-se o estado inicial e o estado final e a questão está em saber qual é o operador que produz esta mudança de estado. Êstes dois jogos são o oposto um do outro.

O terceiro jôgo, "Como voltar à base com um único movimento?" é manifestamente um jôgo de inversão, pois que, para restabelecer a situação inicial, que consiste em estar na própria base, precisa executar o movimento inverso daquele que fôra necessário para deixar esta base. Isto aqui já é perguntar-se sôbre o movimento em si mesmo. Todo movimento, nos jogos que descrevemos, admite um movimento inverso. A compreensão das propriedades das inversões conduz a uma melhor compreensão das relações entre a adição e a subtração e, mais tarde, entre a multiplicação e a divisão.

A etapa seguinte consiste em pesquisar o efeito de dois movimentos consecutivos numa situação particular, isto é, em perguntar-se, em presença de um estado inicial conhecido, qual será o estado final após a aplicação de dois operadores sucessivos.

Não é o quarto, mas o quinto tipo de jogos de rotação que conduz à generalização desta etapa. Nos jogos de caçar, o que se pesquisa, é o *deslocamento equivalente*, correspondente a dois movimentos consecutivos dados. As crianças não perceberão a eqüivalência senão quando virem que, *seja qual fôr a situação de partida*, o caçador recorre sempre a um determinado movimento para pegar a lebre, tôda vez que esta tenha executado

certos movimentos, em número de dois, numa dada ordem. Mais exatamente, se a lebre executa os dois movimentos A e B, nesta ordem, o caçador fará sempre o mesmo movimento único, C, para pegá-la, qualquer que tenha sido o ponto de partida da caça. É por isso que, aliás, é bom efetivar o jôgo de caçar de tal maneira que tôda sucessão dada de dois movimentos da lebre seja executada a partir de todos os pontos iniciais possíveis da caça.

É sòmente depois disso que poderemos perguntar-nos se a ordem, mediante a qual a lebre executa seus movimentos, exerce influência sôbre o movimento do caçador. Descobrir-se-á assim que, nos jogos de quatro posições (8, fôlha de trevo de quatro fôlhas, quadrado), esta ordem não tem importância alguma. Pelo contrário, quando se trata de rotações ou de viradas de um triângulo eqüilátero, a ordem é determinante, e talvez as crianças encontrem aqui sua primeira experiência concreta de situações, nas quais a ordem de intervenção dos operadores afeta o resultado.

SEGUNDA PARTE

PRÁTICA DA MEDIÇÃO

1. Exercícios preliminares

Os fatos, os acontecimentos que se observam na natureza podem, sob certo aspecto, ser classificados em duas categorias: os *contínuos* e os *descontínuos*. Por exemplo, quando se contam as maçãs de uma cesta, a passagem de uma maçã que se conta à seguinte não é contínua. A mesma coisa com os passos ao caminhar, porque não há nenhum passo entre o primeiro e o segundo, entre o segundo e o terceiro — cada um sucede o outro, em seqüência regular. Por outro lado, muitos fenômenos da natureza se nos apresentam como contínuos — o escoamento do tempo, o crescimento duma planta, os deslocamentos no espaço, etc. A medição ou a contagem de acontecimentos descontínuos oferecem pouca dificuldade, mas talvez não aconteça o mesmo com os eventos contínuos. Como medir o crescimento? Como saber que uma coisa é maior que outra? Como medir a fuga do tempo?

Naturalmente, a criança resolve freqüentemente êsses problemas com uma simples olhada. Vê claramente que a professôra é maior que ela e não vê nisto problema algum. Não tem nenhuma necessidade de medir a professôra; principalmente quando tem bem poucos anos, resolve êstes casos com o auxílio de seus sentidos ùnicamente. A análise não lhe é necessária.

Chega um momento, contudo, onde a necessidade de uma medição se faz sentir — medição da distância, medição da capacidade, medição do pêso, etc. É dêste gênero de medições que trataremos aqui.

Como se comparam dois pesos, por exemplo? É fácil a uma criança declarar que um livro é mais pesado que outro, se ela puder experimentar-lhes o pêso com as mãos. Mas, quando se lhe dão dois livros quase com o mesmo pêso, terá dificuldade em decidir. Talvez responda: "Acho que é êste". Ou: "Não sei!" Em tal caso, não há outra maneira de resolver a dificuldade senão recorrer à medição. Para medir uma quantidade que varia de maneira contínua, escolhe-se uma quantidade unitária arbitrária e mede-se o crescimento, a variação, em têrmos desta quantidade unitária escolhida.

Distância

Suponhamos que se queira medir a distância entre duas paredes opostas da sala de aula — pode-se, à vontade, tomar um livro, qualquer livro, e ver quantas vêzes cabe entre as duas paredes; a distância será de "tantos livros". Ou, melhor ainda, tomem-se os cadernos dos alunos para colocá-los, se forem todos do mesmo modêlo, um após outro, alinhados entre as duas paredes. Conta-se o número de cadernos e tem-se a distância. Mas isto é deslocar o problema, é provocar uma pergunta que alguma criança pode muito bem fazer: "E um caderno, qual é o comprimento dêle?" É preciso, então, achar uma unidade menor para medir o caderno; pode-se, por exemplo, verificar quantas caixas de fósforos "dá" um caderno, e deduzir dali mesmo o comprimento da aula em caixas de fósforos. Pode-se medi-lo com botões de um certo tipo, etc. Está aqui evidentemente a menor unidade pràticamente utilizável para medir o comprimento. Se quisermos que o resultado obtido seja utilizável por outros, que não assistiram à operação, é não menos evidente que se impõe seja a unidade escolhida claramente definida e aceita por todos os que querem, também êles, medir o comprimento.

Tempo

O mesmo se diga com relação ao tempo. Suponhamos que se queira saber quanto tempo é necessário a alguém para fazer um certo trabalho, sua tarefa, por exemplo. Precisará valer-se de um processo qualquer de medir tempo. Admitamos se use uma ampulheta. Esta é virada no momento em que o trabalho começa e, cada vez que a areia terminou de escoar, torna-se a virá-la de nôvo. No final, o número de vêzes que foi virada constitui uma medida do tempo empregado na execução do trabalho. Mas, aqui ainda, a pergunta que não faltará: "E a areia, quanto tempo requer para fluir?" Precisa, então, achar uma unidade de medida menor. Pode-se, talvez, deixar uma torneira pingar gôta a gôta, ou bater pé no chão rìtmicamente, e dizer que precisa "tantas" gôtas para que uma ampulheta esvazie. Mas então, alguém poderá perguntar quanto tempo decorre entre duas gôtas, etc.

Pêso

E é ainda a mesma coisa com o pêso. De quanto um objeto é mais pesado que outro? Pode-se, por exemplo, pôr um objeto sôbre um prato de balança e o outro sôbre o segundo prato e contar os objetos que se acrescentam para estabelecer o equilíbrio entre os dois pratos. Tomemos, para ilustrar, pregos médios de 5 cm de comprimento e suponhamos que tenha precisado cinco pregos num dos pratos para reestabelecer o equilíbrio. Pode-se afirmar que o objeto mais pesado é "mais pesado de cinco pregos" que o outro. Mas então, alguém pode perguntar: "E o mais leve, de quanto é mais pesado que os pregos?" É possível responder colocando um prego em um dos pratos, o objeto leve no outro, e juntar pregos no primeiro prato, até obter o equilíbrio. Entretanto pode ocorrer que não se consiga achar a diferença; é possível que, após colocar dez pregos no primeiro prato, a balança penda ainda para o lado do objeto, que está no segundo prato, e que, acrescentando-se mais um prego no primeiro prato, a balança se incline para o outro lado. Poder-se-ia então dizer que êstes pregos não são aptos para isso e tomar pregos menores, ou moedas, ou quaisquer outros objetos iguais entre si quanto ao pêso, em têrmos dos quais se possa determinar o pêso.

É preciso dar às crianças oportunidade de descobrir que as unidades que elas utilizam para medir quantidades de variação contínua são completamente arbitrárias. Não há, matemàticamente, diferença alguma entre a utilização de pregos para medir o pêso de um côco e a utilização, para o mesmo fim, de pesos do sistema métrico. Naturalmente, por razões de ordem social, é necessário dispor de um sistema unificado de medidas de pêso, de comprimento, de tempo. Se, com efeito, se dissesse a alguém "Venha quando eu terminar de bater duas mil vêzes no chão", esta pessoa chegaria mais ou menos tarde conforme se tenha batido mais ou menos ligeiro. O mesmo com os pregos. Seria sempre preciso perguntar pelo tipo de pregos. Por isso criou-se um sistema padronizado de medidas de comprimento, de pêso, de capacidade, de tempo. Mas o que precisa saber é que originalmente essas medidas foram escolhidas de maneira absolutamente arbitrária.

2. Descoberta da medição

Consideremos antes medidas de distância. Como é desejável utilizar comprimentos arbitrários de tôda sorte, para focalizar bem seu caráter arbitrário, precisa prever quantidade bastante considerável de varas de madeira, ou ripinhas, de diferentes comprimentos, à inteira discrição do mestre. Por exemplo, pode-se tomar unidades de 10cm de comprimento, unidades de comprimento do sapato de Ana-Maria, e assim por diante.

Após ter escolhido a unidade arbitrária de medida a usar, pode-se preparar uma meia centena de exemplares desta unidade, levar as crianças ao pátio, onde se colocam duas pedras

separadas uma da outra por uma certa distância. Depois perguntar-se-á às crianças quantas ripinhas se poderiam colocar, uma depois da outra, entre as duas pedras. Será para elas uma primeira experiência de estimação de comprimentos. Uma criança dirá: "Dez"; outras: "Vinte e cinco"; outras ainda: "Três". As crianças de poucos anos não têm nenhuma idéia de comprimento em têrmos de outro comprimento, antes que adquiram certa prática nisto. Por isso é bom realizar um jôgo em grupo, onde cada criança, por sua vez, deve adivinhar o número de unidades de que uma pedra se distancia da outra. Anotadas tôdas as estimativas, verifica-se alinhando as varas, uma após outra, tanto quanto possível em linha reta, e conta-se. Aquela que chegou mais perto da verdade busca as pedras e vai colocá-las em outra posição e repete-se o jôgo. É preciso efetivar êstes exercícios com unidades diferentes.

Pode-se naturalmente organizar jogos semelhantes na sala de aula e fazer perguntas bastante diferentes, como: "Se colocássemos êste armário entre a janela e o quadro-negro, será que haveria suficiente lugar para êle caber?". E ainda: "Será que sobra lugar para interpor uma cadeira entre êstes dois armários?" Para a cadeira, pode-se decidir experimentando, mas para o armário é mais difícil, e as crianças descobrirão o interêsse da unidade de medida. A condição de atingir êsse objetivo é escolher sempre situações que tenham sentido para elas.

Após ter jogado assim com unidades arbitrárias, as crianças trocá-las-ão por unidades correspondentes a unidades legais, decímetro, metro, ou ainda jarda, pé e polegada, e repetirão todos os jogos anteriores. As perguntas se tornarão então do tipo: "Quantas varas de um metro se podem colocar entre as duas pedras?" Na pergunta seguinte substitui-se metro por decímetro. No fim de certo tempo, elas desvendarão que há uma relação entre essas unidades, particularmente que uma é dez vêzes (ou três vêzes) mais comprida que a outra. Podem-se também introduzir comprimentos de um centímetro, talvez mesmo centímetros quadrados recortados em linóleo, ou em madeira, o que será particularmente instrutivo se, por exemplo, as réguas e regüinhas de um metro e de um decímetro foram cortadas de objetos de um centímetro de largura.

Até o presente, entretanto, as medições foram efetuadas com uma só unidade de comprimento cada vez, alinhando sucessivamente elementos desta unidade e contando a seguir êstes elementos. As crianças compreenderam que se substituíram estas diversas medidas arbitrárias por certas medidas "especiais", das quais se lhes terão fornecido os nomes a seu pedido.

Mas as crianças vão, sem dúvida, então, descobrir que certos comprimentos não são mensuráveis exatamente em têrmos da unidade usada, e não ficarão satisfeitas de ter deixado, na extremidade final, um pedaço que não puderam medir. É bom que êste pequeno problema se apresente por si mesmo, por ocasião de uma medição feita com réguas de um metro (ou de uma jarda) — as crianças não demorarão em aperceber-se de que se podem servir dos decímetros, ou dos pés, para "encher o buraco". E se os decímetros, ou os pés, não satisfizerem, recorrerão a pedacinhos de um centímetro [1], ou de uma polegada, de sorte que, pouco a pouco, se construirá a noção de medição efetuada primeiramente com unidades de grandes dimensões, depois com unidades cada vez menores.

Na etapa seguinte forma-se a idéia de medida sem recorrer a um tão grande número de peças unitárias. A professôra distancia duas pedras entre si de um número redondo de metros e diz às crianças: "Será que vocês podem medir a distância entre essas duas pedras com uma única medida de um metro?" A solução desta pequena questão pede às vêzes algum tempo, mas de ordinário, há certas crianças mais dotadas que se põe à ação experimentando. Ver-se-á que lhes virá muito ràpidamente a idéia de deitar a régua ao chão, fazer uma marca, transportar a régua, fazer uma marca, e assim por diante, depois contar o número de marcas para saber quantas vêzes deitaram o metro no chão. A etapa seguinte consiste em contar simultâneamente os metros, em vez de fiar-se nas marcas feitas no chão ou sôbre a régua. Passar-se-á em seguida, bastante fàcilmente, do metro ao decímetro e ao centímetro.

Entenda-se bem, não se pode fazer as crianças medirem, enquanto não souberem contar e não tiverem adquirido pelo menos a noção elementar de número que decorre da adição. Uma vez dominada a adição dos números, pode-se também, está claro, proceder a adições de comprimentos, ou de expressões de comprimento em têrmos de diversas unidades. Para exemplo, suponhamos que as crianças, medindo a distância entre duas árvores do pátio, tenham achado sete varas de um metro, nove varinhas de um decímetro e quinze pedacinhos de um centímetro [1]. (E é o que, realmente acontece com freqüência com crianças de poucos anos!) Se são animadas a recomeçar, talvez descubram que é possível substituir dez dos quinze pedaços de um centímetro por uma regüinha de um decímetro, com o que resulta, entre as duas árvores, sete metros, dez decímetros e cinco centímetros. Uma outra criança notará talvez que, tendo-se dez varas de um decímetro, se pode substituí-las por uma vara de um metro, de maneira que, finalmente, chegarão a oito metros, nenhum decímetro, e cinco centímetros. São necessários, é escusado dizer, numerosos exercícios antes que as crianças dominem plenamente a eqüivalência entre um comprimento expresso de uma certa maneira e o mesmo comprimento expresso de uma outra. É, aliás, uma atividade que é necessário, tanto quanto possível, conduzir de par com a das trocas de peças multibases. (Ver *Conjuntos, Números e Potências*).

