

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Gustavo Corrêa Martins

**MODELOS MULTI-FÍSICOS DE TRANSDUTORES
PIEZOELÉTRICOS PARA APARELHOS AUDITIVOS
COM VISTAS À APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE
OTIMIZAÇÃO**

Florianópolis

2015

Gustavo Corrêa Martins

**MODELOS MULTI-FÍSICOS DE TRANSDUTORES
PIEZOELÉTRICOS PARA APARELHOS AUDITIVOS
COM VISTAS À APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE
OTIMIZAÇÃO**

Tese submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica
para a obtenção do Grau de Doutor
em Engenharia Mecânica.
Orientador: Prof. Júlio Apolinário Cor-
dioli, Dr.Eng.

Florianópolis

2015

Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:

<http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html>

Gustavo Corrêa Martins

**MODELOS MULTI-FÍSICOS DE TRANSDUTORES
PIEZOELÉTRICOS PARA APARELHOS AUDITIVOS
COM VISTAS À APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE
OTIMIZAÇÃO**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 15 de maio 2015.

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr. Eng.
Coordenador do Curso

Prof. Júlio Apolinário Cordioli, Dr.Eng.
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Júlio Apolinário Cordioli, Dr.Eng.
Presidente

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Prof. Andrey Silva, Ph.D.

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc.

Prof. Zemar Martins Defilippo Soares, Dr.Eng. (INMETRO)

Prof. Domingos Alves Rade, D.Sc. (ITA)

Este trabalho é dedicado a toda minha família, especialmente à minha esposa Gisselle, à minha filha Cecília e aos meus pais Lauro e Sônia.

AGRADECIMENTOS

Giselle, é difícil dizer em poucas palavras o tamanho da tua importância na minha vida. Muito obrigado pelo amor, carinho, apoio e companheirismo durante toda a minha vida acadêmica, que você acompanhou desde o início.

Lauro e Sônia (meus pais), muito obrigado pelos exemplos pessoais e profissionais que vocês são. Tenho muito orgulho da família que vocês construíram com muito esforço e este trabalho também é fruto deste esforço. Muito obrigado pelo incentivo e apoio no meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

Vó Maria, o seu exemplo de fé, coragem e superação sempre me motivaram a seguir em frente nos momentos difíceis. Muito obrigado pelo apoio, amor e carinho incondicionais.

Professor Júlio A. Cordioli, obrigado pelas orientações, apoio, confiança e amizade durante toda a minha jornada na pós-graduação, que iniciei em 2009 sendo orientado pelo senhor no mestrado.

Aos Professores Arcanjo Lenzi, Andrey Silva, Eduardo Alberto Fancello, Zemar M. D. Soares e Domingos Alves Rade agradeço tanto por participarem da banca de avaliação como pelas críticas e sugestões feitas a este trabalho.

Ao doutorando Olavo Silva agradeço pelas inúmeras conversas e discussões sobre otimização, elementos finitos e muitos outros assuntos.

Ao colega de projeto Israel Pereira agradeço por ceder alguns resultados experimentais de sua dissertação de mestrado.

Aos colegas do LVA: Kauê, Leonardo Seki, Paulo Nunes, Giovanni, Gustavo Myrria, Lian, André Gesing, Júlio Alexandre, Júlio Hermes, Marcelo Portela, Pablo, Paulo Mareze, Augusto, Leandro, Gregório e Zargos agradeço pelo companheirismo, conversas, discussões e ajuda sempre que precisei.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica agradeço pela grande contribuição no meu desenvolvimento acadêmico e profissional. Em especial, agradeço aos Professores do LVA: Júlio A. Cordioli, Roberto Jordan e Arcanjo Lenzi tanto pelo compartilhamento de conhecimentos e experiências como pela amizade e companheirismo durante toda esta longa jornada na pós-graduação.

À Acústica Amplivox Ltda e ao CNPq agradeço pelo suporte e apoio financeiro.

RESUMO

Os aparelhos auditivos atuais possuem transdutores miniaturizados trazendo grandes desafios para se atingir configurações desejáveis de desempenho, eficiência e custo. Neste sentido, a análise numérica torna-se uma importante ferramenta de projeto para estes transdutores, pois possibilita a avaliação de diferentes configurações de sistemas com menor tempo e custo em comparação com a análise experimental. Além disso, a utilização de modelos numéricos possibilita também a aplicação de algoritmos de otimização de forma a orientar o processo de busca de uma configuração que atenda aos requisitos de projeto. No entanto, neste caso, o modelo numérico do transdutor piezoelétrico é um modelo multi-físico, sendo representados os fenômenos físicos de piezoelectricidade, elasticidade estrutural e propagação acústica. Consequentemente, a modelagem destes transdutores pode ter um alto custo computacional para aplicar técnicas de otimização. Este custo pode ser ainda maior devido a esta análise necessitar da aplicação de modelos acústicos viscotérmicos. Estes modelos são importantes para a análise acústica de pequenas cavidades, mas o custo computacional desses modelos é alto quando a geometria e as condições de contorno são complexas. O principal objetivo deste trabalho é construir modelos numéricos multi-físicos de transdutores piezoelétricos para aparelhos auditivos, a fim de que sejam aplicadas técnicas de otimização. Para atingir este objetivo foram, primeiramente, apresentados, construídos e validados modelos numéricos multi-físicos de transdutores piezoelétricos. Em seguida, foram realizados estudos para redução do custo computacional do modelo multi-físico para a sua aplicação em otimizações paramétricas. Finalmente, com os modelos validados e reduzidos, foram aplicados os métodos de otimização por algoritmos genéticos e Nelder-Mead em otimizações paramétricas simples e otimizações com geometrias mais complexas. Para redução do custo computacional foram aplicados e analisados: modelos acústicos viscotérmicos simplificados; a concentração e interpolação de parâmetros viscotérmicos do modelo; e uma proposta de solução semi-analítica para obter os parâmetros viscotérmicos em geometrias arbitrárias com auxílio de uma equação eikonal modificada.

Palavras-chave: modelo multi-físico, modelos acústicos viscotérmicos, transdutores piezoelétricos

ABSTRACT

Today's hearing aids have miniaturized transducers, what brings great challenges to achieve desirable configurations of performance, efficiency and cost. In this sense, the numerical analysis becomes an important design tool for these transducers, since it allows the evaluation of different system configurations with less time and cost compared to the experimental analysis. Furthermore, the numerical models also enables the application of optimization algorithms to guide the process of finding a configuration that meets the design requirements. However, in this case, the numerical model of the piezoelectric transducer is a multi-physical model which represents the physical phenomena of piezoelectricity, structural elasticity and acoustic propagation. Consequently, the modeling of these transducers can have a high computational cost to apply optimization techniques. This cost may be even higher because of the requirement for viscothermal acoustic models. These models are important in the acoustic analysis of small cavities, but the computational cost of these models is very high when geometry and boundary conditions are complex. In this work, we aim to build multi-physical numerical models of piezoelectric transducers for hearing aids, so that optimization techniques can be applied. To achieve this goal numerical multi-physical models of piezoelectric transducers were first presented, constructed and validated. Then, studies were conducted to reduce the computational cost of the multi-physical model allowing its application in parametric optimizations. Finally, with the validated and reduced models, the genetic algorithms and Nelder-Mead optimization methods were applied to simple parametric optimizations and optimizations with more complex geometries. To reduce the computational cost were applied and analyzed: simplified viscothermal acoustic models; lumping and interpolation of viscothermal model parameters; and the semi-analytical solution of viscothermal parameters in arbitrary geometries with the aid of a modified eikonal equation.

Keywords: multi-physical model, viscothermal acoustic models, piezoelectric transducers

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Componentes de um aparelho auditivo.....	2
Figura 1.2	Componentes básicos de um microfone de eletreto [2].	3
Figura 1.3	Vista em corte de um modelo de alto-falante para aparelhos auditivos.....	4
Figura 1.4	NPS (para excitação de 1 V) de três diferentes modelos comerciais de alto-falantes para aparelhos auditivos (medidos com um acoplador de 2 cm ³).	6
Figura 1.5	Típica curva de resposta em frequência de um microfone para aparelho auditivo [1].	6
Figura 1.6	Evolução no tamanho dos transdutores para aparelhos auditivos do fabricante Knowles.	7
Figura 2.1	Célula unitária do titanato de bário.....	19
Figura 2.2	Orientação dos dipolos na estrutura cristalina do material piezoelétrico.....	20
Figura 2.3	Efeitos piezoelétricos direto e inverso [43].	20
Figura 2.4	Interface fluido-sólido.	37
Figura 2.5	Discretização do domínio da formulação fraca.....	38
Figura 2.6	Sistema de coordenadas local para um elemento finito quadrangular.	39
Figura 2.7	Modelo acústico de um tubo por matriz de transferência.	43
Figura 2.8	(a) Diagrama esquemático de um transdutor eletro-mecano-acústico; (b) Matrizes de transferência dos subsistemas vinculadas por elementos do tipo transformador; (c) Aplicação de matrizes para os elementos do tipo transformador; (d) Matriz de transferência do transdutor [59].	44
Figura 2.9	Fluxograma de funcionamento do Algoritmo Genético contínuo.....	49
Figura 2.10	Manipulações de um simplex básico, bidimensional, para minimização [65].	51
Figura 3.1	Diafragmas piezoelétricos analisados.	54
Figura 3.2	Configuração experimental para medição dos diafragmas na condição livre.....	55
Figura 3.3	Função coerência entre a sinais medidos na avaliação	

dos diafragmas.	56
Figura 3.4 Malha 3D do modelo MEF.....	57
Figura 3.5 Domínios e superfícies de contorno do diafragma modelado pelo MEF.	57
Figura 3.6 Magnitude da FRF do diafragma A na condição livre.	59
Figura 3.7 Magnitude da FRF do diafragma B na condição livre.	60
Figura 3.8 Protótipos de alto-falante piezoelétrico.	61
Figura 3.9 Dimensões (em milímetros) das cavidades internas dos protótipos construídos.	62
Figura 3.10 Montagem do acoplador ao microfone e ao protótipo..	62
Figura 3.11 Dimensões (em mm) das cavidades internas do acoplador para o microfone.	62
Figura 3.12 Configuração experimental para medição dos protótipos de alto-falante piezoelétrico.	63
Figura 3.13 Função coerência dos sinais medidos na avaliação dos protótipos.	65
Figura 3.14 Configuração do modelo multi-físico do alto-falante piezoelétrico.	66
Figura 3.15 Domínios e superfícies de contorno dos protótipos modelados pelo MEF.	68
Figura 3.16 Malha do modelo pelo MEF construído para o protótipo A.	69
Figura 3.17 Malha do modelo pelo MEF construído para o protótipo B.	70
Figura 3.18 Parâmetros de entrada e saída da matriz de transferência obtida através do modelo MEF.	71
Figura 3.19 Malha para solução do protótipo A com modelo MEF completo.	72
Figura 3.20 Comparação do NPS ($\bar{\varphi} = 1$ V) obtidos pelo modelo MEF completo e pela abordagem por parâmetros concentrados para o protótipo A.	72
Figura 3.21 Comparação do NPS ($\bar{\varphi} = 1$ V) obtidos pelo modelo MEF completo e pela abordagem por parâmetros concentrados para o protótipo B.	73
Figura 3.22 Flexibilização da condição de contorno de engaste sobre o diafragma piezoelétrico no modelo pelo MEF.	74
Figura 3.23 Comparação do NPS ($\bar{\varphi} = 1$ V) da abordagem numérica com os dados experimentais obtidos para o protótipo A.	75

Figura 3.24 Comparação do NPS ($\bar{\varphi} = 1$ V) da abordagem numérica com os dados experimentais obtidos para o protótipo B.	76
Figura 3.25 Configuração experimental para validação do protótipo B configurados como microfone piezoelétrico.	78
Figura 3.26 Superfícies de contorno do modelo MEF do protótipo B configurado como microfone.	78
Figura 3.27 Malha do modelo pelo MEF construído para o protótipo B configurado como microfone.	79
Figura 3.28 Funções resposta em frequência (sensibilidade) do protótipo B configurado como microfone obtida por modelos numéricos em comparação com dados experimentais obtidos em [4].	80
Figura 4.1 Configuração do modelo MEF 2D (com simetria axial) do disco piezoelétrico.	83
Figura 4.2 Discretizações utilizadas na análise do disco piezoelétrico.	85
Figura 4.3 Função δ_{FRF} para cada discretizações parametrizadas.	87
Figura 4.4 Amplitude da FRF obtida com cada malha retangular avaliada.	88
Figura 4.5 Geometria avaliada (simetria axial) na análise da discretização de modelos acústicos.	89
Figura 4.6 Configuração do modelo MEF da cavidade acústica viscotérmica.	90
Figura 4.7 Comparação entre os comprimentos de λ_0 , λ_v e λ_h	93
Figura 4.8 Discretização da cavidade acústica.	93
Figura 4.9 Função δ_{FRF} calculada para cada discretização aplicada ao modelo FLNS.	94
Figura 4.10 Função δ_{FRF} calculada para cada discretização aplicada ao modelo LRF.	95
Figura 4.11 FRF calculadas pelos modelos FLNS e MR.	95
Figura 4.12 FRF calculadas pelos modelo LRF e MR.	96
Figura 4.13 Geometria e dimensões (em mm) aplicadas aos modelos analisados.	97
Figura 4.14 Malha MEF bidimensional utilizada no modelo multifísico de referência com simetria axial.	98
Figura 4.15 Denominação das superfícies, domínios e arestas onde foram aplicadas as condições de contorno e acoplamentos em todos modelos avaliados.	99

Figura 4.16 Amplitude da velocidade radial no modelo de referência.	103
Figura 4.17 Local de avaliação da velocidade radial no modelo de referência.....	104
Figura 4.18 Comparação da magnitude da FRF com o modelo multi-físico utilizando diferentes modelos acústicos com efeito viscotérmico.	108
Figura 4.19 Função δ_{FRF} obtida para cada modelo acústico viscotérmico simplificado.	108
Figura 4.20 Comparação da magnitude da FRF com o modelo multi-físico utilizando diferentes modelos acústicos com efeito viscotérmico.	110
Figura 4.21 Função δ_{FRF} obtida para cada modelo acústico viscotérmico simplificado considerando parede rígida em S1.....	110
Figura 4.22 Comparação da função δ_{FRF} para os modelos LRF e SLNS (distribuído e concentrado).....	112
Figura 4.23 Comparação da função δ_{FRF} para os modelos LRF e SLNS (concentrado) com diferentes malhas.	113
Figura 4.24 Campo da amplitude Ψ_v para algumas frequências entre 100 Hz e 10000 Hz.....	115
Figura 4.25 Espectros de δ_{FRF} calculados com modelos multi-físicos (SLNS) com interpolação linear na frequência da solução de Ψ_v e Ψ_h com distribuição linear ($m = 1$).	117
Figura 4.26 Espectros de δ_{FRF} calculados com modelos multi-físicos (SLNS) com interpolação linear na frequência da solução de Ψ_v e Ψ_h com distribuição quadrática ($m = 2$).	118
Figura 4.27 Valores real (\Re) e imaginário (\Im) dos campos Ψ_v e Ψ_h em 1000 Hz.	120
Figura 4.28 Função distância (em m) obtida nos domínios acústicos do modelo multi-físico analisado.	123
Figura 4.29 Valores real (\Re) e imaginário (\Im) dos campos $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e a solução numérica de Ψ_v em 1000 Hz.....	125
Figura 4.30 Função δ_{FRF} obtida para os modelos SLNS-SA e SLNS.	126
Figura 4.31 Alteração geométrica das cavidades acústicas do modelo multi-físico para avaliação do modelo SLNS-SA em uma geometria mais complexa.	127
Figura 4.32 Função δ_{FRF} obtida para os modelos SLNS-SA e SLNS aplicados no modelo multi-físico com geometria alterada.	128

Figura 5.1 Comparação do NPS de alto-falantes para aparelhos auditivos comerciais e os protótipos de alto-falantes piezoelétricos ($\bar{\varphi} = 1 \text{ V}$).....	129
Figura 5.2 Comparação da sensibilidade de microfones para aparelhos auditivos comerciais e o Protótipo B configurado como microfone piezoelétricos.....	130
Figura 5.3 Projetos de alto-falantes piezoelétricos a serem otimizadas.....	132
Figura 5.4 Configuração do modelo do alto-falante piezoelétrico utilizado no processo de otimização.....	133
Figura 5.5 Convergência na otimização do Projeto A1.....	138
Figura 5.6 Convergência na otimização do Projeto A2.....	138
Figura 5.7 NPS de projetos otimizados em comparação com os alto-falantes Knowles e Protótipo B ($\bar{\varphi} = 1 \text{ V}$).....	140
Figura 5.8 NPS de projetos (com X_1 fixo) otimizados em comparação com os alto-falantes Knowles e Protótipo B ($\bar{\varphi} = 1 \text{ V}$).....	142
Figura 5.9 Projetos básicos de microfones piezoelétricos a serem otimizados.....	143
Figura 5.10 Configuração do modelo de microfone piezoelétrico utilizado no processo de otimização.....	145
Figura 5.11 Convergência na otimização do Projeto M1.....	148
Figura 5.12 Convergência na otimização do Projeto M2.....	148
Figura 5.13 Sensibilidade obtida pelos projetos M1 e M2 otimizados em comparação com microfones comerciais de aparelhos auditivos e o Protótipo B.....	150
Figura 5.14 Posição dos eletrodos no Projeto M2.....	151
Figura 5.15 Comparação entre a sensibilidade obtida pelos projetos M1 e M2 otimizados em relação ao Projeto M2 com eletrodos cheios otimizado.....	151
Figura 5.16 Projeto de microfone piezoelétrico com parâmetros de forma.....	153
Figura 5.17 Configuração do modelo de microfone piezoelétrico utilizado no processo de otimização.....	155
Figura 5.18 Convergência na otimização do Projeto M3.....	156
Figura 5.19 Configuração otimizada do Projeto M3.....	157
Figura 5.20 Comparação das configurações geométricas otimizadas dos projetos M1, M2 e M3.....	158

Figura 5.21 Comparação das sensibilidades obtidas pelos projetos M1, M2 e M3 otimizados.	159
Figura 5.22 Parâmetros do Projeto A3 de alto-falante piezoelétrico.	160
Figura 5.23 Configuração do modelo para otimização do Projeto A3.	161
Figura 5.24 Convergência na otimização do Projeto A3.	162
Figura 5.25 Configuração otimizada do Projeto A3.	163
Figura 5.26 Comparação do NPS obtido para os projetos A2 e A3 otimizados.	164
Figura 5.27 Comparação das configurações geométricas dos projetos A2 e A3 de alto-falante otimizados.	165

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Graus de liberdade de elementos com funções de forma de Lagrange quadráticas e lineares.	40
Tabela 2.2	Funções de forma de Lagrange aplicadas nos modelos MEF acústicos, estrutural e piezoeletrico.	42
Tabela 3.1	Dimensões (em milímetros) dos diafragmas piezoeletricos analisados.	54
Tabela 4.1	Valores aproximados de frequência natural do disco piezoeletrico e média da função δ_{FRF} para cada discretização analisada.	86
Tabela 4.2	Quantidade de graus de liberdade (QGL) presentes em cada modelo aplicado ao MR.	101
Tabela 4.3	Quantidade de graus de liberdade (QGL) presentes em cada modelo aplicado ao modelo multi-fisico com aplicação do modelo acústico LRF.	105
Tabela 4.4	Quantidade de graus de liberdade (QGL) presentes em cada modelo aplicado ao modelo multi-fisico com aplicação do modelo acústico SLNS.	107
Tabela 4.5	Comparação global entre os modelos simplificados. ...	111
Tabela 4.6	Comparação global entre os modelos multi-fisico com parâmetros do modelo SLNS concentrados.	114
Tabela 4.7	Parâmetros globais de desempenho dos modelos multi-fisicos (SLNS) com interpolação linear dos campos Ψ_v e Ψ_h solucionados com diferentes valores de NF distribuídos linearmente. ...	117
Tabela 4.8	Parâmetros globais de desempenho dos modelos multi-fisicos (SLNS) com interpolação linear dos campos Ψ_v e Ψ_h solucionados em uma distribuição quadrática de frequências.	118
Tabela 4.9	Comparação global entre os modelos SLNS-SA, SLNS e LRF.	127
Tabela 5.1	Materiais que correspondem aos valores (índices) das variáveis inteiras na otimização.	131
Tabela 5.2	Faixa de variação do parâmetros de projeto no processo de otimização.	135
Tabela 5.3	Principais parâmetros aplicados aos otimizadores do MATLAB.	137
Tabela 5.4	Parâmetros de projeto obtidos pelo procedimento de	

otimização.	139
Tabela 5.5 Parâmetros de projeto (com X_1 fixo) obtidos pelo procedimento de otimização.	141
Tabela 5.6 Faixa de variação dos parâmetros dos projetos M1 e M2 na otimização.	147
Tabela 5.7 Parâmetros obtidos na otimização dos projetos M1 e M2.	149
Tabela 5.8 Parâmetros constantes na parametrização do Projeto M3.	154
Tabela 5.9 Faixa de variação dos parâmetros do Projeto M3 na otimização.	154
Tabela 5.10 Parâmetros e função de desempenho obtidos na otimização do Projetos M3.	157
Tabela 5.11 Faixa de variação dos parâmetros do Projeto A3 na otimização.	160
Tabela 5.12 Parâmetros e função de desempenho obtidos na otimização do Projeto A3.	163
Tabela A.1 Propriedades físicas do ar utilizadas nos modelos acústicos.	183
Tabela A.2 Propriedades mecânicas aplicadas ao modelo estrutural.	184
Tabela A.3 Propriedades físicas do PZT-5A.	184
Tabela A.4 Propriedades físicas dos materiais estruturais e piezoelétricos aplicadas nas otimizações.	185

LISTA DE SÍMBOLOS

Grandezas Escalares

γ	razão de calores específicos
κ	condutividade térmica do fluido
λ	coeficiente de viscosidade de dilatação
λ_L e μ_L	parâmetros de Lamé
μ	coeficiente de viscosidade de cisalhamento
ν	coeficiente de Poisson
Ω	interior do domínio analisado
ω	frequência angular
$\partial\Omega$	contorno do domínio analisado
Ψ_h	função escalar da difusão térmica
Ψ_v	função escalar da difusão do cisalhamento
ρ	amplitude complexa da densidade acústica
ρ_s	densidade de massa
ρ_0	densidade estática do fluido acústico
τ	amplitude complexa da temperatura acústica
τ_t	temperatura acústica prescrita
φ	potencial elétrico
φ_e	potencial elétrico prescrita
ϱ	densidade do fluido
c_0	velocidade do som no fluido
C_v	calor específico a volume constante
E	módulo de Young

g_a	gradiente normal de pressão prescrito
h_t	fluxo de calor prescrito
i	unidade imaginária
k_0	número de onda acústico
k_h	número de onda térmico
k_v	número de onda de cisalhamento
l	comprimento característico
P	pressão total do fluido
p	amplitude complexa da pressão acústica
p_a	pressão acústica prescrita
P_0	pressão estática do fluido acústico
Pr	Número de Prandtl
q_b	carga elétrica de corpo
q_e	carga elétrica prescrita
R_0	constante do gás
s	número de onda de cisalhamento
T	temperatura do fluido
t	tempo
T_0	temperatura estática do fluido acústico

Grandezas Vetoriais

σ	vetor de componentes do tensor tensão (notação de Voigt)
ε	vetor de componentes do tensor deformação (notação de Voigt)
f_a	força de superfície prescrita
f_b	vetor força de corpo

N	vetor de funções de aproximação do elemento
n	vetor normal ao contorno do domínio analisado
P^a	vetor de pressões nodais
P^e	vetor de pressões acústicas em cada nó do elemento
u	vetor deslocamento
v_a	velocidade de partícula prescrita
V	vetor velocidade total do fluido
v	vetor amplitude complexa da velocidade de partícula

Tensores e Matrizes

$[\epsilon]$	tensor de permissividade elétrica
$[\Phi]$	tensor tensão viscosa
$[\sigma]$	tensor tensão de Cauchy
$[c]$	tensor elasticidade
$[d]$	tensor de acoplamento piezoelétrico na equação constitutiva $\epsilon - D$
$[e]$	tensor de acoplamento piezoelétrico na equação constitutiva $\sigma - D$
$[I]$	tensor identidade
$[K^a]$	matriz de rigidez acústica global
$[K^e]$	matriz de rigidez acústica do elemento
$[M^a]$	matriz de inércia acústica global
$[M^e]$	matriz de inércia acústica do elemento
$[s]$	tensor flexibilidade

Operadores e Funções

$[\beta]$	operador diferencial
-----------	----------------------

$\Delta()$	operador laplaciano
δ_{FRF}	função erro relativo
$\frac{D()}{Dt}$	operador derivada total
$\Phi^{(visc)}$	função dissipação viscosa de energia mecânica
$\nabla \cdot ()$	operador divergente
$\nabla \times ()$	operador rotacional
∇	operador gradiente
$B(s)$ e $D(s, Pr)$	funções que representam efeitos viscoso e térmico, respectivamente, no modelo LRF
$J_0()$ e $J_2()$	funções de Bessel de ordem 0 e 2, respectivamente
$p^*, \tau^*, \varphi^*, \Psi_v^*, \Psi_h^*, \mathbf{v}^*$ e \mathbf{u}^*	funções de ponderação sobre o resíduo
$R()$	função resíduo

Abreviações e Siglas

FA	Fator de aceleração
FLNS	<i>Full Linear Navier-Stokes</i>
FRF	Função resposta em frequência
GL	Graus de Liberdade
LRF	<i>Low Reduced Frequency</i>
MEF	Método de Elementos Finitos
MMT	Método de Matrizes de Transferência
MR	Modelo referência
MRP	Método de Resíduos Ponderados
QGL	Quantidade de graus de Liberdade
SLNS	<i>Segregated Linear Navier-Stokes</i>
SLNS-SA	<i>Segregated Linear Navier-Stokes</i> Semi-analítico
TS	Tempo de solução

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Motivação	1
1.2 Aparelhos auditivos e seus transdutores	1
1.2.1 Microfone	2
1.2.2 Alto-falante	3
1.2.3 Características principais dos transdutores	4
1.3 Aplicação de transdutores piezoelétricos em aparelhos auditivos	7
1.4 Modelos numéricos e otimização de transdutores piezoelétricos	8
1.5 Objetivos e organização do trabalho	9
2 MODELOS E MÉTODOS PARA A ANÁLISE MULTI-FÍSICA	11
2.1 Modelo estrutural linear	12
2.1.1 Equação para análise harmônica	12
2.1.2 Equações constitutivas	14
2.1.2.1 Material isotrópico	14
2.1.2.2 Material isotrópico com simetria axial ..	14
2.1.3 Formulações forte e fraca do problema	15
2.2 Modelo piezoelétrico linear	17
2.2.1 Propriedades dos materiais piezoelétricos	17
2.2.1.1 Processo de polarização de materiais piezoelétricos	18
2.2.1.2 Operação do material piezoelétrico	19
2.2.2 Equações para análise harmônica	20
2.2.3 Equações constitutivas	22
2.2.4 Formulação fraca	25
2.3 Modelos acústicos lineares	25
2.3.1 Equações fundamentais dos modelos acústicos lineares	25
2.3.2 Modelo acústico clássico	27
2.3.2.1 Formulação fraca	29
2.3.3 Modelo acústico viscotérmico	29
2.3.3.1 Formulação fraca	30
2.3.4 Modelos acústicos viscotérmicos simplificados	31
2.3.4.1 Modelo LRF	31
2.3.4.1.1 Formulação fraca	33

2.3.4.2	Modelo SLNS	33
2.3.4.2.1	Formulação fraca	36
2.3.5	Acoplamentos acústico-estrutural	37
2.4	Discretização da formulação fraca pelo MEF	38
2.5	Modelos por parâmetros concentrados	42
2.6	Introdução à otimização	45
2.6.1	Métodos numéricos de otimização	46
2.6.1.1	Métodos de programação matemática ..	47
2.6.1.2	Métodos probabilísticos	47
2.6.2	Métodos de otimização aplicados neste trabalho ..	48
2.6.2.1	Método de otimização por algoritmos genéticos	48
2.6.2.2	Método Nelder-Mead	50
3	VALIDAÇÃO DE MODELOS MULTI-FÍSICOS	53
3.1	Modelo numérico de diafragmas piezoelétricos	53
3.1.1	Análise experimental	53
3.1.2	Configuração do modelo MEF	57
3.1.3	Propriedades dos materiais utilizados nos modelos numéricos	58
3.1.4	Análise dos resultados	58
3.2	Modelo numérico de alto-falantes piezoelétricos	60
3.2.1	Análise experimental	63
3.2.1.1	Análise da repetibilidade das montagens dos protótipos	64
3.2.2	Configuração do modelo multi-físico	66
3.2.2.1	Modelo de tubos acústicos pelo MMT ..	67
3.2.2.2	Modelo dos protótipos pelo MEF	68
3.2.2.3	Acoplamento dos modelos MEF e MMT	70
3.2.3	Análise dos resultados	71
3.2.3.1	Flexibilização da condição de contorno de engaste	73
3.3	Modelo numérico de microfone piezoelétrico	76
3.3.1	Análise experimental	76
3.3.2	Configuração do modelo multi-físico pelo MEF ...	77
3.3.3	Análise dos resultados	79
4	REDUÇÃO DO CUSTO COMPUTACIONAL DO MODELO MULTI-FÍSICO	81
4.1	Análise da discretização dos modelos MEF	81
4.1.1	Análise da discretização dos modelos piezoelétricos	82
4.1.1.1	Modelo MEF	82
4.1.1.2	Parametrização das malhas	84

4.1.1.3	Análise dos resultados	86
4.1.2	Análise da discretização de modelos acústicos viscotérmicos	89
4.1.2.1	Modelo MEF	89
4.1.2.2	Parametrização das malhas	92
4.1.2.3	Análise dos resultados	93
4.2	Descrição do sistema para avaliação dos modelos com redução de custo	96
4.2.1	Geometria	97
4.2.2	Discretização	97
4.2.3	Denominação das interfaces do modelo	98
4.2.4	Configuração do modelo de referência	100
4.2.5	Métodos e critérios para solução do modelo MEF	101
4.2.6	Parâmetros avaliados	101
4.3	Simplificação do modelo acústico viscotérmico	102
4.3.1	Aplicação do modelo LRF	102
4.3.2	Aplicação do modelo SLNS	105
4.3.3	Comparação entre os modelos simplificados	107
4.4	Concentração de parâmetros viscotérmicos do modelo SLNS	111
4.5	Interpolação de parâmetros viscotérmicos no modelo SLNS	114
4.6	Proposta de solução semi-analítica para o modelo SLNS	119
4.6.1	Equação diferencial da função distância	121
4.6.2	Solução analítica dos parâmetros viscotérmicos	123
4.6.3	Análise dos resultados	124
5	OTIMIZAÇÕES PARAMÉTRICAS DE TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS	129
5.1	Otimização de alto-falantes piezoelétricos	131
5.1.1	Projetos básicos de alto-falantes	131
5.1.1.1	Modelo MEF	132
5.1.2	Problema de otimização	134
5.1.3	Procedimento de otimização	135
5.1.4	Análise dos resultados	137
5.2	Otimização de microfones piezoelétricos	142
5.2.1	Projetos básicos de microfones	142
5.2.1.1	Modelo MEF	144
5.2.2	Problema de otimização	146
5.2.3	Análise dos resultados	147
5.3	Otimização com parâmetros de forma	152
5.3.1	Projeto de microfone com parâmetros de forma	152
5.3.1.1	Modelo MEF	155

5.3.1.2	Análise dos resultados	155
5.3.2	Projeto de alto-falante com parâmetros de forma .	159
5.3.2.1	Modelo MEF	161
5.3.2.2	Análise dos resultados	161
6	CONCLUSÕES	167
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	170
	REFERÊNCIAS	173
	APÊNDICE A – Propriedades dos materiais	183
	ANEXO A – Código Matlab	189

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Técnicas de otimização vêm sendo amplamente aplicadas em diversas áreas do conhecimento como engenharia, economia, administração entre outras. Na engenharia, a aplicação destas técnicas podem auxiliar no processo de concepção de sistemas. Este processo geralmente envolve a construção de modelos numéricos que possam prever, com certa precisão, o desempenho do sistema. Entretanto, para aplicação de técnicas de otimização é necessário, além da escolha de uma técnica adequada, ter-se um modelo numérico preciso e computacionalmente eficiente. A eficiência computacional do modelo é importante pois os algoritmos de otimização necessitam que soluções sejam calculadas pelo modelo por dezenas, centenas ou milhares de vezes para que se obtenha uma configuração ótima para o problema de otimização formulado.

