NOÇÕES

DE

GEOMETRIA ELEMENTAR.

NOÇÕES

DE

GEOMETRIA ELEMENTAR

COMPENDIO

ADOPTADO

PARA A ESCOLA NORMAL DA PROVINCIA DE PERNAMBUCO

POR

Pedro de Alcantara Lisboa

ENGENHEIRO CHIMICO PELA ESCOLA CENTRAL DE PARIZ, E PROFESSOR DE MATHEMATICA DA ESCOLA NORMAL DA PROVINCIA DO RIO DE JANEIRO.

RIO DE JANEIRO

Typographia — Perseverança — rua do Hospicio n. 91.

—

1867.

IV - J16, 5, 3 - n. 1

513

D. FP. 03.5.68

A' SUA ALTEZA O SR. CONDE D'EU.

Sentimentos de profunda veneração, que á augusta familia de Vossa Alteza consagra o autor deste ensaio, e os de sua gratidão pela benevolencia de Vossa Alteza em favor do mesmo, o animárão a supplicar licença para Lhe dedicar este pequeno lavor.

Outorgando esta licença, quiz Vossa Alteza manifestar sua predilecção por uma sciencia, cujo estudo era exigido pelo divino philosopho da antiguidade como condição indispensavel aos que aspiravão ao titulo de amigo d'aquelle profundo pensador, sciencia que constitue a linguagem mysteriosa, da qual Deus se serve incessantemente, na expressão de um publicista do seculo passado, para se revelár á humanidade.

Observamos no universo atomos e movimentos. Os atomos, grupados para constituirem os corpos de tamanhos tão diversos e de fórmas infinitas, percorrem veredas, cujo estudo pertence ao dominio da geometria.

É pois esta resumida publicação, com ser muito elementar, mui mediocre a arte de composição de seu autor, e muito tosco o estylo que a traçou, foi por Vossa Alteza, não obstante, julgada digna de merecer, pela importancia da sciencia, a graça, que Vossa Alteza lhe outorgou.

Possa este ensaio ser tão util á mocidade brasileira, quanto são sinceros e ardentes os votos que ao céo dirige pela prosperidade de Sua Alteza Imperial e de

Vossa Alteza

o mais humilde, respeitoso e dedicado servo

Pedro de Alcantara Lisboa.

com autorização de [illegible]
D. Henrique.
(1.500)

PREFACIO.

Desde que me foi conferido o direito de leccionar a mathematica elementar na Escola Normal da provincia do Rio de Janeiro, tenho sentido a necessidade de um compendio apropriado, no ensino da geometria, ao complemento da instrucção primaria regular.

Tencionava já, pois, publicar este resumido compendio, quando o anno passado teve a Escola Normal desta provincia a honra de ser visitada pelo illustrado senhor director da Escola Normal de Pernambuco, o qual de tal sorte instou para que realizasse este meu intento, que me resolvi a sujeital-o á indulgente apreciação do publico.

Pareceu-me que, sendo a geometria, no seculo XIX, uma sciencia necessaria ao complemento da instrucção primaria, tão indispensavel ao astrónomo, ao engenheiro nas suas elevadas theorias, quanto são suas noções uteis e necessarias ao proprietario rural, ao artista, e até ao artesão, devia este compendio ser escripto com um estylo simples e tão claro quanto é a luz do dia.

O publico julgará se satisfiz a essas condições.

Cada vez me convenço mais da conveniencia de demonstrar as formulas para a avaliação das áreas e dos volumes, que occupam os corpos da geometria elementar, com o auxilio do methodo infinitesimal. O leitor, acceitando sem objecção os preliminares exarádos na primeira lição, não terá a minima duvida em acceitar os corollarios.

Abril—1867.

NOÇÕES PRELIMINARES

DE

GEOMETRIA.

PRIMEIRA LIÇÃO

PRELIMINARES

1. *Geometria é a sciencia que trata da forma dos corpos e da medida da extenção.*

2. Infinitas formas affectão os corpos, algumas das quaes, por sua complicação, pertencem ao dominio da Geometria transcendente. A Geometria elementar só se refere á forma e á extenção dos chamados *corpos geometricos.*

3. Cada corpo occupa um lugar do espaço indefinito que nos cerca. A menor particula de um corpo, a particula indivisivel, recebeu pela etymologia o nome de *atomo.* Cada corpo é formado de atomos; de particulas indivisiveis, não tendo sido possivel determinar se a grandeza do atomo varia segundo a natureza do corpo que o fornece. Considerando o menor dos atomos, não podemos deixar de conceber a necessidade de um lugar para o conter.

4. *O ponto geometrico é o lugar para conter o atomo.* Cumpre não confundir o ponto geometrico com o ponto material, ou com o ponto ideal sem extenção. O ponto ideal é indefinivel; o ponto material é o atomo; o ponto geometrico é o que acima fica definido, e ao qual se referirá este compendio. (*A*)

5. *Uma linha geometrica é uma serie de pontos geometricos.* E assim como concebemos a linha formada por uma serie de pontos successivos, assim tambem concebemos a superficie formada por uma successão de linhas.

6. *Uma superficie é uma successão de linhas.*

7. Quando a extenção, a capacidade, o lugar occupado por um corpo, tem as tres dimensões avaliaveis, esta extenção chama-se o volume do corpo. O volume póde, pois, ser considerado como formado por uma successão de superficies.

8. *Linha recta é o caminho mais curto entre dous pontos considerados.*

9. Uma linha composta de elementos rectos chama-se linha quebrada. O menor elemento de linha recta é formado por dous pontos contiguos. Com dous pontos contiguos não é possivel conceber curvatura. A linha formada pela successão desses elementos de dous pontos, variando em cada ponto a direcção do elemento, é o que se chama linha curva.

Linha curva é a que não é recta nem formada de elementos rectos avaliaveis.

10. Das superficies a mais simples é a superficie plana ou o plano. *Superficie plana é tal que uma linha recta, girando em todas as direcções, coincide sempre com ella.* Em virtude desta definição, a recta que tem dous pontos situados emum plano está toda neste.

11. Na pratica consideramos sempre uma linha recta limitada, ou uma superficie plana limitada.

Podemos, porém, conceber que a linha recta ou superficie plana se prolongue indefinidamente na mesma direcção.

12. O menor elemento de superficie plana é formado de duas linhas rectas contiguas. Se o elemento seguinte muda de direcção, e assim successivamente, a superficie engendrada pela successão desses elementos constitue uma superficie curva.

13. A Geometria elementar se divide em duas secções: Geometria plana e Geometria no espaço. A Geometria plana, de que tratará quasi exclusivamente este compendio, se refere ás figuras geometricas traçadas sobre um plano, de suas propriedades, da avaliação de suas dimensões, de suas áreas. A Geometria no espaco se refere ás propriedades dos chamados corpos geometricos, da avaliação de suas dimensões, das áreas das superficies que os limitão, dos volumes que elles occupão.

14. Para dar uma idéa bem clara do que se entende por área, consideremos a figura geometrica, o quadrado (fig. 1) traçado no plano da 1ª estampa. Area do quadrado é a parte da superficie do papel limitada pelas quatro linhas rectas, que fechão o espaço chamado quadrado.

15. No seculo atrazado, o sabio de Wolstrop, de cuja cabeça sahio mais luz do que de todas as dos sabios de seu tempo (1), Isaac Newton, legou á humanidade o calculo infinitesimal.

16. Sem ter necessidade de empregar os termos desta sublime analyse, sem ter necessidade de dizer o que é

(1) Na opinião do professor Liebig.

uma differencial ou integral. sem ter necessidade de explicar o que é infinitamente pequeno ou infinitamente grande, sem entrar no exame das quantidades auxiliares ou das designadas, dos limites, dos ultimos valores, etc., é bem possivel, e sempre extremamente vantajoso, applicar á Geometria elementar a noção preliminar d'aquelle calculo, cujo influxo para o progresso da sciencia mathematica foi tão feliz, tão prompto, tão fecundo, e tão maravilhoso.

17. A noção preliminar do calculo infinitesimal se refere ao elemento infinitamente pequeno, que pela continuidade engendra qualquer quantidade. A sciencia geometrica sendo a sciencia da extenção, cumpre estabelecer o elemento primordial das figuras geometricas. E' o ponto geometrico.

18. Representando um ponto por p, chamando n o numero de pontos que constituem a linha entre dous pontos considerados, podemos sempre exprimir uma linha pela formula $n \times p$. Aqui se apresenta aprimeira difficuldade para quem não está habituado com o methodo infinitesimal.

Sem duvida se o ponto material escapa aos nossos sentidos, não póde ser entrevisto pelo microscopio mais poderoso, nem determinadas suas dimensões pelos instrumentos divisorios mais delicados, com mais razão ainda não é possivel determinar as dimensões do ponto geometrico. Não obstante, qualquer que seja a grandeza do atomo, e por consequencia do lugar para o conter, qualquer que seja o numero de pontos que chamamos n, ou a somma de pontos, uma linha póde sempre ser representada pela formula $n \times p$. Posteriormente veremos quanto esta noção tão simples, tão facil de conceber, facilita o estudo da Geometria.

19. Imaginando um atomo, ou o ponto material, em movimento, podemos imaginar e linha como sendo o caminho geometrico percorrido pelo atomo. Não sendo possivel avaliar as dimensões nem do atomo, nem do lugar por elle occupado, não tem a linha senão uma dimensão avaliavel, que é o comprimento. Não tem a superficie senão duas dimensões avaliaveis, que são o comprimento e a largura. O volume tem tres dimensões avaliaveis, que são o comprimento, a largura, e a altura.

SEGUNDA LIÇÃO

PRELIMINARES

20. Duas rectas situadas em um plano, quando se encontrão, formão angulo. E', pois, *angulo a porção de um plano limitado em parte por duas linhas que se encontrão.* Quando as linhas que formão o angulo são rectas, o angulo é rectilineo: quando são curvas, o angulo é curvilineo. A Geometria elementar só se occupa de angulos rectilineos. As linhas rectas que formão o angulo chamão-se lados do angulo. O ponto em que os lados se encontrão chama-se vertice do angulo.

21. Se de um ponto qualquer A de uma recta (fig. 2) parte a recta AB, ou de um ponto qualquer C partem as rectas *CD*, *CE*, *CF*, *CG*, &., os dous angulos

com o vertice em A, ou todos os angulos com o vertice em *C* chamão-se adjacentes.

22. *A recta que divide um angulo em dous angulos iguaes chama-se bissetrix.*

23. A unica curva cujo estudo entra no dominio da Geometria elementar é a circumferencia. Cumpre não confundir circumferencia com circulo. *Circumferencia é a linha curva fechada formada de pontos que são todos equidistantes de um ponto chamado centro.* O centro pertence ao circulo, isto é, á superficie plana limitada pela circumferencia (fig. 3).

24. *A distancia do centro a qualquer ponto da circumferencia chama-se ráio.*

Todos os raios de um mesmo circulo são iguaes entre si, pela definição de circumferencia.

25. *A recta que passando pelo centro se termina em dous pontos* A *e* ***B*** *da circumferencia chama-se diametro.* O diametro é, pois, igual á somma de dous raios.

26. *Uma recta indefinita que intercepta a circumferencia em dous pontos* ***D*** *e* ***E*** *chama-se seccante.* A distancia D E entre os dous pontos de intersecção da seccante chama-se corda·

27. Considerando a circumferencia formada de pontos, considerando um ponto qualquer B e o seu contiguo, estes dous pontos formão um elemento recto, não sendo possivel com dous pontos contiguos conceber curvatura. Este elemento prolongado até *C* ou até um ponto indefinito da recta B Z chama-se tangente. Posteriormente será dada uma outra definição de tangente.

28. *A parte* ***D E*** *da circumferencia* ***D E F*** *chama-se arco desta curva.* Para não confundir o arco $\widehat{DE}$ com a

corda D E, costuma-se collocar o arco ⌒ sobre as letras que designão as extremidades do arco.

29. Os angulos (fig. 4.), cujo vertice commum coincide com o centro O de um circulo, chamão-se angulos centraes. São designados pelas letras A O B, B O C, C O D, etc., tendo cuidado de collocar no meio a letra que designa o vertice. Se os lados desses angulos se prolongão além dos pontos A, B, C, D, etc., o angulo não varia, sendo o angulo independente da grandeza de seus lados. AOB, ou a parte do circulo comprehendido entre o arco $\widehat{AB}$ e os raios AO e BO chama-se sector circular. A comprehendida entre o arco $\widehat{AB}$ e a corda AB é um segmento circular.

30. A Geometria elementar tem frequentemente necessidade de recorrer a algumas verdades, que por sua evidencia dispensão demonstração. Estas verdades evidentes chamão-se *axiomas*.

31. Constantemente teremos de recorrer aos seguintes axiomas.

1°. *De um ponto a outro não se póde imaginar mais do que uma linha recta.*

2°. *O todo é maior do que qualquer de suas partes, e igual a somma das partes.*

3°. *Se a ambos os membros de uma igualdade ou desigualdade ajuntamos uma mesma quantidade, as sommas ainda formão igualdade ou desigualdade.*

4°. *Se de ambos os membros de uma igualdade ou desigualdade diminuimos uma mesma quantidade, as differenças ainda formão igualdade ou desigualdade.*

5°. *Se multiplicamos ambos os membros de uma igualdade ou desigualdade por uma mesma quantidade, os productos ainda formão igualdade ou desigualdade.*

6.° *Se dividimos ambos os membros de uma igualdade ou desigualdade por uma mesma quantidade, os quocientes ainda formão igualdade ou desigualdade.*

7.° *Se elevamos os dous membros de uma igualdade ou de uma desigualdade a uma qualquer potencia, estas ainda formão igualdade ou desigualdade.*

8.° *Se extrahimos dos dous membros de uma igualdade ou desigualdade as raizes de uma potencia qualquer, estas raizes ainda formão igualdade ou desigualdade.*

32. Com o auxilio desses axiomas, com o de quatro methodos, que melhor serão comprehendidos depois de alguns exemplos, demonstrão-se os theoremas, cujo complexo forma as theorias da Geometria elementar. Os theoremas depois são applicados á resolução dos problemas.

33. *Theorema é uma verdade que, para tornar-se evidente, carece de demonstração.* Para demonstrar uma verdade geometrica, ha necessidade de recorrer a pontos, a linhas, a superficies, e estas que se tração ou se imaginão constituem a *construcção* da figura. A demonstração é baseada na construcção e exige raciocinio.

34. *Problema é uma questão que, se resolve com o auxilio dos theoremas.*

35. *Corollario é uma consequencia immediata de um theorema.*

36. *Lemma é uma proposição preliminar que serve de base e auxilio de uma theoria.*.

37. Os signaes empregados na Arithmetica e na Algebra são usados na Geometria.

TERCEIRA LIÇÃO

PERPENDICULARES E OBLIQUAS

38. *Quando uma recta AB* (fig. 5) *encontra outra CD de modo tal que os angulos adjacentes ABC e ABD são iguaes, a recta AB é perpendicular sobre CD*. Estes angulos ABC e ABD, iguaes entre si, chamão-se angulos rectos. B é o pé da perpendicular.

39. Toda recta partindo do ponto B, por exemplo BE, com direcção diversa de BA, se diz obliqua sobre CD.

40. *Sendo AC perpendicular sobre DE* (fig. 6), *DE tambem é perpendicular sobre AC*.

Se dobramos a figura por AC, a recta BE tomará a direcção de BD, porque por hypothese o angulo ABE é igual ao angulo ABD. Ora, a recta AC ficando fixa, e BE coincidindo com BD, segue-se que EBC é igual a CBD. Dobrando depois a figura por DE, a recta BC não póde deixar de tomar a direcção de BA, porque se tomasse outra direcção, por exemplo a de BF, teriamos o angulo DBF, evidentemente maior do que ABD, igual a FBE, menor do que ABE; e por hypothese ABD é igual a ABE. Como BC toma a direcção de BA, o angulo CBE é igual o angulo ABE, e pois DE é perpendicular sobre AC.

41. *Todos os angulos rectos são iguaes entre si*. Supponhamos que AB forma com CD dous angulos rectos(fig.7), e que A'B' forma tambem com C'D' dous angulos rectos. Que os dous angulos em B, e os dous angulos em B',

são iguaes entre si sabemos, pela definição de perpendicular. Cumpre agora demonstrar que o angulo ABC = A'B'C' e que o angulo ABD = A'B'D'. Superpondo a recta CD sobre a recta C' D' de modo que o ponto B coincida com o ponto B', a recta BA não póde deixar de tomar a direcção de B'A', porque se tomasse a de B'E por exemplo, teriamos C'B'E, maior do que C'B'A', igual a EB'D', evidentemente menor do que A'B'D'. Para outros angulos rectos quaesquer fariamos identico raciocinio. Está, pois, demonstrado que todos os angulos rectos são iguaes.