É preciso, no entanto, não esperar que as crianças já sejam capazes de servir-se de uma régua ordinária duplo-decímetro graduada, sem a menor assistência. A maioria dêsses instrumentos são subdivididos demais miùdamente para crianças e convém co-

---

1) Ou ainda, onze varas de uma jarda, duas de um pé e dez de uma polegada. (Damos estas medidas para nossos leitores canadenses. N. da Trad. francesa.)

meçar com réguas graduadas sòmente em centímetros ou em polegadas. As crianças são assim levadas a descobrir o nexo entre estas graduações e as ripinhas isoladas de um decímetro, ou de um centímetro. É muito importante, aliás, utilizar regüetas com exatamente um decímetro de comprimento, o que não é geralmente o caso dos instrumentos vendidos no comércio, que são quase sempre mais longos.

Descrevemos com muitos detalhes todo o processo de aquisição da noção da medida de comprimento. É preciso passar pelas mesmas etapas com relação à superfície e o volume.

3. Medição do tempo

A estimativa do tempo constitui igualmente uma atividade importante. Já falamos da ampulheta e é bom recorrer a outros meios análogos, antes de tocar nos pêndulos e nos relógios, por exemplo, à "*vela-relógio*". Esta é muito fácil de conseguir. Basta tomar uma vela muito delgada, que queima depressa, e marcar nela traços espaçados de um centímetro. Pode-se também bater pé, contar as gôtas que caem de uma torneira, e assim por diante, pouco importa o que seja; o mestre escolha à vontade, mas é importante que adote ao menos dois meios diferentes. Precisa insistir também sôbre que a medida de tempo, como a de comprimento, começa pelo emprêgo de unidades arbitrárias.

Das unidades arbitrárias passa-se aos segundos e aos minutos, que são, aliás, unidades usuais de medida já conhecidas pelas crianças, porque fazem parte de seu universo quotidiano. É muito útil, num jardim da infância, ter um cronômetro — vê-se que, com um pouco de prática, as crianças são, de fato, capazes de avaliar o tempo com a precisão de um ou dois segundos. Se os adultos não chegam sempre a isso, é antes falta de prática que dificuldade inerente à operação. Como na medida de comprimentos, precisa dar à medida de tempo uma motivação — assim, minutos e segundos poderão revestir-se de sentido se forem utilizados para medir a duração de uma

tarefa executada pelas crianças. Por exemplo, pode-se medir o tempo necessário a uma criança para fazer a volta ao redor da sala de aula, ou qualquer outro circuito no interior da escola. Assim, há a possibilidade de fazê-las, para ilustrar, ir, uma a uma, até a porta, depois, no corredor, até a porta da sala seguinte e voltar ao ponto de partida, medindo cada vez o tempo decorrido. Sem demora, as crianças notarão que algumas delas levam mais tempo que outras, ou menos, para fazer a sua caminhada, e essa constatação as conduz à noção de velocidade. Mas são necessárias muitas experiências antes que as crianças compreendam que, quando se caminha mais ligeiro, leva-se menos tempo, e quando se caminha mais devagar, leva-se mais tempo. A êste respeito, um bom exercício consiste em traçar uma pista de corridas, onde as crianças primeiramente caminham de modo normal, depois caminham ligeiro, depois correm, e finalmente correm o quanto dá, medindo cada vez o tempo. Com experiências dêste gênero, as crianças concebem a idéia do que seja medida de velocidade — tal distância coberta em tal tempo — e se pode, por exemplo, adotar como unidade de velocidade o número de metros percorridos em tantos segundos, o que tem muito mais sentido que o número de quilômetros por hora. Uma criança desta idade não faz nunca cinco ou seis quilômetros numa vez e, em todo caso, uma hora é uma duração longa demais para começar; caso se queira procurar experiências acessíveis às crianças do jardim de infância ou do primário, é preciso fazê-las medir em metros por segundo a velocidade com que podem caminhar.

Outro excelente exercício, adequado a auxiliar as crianças em adquirir experiência na estimativa e medida do tempo, utiliza o plano inclinado. Basta dispor de uma tábua suficientemente comprida, inclinada de um certo ângulo, que não se mede, mas conhecido pelo mestre. Nela faz-se rolar objetos redondos, medindo o tempo necessário a cada um para chegar até embaixo. Quando se modifica a inclinação, precisa fazê-lo de maneira bem visível às crianças. Após a alteração, novamente faz-se rolar objetos. Medem-se os intervalos de tempo e as crianças descobrem que precisa mais tempo aos objetos, no seu percurso, quando a inclinação é pequena, e menos tempo, quando é grande.

Como no caso de medidas de comprimento, sobretudo quando se usa um cronômetro, as crianças descobrem as relações entre segundos e minutos, uma vez que estas duas unidades estão nos limites de sua capacidade de atenção. Entretanto, o número "60" é grande demais para ser abarcado de maneira imediata, de maneira que não se deve incluir seu emprêgo, salvo com as crianças mais dotadas.

Quanto à unidade de medida que é o "dia", esta é acessível às crianças, quando nos servimos dela para medir o tempo de realização de uma tarefa — um desenho que Francisco terminou em três dias e Henrique, em quatro dias, etc. Anota-se cada dia dedicado a uma tarefa. Por outro lado, estabelece-se muitas vêzes uma confusão em sua mente, nesta fase, entre a "semana escolar" de cinco dias e a semana completa de sete dias. Por isso talvez seja preferível adiar pelo menos até o segundo ano de escola qualquer consideração de relações entre os dias e a semana.

4. Medição de capacidade

Pode-se abordar as medições de capacidade de maneira análoga. Tomam-se vários recipientes diferentes que possam conter água. As formas dêles também devem variar. Nós, em particular, começamos com garrafas e frascos de diversos tamanhos, principalmente porque é fácil de consegui-los — garrafas de um litro, garrafas de três quartos, de meio litro, pequenos frascos de farmácia de diversas capacidades, e mesmo, com um pouco de sorte, grandes garrafas de dois litros de água de Javel, garrafões, etc. Pode-se rotulá-las com A, B, C, D, E, por ordem de capacidade (de início serão tratadas como medidas arbitrárias) e, ao mesmo tempo, utilizar caçarolas, frigideiras, fôrmas e outros recipientes rasos, porque é essencial às crianças adquirir experiência com recipientes de mesma capacidade mas de forma diferente. Aqui também começa-se com estimativas, tomando as diferentes garrafas e pedindo às crianças que avaliem, por exemplo, quantas "garrafas A" cabem na "garrafa B". Mesmo com um funil, o exercício é difícil para as pequenas, que derramam muita água e, às vêzes, não sabem mais onde estão com a contagem. Torna-se ainda mais difícil quando se manda a criança pôr de volta nas garrafas menores a água que acaba de ser vertida na grande, a fim de verificar, por contagem, a resposta precedente. Realmente, precisa certo tempo às crianças para admitir que esta operação inversa constitua de fato uma contraprova. É necessário pois repetir bastante seguidamente todos êstes exercícios — encher um frasco grande com pequenos, devolver aos pequenos o conteúdo do grande. Precisa também fazer derramar o conteúdo de uma garrafa em uma caçarola, ou num recipiente raso de mesma capacidade (porque as crianças, ver-se-á, têm a tendência de afigurar-se que um recipiente alto contém mais líquido que um recipiente baixo, mesmo após ter vertido a mesma quantidade de líquido nos dois).

Das unidades arbitrárias as crianças passarão aos "litros" e outras medidas convencionais, e não levarão muito tempo para capacitarem-se das relações que existem entre elas. Serão usados os conceitos dos números de que elas dispõem já de maneira segura.

É muito interessante fazer exercícios de estimação de volume, porque êles conduzem à noção, extremamente importante, de conservação da quantidade. As crianças terão ocasião de ver que pode haver tanta água num recipiente largo e baixo quanta num recipiente alto e estreito e que o volume de água não depende da maneira como se estende. No começo custará às crianças compreender isto, mas podemos perguntar-nos se o fato não decorre simplesmente de nunca terem tido oportunidade de fazer experiências dêste gênero. Se elas fazem e refazem exercícios a êsse respeito, transvasando sempre a mesma quantidade de água em recipientes de diversas formas e de diversos tamanhos, dão-se conta de que é a mesma água e de que não pode haver mais água no recipiente alto e fino que no recipiente largo e raso. Ou então, precisará perguntar-lhes de onde ela vem, se há mais.

5. Medição de pêso

Introduzir-se-á a medição de pêso seguindo a mesma progressão. Para começar, se fará segurar objetos de pêso sensìvelmente diferente; e avaliar qual é "o mais pesado", ou "o mais leve", ou se são "iguais". Tudo isso dependerá, note-se bem, da maneira como os conceitos de comparação tiverem sido adquiridos anteriormente, por intermédio dos jogos de formação de conceitos. Se não foram adquiridos ainda, os primeiros jogos sôbre pesos contribuirão para formá-los. Depois se apresentará a balança comum, com dois pratos, e, para começar, se porá, nestes, objetos de mesmo pêso, a fim de mostrar que os braços permanecem horizontais. Depois tomar-se-ão dois objetos de pêso nìtidamente diferente — em que a diferença foi prèviamente apreciada pelas crianças tomando-os nas mãos. Postos nos pratos da balança os objetos, esta penderá para um lado — precisará então deixar as crianças retomar os objetos dos pratos, para sentir se é o mais pesado ou o mais leve que leva a balança a pender para seu lado. Em seguida inverter-se-ão os objetos e as crianças verão que é ainda o corpo mais pesado que fica mais baixo.

Vem a seguir uma etapa essencial, onde, no caso de dois objetos de pesos desiguais, se procura restabelecer o equilíbrio, o que torna a ser a pesquisa de quanto um é mais pesado que o outro. Tomem-se pregos, moedas, seja lá o que fôr, e contem-se essas unidades arbitrárias de pêso para medir a diferença. A esta altura, algumas crianças particularmente dotadas atinarão que mediram a diferença de pêso entre os dois objetos,

mas que não mediram o pêso dos objetos em si, e quererão fazê-lo. De nossa parte constatamos que as crianças gostam de segurar os objetos na mão e estimar quanto representam em pregos ou em moedinhas — por vêzes mesmo mantêm o objeto em uma das mãos e com a outra ajuntam pregos e sopesam-nos até que crêem ter encontrado o mesmo pêso. Em seguida põem o objeto num prato e o conjunto de pregos ou moedas, no outro, e, se não há equilíbrio, acrescentam ou retiram pregos até que os braços fiquem bem "retos". Note-se bem, uma vez que se está no estádio das unidades arbitrárias, não há nenhuma razão para não se tomarem unidades menores, como tachas ou alfinêtes, por exemplo. Assim são induzidas a pesar quantidades de objetos variados, escolhidos para que a experiência tenha tôda sua significação no ambiente em que elas vivem.

A fase seguinte constitui-se em fazê-las equilibrar o objeto primeiro com pregos grandes, depois com pequenos. Feito isto, a professôra pergunta: "Que é mais pesado, seu conjunto de pregos grandes ou o de pregos pequenos?" Ou também: "Qual é o monte de pregos onde há mais ferro? O monte de pregos grandes, ou o monte dos pequenos?" E então, embora as crianças tenham "pesado" o mesmo objeto com os pregos grandes e com os pequenos, observar-se-á que responderão, quase sempre, que há mais ferro nos grandes, que êstes são mais pesados. O momento é pois chegado de pesar um dos conjuntos de pregos com o outro, para que constatem que têm o mesmo pêso. Tudo isso foi feito com "unidades" arbitrárias de pêso.

É tempo agora de introduzir as unidades legais. Substitui-se, portanto, o monte de pregos por conjuntos de pesos de 1 grama, ou de 1 onça. Procede-se como até agora, mas as crianças sabem que, desta vez, todos os pesos são iguais. Pomo-nos a pesar, mas as crianças sabem que não há mais, de agora em diante, "gramas pequenos" e "gramas grandes", como havia pregos pequenos e pregos grandes. Pesa-se pois com gramas, até que a professôra traga pesos de dez gramas e as crianças descubram por si mesmas que êstes últimos podem substituir, cada um, dez pesos de um grama. Será muito divertido apresentar, pouco a pouco, a coleção completa dos pesos cilíndricos de latão, com seu sistema de múltiplos:

1g	2g	5g
10g	20g	50g
100g	200g	500g

assim como os pesos de ferro fundido. Em todos os casos, é preciso deixar as crianças descobrir, por si mesmas, as correspondências e eqüivalências, e fazer praticar os exercícios de pesagem colocando o objeto em um dos pratos da balança e, no outro, pesos grandes primeiro, depois pesos cada vez menores, até a consecução do equilíbrio. Pode ocorrer que elas achem que um objeto pese, por exemplo, 1kg e 2 pesos de 500g e 4 pesos de 100g, caso tenham à disposição duas séries. Pergunte-se-lhe então se não se poderia fazer diferente, e elas acharão que se pode substituir os dois pesos de 500g por um pêso de 1kg e enunciar o pêso do objeto sob a forma: "2kg e 400g". Já encontramos o caso correspondente a propósito da medição de comprimentos, mas é preciso reconsiderá-lo sempre com tôdas as variantes possíveis.

6. Medição de superfícies

Pareceu-nos útil introduzir, a esta altura, a medição de superfície, ou área, mas sem desenvolvê-la tanto quanto as outras medidas. Aqui também, inicia-se com medidas arbitrárias — quadrados recortados em papelão ou em linóleo, de 12 assim como de 25cm de lado, ladrilhos ou azulejos, peças de cerâmica para revestir o chão (o tipo São-Caetano tem 10 cm de lado, os azulejos e ladrilhos têm em geral 15 cm de lado, mas isso pouco importa, pois que não se procura cair exatamente no sistema métrico), e passa-se ao trabalho de "recobrir". Mede-

se assim, por intermédio destas medidas arbitrárias, a superfície de quadrados ou de retângulos traçados a giz no chão, a superfície de mesas e de cadeiras, e superfície coberta por um livro com quadrados menores (pastilhas, por exemplo). As crianças põem seus quadrados sôbre a superfície a medir, ajeitando-os para cobri-la completamente (no comêço, escolhem-se formas tais que dêem justo), depois contam os quadrados colocados. Pouco a pouco, retiram-se as unidades arbitrárias, deixando apenas quadrados de um decímetro e de um centímetro de lado. Pode-se mesmo ter algumas peças quadradas de pano grosso ou papelão com um metro de lado, para medir no pátio, mas como seria demais embaraçoso — para não dizer nada do preço — tê-las em grande número, pode-se usar uma só peça, assentá-la no chão tantas vêzes quantas fôr necessário, traçando-lhe os contornos, cada vez antes de levá-la adiante, e contando o número de quadrados assim desenhados. Terminar-se-á efetuando medições de superfícies, onde se necessite o emprêgo sucessivo de unidades cada vez menores para completar o "cobrimento" começando com peças grandes.