Esta tese é motivada pela construção de modelos multi-físicos numericamente eficientes e precisos para aplicação de técnicas de otimização no desenvolvimento de transdutores piezoelétricos para aparelhos auditivos. Para uma maior versatilidade de aplicação, os modelos multi-físicos foram desenvolvidos pelo Método de Elementos Finitos (MEF), sendo assim aplicáveis em geometrias e condições de contorno mais complexas. A seguir, o aparelho auditivo e seus transdutores serão apresentados.

1.2 APARELHOS AUDITIVOS E SEUS TRANSDUTORES

Um aparelho auditivo é um sistema projetado para amplificar o sinal sonoro captado próximo à orelha do usuário que possui alguma dificuldade de audição. Para um bom funcionamento e conforto do usuário, a amplificação do sinal sonoro precisa ser feita, predominantemente, na faixa de frequência em que o usuário possui deficiência ou perda auditiva. Para isto, atualmente, os aparelhos auditivos utilizam sistemas de processamento de sinais e, desta forma, com ajustes de equalização, o fonoaudiólogo procura adaptar o aparelho às necessidades do usuário.

Na Figura 1.1 estão apresentados os componentes básicos de um aparelho auditivo. O processo de funcionamento deste sistema inicia-se pela captação das ondas sonoras pelo microfone onde o sinal sonoro é

convertido em sinal elétrico. Este sinal elétrico é processado e amplificado de acordo com a perda auditiva do usuário sendo, posteriormente, enviado ao alto-falante que o converte em estímulo sonoro novamente. No caso de um aparelho auditivo retro-auricular (aparelho posicionado atrás da orelha), as ondas sonoras geradas pelo alto-falante ainda percorrem um sistema de tubos que as conduzem até o canal auditivo do usuário.

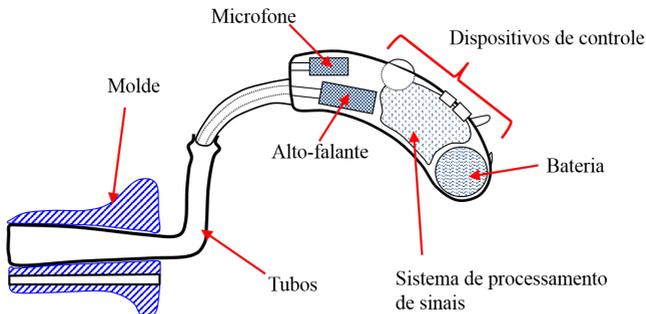


Figura 1.1 – Componentes de um aparelho auditivo.

O bom funcionamento do aparelho auditivo está diretamente relacionado ao desempenho de seus transdutores: microfone e alto-falante. Estes componentes precisam ter desempenho adequado e características dinâmicas bem conhecidas para que a qualidade do sinal sonoro amplificado atenda às necessidades do usuário e, além disso, representam uma parcela significativa do custo final.

Transdutores são equipamentos que realizam a transformação de um tipo específico de energia em outra. Os transdutores são normalmente utilizados como sensores ou atuadores. Na acústica, os sensores mais comuns são os microfones que transformam energia acústica em energia elétrica. Os atuadores mais comuns na acústica são os alto-falantes que transformam a energia elétrica em energia acústica.

1.2.1 Microfone

Os microfones de aparelhos auditivos mais comuns são de eletreto, sendo que seu funcionamento ocorre por fenômenos capacitivos, mecânicos e acústicos. Na Figura 1.2 pode-se visualizar a estrutura básica de um microfone de eletreto para aparelhos auditivos. Nestes microfones tem-se um diafragma condutor e uma placa fixa de eletreto.

Um eletreto é um material dielétrico estável que possui uma carga estática permanentemente, formando assim um capacitor entre a placa fixa e o diafragma. A variação de pressão acústica sobre o diafragma condutivo provoca movimento do mesmo e, conseqüentemente, alteram a capacitância deste capacitor. A variação da capacitância é detectada pela variação da tensão elétrica e, conseqüentemente, pode-se estabelecer uma relação de proporcionalidade entre a pressão acústica e a tensão elétrica denominada de sensibilidade. Os microfones utilizados em aparelhos auditivos possuem amplificador interno, os FET (*Field Effect Transistor*). Microfones para aparelhos auditivos possuem sensibilidade típica por volta de 16 mV/Pa, o que representa uma produção de 1 mV de tensão elétrica para um nível de pressão sonora de 70 dB [1].

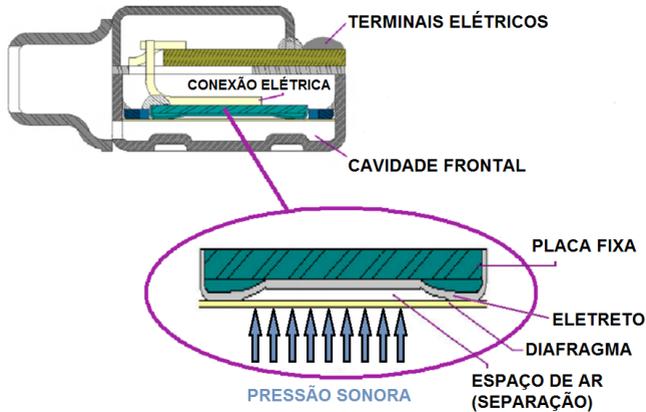


Figura 1.2 – Componentes básicos de um microfone de eletreto [2].

1.2.2 Alto-falante

Os alto-falantes dos aparelhos auditivos atuais são eletrodinâmicos, sendo seu funcionamento gerado por fenômenos eletromagnéticos, mecânicos e acústicos. Os componentes básicos destes alto-falantes podem ser visualizados na Figura 1.3. Ele consiste de um diafragma excitado por um atuador que é acionado por um sistema eletro-mecânico. Este sistema possui uma bobina enrolada a uma armadura metálica, dois ímãs e um pino de acionamento. A aplicação de uma corrente elétrica alternada sobre a bobina provoca a ação de um campo mag-

nético que polariza a armadura metálica. A interação dos imãs com a armadura polarizada geram uma força magnética. Esta força flexiona a armadura metálica e este movimento é transmitido ao diafragma através de um pino de conexão. O movimento do diafragma provoca variações de pressão no ar adjacente produzindo assim ondas sonoras que serão conduzidas ao usuário.

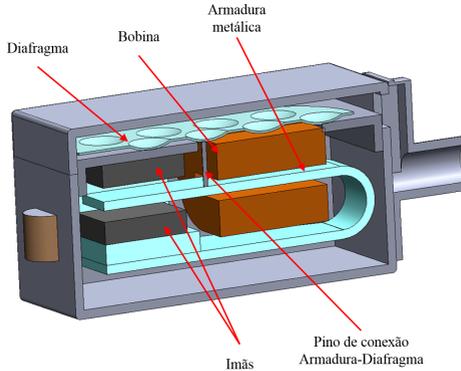


Figura 1.3 – Vista em corte de um modelo de alto-falante para aparelhos auditivos.

Na estrutura construtiva do alto-falante os sistemas eletromagnético, mecânico e acústico encontram-se fortemente acoplados sendo sua resposta dinâmica também afetada pela impedância do sistema no qual este sistema é acoplado, conforme mostrado no trabalho experimental de Araujo [3]. Portanto, para caracterizar alto-falantes de aparelhos auditivos nas condições de funcionamento, deve-se considerar os efeitos do campo acústico no canal auditivo e tímpano junto ao sistema acústico que conduz o sinal sonoro até o canal auditivo, conforme mostrado na Figura 1.1. Convenientemente, pode-se representar de forma simplificada os efeitos do canal auditivo e tímpano utilizando-se dispositivos artificiais como um acoplador (*coupler*) ou simulador de orelha [1] para a avaliação experimental destes alto-falantes.

1.2.3 Características principais dos transdutores

Os parâmetros mais comuns na caracterização de transdutores para aparelho auditivo são [3, 4]:

- Função resposta em frequência;

- Consumo de energia;
- Distorção harmônica;
- Diretividade (em microfones);
- Relação sinal ruído.

A função resposta em frequência (FRF) é o principal parâmetro de desempenho dos transdutores sendo uma relação da resposta fornecida pelo sistema (sinal de saída) em relação ao sinal de entrada. Em uma avaliação global dos transdutores (microfones e alto-falantes), a FRF relaciona sinais de tensão elétrica e pressão acústica. Nos alto-falantes, normalmente, se avalia a resposta de pressão acústica em relação à tensão elétrica aplicada. Por outro lado, nos microfones avalia-se a resposta de tensão elétrica em relação a pressão acústica que é captada.

Devido à miniaturização do sistema, a FRF de um alto-falante para aparelho auditivo pode ser significativamente alterada devido à mudança da impedância acústica vista pelo alto-falante, conforme verificado, experimentalmente, no trabalho de Araújo [3]. Portanto, o comportamento do alto-falante depende do sistema acústico ao qual ele estiver acoplado. Isto indica a importância de se analisar o comportamento do alto-falante em condições semelhantes às de uso. Na Figura 1.4 estão apresentadas as respostas de nível de pressão sonora (NPS) de três diferentes modelos de alto-falante para aparelho auditivo sendo estes excitados com sinal de entrada de 1 Volt em todas as frequências analisadas e conectados a um acoplador de microfone com volume similar ao do canal auditivo (2 cm^3). Nesta figura pode-se perceber que as curvas apresentam maiores níveis abaixo de 6000 Hz onde tem-se algumas ressonâncias em cada modelo. Estas ressonâncias são oriundas dos sistemas acústico (cavidades e tubos) e mecânicos (diafragma e armadura metálica) do alto-falante junto ao acoplador.

A resposta em frequência de um microfone de eletreto é basicamente plana, porém em microfones para aparelhos auditivos é comum a introdução de um filtro passa-alta mecânico para que o aparelho seja menos sensível aos intensos sons em baixa frequência do dia a dia [1]. Estes sons muitas vezes não são percebidos pelos ouvidos humanos, porém podem se tornar incômodos para usuários de aparelhos auditivos. Este filtro é introduzido deixando pequenas passagens de ar em ambas extremidades do diafragma, que são atingidas simultaneamente pelas ondas sonoras de baixa frequência, reduzindo sua efetividade em movimentar o diafragma. Quanto maior for a abertura, maior será a

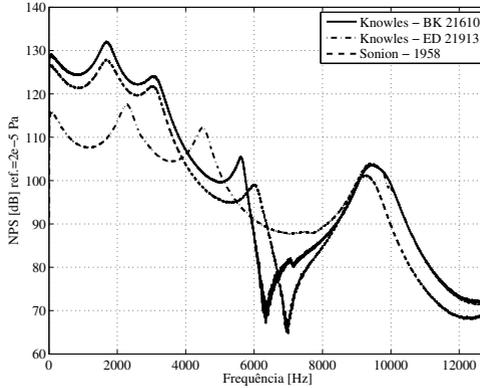


Figura 1.4 – NPS (para excitação de 1 V) de três diferentes modelos comerciais de alto-falantes para aparelhos auditivos (medidos com um acoplador de 2 cm^3).

atenuação e maior será a faixa de frequência onde a atenuação irá ocorrer. Esta abertura também estabiliza a pressão estática do ar a frente e atrás do diafragma.

Uma segunda variação na resposta em frequência, que a afasta de uma curva plana, é uma ressonância acústica resultante da geometria do sistema acústico do microfone que forma um ressonador de Helmholtz. Este ressonador é um sistema massa-mola que ocorre entre a massa de ar no tubo de entrada do microfone e a rigidez do volume da cavidade interna do mesmo. Uma consequência da ressonância de Helmholtz é que, após a ressonância, há uma diminuição da sensibilidade com o aumento da frequência [1]. A Figura 1.5 apresenta uma típica curva de resposta em frequência de microfones para aparelhos auditivos.

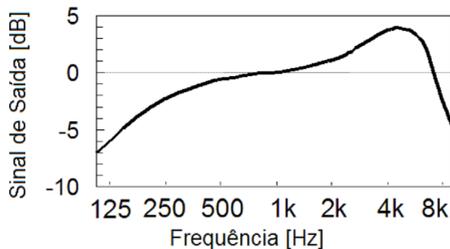


Figura 1.5 – Típica curva de resposta em frequência de um microfone para aparelho auditivo [1].

1.3 APLICAÇÃO DE TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS EM APARELHOS AUDITIVOS

A aplicação de materiais piezoelétricos em transdutores já é uma realidade em inúmeras aplicações presentes nas indústrias militar, aeroespacial, automotiva, médica entre outras. Materiais piezoelétricos já são aplicados em aparelhos auditivos parcial ou totalmente implantados como mostrado em [5–8]. Porém, a aplicação destes materiais em transdutores para aparelhos auditivos convencionais (sistemas semelhantes ao descrito na Figura 1.1) ainda não se encontra completamente estabelecida neste mercado, sendo encontrados poucos trabalhos relacionados, diretamente, a este tema como em [9–11].

A principal vantagem da aplicação de materiais piezoelétricos, em relação aos transdutores atuais de aparelho auditivo, seria a redução de custo pois estes poderiam dispensar componentes como ímãs, bobinas, armaduras metálicas, eletretos e até mesmo diafragmas, além de também dispensar a complexa montagem que os sistemas atuais possuem, como pode-se visualizar nas figuras 1.2 e 1.3. Uma consequência da redução de componentes é a maior possibilidade de miniaturização do transdutor o que, historicamente, vem acontecendo neste mercado, conforme pode-se perceber na Figura 1.6.

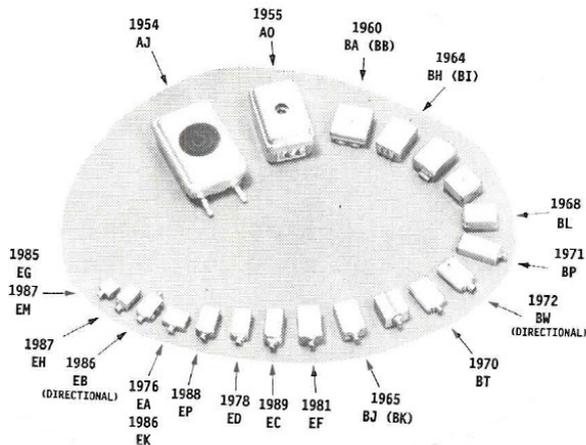


Figura 1.6 – Evolução no tamanho dos transdutores para aparelhos auditivos do fabricante Knowles.

1.4 MODELOS NUMÉRICOS E OTIMIZAÇÃO DE TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS

Para o projeto de transdutores é bastante conveniente a construção de modelos numéricos precisos para poder decidir com mais clareza as configurações que serão aplicadas na concepção do sistema. Na literatura, pode-se encontrar muitos trabalhos descrevendo modelos numéricos de transdutores piezoelétricos. Nestes trabalhos é frequente o desenvolvimento de modelos analíticos em conjunto com abordagens por parâmetros concentrados, como circuitos equivalentes e matrizes de transferência [12–19]. A abordagem por parâmetros concentrados permite representar sistemas com múltiplos fenômenos físicos acoplados de forma simples e, geralmente, com baixo custo computacional. Porém, o cálculo dos parâmetros aplicados nesta abordagem requer uma compreensão detalhada das propriedades elétricas e mecânicas do sistema analisado, podendo ser fácil para transdutores de geometria simples ou laborioso e, muitas vezes, impossível para projetos mais complexos [20]. Para contornar esta dificuldade e aumentar a precisão do modelo, alguns trabalhos recorrem à utilização de modelos numéricos para extração de parâmetros a serem inseridos na abordagem por parâmetros concentrados como em [20, 21].

A análise de um transdutor piezoelétrico para aparelho auditivo geralmente requer um modelo multi-físico que considere os fenômenos físicos de piezoelectricidade, elasticidade mecânica e propagação acústica. Devido ao tamanho miniaturizado dos transdutores para aparelhos auditivos, o modelo de propagação acústica nas cavidades precisa considerar efeitos de difusão térmica e cisalhamento viscoso do ar [4, 22–26]. Este efeitos são denominados na literatura como efeitos viscotérmicos e a sua consideração nos modelos acústicos adicionam grande complexidade ao modelo.

A solução analítica de modelos acústicos viscotérmicos são possíveis apenas em casos e geometrias particulares. Em casos de geometrias e condições de contorno mais complexas, recorre-se aos métodos numéricos. A análise numérica de cavidades acústicas em baixas frequências é, geralmente, conduzida utilizando-se o Método de Elementos Finitos (MEF). A implementação do MEF em modelos acústicos viscotérmicos para geometrias arbitrárias é relativamente recente sendo a primeira implementação publicada em 2004 [27]. Em 2011, o código comercial Comsol Multiphysics [28] incluiu o módulo de análise para problemas acústicos viscotérmicos pelo MEF. Neste módulo, foi implementada uma formulação mista publicada por Kampinga [29] em 2008.

O custo computacional da solução pelo MEF deste modelo é muito elevado quando comparado à solução do modelo acústico clássico.

Com o aumento da capacidade de processamento dos computadores, o uso de técnicas de otimização aliadas aos modelos numéricos vem se tornando mais comum e auxiliando projetistas no projeto de sistemas mais eficientes, baratos e duráveis. Na literatura é possível encontrar muitos trabalhos sobre otimização envolvendo componentes piezoelétricos conforme os mostrados em [30–34]. Apesar da tecnologia bem estabelecida, trabalhos envolvendo a otimização de transdutores para aparelho auditivo convencionais não são facilmente encontrados na literatura. Porém, pode-se encontrar alguns poucos trabalhos envolvendo sistemas com escala geométrica e fenômenos físicos similares aos transdutores de aparelhos auditivos como em [21, 35–38].

1.5 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho que tem como objetivo principal a construção de modelos multi-físicos de transdutores piezoelétricos para aparelhos auditivos com vistas à aplicação de técnicas de otimização. Diante das possíveis formas geométricas e diferentes configurações que o projeto de transdutores piezoelétricos para aparelho auditivo pode exigir, os modelos multi-físicos foram, em grande parte, desenvolvidos pelo MEF. Para atingir o objetivo principal, objetivos específicos serão executados ao longo dos capítulos deste trabalho conforme descrito abaixo.

No Capítulo 2 serão apresentados os modelos e métodos para a análise multi-física dos transdutores piezoelétricos, sendo descritas as equações fundamentais de cada fenômeno físico juntamente com a respectiva formulação fraca que é utilizada na aplicação do MEF. Será apresentado também o método de matrizes de transferência que será utilizado para representar o sistema de medição do modelo de alto-falante piezoelétrico.

Em seguida, no Capítulo 3, serão apresentadas validações experimentais de sistemas modelados com os modelos e métodos apresentados no Capítulo 2. Neste capítulo, serão validados modelos de diafragma piezoelétrico e protótipos de alto-falantes e microfones construídos com estes diafragmas.

Para aplicação de técnicas de otimização, no Capítulo 4, foram avaliadas alternativas para redução do alto custo computacional dos modelos multi-físicos desenvolvidos e validados pelo MEF. Neste capítulo, primeiramente, foram avaliadas as discretizações dos modelos

MEF de material piezoelétrico e de propagação acústica. Em seguida foi descrito um sistema multi-físico que foi modelado e tomado como referência para a avaliação do custo computacional e da precisão dos recursos aplicados para redução de custo computacional do mesmo. Os recursos aplicados foram a simplificação dos modelos acústicos viscotérmicos, a concentração e interpolação de parâmetros para a inclusão de efeitos viscotérmicos em modelos acústicos simplificados e, finalmente, uma proposta de solução semi-analítica para inclusão de efeitos viscotérmicos em modelos acústicos simplificados.

Após obtidas reduções significativas de custo computacional, algumas otimizações são aplicadas em diferentes projetos de transdutores piezoelétricos no Capítulo 5. Primeiramente, é realizada uma otimização paramétrica simples de dois diferentes projetos de alto-falante e microfone para aparelhos auditivos. Finalmente, são realizadas otimizações com parâmetros de forma onde tem-se geometrias mais complexas.

Finalmente, no Capítulo 6, as conclusões são apresentadas destacando-se as contribuições deste trabalho e propostas para trabalhos futuros.

2 MODELOS E MÉTODOS PARA A ANÁLISE MULTI-FÍSICA

Neste capítulo, apresentam-se os modelos matemáticos utilizados para a predição do comportamento dinâmico de transdutores piezoelétricos. Os modelos matemáticos utilizados serão o modelo piezoelétrico linear, modelo estrutural linear e diferentes modelos de propagação acústica.

Os modelos matemáticos são equações diferenciais parciais que podem ser solucionadas, de forma analítica, apenas em casos com geometria e condições de contorno simples e particulares. Como os sistemas analisados neste trabalho serão mais complexos, estes modelos serão solucionados de forma numérica pelo Método de Elementos Finitos (MEF). Neste sentido, a formulação fraca (*weak form*) utilizada para desenvolver modelos pelo MEF também será apresentada para cada modelo matemático apresentado.

As formulações fracas podem ser obtidas por diferentes formas. O princípio dos trabalhos virtuais e os métodos variacionais são ferramentas clássicas para se obter a formulação fraca em grande parte dos problemas da mecânica estrutural onde sua argumentação geralmente possui significado físico. Para problemas como os modelos acústicos viscotérmicos, as formulações encontradas na literatura são obtidas pelo método de resíduos ponderados. Assim como nos métodos variacionais, o método de resíduos ponderados incorpora as equações diferenciais do problema na forma fraca [39].

As formulações na forma fraca foram implementadas no código comercial Comsol Multiphysics [28]. Este código comercial foi escolhido por permitir a aplicação direta de formulações na forma fraca e executar de forma automática os procedimentos de construção das matrizes do elemento e montagem das matrizes globais para a solução do sistema. Além disso, o Comsol também possui algoritmos para construção de malhas, solução dos sistemas lineares e pós-processamento dos resultados facilitando assim a análise dos modelos construídos.

Com o objetivo específico de reduzir o custo computacional para a otimização numérica também foram utilizados modelos de parâmetros concentrados. A abordagem para construção de modelos de parâmetros concentrados utilizada neste trabalho foi o Método de Matrizes de Transferência (MMT) que também será apresentado neste capítulo.

Neste trabalho, os modelos utilizados são todos analisados no domínio da frequência. Neste sentido, as equações diferenciais que

constituem estes modelos foram todas linearizadas, considerando-se pequenas perturbações harmônicas. Para facilitar a apresentação e o entendimento destes modelos, o processo de linearização e aplicação de perturbações harmônicas será suprimido podendo ser encontrados nas bibliografias citadas em cada modelo. Porém, vale lembrar que, após este processo, as variáveis de campo nas equações diferenciais são valores complexos.

2.1 MODELO ESTRUTURAL LINEAR

2.1.1 Equação para análise harmônica

A equação para modelar a resposta dinâmica de estruturas é obtida a partir da aplicação da segunda lei de Newton originando a seguinte equação diferencial parcial, denominada de equação de Navier [40] (considerando pequenas deformações harmônicas),

$$\omega^2 \rho \mathbf{u} + \nabla[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{f}_b = 0, \quad (2.1)$$

sendo ω a frequência angular, \mathbf{u} o vetor deslocamento, \mathbf{f}_b vetor força de corpo, ρ a densidade de massa, $[\boldsymbol{\sigma}]$ o tensor tensão de Cauchy e ∇ o operador gradiente. Uma vez que o tensor $[\boldsymbol{\sigma}]$ é simétrico, é conveniente escrevê-lo como um vetor de seis componentes usando a notação de Voigt [40] como

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Aplicando a notação de Voigt, a Equação (2.1) torna-se

$$\omega^2 \rho \mathbf{u} + [\boldsymbol{\beta}]^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_b = 0, \quad (2.3)$$

sendo o sobrescrito T denota a transposta de $[\boldsymbol{\beta}]$ que é o operador

diferencial definido por

$$[\boldsymbol{\beta}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

As componentes do tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}$ se relacionam com as componentes do tensor deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, considerando pequenas deformações, através da lei de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{c}]\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.5)$$

sendo $[\mathbf{c}]$ o tensor elasticidade.

Considerando pequenas deformações e, conseqüentemente, comportamento linear, as componentes do vetor deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ se relacionam com o vetor deslocamento por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\beta}]\mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Finalmente, substituindo as equações (2.6) e (2.5) na Equação (2.3) tem-se

$$\omega^2 \rho \mathbf{u} + [\boldsymbol{\beta}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}]\mathbf{u} + \mathbf{f}_b = 0, \quad (2.7)$$

A Equação (2.7) pode ser submetida as seguintes condições de contorno essenciais ou naturais:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m \text{ (deslocamento prescrito)} \quad (2.8a)$$

ou

$$[\mathbf{n}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}]\mathbf{u} = [\mathbf{n}]^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_m \text{ (força de superfície prescrita)}, \quad (2.8b)$$

sendo $[\mathbf{n}]$ dado por

$$[\mathbf{n}]^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & 0 & n_z & n_y \\ 0 & n_y & 0 & n_z & 0 & n_x \\ 0 & 0 & n_z & n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

onde as n_x , n_y e n_z são componentes do vetor unitário normal à superfície do contorno.