42. Quando uma recta é obliqua á outra, forma com esta dous angulos desiguaes de cada banda. Estes angulos chamão-se adjacentes, como já foi indicado.

43. *A somma dos angulos adjacentes equivale á dous rectos.* Para demonstrar este theorema, consideremos primeiramente a obliqua AB sobre CD (fig. 8). Pelo ponto A imaginando uma perpendicular AE, temos que o angulo obtuso BAC=CAE+EAB, porque o todo é igual á somma das partes (31); temos tambem B A D = E A D —E A B. Sommando estas duas igualdades, temos B A C + B A D = C A E + E A D, sendo estes dous ultimos rectos.

Se os angulos adjacentes são mais de dous, por exemplo, os angulos C A D, D A E, E A F, E A G, G A B (fig. 9.), podemos pelo ponto A imaginar a perpendicular A P, e é facil demonstrar que a somma dos angulos indicados é igual a dous rectos.

44. *Dous angulos que em somma equivalem a um angulo recto são chamados complementares.*

45. *Dous angulos que em somma equivalem a dous rectos são chamados supplementares.*

46. Das precedentes definições resulta que dous angulos tendo o mesmo complemento ou o mesmo supplemento são iguaes.

47. *Os angulos verticalmente oppostos são iguaes.* O angulo B O C é verticalmente opposto ao angulo A O D (fig. 10). O angulo B O D é verticalmente opposto ao angulo A O C. Para demonstrar a igualdade indicada, basta estabelecer as seguintes igualdades, em virtude do que está demonstrado no § 43, que são: B O C + A O C = 2 r, A O D + A O C = 2 r. Diminuindo uma da outra, temos B O C — A O D = o, ou B O C = A O D, que é a these.

48. *A somma de todos os angulos formados em torno de de um ponto equivale a 4 rectos.* Todos os angulos de um lado de A B (fig. 11) equivalendo a 2 rectos, e os que ficão do outro lado equivalendo tambem a 2 rectos, todos juntos equivalem a 4 rectos.

49. *Por um ponto não se póde traçar senão uma perpendicular á uma recta.* Para demonstrar este theorema é necessario considerar dous cazos: ou o ponto está na recta; ou está elle fóra d'ella. Se é um ponto C (fig. 12), por este ponto se fosse possivel traçar duas perpendiculares C D e C E, teriamos o absurdo de A C E, evidentemente maior do que A C D, igual a E C B, evidentemente menor do que B C D; ora, sabemos que A C D = B C D. Seja, no 2.º cazo, o ponto C fóra da recta A B (fig. 13) e sejão C D e C E perpendicalares. Prolongando a recta C D de modo que C' D seja igual a C D, dobrando a figura por A B, C D toma a direcção de D C' e o ponto C coincide com C'. Consequentemente C E coincide com E C', e o angulo C E D = angulo D E C'.

Ora, por hypothese, C E D é recto; logo, D E C′ é tambem recto, e a linha C E C′ deveria ser uma linha recta, o que evidentemente não é possivel.

50. Nos exemplos precedentes fôrão já indicados dous dos methodos usados na demonstração dos theoremas geometricos: o methodo da superposição, e o methodo por absurdo. O primeiro prova a igualdade das figuras geometricas pela coincidencia d'ellas. O segundo faz resaltar a verdade das proposições, que queremos demonstrar, porque da hypothese de não ser a proposição verdadeira resulta um absurdo, em virtude dos axiomas ou dos theoremas precedentemente demonstrados.

QUARTA LIÇÃO

PERPENDICULARES E OBLIQUAS.

51. Suppondo *C P* perpendicular sobre *A B* (fig. 14), suppondo *D P*=*E P*, temos o seguinte theorema: *de um ponto qualquer da perpendicular partindo duas obliquas que encontrão a recta A B a igual distancia do pé da perpendicular, estas obliquas são iguaes.* Para o demonstrar basta dobrar a figura por C P. A recta P B tomará a direcção de P A, porque os angulos A P C e B P C são rectos por hypothese; o ponto E coincide com o ponto D, porque E P = D P. Ora, as obliquas C D e C E, tendo os pontos extremos communs, são iguaes.

52. *De duas obliquas afastando-se diversamente da perpendicular é maior a que mais se afasta* Cumpre provar que C E é maior do que C D (fig. 15). Para o provar prolongue-se C P até C′, de modo que C P seja igual a C′ P: unão-se os pontos D e E com o ponto C′: prolongue-se C D até F. Temos $CD + DF < CE + EF$, pela definição de linha recta; temos tambem $C'D < DF + C'F$. Sommando membro a membro estas desigualdades (31), resulta: $CD + C'D < CE + EF + C'F$, porque o termo D F commum a ambos os membros desaparece pela simplificação. Ora, $EF + C'F = C'E$; fica, pois, $CD + C'D < CE + C'E$. Sendo $CD = C'D$ (51), e $CE = C'E$ pela mesma razão, temos $2\,CD < 2\,CE$, e por consequencia $CD < CE$.

53. *A distancia de um ponto qualquer da perpendicular ao pé desta é menor do que a distancia do mesmo ponto ao pé de uma obliqua qualquer.* Cumpre provar que $CP < CD$ (fig. 16). Prolongando C P até C′, de modo que C P seja igual a C′P, temos que a obliqua $CD = C'D$ (51). Ora, $CC' < CD + C'D$; e sendo $CC' = 2\,CP$, sendo $CD + C'D = 2\,CD$, temos que $2\,CP < 2\,CD$, ou, por consequencia, $CP < CD$, dividindo ambos os membros da desigualdade por 2 (31).

54. *De um ponto não se póde traçar para uma recta tres rectas iguaes.* Para o demonstrar, basta reflectir que podem occorrer tres cazos: ou uma das rectas é perpendicular e as duas outras obliquas; ou as tres são obliquas, duas de um lado e uma do outro da perpendicular; ou, finalmente, todas tres de um lado da perpendicular. Em qualquer dos tres casos é impossivel que ellas possão ser todas tres iguaes entre si, por se afastarem diversamente do pé da perpendicular. Se não é possivel ter tres obliquas iguaes

partindo do mesmo ponto, com mais razão não é possivel traçar quatro ou mais.

55. *Qualquer ponto da perpendicular que passa pelo meio de uma recta dista igualmente das extremidades desta.* Suppondo P o meio da recta A B (fig. 17), sendo x um ponto qualquer da perpendicular P x, é claro que A x = B x, porque são obliquas, que, partindo do ponto x, se afastão igualmente do pé da perpendicular.

56. *Qualquer ponto fóra da perpendicular dista desigualmente dos extremos desta.* Sendo C P perpendicular ao meio de A B (fig. 18), sendo x um ponto qualquer fóra da perpendicular, cumpre demonstrar que A x é maior ou menor do que B x, conforme fica o ponto x á direita ou á esquerda da perpendicular. No cazo da figura, cumpre demonstrar que B x < A x. Para o demonstrar, unindo B D, é certo que B x < D x + B D, pela definição de linha recta. Ora, sendo B D = A D, podemos substituir na desigualdade B D por A D, e fica B x < D x + A D, ou B x < A x.

57. *Se fazendo centro em A se traça um arco a b, se com o mesmo raio, fazendo centro em B, se traça o arco c d, a recta que une a intersecção com o ponto **D**, meio de A B, é perpendicular a A B* (fig. 19). Para o demonstrar, basta reflectir que, se C D não é perpendicular, haverá uma perpendicular C E. Ora, sendo E C perpendicular por hypothese, sendo as obliquas A C e B C iguaes, segue-se que A E = B E. Esta consequencia é impossivel, porque por hypothese A D = B D; logo, o pé da perpendicular não podendo cahir nem á direita nem a esquerda de D, a perpendicular é C D.

QUINTA LIÇÃO.

PERPENDICULARES

58. *Se de dous pontos de uma recta cada um d'elles está igualmente distante de dous pontos de uma outra, a primeira é perpendicular á segunda.* Com um raio arbitrario, fazendo centro successivamente em A e em B (fig. 20), traçando dous arcos que se interceptão em C; com outro raio, fazendo tambem centro em A e depois em B, traçando dous arcos que se encontrão no ponto D, unindo o ponto C e o ponto D com o auxilio de uma regoa, cumpre demonstrar que C D é perpendicular sobre A B.

A recta C E é perpendicular sobre A B, porque qualquer recta, cujo pé cahe á direita ou á esquerda do ponto E, não póde ser perpendicular A B.

Com effeito, supponhamos um ponto F qualquer á direita de E, e supponhamos que C F é perpendicular sobre A B. Em consequencia desta hypothese, A F = B F (51).

Ora, sendo A F = B F, sendo A D = B D por construcção, segue-se que D F é perpendicular sobre A B. (57); e, não sendo possivel pelo ponto F traçar duas perpendiculares sobre A B, destas hypotheses resulta que D F é o prolongamento de C F, e C F D uma linha recta. Esta consequencia absurda, porque pelos pontos C e D não se póde traçar senão uma linha recta, deriva da hypothese absurda, que C F é perpendicular sobre A B. Do mesmo modo se demonstra que não póde a perpendicular do ponto C sobre A C cahir á esquerda do ponto E ; e pois C E ou C D é perpendicular sobre A B.

59. *Por um ponto dado sobre uma recta elevar uma perpendicular sobre esta.* Seja a recta A B (fig. 21), e sobre esta o ponto C, pelo qual se tem de elevar a perpendicular.

Determinando os pontos D e D′, com uma distancia arbitraria, igualmente distantes do ponto C, com um raio arbitrario, fazendo centro em D e depois em D′, traçando dousarcos, que se encontrão no ponto E, unindo C e E, a recta E C é perpendicular sobre A B, porque o ponto C dista tanto de D quanto de D′, e o ponto E está no mesmo cazo.

60. *De um ponto dado fóra de uma recta abaixar uma perpendicular sobre esta.* Seja a recta dada A B (fig. 22), e o ponto dado C. Fazendo centro em C, com um raio arbitrario e conveniente, trace-se um arco que encontre a recta A B nos pontos D e D′. Fazendo successivamente centro em D e em D′, com um raio arbitrario, tração se dous arcos que se encontrão no ponto E.

Unindo os pontos C e E, esta recta CE é perpendicular sobre A B, porque tem o ponto C que dista tanto de D quanto de D′, e o ponto E está no mesmo cazo E′, pois, CE perpendicular sobre AB, em virtude do theorema do § 58.

61. Para levantar uma perpendicular na extremidade de uma recta a construcção é simples; mas depende a demonstração de um theorema que será demonstrado posteriormente. Por essa razão este problema será resolvido tambem posteriormente.

62. *Determinar o meio de uma recta.* Seja a recta AB (fig. 23), da qual se quer determinar o meio. Fazendo centro em A, tração-se dous arcos, um em cima, outro inferiormente, com um raio arbitrario. Com este mesmo

raio, fazendo centro em B, tração-se dous outros arcos, que encontrão os primeiros nos pontos C e D, unindo C e D, esta recta encontra AB no ponto E, meio de AB. Com effeito, CD é perpendicular sobre AB, em virtude do theorema (58), e sendo as obliquas AC e BC iguaes (51), temos que A E = B E.

63. No § precedente invocamos o theorema do § 51, no qual ficou demonstrado que duas obliquas partindo de um ponto qualquer de uma perpendicular sobre uma recta, e encontrando esta em dous pontos igualmente distantes do pé da perpendicular, são iguaes. Sobre a reciproca deste theorema é baseada a resolução do problema precedente. Ora, se as obliquas, partindo do mesmo ponto sendo iguaes, distão igualmente do pé da perpendicular, não é menos certo que, sendo por hypothese iguaes as distancias dos pés dos obliquas ao pé da perpendicular, as obliquas que convergem a um ponto da perpendicular são iguaes. Com effeito, dobrando a figura por CP (fig. 15), a recta BP toma a direcção de PA, o ponto E coincide com D, porque EP=DP por hypothese. Consequentemente a obliqua CE= a obliqua CD. Ou pelo methodo da superposição, ou, mais frequentemente ainda, pelo methodo chamado por absurdo, se demonstrão as reciprocas.

SEXTA LICÃO

PARALLELAS

64. *Duas rectas são parallelas quando situadas no mesmo plano nunca se encontrão, por mais que se prolonguem.* A theoria das parallelas tem preoccupado os mais celebres geometras.

65. Por muito tempo se deduzio a theoria das parallelas de uma proposição celebre, conhecida na sciencia sob o nome de *postulatum* de Euclides. Por esse nome se entende uma proposição que, sem que tenha a evidencia do oxioma, se péde que seja admittida como se fôra tal. Eis ahi o postulatum de Euclides : *Py sendo perpendicular sobre AB, Dx sendo obliqua sobre AB, Py e Dx hão de se encontrar* (*fig.* 24). Os successores de Euclides concordárão com a opinião deste celebre geometra, até que Legendre, no fim do seculo passado, provou que esta proposição podia ser considerada entre os theoremas, e a demonstrou do modo seguinte.

Se na recta Dx consideramos um ponto *m*, imaginando que por esse ponto passa a perpendicular *mp* sobre AB, o pé *p* dessa perpendicular não póde cahir nem em D nem á esquerda de D . Não póde cahir em D, porque, nessa hypothese, teriamos o absurdo de um angulo recto igual a um agudo. Não póde cahir á esquerda do ponto D, porque a perpendicular do ponto D sobre AB, encontrando a recta *mp* no ponto q, teriamos duas perpendiculares, *qD* e *qp*, do ponto *q* sobre AB, o que não é possivel, em virtude do theorema demonstrado no § 49. Se do ponto m', acima do ponto m, imaginamos a perpendicular $m'p'$, demonstra-se do mesmo modo que o pé p' não póde cahir nem em p nem á esquerda de p. Ora, sendo o nº de pontos desde D até P limitado, e sendo a recta Dx indefinita, é evidente que esta terá algum ponto, do qual partindo uma perpendicular sobre AB, o pé dessa perpendicular cahirá á direita do ponto P. Seja E esse ponto situado á direita do ponto P. A perpendicular ME com a recta DE com a recta DM formão uma superficie fechada, dentro da qual se acha a perpendicular Py. Para sahir dessa superficie a recta Py deve encontrar ou a recta EM, ou a obliqua Dx. Não podendo encontrar a perpendicular ME, por que teriamos do ponto de encontro duas perpendiculares sobre AB, é claro que Py deve necessariamente encontrar a obliqua Dx . Está, pois, provado que Py e Dx se encontrão.

66. *A perpendicular a uma recta, tambem o é a todas as outras parallelas a esta (fig. 25)*. Sejão AB e CD parallelas por hypothese, e EP perpendicular sobre AB: a recta EP prolongada até P' é tambem perpendicular a CD . Com effeito, se CD não é perpendicular a EP', pelo ponto P' deve haver uma recta P'x, que sejas perpendicular a PP', temos que P'D é obliqua á mesma recta EP'. sendo DP' obliqua, BA e CD hão de se encontrar, em virtude do theorema precedente, o que é impossivel porque AB e CD são parallelas por hypothese. Não ha, pois, recta alguma, a não ser DP', que possa ser perpendicular a EP', sendo esta a nossa these.

67. ***Por um ponto fóra de uma recta não se póde traçar senão uma parallela***, (fig. 26). Seja a recta AB, e pelo ponto m imagine-se uma recta mC parallela á AB.

Se construirmos a perpendicular commum *mn*, pelo ponto *m* não é possivel imaginar recta alguma *mD*, parallela a AB porque sendo Cm perpendicular á *mn*, mD é obliqua, e esta ha de necessariamente encontrar a perpendicular AB, não podendo consequentemente ser-lhe parallela.

68. *Se de diversos pontos de uma recta parallela a outra, construirmos as perpendiculares communs mn, m'n' etc, estas rectas, que medem a mais curta distancia entre as parallelas são iguaes entre si, (fig. 27).* Seja *o* o meio de *mm'*. Construindo a perpendicular commum *oo'*, dobrando a figura por *oo'*, *om'* toma a direcção de *om*, o ponto *m'* coincide com o ponto *m*, por serem rectos os dous angulos em *o*; do mesmo modo *o'n'* toma a direcção de *o'n*, e o ponto n' coincide com o ponto *n*. Os pontos extremos *m* e *n* da recta *mn* coincidindo com os pontos extremos *m'* e *n'* da recta *m'n'*, é evidente que a recta *mn*= *m'n'* . Qualquer que seja a distancia *mm'*, sempre possivel é imaginar uma perpendicular intermediaria *oo'*. Se os pontos *m* e *m'* são contiguos, a superposição é evidente.