O que é essencial em bem compreender, em todo caso, é que precisa que as crianças descubram por si as relações existentes entre as diversas unidades. Que elas aprendam então que há dez centímetros em um decímetro, ainda passa, mas o que se impõe evitar, a qualquer preço, é de lhes fazer decorar tabelas de eqüivalência sem que as tenham descoberto por si mesmas. A descoberta pessoal através de experiências reais é indispensável; não basta uma experiência isolada — é preciso uma multidão de experiências, a fim de que a criança extraia delas sua convicção, e possa referir-se a elas se, posteriormente, vier a esquecer.

Alguns mestres julgarão sem dúvida que é gastar muito tempo para não aprender grande coisa, que as crianças não adquirem, dessa maneira, muitos "dados", "fatos", para justificar o número de lições que se devem consagrar aqui. Não é absolutamente nada disso! Fêz-se decorar durante tempo suficiente para que se saiba que o psitacismo não é senão medíocre substituto de experiências dêste gênero [2].

2) A ausência de tais experiências no método tradicional tem conseqüências bastante graves em certas escolas onde, com muita freqüência, alunos convidados a estimar o comprimento de uma sala, por exemplo, respondem indiferentemente 5m ou 1m, etc. Aprenderam de cor palavras que lhes ficaram vazias de sentido. (N. da Trad. francesa.)

APÊNDICE II

JOGOS DESTINADOS À INTRODUÇÃO DA PRÁTICA DA MEDIÇÃO

É aconselhado aos mestres organizar os exercícios concernentes à medição de maneira a conduzir conjuntamente o estudo dos diversos aspectos — distância, tempo, pêso, etc. Êstes exercícios dependerão do nível atingido pela criança no conhecimento do número; no entanto, não é indispensável que tenha conquistado uma compreensão completa de todos os aspectos, tanto cardinal quanto ordinal, do número. Acontece, aliás, que a compreensão do número sai reforçada pela aplicação nas medições das noções já adquiridas.

Chamamos a atenção dos mestres sôbre alguns jogos preparatórios que interessam os conceitos e que nós incluímos nos jogos conducentes ao estudo da geometria; está claro que êsses jogos devem preceder os de medições, assim como precedem os jogos sôbre geometria. Aliás, encontrar-se-ão alguns dêles no presente capítulo, em razão mesmo de sua relação direta com as medidas.

Jogos conducentes à compreensão da medição de comprimento

2.1. *Jogos conceptuais*

O estudo da medida de comprimento implica a compreensão de conceitos tais como *mais comprido que*, *mais curto que*, *tão comprido quanto, mais alto que, maior que, menor que, tão grande quanto, mais perto que, mais longe que, tão longe quanto, estreito, largo, mais estreito que, mais largo que, grosso, fino,* e assim por diante, sob a ressalva de que, em cada caso, o conceito se limite à medida de comprimento.

Quando uma criança chega à escola, o mestre não conhece a extensão de sua experiência anterior e da formação de seus conceitos. Por isso precisa organizar exercícios em grupos, que vão permitir ao mestre fazer-se uma idéia do estado de desenvolvimento de cada criança nestes domínios, exercícios que, em acréscimo, auxiliarão certas crianças a cobrir um eventual atraso.

Tomar-se-á, como já o dissemos, uma bandeja com diversos objetos, e convidar-se-ão as crianças a escolherem um lápis "mais curto que" aquêle que se lhes mostra, ou uma caixa "mais larga", e assim por diante. As próprias crianças podem ser comparadas para estabelecer "maior do que", ou "menor do que", com a condição de que se limite a comparação a duas crianças por vez, nesta fase de desenvolvimento. Podem-se referir objetos da aula ou do pátio em matéria de distância, mandando as crianças, por exemplo, dispor objetos que satisfaçam diversas condições de afastamento ou aproximação. É preciso não ir muito ligeiro e não é mau que a professôra anote numa caderneta as constatações sôbre várias experiências, para estar certa de que cada criança compreendeu bem do que se trata em cada caso. Se existe um conceito que faça sentir à criança a necessidade de uma medição de comprimento (pequena diferença de tamanho ou de distância), precisará introduzi-lo neste momento, e assegurar-se de que o conceito foi bem compreendido, antes de prosseguir.

Entretanto, as operações de obtenção de medida em si não são aconselhadas neste estádio. Tudo o que se pode deixar fazer às crianças é colocar os objetos lado a lado, para facilitar a comparação, mas é necessário que elas decidam da diferença referindo-se ùnicamente a sua percepção.

2.2. *Disposição por ordem de tamanho*

Trata-se de uma extensão dos jogos precedentes. Em vez de contentar-se em declarar se um objeto é, por exemplo, "mais comprido" que outro, podem-se comparar diversos (dois ou mais), levando as crianças a enfileirá-los de acôrdo com o tamanho, a distância, etc., mas sempre em têrmos ùnicamente da *percepção*, sem que intervenha a medição. Há crianças que, no começo, têm dificuldades em compreender o que se entende por "por ordem de tamanho", mas, após ver diversas vêzes arrumações segundo o tamanho, estas dificuldades desaparecem. Aquilo de que elas gostam muito é comparar os tamanhos de seus colegas de classe. Cremos que, nesta fase, é preferível apresentar diferenças bem evidentes, a fim de eliminar qualquer necessidade de medição.

2.3. *Avaliar distâncias*

É na sala de aula que precisa, de preferência, começar êstes jogos, servindo-se do mobiliário, por exemplo. A professôra interroga: "Se deixarmos o armário grande no canto, você acha que eu poderia colocar minha estante e o armário pequeno ao longo do muro, ou será que não há bastante lugar?" Com tais perguntas, as crianças reagem de diversas maneiras. Algumas atiram uma resposta, qualquer uma, ao acaso, outras, julgando a questão sem dúvida acima de suas fôrças, mantêm-se mudas, outras enfim examinam os comprimentos dos móveis em questão e propõem respostas. A professôra diz então: "Pois bem, se a gente experimentasse!" As crianças ajudam a deslocar os móveis e vê-se o que acontece. A partir desta primeira experiência, que terá fornecido elementos de comparação, a professôra pode perguntar: "E esta cadeira, será que a gente vai poder colocá-la também?" O problema é mais simples, porque as crianças são auxiliadas pelo exercício precedente e, ademais, a distância a apreciar é menor. Desta vez, obtêm-se respostas mais decididas, provindas de um maior número de alunos. Depois a professôra continua: "Vocês acham que se poderia colocar uma de suas mesinhas de cada lado do piano?" Somam-se às anteriores outras perguntas do mesmo gênero; as respostas serão primeiramente avaliações, seguidas pela verificação com o deslocamento dos móveis. Pode-se mesmo introduzir a noção de "quanto" em algumas perguntas: "Quantas mesas se poderiam colocar entre a janela e o quadro-negro?"

Após algumas destas perguntas, o interêsse voltar-se-á para os móveis grandes, que não se podem deslocar — o armário grande, o piano. As crianças refletem mais ou menos longamente, as respostas diferem e discute-se. A um dado momento, a professôra intervém e diz: "De qualquer maneira, não se pode deslocá-los, porque são pesados demais; como é que se poderia fazer para ver quem tem razão?" Geralmente há pelo menos uma criança que propõe verificar qual é o comprimento do piano e marcá-lo no chão. Se não, a professôra encontrará um meio de levar as crianças a descobrir que se está num caso onde é necessário efetuar medição de uma maneira ou de outra.

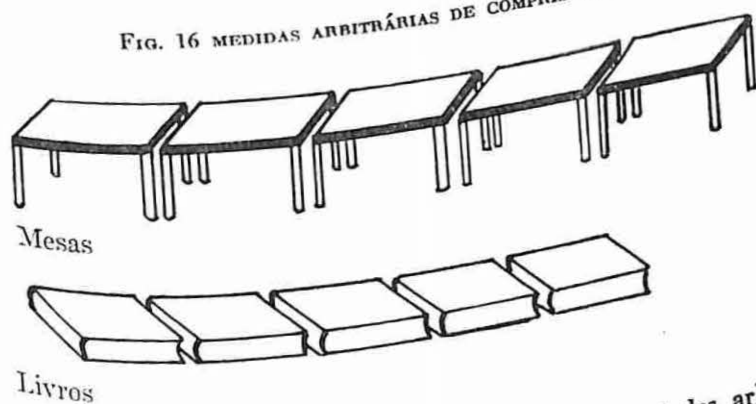
Pode-se também pôr em evidência esta necessidade de medição, experimentando comparar os tamanhos das crianças com leve diferença de altura. (Nos jogos precedentes, tomaram-se crianças de alturas claramente diferenciadas.) Ou ainda, põem-se duas pedras no pátio a distâncias sensìvelmente eqüivalentes e pedem-se os pareceres das crianças. Aqui, de nôvo, após discussão, elas convêm que é preciso medir.

2.4. *Introdução de unidades arbitrárias de comprimento*

Os jogos a seguir intervêm logo que as crianças sentiram a necessidade de uma maneira qualquer de medir comprimentos. A professôra então pode perguntar: "Qual é a distância daqui até o muro?" — Evidentemente, as crianças não sabem o que responder, pois que não têm ainda nenhuma experiência de medida. Inversamente, já encontraram perguntas como: "Quantas mesas se podem colocar entre êstes dois muros?" Algumas

responderão talvez: "Isso vai dar (mais ou menos) seis mesas". É que, portanto, utilizam sua mesa como unidade arbitrária de comprimento. Se essa resposta não aparecer por si, a professôra poderá suscitá-la perguntando: "Olhem aqui, quantas mesas vocês acham que se poderiam colocar entre o quadro-negro e o fundo da sala, encostando-as juntas uma depois da outra, como no nosso último jôgo?" As respostas diferem, e verifica-se operando o transporte. Conta-se e conclui-se, após alguma hesitação, que dá aproximadamente dez mesas. A professôra então pergunta se não haveria outra coisa, na aula, que se possa utilizar para medir melhor. Em geral, elas propõem cadeiras, e executa-se a operação. Acha-se, por exemplo, um resultado de vinte cadeiras. Pode-se em seguida tomar os cadernos, alinhá-los extremo a extremo no chão, e verificar que são necessários quarenta. O comprimento da sala é pois "igual" a "dez mesas", ou "vinte cadeiras", ou "quarenta cadernos".

FIG. 16 MEDIDAS ARBITRÁRIAS DE COMPRIMENTO



Pode-se, em continuação, com as mesmas unidades arbitrárias, medir outras distâncias. Depois a professôra introduz outras unidades arbitrárias, por exemplo, uma ripa de comprimento qualquer. Possuindo em reserva certo número destas ripas, de mesmo comprimento, entrega-se a vários grupos de crianças para medir diversas distâncias, procedendo como no caso das mesas, cadeiras e livros. Depois de ter feito o maior número possível de medições na sala, elas podem sair e medir distâncias, por exemplo, entre duas pedras colocadas separadamente no chão. Antes de começar a medir, se lhes pede que "adivinhem" a resposta. Escrevem-se todos os "palpites" — a criança que tiver dado a melhor resposta será encarregada de colocar as pedras para o exercício seguinte.

Pode-se incluir mais unidades arbitrárias semelhantes, que se utilizam da mesma maneira. Nós, em particular, sempre damos a estas "unidades" a mesma largura de um centímetro, para qualquer comprimento. É uma preparação à introdução posterior das unidades legais. Algumas destas "unidades" tinham mais de um metro (ou de um pé, ou de uma jarda), outras tinham apenas cinco centímetros, etc., tudo com a intenção de fornecer às crianças experiências tão variadas quanto possível, e tudo dentro dos limites de suas faculdades de compreensão. As crianças adoram fazer medições de comprimento e de distância, discutem apaixonadamente os resultados e aprendem por experiência que é necessário, na medida do possível, alinhar as unidades em linha reta!

2.5. *Apresentação das unidades legais*

Quando as crianças se familiarizaram com o emprêgo das unidades arbitrárias, pode-se levá-las a constatar, no andar de uma discussão, que mediram a mesma distância com, por exemplo, 25 varinhas de certa unidade, 16 de outra e 70 de uma terceira. Elas acharão que está bem certo, pois que sabem de que unidade se serviram cada vez. A professôra pergunta então: "E se, ao entrar em casa, vocês quisessem dizer à mamãe o comprimento do piano, como é que fariam?" Elas respondem imediatamente que basta dizer que êle mede "doze varinhas de unidade", mas alguns colegas retorquirão que mede sòmente "sete varinhas". "Mas então, como fazer para ter certeza de

que ela vai saber de fato o comprimento do piano, sem levar para casa uma das unidades e mostrar-lha?" É provável que alguma criança diga que precisa uma unidade que mamãe conheça também, e, em definitivo, uma unidade que todo mundo conheça. Se a idéia não vem a ninguém, a professôra pode sugeri-la, depois apresentar "o metro" (ou "a jarda") de que todos já têm mais ou menos ouvido falar, que em tôda parte tem o mesmo nome e que tem sempre o mesmo comprimento. É entregue às crianças, que começam a experimentá-lo, medindo comprimentos com um número exato de metros. Após isto, a professôra pergunta: "E como é que a gente deve fazer para medir aquela distância?" (mostrando uma distância inferior a um metro). As crianças reconhecem que precisa uma unidade menor — e conhecida de todo mundo. Pode-se então, nas mesmas condições, mostrar-lhes o decímetro, o centímetro, e fazê-las executar medições [3]. Assim também se lhes fará medir as mesmas distâncias, seja em jardas, seja em pés, mas usando uma só unidade por vez.

Proceder-se-á da mesma forma relativamente à apresentação da polegada *, sem ir além, para o momento.

Durante esta fase do desenvolvimento, é preciso não levar a medir senão distâncias que contenham um número redondo de unidades, a fim de evitar tôda mistura de unidades — mede-se tudo em metros, ou tudo em centímetros, etc.