2.1.2 Equações constitutivas

A relação tensão-deformação apresentada na Equação (2.5) é a mais simples e frequentemente utilizada equação constitutiva linear [40]. A limitação desta relação constitutiva vem do fato de que $\boldsymbol{\sigma}$ é válido na configuração deformada e $\boldsymbol{\varepsilon}$ possui comportamento linear e é definido na configuração inicial. Assumindo pequenas deformações, as configurações inicial e deformada são próximas, sendo suficiente para que a Equação (2.5) seja válida.

A seguir, as componentes do tensor $[\mathbf{c}]$ são apresentadas para os casos de materiais isotrópicos aplicados em modelos tridimensionais (3D) e de materiais isotrópicos aplicados em modelos bidimensionais (2D) com simetria axial.

2.1.2.1 Material isotrópico

O tensor elasticidade $[\mathbf{c}]$ é simétrico, portanto, para um material anisotrópico, são necessários 21 coeficientes independentes para definir este tensor. No caso isotrópico, $[\mathbf{c}]$ é unicamente definido pelas propriedades do módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν [40] como

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} \lambda_L + 2\mu_L & \lambda_L & \lambda_L & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_L & \lambda_L + 2\mu_L & \lambda_L & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_L & \lambda_L & \lambda_L + 2\mu_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_L \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

sendo λ_L e μ_L os chamados parâmetros de Lamé definidos por

$$\lambda_L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (2.11)$$

$$\mu_L = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.12)$$

2.1.2.2 Material isotrópico com simetria axial

Na modelagem de problemas com simetria axial, também utilizada neste trabalho, o problema é descrito no sistema de coordenadas

cilíndricas que possui as direções: radial (r), axial (z) e circunferencial (θ). Neste caso, o deslocamento não depende de θ resultando em

$$u_\theta = 0, \quad (2.13)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \epsilon_{z\theta} = 0. \quad (2.14)$$

Com as simplificações acima, a relação tensão-deformação para materiais isotrópicos é estabelecida por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_L + 2\mu_L & \lambda_L & 0 & \lambda_L \\ \lambda_L & \lambda_L + 2\mu_L & 0 & \lambda_L \\ 0 & 0 & \mu_L & 0 \\ \lambda_L & \lambda_L & 0 & \lambda_L + 2\mu_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix}. \quad (2.15)$$

2.1.3 Formulações forte e fraca do problema

Por meio das equações (2.7) e (2.8), considerando $\mathbf{f}_b = 0$ (por questão de simplicidade), pode-se estabelecer o seguinte problema na formulação forte:

Encontrar \mathbf{u} , satisfazendo

$$\omega^2 \rho \mathbf{u} + [\boldsymbol{\beta}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.16a)$$

e as condições de contorno

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m \quad \text{em } \partial\Omega_e, \quad (2.16b)$$

$$[\mathbf{n}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \mathbf{u} = [\mathbf{n}]^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_m \quad \text{em } \partial\Omega_n, \quad (2.16c)$$

sendo Ω o domínio do problema e limitado pelos contornos $\partial\Omega_e$ e $\partial\Omega_n$ onde são definidas as condições de contorno essenciais e naturais, respectivamente.

Conforme a descrição do problema pela formulação forte, a solução precisa satisfazer as equações (2.16) em todos os pontos de Ω , $\partial\Omega_e$ e $\partial\Omega_n$. Neste sentido, a solução deste problema de forma analítica é bastante restrita a domínios e contornos específicos onde podem ser assumidas hipóteses simplificativas sobre o campo de deslocamento \mathbf{u} e suas derivadas.

Neste trabalho serão desenvolvidos modelo multi-físicos onde os problemas possuem domínios, contornos e condições de contorno mais complexas. Desta forma, para solucionar (por aproximação numérica) estes modelos, será aplicado o Método de Elementos Finitos (MEF). Para aplicação do MEF é necessário descrever o problema na forma

fraca (*weak form*) que pode ser obtida pelo Método de Resíduos Ponderados (MRP) [39].

O MRP assume $\hat{\mathbf{u}}$ como uma solução aproximada de \mathbf{u} para a Equação (2.16a) obtendo-se

$$R(\hat{\mathbf{u}}) = \omega^2 \rho \hat{\mathbf{u}} + [\boldsymbol{\beta}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \hat{\mathbf{u}} \neq 0, \quad (2.17)$$

sendo $R(\hat{\mathbf{u}})$ a função resíduo gerada por erros na aproximação de \mathbf{u} .

De acordo com o MRP a solução aproximada ($\hat{\mathbf{u}}$) pode ser obtida pela aplicação de funções de ponderação (\mathbf{u}^*) sobre o resíduo, $R(\hat{\mathbf{u}})$, tal que

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot R(\hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega = 0, \quad (2.18)$$

resultando em

$$\int_{\Omega} \omega^2 \rho (\mathbf{u}^* \cdot \hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot ([\boldsymbol{\beta}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega = 0. \quad (2.19)$$

O segundo termo da Equação (2.19) possui derivadas de segunda ordem o que restringe a solução aproximada $\hat{\mathbf{u}}$ ser duas vezes diferenciável. Para atenuar esta restrição aplica-se neste termo a integração por partes que resulta em

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot ([\boldsymbol{\beta}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega &= \int_{\Omega} [\boldsymbol{\beta}]^T ([\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^*) \, d\Omega - \\ &\quad - \int_{\Omega} ([\boldsymbol{\beta}] \mathbf{u}^*)^T ([\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss no primeiro termo à direita da Equação (2.20) obtém-se

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\beta}]^T ([\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^*) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{n}]^T ([\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^*) \, d\partial\Omega. \quad (2.21)$$

Finalmente, substituindo as equações (2.20) e (2.21) na Equação (2.19), pode se estabelecer o seguinte problema na formulação fraca, considerando por simplicidade de notação $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$:

Encontrar \mathbf{u} satisfazendo

$$\int_{\Omega} \omega^2 \rho (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} ([\boldsymbol{\beta}] \mathbf{u}^*)^T ([\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} ([\mathbf{n}]^T \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}^* \, d\partial\Omega = 0 \quad (2.22a)$$

e as condições de contorno

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m \quad \text{em } \partial\Omega_e, \quad (2.22b)$$

$$[\mathbf{n}]^T [\mathbf{c}] [\boldsymbol{\beta}] \mathbf{u} = [\mathbf{n}]^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_m \quad \text{em } \partial\Omega_n, \quad (2.22c)$$

sendo que na integral sobre $\partial\Omega$ na Equação (2.22a) são aplicadas as condições de contorno naturais apresentas na Equação (2.22c).

A formulação fraca descreve o problema contendo implicitamente as equações diferenciais da formulação forte. Porém, nesta formulação, a solução aproximada \mathbf{u} não necessita satisfazer as equações do problema em todos os pontos de Ω , mas apenas de forma integral ou média [39]. Além disso, o problema na formulação fraca possui derivadas de primeira ordem, reduzindo assim a restrição da solução aproximada ser duas vezes diferenciável como na formulação forte.

A partir da formulação fraca existem diversas metodologias para a construção conveniente da solução aproximada \mathbf{u} como, por exemplo, os métodos de Rayleigh-Ritz e Elementos Finitos. O Método de Elementos Finitos (MEF) foi a técnica escolhida para solução dos modelos construídos neste trabalho pois, além de ser uma técnica bastante difundida e utilizada na literatura, este método permite acoplar facilmente formulações fracas de diferentes fenômenos físicos permitindo a construção de modelos multi-físicos. O MEF consiste em um processo de discretização da formulação fraca que será detalhado na Seção 2.4.

2.2 MODELO PIEZOELÉTRICO LINEAR

2.2.1 Propriedades dos materiais piezoelétricos

Um grande número de materiais possui propriedades piezoelétricas. Entretanto, apenas alguns poucos materiais possuem características expressivas, tornando-os comercialmente viáveis. Os materiais piezoelétricos podem ser subdivididos nas seguintes categorias [40]:

1. Monocristalinos, como o quartzo;

2. Cerâmicas policristalinas, como o titanato de bário (BaTiO_3) e o titanato zirconato de chumbo (PZT);
3. Polímeros, como o fluoreto de polivinilideno (PVDF).

As categorias 1 e 3 mostram tipicamente um efeito piezoelétrico fraco, estes materiais são utilizados principalmente em aplicações de sensores (por exemplo, força, torque ou sensor de aceleração). Para cerâmicas piezoelétricas o acoplamento eletromecânico é grande, tornando-os atraentes para aplicações de atuadores. Estes materiais apresentam uma estrutura policristalina e a propriedade física principal destes materiais é a ferroeletricidade. As cerâmicas piezoelétricas policristalinas podem ser fabricadas e polarizadas em praticamente qualquer formato - planos, anéis, cilindros, etc. - com um mínimo de usinagem. Ao passo que monocristais demandam semanas de crescimento em autoclaves e um dispendioso processo de usinagem em sua fabricação [41].

A ciência e tecnologia de polímeros piezoelétricos vem sendo dominada pela família de polímeros ferroelétricos PVDF (*polyvinylidene fluoride*). Estes polímeros apresentam valores moderados de coeficiente piezoelétricos (d_{33} em torno de 20-30 pC/N) em comparação com as cerâmicas piezoelétricas (d_{33} em torno de 300-500 pC/N) e uma impedância acústica comparável com a água e outros líquidos. A estabilidade térmica do efeito piezoelétrico é limitada a temperaturas abaixo de 100 °C [42].

2.2.1.1 Processo de polarização de materiais piezoelétricos

Os materiais piezoelétricos policristalinos necessitam de um processo de polarização para que estes apresentem efeito piezoelétrico macroscópico significativo [42]. A estrutura cristalina de um material piezoelétrico policristalino é subdividida em grãos constituídos de células unitárias, sendo estes orientados de forma aleatória. As células unitárias consistem em íons positivos e negativos carregados, sendo a posição do centro de carga de cada célula em relação às outras uma característica importante para as propriedades eletromecânicas macroscópicas. O material é dito polarizável se uma carga externa como, por exemplo, um campo elétrico pode deslocar estes centros de carga [40].

Na Figura 2.1, tem-se a célula unitária de uma cerâmica piezoelétrica (titanato de bário) em duas temperaturas diferentes em relação a temperatura de Curie (T_c). O ponto de Curie (ou temperatura de Curie) é a temperatura na qual há uma mudança de fase no material.

Acima da T_c a estrutura do material piezoelétrico possui a forma centro-cúbica, conforme mostrado na Figura 2.1(a). Neste caso, os centros de cargas positivas e negativas coincidem e o material não exibe propriedades piezoelétricas. No entanto, abaixo de T_c a célula unitária se deforma para uma estrutura tetragonal, sendo os centros das cargas positivas e negativas são diferentes e a célula unitária possui uma polaridade, como apresentado na Figura 2.1(b)

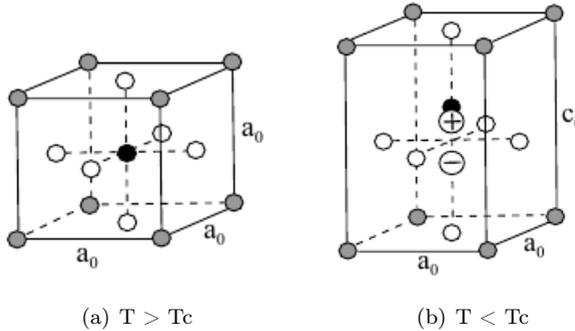


Figura 2.1 – Célula unitária do titanato de bário.

Como há aleatoriedade na orientação dos grãos na estrutura cristalina do material policristalino, os dipolos individuais também ficam orientados aleatoriamente ao se resfriar à temperaturas abaixo da T_c , conforme mostrado na Figura 2.2(a), sendo este estado chamado de estado termicamente despolarizado ou “virgem” [40]. Este estado pode ser modificado por uma carga elétrica ou mecânica com amplitude significativa. Na prática, um forte campo elétrico ($E \approx 2 \text{ kV} / \text{mm}$) é capaz de alterar as células unitárias de tal modo que os dipolos ficam predominantemente orientados para a direção do campo elétrico aplicado externamente, tal como apresentado na Figura 2.2(b). Ao desligar o campo elétrico externo a cerâmica vai apresentar uma polarização residual não nula na média macroscópica configurando-se o estado polarizado, conforme apresentado na Figura 2.2(c).

2.2.1.2 Operação do material piezoelétrico

Após a polarização, a compressão (mecânica) ao longo da direção de polarização, ou tração (mecânica) perpendicular a direção de polarização geram uma diferença de potencial (DDP) elétrica com a

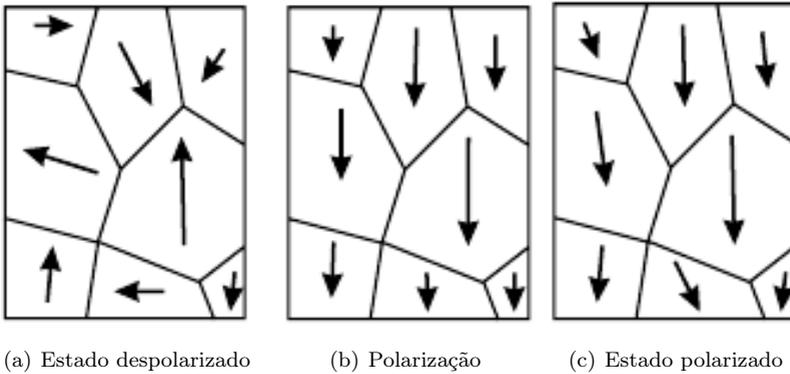


Figura 2.2 – Orientação dos dipolos na estrutura cristalina do material piezoelétrico.

mesma polaridade da DDP de polarização conforme a Figura 2.3(b). Com o esforço mecânico na direção oposta, a DDP gerada é oposta a de polarização conforme a Figura 2.3(c). Pelo efeito inverso, ao se aplicar uma DDP da mesma polaridade à DDP de polarização tem-se um alongamento (e diminuição da seção transversal) do elemento piezoelétrico conforme a Figura 2.3(d). Aplicando uma DDP de polaridade inversa a de polarização tem-se um encurtamento (e aumento da seção transversal) do elemento piezoelétrico conforme a Figura 2.3(e).

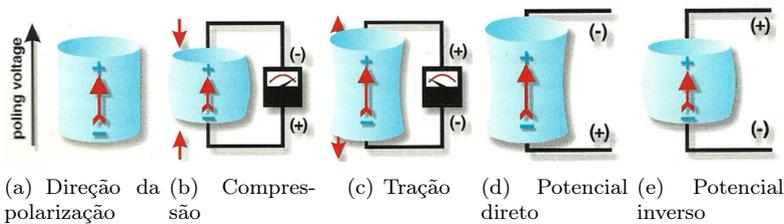


Figura 2.3 – Efeitos piezoelétricos direto e inverso [43].

2.2.2 Equações para análise harmônica

A resposta dinâmica de um corpo piezoelétrico de volume Ω e superfície de contorno $\partial\Omega$ é governada pela seguintes equações de

equilíbrio mecânico e eletrostático [45]. Considerando o sistema linear e comportamento harmônico tem-se

$$\omega^2 \rho \mathbf{u} + [\boldsymbol{\beta}]^T \boldsymbol{\sigma}_p + \mathbf{f}_b = 0, \quad (2.23a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} - q_b = 0, \quad (2.23b)$$

sendo q_b a carga elétrica sobre o corpo piezoelétrico e \mathbf{D} o vetor deslocamento elétrico.

A Equação (2.23a) é semelhante à equação para a análise estrutural, porém as componentes do tensor tensão $\boldsymbol{\sigma}_p$ são obtidas por equações constitutivas diferentes. As equações constitutivas para materiais piezoelétricos relacionam $\boldsymbol{\sigma}_p$ e \mathbf{D} com a deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e a intensidade do campo elétrico \mathbf{E} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= [\mathbf{c}]\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{e}]^T \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= [\mathbf{e}]\boldsymbol{\varepsilon} + [\boldsymbol{\epsilon}]\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

A intensidade do campo elétrico \mathbf{E} , em um equilíbrio eletrostático, se relaciona com o potencial escalar elétrico φ por [40]

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (2.25)$$

Finalmente, substituindo as relações contidas nas equações (2.25) e (2.6) nas equações constitutivas (2.24) e adicionando-as nas equações de equilíbrio (2.23), tem-se

$$\omega^2 \rho \mathbf{u} + [\boldsymbol{\beta}]^T ([\mathbf{c}][\boldsymbol{\beta}]\mathbf{u} + [\mathbf{e}]\nabla\varphi) + \mathbf{f}_b = 0, \quad (2.26a)$$

$$\nabla \cdot ([\mathbf{e}]^T [\boldsymbol{\beta}]\mathbf{u} - [\boldsymbol{\epsilon}]\nabla\varphi) - q_b = 0. \quad (2.26b)$$

Sobre as superfícies de contorno $\partial\Omega$ podem ser aplicadas as seguintes condições de contorno essenciais ou naturais, sendo \mathbf{n} o vetor unitário normal à superfície do contorno:

- Condições de contorno mecânicas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m \text{ (deslocamento prescrito)} \quad (2.27a)$$

ou

$$[\mathbf{n}]^T \boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{f}_m \text{ (força de superfície prescrita)}. \quad (2.27b)$$

- Condições de contorno elétricas:

$$\varphi = \varphi_e \text{ (potencial elétrico prescrito)} \quad (2.28a)$$

ou

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -q_e \text{ (carga elétrica de superfície prescrita)}, \quad (2.28b)$$

2.2.3 Equações constitutivas

A piezoeletricidade é um fenômeno acoplado, que envolve as variáveis elétricas de campo elétrico (\mathbf{E}) e deslocamento de carga (\mathbf{D}) e as variáveis mecânicas de tensão ($\boldsymbol{\sigma}_p$) e deformação ($\boldsymbol{\varepsilon}$). Uma característica importante em materiais piezoeletricos é a validade de relações lineares entre o campo elétrico aplicado e a tensão ou deformação mecânica produzida. Portanto, dadas as grandezas

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma}_p(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}), \quad (2.29)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}), \quad (2.30)$$

e expandindo em série de Taylor, utilizando-se apenas os primeiros termos (desprezando efeitos térmicos, magnéticos e termos não-lineares), obtém-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_E \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_p}{\partial \mathbf{E}} \right)_\varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_E \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{E}} \right)_\varepsilon \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nas equações (2.31) defini-se os tensores elasticidade ($[\mathbf{c}]$), de

constantes piezoelétricas ($[\mathbf{e}]_E$ e $[\mathbf{e}]_\varepsilon$) e dielétrico $[\epsilon]_\varepsilon$ como

$$[\mathbf{c}] = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_E, \quad (2.32)$$

$$[\mathbf{e}]_E = \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_E, \quad (2.33)$$

$$[\mathbf{e}]_\varepsilon = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_p}{\partial \mathbf{E}} \right)_\varepsilon, \quad (2.34)$$

$$[\epsilon]_\varepsilon = \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{E}} \right)_\varepsilon, \quad (2.35)$$

sendo que os subscritos E e ε significam sob campo elétrico constante e sob deformação constante, respectivamente.

Devido à reciprocidade entre os campos mecânico e elétrico, tem-se que

$$(-[\mathbf{e}]_\varepsilon)^T = [\mathbf{e}]_E = [\mathbf{e}]. \quad (2.36)$$

Logo, as equações (2.31) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_p &= [\mathbf{c}]\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{e}]^T \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= [\mathbf{e}]\boldsymbol{\varepsilon} + [\epsilon]_\varepsilon \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

As equações (2.37) são conhecidas como a forma tensão - fluxo elétrico ($\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D}$) das equações piezoelétricas [44]. Analisando cada equação constitutiva, pode-se verificar que a relação que apresenta a tensão mecânica $\boldsymbol{\sigma}_p$ é então composta de uma parcela puramente mecânica, representada pelo tensor de rigidez $[\mathbf{c}]$ e pela deformação mecânica $\boldsymbol{\varepsilon}$, e uma parcela acoplada, formada pela interação entre o tensor de coeficientes piezoelétricos $[\mathbf{e}]$ e pelo campo elétrico \mathbf{E} . A segunda equação constitutiva apresenta uma parcela puramente elétrica, expressa pela relação entre a matriz de permissividade ou dielétrica $[\epsilon]_\varepsilon$ e o campo elétrico \mathbf{E} , e uma parte acoplada composta pelo tensor de coeficientes piezoelétricos $[\mathbf{e}]$ e pela deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$. Caso as parcelas de acoplamento sejam retiradas das equações (2.37), obtém-se a lei de Hooke na primeira equação, e na segunda equação tem-se uma relação entre campo e deslocamento elétrico no interior de um capacitor [44].

Uma segunda, e muito utilizada, forma das equações constitutivas é a chamada deformação - deslocamento elétrico ($\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}$), represen-

tada por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= [\mathbf{s}]\boldsymbol{\sigma}_p + [\mathbf{d}]^T \mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= [\mathbf{d}]\boldsymbol{\sigma}_p + [\boldsymbol{\varepsilon}]_\sigma \mathbf{E},\end{aligned}\quad (2.38)$$

sendo $[\mathbf{s}]$ o tensor flexibilidade, $[\mathbf{d}]$ o tensor de coeficientes piezelétricos e $[\boldsymbol{\varepsilon}]_\sigma$ o tensor permissividade a tensão constante. A relação entre os tensores nas equações (2.37) e (2.38) são [40]

$$[\mathbf{s}] = [\mathbf{c}]^{-1}, \quad (2.39)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_\sigma = [\boldsymbol{\varepsilon}]_\varepsilon + [\mathbf{d}]^T [\mathbf{s}]^{-1} [\mathbf{d}], \quad (2.40)$$

$$[\mathbf{d}] = [\mathbf{s}][\mathbf{e}]. \quad (2.41)$$

As equações (2.37) e (2.38) são equações constitutivas para um elemento piezoelétrico, sendo que as matrizes de coeficientes são, a priori, densas. Porém, assumindo que o elemento piezoelétrico é polarizado em uma direção e considerando o material transversalmente isotrópico, muitos elementos das matrizes mencionadas serão nulos ou expressos em termos de outros parâmetros da matriz. Nestas condições, os tensores das equações (2.38) apresentam-se na seguinte forma matricial, considerando polarização do material na direção 3:

$$[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \times 10^{-12} \frac{m^2}{N}, \quad (2.42a)$$

$$[\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-12} \frac{C}{N}, \quad (2.42b)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_\sigma = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \times 8,854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}, \quad (2.42c)$$

sendo ϵ_{11} , ϵ_{22} e ϵ_{33} permissividades relativas.

2.2.4 Formulação fraca

A Equação (2.26) e as condições de contorno nas equações (2.27) e (2.28) estabelecem o problema na formulação forte, pois estas equações devem ser satisfeitas continuamente em todos os pontos do domínio Ω e contorno $\partial\Omega$. Pode-se estabelecer a formulação fraca deste problema através do MRP com aplicação da integração por partes e do teorema da divergência de Gauss, como demonstrado na Seção 2.1.3. A formulação fraca pode ser obtida conforme apresentado nos trabalhos de Wein [33] ou Kaltenbacher [40]. Considerando, por simplicidade, na Equação (2.26) que $\mathbf{f}_b = 0$ e $q_b = 0$ a formulação fraca é dada por

$$\int_{\Omega} \omega^2 \rho (\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega} ([\boldsymbol{\beta}]\mathbf{u}^*)^T ([\mathbf{c}][\boldsymbol{\beta}]\mathbf{u} + [\mathbf{e}]\nabla\varphi) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{f}_m \, d\partial\Omega = 0, \quad (2.43a)$$

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi^* \cdot ([\mathbf{e}]^T[\boldsymbol{\beta}]\mathbf{u} - [\boldsymbol{\epsilon}]\nabla\varphi) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \varphi^* q_e \, d\partial\Omega = 0, \quad (2.43b)$$

considerando as condições de contorno nas equações (2.27) e (2.28) em seus respectivos domínios.

2.3 MODELOS ACÚSTICOS LINEARES

Nesta seção serão apresentados os modelos acústicos utilizados neste trabalho. Estes modelos são originados por equações fundamentais que serão apresentadas a seguir.

2.3.1 Equações fundamentais dos modelos acústicos lineares

Os modelos acústicos são desenvolvidos a partir de equações conservativas onde os termos de viscosidade e condução térmica do fluido estão presentes. Assumindo que não há ação de forças de corpo no fluido, as equações conservativas em sua forma geral são dadas por [46]:

- Equação da conservação da quantidade de movimento para um fluido newtoniano cuja tensão de cisalhamento possui relação li-

near com a taxa de deformação (Equação de Navier-Stokes) [47]:

$$\varrho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} + \nabla P = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}), \quad (2.44)$$

sendo ϱ a densidade do fluido, \mathbf{V} o vetor velocidade do fluido, P a pressão total do fluido, λ o coeficiente de viscosidade de dilatação, μ o coeficiente de viscosidade de cisalhamento, $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ o operador derivada total, $\nabla \cdot (\cdot)$ o operador divergente e $\nabla \times (\cdot)$ o operador rotacional;

- Equação de conservação da energia com o fluxo de calor descrito pela lei de Fourier:

$$\varrho C_v \frac{DT}{Dt} + P\nabla \cdot \mathbf{V} = \Phi^{(visc)} + \kappa\Delta T, \quad (2.45)$$

sendo T a temperatura do fluido, C_v o calor específico a volume constante, $\Phi^{(visc)}$ a função dissipação viscosa de energia mecânica, κ a condutividade térmica do fluido e $\Delta(\cdot)$ o operador laplaciano;

- Equação de conservação da massa (Equação da Continuidade):

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2.46)$$

Para completar o sistema de equações necessita-se ainda de uma relação constitutiva para o fluido. Considerando fluido como um gás perfeito essa relação é dada por

$$P = R_0\varrho T, \quad (2.47)$$

onde R_0 é a constante do gás.

A função $\Phi^{(visc)}$ apresentada na Equação (2.45) é uma relação não-linear expressa por

$$\Phi^{(visc)} = 2\mu d_{ij}d_{ji} + \lambda d_{kk}d_{ii}, \quad (2.48)$$

sendo

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.49)$$

o tensor taxa de deformação.

Assumindo que as perturbações acústicas são suficientemente pequenas tal que os termos não-lineares não são importantes, as equações

(2.44) a (2.47) podem ser linearizadas inserindo as pequenas perturbações harmônicas descritas abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{0} + \mathbf{v} e^{i\omega t}, \\ P &= P_0 + p e^{i\omega t}, \\ \varrho &= \rho_0 + \rho e^{i\omega t}, \\ T &= T_0 + \tau e^{i\omega t}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

sendo \mathbf{v} o vetor de amplitude complexa da velocidade de partícula, p a amplitude complexa da pressão acústica, τ a amplitude complexa da temperatura acústica e ρ a amplitude complexa da densidade acústica.

Ao inserir as perturbações harmônicas (2.50) nas equações (2.44) a (2.47), tem-se o seguinte sistema de equações:

$$i\omega\rho_0\mathbf{v} + \nabla p = \nabla \cdot [\boldsymbol{\Phi}], \tag{2.51a}$$

$$i\omega\rho_0 C_v \tau + P_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta \tau, \tag{2.51b}$$

$$i\omega\rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2.51c}$$

$$p = R_0(\rho_0 \tau + \rho T_0), \tag{2.51d}$$

sendo $[\boldsymbol{\Phi}]$ o tensor tensão viscosa [29], dado por

$$[\boldsymbol{\Phi}] = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})[\mathbf{I}] + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \tag{2.52}$$

onde $[\mathbf{I}]$ é o tensor identidade.

2.3.2 Modelo acústico clássico

A partir das equações (2.51) pode-se obter o modelo acústico clássico considerando a hipótese simplificativa de fluido ideal ($\mu = \kappa = 0$). Inserindo esta hipótese simplificativa nas equações (2.51), tem-se:

$$i\omega\rho_0\mathbf{v} + \nabla p = 0, \tag{2.53a}$$

$$i\omega\rho_0 C_v \tau + P_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2.53b}$$

$$i\omega\rho + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2.53c}$$

$$p = R_0(\rho_0 \tau + \rho T_0). \tag{2.53d}$$

Ao isolar a variável densidade acústica, ρ , na Equação (2.53d), e

substituí-la na Equação (2.53c) rearranjando-se os termos, obtém-se

$$i\omega \left(\frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.54)$$

Isolando a variável τ na Equação (2.54) e substituindo na Equação (2.53b), obtém-se

$$i\omega p + \gamma P_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.55)$$

sendo γ a razão de calores específicos.