SETIMA LIÇÃO

PARALLELAS

69. Quando duas rectas parallelas são interceptadas por uma seccante, esta forma com as parallelas angulos, conhecidos pela seguintes denominações, (fg. 28).

Os angulos A G F e D H E, ambos entre as parallelas, um situado de um lado da seccante, outro situado de outro lado, são chamados angulos alternos-internos. Os angulos B G H e C H E são tambem alternos-internos.

Os angulos B G E e D H E, um situado fóra do intervalo entre as parallelas, outro dentro, ambos do mesmo lado da seccante, são chamados correspondentes. Os angulos A G E e C H G são tambem correspondentes. Os angulos A G F e C H F e bem assim os angulos B G F e D H F, são igualmente correspondentes.

Os angulos A G E e D H F, ambos externos em relação ao intervalo entre as parallelas, um de um lado da seccante, outro de outro lado, são chamados alternos-externos. Os angulos B G E e C H F são tambem alternos externos.

Os angulos B G E e D H F, do mesmo modo que os angulos AGE e C H F, são externos do mesmo lado da seccante.

Os angulos A G H e C H E são internos do mesmo lado da seccante. Neste caso estão os angulos B G F e D H E.

Definidos estes diversos generos de angulos, cumpre demonstrar as diversas relações, que existem entre os dous angulos de cada genero.

70. *Os angulos alternos-internos são iguaes entre si,* (*fig.* **29**). Demonstremos que o angulo A F I é igual ao angulo D E F.

Depois de determinar o ponto *m*, meio de EF, abaixe-se a perpendicular *m G* sobre A B, e esta perpendicular *m G*, prolongada até H, tambem é perpendicular sobre C D. Cumpre demonstrar que o triangulo F G m é igual ao triangulo E H m.

Se imaginarmos que o triangulo m F G gira em torno de um eixo perpendicular ao plano da figura no ponto *m*, até que *m F* tome a direcção de *m E*, evidentemente o ponto F coincidira com o ponto E, porque $m F = m E$ por construcção. A recta $m G$ tomará a direcção de $m H$, por serem os angulos $G m F$ e $E m H$, oppostos pelo vertice, iguaes entre si. Ora, m G tomando a direcção de $m H$, é facil demonstrar que o ponto G coincide com o ponto H.

Com effeito, se o ponto G cahisse no ponto G′ ou G″, acima ou abaixo do ponto H, teriamos a recta F G ou tomando a direcção E G′ ou a direcção E G″. O angulo F G m recto, depois do giro da figura, ficaria sendo E G′ m na 1ª hypothese, ou E G″ H, na 2ª hypothese. Em qualquer destas hypotheses, seria possivel do ponto E haver duas perpendiculares sobre a recta G H; mas não sendo possivel, segue-se que a hypothese de cahir o ponto G acima ou abaixo do ponto H é inadmissivel. Da igualdade dos dous triangulos resulta que o angulo $G F m$ é igual ao angulo $H E m$.

71. Demonstrado o theorema precedente, ou a igualdade dos angulos alternos-internos, desta importante proposição se deduz facilmente toda o theoria das parallelas.

72. *Os angulos B G E e* **DHG**, *correspondentes, são iguaes*, (*fig. 30*). Sendo AGH=BGE, por serem oppostos pelo vertice, estando demonstrado que A G H = D H G, pelo § 70, segue-se que B G E = D H G, nossa these.

73. *Os angulos A G E e D H F, alternos-externos, são iguaes entre si*, (*fig. 30*). Sendo iguaes entre si os alternos-internos B G H e C H G, os seus oppostos pelo vertice, que são A G E e D H F, tambem são iguaes.

74 *Os internos do mesmo lado da seccante valem em somma dous rectos*, (*fig. 30*). Para demonstrar que B G H mais D H G valem em somma dous rectos, basta lembrar que A G H + B G H = 2 r. Ora, substituindo nesta igual-

dade A G H pelo seu igual D H G, temos D H G + B G H = 2 r, nossa these.

75. *Os externos da mesmo lado do seccante valem em somma dous rectos*, (*fig. 30*). Sendo D H G + B G H = 2 r, como ficou demonstrado no § precedente, segue-se os seus oppostos pelo vertice, que são C H F e A G E, tambem em somma valem dous rectos.

76. Todas as reciprocas dos procedentes theoremas relativos ás parallelas se demonstrão pelo methodo chamado methodo por absurdo. Limitamos-nos a demonstrar a reciproca do theorema do § 70, que é a seguinte proposição: *Se os angulos A F E e D E F, alternos-internos, são iguaes*, (*fig. 29*,) *as rectas A B e C D são parallelas.*

Suppondo que A B não é parallela a C D, é necessario que pelo ponto F passe uma recta xy, que seja parallela a C D. Nesta hypothese, x F E será igual a D E F. Ora, sendo por hypothese D E F = A F E, segue-se que x F E = A F E, isto é, segue-se o absurdo de ser uma parte igual ao todo. Nenhuma recta, pois, passando pelo ponto F, a não ser a recta A B, póde ser parallela a C D.

77. Para exercicio convém que todas as reciprocas dos theoremas dos §§ 71, 72, 73, 74, 75, sejão demonstradas analogamente.

OITAVA LIÇÃO

PARALLELAS

78. *Dous angulos cujos lados são respectivamente parallelos aos lados, que formão os angulos, são iguaes, quando as aberturas dos angulos estão para o mesmo lado,* (*fig.* 31). Sejão os lados A B e A'B' parallelos por hypothese, e igualmente A C A'C' parallelos. Prolongando A'B' até E, de modo que A'B' corte A C no ponto D, temos B A C = C D E, por serem A B e A' E parallelas, e tambem B' A' C' = C D E, por serem A C e A' C' parallelas. E' facil concluir, em virtude de um axioma, que B A C = B' A' C'.

79. *Dous angulos tendo os lados respectivamente parallelos, e as aberturas dos angulos para lados diversos, um para direita, outra para a esquerda, são supplementares,* (*fig.* 32). Sejão A B e A' B' parallelas, A C e A' C' parallelas, as aberturas como mostra a figura.

Prolongando A' B' até D, temos pelo theorema precedente, B A C = C' B' D. Ora, A' B' C' + C' B' D = 2 r. Substituindo C' B' D pelo seu igual B A C, temos A' B' C' + B A C = 2 r, nossa these.

80. Com o auxilio dos theoremas precedentes, relativos á theoria das parallelas, podemos resolver todos os problemas que se referem á mesma theoria. Os principaes são os seguintes.

80. *Por um ponto, situado fóra de uma recta, traçar uma parallela á dita recta,* (fig. 33). Seja a recta A B,

e *m* o ponto situado fóra da recta. Pelo ponto *m* seja traçada uma recta qualquer, que encontre a recta A B no ponto C. Com um raio arbitrario e conveniente, fazendo centro em C, trace-se o arco *n o*. Com o mesmo raio C n, fazendo centro em *m*, trace-se o arco *n'x*. Com a distancia igual a corda *n o* , fazendo centro em *n'* , trace-se o pequeno arco, que corta o arco *n' x* no ponto *o'*. Unindo o ponto *m* e o ponto *o'* , prolongando de um e de outro lado, esta recta *m o'* é parallela á recta A B . A construcção precedente teve por intuito construir em *m* um angulo igual ao angulo B C m. Consequentemente a recta=DE é parallela á recta A B.

82. *Por um ponto situado fóra de uma recta traçar uma recta, que faça com a primeira um angulo igual a um angulo dado.* Seja a recta A B (fig. 34), *m* o ponto situado fóra desta recta, e *abc* o angulo dado. Pelo ponto *m* trace-se, pela construcção precedente, uma recta *mn* parallela a A B . Fazendo centro em *b*, com um raio arbitrario trace-se o arco *d e*, e com o mesmo raio, fazendo centro em *m* ,trace-se o arco *d f* , e a corda *d' e'* = a corda *d e* . Unindo o ponto *é* com o ponto m, e prolongando *e'm*, esta encontrará a recta A B no ponto *o* , e o angulo B o m, sendo igual ao angulo dado *abc*, resolve o problema,

83. Convem, para terminar esta lição, fazer a recapitulação da theoria das parallelas.

NONA LICÃO

TRIANGULOS

84. *Triangulo é a superficie fechada por tres linhas.* A Geometria elementar só se occupa dos triangulos rectilineos. As rectas A B, A C, B C chamão-se lados do triangulo.

Qualquer destes lados póde ser considerado como base do triangulo. Escolhido, por exemplo, o lado A C para base, chama-se altura a perpendicular B D, abaixada do vertice B opposto á base sobre esta.

85. O triangulo ou é equilateral, ou é isosceles, ou é rectangulo, ou é escaleno.

86. *Triangulo equilateral é, como indica a etymologia, o que tem os tres lados iguaes.*

87. *Triangulo isosceles tem dous lados iguaes, e um desigual aos dous iguaes.*

88. *Triangulo rectangulo tem um angulo recto e dous agudos.*

89. *Triangulo escaleno tem os tres lados desiguaes.*

90. *Qualquer lado de um triangulo é menor do que a somma dos dous outros.*

Este theorema resulta da definição de linha recta. Temos, por exemplo, $A\,B < A\,C + B\,C$.

Desta desigualdade se deduz, subtrahindo de ambos os membros B C, que $A\,B - B\,C < A\,C$, isto é, o lado A C maior do que a differença dos outros dous.

Demonstra-se identicamente que qualquer dos lados de um triangulo é maior do que a differença entre os dous outros.

91. *A somma $A\ B + C\ D$ de duas rectas que se crusão é maior do que a somma $A\ C + B\ D$ de duas rectas que unem as quatro extremidade A, C, B, D.* Para o demonstrar, basta estabelecer que $A\ C < A\ E + C\ E$, e que $B\ D < B\ E + D\ E$. Consequentemente $A\ C + B\ D < A\ E + B\ E + C\ E + D\ E$, e como $A\ E + B\ E = A\ B$, e $C\ E + D\ E = C\ D$, segue-se que $A\ C + B\ D < A\ B + C\ D$, nossa these.

92. *Unindo um ponto qualquer do interior de um triangulo com as extremidades de um dos lados do triangulo, a somma das rectas internas é menor do que a somma dos outros dous lados.* Seja o ponto O (fig. 38) do interior do triangulo, unindo O com os pontos A e B, temos que demonstrar ser $A\ O + B\ O < A\ C + B\ C$. Prolongando A O até D, temos que $A\ D < A\ C + C\ D$; temos tambem $B\ O < B\ D + D\ O$. Destas duas desigualdades concluimos que $A\ D - D\ O + B\ O < A\ C + C\ D + B\ D$.

Ora, sendo $A\ D - D\ O = A\ O$, e sendo $C\ D + B\ D = B\ C$, é evidente que $A\ O + B\ O < A\ C + B\ C$.

93. *O angulo $A\ O\ B$, na fig. precedente, é maior do que o angulo $A\ C\ B$.* Para o demonstrar, basta traçar pelo ponto O a recta OP parallela a $A\ C$, e pelo mesmo ponto O a recta $O\ Q$ parallela a B C. O angulo $P\ O\ Q$, igual ao angulo A C B (78), é evidentemente menor do que o angulo A O B, por ser parte do angulo total A O B.

94. No triangulo rectangulo chama-se hypothenusa o lado opposto ao angulo recto. Chamão-se lados catetos os que formão o angulo recto. Na fig. 39, A B é a hypothenusa, A C e B C são os lados catetos.

DECIMA LIÇÃO

TRIANGULOS

95. *A somma dos tres angulos de um triangulo é igual a dous rectos.* Seja um triangulo ABC (fig. 40) de qualquer genero. Prolongando o lado AB até D, e pelo ponto B traçando BE parallela a AC, temos no ponto B tres angulos adjacentes DBE, CBE, ABC, cuja somma é igual a dous rectos (43). Ora, o angulo BAC = DBE, por ser BE parallela a AC ; o angulo ACB=CBE, por serem alternos-internos (70) ; o angulo ABC=ABC. Na igualdade DBE + CBE + ABC = 2 r substituindo o primeiro e o segundo angulo pelo seu igual, temos

$$BAC + ACB + ABC = 2 \text{ rectos.}$$

O angulo CBD, formado pelo lado BC do triangulo e pelo lado AB prolongado, chama-se angulo externo. Do theorema precedente resulta que o angulo externo é igual a somma dos internos não adjacentes. Resulta tambem do theorema que um angulo qualquer de um triangulo é supplemento da somma dos outros dous.

96. *Do vertice de um triangulo qualquer ABC traçando uma recta, que encontre o lado opposto entre B e C,* o angulo ACD é menor do que o angulo externo A D B do triangulo (fig. 41). Para aprovar, basta observar que o angulo externo ADB, sendo igual á somma ACD+CAD, é evidentemente maior do que o angulo ACD ou ACB.

97. Em virtude do theorema do § 94 um triangulo não póde ter mais do que um angulo recto. O triangulo rectan-

gulo tem um angulo recto e dous agudos. Tendo um triangulo um angulo obtuso, os outros dous devem ser agudos.

98. Se do vertice C de um triangulo (fig. 42) a perpendicular abaixada sobre o lado AB, cahir o pé D dessa perpendicular entre as extremidades do referido lado, o angulo CBA é agudo. Se do vertice C′ a perpendicular C′D′ cahir fóra do intervalo entre A′ e B′, o angulo A′B′C′ é obtuso. São dous lemmas que resultão do que está referido no § 86. No primeiro caso o angulo CDB sendo recto, o angulo CBD deve ser agudo. No segundo caso, C′B′D′ é agudo, e por consequencia C′B′A′ é obtuso.

99. *Em um triangulo isosceles os angulos oppostos aos dous lados iguaes são iguaes.* Sejão os lados AC e BC (fig. 43) os lados iguaes de um triangulo isosceles. Traçando a perpendicular CD, as extremidades A e B distão igualmente do pé D, sendo as obliquas AC e BC iguaes por hypothese. Dobrando a figura por CD, a recta DB segue a direcção de DA, e o ponto B cahe sobre o ponto A. E', pois, o angulo CBA = o angulo CAB.

100. *N'um triangulo qualquer comparando entre si dous lados, o angulo opposto ao lado maior é maior do que o angulo opposto ao lado menor.* Seja por hypothese o lado BC maior do que o lado AB (fig. 44). Cumpre demonstrar que o angulo BAC é maior do que o angulo ACB. Pois que o lado BC é maior do que o lado AB, podemos construir a recta BA′ = AB. O angulo BA′A = CAA′+ACA′ (95.) Ajuntando a ambos os membros o angulo CAA′, temos BA′A+CAA′= 2 CAA′+ACA′. Temos, pois, BAA′ +CAA′ = BAC. Logo, BAC= ACA′ +2 ACA′ e consequentemente BAC, angulo opposto ao lado maior BC, é maior do que o angulo ACA′. Deste theorema

resulta que os angulos são directamente proporcionaes aos seus lados oppostos: quanto maior é o lado do triangulo maior é tambem o angulo opposto em relação aos outros angulos.

101. *A bissetriz do angulo formado pelos iguaes de um triangulo isosceles divide o lado opposto em duas partes iguaes.* Se dobramos a figura por CD (fig. 45), o angulo ACD tendo igual ao angulo BCD, por hypothese, CB tomará a direcção de CA, e ponto B coincidirá com o ponto A. Consequentemente AD = BD.

UNDECIMA LIÇÃO

TRIANGULOS

102. Em qualquer triangulo temos a considerar tres lados e tres angulos, isto é, seis elementos.

Comparando dous triangulos, logo que verificamos serem tres dos elementos de um respectivamente iguaes aos tres elementos correspondentes do outro, com tanto que um dos elementos, ao menos, seja um lado, podemos ter a certesa de que os tres elementos restantes do primeiro triangulo são tambem iguaes aos tres do outro, e desta sorte os dous triangulos coincidem completamente. D'aqui resultão os tres seguintes principaes casos da igualdade dos triangulos.

103. *Dous triangulos são iguaes quando tem um lado igual e iguaes os angulos adjacentes a esse lado.* Seja, por hypothese, o lado AB igual ao lado A'B' (fig. 46), o an-

gulo em A igual ao angulo em A′, o angulo em B igual ao angulo em B′. Pela superposição A′B′ coincide com A B, lado A′C′ segue a direcção de AC, B′C′ segue a direcção de BC. Evidentemente o vertice C′ coincide com o vertice C, de sorte que os dous triangulos são iguaes por terem os tres lados e os tres angulos respectivamente iguaes.