2.6. *Emprêgo de várias unidades diferentes na mesma medição*

Agora, as crianças tornaram-se mestres na arte de medir em "metros", ou em "decímetros", ou em "centímetros"; sabem sucessivamente fazer coincidir a origem de uma vareta com a extremidade de outra de unidade escolhida, em linha tão reta quanto possível, e contar seu número.

3) Uma jarda = 0,914 m; um pé = 30,48 cm; uma polegada canadense = 54 mm.

*) Evidentemente estas unidades estranhas ao sistema métrico não devem ser apresentadas às crianças do Brasil (N. D. T.).

É momento, pois, de mudar de exercício. Levam-se ao pátio três conjuntos de varetas — metros, decímetros e centímetros, ou jarda, pé e polegada — e a professôra localiza duas pedras separadas por uma certa distância, com o cuidado de que esta distância não seja igual a um número exato de metros. Pergunta-se então às crianças : "Que unidade vocês vão tomar para medir esta distância o mais depressa possível?" Não há dúvidas de que elas tomem os metros. Mas sobra no fim um pedaço que não pôde ser medido e que ocasiona a pergunta: "É suficiente?" Elas reconhecem em geral que não o é e algumas propõem recomeçar tôda a operação com varetas menores. A professôra admitirá que é certamente uma das maneiras de resolver o problema, mas pergunta se não haveria uma outra, se não haveria meio de medir sòmente o que sobra, com uma unidade menor. As crianças atinam com a sugestão e valem-se dos pauzinhos de um decímetro de comprimento para cobrir a diferença. Anota-se o resultado, digamos 7 metros e 3 decímetros. Repete-se com outras distâncias, sempre usando metros e decímetros, até que as crianças tenham assimilado o processo. Depois, a professôra dá a medir uma distância, onde já não dê mais exato nem em decímetros.

Desta vez as crianças não acham nenhuma dificuldade; tendo manejado metros e decímetros enquanto era possível, não manifestam hesitação alguma, quando se lhes pergunta como "fechar o buraco", em tomar centímetros, em contar e, enfim, em enunciar a distância em metros, decímetros e centímetros.

Medem-se assim numerosos comprimentos, numerosas distâncias, fazendo as crianças trabalhar em duplas ou pequenos grupos, com o fim de fornecer-lhes oportunidade de discutir sôbre o que estão fazendo.

É ao curso desta etapa que, mais de uma vez, nós observamos crianças que comparavam entre si as unidades, enfileirando ao lado de um metro ripinhas-decímetros, ou, ao lado de

uma ripinha-decímetro, os toquinhos de um centímetro de comprimento [4]. Havia até aquelas que ensaiavam contar quantos centímetros há num metro mas o número era ainda um pouco grande demais para elas. De qualquer maneira, se realmente não lhes viessem à mente tais comparações, poder-se-ia sugerir-lhas, mas, em geral, não será necessário.

2.7. *Diferentes enunciados possíveis de uma mesma medida — Conservação*

Durante o sexto jôgo de medições, ouvir-se-ão, por vêzes, respostas formuladas de maneira "não conforme"; isto provém do fato de que certas crianças começam a utilizar unidades de ordem inferior quando teriam podido tomar ainda unidades de ordem maior. Podem daí resultar, aliás, algumas discussões entre as crianças. Uma mesma medida pode ter sido efetuada de modo absolutamente correto, mas ser enunciada de duas e até de várias maneiras diferentes. Uma criança pode concluir: "quatro metros, doze decímetros e dezesseis centímetros", com a impugnação de um colega, que pretende tal não estar certo. A melhor maneira de enfrentar esta situação é discuti-la enquanto as ripinhas ou regüetas estão ainda no lugar — temos, neste caso, no chão, 4 ripinhas de um metro, 12 regüetas de um decímetro e 16 regüetas de um centímetro. Contemo-las de nôvo e façamos com que tôdas as crianças admitam que o resultado enunciado coincide com a medida verdadeira da distância em causa. Pedimos então à criança que não estava de acôrdo que explique como faria e, após discussão, talvez se convenha que se pode sempre substituir dez regüetas de um decímetro por uma vara de um metro e que, se se tem pressa, é preciso fazer assim. Faz-se, pois, a demonstração para o caso, o que dá 5 metros, 2 decímetros e 16 centímetros.

4) O material "Fatôres em Côres", ou os "Números em Côres", contêm regüetas de um centímetro e de dez centímetros.

Se nenhuma criança protesta, a professôra pode perguntar: "Será que ainda se pode mudar aqui alguma coisa?" — Nova discussão. Pode-se sempre substituir dez regüetas de um centímetro por uma de um decímetro. Feito isso, encontra-se o valor de 5 metros, 3 decímetros e 6 centímetros. Estaria ainda certa a medida? Inicialmente não há acôrdo entre elas, mas finalmente reconhecem que 4 metros, 12 decímetros e 16 centímetros é a mesma coisa que 5 metros, 2 decímetros e 16 centímetros, ou 5 metros, 3 decímetros e 6 centímetros. É sempre a mesma distância que se mediu, mas a última maneira de apresentar o resultado é, sem dúvida, a mais simples.

Proporcionando a cada grupo numerosas experiências dêste gênero — e será preciso, às vêzes, um pouco de imaginação para suscitá-las — as crianças assimilarão que se pode formular uma mesma medida com exatidão de várias maneiras diferentes, consoante a unidade de medida usada, mas que há também, em cada caso, um modo de proceder melhor que os outros.

2.8. *Medir com um mínimo de unidades*

É tempo de perguntar às crianças como fariam para medir um comprimento, ou uma distância, se dispusessem apenas de um metro, de um decímetro e de um centímetro. Lembremos, com efeito, que até agora elas tiveram tantas unidades quantas queriam e que, para obter o resultado, as enfileiravam retilìneamente, sem deixar espaços, e as contavam. Suponhamos que um grupo seja encarregado de medir o armário grande e que seus componentes mostrem não saber como fazer. A professôra pode perguntar-lhes, por exemplo: "Então, que é que vamos fazer primeiramente?" Embaladas pelos jogos anteriores, convirão em servir-se do metro. Coloca-se pois o metro no chão, e a professôra continua: "Será que precisamos de fato mais de um metro?" Se êste fôr o parecer das crianças, ela acrescenta: "Sim, mas só dispomos de um. . . Como fazer?" Sem demora, uma das crianças sugere fazer uma marca à extremidade do

primeiro metro, no chão, transpô-lo, fazer outra marca e assim por diante. Se, entretanto, tal não acontecer, a professôra poderá fazer uma marca no final do primeiro metro e esperar a reação das crianças. Atingido o ponto em que o metro se torna por demais longo para medir o que resta, anota-se o número de metros já postos e continua-se em decímetros, depois, anàlogamente, em centímetros.

É freqüente, contudo, que êsse procedimento, de medir com uma só régua de cada modêlo, se revele bastante difícil para algumas crianças, nos começos. Pela primeira vez, não abarcam simultâneamente a totalidade da operação de medir e não são capazes de voltar atrás e verificar o que já fizeram com tanta segurança; por isso é-lhes necessário muita prática. Em certos casos, pode mesmo ser indispensável, após efetuada a medição, anotar o resultado só depois de recomeçar, deixando tôdas as réguas em seqüência no lugar, para convencer bem certas crianças mais lentas de que efetivamente se executou uma operação eqüivalente.

Ocorrem às vêzes inexatidões quando as crianças contam as marcas e é bom fazê-las contar em voz alta.

2.9. *Emprêgo de marcas sôbre réguas*

Para êste jôgo, utiliza-se uma régua de um metro graduada em decímetros e uma regüinha de um decímetro graduada em centímetros. Quando se apresentarem êstes aparelhos pela primeira vez, convidar-se-ão as crianças a comparar estas graduações com as unidades que já possuem. Por exemplo, indique-se-lhes o exercício de pôr sôbre uma mesa uma régua de um metro e, ao lado, dez regüinhas de um decímetro, ou uma régua de uma jarda e três réguas de um pé, a fim de que se convençam de que as graduações correspondem precisamente às unidades utilizadas até o momento. O mesmo procedimento com os decímetros e os centímetros, ou com os pés e polegadas. Como já admitiram, ao longo de suas discussões, que dez decímetros representam um metro e que dez centímetros substituem um decímetro, esta operação tôda não deveria oferecer dificuldade particular, mas é preciso, apesar disto, não subestimá-la na importância e nem omiti-la.

As crianças servem-se agora de suas novas réguas graduadas para medir a distância de um ponto a outro, ou do comprimento de um objeto; fazem marcas se julgarem útil e anotam os resultados, se fôr o caso. Advertimos de que esta maneira de fazer não é de fácil compreensão para as crianças desta idade, portanto é preciso não ir ligeiro demais. Cometerão muitos erros no começo, em razão, sobretudo, da negligência na leitura dos resultados. E aqui se apresenta uma bela ocasião de insistir sôbre a necessidade do cuidado e da precisão. Certas crianças mais rápidas na compreensão acharão mais cômodo, quanto à precisão, colocar a régua sôbre sua aresta, o que facilita a leitura, e outras as imitarão. Precisa estimulá-las neste ponto, porque isto lhes será, mais tarde, de grande valia.

2.10. *Jogos de trocas*

Poder-se-á fazer apêlo para êste tipo de jogos desde que
se tenham introduzido os jogos de trocas com as peças multi-
bases. Dá-se às crianças uma coleção de "unidades" de medida,
por exemplo, 9 réguas de um metro, 14 regüetas de um decí-
metro e 46 regüetas de um centímetro. Diz-se-lhes que as tro-
quem por outras medidas, se fôr necessário, de maneira a ter
o mesmo comprimento de ripinhas e poder medir a mesma
distância total, mas com o mínimo de peças possível. Reco-
menda-se-lhes começar pelas regüinhas. Uma primeira criança,
por exemplo, vai tomar dez regüinhas de um centímetro e tro-
cá-las por uma regüeta de um decímetro Uma segunda criança
faz o mesmo, depois uma terceira, enfim uma quarta, e não so-
bram mais que seis regüinhas de um centímetro. Há, portanto,
agora 9 réguas de um metro, 18 regüetas de um decímetro e 6

regüinhas de um centímetro. A criança seguinte toma dez réguas de um decímetro e vai trocá-las por uma régua de um metro. Uma outra quer fazer o mesmo, mas não é mais possível e, em definitivo, têm-se 10 réguas de um metro, 8 regüetas de um decímetro e 6 regüinhas de um centímetro, o que constitui a resposta.

Mas é necessário que as crianças sejam persuadidas bem de que, agindo assim, não se mudou o comprimento total das réguas ou a distância suscetível de ser coberta. Há duas maneiras de verificação. Pode-se, em primeiro lugar, fazer, antes de começarem as trocas, um segundo conjunto de réguas igual àquele que se deu às crianças, e comparar os resultados. Pode-se também, no início, juntar, origem com extremidade, tôdas as réguas, em linha reta, e traçar no chão duas referências, na origem da primeira e na extremidade da última, e depois, terminadas as trocas, alinhar novamente as réguas obtidas, constatando que se permaneceu nos mesmos limites, isto é, que a distância é a mesma.

Conclusão

Os jogos acima não constituem absolutamente a única maneira de oferecer a aprendizagem da medição dos comprimentos na prática. Há certamente muitas outras. O essencial é que as crianças passem por tôdas as etapas que acabam de ser descritas.

Jogos conducentes à compreensão da medição do tempo

Os jogos que seguem serão, tanto quanto possível, da mesma ordem que aquêles que serviram para a aprendizagem da medição de comprimentos, mas apresentarão algumas diferenças, devidas à própria natureza do tempo e ao modo pelo qual é preciso medi-lo.

3.1. *Primeiro tipo de jogos — Formação de conceitos*

Existem muito poucas crianças que, a esta idade, já examinaram conscientemente o escoamento do tempo e os mestres não encontrarão quase crianças que se fazem uma idéia clara do que signifique "tanto tempo quanto", "mais tempo que", ou "menos tempo que".

É preciso não perder de vista, tampouco, que, procurando às crianças as experiências de que se espera contribuam em desenvolver êsses conceitos simples, se torna necessário valer-se de intervalos de tempo bastante breves, tendo em conta que a extensão temporal da atenção das crianças é ainda bastante limitada. Talvez seja o ouvido que oferece a melhor via de penetração primeira dessas experiências. Por exemplo, a professôra pode tocar dois trechos de música nìtidamente diferentes e perguntar qual dêles levou mais — ou menos — tempo. Se um dos trechos é lento e grave (lembra o lôbo, o urso), o outro, alegre e rápido (lembra os coelhinhos), as crianças poderão referir-se a isto, sem ter que empregar os têrmos "o primeiro" e "o segundo", que talvez ainda não compreendem, ou que não sabem ainda usar. Na realização de jogos dêste tipo, a professôra auxilie as crianças a prestar atenção ao fluxo do tempo e, simultâneamente, a se fazerem uma idéia dos intervalos que são "mais longos do que", ou "mais curtos do que", ou "tão longos quanto" outros.

Pode-se, a seguir, encarregar as crianças de dois "trabalhos" diferentes. Um, por exemplo, consistirá em atravessar a sala, ou o pátio, de um extremo a outro, ao passo que um segundo será fazer-lhe a volta. Pode-se sugerir que uma criança, ou um grupo de crianças, execute sucessivamente cada um dos deslocamentos, enquanto outra criança, ou grupo, se preocupa do tempo que passa. Pergunta-se depois à classe o que levou mais — ou menos — tempo. Sendo a diferença entre os dois caminhos muito franca, as crianças devem poder responder sem dificuldade.

No exercício seguinte, pede-se a diversas crianças que façam exatamente a mesma coisa. Tem-se, por exemplo, uma caixa grande de botões misturados, e cada criança deve tirar dela certo número de botões do mesmo modêlo. Logo que alguém terminou, levanta-se e diz em voz alta: Pronto. Quantas perguntas então se podem fazer! "Quem levou menos tempo?" "Quem levou mais tempo?" "Quem levou mais tempo que Pedro?" "Quem levou menos tempo que Margarida?" "Quem terminou antes?" E assim por diante. Mas sempre com o cuidado de não dar a impressão de que se considera com mais favor a criança que foi mais rápida.

Far-se-ão ainda diversas "tarefas" dêste gênero, levando a atenção das crianças ùnicamente sôbre o tempo que passa, até que tenham bem consciência das diferenças entre intervalos de tempo e possam resolver se um intervalo é mais curto, ou mais longo, ou o mesmo que outro.