Aplicando o operador divergente, $\nabla \cdot ()$, na Equação (2.53a) e substituindo o termo $\nabla \cdot \mathbf{v}$ pela relação obtida na Equação (2.55), obtém-se

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = 0, \quad (2.56)$$

sendo c_0 a velocidade do som no meio acústico definida por

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}. \quad (2.57)$$

Os contornos da Equação (2.56) podem ser submetidos às condições de contorno essenciais e naturais, respectivamente:

$$p = p_a \text{ (pressão acústica prescrita)}, \quad (2.58a)$$

ou

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = g_a \text{ (gradiente de pressão prescrito)}, \quad (2.58b)$$

sendo \mathbf{n} o vetor normal ao contorno do domínio analisado.

Com o termo g_a pode-se prescrever valores de velocidade de partícula (\mathbf{v}_a) normais ao contorno da seguinte forma:

$$g_a = -i\omega\rho_0(\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}). \quad (2.59)$$

Outra condição de contorno muito comum em problemas acústicos é a condição de impedância normal. Esta condição é também aplicada pelo termo g_a da seguinte forma:

$$g_a = -i\omega\rho_0 \frac{p}{Z_n}. \quad (2.60)$$

sendo Z_n o valor da impedância normal ao contorno.

A Equação (2.56), também conhecida como Equação de Helmholtz, e suas condições de contorno estabelecem o problema na formulação forte como já disposto na Seção 2.1.3. A seguir será apresentada a formulação fraca para este problema.

2.3.2.1 Formulação fraca

A formulação pelo MEF para acústica clássica pode ser formulada tanto por métodos variacionais como pelo método de resíduos ponderados (MRP). Conforme descrito na Seção 2.1.3 a aplicação do MRP com auxílio da integração por partes e do teorema da divergência permitem obter a formulação fraca da equação diferencial (2.56) dada por

$$\int_{\Omega} -\nabla p^* \cdot \nabla p + \frac{\omega^2}{c_0^2} p^* p \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (p^* \nabla p) \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0, \quad (2.61)$$

juntamente com as condições de contorno apresentadas na Equação (2.58).

2.3.3 Modelo acústico viscotérmico

Na análise vibro-acústica de sistemas que envolvam pequenas cavidades ou filmes finos de fluido, como os encontrados em tubos capilares, painéis de paredes duplas, microfones e alto-falantes para aparelhos auditivos, é necessário considerar os efeitos de cisalhamento viscoso e difusão térmica na propagação acústica [22, 23, 25, 48–51]. Para considerar estes efeitos no modelo acústico a hipótese simplificativa de fluido ideal não pode ser aplicada. Neste sentido, considera-se o fluido newtoniano e retorna-se ao sistema de equações apresentado na Equação (2.51).

A Equação (2.51) apresenta como variáveis dependentes ρ , τ , \mathbf{v} e p , considerando ρ_0 , P_0 , T_0 , μ , λ , C_v e κ como parâmetros constantes no fluido. Pode-se reduzir o número de variáveis dependentes eliminando a variável ρ do sistema de equações pela simples substituição da Equação (2.51d) na Equação (2.51c) resultando no seguinte sistema de equações:

$$i\omega\rho_0\mathbf{v} + \nabla p = \nabla \cdot [\Phi], \quad (2.62a)$$

$$i\omega\rho_0 C_v \tau + P_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = \kappa \Delta \tau, \quad (2.62b)$$

$$i\omega \left(\frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.62c)$$

O sistema de equações (2.62) é chamado na literatura de modelo *Full Linear Navier-Stokes* (FLNS). As soluções analíticas do sistema de equações acima (2.62) são muito complexas, sendo possíveis apenas em casos específicos. Estas soluções são obtidas mediante simplificações, principalmente, sobre os campos de velocidade (\mathbf{v}) e pressão acústica (p). Consequentemente, as soluções analíticas são aplicáveis em geometrias e condições de contorno muito simples como as publicadas por Tjeldeman [22], Bruneau *et. al.* [52] e Hamery *et. al.* [53].

2.3.3.1 Formulação fraca

Para solução pelo MEF do modelo FLNS, as equações (2.62) são rearranjadas para se obter matrizes simétricas no modelo MEF [54]. Para isto, substitui-se o termo $\nabla \cdot \mathbf{v}$ da Equação (2.62b) pelo valor deste na Equação (2.62c) obtendo-se a seguinte formulação forte:

$$i\omega\rho_0\mathbf{v} + \nabla p = \nabla \cdot [\boldsymbol{\Phi}], \quad (2.63a)$$

$$i\omega\rho_0 C_p \tau - i\omega p = \kappa \Delta \tau, \quad (2.63b)$$

$$i\omega \left(\frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0} \right) + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.63c)$$

juntamente com as condições de contorno:

- Condições de contorno térmicas:

$$\tau = \tau_t \text{ (temperatura prescrita)} \quad (2.64a)$$

ou

$$\kappa \nabla \tau \cdot \mathbf{n} = h_t \text{ (fluxo de calor prescrito)}. \quad (2.64b)$$

- Condições de contorno mecânicas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_a \text{ (velocidade prescrita)} \quad (2.65a)$$

ou

$$(-p[\mathbf{I}] + [\boldsymbol{\Phi}])\mathbf{n} = \mathbf{f}_a \text{ (força de superfície prescrita)}. \quad (2.65b)$$

Através do MRP a formulação forte na Equação (2.63) é escrita na forma fraca, resultando no seguinte sistema de equações juntamente com as condições de contorno apresentadas acima:

$$\int_{\Omega} i\omega\rho_0(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}^*)p + (\nabla \mathbf{v}^* : [\Phi]) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{f}_a) \, d\partial\Omega = 0, \quad (2.66a)$$

$$\int_{\Omega} \tau^* i\omega\rho_0 C_p \tau - \tau^* i\omega p + \kappa(\nabla \tau^* \cdot \nabla \tau) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tau^* h_t \, d\partial\Omega = 0, \quad (2.66b)$$

$$\int_{\Omega} p^* i\omega \frac{p}{P_0} - p^* i\omega \frac{\tau}{T_0} + p^*(\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = 0, \quad (2.66c)$$

sendo \mathbf{v}^* , τ^* e p^* funções de ponderação aplicadas no MRP.

2.3.4 Modelos acústicos viscotérmicos simplificados

Em algumas aplicações, como em processos de otimização, o modelo FLNS é muito inconveniente, devido ao seu elevado custo computacional. Nestes casos, a utilização de modelos viscotérmicos simplificados pode ser interessante. Neste trabalho os modelos simplificados chamados de modelo LRF (*Low Reduced Frequency*) [22, 55] e SLNS (*Sequential Linear Navier-Stokes*) [54] serão utilizados. A seguir estes modelos serão apresentados.

2.3.4.1 Modelo LRF

Beltman, em suas publicações [23, 24, 55], apresenta uma revisão sobre alguns modelos simplificados para acústica com efeitos viscotérmicos e uma formulação numérica pelo MEF para o modelo chamado *Low Reduced Frequency* (LRF) originado pelos trabalhos de Zwikker e Kosten [56] e Iberall [57]. A proposta de Beltman permite aplicação de condições de contorno mais complexas como o acoplamento de estruturas vibrantes com cavidades acústicas. Porém, a proposta de Beltman possui precisão somente em geometrias simples, pois este modelo numé-

rico depende de parâmetros obtidos de soluções analíticas dos campos de velocidade e de temperatura acústica.

O modelo LRF possui uma abordagem que resulta em uma equação diferencial similar ao modelo acústico clássico. O processo de derivação deste modelo para algumas geometrias simples podem ser encontradas nas referências [22, 26, 55]. De forma geral, pode-se dizer que o modelo LRF é a equação diferencial da acústica clássica ponderada com funções analíticas que variam no domínio da frequência da seguinte forma:

$$B(s)\nabla^2 p - D'(s, Pr)k_0^2 p = 0, \quad (2.67)$$

onde

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}, \quad (2.68)$$

$$D'(s, Pr) = \gamma + (\gamma - 1)D(s, Pr), \quad (2.69)$$

$$s = l\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{\mu}}, \quad (2.70)$$

$$Pr = \frac{\mu Cp}{\kappa}, \quad (2.71)$$

sendo k_0 o número de onda acústico, s o número de onda de cisalhamento, Pr o número de Prandtl e l um comprimento característico que depende da geometria do sistema analisado.

As funções $B(s)$ e $D(s, Pr)$ representam os efeitos viscosos e térmicos, respectivamente. Estas funções são obtidas de forma analítica para geometrias simples como tubos e filmes de fluido, conforme mostrado por [22, 55].

Para geometrias de tubo, o comprimento característico l é o raio e as funções do modelo LRF são as seguintes [55]:

$$B(s) = \frac{J_2(i^{\frac{3}{2}}s)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}s)}, \quad (2.72a)$$

$$D(s, Pr) = \frac{J_2(i^{\frac{3}{2}}s\sqrt{Pr})}{J_0(i^{\frac{3}{2}}s\sqrt{Pr})}, \quad (2.72b)$$

sendo J_2 e J_0 funções de Bessel de ordem 2 e 0, respectivamente.

Para geometrias de filmes de fluido, o comprimento característico l é a metade da espessura do filme e as funções do modelo LRF são as

seguintes [55]:

$$B(s) = \frac{\tanh(s\sqrt{i})}{s\sqrt{i}} - 1, \quad (2.73a)$$

$$D(s, Pr) = \frac{\tanh(s\sqrt{iPr})}{s\sqrt{iPr}} - 1. \quad (2.73b)$$

As condições de contorno aplicadas na Equação (2.67) são similares à equação do modelo acústico clássico dadas por

$$p = p_a \text{ (pressão acústica prescrita),} \quad (2.74a)$$

ou

$$B(s)(\nabla p \cdot \mathbf{n}) = g_a \text{ (gradiente normal de pressão prescrito).} \quad (2.74b)$$

Embora as funções $B(s)$ e $D(s, Pr)$ sejam obtidas somente em sistemas simples, elas serão utilizadas neste trabalho em modelos aplicados para a otimização de transdutores.

2.3.4.1.1 Formulação fraca

Por sua grande semelhança com o modelo acústico clássico, a formulação fraca do modelo LRF também será quase idêntica a este, sendo aplicadas as funções $B(s)$ e $D(s, Pr)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -B(s)(\nabla p^* \cdot \nabla p) + D'(s, Pr) \frac{\omega^2}{c_0^2} p^* p \, d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega} B(s)(p^* \nabla p) \cdot \mathbf{n} \, d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

juntamente com as condições de contorno apresentadas na Equação (2.74).

2.3.4.2 Modelo SLNS

Na literatura pode-se encontrar modelos numéricos de propagação acústica com efeitos viscotérmicos simplificados, porém grande parte dos trabalhos se limitam a geometrias simples. Recentemente,

Kampinga [54] apresentou um modelo simplificado que permite aplicação em geometrias arbitrárias chamado de modelo SLNS (*Segregated Linear Navier-Stokes*). Este modelo foi concebido mediante uma série de simplificações onde eliminam-se termos de menor ordem de grandeza, resultando em um sistema de equações diferenciais escalares. Partindo das equações do modelo FLNS (2.62), o termo $\nabla \cdot [\Phi]$, na Equação (2.62a), pode ser escrito da seguinte forma:

$$\nabla \cdot [\Phi] = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu\Delta\mathbf{v}. \quad (2.76)$$

A partir da eliminação do primeiro termo à direita da equação acima (termo de menor ordem de grandeza), as equações (2.62) são reescritas e rearranjadas da seguinte forma:

$$\mathbf{v} + k_v^{-2}\Delta\mathbf{v} = \frac{-\nabla p}{i\omega\rho_0}, \quad (2.77a)$$

$$\tau + k_h^{-2}\Delta\tau = \frac{p}{\rho_0 C_p}, \quad (2.77b)$$

$$i\omega\left(\frac{p}{P_0} - \frac{\tau}{T_0}\right) + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.77c)$$

sendo

$$k_v = \sqrt{\frac{-i\omega\rho_0}{\mu}}, \quad (2.78)$$

$$k_h = \sqrt{\frac{-i\omega\rho_0 C_p}{\kappa}}. \quad (2.79)$$

As equações (2.77a) e (2.77b) são equações de Helmholtz não-homogêneas e as soluções para a velocidade de cisalhamento e temperatura são dadas por [54]

$$\mathbf{v} = \Psi_v \frac{-\nabla p}{i\omega\rho_0}, \quad (2.80)$$

$$\tau = \Psi_h \frac{p}{\rho_0 C_p}. \quad (2.81)$$

As soluções acima são substituídas nas equações (2.77) resultando em

$$(\Psi_v + k_v^{-2}\Delta\Psi_v)\nabla p + k_v^{-2}(2\nabla\Psi_v \cdot \nabla p + \Psi_v\Delta p) = \nabla p, \quad (2.82a)$$

$$(\Psi_h + k_h^{-2} \Delta \Psi_h)p + k_h^{-2} (2\nabla \Psi_h \cdot \nabla p + \Psi_h \Delta p) = p, \quad (2.82b)$$

$$\Psi'_h \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 p - \Psi_v \Delta p = 0. \quad (2.82c)$$

A partir da eliminação dos segundos termos (termos de menor ordem de grandeza [54]) das equações (2.82a) e (2.82b) tem-se as equações

$$\Psi_v + k_v^{-2} \Delta \Psi_v = 1, \quad (2.83a)$$

$$\Psi_h + k_h^{-2} \Delta \Psi_h = 1, \quad (2.83b)$$

$$\Psi'_h \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 p - \Psi_v \Delta p = 0. \quad (2.83c)$$

sendo

$$\Psi'_h = \gamma - (\gamma - 1)\Psi_h.$$

As equações (2.83a) e (2.83b) podem ser solucionadas de forma independente. As variáveis Ψ_v e Ψ_h são funções escalares que determinam uma “difusão” da velocidade de partícula e da temperatura acústica ao longo do domínio mediante as seguintes condições de contorno:

- Condições de contorno para a Equação (2.83a):

$$\Psi_v = 0 \text{ (condição de não-eskorregamento)} \quad (2.84a)$$

ou

$$\nabla \Psi_v \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (condição de eskorregamento)}. \quad (2.84b)$$

- Condições de contorno para a Equação (2.83b):

$$\Psi_h = 0 \text{ (superfície isotérmica)} \quad (2.85a)$$

ou

$$\nabla \Psi_h \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (superfície adiabática)}. \quad (2.85b)$$

Após obtidos os campos Ψ_v e Ψ_h estes são aplicados na Equação (2.83c) onde pode-se aplicar as seguintes condições de contorno:

$$p = p_a \text{ (pressão acústica prescrita)} \quad (2.86a)$$

ou

$$\Psi_v \nabla p \cdot \mathbf{n} = g_a \text{ (gradiente normal de pressão prescrito)}. \quad (2.86b)$$

Os campos de velocidade de partícula e de temperatura acústica podem ser obtidos após a solução da Equação (2.83c) com as equações (2.80) e (2.81), respectivamente.

A implementação numérica do modelo SLNS é relativamente simples porém, segundo Kampinga [54], há inconsistência quando aplica-se $\Psi_v = 0$ e $v_n \neq 0$ na mesma superfície de contorno. Esta inconsistência leva a um grande gradiente de pressão próximo ao contorno onde esta condição é aplicada [54]. Segundo Kampinga [54], os erros causados por esta inconsistência são pequenos.

Por ser uma proposta relativamente recente, a aplicabilidade do modelo SLNS ainda não foi completamente estudada. Neste trabalho, a aplicabilidade do modelo SLNS proposto por Kampinga [54] será avaliada para a análise de transdutores acústicos considerando o modelo FLNS como referência.

2.3.4.2.1 Formulação fraca

Aplicando o MRP e os procedimentos descritos na Seção 2.1.3, pode-se estabelecer as equações da formulação forte (2.83) na seguinte formulação fraca, conforme descrito por Kampinga [54]:

$$\int_{\Omega} -k_v^{-2} (\nabla \Psi_v^* \cdot \nabla \Psi_v) + \Psi_v^* \Psi_v - \Psi_v^* d\Omega = 0, \quad (2.87a)$$

$$\int_{\Omega} -k_h^{-2} (\nabla \Psi_h^* \cdot \nabla \Psi_h) + \Psi_h^* \Psi_h - \Psi_h^* d\Omega = 0, \quad (2.87b)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Psi_v (\nabla p^* \cdot \nabla p) + \Psi_h' \frac{\omega^2}{c_0^2} p^* p d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega} \Psi_v p^* g_a d\partial\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.87c)$$

considerando as condições de contorno nas equações (2.84), (2.85) e (2.86) nos seus respectivos contornos.

2.3.5 Acoplamentos acústico-estrutural

Os modelos estrutural e piezoelétrico se acoplam aos modelos acústicos clássico, LRF e SLNS da mesma forma. Na interface fluido-sólido, a continuidade requer que a componente normal da velocidade de superfície mecânica do sólido devem coincidir com a componente normal da velocidade acústica do fluido [40], conforme mostra a Figura 2.4.

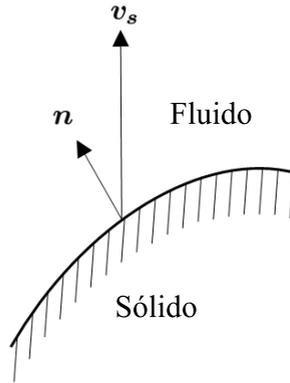


Figura 2.4 – Interface fluido-sólido.

Nos modelos acústicos clássico, LRF e SLNS o termo g_a define um gradiente de pressão como condição de contorno natural destes modelos. Em função deste termo, pode-se definir uma velocidade no modelo acústico em função da velocidade do sólido na interface fluido-sólido da seguinte forma:

$$g_a = -i\omega\rho_0(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}), \quad (2.88)$$

sendo \mathbf{v}_s a velocidade da estrutura. Além disso, tem de se considerar o fato de que o fluido provoca na superfície um esforço mecânico. Neste sentido, nos modelos estruturais e piezoelétricos, uma força normal à superfície é definida em função da pressão acústica, de modo que

$$\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n} = p. \quad (2.89)$$

Através da utilização dos termos de acoplamento nas equações (2.88) e (2.89), é possível obter uma matriz de acoplamento nos modelo

MEF de modo que o sistema acoplado pode então ser solucionado.

No modelo FLNS o acoplamento acústico-estrutural é feito de forma diferente. Como no modelo FLNS tem-se como variável dependente a velocidade, a continuidade na interface fluido-sólido é obtida fazendo-se

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_s = i\omega \mathbf{u}_s, \quad (2.90)$$

sendo \mathbf{v}_a o vetor de velocidade do fluido e \mathbf{u}_s o vetor deslocamento do sólido na interface fluido-sólido. É interessante observar que neste acoplamento tanto a velocidade normal quanto a velocidade tangencial à interface fluido-sólido estão acopladas, sendo este um fator que pode ser importante em determinados sistemas analisados.

2.4 DISCRETIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO FRACA PELO MEF

A partir da formulação fraca apresentada para cada modelo, pode-se utilizar métodos para aproximação da solução, como o método de Elementos Finitos (MEF). O MEF é uma técnica muito versátil pois permite fácil aplicação em sistemas com geometrias complexas e acoplamentos entre múltiplos sistemas físicos.

Para aplicação do MEF, primeiramente, é feita a discretização do domínio onde é aplicada a formulação fraca, conforme exemplificado na Figura 2.5. Nesta figura, o domínio Ω é discretizado com uma malha de n subdomínios Ω_e . Em cada subdomínio Ω_e , também chamado de elemento, são introduzidas aproximações para as variáveis dependentes da formulação fraca.

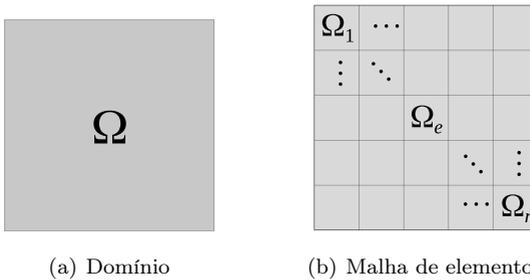


Figura 2.5 – Discretização do domínio da formulação fraca.

Considerando um elemento e uma variável dependente u , o MEF assume uma aproximação de u no interior do elemento por um combi-

nação linear dada por

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^k N(\boldsymbol{\xi})_i U_i = \mathbf{N}^T \mathbf{U}, \quad (2.91)$$

sendo \mathbf{N} o vetor de funções de aproximação, \mathbf{U} o vetor de coeficientes da aproximação, k o número de termos da aproximação linear e $\boldsymbol{\xi}$ o vetor de coordenadas espaciais do elemento.

As funções de aproximação adotadas no MEF são geralmente polinomiais pois proporcionam, automaticamente, valores únicos e contínuos para a variável dependente [39]. No MEF as funções de aproximação polinomiais são construídas de tal forma que os coeficientes U_i correspondam a valores da variável dependente $u(\boldsymbol{\xi})$ em determinadas posições do elemento.

Neste trabalho, foram utilizados polinômios de Lagrange como funções de aproximação nos elementos. Como exemplo, considerando um elemento de geometria quadrangular com o sistema de coordenadas local mostrado na Figura 2.6, pode-se construir uma aproximação linear para $u(\xi_1, \xi_2)$ com polinômios lineares de Lagrange da seguinte forma:

$$u(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{N}^T \mathbf{U}, \quad (2.92)$$

sendo

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \xi_1(1 - \xi_2) \\ (1 - \xi_1)\xi_2 \\ \xi_1\xi_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u(0, 0) \\ u(0, 1) \\ u(1, 0) \\ u(1, 1) \end{Bmatrix}. \quad (2.93)$$

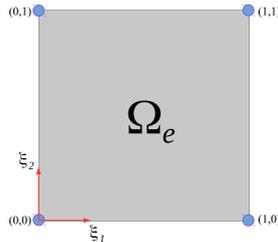


Figura 2.6 – Sistema de coordenadas local para um elemento finito quadrangular.

As componentes de vetor \mathbf{U} são as incógnitas ou graus de liber-

dade (GL) do elemento que correspondem a valores de $u(\xi_1, \xi_2)$ nos vértices do elemento, também chamados de nós. As componentes do vetor \mathbf{N} são também chamadas de funções de forma. Para aplicação de funções de forma quadráticas é necessário incluir mais graus de liberdade no elemento ou seja, valores $u(\xi_1, \xi_2)$ em outras posições nodais. Na Tabela 2.1 estão apresentados o número de graus de liberdade e posições nodais dos mesmos em algumas geometrias de elemento com funções de forma quadráticas e lineares.

Tabela 2.1 – Graus de liberdade de elementos com funções de forma de Lagrange quadráticas e lineares.

Funções de forma quadráticas	Geometria do Elemento	Funções de forma lineares
3 GL 	Linha	 2 GL
6 GL 	Triangular	 3 GL
9 GL 	Quadrilateral	 4 GL
10 GL 	Tetraédrica	 4 GL
18 GL 	Prismática	 6 GL
27 GL 	Hexaédrica	 8 GL

Com a utilização da discretização do domínio e a aplicação de funções de aproximação conforme a abordagem descrita acima, pode-se discretizar a formulação fraca. Considerando, por simplicidade, a formulação fraca do modelo acústico clássico dada pela Equação (2.61), a variável dependente p é aproximada pela combinação linear

$$p = \mathbf{N}^T \mathbf{P}^e, \quad (2.94)$$

sendo \mathbf{P}^e o vetor da pressão acústica em determinados nós do elemento.

Seguindo o método de Galerkin, as funções de ponderação são

iguais às funções de aproximação. Portanto, com a substituição da variável dependente p pela Equação (2.94) e das funções de ponderação p^* pelas funções de aproximação N_i na formulação fraca (2.61), obtém-se a seguinte equação na forma matricial:

$$-\omega^2[\mathbf{M}^e]\mathbf{P}^e + [\mathbf{K}^e]\mathbf{P}^e = \mathbf{H}^e, \quad (2.95)$$

sendo:

$$[\mathbf{K}^e] = \int_{\Omega_e} [\nabla \mathbf{N}] [\nabla \mathbf{N}]^T d\Omega_e, \quad (2.96)$$

$$[\mathbf{M}^e] = \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}(\mathbf{N})^T d\Omega_e, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{H}^e = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N} g_a d\partial\Omega_e, \quad (2.98)$$

onde Ω_e é o interior do domínio do elemento, $\partial\Omega_e$ é o contorno do elemento e $[\nabla \mathbf{N}]$ é a matriz dos gradientes das funções de aproximação. As matrizes $[\mathbf{K}^e]$ e $[\mathbf{M}^e]$ são denominadas matriz de rigidez acústica e matriz de inércia acústica, respectivamente. \mathbf{H}^e é o vetor de carregamento devido às condições de contorno naturais.

A matriz $[\nabla \mathbf{N}]$ depende do sistema de coordenadas do problema. Como exemplo, para um sistema de coordenadas cartesiano ortogonal tridimensional, a matriz $[\nabla \mathbf{N}]$ é dada por

$$[\nabla \mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_q}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N_q}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N_q}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

sendo ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 as direções do sistema de coordenadas.

Após obtidas as matrizes elementares, tem-se o processo de montagem (*assembly process*). Este processo constrói as matrizes globais do sistema através da conexão das matrizes de elementos adjacentes que possuem pontos nodais em comum. Com as matrizes globais obtém-se a equação do problema acústico clássico na forma discreta. Como exemplo, considerando uma cavidade acústica fechada com paredes rígidas ($g_a = 0$), tem-se

$$-\omega^2[\mathbf{M}^a]\mathbf{P} + [\mathbf{K}^a]\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (2.100)$$

sendo \mathbf{P} , $[\mathbf{M}^a]$ e $[\mathbf{K}^a]$ respectivamente: o vetor de pressões nodais, a matriz de inércia global e a matriz de rigidez global acústicas.

Na Tabela 2.2, tem-se a ordem das funções de forma de Lagrange aplicadas nos modelos MEF acústicos, estrutural e piezoelétrico desenvolvidos neste trabalho. Como apresentado na Tabela 2.1, a aplicação de funções de forma quadráticas aumenta a quantidade de graus de liberdade do elemento. Porém, nos modelos acústicos viscotérmicos FLNS e SLNS as funções de forma quadráticas são recomendadas para representar convenientemente as camadas limite viscosa e térmica. Além disso, as funções de forma quadráticas nas variáveis \mathbf{v} e τ e lineares na variável p têm função de evitar efeitos de travamento (*locking*) no modelo FLNS, conforme é discutido no trabalho de Kampinga [54]. Nos modelos estrutural e piezoelétrico as funções de forma quadráticas foram arbitrariamente escolhidas para reduzir o efeito de travamento de cisalhamento (*shear locking effect*) [40] que ocorre em estruturas com paredes finas como os sistemas analisados neste trabalho.

Tabela 2.2 – Funções de forma de Lagrange aplicadas nos modelos MEF acústicos, estrutural e piezoelétrico.

Modelo	Variável dependente	Funções de forma
Clássico	p	Lineares
FLNS	\mathbf{v}	Quadráticas
	τ	
SLNS	p	Lineares
	Ψ_v	Quadráticas
	Ψ_h	
LRF	p	Lineares
	p	Lineares
Piezoelétrico	\mathbf{u}	Quadráticas
	φ	
Estrutural	\mathbf{u}	Quadráticas

2.5 MODELOS POR PARÂMETROS CONCENTRADOS

Diante do objetivo de reduzir o custo computacional do modelo multi-físico, a utilização de modelos por parâmetros concentrados podem auxiliar em algumas circunstâncias. Estes modelos simplificam a descrição do comportamento de sistemas físicos espacialmente distri-

buídos para um sistema de entidades discretas que aproximam o comportamento do sistema distribuído sob determinadas condições. Estes modelos são bastante utilizados para representação de sistemas elétricos, dinâmica de sistemas multicorpos, sistemas acústicos, etc.

Neste trabalho, será utilizada a abordagem do Método de Matrizes de Transferência (MMT) [58] para a construção de modelos por parâmetros concentrados. Como apresentado nas referências [58, 59], pode-se representar sistemas mecânicos e acústicos através de uma matriz que transforma os parâmetros de entrada nos parâmetros de saída do sistema. Como exemplo, pode-se representar o modelo acústico de um tubo apresentado na Figura 2.7. Nesta figura, os parâmetros p_1 e p_2 representam a pressão acústica na entrada e na saída e os parâmetros U_1 e U_2 representam a velocidade de volume (velocidade de partícula acústica vezes a área) na entrada e na saída, respectivamente. O MMT estabelece uma relação entre estes parâmetros através da seguinte matriz:

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ U_1 \end{Bmatrix}. \quad (2.101)$$



Figura 2.7 – Modelo acústico de um tubo por matriz de transferência.