104 *Dous triangulos são iguaes quando tem um angulo igual formado por dous lados respectivamente iguaes.* Sejão, por hypothese, os angulos em A e A′ iguaes, seja o lado AC igual ao lado A′C′, o lado AB igual ao lado A′B′.

Pela coincidencia, A′B′ coincidindo com AB, o lado A′C′ toma a direcção de AC, o ponto C′ coincide com o ponto C, o angulo em C′ é igual ao angulo em C, o angulo em B′ é igual ao angulo em B′ e os dous triangulos são iguaes em todos os seis elementos.

105. *Dous triangulos são iguaes quando tem os tres lados respectivamente iguaes.* Sejão, por hypothese, os lados AB, AC. CB respectivamente iguaes a A′B′, A′C′, B′C′ (fig. 47). Fazendo coincidir o lado A'B' com o lado AB, de sorte que o triangulo A'B'C' fique na posição ABC″, unindo C com C″, temos a recta AB perpendicular sobre CC' e dividindo esta em duas partes iguaes no ponto D (58), porque a recta AB tem dous pontos, o ponto A que dista tanto de C quando de C″, o ponto B que dista tanto de C quanto de C″. Se, pois, dobramos a figura por AB a recta DC″ toma a direcção de DC, o ponto C″ coincide com o ponto C. Ora, o triangulo ABC" é igual ao triangulo A'B'C', e por consequencia este é igual ao triangulo ABC, o que é a nossa these.

106. Com o auxilio dos precedentes theoremas é facil construir um triangulo igual a qualquer triangulo dado.

107. Para construir um angulo igual a um angulo dado, ou se emprega um instrumento chamado transferidor, ou uma construcção. A descripção do transferidor será dada posteriormente, quando mencionarmos a subdivisão da circunferencia em gráos. Eis ahi a construcção.

108. Seja o angulo dado ABC (fig. 48). Fazendo centro em B, com um raio arbitrario e conveniente, trace-se o arco *ab*. Com o mesmo raio, n'um ponto qualquer B' da recta indeffinita *xy* , trace-se o arco *bc* , com um raio igual a corda *ab* , fazendo centro em em *b'* , trace-se o pequeno arco que encontra o arco *b'c* no ponto *a'* . Unindo o ponto *a'* com o ponto B', temos o angulo *a'B'b* igual ao angulo dado ABC . Da igualdade dos triangulos *aBb* e *a'B'b'* é facil dedusir que o angulo aBb é igual ao angulo *a'B'b'* .

109. Para construir um triangulo igual a um triangulo dado ABC' (fig. 49), n'm ponto A' de uma recta indeffinita *xy* , faz-se um angulo *yA'z* igual ao angulo em A , determina-se a distancia A'B' = AB , determina-se a distancia A'C' = AC , unindo o ponto B' com C' , temos o triangulo A'B'C' igual ao triangulo ABC .

110. A construcção póde effectuar-se de diversos modos utilisando ou theorema do § 102 , ou o do § 104.

111. Quando os triangulos são rectangulos, basta que tenhão a hypothenusa igual e um lado cateto igual, ou um angulo igual, para que sejão iguaes. A demonstração de qualquer destes dous theoremas se effectua pelo methodo da superposição.

DUODECIMA LIÇÃO

QUADRILATEROS

112. *As figuras planas fechadas e formadas por quatro lados chamão-se quadrilateros.* O quadrado, o rectangulo, o parallelogramo, rhombro, o trapezio são quadrilateros.

113. *Quadrado é um quadrilatero, que tem os quatro lados todos iguaes entre si, e estes formando dous a dous angulos rectos*, como mostra a fig. 50 .

114 *Rectangulo é um quadrilatero, que tem quatro angulos rectos e os lados oppostos iguaes entre si, sendo desiguaes os lados contiguos*, como mostra a fig. 51.

115. *Parallelogramo é um quadrilatero, que tem os lados oppostos parallelos*, como mostra a fig. 52 . Quando os quatro lados que formão o parallelogramo são iguaes entre si toma elle o nome de rhombo.

116. *Trapezio é um quadrilatero, que tem dous lados oppostos parallelos e dous que não são*, como mostra a fig. 53.

117. *A somma dos quatro angulos de um quadrilatero equivale a quatro angulos rectos.* Qualquer que seja o quadrilatero, podemos sempre dividil-o em dous triangulos por uma diagonal, isto é, por uma recta que une os vertices de dous angulos oppostos. E' evidente que a somma dos seis angulos dos dous triangulos equivale aos quatro angulos do quadrilatero. Ora, sendo a

somma dos tres angulos de um triangulo igual a dous rectos (95), a somma dos seis angulos vale quatro rectos. Se os quatro angulos do quadrilatero são rectos, a figura é um quadrado ou um rectangulo; se os angulos oppostos são iguaes, a figura é um parallelogramo.

118. O *angulo cujos lados são perpendiculares aos lados de um outro é supplemeuto deste outro.* Seja o angulo ABC , fig. 54 , e sejão os lados DE e DF do angulo EDF respectivamente perpendiculares aos lados BC e AB do angulo ABC. E' evidente que a figura BEDF é um quadrilatero. Os angulos BED e BFD sendo rectos, os dous outros do quadrilatero, isto é, os angulos EBF e EDF valem em somma dous rectos, e consequentemente são supplementares.

119. *Os lados oppostos de um parallelogramo são iguaes.* Unindo os vertices oppostos B e C do parallelogramo ABDC pela diagonal BC, fig. 55 , dividimos este em dous triangulos, que são iguaes, por terem o lado commum BC e iguaes os angulos adjacentes a esse lado. Effectivamente, o angulo ABC = angulo BCD, e o angulo CBD = angulo ACB sendo alternos internos (70). Sendo os dous triangulos iguaes, são iguaes os lados oppostos aos angulos iguaes, e pois AB = CD , AC = BD.

120. *Se os lados oppostos de um quadrilatero são iguaes, a figura é um parallelogramo.* Sejão, por hypothese, os lados AB e CD iguaes, e do mesmo modo diagonal AC=BD. Unindo o ponto B com o ponto C pela diagonal BC, fica o quadrilatero dividido em dous triangulos. Estes são igaes, por terem os tres lados respectivamente iguaes (105).

DECIMA TERCEIRA LIÇÃO

POLYGONOS.

121. *Polygono é uma figura plana fechada limitada por lados, que formão angulos.* Dando-se ás figuras fechadas com tres angulos o nome generico de triangulo, e o de quadrilatero ás que têm quatro angulos, applicaremos o nome de polygono ás figuras fechadas de cinco ou mais angulos.

122. Se os lados (fig. 50) são iguaes entre si, e os angulos do mesmo modo iguaes, o polygono é regular. Se os lados e os angulos são diversos, o polygono se diz irregular.

123. *O polygono que tem cinco lados e cinco angulos chama-se pentagono.*

124. *O polygono que tem seis lados e seis angulos chama-se hexagono.*

125. *O polygono que tem sete lados e sete angulos chama-se heptagono.*

126. *O polygono que tem oito lados e oito angulos chama-se octogono.*

127. *O polygono que tem nove lados e nove angulos chama-se enecagono.*

128. *O polygono que têm dez lados e dez angulos chama-se decagono.*

129. *O polygono que têm onze lados e onze anguloc chama-se undecagono.*

130. *O polygono que têm doze lados e doze angulos chama-se duodecogono*

131. *O que têm qainze lados chama-se pentedecagono.*

132. Quando os angulos do polygono são todos salientes, como mostra a (fig. 57), diz-se que elle é convexo. Neste caso não estão os polygonos, que têm um ou mais angulos reintrantes, como os da (fig. 58). A Geometria elementar só se occupa dos polygonos convexos.

133. Tres caracteres distinguem os polygonos convexos. Primeiro: qualquer lado do polygono prolongado deixa o polygono todo para um lado dessa recta prolongada. Segundo: uma recta que atravessa o polygono encontra este em dous pontos sómente. Terceiro: o polygono se póde dividir em tantos triangulos quantos são os lados menos dous.

134. *A somma de todos os angulos internos de um polygono se representa pela formula 2r (n — 2).* Esta proposição se torna evidente subdividindo o polygono em triangulos. O pentagono, por exemplo, representado na (fig. 59), é dividido pelas diagonáes BE e CE em tres triangulos. Ora, evidentemente os angulos internos deste polygono equivalem à somma dos angulos dos tres triangulos. Valendo os tres angulos de cada triangulo dous rectos, e o numero de triangulos sendo tres, por ser neste polygono $n = 5$, e consequentemente $n - 2 = 3$, é claro que a somma dos angulos internos é $2r \times 3$.

Em outro qualquer polygono a somma dos angulos internos se determina pela formula $2r\,(n - 2)$.

135. Prolongando um lado do polygono, por exemplo o lado AB (fig. 60), o angulo formado por esse lado prolongado e o lado AE do polygono, lado ocntiguo ao lado

AB, chama-se angulo externo. Os angulos MAE, NED, ODC, PCB, QBA são angulos externos.

136. *Em qualquer polygono a somma dos angulos externos é sempre igual a quatro angulos rectos.* Para maior facilidade da demonstração, designamos os angulos internos por i, i', i'', i''', i'''', e os angulos externos por e, e', e'', e''', e'''' (fig. 61). Temos, sendo a figura um pentagono, evidentemente a somma dos externos e dos internos igual ia 10 angulos rectos, ou $e+i+e'+i'+e''+i''+e'''+$ $'''+e''''+i''''=10r$. Ora, se do primeiro membro desta igualdade diminuimos os angulos internos, cuja somma se determina pela formula $2r\,(n-2)$, sendo neste exemplo 6 rectos, ficão os angulos externos. Diminuindo do 2º membro da igualdade tambem 6 rectos, ficão 4 rectos. E' claro, pois, que nos pentagonos temos $e+e'+e''+e'''+$ $e''''=4$ rectos. Qualquer que seja o polygono, a somma dos angulos externos é sempre invariavel e igual a quatro rectos, porque no segundo membro ha sempre tantas vezes dous rectos, quantos são os lados do polygono, e no primeiro membro a somma dos angulos internos é sempre duas vezes dous rectos, quantos são os lados menos dous.

DECIMA QUARTA LIÇÃO

CIRCUMFERENCIA ETC.

137. *Uma recta não póde encontrar uma circumferencia em mais de dous pontos.* Para demonstrar este theorema basta recordar a definição de circumferencia e de raio. Com effeito, se fosse possivel que uma recta encontrasse a circumferencia em tres ou mais pontos, unindo esses pontos de intersecção com o centro do circulr, teriamos de um ponto tres rectas iguaes traçadas sobre uma linha recta, cuja impossibilidade foi já demonstrada (54). Se os pontos de intersecção não são contiguos, a recta indefinita que corta a circumferencia em dous pontos não contiguos, como já foi indicado chama-se seccante. Se os dous pontos da circumferencia são contiguos, o elemento infinitamente pequeno, formado pelos dous pontos contiguos, prolongado constitue a tangente. Podemos tambem definir a tangente pelo seguinte modo.

138. *Tangente a um ponto da circumferencia é a perpendicular levantada sobre o raio no ponto em que este encontra a circumferencia.*

139. *Qualquer diametro divide a circumferencia e o circulo em duas partes iguaes.* Este theorema se demonstra pelo methodo da superposição, dobrando a figura pelo diametro A E (fig. 62). O arco A m B não póde em relação ao arco A m' B senão affectar uma das tres posições seguintes: ou ficar na posição interna A n B, ou

coincidir com o arco A m' B, ou ficar na posição externa A n' B. Da primeira e da segunda hypothese resultando o absurdo de raios do mesmo circulo maiores uns do que outros, é claro que não podemos senão admittir a hypothese da coincidencia. O arco A m B coincidindo com o arco A m' B, qualquer destes arcos é uma semi-circumferencia, e o circulo tambem fica dividido em dous semi-circulos.

140. *Por um ponto da circumferencia não se póde traçar senão uma tangente.* Este theorema é a consequencia immediata da definição de tangente exarada no § 137. Não sendo possivel na extremidade do raio levantar senão uma perpendicular (49), não é possivel tambem por esse ponto imaginar mais de uma tangente.

141. *A perpendicular abaixada do centro sobre uma corda qualquer divide esta e o arco correspondente em duas partes iguaes.* Seja a corda A B (fig. 63), e do centro C seja abaixada a perpendicular C D, que se prolongue até E. Os raios A C e B C, iguaes entre si, podem ser considerados como sendo obliquas partindo do ponto C da perpendicular C D sobre a recta A B. Estas obliquas iguaes afastão-se igualmente do pé da perpendicular, e pois, $AD = BD$. Para demonstrar que o arco $\widehat{AE} =$ arco $\widehat{BE}$, basta dobrar a figura por C E. A recta D A toma a direcção de D B, por serem rectos os angulos em D, e o ponto A cahe sobre o ponto B. Ora, o ponto E ficando fixo, o ponto A cahindo em B, é evidente que o arco $\widehat{EA} =$ arco $\widehat{BE}$. Deste theorema resulta que uma recta que passa pelo centro de um circulo e pelo meio de uma corda passa necessariamente pelo meio do arco correspondente á mesma corda. Ha entre os tres pontos, centro do circulo, meio da corda, meio do arco corres-

pondente, uma correlação tal que basta passar por dous desses para necessariamente passar pelo terceiro.

142. *No mesmo circulo ou em circulos iguaes arcos iguaes correspondem a cordas iguaes.* Sejão, por hypothese, iguaes os arcos AB e A' B', fig.: 64 , cumpre demonstrar que a corda AB é igual a corda A' B' . Pelo ponto D , meio de BB' , trace-se o diametro DE . Dobrando a figura por esse diametro, o ponto B' coincide com o ponto B , porque o arco BD= arco B'D , o ponto A' coincide com o ponto A , porque por hypothese o arco AB é igual ao arco A' B' . Coincidindo as extremidades A e B da corda AB com as extremidades A' e B' da da corda A' B' , estas duas cordas são iguaes.

143. *Traçar uma circumferencia por tres pontos não em linha recta.* Sejão os pontos A , B , C , fig. 65, pelos quaes a circumferencia tem de passar. Unindo A com B, B com C , trançando uma perpendicular que passe pelo meio de AB , e uma outra perpendicular que passe pelo meio de BC , estas duas perpendiculares se encontrão no ponto O , que é o centro do circulo, cuja circumferencia passa por A, por B, por C. E' facil demonstrar que traçando uma circumferencia com o raio AO , esta circumferencia passará por B e por C . Effectivamente, AO e BO são iguaes, sendo obliquas que se afastão igualmente do pé da perpendicular. No mesmo caso estão BO e CO .

DECIMA QUINTA LIÇÃO

MEDIDA DOS ANGULOS

144. Dado um angulo qualquer, e traçando no mesmo plano uma circumferencia, o vertice do angulo póde affectar em relação a esta uma das quatro seguintes posições: ou coincidir com o centro do circulo limitado pela circumferencia; ou coincidir com um dos pontos desta; ou ficar dentro do circulo em um ponto que não seja o centro; ou ficar fóra do circulo. No primeiro cazo o angulo chama-se central; no segundo cazo chama-se inscripto; no terceiro e no quarto cazos chama-se excentrico.

145. A figura 66 representa o angulo central ACB.

146. A figura 67 representa o angulo inscripto ABC.

147. A figura 68 representa dous angulos excentricos, um com vertice situado dentro do circulo, outro com o vertice fóra. São os angulos ABC e A' B' C'.

148. Consideremos os angulos centraes ACB, BCD, DCE, ECF. Supponhamos que elles sejão iguaes entre si. Traçando as cordas AB, BD, DE, EF, é facil demonstrar que os triangulos ABC, BCD, DEC, EFC são iguaes entre si, porque os angulos em C são todos iguaes entre si por hypothese, e os lados que formão esses angulos, raios do circulo, tambem são iguaes. Da igualdade destes triangulos resulta a igualdade das cordas AB, BD, DE, EF. Sendo estas cordas iguaes, tambem o são os arcos AB, BD, DE, EF. Ora, o angulo ACF contem o angulo ACB repetido quatro vezes, do mesmo modo o arco AF contem o arco AB repetido quatro veezs. Temos, pois, o

o angulo ACF : angulo ACB = 4 ; e o arco AF : arco AB = 4 . Consequentemente temos a seguinte proporção.