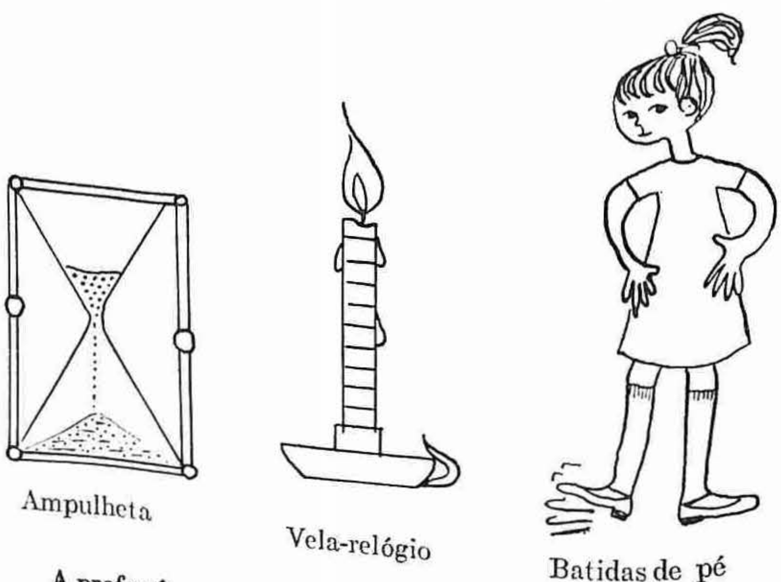
Pouco a pouco, caminha-se para o caso em que as crianças serão obrigadas a hesitar, em razão da pouca diferença; a professôra poderá então perguntar se não haveria um meio de medir o tempo, para estar certo de não enganar-se. É claro, a maioria das crianças sugerirá tomar um relógio, ou um despertador! A professôra admitirá, mas insistirá em perguntar se não haveria outro meio.

3.2. *Segundo tipo de jogos — Emprêgo de unidades arbitrárias de medida do tempo*

Quando se quer medir o tempo, precisa ter um meio de medi-lo, e poder-se-á aproveitar o fato para informar as crianças de que não houve sempre relógios. A fim de prepará-las à idéia de empregar unidades de medida arbitrárias, a professôra pode muito bem apresentar uma vela prèviamente dividida em secções com circunferências coloridas. Estas circunferências estarão suficientemente próximas uma da outra para que a unidade de tempo seja relativamente breve. Encarrega-se um grupo de crianças de olhar a vela enquanto outro grupo executa certa "tarefa". Os que cuidam da vela devem contar quantas marcas desapareceram durante a execução da tarefa. Pode-se apresentar velas de diversos modelos, com circunferências mais ou menos espaçadas, a fim de fazer compreender que as unidades não têm sempre a mesma extensão.

Pode ocorrer que certas tarefas não correspondam a um número exato de unidades de vela, caso em que a professôra pode sugerir que se bata o pé, para medir os intervalos intermediários. Ter-se-á, pois, para ilustrar, um grupo que cuida da vela, outro que bate o pé, enquanto um terceiro grupo realiza o trabalho. Concluir-se-á assim que, para separar todos os botões, o trabalho durou, por exemplo, três "partes" de vela e sete batidas de pé.

FIG. 17 MEDIR O TEMPO COM UNIDADES ARBITRÁRIAS



A professôra pode então apresentar a ampulheta. As crianças observam como a areia se escoa, como se vira o aparelho quando

tôda a areia desceu. Aqui ainda, um grupo é encarregado de observar a ampulheta, de virá-la e de contar quantas vêzes foi virada, enquanto outros batem pé ou contam em voz alta.

Em geral, todos concordam no que toca à vela ou à ampulheta, mas quando se trata de bater o pé ou contar, discute-se, porque uns contam mais ligeiro que outros; finalmente, atina-se que êsses últimos procedimentos não são satisfatórios, pois que ninguém conta de modo igual, e como saber se alguém bate, ou conta, tão rápido como outro?

3.3. *Terceiro tipo de jogos — As unidades convencionais*

A etapa seguinte necessita de um pêndulo. de preferência com o ponteiro dos segundos central. A professôra faz observar êsse pêndulo às crianças, chamando inicialmente a atenção sôbre a contagem dos segundos. Elas se exercitam em contar em segundos olhando o painel das divisões, depois virando-lhe as costas e em seguida voltando-se para êle a fim de ver se acertaram. Descobrem, a seguir, os minutos. Observam o pêndulo durante um minuto, depois ensaiam avaliar um minuto sem olhar para o pêndulo.

Uma vez que se tiverem familiarizado com os minutos e os segundos, e que tiverem notado como é difícil avaliá-los exatamente, a professôra lhes mostrará um cronômetro e fará uma demonstração de como funciona. Deixar-se-ão algumas crianças manuseá-lo, pôr o ponteiro em marcha e pará-lo. Será utilizado para verificar as estimativas de tempo feitas pelas crianças, lendo nêle as durações exatas. As crianças verão que se trata do mesmo princípio usado nos batimentos de pé, com a diferença de que no cronômetro os intervalos são sempre os mesmos. Começa-se então a empregar êste instrumento para medir o tempo de duração de várias tarefas. Como a unidade mais acessível às crianças é o segundo, preferir-se-ão tarefas relativamente curtas e as medidas serão em segundos. É preciso dar a cada criança a oportunidade de servir-se do cronômetro e nêle ler os resultados.

Em prosseguimento, introduzir-se-ão tarefas mais longas, que se medem em minutos, ou, melhor ainda, em minutos e segundos. Às vêzes mandar-se-ão as crianças estimar intervalos de mais de um minuto, controlando suas respostas com o cronômetro. No fim de certo tempo, ver-se-á que elas adquiriram o hábito de estimar corretamente breves intervalos de tempo e sabem usar o cronômetro.

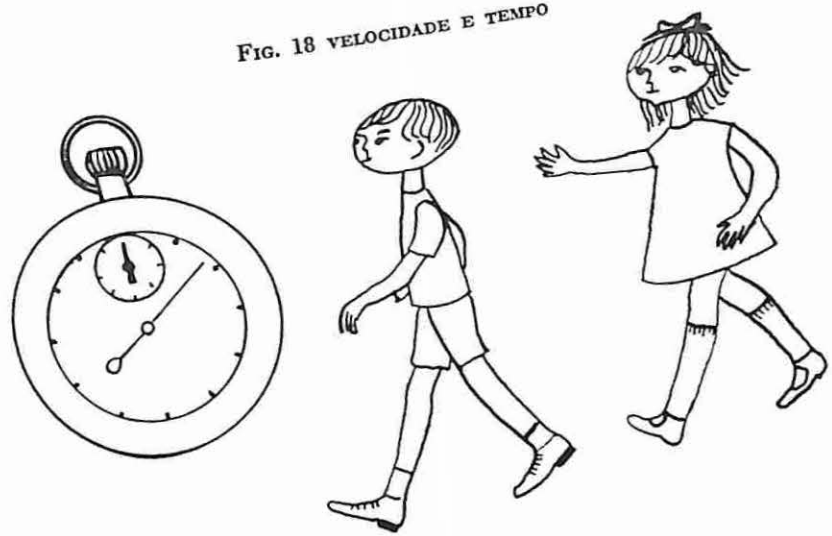
Graças a êsse instrumento, as crianças terão tomado consciência da relação que existe entre os segundos e os minutos — mas como há 60 segundos em um minuto, êste número é ainda grande demais para ser verdadeiramente compreendido nesse estágio.

3.4. *Quarto tipo de jogos — Velocidade e tempo*

Lidando com o cronômetro, as crianças mediram o tempo necessário para a execução de algumas tarefas e notadamente das "voltas" ao redor da sala ou do pátio. Mandam-se, agora, várias crianças, uma de cada vez, fazer o mesmo percurso e anota-se o tempo respectivo no quadro-negro. Sem demora é notado que algumas crianças levam mais tempo que outras. Pergunte-se à classe por que acontece isso — responderão provàvelmente que é porque umas vão mais ligeiro que outras, mas, afora isto, não é certo que elas conceberão a idéia correta da relação entre o tempo e a velocidade. Com efeito, muitas crianças crerão que é aquela que tem o número mais alto de segundos diante de seu nome que foi a mais rápida.

Traça-se então uma pista de corrida no pátio e faz-se caminhar determinado número de alunos de um extremo a outro, cronometrando o tempo. Depois manda-se repetir os mesmos, porém recomendando-lhes, desta vez, de ir tão ràpidamente quanto possível, mas sem correr, marcando o tempo como antes. Feito isso, a professôra pergunta: "Quando é que fizeram mais

FIG. 18 VELOCIDADE E TEMPO



Cronômetro

ligeiro ?" Naturalmente, as crianças responderão "na segunda vez". Então nova pergunta: "Vocês levaram mais ou menos tempo quando caminharam mais ligeiro ?" Mesmo que a resposta salte aos olhos no quadro-negro, pode ocorrer que a maioria das crianças não tenha ainda uma compreensão completa da relação. Recomeça-se pois a experiência, mas mandando agora correr com tôdas as fôrças. O tempo respectivo é notado e repetem-se as duas perguntas anteriores — talvez agora as crianças se apercebam de que, quanto mais ligeiro se vai, menos tempo se leva para fazer o mesmo percurso.

Se houver alguém ainda que não compreendeu, a professôra intervenha. Escolha uma criança, digamos João, que corre o mais depressa possível e marca-se o tempo empregado. Depois a própria professôra faz o mesmo percurso — o mais devagar possível — e assenta-se o tempo. À pergunta "Quem andou mais ligeiro ?" todos vão responder: "João"; e basta referir-se aos resultados para ver que é João quem tem menos segundos e inversamente.

Mais tarde poder-se-á exprimir a velocidade em metros por segundo, mas a êsse nível, as crianças podem muito bem não estarem ainda preparadas.

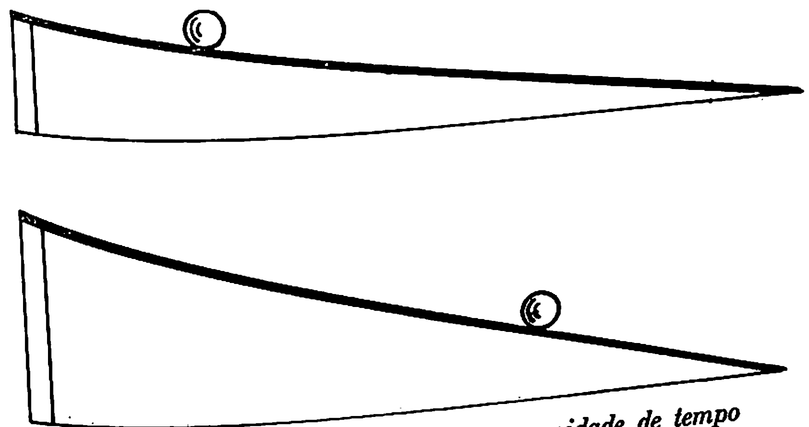
3.5. *Quinto tipo de jogos — O plano inclinado*

Êste jôgo implica a compreensão da relação entre o tempo e as diferentes velocidades de um mesmo movimento. Precisamos, para êste fim, de uma tábua bastante comprida, que se inclinará mais ou menos, apoiando uma das extremidades sôbre suportes de diversas alturas — uma caixa, uma cadeira, uma mesa. É preciso também algumas bolinhas ou esferazinhas de diferentes dimensões e diferentes côres e com uma consistência que as impeça de saltitar. Dá-se, primeiramente, ao plano uma inclinação leve, confia-se o cronômetro a uma criança, enquanto que outra larga as bolinhas, uma por uma, no alto do plano. As demais observam, avaliam a velocidade, anotam os tempos. Depois de rolar várias bolinhas diferentes, aumenta-se a inclinação e repete-se. Pergunta-se às crianças: "A bolinha rolou esta vez mais ligeiro ou mais devagar?" — Todos concordam que desceu mais ligeiro. E então: "Cada esfera levou mais tempo ou menos tempo que antes?" — E as crianças admitem que levou menos tempo. Inclina-se ainda mais a tábua, e as crianças percebem bastante ligeiro que, quanto mais inclinada está a tábua, tanto mais depressa vão as bolinhas e menos tempo levam para descer.

Evidentemente, as crianças não são forçosamente capazes de exprimir suas conclusões desta maneira "adulta", e precisa evitar explicar-lhes a relação nesses têrmos. Contanto que cada criança compreenda o que se passa e mostre que compreende, pouco importa a maneira de expressão. É necessário que tôda criança tenha oportunidade de tomar parte ativa em todos os aspetos do jôgo, porque não aprenderá senão por suas próprias experiências, e entre elas haverá as que necessitam mais experiências que outras. Como a professôra não disporá, provàvel-

mente, de mais que um cronômetro, devem-se prever outras atividades simultâneas, repartindo as crianças, com efeito, em grupos relativamente reduzidos.

FIG. 19 VELOCIDADE E TEMPO — UTILIZAR UM PLANO INCLINADO



3.6. *Sexto tipo de jogos — O dia como unidade de tempo*

Agora, que as crianças adquiriram pela experiência as noções de segundo e minuto, é hora de abordar a noção de dia. Há, está claro, diversas maneiras de fazê-lo. Uma delas consiste em utilizar fitinhas de côr para representar os dias sucessivos passados na escola. Cada manhã, quando as crianças chegam, marcam o dia colando uma fitinha de côr sôbre um quadro especial. O primeiro dia da semana escolar pode assim ser assinalado por uma fita vermelha, o segundo com uma verde, o terceiro com uma amarela, o quarto com uma marrom e o quinto com uma azul. Depois delas procederem assim durante duas ou três semanas, tomam-se em conta os dias sem aula, que se podem marcar com uma fitinha branca e com uma fitinha preta. É preciso que as crianças possam contar o número de dias passados na escola e o número de dias passados em casa, depois o total. Se a professôra perguntar a elas como se chama êste grupo de dias, responderão, sem dúvida, "uma semana", porque é um têrmo familiar. Concluirão na contagem que há sete dias na semana e que vão à escola cinco dias por semana.

É tempo agora de lhes ensinar os nomes dos dias, e aqui só pode ser de cor, porque não há quase outro meio. Valendo-se primeiramente do quadro, depois sem olhar para êle, as crianças procurarão responder a perguntas como: "Sexta-feira vem quantos dias depois de quinta-feira?" e a outras semelhantes, mas é preciso sedimentar sua compreensão por exercícios significativos e não por um "adestramento".

Saliente-se que, para tôda criança de poucos anos, o dia consiste nas horas do dia claro e não admitem a idéia de um dia de vinte e quatro horas. Poder-se-á, pois, discutir também a divisão do dia em "manhã" e "tarde", separadas pela hora do almôço.