Obtendo-se as matrizes de transferência de cada subsistema de um transdutor, é possível avaliar a performance de todo o sistema através da multiplicação das matrizes de cada subsistema conforme apresentado na Figura 2.8. Pode-se notar que através da multiplicação das matrizes transferência da Figura 2.8(c), obtém-se uma matriz que representa todo o sistema do transdutor na Figura 2.8(d). Desta forma, tem-se o sistema caracterizado e, com posse dos valores de entrada (tensão e corrente elétrica), pode-se obter os valores de saída (pressão e velocidade de volume) gerados pelo transdutor.

Os valores dos coeficientes das matrizes de transferência podem ser obtidos de soluções analíticas, modelos numéricos ou até mesmo de métodos experimentais como apresentado em [3, 59].

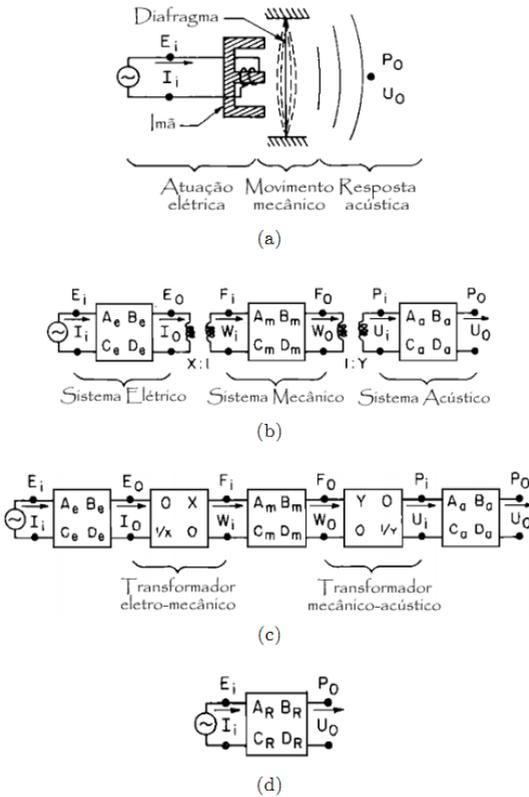


Figura 2.8 – (a) Diagrama esquemático de um transdutor eletro-mecano-acústico; (b) Matrizes de transferência dos subsistemas vinculadas por elementos do tipo transformador; (c) Aplicação de matrizes para os elementos do tipo transformador; (d) Matriz de transferência do transdutor [59].

2.6 INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO

A otimização busca responder à pergunta: “O que é melhor?” para problemas em que a qualidade da resposta pode ser medida por um valor numérico. Estes problemas aparecem em praticamente todas as áreas do conhecimento: negócios, ciências físicas, químicas e biológicas, engenharia, arquitetura, economia e administração. A quantidade de ferramentas disponíveis para auxiliar nesta tarefa é tão grande quanto o número de aplicações.

Nos problemas de otimização em engenharia normalmente busca-se obter o uma configuração de projeto com melhor desempenho. Este desempenho é avaliado através de uma função custo (ou de desempenho) definida a partir de um conjunto de variáveis que descrevem o sistema, denominadas variáveis de projeto. As técnicas de otimização buscam determinar os extremos desta função (máximo ou mínimo, dependendo do problema) dentro de uma região de projeto denominada região viável ou factível. Esta região reúne os pontos de projeto que atendem às restrições do problema, frequentemente classificadas em restrições de igualdade ou desigualdade.

Considerando as variáveis de projeto pode-se classificar os tipos de otimização como [60]:

- **Otimização paramétrica:**

Neste tipo de otimização, as variáveis de projeto são definidas por parâmetros do material (módulo de Young, coeficiente de Poisson do material, densidade, etc.) e/ou geométricos (altura, espessura, largura, momento de inércia, etc.), permanecendo a região ou domínio geométrico, onde são definidas as equações do problema, inalterada.

- **Otimização de forma:**

Na otimização de forma, o domínio onde são definidas as equações do problema é modificado através de alterações em sua forma, ou seja, na fronteira do domínio. O tratamento deste tipo de variável de projeto (forma) possui algumas particularidades, principalmente no que diz respeito ao cálculo de derivadas das funções de desempenho, que podem ser obtidas utilizando-se alguns conceitos básicos da Mecânica do Contínuo, tais como derivada material de campos espaciais e o Teorema do Transporte de Reynolds.

No caso de estruturas discretas (tipicamente estruturas treliçadas ou pórticos) busca-se a solução ótima através da modificação das

coordenadas nodais. Já em estruturas contínuas (placas, cascas, sólidos, etc.), a forma é usualmente definida e modificada através de variáveis de controle geométrico tais como pontos de controle de B.Splines, raios, tangentes, etc.

- **Otimização topológica:**

Na otimização topológica busca-se a solução ótima através da variação do domínio (topologia) da estrutura, e não somente da fronteira do mesmo. Isto corresponde, em estruturas discretas, a determinar, por exemplo, o número total de barras, suas respectivas conectividades e suas propriedades geométricas. Em se tratando de estruturas contínuas, busca-se determinar a existência ou não de material no domínio, seus respectivos formatos e a conectividade entre os domínios.

Os métodos de otimização topológica, no que diz respeito a estruturas contínuas, são normalmente classificados em dois grupos:

- Aproximação por microestrutura (Material): O processo de otimização topológica é baseado no estabelecimento de uma relação entre a rigidez e a densidade associada ao domínio, que pode assumir qualquer valor entre 0 (vazio) e 1 (material sólido), sendo os valores intermediários correspondentes a um material poroso. A partir daí os algoritmos baseados em microestruturas propõem encontrar a melhor disposição do material, de maneira a minimizar ou maximizar a função custo. Como exemplo pode-se citar o Material Intermediário Artificial ou SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) [61];
- Aproximação por macroestrutura (Geométrica): Neste caso a topologia da estrutura é modificada através da inserção de furos no domínio. Entre os métodos existentes pode-se citar: métodos baseados na inserção de furos em sistemas contínuos tais como o *Bubble Method* [62], e métodos baseados na inserção de furos em sistemas discretizados como o ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) [63].

2.6.1 Métodos numéricos de otimização

Existe uma grande quantidade de métodos e classificações para algoritmos aplicados em otimização. De uma forma geral, os algoritmi-

mos de otimização podem ser classificados em métodos de programação matemática e métodos probabilísticos.

2.6.1.1 Métodos de programação matemática

Os métodos de programação matemática são métodos baseados no cálculo e podem ainda ser classificados em:

- Métodos de programação linear: que se destina a solução de problemas de otimização lineares, ou seja, problemas em que a função objetivo e as restrições são funções lineares em relação às variáveis de projeto. Como exemplo de método de programação linear tem-se o método Simplex [64];
- Métodos de programação não-linear: métodos de solução de problemas em que a função objetivo e restrições não são lineares em relação às variáveis de projeto. Dentro desta classificação tem-se uma grande quantidade de métodos para problemas sem restrição como os métodos de Cauchy (*Steepest Descent*), de Newton, de Powell, Quasi-Newton, DFP (Davidon-Fletcher-Powell), BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) e outros. Para problemas com restrições tem-se os métodos de penalidades (exterior ou interior), Lagrangeano aumentado, SLP (*Sequential Linear Programming*), SQP (*Sequential Quadratic Programming*) e outros [65].

Os métodos de programação matemática são métodos determinísticos, ou seja, é possível prever toda a sequência de operações a partir do ponto de partida. Em outras palavras, um método determinístico sempre leva à mesma resposta se partir do mesmo ponto inicial.

2.6.1.2 Métodos probabilísticos

Os métodos probabilísticos, também chamados de métodos heurísticos, se utilizam de um processo de busca randômica guiados por decisões probabilísticas para a minimização da função objetivo. Por serem métodos aleatórios, estes não executarão a mesma sequência de operações em duas execuções sucessivas. Ou seja, partindo de um mesmo ponto inicial, cada execução do algoritmo seguirá diferentes caminhos, e, possivelmente, levará a uma resposta final diferente. Entre os métodos probabilísticos tem-se: algoritmos genéticos, “recozimento simu-

lado” (*Simulated Annealing*), “enxame de partículas” (*Particle swarm*) e outros [65].

2.6.2 Métodos de otimização aplicados neste trabalho

Devido às características do problema físico e dos parâmetros que se deseja otimizar, os métodos numéricos de otimização aplicados aos transdutores neste trabalho foram o método heurístico chamado Algoritmo Genético (GA) e o método determinístico chamado Nelder-Mead (Simplex). Estes métodos foram utilizados em conjunto para a otimização dos transdutores. A seguir será apresentado uma descrição breve destes métodos.

2.6.2.1 Método de otimização por algoritmos genéticos

Algoritmos genéticos são métodos computacionais de busca baseados nos mecanismos de evolução natural e na genética. O Algoritmo Genético pertence a uma das classes dos chamados algoritmos evolucionários. O seu objetivo é explorar o espaço de busca na determinação de melhores soluções, permitindo os indivíduos da população evoluírem a cada geração. Denomina-se população ou geração um conjunto de indivíduos caracterizados por um vetor de variáveis de projeto (\mathbf{X}_j). A população ou geração pode ser escrita na forma de uma matriz $[\mathbf{P}]$ dada por

$$[\mathbf{P}]_{p \times n} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_p \end{bmatrix}_{p \times n}, \quad (2.102)$$

sendo p o número de indivíduos da população e n o número de variáveis de projeto.

Partindo de uma população inicial, fornecida ou criada aleatoriamente, o algoritmo promove a evolução utilizando as operações de seleção, cruzamento e mutação. O funcionamento do algoritmo pode ser visualizado no fluxograma da Figura 2.9. De acordo com este fluxograma, após a definição do problema de otimização (função objetivo, restrições e variáveis de projeto), aplica-se os parâmetros do Algoritmo Genético. Os parâmetros básicos de configuração do Algoritmo Genético são:

- Número de indivíduos da população;
- Número de indivíduos selecionados na etapa de Seleção;
- Percentual de mutação aplicada a cada nova geração de indivíduos;
- Parâmetro de convergência.

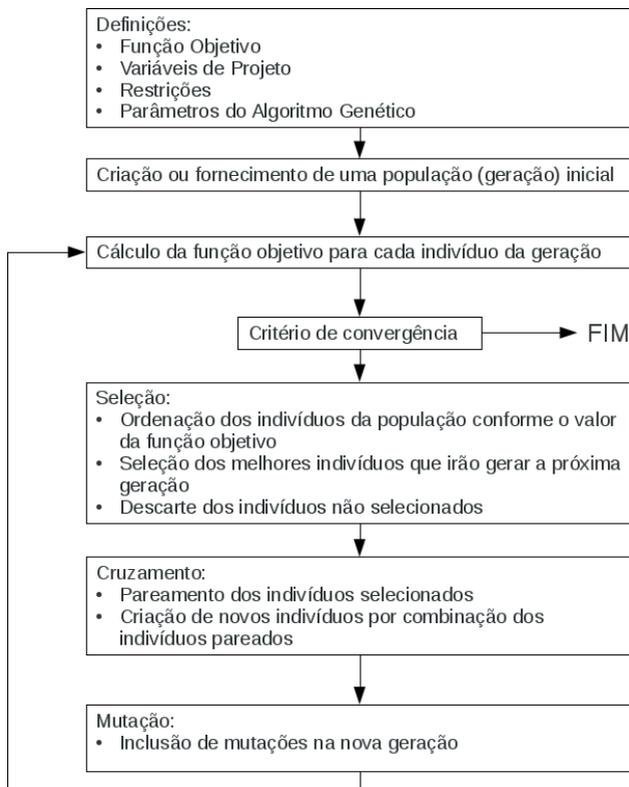


Figura 2.9 – Fluxograma de funcionamento do Algoritmo Genético contínuo.

O Algoritmo Genético pode ser codificado na forma binária ou contínua. A forma binária converte as variáveis de projeto em um número binário que é chamado de cromossomo, fazendo uma analogia com a genética. Porém quando as variáveis são contínuas (números de ponto flutuante) e o número de variáveis é grande, o Algoritmo Genético binário precisa manipular grandes cadeias de cromossomos. Neste caso,

é conveniente a utilização do Algoritmo Genético na forma contínua que mantém as variáveis como números de ponto flutuante [66].

2.6.2.2 Método Nelder-Mead

Nelder e Mead [67] desenvolveram este método, o qual não necessita calcular gradientes da função objetivo e restrições. Este método é baseado no simplex e por vezes é chamado de *Nelder-Mead Downhill Simplex Method*. Um simplex é a mais elementar figura geométrica que pode ser formada um espaço de dimensão N . No caso de um espaço bidimensional ($N = 2$), um simplex seria um triângulo [66].

A ideia básica deste método é comparar os valores da função objetivo nos $N + 1$ vértices do simplex e movê-lo gradualmente em direção ao ponto ótimo através de um processo iterativo. O movimento do simplex é alcançado utilizando três operações conhecidas como reflexão, contração e expansão [65].

Como exemplo de um problema de otimização bidimensional ($N = 2$), gera-se um simplex partindo de um ponto inicial (\mathbf{P}_0) fornecido pelo usuário. Os demais N vértices são dados por

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_0 + c_s \mathbf{e}_n \quad \text{para } n = 1, \dots, N, \quad (2.103)$$

sendo \mathbf{e}_n o vetor unitário ao longo da coordenada de projeto n . Os passos para alcançar um mínimo local dentro de um simplex são os seguintes [66]:

1. Criação simplex inicial (um triângulo neste caso). Os vértices A , B e C da Figura 2.10 iniciam o algoritmo;
2. Reflexão: um novo ponto, D , é obtido por reflexão do ponto de menor valor (A) através do ponto médio da linha que conecta B e C . Conforme a Figura 2.10, D é obtido por

$$D = B + C - A. \quad (2.104)$$

3. Expansão: se a função objetivo em D é menor do que em A , então o movimento foi na direção certa. Neste caso, outro passo é feito na mesma direção obtendo-se o vértice E dado por

$$E = \frac{3(B + C)}{2 - 2A}. \quad (2.105)$$

4. Contração: se o ponto D tem o mesmo valor de função objetivo do ponto A , então dois novos pontos são obtidos por

$$\begin{aligned} F &= \frac{2A + B + C}{4}, \\ G &= \frac{3(B + C)}{2 - 2A}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

O ponto de menor valor da função objetivo é mantido, contraindo assim o simplex, como mostra a Figura 2.10.

5. Contração: se as funções objetivos de F e G não possuem menor valor do que em A , então deve-se contrair o simplex movendo-se o lado \overline{AC} na direção de B . Os novos vértices são dados por

$$\begin{aligned} H &= \frac{A + B}{2}, \\ I &= \frac{B + C}{2}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

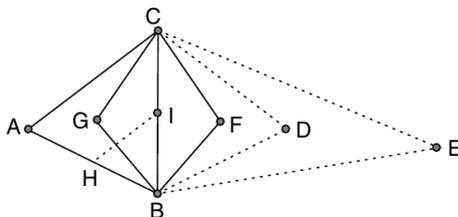


Figura 2.10 – Manipulações de um simplex básico, bidimensional, para minimização [65].

Cada iteração gera um vértice para o simplex. Se este novo ponto possui função objetivo melhor do que algum dos vértices atuais, este substitui o pior vértice. O objetivo deste método é mover o simplex até a região próxima do valor mínimo. Nesta região o simplex irá se contrair até o diâmetro deste atingir uma tolerância que é especificada pelo usuário.

3 VALIDAÇÃO DE MODELOS MULTI-FÍSICOS

Com o intuito de avaliar a precisão dos modelos numéricos descritos no Capítulo 2 na análise de transdutores piezoelétricos, foi feita uma validação experimental dos modelos desenvolvidos no código comercial Comsol Multiphysics [28].

Primeiramente, será validado um modelo para análise vibratória de diafragmas piezoelétricos que são sistemas onde tem-se um material piezoelétrico aderido a um metal. Em seguida, serão validados modelos de protótipos de alto-falantes piezoelétricos desenvolvidos utilizando os mesmos diafragmas acoplados a cavidades acústicas de tamanhos diferentes. Os diferentes tamanhos de cavidade têm o intuito de avaliar os diferentes modelos acústicos descritos no Capítulo 2. Por último, um dos protótipos de alto-falante piezoelétrico foi configurado como microfone sendo este sistema modelado numericamente para uma validação experimental utilizando os resultados experimentais apresentados por Pereira [4].

3.1 MODELO NUMÉRICO DE DIAFRAGMAS PIEZOELÉTRICOS

Para validação destes modelos numéricos, foram testados dois modelos comerciais diferentes de diafragma piezoelétrico do fabricante Murata [68]. Os diafragmas são sistemas simples constituídos de um disco de material piezoelétrico (PZT) aderido a um disco de metal (latão), conforme mostrado na Figura 3.1(a). Acima do PZT tem-se uma fina camada metálica que tem a função de eletrodo para distribuir uniformemente o potencial elétrico aplicado ao PZT através dos terminais elétricos.

A geometria dos diafragmas testados está apresentada na Figura 3.1(b) e as dimensões nominais de cada modelo estão mostradas na Tabela 3.1.

A seguir serão apresentados os procedimentos executados para a análise experimental destes diafragmas piezoelétricos.

3.1.1 Análise experimental

Para as análises experimentais foram utilizados os seguintes equipamentos:

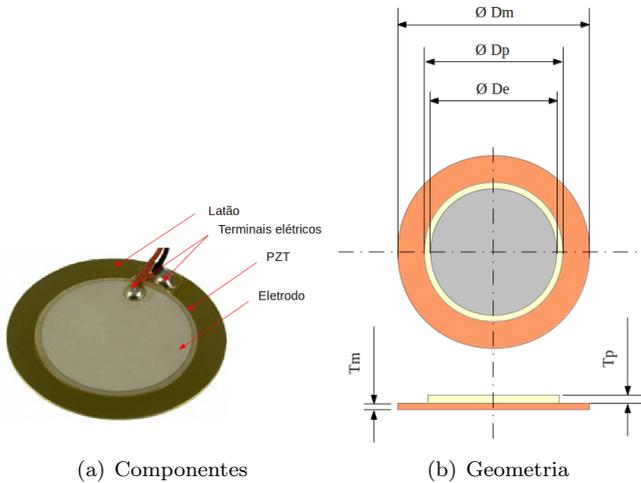


Figura 3.1 – Diafragmas piezoelétricos analisados.

Tabela 3.1 – Dimensões (em milímetros) dos diafragmas piezoelétricos analisados.

Componente	Disco Latão		Disco PZT - 5A		Eletrodo
Dimensão	Dm	Tm	Dp	Tp	De
Diafragma A	20	0,20	14	0,22	12,8
Diafragma B	15	0,10	10	0,12	9

- Vibrômetro laser (Fabricante: Ometron, Modelo: VH-1000-D) ;
- Hardware e software de análise digital de sinais (Fabricante: Bruel & Kjaer, Modelo: Pulse Labshop 10.1);
- Laptop para processamento dos dados (Fabricante: Toshiba, Modelo: Satellite A355-S6925).

Os diafragmas foram colocados sobre uma espuma para simular uma condição livre deste sistema, conforme mostrado na Figura 3.2. Nesta figura, tem-se também a configuração dos equipamentos utilizados nos experimentos.

Com o aparato mostrado na Figura 3.2 foram medidas funções resposta em frequência (FRF) de cada amostra de diafragma piezo-

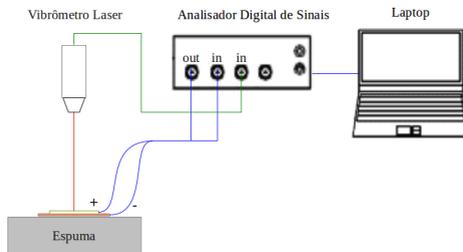


Figura 3.2 – Configuração experimental para medição dos diafragmas na condição livre.

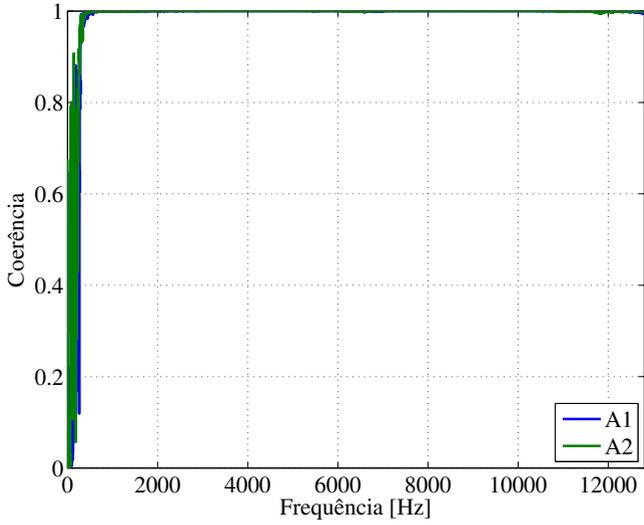
létrico. A FRF é uma relação entre dois sinais medidos que permite caracterizar comportamentos dinâmicos de um sistema.

Para esta análise, foram obtidas as FRF do sinal de velocidade no centro do diafragma medido pelo vibrômetro em relação ao sinal de tensão elétrica aplicado ao diafragma, conforme apresentado na configuração experimental (ver Figura 3.2). A tensão elétrica aplicada ao diafragma nas análises foi um sinal de ruído branco de banda larga gerado pelo analisador digital de sinais. O ruído branco de banda larga é um sinal aleatório que possui a mesma energia em toda as bandas de frequência analisadas.

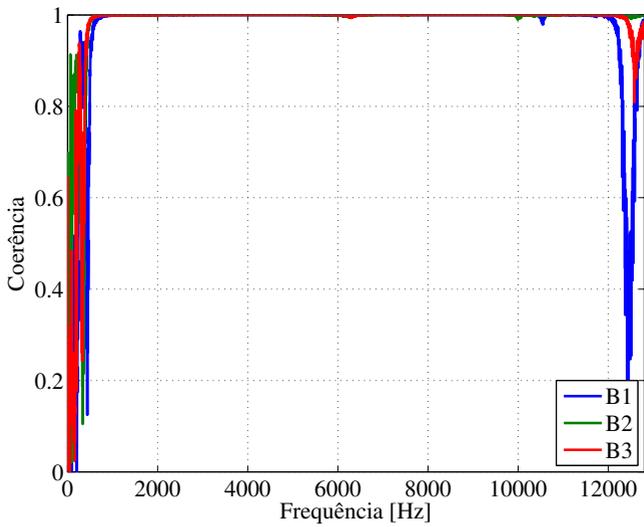
A qualidade das FRFs são monitoradas pela função coerência. Esta função avalia a correlação entre os sinais medidos na FRF apresentando valores entre 0 (zero) e 1 (um). Os valores da função coerência próximos a 1 (um) representam que os sinais medidos possuem boa correlação resultando em uma boa qualidade da medição.

Foram avaliadas duas amostras do diafragma A e três amostras do diafragma B que estavam disponíveis no momento. As FRFs e de função coerência foram medidas em espectros de frequência de 0 a 12800 Hz com discretização de 2 Hz.

Na Figura 3.3 estão apresentadas as funções coerência entre os sinais medidos no experimento executado com cada amostra de diafragma. De forma geral, os sinais medidos apresentaram boa correlação, com valores de coerência próximos a 1 em grande parte do espectro somente tendo valores baixos desta nas frequências abaixo de 1000 Hz e acima de 12000 Hz, como pode-se verificar na Figura 3.3(b). As FRFs medidas serão apresentadas na Seção 3.1.4 juntamente com os resultado obtidos nos modelos numéricos.



(a) Diafragma A



(b) Diafragma B

Figura 3.3 – Função coerência entre a sinais medidos na avaliação dos diafragmas.

3.1.2 Configuração do modelo MEF

O modelo MEF do diafragma piezoelétrico foi construído utilizando uma malha de elementos finitos tridimensionais (prismáticos), conforme a Figura 3.4.

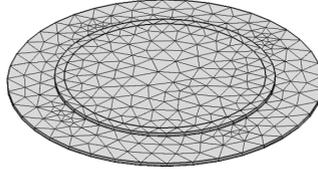


Figura 3.4 – Malha 3D do modelo MEF.

Na Figura 3.5 estão apresentados os domínios e superfícies de contorno onde foram aplicados os modelos MEF. Na camada de PZT

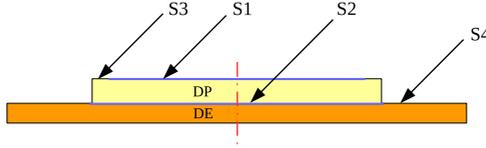


Figura 3.5 – Domínios e superfícies de contorno do diafragma modelado pelo MEF.

(domínio DP) foi aplicado o MEF na formulação fraca dada pela Equação (2.22a) e na camada do latão (domínio DE) foi aplicado MEF na formulação fraca dada pela Equação (2.43). As condições de contorno aplicadas nestas equações foram:

$$\varphi_e = 1V \quad \text{em } S1, \quad (3.1a)$$

$$\varphi_e = 0 \quad \text{em } S2, \quad (3.1b)$$

$$q_e = 0 \quad \text{em } S3, \quad (3.1c)$$

$$\mathbf{f}_m = 0 \quad \text{em } S1 \cup S3 \cup S4, \quad (3.1d)$$

As condições de contorno aplicadas nas equações acima simulam o diafragma piezoelétrico na condição livre, sendo excitado por uma diferença de potencial elétrica unitária sobre os eletrodos do PZT (superfícies S1 e S2), sendo os comportamentos elétrico e mecânico dos eletrodos não considerados no modelo.

3.1.3 Propriedades dos materiais utilizados nos modelos numéricos

O fabricante dos diafragmas [68] não disponibiliza a informação de composição do latão utilizado nos diafragmas. Portanto, foram utilizadas as propriedades mecânicas médias do latão nos modelos numéricos. A partir dos resultados obtidos pelos modelos numéricos, as propriedades mecânicas do latão foram levemente ajustadas. Nestes modelos o amortecimento estrutural também foi considerado incluindo-se uma parte imaginária no tensor elasticidade $[\mathbf{c}]$ com um fator de perda η tal que

$$[\tilde{\mathbf{c}}] = [\mathbf{c}](1 + i\eta). \quad (3.2)$$

O fator de perda η aplicado nos modelos foi obtido a partir dos dados experimentais calculando-se a banda de meia potência na primeira frequência natural do sistema. As propriedades mecânicas (ajustadas) do latão estão apresentadas no Apêndice A.

O fabricante também não informa o tipo de PZT utilizando na fabricação dos diafragmas. Neste caso, foram utilizadas técnicas experimentais disponíveis na literatura [69–71] para aproximação dos coeficientes piezoelétricos do diafragma. Com a análise dos resultados numéricos e experimentais concluiu-se que o material piezoelétrico se constitui de PZT-5A. As propriedades do PZT-5A utilizadas nos modelos numéricos estão apresentadas no Apêndice A.

3.1.4 Análise dos resultados

A velocidade no centro dos diafragmas foi calculada pelo modelo pelo MEF e os resultados foram comparados com os dados experimentais, conforme apresentado nas figuras 3.6 e 3.7. Nestas figuras, o modelo pelo MEF mostrou boa concordância com os dados medidos.

As principais diferenças observadas entre o modelo e os dados experimentais são decorrentes dos modos não-radiais que não são excitados no modelo pelo MEF que é idealmente simétrico. Nos diafragmas piezoelétricos testados, a presença dos eletrodos e dos fios, bem como incertezas geométricas e de material são responsáveis pela quebra da simetria do sistema e a excitação de modos não-radiais. Isto pode ser visto na Figura 3.6 na frequência em torno de 12kHz e na Figura 3.7 em torno de 10 kHz. Pode-se observar que as diferenças apresentadas entre o modelo numérico e os dados experimentais estão dentro da

variabilidade observada entre as amostras medidas.