$\measuredangle$ ACF : $\measuredangle$ ACB : : $\widehat{AF}$: $\widehat{AB}$.

149. *Dous angulos centraes quaesquer*, *fig.* 70, *por exemplo*, ***ACB*** *e* ***BCD***, *são proporcionaes aos arcos comprehendidos entre seus lados*. Póde acontecer que o angulo maior BCD contenha o menor ACB numero exacto de vezes, sendo o menor a medida para avaliar a grandeza relativa dos dous angulos. Neste caso, uma demonstração analoga á precedente próva a these. Supponhamos, porém, que os dous angulos dados no mesmo circulo são incommensuraveis, isto é, que não seja possivel determinar uma medida commum para a avaliação das grandezas relativas dos dous angulos. Ainda neste caso, ha proporção entre os angulos e os arcos comprehendidos entre os lados dos ditos angulos, como se póde demonstrar do modo seguinte.

150. Com quanto não seja possivel determinar o numero de pontos que ha desde A até B , nem o dos pontos desde B até D , todavia podemos chamar o primeiro numero N e o segundo N'. Imaginando que partem raios para cada um dos N pontos do arco AB , e para cada dos N' pontos do arco BD , é evidente que o arco $\widehat{AB}$ fica subdividido em um certo numero de elementos formados por dous pontos contiguos, sendo todos esses elementos iguaes entre si. Do mesmo modo o arco BD fica subdividido em um numero de elementos iguaes. Considerando o ponto A e o seu contiguo temos o primeiro elemento, o segundo e o terceiro pontos formão o segundo elemento, e assim successivamente. O raio AC e o raio contiguo formão um angulo infinitamente pequeno. E' evidente que o angulo ACB é formado de

tantos augulos infinitamente pequenos quantos são os elementos de dous pontos contiguos, que formão o arco AB. Do mesmo modo o angulo BCD é formado de tantos angulos infinitamente pequenos quantos são os elementos que formão o arco BD. Temos, pois, que o angulo ACB : angulo BCD :: n : n', chamando n e n' os numeros de elementos formados de pontos contiguos, constituindo os arcos AB e BD. Qualquer que seja a grandeza do ponto e qualquer que seja o numero de pontos que formão os referidos arcos, é evidente que $n = \widehat{AB}$ e $n' = \widehat{BD}$. Temos, pois, ACB : BCD :: $\widehat{AB} : \widehat{BD}$.

151. Da proporcionalidade constante entre os angulos centraes e os arcos comprehendidos entre seus lados resultou a convenção de avaliar estes angulos pelos arcos. Convencionou-se que toda circumferencia póde ser considerada formada de 360 partes iguaes, que se chamão gráos. Cada gráo é dividido em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos. O gráo se representa por $^\circ$, o minuto por uma virgula, o segundo por duas virgulas. Para representar 90 gráos, 15 minutos, 45 segundos, dizemos $90^\circ\ 15'\ 45''$. O angulo recto tem 90 gráos, e o agudo menos de 90 gráos, o obtuso mais.

DECIMA SEXTA LIÇÃO

MEDIDA DOS ANGULOS

152. Conhecido o meio de avaliar os angulos centraes, indiquemos o meio de determinar o numero de gráos ou fracção de grão que tem um angulo inscripto (146), ou um angulo excentrico (147).

153. Seja o angulo inscripto ABD, fig. 71. Pelo centro C do circulo traçando EH parallela ao lado AB, e FG parallela ao lado BD, temos o angulo ECF igual ao angulo inscripto ABD e temos tambem ECF = GCH, por serem oppostos pelo vertice. Evidentemente, pois, a medida do angulo ABD é a mesma que a do angulo ECF, isto é, o arco EF. Ora, é facil demonstrar que o arco EF é a metade do arco AD. Com effeito, o arco EF é igual ao arco GH, mas este arco GH é a somma dos arcos GB e BH. Substituindo, o arco GB pelo seu igual DF, e o arco BH pelo seu igual AE, temos.

$$\widehat{EF} = \widehat{GH} = \widehat{AE} + \widehat{DF}$$

$$\widehat{AD} = \widehat{EF} + \widehat{AE} + \widehat{DF} = 2\ EF$$

$\widehat{EF} = 1/2\ \widehat{AD}$. Consequentemente:

A medida do angulo inscripto é a metade do arco comprehendido entre seus lados.

154. *O angulo excentrico com o vertice dentro do circulo tem por medida a semi-somma dos arcos comprehendidos entre seus lados.* Seja o angulo excentrico ABD, fig. 72.

Traçando pelo ponto E a recta EG parallela a AB, temos o angulo DEG igual ao angulo ABD, por serem correspondentes. Ora, a medida do angulo DEG$=1/2$ $(\widehat{DE}+\widehat{AG})$, em virtude do que ficou demonstrado no § precedente. Podemos substituir $\widehat{AG}$ pelo arco igual EF, visto serem parallelas as rectas AF e EG, sendo portanto a medida de angulo DEG$=1/2$ $(\widehat{AD}+\widehat{EF})$.

155. *A medida do angulo excentrico com o vertice fóra do circulo é a semi-differença dos arcos comprehendidos entre seus lados.* Seja o angulo excentrico ABD, (fig. 73). Pelo ponto F traçando a recta FG parallela a AB, o angulo DFG é igual ao angulo excentrico ABD, que queremos avaliar. Ora, a medida do angulo DFG, sendo inscripto, é $1/2$ $(\widehat{AD}-\widehat{AG})$. Podemos evidentemente substituir o arco AG pelo arco igual EF, e temos (153) que a medida do angulo DFG ou ABD$=1/2$ $(\widehat{AD}-\widehat{AG})$.

156. No § 153 foi demonstrado que a medida do angulo inscripto é a metade do arco comprehendido entre seus lados quando um dos lados do angulo é uma corda e o outro é uma tangente, como está indicado na fig. 74, ainda neste cazo especial a medida é a metade do arco. Sendo BD tangente, a medida do angulo ABD é a metade do arco AB.

157. Outro cazo particular dos angulos inscriptos é aquelle em que as extremidades dos lados se confundem com as extremidades de um diametro, como mostra a fig. 75. Sendo AB diametro, os angulos ADB, AD′B, AC″B, são rectos, porque têm por medida a metade de uma semi-circumferencia, ou um quarto de circumferencia, ou um arco de 90 gráos.

DECIMA SETIMA LIÇÃO

DIVERSOS PROBLEMAS

158. Quando forão indicadas as construcções para obaixar ou levantar uma perpendicular sobre uma recta, não foi possivel considerar o seguinte caso particular, por faltarem conhecinentos necessarios á sua comprehensão.

159 *Pela extremidade de uma recta levantar uma perpendicular.* Seja a recta AB, fig. 76, e B a extremidade pela qual queremos levantar a perpendicular. Em um ponto arbitrario C fazendo centro, com o raio CB descreva-se uma circumferencia, que intercepte a recta AB no ponto D. Unindo o ponto D com o centro C, e prolongando o raio DC até encontrar a circumferencia no ponto E, unindo E com B, a recta BE é a perpendicular pedida. Effectivamente, é facil demonstrar que o angulo DBE é recto, pois elle tem por medida a metade do arco DE, isto é, a metade de uma semi-circumferencia ou 90 gráos.

160. *Sobre uma recta dada descrever um arco ou segmento capaz de um angulo dado.* Seja a recta AB, fig. 77, *abc* o angulo dado. No ponto B construa-se um angulo igual ao angulo dado(108). Pelo ponto B trace-se uma recta BD perpendicular á recta BE. Pelo ponto E, meio de AB, trace-se uma perpendicular que encontra a perpendicular BD no ponto C. Fazendo centro em C, com o raio CB, trace-se uma circumferencia, aqual passa por A e por B. O arco AFB é capaz para conter o angulo

dado *a b c*. Esta expressão quer dizer que neste arco determinando um ponto qualquer F, ou F', ou F'', unindo esse ponto com os pontos A e B, o angulo AFB é igual ao angulo dado. Effectivamente, o angulo dado, ou o seu igual ABE é por construcção, tendo por medida a metade do arco AB, igual a todos os angulos, cujos vertices estejão situados no arco AFB e cujos lados concorrão aos pontos A e B.

161. *Por um ponto situado fóra de um circulo traçar uma recta que seja tangente á circumferencia deste circulo.* Seja o circulo com centro em C, fig. 78, e seja A o ponto dado fóra. Determinando o ponto B, meio de BC (62), com o raio BC, fazendo centro em B, trace-se uma circumferencia, que encontra a outra nos pontos D e D'. Unindo os pontos D e D' com o ponto A, temos AD e AD' tangentes á circumferencia, cujo centro é C. Effectivamente, traçando os raios CD e CD', é facil observar que os angulos ABC e AB'C são rectos, tendo por medida a metade das semi-circumferencias AB'C e ABC. A construcção mostra que por um ponto situado fóra de um circulo é sempre possivel traçar duas tangentes á circumferencia que limita o circulo.

162. *Traçar uma tangente commum a dous circulos de raios diversos.* Sejão os circulos com os centros C e C', fig. 79. Com a differença dos raios CD e C'D', fazendo centro em C', centro do circulo maior, trace-se uma circumferencia concentrica DEF. Pelo ponto D trace-se a tangente CD á essa circumferencia DEF. Traçado o raio C'E, prolongando este até D', temos CE perpendicular sobre C'D'. Pelo ponto C trace-se CD parallela a ED', e unão se os pontos D e D'. E' facil demostrar que CDD'E é um rectangulo, e como DD' é perpendicular tanto á

recta ED como ao raio C'D', satisfaz ao problema enunciado.

163. *Traçar uma circumferencia tangente a uma recta em um ponto dado, e passando por um ponto determinado.* Seja a recta AB, fig. 80, D o ponto dado nesta recta ou o ponto de tangencia, e seja E o ponto determinado pelo qual deve passar a circumferencia pedida. Pelo ponto D levante-se uma perpendicular indifinida DF (59), unão-se os pontos D e E, e pelo ponto G, meio de DE, levante-se uma perpendicular sobre DE, a qual encontra a perpendicular DF no ponto C. Com o raio CD, fazendo centro em C, traçando uma circumferemcia, esta satisfaz as condições do problema.

DECIMA OITAVA LIÇÃO

LINHAS PROPORCIONAES

164. Conhecida a theoria das proporções, ou demonstrada arithmeticamente ou algebricamente, podemos applical-a ás linhas geometricas, como a qualquer outro genero de quantidade.

165. *Traçadas em um plano duas rectas com direcções diversas, dividindo uma das rectas em partes iguaes, unindo a extremidade da primeira com a da segunda, e pelos pontos de divisão traçando parallelas a essa recta, a segunda é tambem dividida em partes iguaes.* Sejão AB e CD as rectas dadas, fig. 81. Dividindo a recta AB de modo que Aa=ab=bc=cd, unindo o ponto A com o ponto C, e pelos pontos a, b, c, d, traçando rectas parallelas á recta AC, cumpre demonstrar que Ca'=a'b'=b'c'=c'D.

Pelos pontos C, a', b', traçando as rectas Co, a'o', b' o'', que sejão parallelas á recta AB (80), é facil demonstrar que os triangulos Co a', a' o' b', b' o'' c', são iguaes. Para o provar, basta reflectir que *aACo*, *baa'o'*, etc. são parallelogramos. Ora, Co=aA, a' o'=ab, b' o''=bc. Sendo aA, ab, dc iguaes por construcção, segue-se que Co, a'o', b' o'' são iguaes. Os triangulos, pois, Coa', a' o' b', b' o'' c' são iguaes por terem um lado igual e iguaes os dous angulos adjacentes a esse lado. Os lados Ca', a' b', b' c', oppostos a angulos iguaes, são iguaes.

166. *Em qualquer trapezio a recta parallela ás bases deste divide os lados não parallelos em partes directamente proporcionaes.* Seja o trapezio ABCD, fig. 82, e

EF parallela ás bases. Cumpre demonstrar a seguinte proporção AE : BF :: EC : FD. A recta AE nada mais é do que uma serie de pontos, cujo numero sem duvida não é possivel determinar, mas cuja somma, qualquer que seja o numero de pontos, póde ser representada por S. Ora, se por cada ponto imaginamos traçada uma parallela á AB, é evidente que a recta AE fica subdividida em elementos de dous pontos contiguos. Esses elementos, qualquer que seja o numero de pontos, são evidentemente iguaes entre si.

Às parallelas imaginadas vão dividir a recta BF em igual numero de elementos iguaes entre si, posto que possão ser diversos dos elementos em que suppormos dividida a recta AE. Do mesmo modo concebemos a recta EC dividida em elementos de dous pontos contiguos e por cada ponto uma parallela que vai dividir FD em igual numero de elementos. Os elementos em que fica dividida a recta AE são compostos de dous pontos, por que por cada ponto imaginamos uma parallela.

Os elementos em que fica dividida a recta DF contem 3 ou mais pontos, supponhamos 3: Chamando n o numero de elementos que constituem a recta AE e a recta BF, podemos representar estas recta por 2 n e 3 n. De um modo analogo podemos representar as rectas EC e FD por 2 N e 3 N, chamando N o numero de elementos determinados pelas parallelas nas rectas EC e FD. Ora, como temos evidentemente a proporção

$$2n : 3n :: 2N : 3N,$$

resulta que AE : BF :: EC : FD.

167. A demonstração precedente se applica ao cazo em que as rectas AE, BF, EC, FD são incommensuraveis.

No caso de haver uma medida commum, a demonstração é simples e baseada no theorema do § precedente. Se AE contém a medida commum duas vezes, se EC contem essa medida quatro vezes, pelos pontos de divisão imaginando parallelas, a recta BF ficará dividida em duas partes iguaes, e FD em quatro.

Consequentemente AE : EC :: BF FD.

168 *Uma recta parallela á base de um triangulo divide os outros lados em partes directamente proporcionaes.* Seja o triangulo ABC, fig. 83, e DE parallela a base BC.

Para demonstrar este theorema, basta pelo ponto A traçar AF parallela á base BC, e pelo ponto F tráçar FG parallela AC. No trapezio AFGC temos em virtude do theorema precedente, a proporção, AD : DC :: FH: HG, e HG=EB, temos tambem AD : DC :: AE : EB.

169. Cumpre bem comprehender o que são duas rectas divididas em partes directa ou inversamente proporcionaes. Quando as partes de uma das rectas occupão os antecedentes da proporção, e as duas partes da outra occupão os consequentes, a proporção é directa; quando, pelo contrario, as duas partes de uma occupão os extremos e as duas outras partes occupão os meios, a proporção é inversa.

170. *Duas figuras geometricas são semelhantes quando têm os lados homologos directamente proporcionaes.* Se, por exemplo, nos triangulos ABC e A'B'C', fg. 84, o lado A'B' é o dobro do lado AB, o lado A'C' o dobro de AC, o lado B'C' o dobro de BC, estando os lados do triangulo ABC, comparados com os do triangulo A'B'C', na razão commum de 1:2, são esses lados proporcionaes, e os dous triangulos são semelhantes.

171. *A relação commum que existe entre os lados homologos de duas figuras semelhautes se chama razão de semelhança.*

172. Nos lados homologos determinados pontos de um d elles têm pontos correspondentes no outro. O lado AB, por exemplo, têm suas extremidades, seu meio, etc., do mesmo modo que o lado homologo A'B' tem suas extremidades, seu meio, etc. Esses pontos correspondentes chamão-se pontos homologos.

173. Todas as figuras geometricas podem ter outras semelhantes, quando as rectas ou as superficies que formão a figura são proporcionaes ás rectas ou ás superficies que formão uma outra — Os quadrilateros, os polygonos, etc. são semelhantes quando a razão de semelhança é constante entre os lados homogolos.

174. Sejão os dous hexagonos regulares semelhantes, fg. 85.—Supponhamos que a razão de semelhança entre os lados seja 1:2. Os pontos A, B, C, D, E, F. são homologos dos pontos A' B' C' D' E' F'; unindo dous pontos quaesquer do primeiro polygonos com os seus homologos, as rectas resultantes são tambem homologos, como por exemplo AD, AE, AF, que são homologos das rectas A'D', A'E', A'F'.