3.7. *Sétimo tipo de jogos — As horas: saber ler as horas*

A hora é um intervalo de tempo muito longo para uma criancinha, longo demais para conservar-se na mente sem ajuda. A professôra pode facilitar esta compreensão servindo-se de um relógio de parede com carrilhão, ou de um despertador que ela regula para tocar no fim de uma hora. Ouvindo-o tocar tôdas as horas, as crianças saberão que passou mais uma hora. No fim de alguns dias de experiência com a hora, as crianças talvez queiram fazer como no caso dos dias, assinalando cada hora que termina por uma banda colorida posta num quadro, e, por êsse meio, aprenderão alguma coisa sôbre a passagem do tempo, medido com esta unidade mais longa.

Quando a criança completou dois anos na escola, deve saber "ler a hora", pelo menos com as horas, os quartos de hora e as meias horas, mas êstes conhecimentos são já muito bem ensinados; por isso não nos vamos demorar nisto.

Quando a criança atingiu a etapa da troca de unidades de medida de mesma espécie, pode-se levá-la a fazer alguns exercícios de troca entre semanas e dias, mas é preciso não aventurar-se a isso antes que as crianças tenham chegado, em outros domínios, a não mais ter necessidade de unidades concretas. As relações entre segundos e minutos, assim como entre minutos e horas, necessitam a participação do número 60, que torna as trocas muito difíceis. Por isso precisa reservar êste tipo de experiências para as crianças mais avançadas.

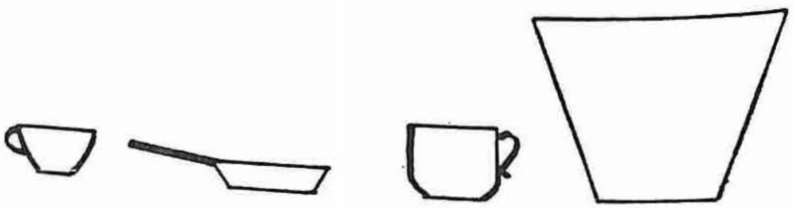
Jogos conducentes à compreensão da capacidade

4.1. *Primeiro tipo de jogos — Unidades arbitrárias de capacidade*

É brincando de encher e esvaziar um recipiente grande, com um ou vários recipientes pequenos, que a criança adquire sua primeira experiência do volume, ou da capacidade. A melhor maneira de fazer isso na escola é, sem dúvida, usar areia sêca ao invés de líquido, tomando como recipiente pequeno, uma latinha e, como recipiente grande, uma gamela, ou bacia. Para começar, não há nenhuma necessidade de contar e de inventar algum modo de anotar quantas latinhas cheias foi preciso. Quando a latinha está cheia, é vertida na bacia e repete-se. Pode-se depois variar o jôgo tomando o mesmo recipiente grande, mas uma latinha menor ou maior. A criança adquire, com êste jôgo e outros análogos, uma vasta experiência de natureza implícita, que lhe é indispensável. Por isso os mestres devem fazer de maneira que cada criança tire sua experiência pessoal de um número tão grande quanto possível de manipulações com recipientes de capacidades muito diferentes.

Quando as crianças se habituaram a êsses jogos e são capazes de contar, pode-se induzi-las a estimar, antes, a quantidade de areia necessária para encher a bacia, e depois, o número de latinhas que precisará. Manda-se controlar suas estimativas de duas maneiras complementares — primeiramente enchendo o recipiente, em seguida esvaziando-o.

FIG. 20 UNIDADES ARBITRÁRIAS DE CAPACIDADE



4.2. *Segundo tipo de jogos — Série de unidades arbitrárias*

Necessita-se, para organizar êstes jogos, dispor de uma série de recipientes diferentes, mas de mesma forma, a fim de facilitar a comparação. Seria desejável, em princípio, dispor de recipientes de gargalo bastante largo e, ao mesmo tempo, relativamente resistentes, tipo garrafa de leite. Mas o que é sobretudo importante é que haja, entre suas diferentes capacidades, relações simples e interessantes. Existem, por exemplo, na França, nas farmácias, uma série de frascos normalizados, não graduados, mas, cuja capacidade está gravada no fundo. Podem constituir uma série de seis frascos, que se rotularão de 1 a 6, sem indicar a capacidade métrica.

Pode-se, para colocar dentro, usar água (já o fizemos), mas não há nenhuma razão de não servir-se de areia fina, arroz, ou qualquer outro material "fluido". Prevê-se um funil por grupo e marca-se, com uma fitinha colorida adesiva, o nível até onde cada garrafa deve ser enchida, senão as crianças podem desorientar-se mais tarde.

Inicialmente, deixam-se as crianças brincar à vontade com a série de frascos, enchê-los, esvaziá-los, fazer transvasamentos

do maior nos menores e vice-versa. São necessários diversos frascos de cada tamanho e muitos exemplares de tamanho pequeno.

Quando a atividade livre perdeu um pouco de seu interêsse, mandem-se as crianças fazer um determinado número de "tarefas", próprias para lhes fazer perceber as relações entre as diversas "unidades". Pode-se, por exemplo, perguntar-lhes quantas vêzes é possível pôr o conteúdo do frasco n.º 1 no frasco n.º 2, ou, inversamente, quantos frascos n.º 1 são necessários para nêles esvaziar o frasco n.º 6. Pode-se recomeçar os mesmos exercícios com outros calibres de frascos e complicar perguntando qual é a garrafa que se pode encher com, por exemplo, quatro conteúdos do frasco n.º 1 e dois conteúdos do frasco n.º 4, ou como transvasar o conteúdo do frasco n.º 5 em dois frascos de mesma capacidade, etc. Grande é assim o número dos jogos possíveis com os frascos de diferentes tamanhos que, por enquanto, constituem nossas unidades arbitrárias.

FIG. 21 UMA SÉRIE DE MEDIDAS ARBITRÁRIAS PARA MEDIR A CAPACIDADE

Exercícios:

Quantas garrafas n.º 2 cheias de água são necessárias para encher a garrafa n.º 5?

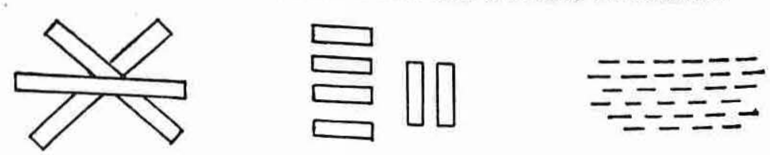
Quantas garrafas n.º 3 podem ser enchidas com a água que contém a garrafa n.º 6?

4.3. *Terceiro tipo de jogos — Unidades arbitrárias de mesma capacidade mas com formas diferentes*

Praticam-se êstes jogos com todos os acessórios dos jogos do segundo tipo, mas com o acréscimo de outras "unidades" de mesma capacidade e formas diferentes. Quanto a nós, tomamos, para êsse fim, caçarolas, potes de mel, pratos fundos, fôrmas de bolos, jarros, etc. O que importa é que as crianças cheguem a compreender que a mesma quantidade de água, ou de areia, pode caber em recipientes de formas diferentes, tendo o mesmo volume que os frascos da série, e, por isso, numerados da mesma maneira. É bom ter, especialmente, recipientes altos e finos correspondentes a recipientes largos e rasos de mesma capacidade.

As crianças começam por descobrir quais são os recipientes que têm a mesma capacidade, embora de forma diferente. Por exemplo, manda-se procurar quais os recipientes que correspondem ao frasco n.º 2, fazendo-as encher êste frasco de água

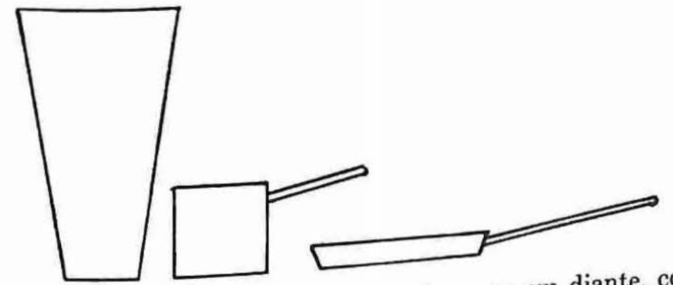
FIG. 22 MEDIDAS DE COMPRIMENTOS COM UNIDADES ARBITRÁRIAS



e esvaziá-lo em diversos recipientes à escolha. É interessante observar as crianças ao curso de seus tateios, porque elas pensam geralmente que os frascos altos e finos contêm mais que os frascos largos e rasos. É necessário, em todo caso, que elas procedam à confirmação, transvasando novamente no frasco de origem o conteúdo do recipiente descoberto. Como cada garrafa numerada deve, em princípio, possuir vários equivalentes, os jogos possíveis não faltarão.

Uma vez "calibrados" os recipientes, as crianças estão preparadas para começar as operações associando os recipientes

FIG. 23 RECIPIENTES DE FORMAS DIFERENTES MAS DE MESMA CAPACIDADE



das formas variadas — considerados, de agora em diante, como intersubstituíveis. Por exemplo, pode-se fazê-las encher três recipientes de forma diferente mas de mesma capacidade, com o conteúdo do frasco n.º 3, ou tomar quatro recipientes, diferentes simultâneamente na forma e na capacidade, para encher o frasco n.º 6, ou uma caçarola n.º 12, e assim por diante. Notar-se-á que se trata aqui de dois problemas diferentes.

Pouco importam aliás os jogos,com a condição de que as crianças tenham a oportunidade de fazer experiências, com recipientes de formas diferentes mas de mesma capacidade, ou com recipientes de capacidade diferente e tendo entre êles relações bem definidas.

Quando as crianças se familiarizaram com êstes exercícios, passa-se aos exercícios de estimativas. Pergunta-se, por exemplo, quantas caçarolas n.º 9 se podem encher com duas caçarolas n.º 4, e assim por diante. Após estimativa, confirma-se enchendo ou esvaziando efetivamente os recipientes.

4.4. *Quarto tipo de jogos — Apresentação das unidades legais*

Como para o comprimento, as crianças convirão em que, se se quer falar do que se faz e dos resultados obtidos com alguém que não assistiu à operação, é forçoso recorrer a unidades conhecidas por todos. Retiram-se, pois, todos os recipientes, salvo os que contêm exatamente um litro, meio litro e um quarto de litro, e termina-se de nomeá-los pelo número para referi-los, de agora em diante, por seu nome oficial. As crianças os discutem, os enchem, os esvaziam uns nos outros, e descobrem as relações que existem entre êles. (É extremamente desejável que estas relações, as crianças as descubram elas mesmas. O mestre deve abster-se de indicá-las e deve mesmo cuidar que não sejam reveladas por algumas crianças mais avançadas).

Além disso, apresenta-se um certo número de recipientes de grandes dimensões e de várias formas diferentes (como no caso das "unidades" anteriormente usadas), e retomam-se os mesmos exercícios que precedentemente, onde se substituem as designações de "garrafas n.º 3", "caçarolas n.º 6", ... por "litros", ou "pintas". Pode-se perguntar às crianças, por exemplo: "Quantos litros são necessários para encher esta panela?" Ou ainda: "Quantos quartos de litro se podem encher com a garrafa n.º 6?" E assim por diante.

No comêço é bom alinhar as unidades, uma vez enchidas, e contá-las antes de esvaziá-las no recipiente grande e, inversamente, quando se quer saber quantas unidades há no recipiente grande, prèviamente enchido, alinhar unidades de capacidade, enchê-las, depois contar quantas se encheram. Mais tarde, isso não será mais necessário, bastará limitar-se a tomar um só frasco-unidade, enchê-lo e transvasar-lhe o conteúdo tantas vêzes quantas fôr preciso, contando em voz alta, ou fazendo marcas para lembrar-se do que se fêz. Em outras palavras, seguir-se-á a mesma progressão que nas medidas de comprimento.

4.5. *Quinto tipo de jogos — Medição com unidades de capacidade de grandeza decrescente* [1]

Até agora, as crianças mediram ùnicamente em pintas [5], ou ùnicamente em galões * e cuidou-se que as quantidades a

5) Apresentamos aqui um jôgo com as medidas em uso no Canadá.
*) 1 galão = 4 quartos; 1 quarto = 2 pintas. 1 galão = 4,54 litros; 1 quarto = 1,14 litros; 1 pinta = 0,57 litros.
A quantidade total a medir é de aproximadamente 11 litros. Pode-se adaptar êste exercício ao sistema métrico fazendo medir com litros e decilitros uma quantidade total de 4,2 litros (N. D. T.)

medir contivessem sempre um número inteiro da unidade escolhida. Decide-se agora, por exemplo, encher parcialmente um tacho, colocando nêle 19 pintas de água, e pedir às crianças que meçam o líquido. As crianças dispõem de tôdas as unidades habituais e se lhes sugere começar com a medida de um galão, por causa da grande quantidade de água a medir. Como as crianças adquiriram o hábito dêste trabalho, enchem antes uma primeira medida de um galão [2], depois uma segunda. Manifestamente, sobra então menos de um galão no tacho. As crianças ou podem então derramar o resto numa terceira medida de um galão, e não saber mais o que fazer em seguida, ou deixá-lo no tacho. A professôra pode então intervir e perguntar: "E então, quanta água vocês mediram?" Algumas crianças dirão que mediram três galões de água, mas a maioria não concordará e afirmará que mediram "dois galões e sobrou isto". A professôra perguntará então se não há outra maneira de medir o que resta. Se elas têm em sua frente a coleção das unidades legais, algumas dirão que basta tomar um quarto, ao passo que outras quererão tomar uma pinta. Suponhamos que concordem em tomar antes a pinta. Precisa deixá-las fazer, e descobrirão que a água restante cabe exatamente em três pintas. Por isso dirão que há "dois galões e três pintas". Devolve-se em seguida essas três pintas de água no recipiente grande e se deixa o grupo, que queria medir em quartos, fazê-lo por sua vez. Êste grupo descobre então que se pode encher um quarto e que sobra ainda um pouco de água; o restinho dá exatamente uma pinta, de maneira que, finalmente, a resposta é: "dois galões um quarto e uma pinta".