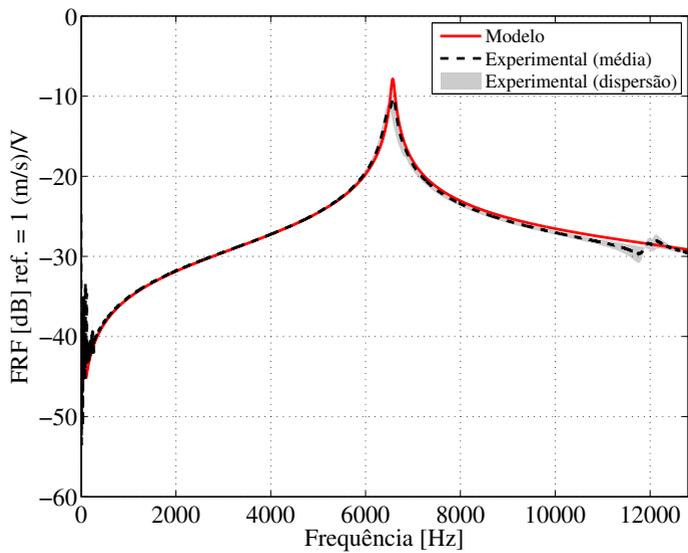


Figura 3.6 – Magnitude da FRF do diafragma A na condição livre.

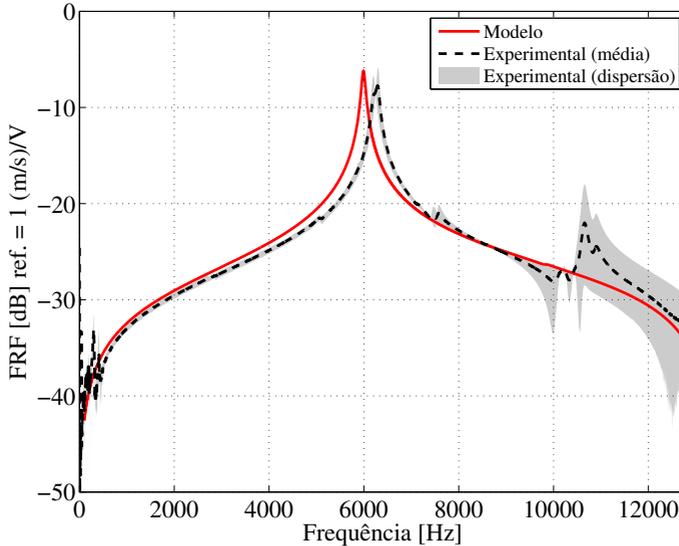


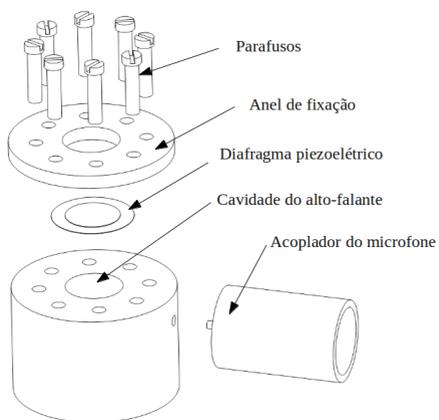
Figura 3.7 – Magnitude da FRF do diafragma B na condição livre.

3.2 MODELO NUMÉRICO DE ALTO-FALANTES PIEZOELÉTRICOS

Utilizando os diafragmas validados na seção anterior, foram construídos protótipos de alto-falantes conforme mostrado na Figura 3.8. Duas configurações de protótipo foram construídas utilizando diferentes tamanhos de diafragma e de cavidades internas. As dimensões das cavidades internas para cada configuração de protótipo estão mostradas na Figura 3.9. Foram construídos o Protótipo A (com o diafragma A) e o Protótipo B (com o diafragma B).

Para análise dos protótipos foi utilizado um acoplador de microfone para captar a pressão sonora gerada pelo protótipo. Este acoplador possui 2 cm^3 de volume interno para simular o efeito do canal auditivo em testes com alto-falantes comerciais de aparelhos auditivos. A montagem do acoplador ao microfone e aos protótipos de alto-falante está demonstrada na Figura 3.10.

O acoplador será também modelado para comparação dos resultados numéricos com os dados experimentais. O acoplador foi modelado acusticamente utilizando as dimensões internas que estão mostradas na Figura 3.11.



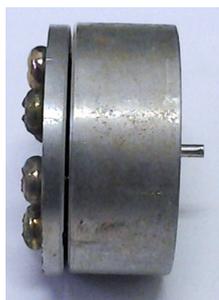
(a) Componentes



(b) Protótipo A



(c) Protótipo B (vista superior)



(d) Protótipo B (vista lateral)

Figura 3.8 – Protótipos de alto-falante piezoelétrico.

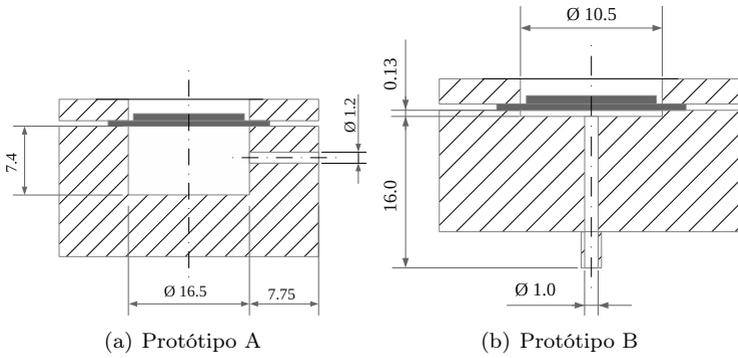


Figura 3.9 – Dimensões (em milímetros) das cavidades internas dos protótipos construídos.



Figura 3.10 – Montagem do acoplador ao microfone e ao protótipo.

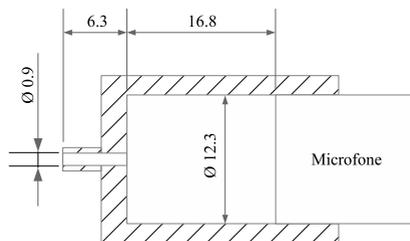


Figura 3.11 – Dimensões (em mm) das cavidades internas do acoplador para o microfone.

A seguir será apresentada a análise experimental dos protótipos de alto-falantes construídos.

3.2.1 Análise experimental

Para analisar os protótipos construídos foram utilizados os seguintes equipamentos:

- Microfone e pré-amplificador de 1/2" (Fabricante: G.R.A.S., Modelo: 46AD);
- Hardware e software de análise digital de sinais (Fabricante: Bruel & Kjaer, Modelo: Pulse Labshop 10.1);
- Laptop para processamento dos dados (Fabricante: Toshiba, Modelo: Satellite A355-S6925).

A configuração do experimento com os equipamentos listados acima pode ser visualizada na Figura 3.12.

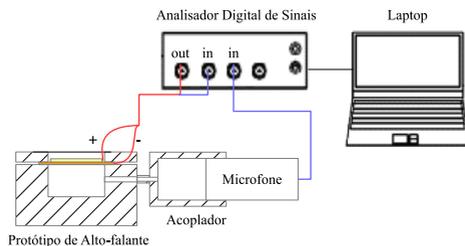


Figura 3.12 – Configuração experimental para medição dos protótipos de alto-falante piezoelétrico.

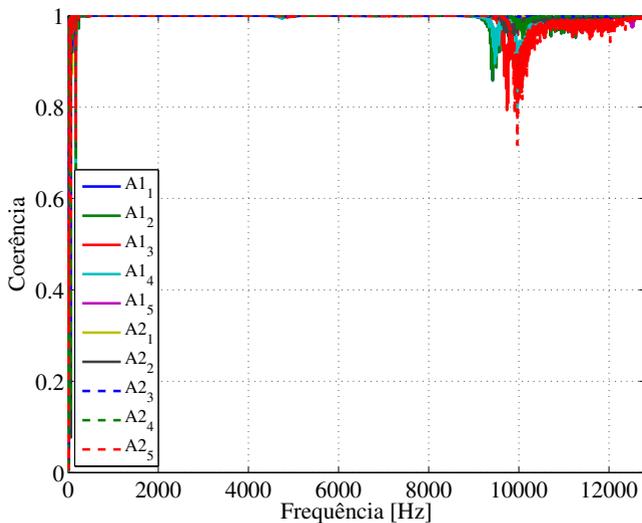
Com o aparato experimental apresentado na Figura 3.12 foram medidas funções de resposta em frequência dos protótipos de alto-falantes piezoelétricos. Para esta análise, foram obtidas FRF do sinal de pressão acústica medida pelo microfone em relação ao sinal de tensão elétrica aplicado ao diafragma. A tensão elétrica aplicada ao diafragma nas análises foi um sinal de ruído branco de banda larga gerado pelo analisador digital de sinais. A qualidade das FRFs foram monitoradas pela função coerência. As FRFs foram medidas em espectros de frequência de 0 a 12800 Hz com discretização de 2 Hz.

3.2.1.1 Análise da repetibilidade das montagens dos protótipos

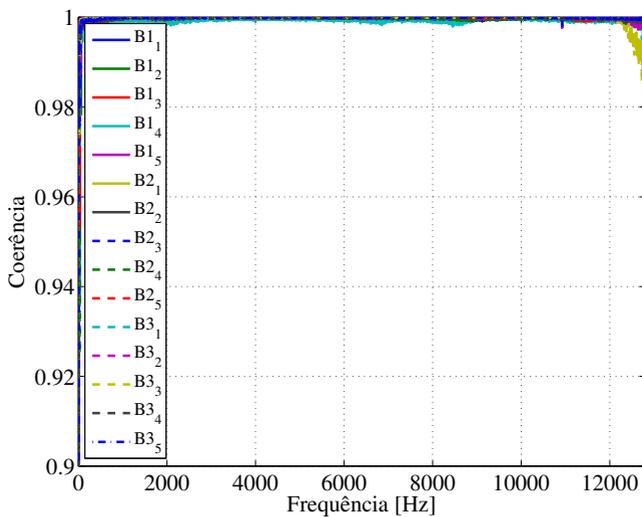
Os protótipos de alto-falantes piezoelétricos são montados, manualmente, conforme mostrado na Figura 3.8 e na Figura 3.9. Nos dados experimentais, foram constatadas variações nas FRFs após desmontagem e montagem dos protótipos. Este fato se deve a pequenas alterações que ocorrem entre uma montagem e outra, as quais são dificilmente controladas em uma montagem manual. Neste sentido, foi feita uma análise da repetibilidade para verificar a dispersão das FRFs devido às montagens. Esta análise consistiu em fazer cinco montagens, medições de FRF e desmontagens sucessivas para cada combinação das amostras de cavidade e de diafragma. Os resultados serão apresentados junto à comparação com os modelos numéricos na Seção 3.2.3.

Na Figura 3.13 estão apresentadas as funções coerência entre os sinais medidos de cada experimento executado com cada protótipo. Na análise do protótipo A, foi obtido valores mais baixos da função coerência em frequências abaixo de 200 Hz e em uma pequena região em torno de 10000 Hz, como pode-se verificar na Figura 3.13(a). Os valores baixos de coerência nas frequências abaixo de 200 Hz podem ser consequência do ruído da rede elétrica que, mesmo com aterramento, contaminam os sinais obtidos pelo sistema de medição. A baixa coerência em torno de 10000 Hz não foi investigada mas pode se justificar por uma característica do sistema, como a presença de uma antirressonância. No protótipo B, foram obtidos excelentes valores de coerência, com valores muito próximos a 1 em quase todo o espectro, como mostrado na Figura 3.13(b). De forma geral, os sinais medidos apresentaram boa correlação, com valores de coerência próximos a 1 em grande parte do espectro. Neste sentido, os sinais medidos para a avaliação dos protótipos A e B foram considerados satisfatórios para a análise experimental.

Com a FRF descrita acima obtém-se, diretamente, o espectro do nível de pressão sonora (NPS) para um espectro unitário de tensão elétrica aplicado ao diafragma. Para melhor interpretação física dos resultados obtidos, optou-se pela apresentação dos resultados experimentais através do espectro de NPS.



(a) Protótipo A



(b) Protótipo B

Figura 3.13 – Função coerência dos sinais medidos na avaliação dos protótipos.

3.2.2 Configuração do modelo multi-físico

Para modelar o comportamento eletro-vibro-acústico dos componentes mostrados na Figura 3.8, os modelos estruturais, piezoelétricos e acústicos foram considerados. O diafragma piezoelétrico e a cavidade do alto-falante foram modelados utilizando modelos numéricos pelo MEF com acoplamento entre as físicas envolvidas. O acoplador de microfone e a sua ligação com a cavidade acústica do alto-falante foram considerados como tubos acústicos e foram modelados por parâmetros concentrados utilizando um modelo por matrizes de transferência (MMT) para acoplar ao modelo pelo MEF. Uma visão geral da configuração do modelo multi-físico pode ser visualizada na Figura 3.14.

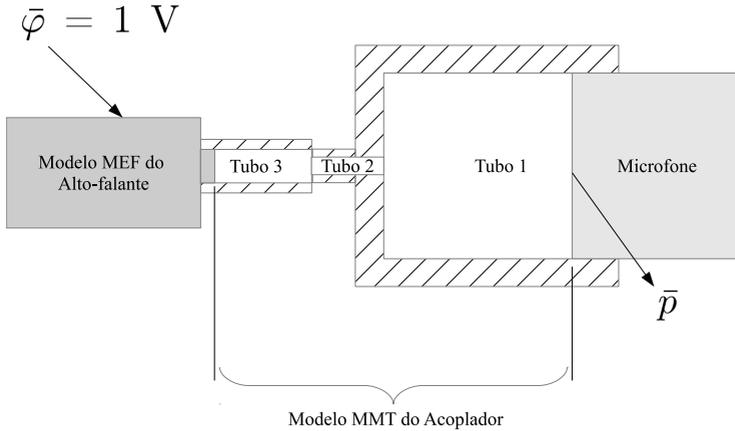


Figura 3.14 – Configuração do modelo multi-físico do alto-falante piezoelétrico.

Para comparação com o experimento, os modelos MEF e MMT serão acoplados para se obter o NPS referente a uma tensão elétrica unitária aplicada sobre o eletrodo no material piezoelétrico. O acoplamento destes modelos será feito através da obtenção da matriz de transferência do sistema modelado pelo MEF ($[\mathbf{M}_F]$), que será inserida no seguinte sistema de equações matricial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{p} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}_c][\mathbf{M}_F] \begin{Bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{j} \end{Bmatrix}, \quad (3.3)$$

sendo $[\mathbf{M}_c]$ a matriz de transferência do acoplador; \bar{p} e \bar{v} a pressão acústica e a velocidade de volume obtidas na superfície do microfone, respectivamente; e $\bar{\varphi}$ e \bar{j} a tensão e a corrente elétrica na superfície dos eletrodos do alto-falante, respectivamente.

As matrizes da Equação (3.3) são dependentes da frequência e os vetores são incógnitas. Portanto, com posse destas matrizes e o conhecimento de duas condições de contorno, pode-se obter a solução desta equação. A seguir será apresentado o modelo MMT para representar os sistemas acústicos que acoplam o microfone ao modelo MEF de alto-falante.

3.2.2.1 Modelo de tubos acústicos pelo MMT

O acoplador de microfone e a sua ligação com a cavidade acústica do alto-falante foram modelados como três tubos acústicos acoplados como mostra a Figura 3.14. A matriz de transferência de cada tubo pode ser obtida a partir de soluções analíticas onde são consideradas ondas planas ao longo do tubo resultando em [58]

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} \cos(kL) & -\frac{Z}{iS} \operatorname{sen}(kL) \\ \frac{iS}{Z} \operatorname{sen}(kL) & \cos(kL) \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

sendo L o comprimento do tubo, S a área da superfície da seção transversal do tubo, k o número de onda e Z a impedância característica.

Os tubos da Figura 3.14 possuem pequenos diâmetros sendo necessário considerar os efeitos viscotérmicos. Este efeitos foram considerados incluindo os parâmetros $D'(s, Pr)$ e $B(s)$ do modelo LRF no numero de onda e na impedância característica da seguinte forma [72]:

$$k = \frac{k_0}{i} \sqrt{\frac{D'(s, Pr)}{B(s)}}, \quad (3.5)$$

$$Z = \frac{\rho_0 c_0}{i} \frac{1}{\sqrt{D'(s, Pr)B(s)}}, \quad (3.6)$$

sendo os parâmetros calculados pelas equações (2.72a) e (2.72b) considerando o raio de cada tubo, conforme apresentado na Seção 2.3.4.1.

Com posse da matriz $[\mathbf{M}]$ pode-se obter a resposta em uma extremidade do tubo conhecendo-se duas condições de contorno e resolvendo

o sistema linear

$$\begin{Bmatrix} \bar{p}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{Bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{v}_1 \end{Bmatrix}, \quad (3.7)$$

sendo \bar{p}_1 e \bar{p}_2 as pressões acústicas, \bar{v}_1 e \bar{v}_2 as velocidades de volume em cada extremidade do tubo.

Utilizando a matriz de transferência $[\mathbf{M}_i]$ de cada tubo apresentado na Figura 3.14, pode-se obter a matriz $[\mathbf{M}_c]$ que representa estes tubos acoplados, dada por

$$[\mathbf{M}_c] = [\mathbf{M}_1][\mathbf{M}_2][\mathbf{M}_3], \quad (3.8)$$

sendo $[\mathbf{M}_1]$, $[\mathbf{M}_2]$ e $[\mathbf{M}_3]$ as matrizes correspondentes aos tubos 1, 2 e 3, respectivamente.

3.2.2.2 Modelo dos protótipos pelo MEF

Os protótipos de alto-falante foram modelados considerando somente as cavidades acústicas internas acopladas aos diafragmas modelados na seção anterior, conforme mostrado na Figura 3.15. Os diafragmas foram modelados da mesma forma que na Seção 3.1, porém foram aplicadas condições de engaste ($\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$) e de acoplamento acústico-estrutural nas superfícies S4 e S5, respectivamente, mostradas na Figura 3.15.

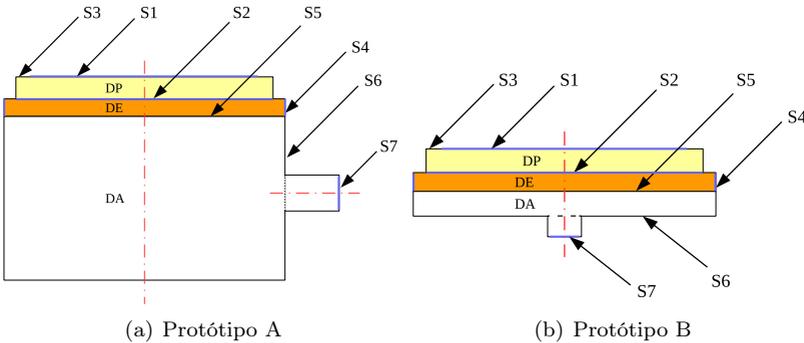


Figura 3.15 – Domínios e superfícies de contorno dos protótipos modelados pelo MEF.

Cada protótipo foi modelado utilizando diferentes modelos acústicos nas cavidades. No protótipo A, uma vez que a cavidade tem

uma maior espessura, foi aplicado o modelo acústico clássico (Equação (2.61)). O protótipo B possui uma cavidade de espessura muito fina sendo que os efeitos viscotérmicos tornam-se mais significativos na propagação acústica. Neste caso, foi então utilizado o modelo FLNS (Equação (2.66)) para inclusão dos efeitos viscotérmicos. As paredes internas, denotadas pelas superfícies S6 na Figura 3.15, foram consideradas rígidas (e isotérmicas no modelo viscotérmico), sendo em cada modelo acústico aplicada pelos termos listados abaixo:

- Modelo acústico clássico (protótipo A)

$$g_a = 0. \quad (3.9)$$

- Modelo FLNS (protótipo B)

$$\mathbf{v}_a = 0, \quad (3.10)$$

$$\tau_t = 0. \quad (3.11)$$

As condições de contorno nas superfícies S7 da Figura 3.15 serão apresentadas na próxima seção junto ao procedimento para determinação da matriz de transferência dos modelos MEF.

Para solução pelo MEF do protótipo A, foi construído uma malha tridimensional com elementos prismáticos no diafragma piezoelétrico e elementos tetraédricos na cavidade acústica, como se pode ver na Figura 3.16.

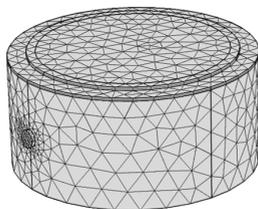


Figura 3.16 – Malha do modelo pelo MEF construído para o protótipo A.

Como o modelo FLNS possui um custo computacional muito elevado, foi então construído um modelo bidimensional com simetria axial para o protótipo B. Na Figura 3.17 pode-se visualizar a malha de elementos finitos quadriláteros construída para análise do protótipo B.

As propriedades dos materiais do diafragma piezoelétrico incluídas nos modelos estrutural e piezoelétrico e as propriedades do fluido

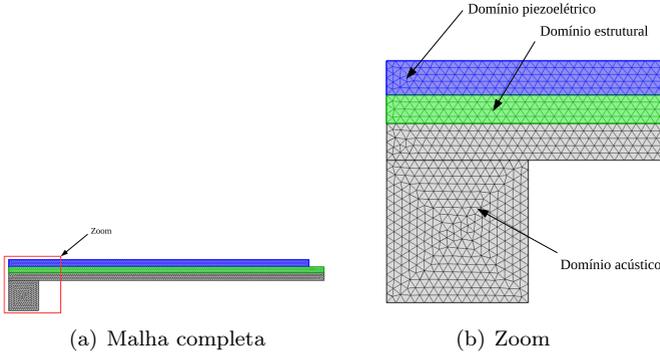


Figura 3.17 – Malha do modelo pelo MEF construído para o protótipo B.

acústico (ar) utilizadas nos modelos acústicos estão apresentadas no Apêndice A.

3.2.2.3 Acoplamento dos modelos MEF e MMT

Como já aqui mencionado, a resposta total do sistema mostrado na Figura 3.14 será obtida mediante a obtenção da matriz de transferência do modelo MEF. A matriz de transferência de cada protótipo deve representar o sistema a partir dos parâmetros de entrada e saída, como os mostrados na Figura 3.18, onde a matriz de transferência $[\mathbf{M}_F]$ estabelece a seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \bar{p} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}_F] \begin{Bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{j} \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

sendo \bar{p} e \bar{v} valores médios de pressão acústica e de velocidade de volume na superfície S7; e $\bar{\varphi}$ e \bar{j} valores médios de potencial elétrico e de corrente elétrica na superfície S1 dos modelos MEF apresentados na Figura 3.15.

Convenientemente, a matriz $[\mathbf{M}_F]$ pode ser obtida a partir de sua inversa que estabelece o seguinte sistema de equações na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{j} \end{Bmatrix} = [\mathbf{M}_F]^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{p} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{11}\bar{p} + M_{12}\bar{v} \\ M_{21}\bar{p} + M_{22}\bar{v} \end{Bmatrix}. \quad (3.13)$$

Para determinar os quatro coeficientes para a matriz $[\mathbf{M}_F]^{-1}$, soluciona-se o modelo MEF em dois passos conforme listado abaixo:

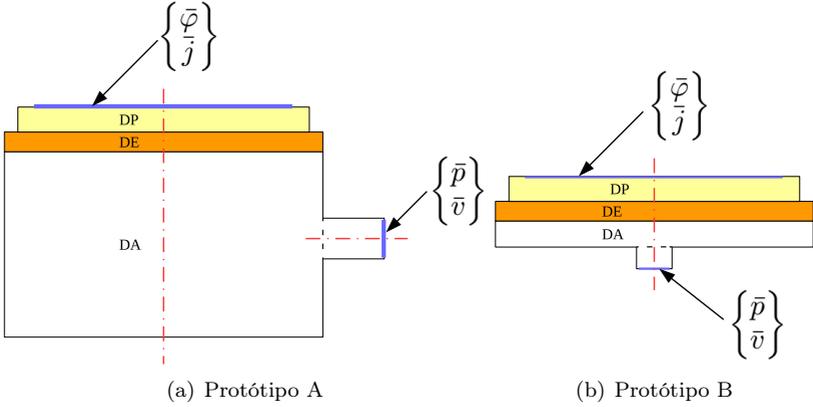


Figura 3.18 – Parâmetros de entrada e saída da matriz de transferência obtida através do modelo MEF.

- Aplica-se $\bar{v} = 0$, que corresponde a $g_a = 0$ no modelo acústico clássico e $\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n} = 0$ no modelo FLNS, para obter os coeficientes:

$$M_{11} = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{p}},$$

$$M_{21} = \frac{\bar{j}}{\bar{p}}.$$

- Aplica-se $\bar{p} = 0$, que corresponde a $p_a = 0$ no modelo acústico clássico e $\mathbf{f}_a \cdot \mathbf{n} = p_a = 0$ no modelo FLNS, para obter os coeficientes:

$$M_{12} = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{v}},$$

$$M_{22} = \frac{\bar{j}}{\bar{v}}.$$

3.2.3 Análise dos resultados

Antes da validação experimental, os modelos multi-físicos utilizando parâmetros concentrados foram validados utilizando modelos MEF representando o sistema completo, conforme mostrado na Figura 3.19.

Na Figura 3.20 estão apresentados os resultados calculados pelo

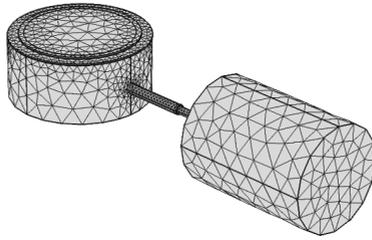


Figura 3.19 – Malha para solução do protótipo A com modelo MEF completo.

modelo MEF do sistema completo e com a utilização de parâmetros concentrados para o Protótipo A. Nesta figura pode-se notar que a abordagem utilizando parâmetros foi capaz de representar com muita precisão o sistema completo, apresentando apenas uma pequena variação em torno de 10 kHz. Esta variação é um fator esperado pois em altas frequências a distribuição da pressão acústica é mais sensível aos contornos do problema causando erros na obtenção de parâmetros concentrados do modelo MEF.

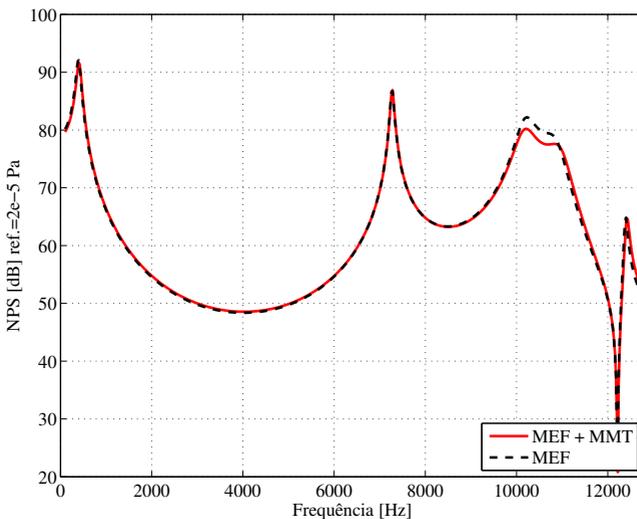


Figura 3.20 – Comparação do NPS ($\bar{\varphi} = 1$ V) obtidos pelo modelo MEF completo e pela abordagem por parâmetros concentrados para o protótipo A.

Na Figura 3.21 estão apresentados os resultados calculados pelo modelo MEF do sistema completo e com a utilização de parâmetros concentrados para o protótipo B. Nesta figura pode-se notar que a abordagem utilizando parâmetros foi capaz de representar com boa precisão o sistema completo, apresentando apenas pequenas variações em torno das ressonâncias e abaixo de 1000 Hz. Estas variações não foram completamente esclarecidas mas, diante dos resultados satisfatórios, o modelo por parâmetros concentrados foi considerado validado.

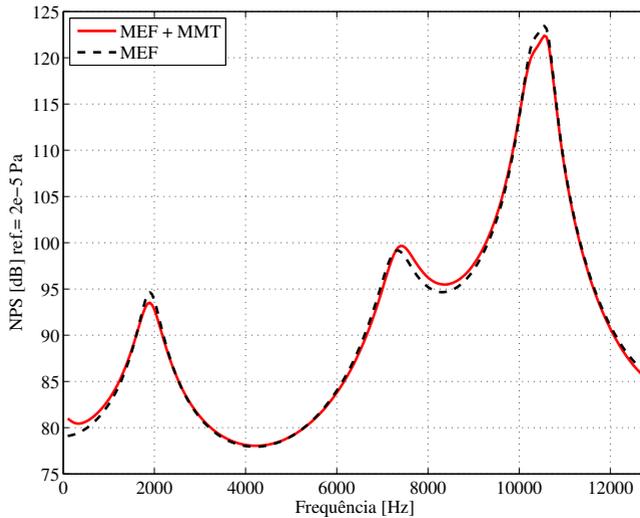


Figura 3.21 – Comparação do NPS ($\bar{\varphi} = 1$ V) obtidos pelo modelo MEF completo e pela abordagem por parâmetros concentrados para o protótipo B.