175. Em duas figuras semelhantes quaesquer ha pontos vertices, angulos, diagonaes, etc. homologos.

176. *Toda recta traçada parallelamente á base de um triangulo divide este em dous triangulos semelhantes.* Séja o triangulo ABC e DE parallela a base BC, fg. 86.—A parallela DE divide os lados AB e AC em partes proporcionaes (168), donde temos a proporção AD: DB: AE: EC, e por consequencia AD+DB: AD:: AE+EC: AE, o que equivale a AB: AD:: AC: AE. Não ha duvida, pois, de

que os lados AB e AC sejão proporcionaes aos lados AD e AE. Falta demonstrar que BC e DE tem a mesma razão de semelhança. Traçando DF parallela a AC, temos AB: AD:: BC: FC. Ora, sendo FC=DE por ser D E C F um parallelogramo, resulta que

AB: AD:: BC: DE;

os triangulos, pois, ABC e ADE, tendo os lados proporcionaes são semelhantes.

177. *Dous triangulos que têm os tres angulos respectivamente iguaes são semelhantes.* Sejão os triangulos ABC e A'B'C', fig. 87. Sendo por hypethese os angulos em A, em B, em C, respectivamente iguaes aos angulos em A', B', C'. Para demonstrar que esses dous triangulos são semelhantes basta provar que os lados de um delles são respectivamente proporcionaes aos do outro. Ora, determinando o ponto B'' de modo que o lado A'B''=AB, determinando o ponto C'', de modo que A'C''=AC, unindo B'' com C'', sabemos que o triangulo A'B''C'' é igual ao triangulo ABC por terem um angulo igual formado por lados iguaes. Tudo, pois, que dissermos do triangulo A'B''C'' se applica ao seu igual ABC. Ora, como o angulo A'B''C'' é igual ao angulo A'B'C', temos que a recta B''C'' é parallela á recta B'C'. Os triangulos, pois, A'B'C e A'B''C'' são semelhantes (175). Está consequentemente demonstrado que os triangolos ABC e A'B'C', só por terem os angulos respectivamente iguaes, são semelhantes.

178. *Dous triangulos que têm um angulo igual formado por lados proporcionaes são semelhantes.* Sejão os triangolos ABC e A'B'C', fig. 87, com o angulo A igual ao angulo A'. com os lados AB e AC proporcionaes aos lados A'B e A'C'. Determinando A'B''=AB, e A'C''=AC, unindo

B'' com C'', como temos por hypothese A'B''; AB:: A'C'': A'C', resulta que a recta B''C'' é parallela á base B'C'. Consequentemente os triangulos A'B''C'' e A'B'C' são semelhantes, ou ABC e A'B'C'.

DECIMA NONA LIÇÃO

LINHAS PROPORCIONAES.

179. Bem comprehendida a theoria dos triangulos semelhantes, fácil é comprehender a dos polygonos, porque estes podem sempre ser subdivididos em triangulos semelhantes semelhantemente dispostos.

180. *Concorrendo em um ponto varias rectas cortadas por duas parallelas, as secções dessas parallelas interceptadas pelas rectas concorrentes são proporcionáes.*—Sejão as rectas AO, BO, CO, DO, fig. 88, concorrendo no ponto O, e sejão AD EH parallelas, temos a demostrar que EF: AB:: FG: BC:: GH: CD. — Para o provar basta observar que, comparando os triangulos EFO e ABO e bem assim os triangulos FGO e BCO, temos as seguintes proporções :

EF : AB:: FO: BO

FG: BC:: FO: BO

Consequentemente EF : AB:: FG: BC, e analogamente se prova que FG : BC :: GH : CD.

181. *A bissetrix de um angulo de um triangulo divide o lado opposto em duas partes proporcionáes aos lados que*

formão o angulo. — Seja um tri angulo, de qualquer genero, ABC, fig. 89, e Seja CD bissetrix do angulo ACB, Temos a provar que AD : AC :: DB : DC. Para o provar, prolongando AC, e pelo ponto B traçando uma parallela a CD, que encontra a recta AC prolongada no ponto E, cumpre primeiramente demonstrar que o triangulo BCE é isosceles. Ora, sendo CD e BE parallelas, os angulos ACD e CEB são iguaes por serem correspondentes, os angulos DCB e CBE são iguaes por serem alternos internos (70). Os angulos ACD e DCB são iguaes por hypothese, donde se segue que os angulos CEB e CBE são iguáes. Temos a proporção AD : AC :: DB : CE. Substituindo CE pelo lado igual BC, por ser o triangulo BCE isosceles, temos

AD : AC :: DB : BC.

182. *Em um triangulo rectangulo a perpendicular abaixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa divide o triangulo em dous triangulos parciáes semelhantes a este, e entre si.* Seja ABC um triangulo rectangulo, fig. 90, sendo o angulo recto BAC. A perpendicular AD divide o triangulo ABC em dous triangulos parciáes, ABD e ACD, que são semelhantes ao total ABC. Comparemos primeiramente o total ABC com o parcial ABD. Estes dous triangulos são semelhantes, porque tem os angulos respectivamente iguaes (176), BAC = ADB rectos, ABD commum aos dos triangulos, BAD = ACB supplementos de duas sommas iguaes. Analogamente se demonstra que o triangulo parcial ACD é semelhante ao total ABC.

183. Da semelhança demonstrada no § precedente se deduz os dous seguintes theoremas : 1.° *a perpendicular AD é meia proporcional entre as secções BD e DC;* 2°. *cada lado cateto, ou AB ou AC, é meia proporcional*

entre a hypothenusa e a secção desta adjacente ao lado cateto considerado. Para demonstrar estes dous theoremas basta comparar entre si os lados homologos dos dous triangulos parciaes, ou os de cada triangulo parcial com os do total. Reconhecem-se facilmente os lados homologos, sendo estes os lados oppostos aos angulos iguaes. Dessas comparações, cujo exercicio deixamos á sagacidade do leitor, resultão as seguintes proporções BD : AD :: AD : DC, BC : AC :: AC : DC, BC : AB :: AB : BD.

184. Com o auxilio de um desses theoremas demonstra-se uma proposição celebre na historia da geometria, que é o seguinte. *O quadrado da hypothenusa é igual á somma dos quadrados dos lados catetos.* Effectivamente, temos $\widehat{AB}^2 = BC \times BD$, e $\widehat{AC}^2 = BC \times CD$. Sommando estas duas igualdades membro a membro, as sommas são iguaes em virtude de um axioma. Temos, pois, $\widehat{AB}^2 + \widehat{AC}^2 = BC \times BD + BC \times CD = BC\ (BD + CD) =$ $= BC \times BC = B\widehat{C}_2$

Ulteriormente será demonstrada por outro modo esta proposição importante.

VIGESIMA PRIMEIRA LIÇÃO

AVALIAÇÃO E COMPARAÇÃO DAS AREAS.

184. *Dous parallelogramos da mesma base e da mesma altura são equivalentes.*—Tendo os dous parallelogramos a mesma base, por hypothese, é sempre possivel fazer coincidir as bases. Seja, pois a fig. 91, na qual os dous parallelogramos, ABCD e AEFD, estão collocados de modo a terem a base commum, e o lado BC ficando na mesma direcção do lado EF, por serem as alturas iguaes, por hypothese. Demonstrada a igualdade dos triangulos ABE e DCF, é evidente que de toda a figura ABFD, separando cada um dos triangulos, as differenças são iguaes (31).—Para demonstrar que o triangulo ABE é igual ao triangulo DCF, basta lembrar que o angulo BAE é igual ao angulo CDF, e que os lados AB e AE são respectivamente iguaes aos lados DC e DF (104).

185. O *Parallelogramo é equivalente a um rectangulo que tem a mesma base e a mesma altura.*—E' um caso especial do theorema mais geral demonstrado no § precedente, como mostra a figura 92.

186. *Um triangulo é equivalente a metade de um parallelogramo que tem a mesma altura.* — Seja um triangulo qualquer ABC, fig. 93.—Se pelo ponto A, se faz passar a recta AD parallela ao lado BC, e pelo ponto C a recta CD parallela ao lado AB, temos eviden-

temente o parallelogramo ABCD, formado de dous triangulos cuja igualdade é facil demonstrar. A base AB é commum ao triangulo e ao parallelogramo, e a altura CE é tambem commum. E' pois, o triangulo equivalente a metade de um parallelogramo que tem a mesma base e a mesma altura.

187. *Dous rectangulos da mesma base são proporcionáes ás mesmes alturas.* — Tendo os dous rectangulos a mesma base, é sempre possivel fazel-os coinicidir do modo representado na fig. 94. Chamando *n* o numero de pontos que existem de A até C, chamando *n'* o numero de pontos de A até E, posto que não seja possivel determinar *n* e *n'*, é evidente que se de cada ponto de *n* imaginamos uma parallela á base AB, o rectangulo ABCD póde ser considerádo como formado de tantas rectas iguaes á AB quantos são os pontos de *n* (6); e do mesmo modo o rectangulo ABFE é formado de tantas vezes a recta AC quantas são os pontos de *n'*. Ora, como temos evidentemente n: n' :: n: n', e como multiplicando os dous termos da primeira razão por AB não a alteramos, da precedente proporção se deduz $n \times AB : n' \times AB :: n : n'$ — Sendo $n \times AB$ a expressão do rectangulo ABCD, que pódemos chamar R, sendo $n' \times AB$ a expressão do rectangulo ABEF, que podemos chamar *r*, sendo o numero de pontos *n'* igual a altura AE ou h, chamando H o n. de pontos n' evidentemente temos:

$$R : r :: H : h.$$

188. *Dous rectangulos da mesma altura são proporcionáes ás bases.* — Este theorema se demonstra do mesmo modo que o precedente, podendo considerar as bases

como se fossem as alturas, ou reciprocamente as alturas como se fossem bases.

189. ***Dous** rectangulos com bases e altura diversas são proporcionáes aos productos de suas bases multiplicadas por suas respectivas alturas.* — Seja a fig. 95. Chamando R. o rectangulo ABCD, *r* o rectangulo BGFH, *X* o rectangulo ABGE, H a altura AC, B a base AB, *b* a base BH, temos pelo precedente theorema as seguintes proporções:

$$R : x :: H : h.$$

$$x : r : B : b$$

Multiplicando ordenadamente, e supprimindo o factor commum x, resulta $R : r :: B \times H : b \times h$.

190. A formula pela qual se determina a área de um rectangulo sendo fundamental, derivando-se desta, todas as outras para a avaliação das áreas das figuras planas regulares, cumpre demonstral-a por dous methodos diversos.

191. Primeiro methodo. — *A área de um rectangulo se determina pela formula $B \times H$, chamando B a base, H a altura do rectangulo.* — Seja o rectangulo ABCD, fig. 96. e seja EGFB, um quadrádo que escolhemos como unidade para avaliar a área do rectangulo. — A altura BG e a base BF deste quadrado unidade podemos representar por 1. Chamando B a base AB, e H altura AC do rectangulo, chamando X o rectangulo ABGI, temos as seguintes proporções:

$$R : X :: H : 1$$
$$X : (1)^2 :: B : 1$$

Concluimos $R : (1)^2 :: B \times H : 1$, e consequentemente

$$R = BH \times (1)^2.$$

A área, pois, de um rectangulo se obtem multiplicando a base pela altura, ou a área do rectangulo contem o quadrado unidade tantas vezes quantas são as unidades numericas e fracção de unidade do producto numerico BH.

192. Segundo methodo. — O rectangulo ABDC é formado da base AB repetida tantas vezes quantos são os pontos da altura AC, numero de pontos que chamamos n. Qualquer que seja a grandeza do ponto, que não é possivel avaliar-se, qualquer que seja o numero desses pontos, n equivale a uma somma que se avalia medindo a altura C. A base é $B \times I$. Esta base repetida pela altura $H \times I$ dá o rectangulo $B \times I \times H \times I$ ou $BH \times (1)^2$.

VIGESIMA SEGUNDA LIÇÃO

QUADRADO DA HYPOTHENUSA

193. O theorema conhecido sob o titulo de quadrado da hypothenusa é bem conhecido. — Por sua importancia, e para applicar alguns conhecimentos adqueridos precedentemente, o demonstraremos de tres modos diversos.

194. Primeira demonstração. Seja o triangulo rectangulo ABC, fig. 97. Sobre a hypothenusa AB, e os lados AC e BC construão-se os quadrados ABIA, ACDE, BCFG, Abaixe-se a perpendicular CL, e tracem-se as rectas BD e CH. O quadrado ACED tendo a mesma base que o triangulo ABD, e sendo AC altura commum do quadrado e do triangulo, a área deste quadrado é dupla da do triangulo (186). — Do mesmo modo se demonstra que o rectangulo AMLA è o dobro do triangulo ACH. Ora, os triangulos ABD e ACH são iguaes, por ser o angulo BAD igual ou angulo CAH, os lados AD e AB respectivamente iguaes aos lados AC e AH. Se as áreas dos dous triangulos são iguaes, é evidente que áreas duplas são tambem iguaes. Está, pois, demonstrado que a área do quadrado ACED é equivalente a área do rectangulo A MLH. — Identicamente se demonstra que a área do quadrado BCFH equivale a área do rectangulo BILM. Sendo a somma dos dous rectangulos igual ao quadrado ABIH, é certo que a área deste quadrado equivale a somma dos quadrados ACED e BCFG.

195. Segunda demonstração. —Já foi demonstrado que

a recta AC é meia proporcional entre a hypothenusa AB e o segmento AD (182). — Temos, pois, $\widehat{AC}^2 = AB \times AD$. Em virtude do mesmo theorema temos $\widehat{BC}^2 = AB \times BD$. Concluimos que $\widehat{AC}^2 + \widehat{BC}^2 = AB\,(AD + BD)$. Sendo evidentemente $AD + BD = AB$, temos $\widehat{AC}^2 + \widehat{BC}^2 = \widehat{AB}^2$.

196. Terceira demonstração. Seja o triangulo rectangulo ABC, fig. 99. — Construão-se os tres quadrados sobre os seus tres lados. — Prolonguem-se os lados ED e FG até se encontrarem no ponto H. Abaixé-se CLI, perpendicular sobre AB. — Deixando á prespicacia do leitor demonstrar que o lado IC prolongado passara pelo ponto H, prolongando MA até o ponto N, a figura ACHN é evidentemente um parallelogramo. O triangulo ABC é igual ao triangulo CHD, por terem um angulo igual formado por lados respectivamente iguaes (104). Resulta da igualdade destes triangulos que $AB = CH = AN = AM$. — Sendo a base AN do parallelogramo ACHN igual á base AM do rectangulo ALIM, sendo commum a altura deste parallelogramo e deste rectangulo, são estas figuras equivalentes. Evidentemente o parallelogramo ACHN é equivalente ao quadrado ACDE. E', pois, este quadrado equivalente ao rectangulo ALIM. Analogamente se demonstra que o quadrado BGFC equivalante ao rectangulo BNIL. — E pois, o quadrado ABNM, somma dos rectangulos ALIM e BNIL, equivale as áreas dos quadrados ACDE e BGFC.

197. Esta proposição do quadrado da hypothenusa se estende aos polygonos regulares construidos sobre os tres lados do triangulo rectangulo. — A demonstração está reservada para exercitar a prespicacia do leitor.

VIGECIMA TERCEIRA LIÇÃO.

AREAS DAS FIGURAS PLANAS.

198. A área de um rectangulo se determina multiplicando a base pela altura. Escolhida a unidade linear metro, ou o decimetro, ou o centimetro, ou o millimetro, segundo a grandeza do rectangulo, cuja área se quer determinar, para medir as duas dimensões indicadas, a base e a altura, multiplicando estas duas dimensões, temos um numero, ora inteiro, ora inteiro acompanhado de dizima, o qual indica quantas vezes o rectangulo contem a unidade quadrada.

199. A área de um parallelogramo se determina multiplicando a base pela altura. Todo o parallelogramo sendo equivalente a um rectangalo da mesma base e da mesma altura (185), a formula precedente $B \times H$ serve tambem para avaliação desta figura.

200. A área de um triangulo se determina multiplicando a base do triangulo pela sua altura, e dividindo o producto por 2.—Demonstrádo está, precedentemente, que todo triangulo póde ser considerádo como metade de um parallelogramo tendo a mesma base e a mesma altura (186).

201. A área de um trapezio se determina multiplicando a semi-somma das bases pela altura. Chamando B a base maior AB, b a base menor CD. — A demonstração desta formula é facil, logo que se divide o triangulo pela diagonal AD.

202. Uma outra formula existe para a avaliação da área do trapezio. E' a formula B'×H, chamando B' a recta EF traçada pelo meio da altura H parallela ás bases. Para demonstrar esta formula, cumpre demonstrar que $B^1 = 1/2$ $(B\times b)$. — Pelo ponto E traçando BE parallela á BD, demonstra-se que o triangulo AEG é igual ao triangulo CEH, donde se conclue ser AG=CH. —Temos, pois, que $B\times b = 2DH$. — Ora, sendo DH=EF, porque DFEH é um parallelogramo (119), é certo que $B\times b = 2EF$, ou $EF = 1/2\,(B+b)$. — Chamando B' a recta EF, temos a formula $B'+H$ para avaliar as áreas dos trapezios.