Chegou o momento da professôra discutir êsses resultados com os dois grupos de crianças, que efetuaram, um e outro, a medição da mesma quantidade de água e que estão ambos convencidos de tê-la medido corretamente, mesmo as respostas tendo sido diferentes. A professôra pergunta: "Será que o resultado, dois galões e três pintas" nos indicou bem quanta água havia?" Como as crianças viram efetuar a medição, respondem afirmativamente. Se agora a professôra pergunta: "Será que a resposta 'dois galões um quarto e uma pinta' nos informou bem quanta água havia?", aqui também as crianças respondem afirmativamente. Entretanto, serão necessárias ainda muitas discussões antes que tôdas as crianças admitam que essas duas medidas têm o mesmo valor, apesar de obtidas com recipientes diferentes. Uma criança termina sempre por descobrir que se podem em todos os casos, usar um quarto em lugar de duas pintas. Outras experimentam e se apercebem de que, em vez de dizer "três pintas", se pode sempre dizer "um quarto e uma pinta", e de que é mais normal dizer "um galão, um quarto e uma pinta" do que, "um galão e três pintas"[6].

Multiplicar-se-ão os jogos dêste tipo, organizados de maneira a permitir às crianças, sem demasiada inverossimilhança, dar respostas exatas mas diferentes, que conduzem a outros grupamentos de unidades. O que importa sobretudo é que tenham de tudo isso uma experiência pessoal, que ensinamento algum pode substituir.

Não se negligenciará tampouco o processo inverso, que consiste em "debitar" quantidades sucessivas diferentes de líquido a diversas pessoas. Brincar-se-á, por exemplo, de leiteiro, servindo, cada uma por sua vez, um quarto (um litro), ou uma pinta (meio litro), ou um galão para uma família grande, e assim por diante, cada família podendo, por sua vez, medir as quantidades que lhe foram atribuídas.

---

6) Êste tipo de exercícios apresenta relativamente menos interêsse com as unidades do sistema métrico, a menos que, como o indicávamos acima, nos sirvamos de medidas de 1 litro, 1/2 litro e 1/4 de litro para desenvolver o conceito de metade e de quarto. Mas pode-se utilizar o exercício de medição indicado na nota precedente (4 litros e 2 decilitros) para chegar ao mesmo resultado, passando pela etapa do resultado "inexato" de 3 litros e 12 decilitros. Já preparadas para a numeração decimal pelos jogos das peças multibases, as crianças encontrarão nôvo exemplo de grupamento por dezenas.

4.6. *Sexto tipo de jogos — Trocas*

Se, paralelamente, as crianças adquiriram alguma experiência das trocas com as peças multibases, pode-se oferecer-lhes ocasião de agir da mesma maneira com as unidades de capacidade. Para o primeiro tipo de jogos, providenciar-se-á para que disponham de um número bastante grande de medidas de um galão, de uma pinta, de um quarto. Pode-se, por exemplo, começar com 3 galões, 6 quartos e 7 pintas, encher de água o conjunto, e mandar que as crianças guardem esta quantidade de água com o menor número possível de recipientes, com a condição de que todos estejam cheios. Dá-se-lhes o conselho de começar com as medidas menores. Tomam, pois, as 7 pintas e as esvaziam nas medidas de um quarto, o que dá 3 quartos e uma pinta. Tem-se pois, agora, 3 galões, 9 quartos e 1 pinta. Podem-se tomar os 9 quartos e derramá-los em galões. Enchem-se assim 2 galões e sobra 1 quarto. Tem-se, então, 5 galões, 1 quarto e 1 pinta, isto é, ao todo, 7 recipientes que contêm tôda a água que, antes enchia 16 recipientes. Eis experiências necessárias que permitirão às crianças, num estádio ulterior, compreender os símbolos de que se servirão.

Passemos agora a um exercício interessante, que requer os seguintes recipientes: meia-pinta, pinta, quarto, meio-galão, duplo-galão. Cada uma destas unidades é o duplo da precedente e manifesta-se aqui uma analogia com as peças de base 2. Se as crianças já fizeram exercícios com essas peças, não encontrarão nenhuma dificuldade em fazer o mesmo com água. Começa-se sempre pelo recipiente de menor capacidade e termina-se achando por resultado, por exemplo, 3 duplos-galões, 1 galão, 0 meios-galões, 1 quarto, 1 pinta e 0 meias-pintas. Uma vez que se está trabalhando com base dois, não se pode nunca ter resultado superior a 1, salvo o caso dos recipientes correspondentes à maior unidade.

Jogos conducentes à compreensão do pêso

5.1. *Primeiro tipo de jogos — Jogos conceptuais*

Antes que as crianças possam começar a determinar pesos, é preciso que saibam o que significa *pesado, leve, mais pesado que, menos pesado que, tão pesado quanto*, e assim por diante, e é indispensável que suas experiências sejam tais que não venham a confundir o tamanho de um objeto com seu pêso.

Uma vez mais, é necessário que a professôra disponha de coleções de objetos próprios para que as crianças adquiram essas experiências. Tais objetos devem ser também tão variados quanto possível, e, especialmente, de uso comum para as crianças. Uma experiência é mais rica de sentido quando está associada à vida de todos os dias. Providenciar-se-ão, portanto, pedras com diversos tamanhos, pequenos pacotes, livros, pedaços de madeira, de metal, e assim por diante. As dimensões deverão ser escolhidas de maneira que as crianças possam sustentá-los com uma só mão, mas pode-se também dispor de alguns maiores e mais pesados.

É preciso dar a cada criança numerosas oportunidades de segurar um objeto em cada mão para avaliar qual seja o mais pesado, ou o mais leve. Pode-se também fazê-las distribuir objetos em dois montes, dos objetos "leves" e o monte dos objetos "pesados". Esta divisão é bastante arbitrária, mas ela tem o seu valor. Podem-se variar êsses dois jogos, dando às crianças objetos grandes para segurar, ao mesmo tempo, perguntando-lhes qual é o mais pesado. A experiência é completamente diferente daquela em que se sustentam dois objetos simultâneamente, um em cada mão.

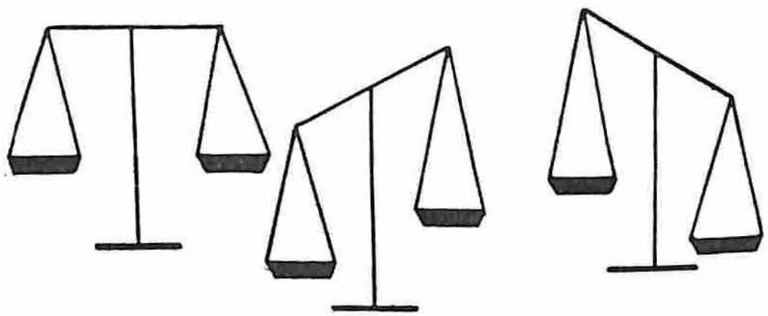
Mais tarde, vai-se-lhes oferecer ocasião de se decidirem por um dentre dois objetos com pêso quase igual, escolhidos de tal sorte que elas não possam sentir tão fàcilmente a diferença. Serão então induzidas a perguntar-se se não haveria um meio de saber com segurança a resposta, e, mesmo que nenhuma

criança não tenha a mínima idéia da operação de pesar, ou de medir o pêso, admitirão tôdas que existem casos onde isso será necessário.

5.2. *Segundo tipo de jogos — Emprêgo da balança*

Mas há a possibilidade de que alguma criança já tenha visto sua avó usar uma balança para fazer bolos ou doces. A professôra pode então apresentar uma balança simples, de braços, com dois pratos a igual distância do centro — é o modêlo mais significativo para o que nos interessa aqui, do qual vamos servir-nos simplesmente para comparar entre si os pesos dos objetos e não para "pesá-los" em valor absoluto. Antes de utilizar a balança, as crianças a examinam com o fim de notar que, quando os dois pratos estão vazios, se encontram ao mesmo nível. A professôra toma então dois objetos de mesmo pêso e os coloca um em cada prato. Como as crianças os têm anteriormente sopesado, sabem que um é "tão pesado", ou "tão leve" quanto o outro. Notam, com interêsse, que os dois pratos permanecem em equilíbrio. Depois, tomam-se dois objetos de pêso muito diferente. Manda-se, primeiramente, que as crianças os pesem e, em seguida, são postos nos pratos da balança. As crianças observam que um dos pratos fica mais baixo que o outro. Se elas o quiserem, pode-se deixá-las tomar os objetos na mão e convencer-se de que é o prato mais baixo que contém o objeto mais pesado. A professôra pode então dizer: "Que será que acontece trocando-os de lado?" Mandam-se as crianças fazê-lo e elas constatam que, desta vez, é o outro prato que está embaixo. Após várias repetições desta troca, elas saberão em definitivo que é sempre no prato mais baixo que se acha o objeto mais pesado. É preciso não precipitar esta experiência e dar a cada criança diversas oportunidades de experimentar, por si própria, porque se produzirão mais tarde muitas confusões, se isso não tiver sido bem compreendido desde o começo.

FIG. 24 COMPARAR PESOS POR MEIO DE UMA BALANÇA



Onde está o objeto mais pesado?

5.3. *Terceiro tipo de jogos — Diferença de pêso — Unidades arbitrárias*

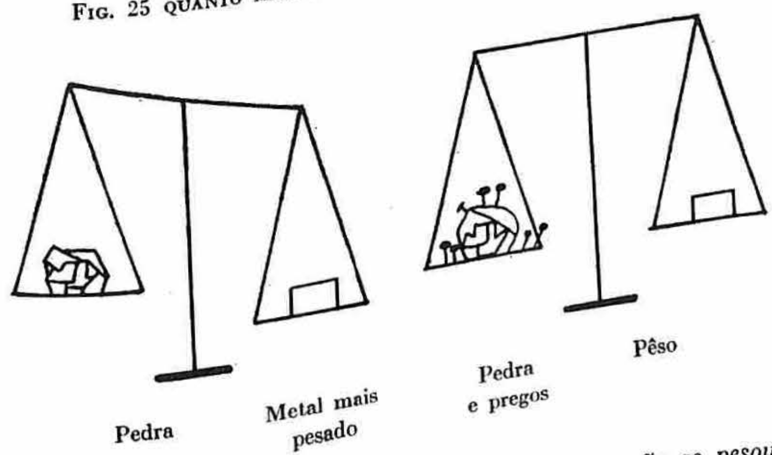
Muito ràpidamente as crianças querem saber "de quanto mais pesado", ou "de quanto mais leve" é tal objeto comparativamente a tal outro. Como explicamos no texto, é necessário primeiramente resolver o problema com o uso de unidades arbitrárias. A nosso ver, pregos de diversos tamanhos, moedas, poderiam muito bem preencher o papel.

Carrega-se a balança com um objeto em cada prato e, uma vez que foram escolhidos muito diferentes quanto ao pêso, um dos pratos fica nìtidamente mais baixo que outro. Tôdas as crianças sabem agora qual é o mais pesado, mas o que lhes interessa é saber de quanto um é mais pesado que o outro e vão tentar conseguir o mesmo nível para os dois pratos. A professôra fornece, por exemplo, pregos grandes, que são acrescentados, um a um, no prato mais elevado, até restabelecer o equilíbrio. A professôra pode então perguntar: "Quanto mais pesado é êste objeto que aquêle?" Suponhamos que a resposta seja: "De sete pregos". Muitas crianças continuam a não entender de imediato. O que vêem é que houve necessidade

de pôr sete pregos para estabelecer o equilíbrio entre os dois pratos.

Recomeça-se o exercício com dois outros objetos e pregos. Sem demora, tôdas as crianças do grupo verão que o número de pregos dá uma medida da diferença de pêso. Quando mostrarem tê-lo admitido perfeitamente, a professôra resolve deixar os mesmos objetos na balança mas tomar outras "unidades" para medir a diferença. Aceitemos que se tomem moedas e que se encontrem "oito moedas", ao invés de "doze pregos". As crianças aprendem assim que não é indispensável servir-se de pregos. Pode-se também tomar moedas ou qualquer outra coisa. A única diferença é que a resposta não é a mesma em cada caso. Depois repete-se com outros objetos, ora com um tipo de moeda, ora com outro tipo, ora com pregos, e assim por diante.

FIG. 25 QUANTO MAIS PESADO? USAR UNIDADES ARBITRÁRIAS



Entretanto, note-se bem que, até o presente, não se *pesou* nenhum objeto.

5.4. *Quarto tipo de jogos — Medição do pêso — Unidades arbitrárias*

Certas crianças entre as mais dotadas vão querer saber quantos pregos são necessários, ou moedas, para equilibrar um objeto qualquer. Põe-se, pois, um objeto em um dos pratos da balança, que desce até o fundo. Em seguida, com o fim de procurar a horizontalidade dos pratos, colocam-se pregos, um depois do outro, no prato oposto. À pergunta da professôra, as crianças se põem em acôrdo em responder que precisaram "tantos" pregos para equilibrar o objeto, de maneira que o objeto pesa tanto quanto êsse número de pregos. Toma-se outro objeto, que se equilibra desta vez com moedas de algum tipo, obtendo-se outra resposta. Pode-se também equilibrar o mesmo objeto sucessivamente com dois tipos de unidades diferentes, o que fornece dois resultados diferentes.

Pede-se agora às crianças que estimem quantos pregos, ou moedas, são necessários para pesar tanto quanto um objeto qualquer escolhido. Pode-se deixá-las primeiramente sopesar o objeto com uma das mãos, enquanto a outra mão ajunta pregos até uma quantidade com pêso estimatòriamente igual ao dêste objeto, depois deposita-se o conteúdo de cada mão num dos pratos da balança e observa-se o que se passa. Se não há equilíbrio, acrescentam-se ou retiram-se pregos, o que permite ver de quanto foi o engano. Numa etapa seguinte, permite-se às crianças tomar na mão sòmente o objeto, precisando adivinhar assim o número de pregos necessário para equilibrá-lo. É preciso deixar cada criança do grupo fazer sua estimação pessoal, e o vencedor será aquêle que chegou mais próximo da verdade.

5.5. *Quinto tipo de jogos — Comparação entre pesos de unidades arbitrárias*

Mandam-se agora as crianças pesarem o mesmo objeto com, pelo menos, duas espécies de unidades arbitrárias diferentes

— por exemplo, com pregos grandes e pregos pequenos. O objeto faz a roda no grupo e combina-se, em seguida, por exemplo, usar pregos de 5 cm e pregos de 2 cm, ou pregos de 3 polegadas e pregos de 1 polegada, pouco importa. Pesa-se antes o objeto com os pregos grandes, depois retiram-se êstes do prato colocando-os sôbre a mesa. A mesma operação com os pregos pequenos. A professôra pergunta em seguida: "Qual é o monte de pregos mais pesado: o monte dos grandes, ou o monte dos pequenos?" Ou ainda: Qual é o monte que contém mais ferro: o monte dos grandes, ou o dos pequenos?" É preciso formular a pergunta destas duas maneiras diferentes, mas em momentos diferentes. Apesar de que as crianças tenham visto, nas duas vêzes, os pratos da balança em equilíbrio, fàcilmente respondem que o monte dos pregos grandes é mais pesado, e, por isso, a professôra propõe: "Bem, vejamos com a balança!" Põe-se um monte em cada prato e as crianças constatam que há nivelamento dos pratos. Reconhecem que as duas porções de pregos têm o mesmo pêso. É esta uma operação que deverá ser realizada pelas próprias crianças, várias vêzes, até que tenham entendido que é sempre assim. Precisa repetir o jôgo com outros objetos, com outras unidades, mais e mais, enquanto não estejam convencidas de que acontece sempre isso, sejam quais forem as unidades adotadas.