3.2.3.1 Flexibilização da condição de contorno de engaste

Conforme já apresentado, o diafragma piezoelétrico foi modelado aplicando-se um engaste na borda externa onde este fica preso à cavidade. A condição de engaste ideal é muito difícil de ser obtida experimentalmente nos protótipos pois as estruturas de fixação não possuem rigidez suficiente para isto. Alternativamente, foi feita uma flexibilização do engaste no modelo aplicando-se restrições de deslocamento em uma aresta (representada por um ponto no modelo 2D) ao

invés de restringir toda a superfície. Na aresta mostrada na Figura 3.22(b) foram testadas duas condições de contorno aqui chamadas de apoiada e pinada. Na condição apoiada aplica-se apenas a restrição de deslocamento nulo na direção z (direção normal ao diafragma) enquanto que na condição pinada é aplicada a condição de deslocamento nulo em todas as direções ($\mathbf{u}_m = \mathbf{0}$). Desta forma, pode-se simular uma maior flexibilidade do engaste e aproximar o modelo às condições do experimento. Este ajuste foi também aplicado ao modelo pelo MEF do protótipo B.

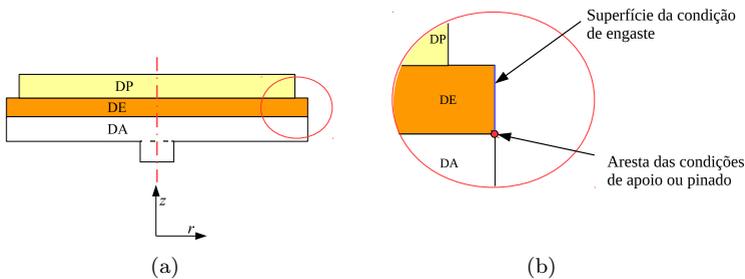


Figura 3.22 – Flexibilização da condição de contorno de engaste sobre o diafragma piezoelétrico no modelo pelo MEF.

Na Figura 3.23 tem-se a comparação dos resultados obtidos para o modelo construído para o protótipo A comparados aos dados experimentais. Nesta figura, pode-se visualizar que a condição apoiada no modelo aproximou a curva do NPS aos dados experimentais, apresentando boa concordância para frequências até aproximadamente 8 kHz. De fato, pode-se perceber que a condição de contorno do sistema real é intermediária entre as condições apoiada e pinada. Acima de 8 kHz este modelo apresentou maiores desvios com relação a média dos dados experimentais. Porém, nesta região do espectro, há uma grande dispersão dos dados experimentais de modo que o modelo encontra-se dentro da faixa de dispersão, conforme mostra a Figura 3.23. A dispersão dos dados experimentais acima de 8 kHz se deve, provavelmente, a maior sensibilidade do sistema real em relação a condição de contorno mecânica obtida em cada montagem.

Na Figura 3.24 tem-se a comparação dos resultados obtidos para modelo construído para o protótipo B comparados aos dados experimentais. Nesta figura, pode-se notar que a flexibilização do engaste também foi importante para aproximar os resultados do modelo aos

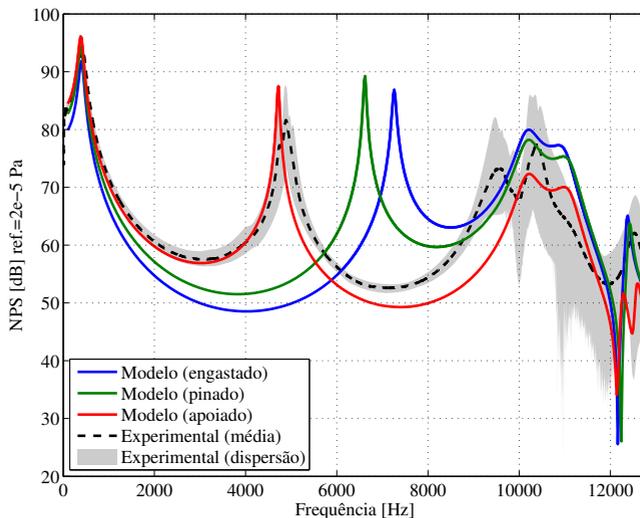


Figura 3.23 – Comparação do NPS ($\bar{\varphi} = 1$ V) da abordagem numérica com os dados experimentais obtidos para o protótipo A.

dados experimentais. Pode-se notar também que o modelo apoiado ainda apresenta desvios com relação a média dos dados experimentais. A causa destes desvios não foi completamente esclarecida, porém, pode-se ver que este modelo foi capaz de representar com razoável precisão o comportamento deste sistema.

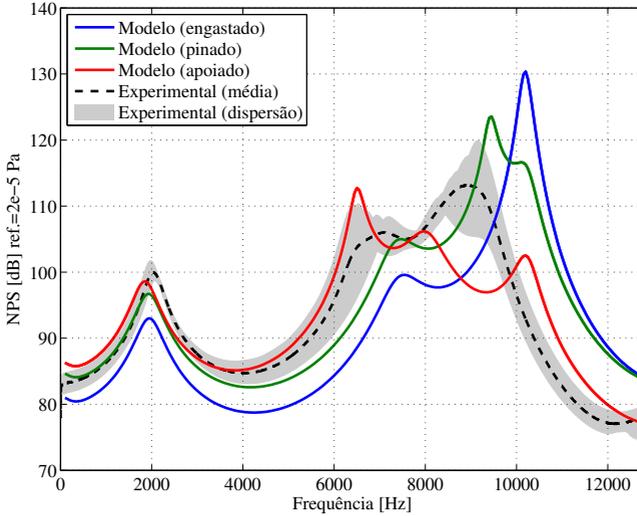


Figura 3.24 – Comparação do NPS ($\bar{\varphi} = 1$ V) da abordagem numérica com os dados experimentais obtidos para o protótipo B.

3.3 MODELO NUMÉRICO DE MICROFONE PIEZOELÉTRICO

Os protótipos de alto-falante construídos na seção anterior podem também ser configurados como microfones. No trabalho de Pereira [4], estes protótipos foram caracterizados, experimentalmente e numericamente, como microfones. Neste sentido serão utilizados alguns dados experimentais obtidos neste trabalho para validação experimental de um modelo de microfone.

No presente trabalho, foi construído um modelo para o protótipo B (ver Figura 3.8) configurado como microfone, cujos resultados são comparados com os resultados experimentais obtidos por Pereira [4]. A seguir será apresentada a configuração experimental para se analisar o protótipo B configurado como microfone.

3.3.1 Análise experimental

O protótipo B configurado como microfone foi analisado a partir de sua função resposta em frequência (FRF) que foi medida utilizando os seguintes equipamentos e infraestrutura:

- Câmara semi-aneecóica do Laboratório de Vibrações e Acústica;
- Microfone de campo livre e pré-amplificador de 1/2" (Fabricante: G.R.A.S., Modelo: 40EA);
- Hardware e software de análise digital de sinais (Fabricante: Bruel & Kjaer, Modelo: Pulse Labshop 10.1);
- Alto-falante;
- Amplificador de potência;
- Laptop para processamento dos dados (Fabricante: Toshiba, Modelo: Satellite A355-S6925).

A configuração do experimento com os equipamentos listados acima pode ser visualizada na Figura 3.25. Com esta configuração foram medidas funções de resposta em frequência (ou sensibilidade do microfone) do protótipo B. Conforme mostra a Figura 3.25, para configurar o protótipo B como microfone, o tubo de conexão feito para medir este protótipo como alto-falante foi fechado para evitar que a pressão acústica incida em ambos os lados do diafragma piezoelétrico. Para esta análise, foi obtida a FRF do sinal de tensão elétrica gerada no material piezoelétrico em relação ao sinal de pressão acústica captada pelo microfone. Esta FRF que representa a sensibilidade do microfone, sendo um importante parâmetro de desempenho deste sistema. Para excitação do sistema, foi utilizado um alto-falante alimentado por um amplificador de potência que amplifica o sinal gerado pelo analisador digital de sinais. O gerador de sinais do analisador foi configurado para gerar um sinal de ruído branco para excitar, com a mesma energia, frequências de 0 a 10000 Hz (faixa de frequência desta análise). A qualidade das FRFs foram monitoradas pelo espectro da função coerência, conforme mencionado na seção anterior.

3.3.2 Configuração do modelo multi-físico pelo MEF

Assim como nos modelos MEF do alto-falante, no modelo do protótipo B como microfone foi considerado somente a cavidade acústica interna acoplada ao diafragma modelado na seção anterior, conforme mostrado na Figura 3.26. Os diafragmas foram modelados de forma semelhante ao alto-falante na Seção 3.2.2.2. Porém, neste caso, o sistema é excitado por uma pressão unitária ($p_a = 1$ Pa) na superfície

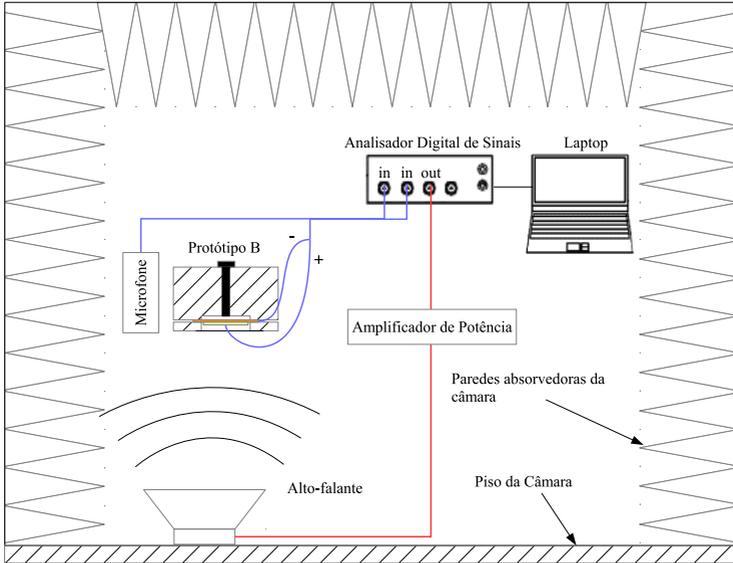


Figura 3.25 – Configuração experimental para validação do protótipo B configurado como microfone piezoelétrico.

externa do diafragma e calcula-se a média da resposta de potencial elétrico (φ) gerada no eletrodo superior, conforme mostra a Figura 3.2.2.2. O modelo acústico FLNS (Equação (2.66)) foi utilizado, sendo que as paredes internas foram consideradas rígidas ($\mathbf{v}_a = \mathbf{0}$) e isotérmicas ($\tau_t = 0$). As demais condições de contorno foram as mesmas aplicadas no modelo de alto-falante, incluindo as condições para flexibilização do engaste. Maiores detalhes com relação ao procedimento experimental podem ser encontrados em [4].

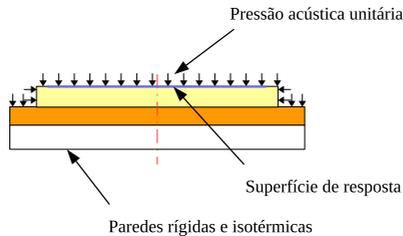
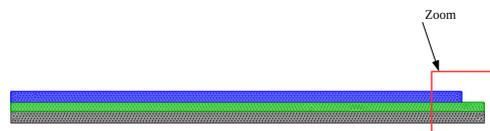
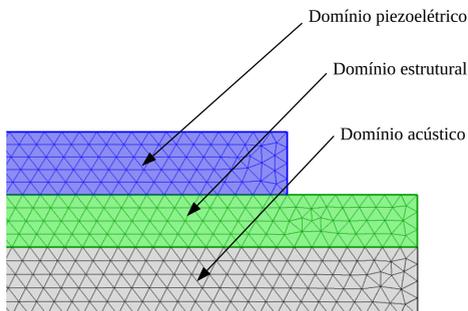


Figura 3.26 – Superfícies de contorno do modelo MEF do protótipo B configurado como microfone.

Um modelo MEF bidimensional (com simetria axial) foi construído para análise do protótipo B, sendo discretizado com uma malha de elementos triangulares, conforme mostrado na Figura 3.27. As propriedades dos materiais do diafragma piezoelétrico incluídas nos modelos estrutural e piezoelétrico e as propriedades do fluido acústico (ar) utilizadas nos modelos acústicos estão apresentadas no Apêndice A.



(a) Malha completa



(b) Zoom

Figura 3.27 – Malha do modelo pelo MEF construído para o protótipo B configurado como microfone.

3.3.3 Análise dos resultados

Na Figura 3.28 tem-se a comparação dos resultados obtidos para o modelo construído para o protótipo B comparados aos dados experimentais obtidos por Pereira [4]. Nesta figura, pode-se notar que, novamente, a flexibilização do engaste no modelo foi importante para aproximar os resultados deste aos dados experimentais. Assim como no modelo de alto-falante, o modelo com a condição apoiada apresentou melhor aproximação à FRF experimental confirmando, assim, que esta condição de contorno representa melhor o que realmente ocorre neste

sistema multi-físico.

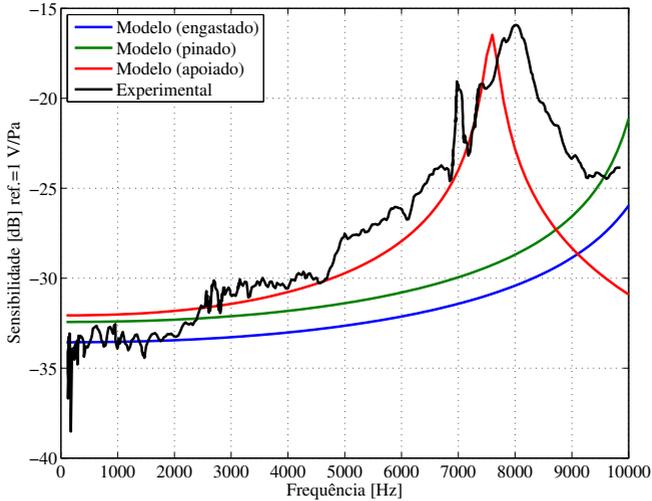


Figura 3.28 – Funções resposta em frequência (sensibilidade) do protótipo B configurado como microfone obtida por modelos numéricos em comparação com dados experimentais obtidos em [4].

Na Figura 3.28 pode-se notar a presença de muitas variações na curva experimental que se diferem do comportamento suave apresentado nos modelos numéricos. Estas variações podem ser consequências de muitas imperfeições na análise experimental como, por exemplo: frequências naturais do alto-falante utilizado no experimento, reflexões acústicas captadas pelos sensores por não serem absorvidas pela câmara semi-aneecóica, e efeitos do erro de posicionamento relativo entre o microfone e o protótipo B analisado.

4 REDUÇÃO DO CUSTO COMPUTACIONAL DO MODELO MULTI-FÍSICO

A escolha do método numérico de otimização a ser aplicado no transdutor piezoelétrico depende tanto das características intrínsecas do problema físico como da forma na qual o problema de otimização é formulado. Na aplicação de métodos de otimização precisa-se avaliar também aspectos computacionais do problema como o tempo para o cálculo da função objetivo e obtenção dos gradientes desta e das restrições do problema. A este respeito, é necessário avaliar o modelo do problema físico e fazer simplificações de forma a torná-lo eficiente para aplicação dos métodos de otimização.

No capítulo anterior foram adotadas alguns recursos para redução do custo computacional para solução dos modelos, como a utilização de simetria axial no MEF e a aplicação do MMT. Neste capítulo, outros recursos serão testados para quantificar e avaliar os respectivos desempenhos em relação à precisão do modelo e redução do custo computacional.

Estas avaliações serão feitas com o objetivo de construir um modelo eficiente para a tentativa da execução de otimizações mais complexas como, por exemplo, as otimizações de forma ou topológica.

Os recursos avaliados serão a simplificação do modelo acústico viscotérmico, a concentração (no domínio geométrico) e interpolação (na frequência) de parâmetros viscotérmicos e a aplicação de uma proposta de solução semi-analítica do modelo SLNS. Antes da avaliação destes recursos, será feita uma análise da discretização dos modelos. Em seguida, será apresentado o modelo multi-físico de referência para o estudo juntamente com os critérios de avaliação utilizados na análise dos recursos citados acima.

4.1 ANÁLISE DA DISCRETIZAÇÃO DOS MODELOS MEF

O custo computacional de um modelo MEF é diretamente proporcional à discretização do problema. Por sua vez, a discretização do problema também tem direta influência na precisão do modelo MEF. Portanto, uma avaliação da discretização é bastante importante para se determinar um nível de precisão do modelo a partir da discretização adotada.

Nesta análise, serão avaliadas a discretização dos modelos pie-

zoelétrico e acústicos separadamente. Para isto, estes modelos foram aplicados em sistemas com a mesma ordem de grandeza geométrica dos transdutores para aparelhos auditivos, permitindo assim uma análise mais direta dos resultados obtidos.

As avaliações foram conduzidas utilizando modelos bidimensionais para facilitar a parametrização e solução dos sistemas. Foram construídos um modelo de referência (MR) para cada modelo MEF avaliado. Nos MR foram utilizadas discretizações bastante regulares e refinadas. Desta forma, foram realizados testes com diferentes parâmetros de discretização avaliando-se uma função erro relativo, δ_{FRF} , calculada por

$$\delta_{FRF}(f)[dB] = |FRF_T(f)[dB] - FRF_{MR}(f)[dB]|, \quad (4.1)$$

sendo FRF_T e FRF_{MR} amplitudes da função resposta em frequência (FRF) avaliadas no modelo testado e no MR, respectivamente.

4.1.1 Análise da discretização dos modelos piezoelétricos

Nesta análise foi considerado um disco piezoelétrico de material PZT-5A, com raio de 3 mm e espessura de 50 μm . A seguir será descrita a configuração do modelo MEF.

4.1.1.1 Modelo MEF

Na Figura 4.1 estão mostradas as superfícies, arestas e domínios onde as equações diferenciais e as condições de contorno (CC) foram aplicadas ao modelo MEF do disco piezoelétrico. No domínio D1 foram aplicadas as equações diferenciais do modelo piezoelétrico (2.26). As condições de contorno em cada superfície e aresta apresentada na Figura 4.1 foram aplicadas conforme as equações (2.27) e (2.28). Considerando as componentes dos vetores $\mathbf{u}_m = \{u_r \ u_z\}^T$ e $\mathbf{f}_m = \{f_r \ f_z\}^T$, os valores prescritos aplicados nas superfícies estão listados abaixo:

S1) CC de superfície livre com potencial elétrico unitário:

- $f_r = 0$ e $f_z = 0$;
- $\varphi_e = 1$ V.

S2) CC de superfície livre com aterramento elétrico:

- $f_r = 0$ e $f_z = 0$;
- $\varphi_e = 0$.

S3) CC de superfície livre sem carga elétrica:

- $f_r = 0$ e $f_z = 0$;
- $q_e = 0$.

A1) Eixo de simetria axial:

- $u_r = 0$ e $f_z = 0$;
- $q_e = 0$.

A2) CC de aresta com restrição de deslocamento bidirecional:

- $u_r = 0$ e $u_z = 0$;
- $q_e = 0$.

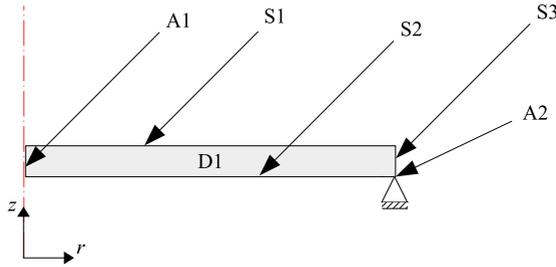


Figura 4.1 – Configuração do modelo MEF 2D (com simetria axial) do disco piezoelétrico.

A análise foi feita na faixa de frequência de 100 a 10000 Hz com discretização de 50 Hz. A FRF para avaliação da função δ_{FRF} , conforme a Equação (4.1), foi a amplitude do valor complexo calculado por

$$FRF = \left\langle \frac{v_z}{\varphi} \right\rangle_{S2} = \left\langle \frac{i\omega u_z}{\varphi} \right\rangle_{S2}, \quad (4.2)$$

sendo v_z e φ amplitudes complexas da velocidade (na direção z) e do potencial elétrico, respectivamente. O operador $\langle \rangle_{S2}$ denota uma média espacial na superfície $S2$. Este parâmetro foi escolhido porque a velocidade normal à superfície é o parâmetro que acopla os modelos estrutural e piezoelétrico aos modelos acústicos. Neste sentido, a avaliação deste erro é importante pois pode influenciar significativamente nos modelos de transdutor.

4.1.1.2 Parametrização das malhas

Em análises vibro-acústicas é comum a adoção do menor comprimento de onda de flexão como parâmetro para a discretização dos modelos MEF. É comum considerar o máximo tamanho de elemento como sendo uma fração do menor comprimento de onda de flexão.

Na literatura, é possível encontrar a seguinte relação para aproximação do menor comprimento de onda de flexão para estruturas do tipo placa fina [73]:

$$\lambda_f = \frac{c_f}{f_{max}} = \sqrt{\frac{2\pi}{f_{max}}} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.3)$$

sendo

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (4.4)$$

c_f a velocidade da onda de flexão, f_{max} a frequência máxima da análise, E o módulo de Young, ν o coeficiente de Poisson e h a espessura da placa.

Como o material piezoelétrico não é isotrópico, não se tem, a priori, os valores de E e ν . Diante disto, foram consideradas na Equação (4.3) as seguintes aproximações: $\nu^2 \approx 0$ e $E \approx 21$ [GPa]. O valor aproximado de E foi arbitrado como sendo o menor valor encontrado no tensor elasticidade $[c]$ do material piezoelétrico (PZT-5A). Desta forma, o menor comprimento de onda de flexão foi subestimado garantindo assim sempre uma discretização mais refinada com relação ao comprimento de onda real.

Na Figura 4.2 estão apresentadas as diferentes discretizações utilizadas nesta análise. Foram aplicadas malhas retangulares e triangulares na análise, sendo adotados diferentes frações do menor comprimento de onda de flexão λ_f para o tamanho do elemento em cada análise. O modelo adotado como referência possui uma discretização de elementos finitos quadrados com tamanhos de aresta iguais a um oitavo da espessura do disco, o que corresponde a aproximadamente $\lambda_f/629$ de comprimento.

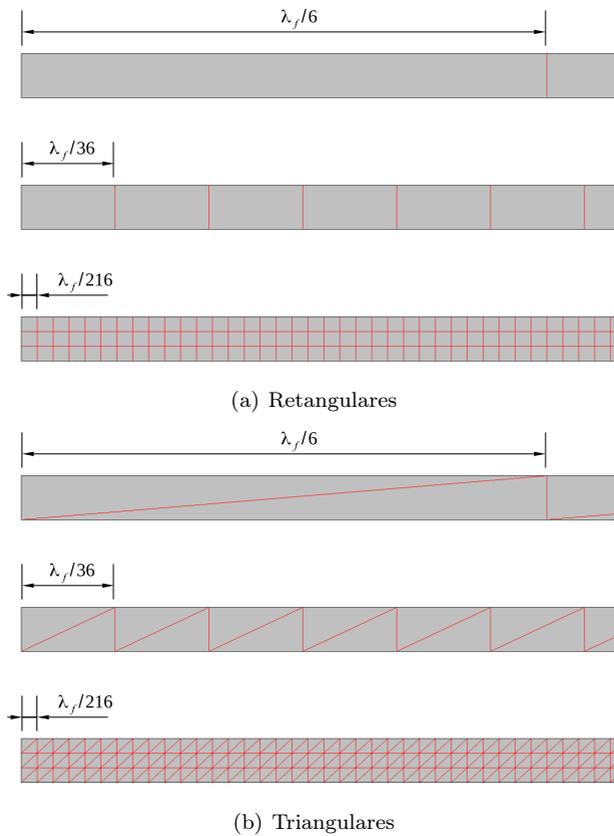


Figura 4.2 – Discretizações utilizadas na análise do disco piezoelétrico.

4.1.1.3 Análise dos resultados

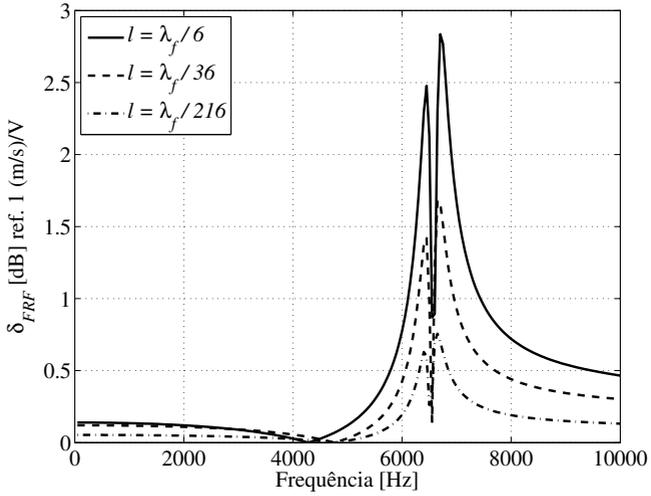
Na Figura 4.3 estão apresentados os resultados obtidos pela avaliação da função δ_{FRF} para as diferentes discretizações apresentadas na Figura 4.2. Nesta figura, pode-se perceber que as funções δ_{FRF} possuem valores abaixo de 0,5 dB até aproximadamente 5800 Hz. A partir desta frequência, as funções δ_{FRF} aumentam para valores acima de 1 dB para os casos de discretização mais grosseiras (como nos casos $l = \lambda_f/6$ e $l = \lambda_f/36$). Para frequências superiores a 7800 Hz, aproximadamente, estas funções caem para valores abaixo de 1 dB.

A causa da grande variação das funções δ_{FRF} na faixa de frequência de 5800 a 7800 Hz se deve à primeira frequência natural do disco piezoelétrico, situada aproximadamente na frequência de 6500 Hz, conforme mostrado na Figura 4.4. De fato, ao se diminuir a discretização de um sistema elástico linear tem-se um efeito numérico de aumento da rigidez do mesmo e, conseqüentemente, a frequência natural também aumenta, como pode ser evidenciado na Tabela 4.1.

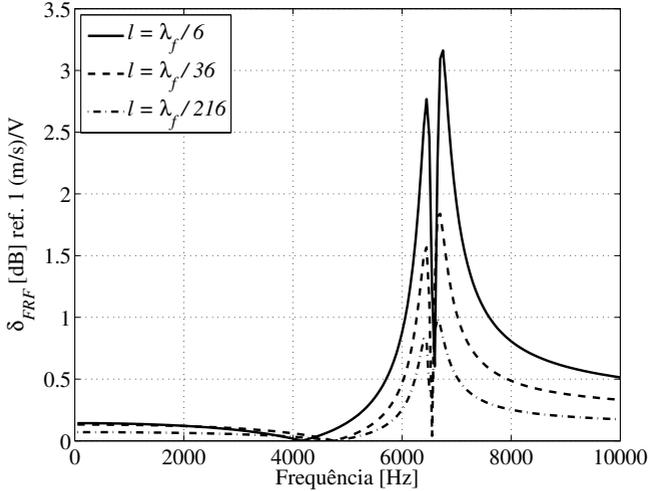
Na Tabela 4.1 estão apresentados os valores aproximados por interpolação da primeira frequência natural do disco e a média da função δ_{FRF} para cada discretização adotada. Pode-se perceber que quanto menor é a discretização (maior tamanho de elemento), maior é a frequência natural do sistema. Apesar da variação entre os valores de referência e as discretizações adotadas serem menores que 2,5% os erros em amplitude encontrados pela função δ_{FRF} foram de até 3,2 dB, o que significa, em escala linear, um erro maior que 100%.

Tabela 4.1 – Valores aproximados de frequência natural do disco piezoelétrico e média da função δ_{FRF} para cada discretização analisada.

Tipo de elemento	Tamanho do elemento	Frequência natural [Hz]	Erro	δ_{FRF} [dB] (média)
Referencia (quadrados)	$\lambda_f/629$	6507	N/A	N/A
Retangulares	$\lambda_f/6$	6652	2,2%	0,48
	$\lambda_f/36$	6590	1,3%	0,30
	$\lambda_f/216$	6544	0,6%	0,13
Triangulares	$\lambda_f/6$	6671	2,5%	0,53
	$\lambda_f/36$	6598	1,4%	0,32
	$\lambda_f/216$	6554	0,7%	0,17



(a) Retangulares



(b) Triangulares

Figura 4.3 – Função δ_{FRF} para cada discretizações parametrizadas.