203. A área de um polygono se determina subdividindo o polygono em triangulos, avaliando as áreas destes, e sommando estas áreas. Se o polygono é regular, sendo os triangulos iguaes quando do centro do polygono traçamos rectas para os vertices do angulo do polygono, basta determinar a área de um dos triangulos e multiplicar este pelo numero dos lados do polygono, para ter a área deste.

204. Posteriormente será indicada e demonstráda a formula para determinar a área de um circulo, e então ficará completa a relação das diversas formulas para a avaliação das áreas das figuras planas regulares, de que se occupa a geometria elementar, pertencendo ao dominio da geometria transcedente a determinação das áreas limitadas por linhas curvas diversas da circumferencia.

VIGESIMA QUARTA LIÇÃO

LINHAS PROPORCIONAES NO CIRCULO

205. *Duas cordas em um circulo, que se encontrão, ficão divididas em partes reciprocamente proporcionaes.* Sejão as duas cordas AB e DE, fig. 101, que se encontrão no ponto F. Dizer que estas rectas estão divididas no ponto F em partes reciprocamente proporcionaes é o mesmo que dizer haver proporção entre as divisões AF, BF, DF, EF, de modo tal que AF e BF formem os extremos da proporção, DF e EF formem os meios. Para o demonstrar, unindo o ponto B com o ponto D por meio de recta BD, unindo o ponto A com o ponto E por meio de recta AE, temos os triangulos AEF e BDF semelhantes, por terem os tres angulos respectivamente iguaes (177). O angulo AFE é igual ao angulo BFD por serem oppostos pelo vertice: o angulo AEE é igual ao angulo EAF, por terem a mesma medida, a metade do arco BE. Sendo semelhantes esses triangulos, são proporcionaes os lados oppostos á angulos iguaes, e consequentemente temos

AF : DF :: EF : BF

206. *As seccantes que concorrem fóra do circulo são inversamente proporcionaes aos segmentos externos.* Sejão as seccantes AB e AC que concorrem em A, fig. 102. Cumpre demonstrar a seguinte proporção: AB :

AC :: AE : AD. Para o provar, una-se o ponto B com o ponto E, e una-se o ponto C com o ponto D. Os triangulos ABE e ACD são semelhantes, por terem os angulos respectivamente iguaes (177). Pela comparação dos lados homologos temos a proporção indicada;

AB : AC :: AE : AD.

207. *A tangente é meia proporcional entre a seccante e o seu segmento externo.* Sejão a tangente AB, a seccante AC, o segmento externo AD, fig. 103. Cumpre demontrar que AC : AB :: AB : AD. Para o provar, depois de unir o ponto B com o ponto C, e o ponto B com o ponto D, observamos que os triangulos ABD e ABC são semelhantes, por terem os angulos respectivamente iguaes (177). Da comparação dos lados homologos resulta a a proporção AC : AB :: AB : AD.

208. *Construir uma recta meia proporcional entre duas rectas de grandeza dada.* Sejão as rectas de grandeza dada, AB e CD, fig. 104. Construir a meia proporcional é determinar uma recta X, de modo a formar a seguinte proporção: AB : *X* :: X : CD.

Para resolver este problema, determine-se em uma recta indefinita uma distancia A' B' igual a AB, e uma distancia B' C' igual a CD. Sobre a recta A' C' como diametro descreva-se uma semi-circumferencia. Pelo ponto B' levante-se a perpendicular B' D'. Esta recta B' D' é a meia proporcional pedida. Effectivamente, sendo o angulo A' D' C' recto, o triangulo A' C' D' é rectangulo, e pois a perpendicular B' D' é meia proporcional entre os segmentos A' B' e B' C', e como A' B' = AB, B' C' = CD, temos:

AB : B' D' :: B' D' : C D.

209. *Dividir uma recta em meia extrema razão.* Dividir uma recta em meia extrema razão é determinar em uma recta dada AB, fig. 105, um ponto x, de modo a formar esta proporção; AB : Ax :: Ax : Bx. Para determinar o ponto x, eleve-se pelo ponto B uma perpendicular indefinita sobre a recta AB. Determinando a distancia BC igual a metade de AB, e com o raio BC, fazendo centro em C, traçando uma circumferencia, unindo o centro C com a extremidade A, a recta AC intercepta a circumferencia no ponto D. Com o raio AD descrevendo um arco, este cortara a recta AB no ponto x, que cumpre determinar. Para o demonstrar, basta recordar o que foi provado no § 207. A tangente AB sendo meia proporcional entre a seccante AE e o segmento externo AD, temos

$$AE : AB :: AB : AD.$$

Em virtude de uma propriedade das proporções demonstrada na arithmetica, deduz-se que

$$AE—AB : AB—AD :: AB : AD.$$

Sendo AB=DE, sendo AD=Ax, temos

$$Ax : Bx :: AB : Ax$$

ou

$$AB : Ax :: Ax : Bx$$

$Ax^2 = AB \times Bx$

$Ax = \sqrt{AB . Bx}$

VIGESIMA QUINTA LIÇÃO

POLYGONOS INSCRIPTOS.

210. Para inscrever o quadrado em um circulo dado trace-se um diametro qualquer, e pelo centro do circulo faça-se passar um outro diametro perpendicular ao primeiro. Unindo as extremidades A, C, B, D dos dous diametros, fig. 106, é facil demonstrar que ACBD é um quadrado. Com effeito, sendo AB um diametro, os angulos CAD e CBD são tambem rectos. Dobrando a figura por AB, a recta AC coincide com BC, e dobrando por CD, as rectas BC e BD coincidem com AC e AD. E', pois, ACBD quadrado, por ter os quatro angulos rectos e os quatro lados iguaes entre si.

Dividindo os arcos AC, CB, BD, DA ao meio, nos pontos m, m', m'', m''', e unindo estes, temos que Am'' C m B m' D m'' é um octogono regular. Dividindo successivamente os arcos em partes iguaes, consegue-se inscrever polygonos de 16, 32, 64, etc. lados.

211. Para inscrever o pentagono regular é necessario inscrever previamente o decagono e depois dividir os arcos em duas partes iguaes e unir esses meios para ter o pentagono. Posteriormente será indicada a construcção para inscrever o decagono regular.

212. Para inscrever o hexagono regular, marcando na circumferencia um ponto qualquer A, fig. 107, e com uma distancia igual ao raio tração-se as cordas AB, BC, CD,

DE, EF, FA. O polygono A B C D E F é um hexagono regular. Para o provar, basta observar que o triangulo BOC é equilateral, sendo por tanto iguaes os tres angulos. Ora, chamando x qualquer destes angulos, temos $3x = 180$ gráos (95); donde concluimos que $x = 180 : 3 = 60$ gráos.

E', por consequencia, o arco BC a sexta parte da circumferencia, e o polygono A B C E F é um hexagono regular. Para ter o triangulo equilateral inscripto, basta unir o ponto E com o ponto A, o ponto A com o ponto C, o ponto C com o ponto E. Para obter os polygonos de 12, de 24, de 48 lados, etc.; basta ir dividindo successivamente os arcos em duas partes iguaes, e unir esses pontos de divisão.

213. Para inscrever o decagono regular, divida-se o raio em meia e extrema razão (209). Seja a fig. 108. Com uma distancia igual ao segmento maior AD, trace-se a corda BC. O arco BC é a decima parte da circumferencia. Para o provar, é necessario demonstrar que o angulo BAC tem 36 gráos. Primeiramente cumpre demonstrar que o triangulo ACD é isosceles. Como temos AB : AD :: AD : BD, temos tambem AC : AD :: BC : BD. Esta ultima proporção próva que a recta CD é uma bissetrix, sendo portanto o angulo ACD = ao angulo BCD. Da mesma proporção resulta que os triangulos ABC e BCD são semelhantes, sendo o angulo CAB = ao angulo BCD. Chamando x o angulo BAC, temos que os angulos ACB e ABC podem ser representados por $2x$ cada um d'elles. Sendo a somma dos tres angulos do triangulo ABC igual a dous rectos (95), temos $x + 2x + 2x = 2r$ ou $5x = 180$ gráos, ou $x = 180/5$, isto é, 36 gráos.

Do decagono regular passa-se facilmente aos polygonos regulares de 5, de 20, de 40, de 80 lados, etc..

VIGESIMA SEXTA LIÇÃO

AREA DO CIRCULO

214. Para determinar a área de um circulo temos a formula $\pi \times r^2$. Cumpre bem comprehender o que se entende por π, e de que modo foi determinado aproximadamente o valor desta quantidade. Convencionou-se chamar π a relação entre a circumferencia e o diametro. Sendo a circumferencia evidentemente maior do que o diametro, supposto a circumferencia rectificada, ella conterá o diametro considerado como unidade algumas vezes. O methodo empregado para calcular esta relação provou que a circumferencia não contem o diametro numero exacto de vezes, mas um numero fraccionario, que foi determinado approximativamente.

215. Em virtude do que está expendido no § precedente, chamando π o quociente da circumferencia c dividida pelo diametro 2 r, temos $c : 2r = \pi$, donde concluimos que $c = 2\pi r$.

Para mostrar de que modo foi possivel determinar π, cumpre demonstrar os dous seguintes theoremas: 1º sendo o raio$=1$, achar as áreas do hexagono regular inscripto e do hexagono regular circumscripto; 2º dadas as áreas de dous polygonos regulares, um inscripto e outro circumscripto, achar as áreas dos polygonos correspondentes tendo o dobro de lados. Nesta lição será demonstrado sómente o 1º destes theoremas.

216. *Sendo o raio=1, achar as áreas do hexagono regular inscripto e do hexagono regular circumscripto.* Seja *b d* o lado do hexagono regular inscripto, fig. 109, e BD o lado do hexagono regular circumscripto.

Como os triangulos bCd e BCD são semelhante, como *bd* é igual ao raio ou 1, temos Ca : 1 :: 1 : BD. Ora, temos tambem Cd=1, ad= 1/2. Sendo o triangulo aCd rectangulo temos $\overline{Ca}^2 + \overline{ad}^2 = \overline{Cd}^2$, donde concluimos ser $Ca = \sqrt{1-1/4} = \sqrt{3/4} = 1/2\sqrt{3}$. Substituindo na precedente proporção o valor de C a, temos $1/2\sqrt{3} : 1 :: 1 . BD$, donde concluimos ser $BD = 2/\sqrt{3}$.

A área do triangulo bCd sendo $Ca \times 1/2$ bd, substituindo estas quantidades pelos valores precedentes, temos que esta área é $1/2\sqrt{3} \times 1/2$, porque *ad* é 1/2 de bd, ou finalmente $1/4\sqrt{3}$. Se a área do triangulo bCd é $1/4\sqrt{3}$, a do hexagono regular se acha multiplicando esta por 6, e consequentemente é $6 \times 1/4\sqrt{3}$ ou $6/4\sqrt{3} = 3/2\sqrt{3}$.

A área do triangulo BCD é $1 \times 1/2$ BD, isto é, substituindo os valores dados, $1/\sqrt{3}$. A área do hexagono regular circumscripto é, pois $6 \times 1/\sqrt{3} = 2 \times 3/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Representando por p a área do hexagono regular inscripto, temos $p = 3/2\sqrt{3}$, e representando por P a arêa do hesagono regular circumscripto, temos $P = 2\sqrt{3}$.

VIGESIMA SETIMA LIÇÃO.

AREA DO CIRCULO

217. Para a determinação de π ainda necessitamos do theorema seguinte.

218. *Dadas as áreas de dous polygnos regulares, um inscripto e outro circumscripto, achar as áreas dos polygonos correspondentes tendo o dobro de lados.*

Seja CLK o triangulo elementar de um polygono qualquer inscripto, fig. seja ACK o triangulo correspondente do polygono tendo o dobro de lados, seja BCD o triangulo do polygono circumscripto, CEG o triangulo do polygono circumscripto, tendo o dobro de lados. Para determinar o triangulo CEG é precizo traçar CE de modo que seja bissetriz do angulo ACK. Chamemos

a a área do triangulo CLK,

b a área do triangulo BCD, (fig. 140).
x a área do triangulo ACK,
y a área do triangulo CEG,
$na = $p a área do polygono inscripto,
$nb = $P a área do polygono circumscripto,
$2nx = $p' a área do polygono inscripto com o dobro de lados,
$2ny = $ P' a área do polygono circumscripto com o dobro de lados,
A área a do triangulo CLK se acha pelo formula

$$a = CM \times MK$$

A área b do triangulo BCD se acha pela formula

$$b = AC \times AD;$$

do que resulta que $ab = (CM \times AD) \times (AC \times MK)$. Ora, sendo $AC \times MK = 2x$, e tendo pela semelhança dos triangulos ACD e CMK a seguiute proporção:

CM : MK :: AC : AD, concluimos ser

$$CM \times AD = AC \times MK.$$

Consequentemente $ab = 2x \times 2x$, ou, multiplicando ambos os membros por n^2, $ab = 4n^2x^2 = na \times nb = p \times P$, ou finalmente $2nx = \sqrt{p \times P}$. E', pois, p' ou $2nx = \sqrt{p \times P}$.

Vejamos agora de que modo se póde determinar P'. como CE é bissetrix do angulo ACD, temos a seguinte proporção (184):

AE : DE :: AC : CD
:: CM : CK
:: CM : AC, do que concluimos que
AE : AE+DE :: CM : CM+AC, ou
AE : AD :: CM : CM+AC.

Multiplicando os dous termos da 1ª. razão por AC e os dous termos da 2ª. por MK, temos

$$AE \times AC : AD \times AC :: CM \times MK : (CM + AC)\ MK$$

ou $\quad y : b :: a : a + 2x;$

e, multiplicando os dous termos da 1ª razão por 2n, e os dous termos da 2ª por n, temos

$$2ny : 2nb :: na : na + 2nx$$

ou $\quad P' : 2P :: p : p + p'$

consequentemente temos $P' = \frac{2Pp.}{p + p'}$

A formula, que acaba de ser demonstrada é geral: serve para determinar as áreas de dous polygonos regulares quaesquer, um inscripto e outro circumscripto, quando conhecemos as áreas dos polygonos correspondentes tendo a metade dos lados.

VIGESIMA OITAVA LIÇÃO

AREA DO CIRCULO

219. Vejamos como, com o auxilio dos dous theoremas demonstrados nas duas lições precedentes, foi possivel determinar π, ou a relação entre a circumferencia e o diametro.

Cumpre primeiramente demonstrar que, em um circulo qualquer, considerando o raio $= 1$, o numero que indica quantas vezes a circumferencia contém o diametro é o mesmo que indica quantas vezes a superficie do circulo contém o quadrado formado sobre o raio considerado como unidade. Para o provar, consideremos um ponto qualquer da circumferencia e o seu contiguo. Estes dous pontos contiguos constituem um elemento recto (9), que chamamos b, o qual pode ser considerado base de um triangulo, cuja altura é o raio, e cuja área é $b \times r/2$. Ora, o circulo é formado de tantos triangulos identicos a este quantos são os elementos iguaes a *b*, de que se compõe a circumferencia. Chamando *n* o numero desses elementos, temos que a área do circulo, ou A, póde ser expressa pela formula

$$A = n\, b \times r/2$$

Qualquer que seja a grandeza de *b*, qualquer que seja o valor de *n*, é evidente que $n\, b = c$, e consequentemente

$$A = c \times r/2 = 2\, \pi\, r \times r/2.$$

Na hypothese de $r = 1$, temos $A = \pi \times (1)^2$, sendo π = o numero, que mostra quantas vezes a área do circulo contém o quadrado formado sobre o raio = 1.

220 Para determinar π, construindo um polygono inscripto e o correspondente circumscripto, determinadas as respectivas áreas, é possivel calcular, com o auxilio das formulas demonstradas na ultima lição, as áreas dos polygonos, inscripto e circumscripto, tendo o dobro de lados. Calculadas estas, podemos calcular as dos polygonos que têm o dobro de lados, e assim successivamente, até chegar a dous polygonos, um inscripto outro circumscripto, cujas áreas tão pouco differem entre si, que pódem ser consideradas approximadamente equivalentes a área do circulo intermediario.