5.6. *Sexto tipo de jogos — Apresentação das unidades legais*

Como no caso das unidades de comprimento, ou de capacidade, começa-se por uma discussão sôbre a maneira de comunicar a outros uma informação relativa ao pêso, e tôdas as crianças aceitam que há necessidade, aqui também, de unidades conhecidas por todos.

Apresentam-se então as unidades legais. As crianças acham sempre divertido manipular êsses objetos de latão polido, de mesma forma mas de tamanhos crescentes.

Não é preciso muito tempo para as crianças começarem a se perguntar quais seriam as relações entre êsses diversos pesos [7]. No sistema métrico, se algumas crianças já aprenderam a procurar, vão experimentar descobrir as relações entre os pesos de uma caixa de pesos, e é preciso não as impedir de fazê-lo.

Jogos conducentes à compreensão da área

6.1. *Primeiro tipo de jogos — Medição das superfícies com unidades arbitrárias*

Para conduzir êste assunto, a professôra pode começar perguntando, ao mesmo tempo que indica o assento de uma cadeira de criança e a parte superior de uma estante: "Qual é o pedaço de madeira maior, êste ou aquêle ?" Sòmente poucas crianças têm alguma fraca idéia de como sair-se dêste problema, e a maioria dirá, apesar disso, que a parte de cima da mesa é maior que a da cadeira. Mandar-se-á em seguida comparar a parte de cima da estante da professôra com a da mesa de um aluno, o que, em geral, terão capacidade de fazer. Comparar-se-ão assim diversas superfícies, respondendo sempre por apreciação visual.

Após levam-se as crianças a comparar uma superfície comprida e estreita com outra mais curta e mais larga — surgem então hesitações. Para auxiliar, a professôra pode propor-lhes uma unidade arbitrária qualquer — por exemplo, peças de cerâmica ou de cartão retangulares de aproximadamente quinze por dez centímetros (seis polegadas por quatro). Fará em seguida a pergunta em outros têrmos, perguntando: "Quantos pedaços de papelão são necessários para cobrir esta mesa e aquela ?" Com o auxílio da professôra, as crianças dispõem os cartões, ou as peças de cerâmica, sôbre as superfícies em questão, de maneira que fiquem inteiramente cobertas (ou quase inteiramente) e contam-se os elementos nos dois casos. Se a

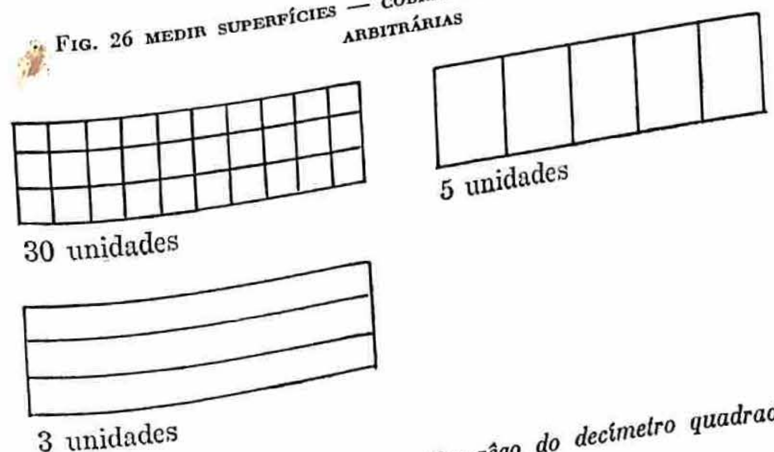
7) No Canadá, por exemplo, 16 onças para uma libra.

professôra perguntar agora qual é a maior, as crianças não terão dificuldade em responder.

Comparar-se-ão ainda outras superfícies por meio dessas unidades, ou de outras unidades com dimensões diferentes. Depois as crianças se porão a medir tôdas as superfícies possíveis. Se dois grupos operam ao mesmo tempo com unidades diferentes, obtêm-se resultados variados, mas serão aceitos todos, contanto que sejam exatos.

Por êsses métodos, as crianças adquirem, pouco a pouco, a idéia de que é a superfície inteira que elas medem e se tornam capazes de decidir se uma superfície é maior ou menor que outra, ou, mais simplesmente, de medir uma superfície em têrmos de uma certa unidade escolhida.

FIG. 26 MEDIR SUPERFÍCIES — COBRIR SUPERFÍCIES COM UNIDADES ARBITRÁRIAS



6.2. *Segundo tipo de jogos — Emprêgo do decímetro quadrado ou do pé quadrado*

Aqui também admite-se que é preciso uma unidade conhecida por todos e a professôra exibe "um decímetro quadrado", ou "um pé quadrado", recortado em papelão, ou em madeira compensada. Deixam-se as crianças manipulá-lo, compará-lo com as unidades de comprimento de que dispõem. É provável que elas admitam que é chamado assim porque é um quadrado e porque mede um decímetro, ou um pé de comprimento. Convém prever um número suficiente dêsses quadrados, para que tôdas as crianças possam "medir", por cobrimento, superfícies relativamente grandes. Evidentemente, apresentam-se no início apenas superfícies fàcilmente mensuráveis por êste processo. Cuide-se que as crianças ponham as unidades exatamente uma ao lado da outra, e, uma vez tudo coberto, contam-se as unidades. Conclui-se assim que tal forma simples mede seis decímetros quadrados, e assim por diante.

6.3. *Terceiro tipo de jogos — O centímetro quadrado, ou a polegada quadrada*

FIG. 27 MEDIR SUPERFÍCIES COBRINDO-AS COM UNIDADES LEGAIS

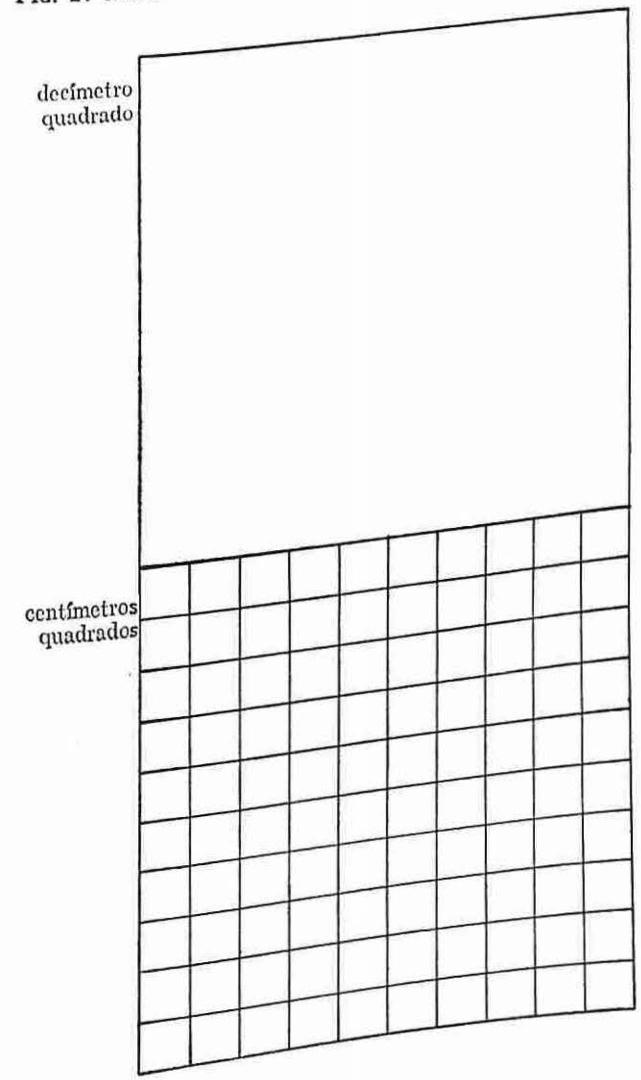
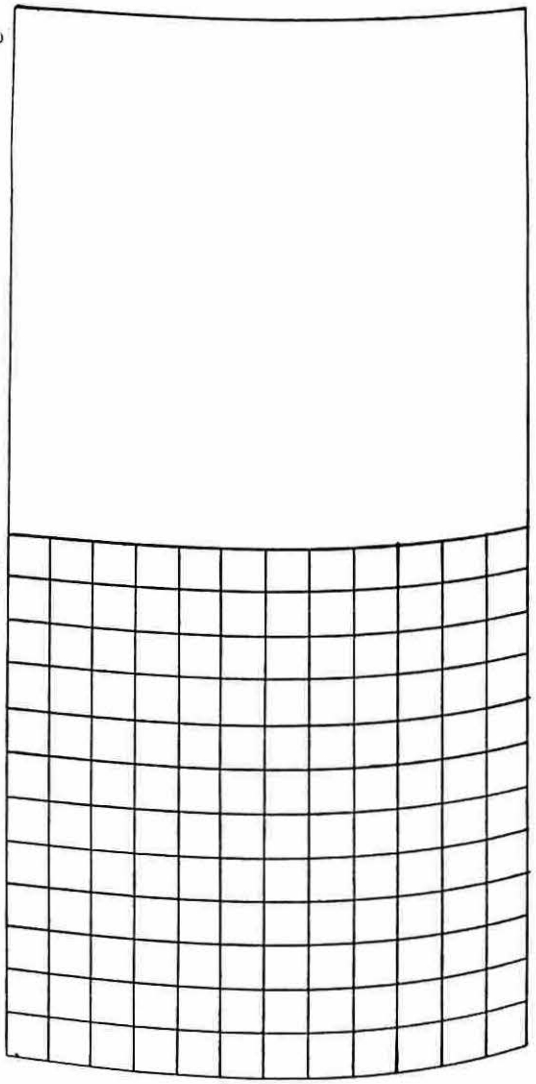


FIG. 28 MEDIR SUPERFÍCIES COM UNIDADES CANADENSES



Procede-se exatamente como para os decímetros quadrados, ou para os pés quadrados. É claro, convém tomar superfícies menores para medir.

6.4. *Quarto tipo de jogos — Medição de uma superfície com duas unidades ao mesmo tempo (decímetros e centímetros quadrados, pés e polegadas quadradas)*

A professôra mostra uma superfície retangular que não tenha um número redondo de decímetros quadrados e dão-se às crianças dois conjuntos, um de decímetros quadrados e outro de centímetros quadrados. Sugere-se-lhes começar a medir com a maior das duas unidades. Se sobrar uma parte descoberta, elas, lembrando-se dos jogos anteriores, terminarão de cobri-la com centímetros quadrados. Depois conta-se o total.

6.5. *Quinto tipo de jogos — Medição de uma superfície com uma só unidade de cada ordem*

Aqui novamente a professôra escolhe uma superfície que não meça um número inteiro de unidades de ordem superior, por exemplo, mais de sete decímetros quadrados, mas menos de oito, e dá-se às crianças sòmente um decímetro quadrado e um centímetro quadrado. Vai portanto precisar, como nos jogos de medição de comprimento anteriores, colocar cuidadosamente o decímetro quadrado, marcar seu contôrno com lápis, depois transportá-lo um certo número de vêzes, e fazer o mesmo com o centímetro quadrado, chegado o momento. Depois conta-se como precedentemente.

Certas crianças querem saber qual a relação entre os decímetros quadrados e os centímetros quadrados, ou entre os pés quadrados e as polegadas quadradas. Podem chegar a isso cobrindo a unidade maior com a menor. Que surprêsa em ver que há 144 quadradozinhos de uma polegada no quadrado grande de um pé! Que descobertas interessantes, mais interessantes mesmo, sob muitos aspectos, que aquelas feitas com as unidades do sistema métrico!

A professôra pode mesmo, se o julgar útil, apresentar o metro quadrado, ou a jarda quadrada, e estimular as comparações com as unidades menores.

É certo que algumas crianças quererão medir superfícies que não são retangulares, ou que, por qualquer outra razão, não podem ser medidas com unidades quadradas. Isso pode conduzir-nos a descobertas interessantes, por exemplo, à descoberta de unidades triangulares de medida de superfície.

OS PRIMEIROS PASSOS EM MATEMÁTICA

Vol. I — *Lógica e Jogos Lógicos,* Vol. II — *Conjuntos, Números e Potências,* Vol. III — *Exploração do Espaço e Prática da Medição*

A presente coleção, de três volumes que visam fazer as crianças iniciarem bem os primeiros passos em matemática, é uma moderna tentativa de cobrir as deficiências do "cálculo" de outrora. Atualmente, é imprescindível desenvolver na criança, simultâneamente com a idade, a compreensão da matemática e de suas aplicações. É parte integrante da cultura moderna e deve começar já no jardim de infância.

Esta coleção, destinada a professôres primários, divulga várias experiências adquiridas em certo número de anos de estudos em diversas partes do mundo, sobretudo na Austrália, Nova Guiné, Inglaterra e Estados Unidos. Assim, estas experiências se revestem de um caráter de universalidade, sem que haja, contudo, a pretensão de constituírem regras absolutas, deixando, assim, margem à revisão, às adaptações, aos acréscimos.

O primeiro volume refere-se à aquisição da lógica por crianças de poucos anos; o segundo visa à introdução aos números, partindo das propriedades dos conjuntos e levando à noção de potência; o terceiro trata das aplicações práticas dos números quanto ao comprimento, ao pêso, capacidade, tempo, superfície, etc., comportando, também, iniciação à geometria.

Todos os volumes trazem grande número de exercícios práticos, que são chamados "jogos", e que oferecem às crianças, em trabalho individual, ou em grupos, e sempre na alegria, a ocasião de adquirir experiências próprias, sob a inteligente orientação do professor, que deve, necessàriamente, mudar a "situação de ensinar" tradicional pela "situação de aprender". Êste deve criar situações em que as crianças ajam por si mesmas, por seu próprio esfôrço e tentativa, em discussão e crítica entre elas mesmas, pelo que o resultado alcançado será duradouro.

Capa de Nadia Kijanitza