Escolheu-se o hexagono regular. Vimos, na 26ª lição, que, na hypothese de $r = 1$, a área do hexagono inscripto é $3/2 \sqrt{3} = 2{,}59807621$, e a área do hexagono circumscripto é $2 \sqrt{3} = 3{,}46410161$

Calculando pelas formulas $p' = \sqrt{p \times P}$ e $P' = 2 P p : (p + p')$ os polygonos que vão successivamente dobrando o n. de lados, acharão-se os seguintes valores

n. de lados	*áreas poly. ins.*	*áreas poly. circ.*
6	2,59807621	3,46410161
12	3,00000000	3,2153904
24	3,1058286	3,1596602
48	3,1326287	3,1460863
96	3,1393554	3,1427105
192	3,1410328	3,1418712
384	3,1414518	3,1416616
768	3,1415568	3,1416092
1536	3,1415829	3,1415963
3072	3,1415895	3,1415929
6144	3,1415912	3,1415927

Procedendo analogamente, e elevando a approximação a maior numero de algarismos decimaes, achou-se o valor das áreas dos polygones, sem divergencia até os seguintes algarismos da dizima, igual a 3,1415926535897. Na pratica basta calcular com o valor de $\pi = 3,1416$.

VIGESIMA NONA LIÇÃO

GEOMETRIA DO ESPAÇO

221. Com quanto não seja possivel, nos limites traçados neste compendio, expender o que se refere a esta secção da geometria elementar, cumpre todavia definir

os corpos geometricos regulares, e dar uma summaria idéa do modo pelo qual se determinão os volumes occupados por taes corpos.

222. O corpo mais simples chama-se cubo. Todos conhecem a forma de um dado de jogar o gamão. E' um corpo limitado por 6 faces lateraes, todas quadradas, e as faces formão angulos diédros rectos, chamando-se angulo diédro o angulo formado por duas superficies.

223. O parallelipipedo é um corpo limitado por seis faces, cada uma das quaes é um parallelogramo, sendo iguaes entre si as faces oppostas. O parallelipipedo ou é rectangulo ou é obliquo, quando as faces lateraes ou formão angulo recto diédro ou não.

224 Prisma é um corpo que tem duas bases oppostas triangulares ou polygonaes, e as outras faces lateraes parallelogramos.

225. Pyramide é um corpo que tem uma base, ou triangular ou polygonal, e um vertice onde vão convergir rectas que partem dos diversos vertices do triangulo ou do polygono base. A pyramida ou é recta ou obliqua.

226. Cone é um corpo que tem por base um circulo e um vertice onde convergem as rectas partindo de todos os pontos da circumferencia base. O cone póde ser recto ou obliquo.

227. Cylindro é um corpo terminado por duas bases iguaes circulares e por uma superficie convexa, formada por linhas rectas, que unem os pontos de uma base aos pontos correspondentes da outra. Na geometria elementar a base do cylindro é sempre circular; mas na transcedente póde ser diversa.

228. Esphera é um corpo limitado por uma superficie

convexa, da qual todos os pontos são equidistantes do ponto central.

229. A forma precisa dos diversos corpos geometricos regulares melhor se explicará com o auxilio de modelos apropriados.

Limitemos-nos, nesta lição, a considerar a forma cubica, a que serve de unidade para a valiação das capacidades.

Considerando o metro cubico, isto é o espaço para conter um cubo tendo um metro de arésta, cumpre observar que elle contem mil decimetros cubicos. Aresta é a intersecção de duas das 6 faces lateraes, que formão o cubo. O cubo tem 12 aréstas.

Para provar que um metro cubico contem mil decimetros cubicos, cumpre imaginar que a arésta AB, fig. 111, representando 1 metro, póde ella ser dividida em 10 decimetros. Imaginando que por cada ponto de divisão passa uma superficie parallela á base do cubo, fica este dividido em 10 camadas figuradas na fig. 112. Cada uma dessas camadas contendo 100 decimetros cubicos, havendo 10 camadas, é claro que 1 metro cubico contem mil decimetros cubicos.

Do mesmo modo se demonstra que 1 decimetro cubico contem mil centimetros cubicos, e que 1 centimetro cubico contem mil millimetros cubicos.

Um decimetro cubico é o que se chama um litro, ou a unidade para avaliação de pequenas capacidades.

TRIGESIMA LIÇÃO

VOLUMES DOS CORPOS GEOMETRICOS

230. O volume do parallelipipedo recto (223) se acha multiplicando as tres dimensões, o comprimento, a largura da base, e a altura. Este triplice producto indica quantas vezes o volume contem a unidade cubica convenientemente escolhida. Seja A B C D a base rectangular do parallelipipedo recto fig. 113, e DE a altura. Sabemos que a base ABCD é a recta AB repetida tantas vezes quantos são os pontos da recta AD. Se adoptamos para unidade 1 metro, chamando b o numero de metros, inteiro ou fraccionario, que constitue a recta AB, esta póde ser representada por $b \times 1$. Do mesmo modo a recta AD pode ser representada por $b' \times 1$. Consequentemente a base do parellipipedo é $b \times 1 \times b' \times 1 = bb' \times (1)^2$. Ora, sendo o volume deste a base repetida tantas vezes quantas são os pontos da altura D, altura que representamos por $h \times 1$, temos que o volume é $bb'h \times (1)^3$. Multiplicando as tres dimensões do parallelipipedo, este triplice producto indica o numero, inteiro ou fraccionario, que o volume contém da unidade cubica. A capacidade das salas e quartos das casas de habitação tem ordinariamente a forma de parallelipipedo. Supponhamos, por ex; uma sala de metros 10, 5 de comprimento, 8^m, 4 de largura, 6^m, 5 de altura. Qual é sua capacidade ?. Multi-

plicando as tres dimensões, achamos o producto 573,3. Este numero freccionario indica ser a capacidade da sala de 573 metros cubicos mais 3/10 de metro cubico.

231. O parallelipipedo obliquo sendo equivalente a um rectangular, que tem as mesmas tres dimensões, acha-se pela mesma formula o seu volume.

232. O volume do prisma recto triangular sendo a base repetida tantas vezes quantos são os pontos da altura, acha-se esse volume multiplicando a base triangular pela altura.

233, O volume de uma pyramide triangular é igual ao prodncto da base triangular pelo 1/3 da altura. Para o demonstrar é necessario provar que o prisma triangular se póde compor em tres pyramides equivalentes, tendo por base e altura a base e a altura do prisma.

234. O volume de uma pyramide qualquer com base polygonal se determina multiplicando a base por um 1/3 da altura. A pyramide com base polygonal se póde subdividir em pyramides triangulares, cuja somma é equivalente á pyramide total.

O volume do cylindro recto se determina multiplicando a base circular pela altura. O volume do cylindro é a superficie da base repetida tantas vezes quantos são ós pontos da altura do cylindro.

235. O volume da esphera se determina pela formula $4/3\ \pi\ r^3$. Cumpre primeiramente demonstrar que a superficie do sphera é o quadruplo do circulo maximo. Considerando na superficie do sphera um triangulo equilateral formade de tres pontos contiguos, o menor elemento superficial, este póde ser considerado como base de uma pyramide triangular, cuja altura é o raio. Chamando b a

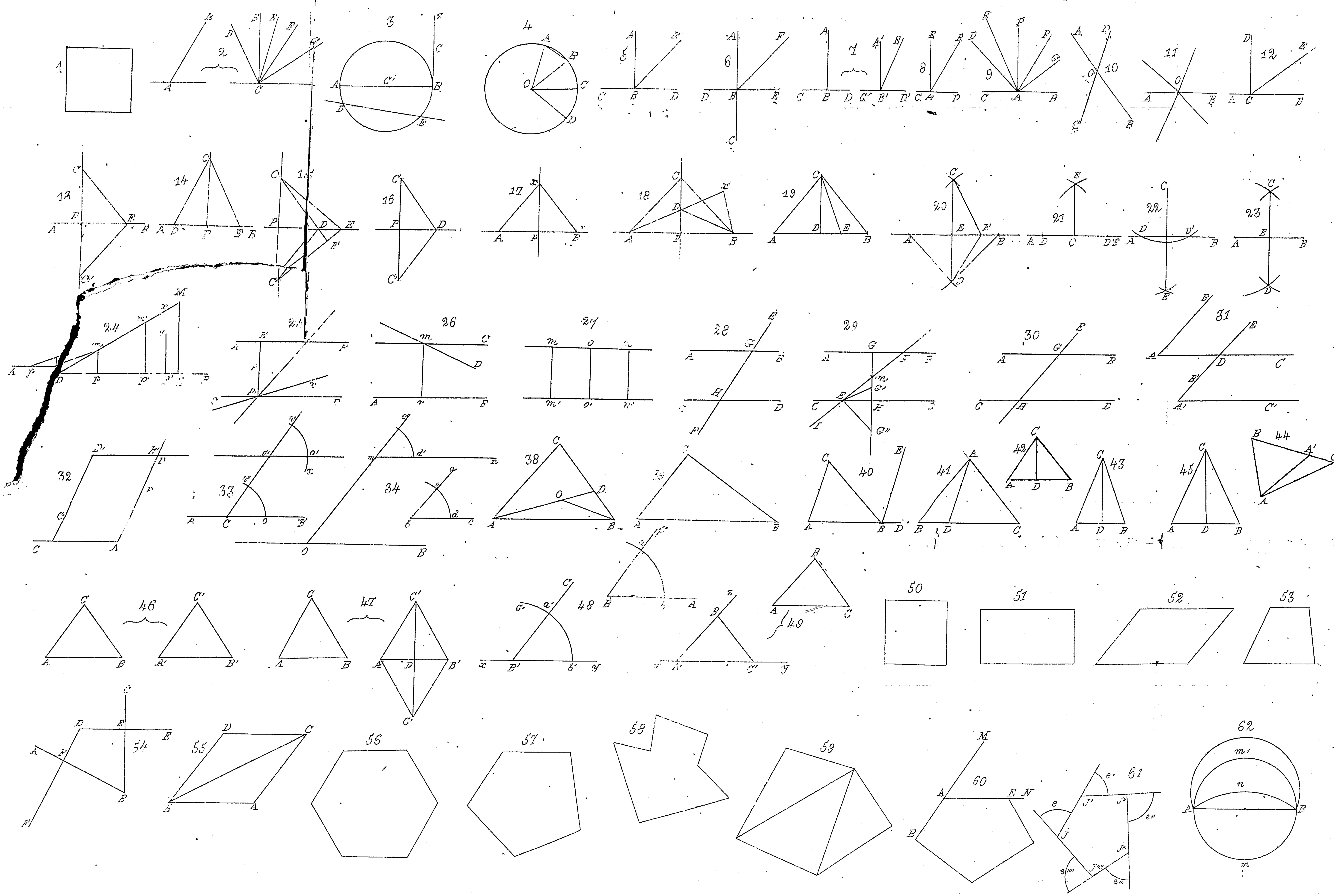
base da pyramide, r o raio da esphera, temos que o volume da pyramide é $b \times r/3$. Ora, o volume da esphera é um certo numero de pyramides identicas, que chamamos n. Temos, pois, $V = n \times p \times r/3$. Qualquer que seja a superficie b, qualquer que seja o valor de n, é evidente que $n \times b$ é igual á superficie externa da esphera. Substituindo $n \times b$ por s, e sendo s o quadruplo do circulo maximo, temos $V = 4\pi \times r^2 \times r/3 = 4/3\, \pi\, r^3$.

NOTA.

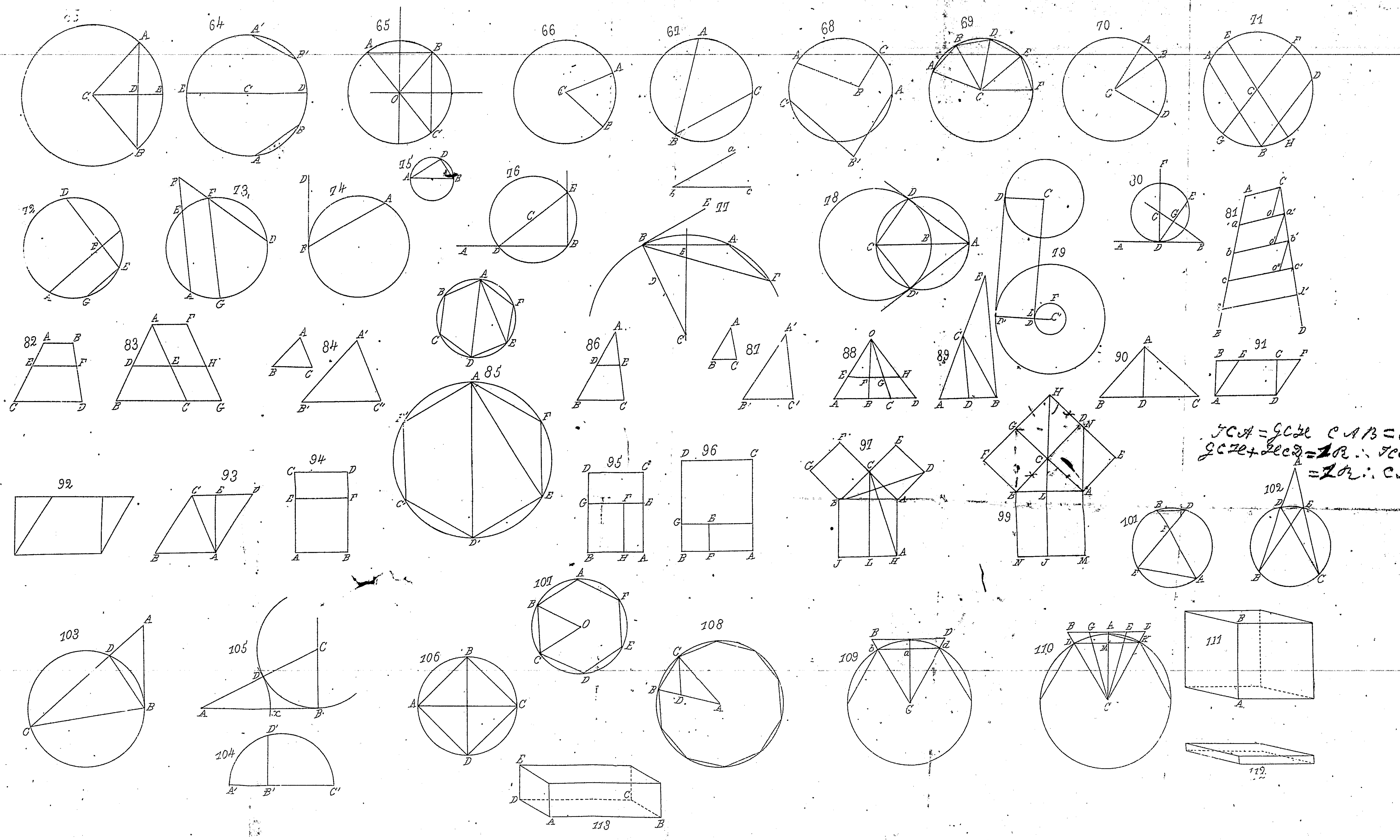
A materia sendo quantidade é suceptivel de augmento e de diminuição, mas sua divisibilidade é limitada. A sciencia chimica tendo entrado, graças a Lavoisier e seus successores, na phase positiva, os chimicos abandonárão as declamações metaphysicas, e deduzem esta sciencia da noção dos atomos, isto é, das particulas indivisiveis da materia. Não direi, como alguns geometras, que o ponto é uma porção de materia tão pequena quer considerada absolutamente, quer considerada em relação a outras grandezas ás quaes é comparada, que se póde consideral-a como não tendo nem comprimento nem largura, nem profundidade. Posto que convenha esta definição aos atomos, de que se occupa a sciencia chimica, accrescentando a estas dimensões a qualificação de apreciaveis, não convém ella per certo ao ponto geometrico, que é o lugar para lojar o atomo, e não o proprio atomo.

Concebendo-se a linha como engendrada por uma successão de pontos enfileirados o contiguos, concebendo-se as superficies como formadas por uma successão de linhas e os volumes por uma successão de superficies, não é possivel conceber que pontos sem dimensões possão engendrar extenções com uma, com duas com tres dimensões.

Esta noção do ponto considerado como o lugar geometrico, onde póde ser contido o atomo, me parece preferivel á doutrina platonica, que consiste em considerar o ponto, não como uma extenção, qualquer, mas como uma *idéa* subministrada pela razão, para reduzir á unidade o conhecimento da extenção limitada.



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
38
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62



FCA = GCH CAB = HCD
GCH + HCD = 1R ∴ FCA + CAF =
= 1R ∴ CJA = 1R