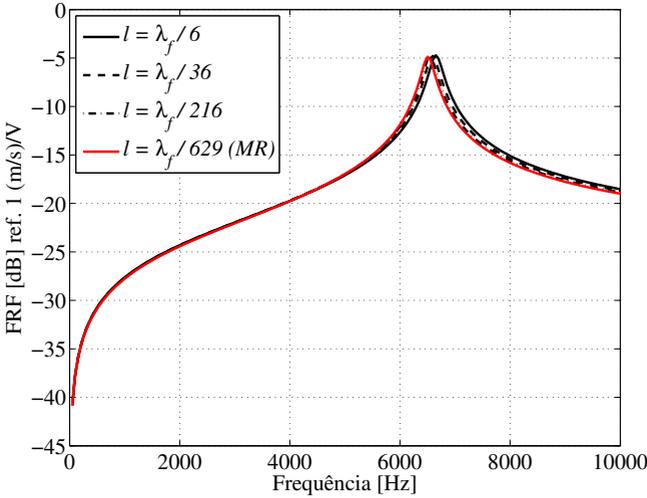


Figura 4.4 – Amplitude da FRF obtida com cada malha retangular avaliada.

Devido ao grande aumento da resposta do sistema em sua frequência natural, o seu efeito na função δ_{FRF} é dependente do amortecimento do sistema, pois em sistemas não-amortecidos a amplitude de resposta nesta frequência é infinita. Portanto, nesta avaliação, os valores da função δ_{FRF} nas frequências entre 5800 Hz e 7800 Hz precisam ser interpretados mais como um erro de precisão da frequência natural do que como um erro de amplitude da FRF. Neste sentido, a escolha da discretização de um modelo MEF precisa levar em conta, além da precisão de amplitude do modelo, o nível de precisão que se deseja ter nas frequências naturais do sistema.

Neste trabalho, os modelos MEF foram desenvolvidos para a aplicação em problemas de otimização. Portanto, o custo computacional destes modelos precisa ser compatível para o cumprimento destas análises. Neste sentido, a discretização do modelo MEF para se avaliar a função objetivo precisa ser cuidadosamente escolhida conforme o problema de otimização é declarado. Caso a função objetivo seja sensível à precisão da frequência natural do sistema, é necessário uma discretização mais fina.

4.1.2 Análise da discretização de modelos acústicos viscotérmicos

Nesta análise foi considerada a geometria mostrada na Figura 4.5. Esta geometria foi escolhida por apresentar estruturas similares ao sistema acústico dos protótipos de transdutor validados no Capítulo 3.

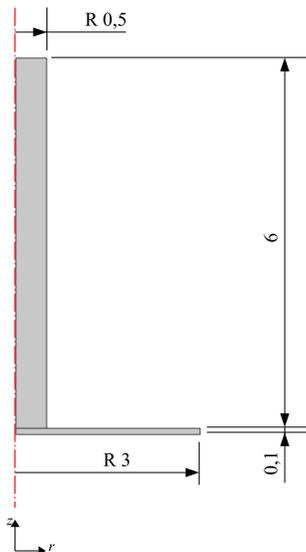


Figura 4.5 – Geometria avaliada (simetria axial) na análise da discretização de modelos acústicos.

4.1.2.1 Modelo MEF

Na Figura 4.6 estão mostradas as superfícies, arestas e domínios onde as equações diferenciais e as condições de contorno (CC) foram aplicadas aos modelos MEF acústicos viscotérmicos. No modelo FLNS são aplicados nos domínios D1 e D2 as equações (2.66). No modelo LRF aplica-se a Equação (2.75), porém no domínio D1 consideram-se os parâmetros LRF para um tubo e no domínio D2 consideram-se os parâmetros LRF para um filme de fluido, conforme apresentados na Seção 2.3.4.1. As condições de contorno do modelo FLNS foram

aplicadas conforme as equações (2.64) e (2.65), assim como as condições do modelo LRF foram conforme as equações (2.74). Considerando as componentes dos vetores $\mathbf{f}_a = \{f_r \ f_z\}^T$ e $\mathbf{v}_a = \{v_r \ v_z\}^T$, as condições de contorno aplicadas em cada superfície e aresta da Figura 4.6 estão listadas abaixo:

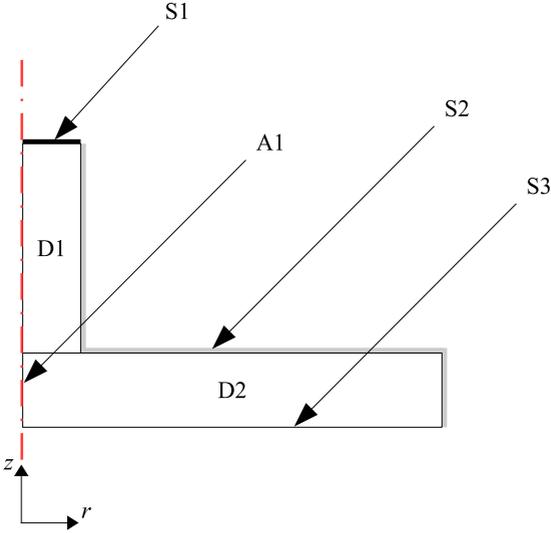


Figura 4.6 – Configuração do modelo MEF da cavidade acústica viscotérmica.

S1) CC de impedância normal adiabática:

– FLNS

$$* f_r = 0 \text{ e } f_z = Z_{rad} v_z;$$

$$* h_t = 0.$$

– LRF

$$* g_a = i\omega\rho_0 \frac{p}{Z_{rad}}.$$

S2) CC de paredes rígidas isotérmicas:

– FLNS

$$* v_r = 0 \text{ e } v_z = 0;$$

$$* \tau_t = 0.$$

– LRF

* $g_a = 0$.

S3) CC de velocidade normal unitária (sem escorregamento tangencial) e isotérmica:

– FLNS

* $v_r = 0$ e $v_z = 1$ [m/s];

* $\tau_t = 0$.

– LRF

* $g_a = i\omega\rho_0v_p$, sendo $v_p = 1$ [m/s].

A1) Eixo de simetria axial:

– FLNS

* $v_r = 0$ e $f_z = 0$;

* $h_t = 0$.

– LRF

* $g_a = 0$.

Para a CC de impedância normal Z_{rad} foi considerada a impedância de tubo aberto não-flangeado dada por [46]

$$Z_{rad} = \rho_0 c_0 \left[\frac{1}{4}(ka)^2 + i0,6133(ka) \right], \quad (4.5)$$

sendo k o número de onda e a o raio do tubo.

Esta análise foi feita na faixa de frequência de 100 a 10000 Hz com discretização de 50 Hz. A FRF para avaliação da função δ_{FRF} , conforme a Equação (4.1) foi a amplitude do valor complexo calculado por

$$FRF = \frac{\langle p \rangle_{S1}}{\langle v_z \rangle_{S3}}, \quad (4.6)$$

sendo p e v_z amplitudes complexas da pressão acústica e da velocidade (na direção z), respectivamente. Este parâmetro foi escolhido porque o parâmetro de pressão $\langle p \rangle_{S1}$ é de grande influência nas otimizações dos transdutores. Neste sentido, um erro deste parâmetro pode ter grande influência na otimização sendo interessante o seu monitoramento.

Como no problema analisado a velocidade na direção z em S3 é arbitrada como um valor constante e unitário, o valor de $\langle v_z \rangle_{S3}$ na Equação (4.6) também será constante e unitário.

4.1.2.2 Parametrização das malhas

Conforme apresentado na Seção 2.3.3, no modelo FLNS são considerados como graus de liberdade os campos de velocidade, temperatura e pressão do fluido. As malhas de Elementos Finitos utilizadas para solucionar este modelo precisam ser suficientes para representar tanto a onda de pressão como também os efeitos de cisalhamento e difusão térmica. Para representar estes efeitos, o tamanho dos elementos precisa ser da ordem da espessura das camadas limites viscosa e térmica que se formam próximas aos contornos do problema onde tem-se paredes isotérmicas. Neste sentido, é necessário estimar o valor destas camadas para se estipular o tamanho do elemento para a discretização dos domínios acústicos. Uma estimativa para as espessuras das camadas limites viscosa (λ_v) e térmica (λ_h) podem ser calculadas pelas expressões [54]:

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{|k_v|}, \text{ sendo } k_v = \sqrt{\frac{-i\omega\rho_0}{\mu}} \quad (4.7)$$

e

$$\lambda_h = \frac{2\pi}{|k_h|}, \text{ sendo } k_h = \sqrt{\frac{-i\omega\rho_0 Cp}{\kappa}} = k_v \sqrt{Pr}. \quad (4.8)$$

No caso do modelo LRF, como os parâmetros viscotérmicos são calculados de forma analítica e inseridos (como valores médios) nas equações diferenciais da acústica clássica, a única restrição para a malha MEF é representar o comprimento de onda acústico que é estimado por

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f}. \quad (4.9)$$

Na Figura 4.7 tem-se os valores de λ_0 , λ_v e λ_h obtidos na faixa de frequência de 10 a 10000 Hz, considerando as propriedades do ar disponíveis no Apêndice A. Nesta figura pode-se perceber que os comprimentos de λ_v e λ_h são muito menores do que λ_0 , sendo que na frequência de 10000 Hz λ_0 é cerca de 350 vezes maior que λ_v . Diante disto, pode-se notar que a exigência na discretização do modelo FLNS é muito maior do que o modelo LRF e clássico.

Na Figura 4.8(a) está apresentado um exemplo de malha utilizada nesta análise onde foram utilizados elementos triangulares parametrizados a partir do comprimento máximo do elemento, conforme mostrado na Figura 4.8(b). O MR para análise do modelo FLNS foi dis-

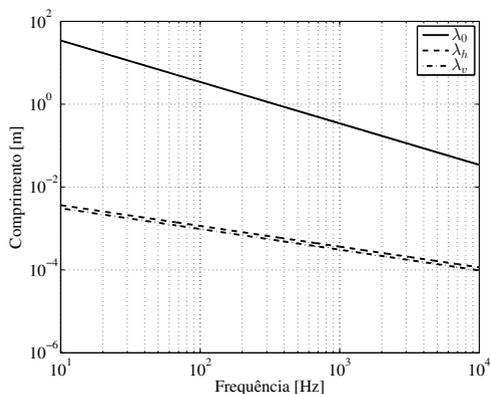


Figura 4.7 – Comparação entre os comprimentos de λ_0 , λ_v e λ_h .

cretizado utilizando-se $l_{max} = \lambda_v/8$ enquanto que o MR para o modelo LRF foi utilizado $l_{max} = \lambda_0/1000$.

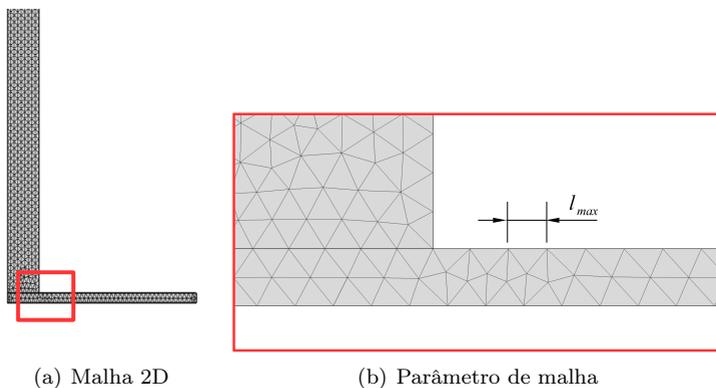


Figura 4.8 – Discretização da cavidade acústica.

4.1.2.3 Análise dos resultados

Nas figuras 4.9 e 4.10 estão apresentadas as funções δ_{FRF} calculadas para os modelos FLNS e LRF, respectivamente. Pode-se notar que o modelo FLNS é bastante sensível ao parâmetro de malha, apresentando erros acima de 1.5 dB para a malha com $l_{max} = 4\lambda_v$, en-

quanto que o modelo LRF apresentou erros bastante baixos em todas as malhas testadas. No modelo LRF, devido ao pequeno tamanho e detalhes da geometria, o gerador de malhas não gerou elementos com $l_{max} = \lambda/10$ e, por isso seus erros ficaram tão próximos aos obtidos com $l_{max} = \lambda/100$, conforme pode-se ver na Figura 4.10.

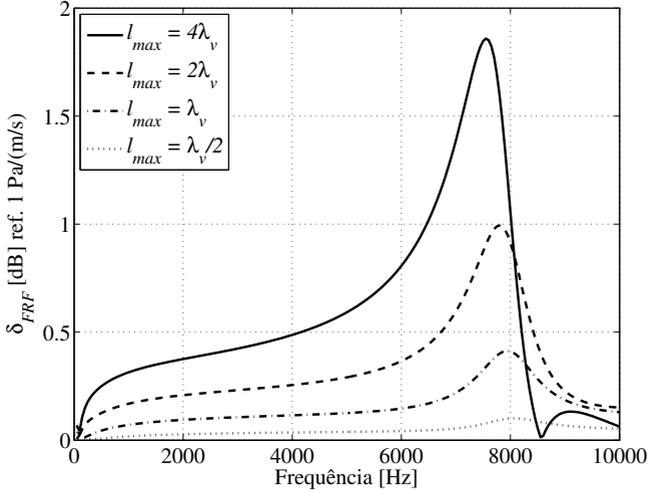


Figura 4.9 – Função δ_{FRF} calculada para cada discretização aplicada ao modelo FLNS.

Nas figuras 4.11 e 4.12 estão apresentados os valores da FRF obtidos para o cálculo da função δ_{FRF} para os modelos FLNS e LRF, respectivamente. Na Figura 4.11 pode-se perceber que o aumento do tamanho do elemento tem efeito na dissipação e deslocamento da frequência natural do sistema. Na Figura 4.12 pode-se ver que os erros foram realmente imperceptíveis com relação ao MR. É importante salientar que o MR para a análise de cada modelo (FLNS e LRF) corresponde ao respectivo modelo com uma discretização mais refinada, pois o objetivo desta análise é verificar a discretização da malha.

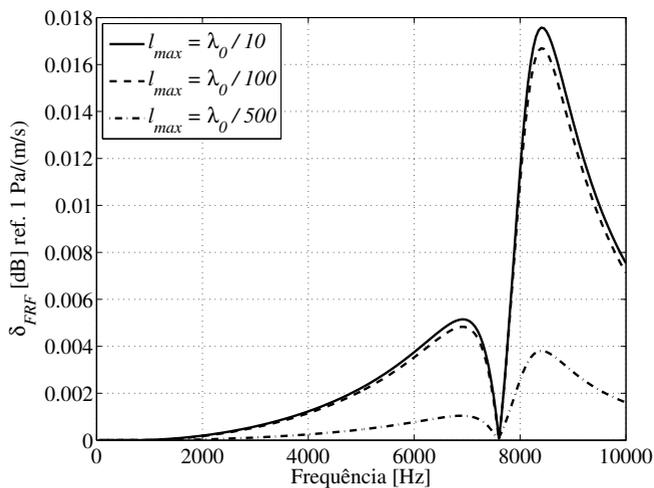


Figura 4.10 – Função δ_{FRF} calculada para cada discretização aplicada ao modelo LRF.

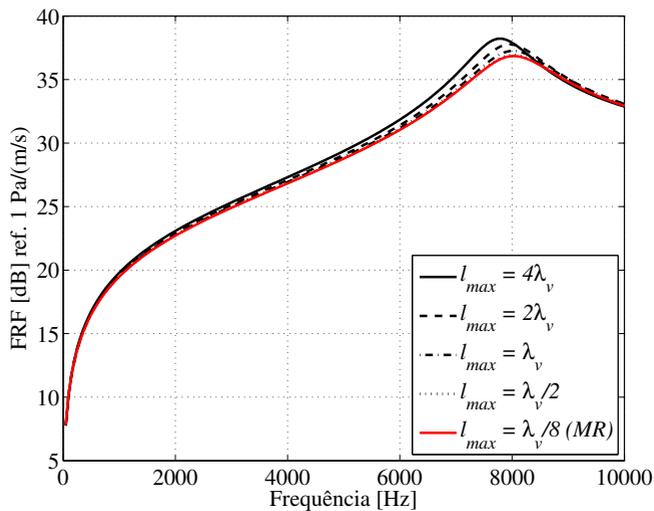


Figura 4.11 – FRF calculadas pelos modelos FLNS e MR.

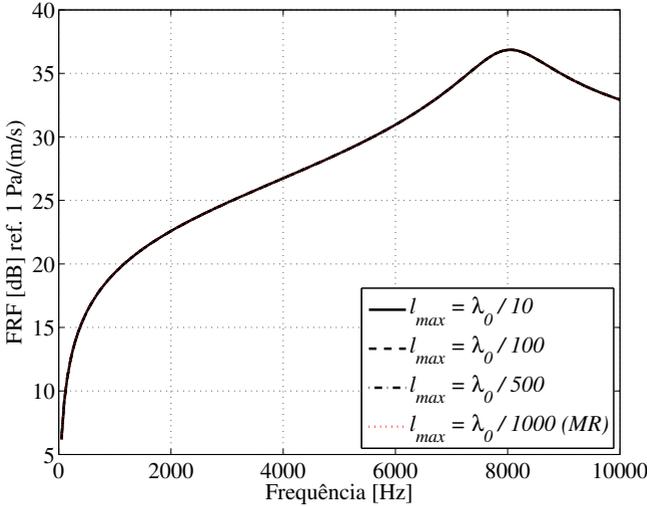


Figura 4.12 – FRF calculadas pelos modelo LRF e MR.

4.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA PARA AVALIAÇÃO DOS MODELOS COM REDUÇÃO DE CUSTO

Nesta seção apresenta-se um modelo MEF de transdutor que será denominado como modelo de referência (MR). Este modelo será utilizado como parâmetro de comparação na análise dos diferentes recursos que serão aplicados na tentativa de redução do custo computacional para a aplicação de otimização de transdutores.

Como esta análise irá comparar diferentes modelos MEF para a representação do mesmo sistema físico, a geometria, a discretização e as funções de aproximação (para graus de liberdade em comum) dos modelos MEF avaliados e do MR serão as mesmas. Assim, pode-se afirmar que as diferenças encontradas entre cada modelo avaliado e o MR são causadas, principalmente, pela concepção do modelo e não por diferenças destes parâmetros. A seguir, a geometria e a discretização dos modelos MEF serão apresentadas.

4.2.1 Geometria

Na Figura 4.13 estão apresentadas a geometria e as dimensões do sistema onde serão aplicados os modelos MEF com diferentes recursos para redução do custo computacional. Este sistema possui estrutura similar aos protótipos validados no Capítulo 3, sendo constituídos de duas cavidades acústicas cilíndricas com um diafragma entre elas. O diafragma é composto por um disco de latão com um disco de PZT-5A aderido ao mesmo. As dimensões do sistema são da ordem de um transdutor real de aparelho auditivo. Estas características foram escolhidas para que os recursos sejam avaliados diante de sistemas similares aos transdutores incluindo os efeitos das interações entre as físicas envolvidas nesta escala geométrica.

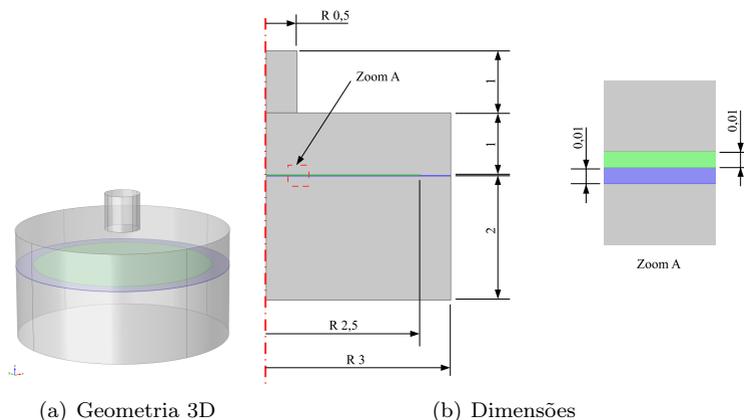


Figura 4.13 – Geometria e dimensões (em mm) aplicadas aos modelos analisados.

4.2.2 Discretização

Como no MR será aplicado o modelo FLNS, a discretização deste modelo foi baseada no comprimento da camada limite. Na Figura 4.14 está apresentada a discretização adotada para os modelos avaliados e MR. Em toda geometria foi aplicada uma discretização com elementos triangulares tamanhos menores ou iguais a $0,4\lambda_v$ totalizando 21330 elementos. Conforme apresentado na Seção 4.1, esta escala de tamanho de elemento apresentou erros numéricos menores que 0,25 dB, re-

presentando uma precisão aceitável para esta análise. Considerando os modelos LRF, onde o tamanho máximo de elemento é baseado no comprimento de onda acústico (λ_0), esta discretização corresponde a elementos menores que $\lambda_0/893$.

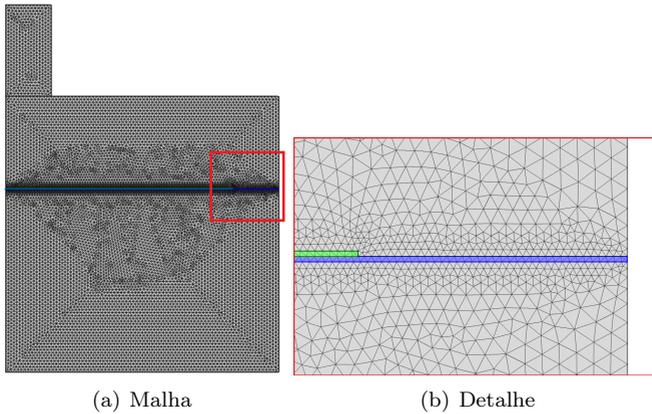


Figura 4.14 – Malha MEF bidimensional utilizada no modelo multi-físico de referência com simetria axial.

Na Figura 4.14(b) pode-se perceber que a discretização dos discos piezoelétrico e estrutural, tem-se elementos triangulares com comprimentos equivalentes à espessura de cada disco. Esta discretização corresponde a, aproximadamente, $\lambda_f/266$ para o disco de latão e $\lambda_f/173$ para o disco de PZT-5A, sendo estas discretizações bastante suficientes para esta análise, conforme mostrado na Seção 4.1.1.

4.2.3 Denominação das interfaces do modelo

Na Figura 4.15 estão apresentadas as interfaces (domínios, superfícies e arestas) onde foram aplicados modelos, condições de contorno e acoplamentos, conforme as equações dos modelos apresentados no Capítulo 2. Nas interfaces apresentadas na Figura 4.15(a) são configurados os modelos e condições de contorno (CC) listados abaixo:

- DA1, DA2 e DA3) Domínios dos modelos acústicos;
- DP) Domínio do modelo piezoelétrico;
- DE) Domínio do modelo estrutural;

- S1) CC de impedância normal adiabática;
- S2) CC de paredes rígidas isotérmicas;
- S3) CC de potencial elétrico unitário e de superfície isotérmica;
- S4) CC de potencial elétrico nulo;
- S5) CC de engaste mecânico;
- S6) CC de superfície isotérmica e sem carga elétrica;
- S7) CC de superfície isotérmica;
- A1) Eixo de simetria axial.

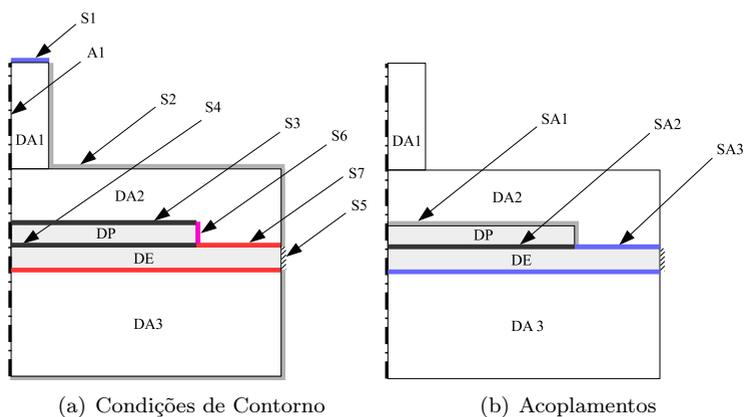


Figura 4.15 – Denominação das superfícies, domínios e arestas onde foram aplicadas as condições de contorno e acoplamentos em todos modelos avaliados.

Nas interfaces apresentadas na Figura 4.15(b) são configurados os seguintes acoplamentos entre modelos:

- SA1) Acoplamento piezoelétrico-acústico;
- SA2) Acoplamento piezoelétrico-estrutural;
- SA3) Acoplamento acústico-estrutural.

4.2.4 Configuração do modelo de referência

Conforme as superfícies de contorno denominadas na Figura 4.15(a), no modelo de referência (MR) foram utilizadas nos domínios DA1, DA2 e DA3 as equações (2.63) e nos domínios DP e DE foram aplicadas as equações (2.26) e (2.3), respectivamente. Como condições de contorno, considerando as componentes dos vetores $\mathbf{u}_m = \{u_r \ u_z\}^T$, $\mathbf{f}_m = \{f_r \ f_z\}^T$, $\mathbf{v}_a = \{v_r \ v_z\}^T$ e $\mathbf{f}_a = \{f_{Ar} \ f_{Az}\}^T$, os valores prescritos aplicados nas superfícies estão listados a seguir:

$$v_r = 0 \quad \text{em } S2 \cup A1, \quad (4.10a)$$

$$v_z = 0 \quad \text{em } S2, \quad (4.10b)$$

$$f_{Az} = Z_{rad}v_z \quad \text{em } S1, \quad (4.10c)$$

$$f_{Az} = 0 \quad \text{em } A1, \quad (4.10d)$$

$$f_{Ar} = 0 \quad \text{em } S1, \quad (4.10e)$$

$$\tau_t = 0 \quad \text{em } S2 \cup S3 \cup S6 \cup S7, \quad (4.10f)$$

$$h_t = 0 \quad \text{em } S1 \cup A1, \quad (4.10g)$$

$$u_r = 0 \quad \text{em } S5 \cup A1, \quad (4.10h)$$

$$u_z = 0 \quad \text{em } S5, \quad (4.10i)$$

$$f_z = 0 \quad \text{em } A1, \quad (4.10j)$$

$$\varphi_e = 1V \quad \text{em } S3, \quad (4.10k)$$

$$\varphi_e = 0 \quad \text{em } S4, \quad (4.10l)$$

$$q_e = 0 \quad \text{em } S6 \cup A1, \quad (4.10m)$$

$$\mathbf{v} = i\omega\mathbf{u} \quad \text{em } SA1 \cup SA3, \quad (4.10n)$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_p \quad \text{em } SA2, \quad (4.10o)$$

sendo: Z_{rad} a impedância de radiação dada pela Equação (4.5), \mathbf{u}_s e \mathbf{u}_p os vetores deslocamento dos modelos estrutural e piezoelétrico, respectivamente.

Com a aplicação da discretização apresentada na Seção 4.2.2 e as funções de aproximação pelo MEF descritas na Seção 2.4 o MR possui 141427 graus de liberdade para serem solucionados. Na Tabela 4.2 estão apresentadas informações da quantidade de graus de liberdade (QGL) para cada variável aproximada nos modelos que compõem o MR. Nesta tabela pode-se perceber o grande custo computacional do modelo acústico (FLNS) que representa 96% da QGL do MR. Neste sentido, a adoção de medidas para redução de custo computacional dos

modelos acústicos viscotérmicos pode aumentar drasticamente o desempenho destes modelos facilitando a sua aplicabilidade em problemas de otimização.

Tabela 4.2 – Quantidade de graus de liberdade (QGL) presentes em cada modelo aplicado ao MR.

Modelo	Variável aproximada	QGL em Ω_e	QGL em Ω	QGL Total
Acústico (FLNS)	\mathbf{v}	12	83740	136280
	τ	6	41870	
	p	3	10670	
Estrutural	\mathbf{u}	12	2610	2610
Piezoelétrico	\mathbf{u}	12	1452	2537
	φ	6	1085	

4.2.5 Métodos e critérios para solução do modelo MEF

Para se manter uma igualdade entre os modelos avaliados, foi escolhido sempre o mesmo algoritmo de solução direta (*solver*) nos modelos MEF chamado de “*PARallel sparse DIrect linear SOLver*” (PAR-DISO) [74]. Além disto, as avaliações de tempo de solução foram sempre tomadas com o mesmo computador, sendo executado por linha de comando com nenhum outro processo paralelo em execução.

4.2.6 Parâmetros avaliados

Os modelos com redução de custo computacional serão avaliados pelos seguintes parâmetros descritos abaixo:

- Quantidade de graus de liberdade (QGL);
- Espectro da função δ_{FRF} na frequência;
- Média na frequência ($\langle \delta_{FRF} \rangle_f$) da função δ_{FRF} ;
- Valor máximo ($\max(\delta_{FRF})$) no espectro da função δ_{FRF} ;
- Tempo de solução (TS) do modelo completo;

- Fator de aceleração (FA) da solução do modelo completo.

O fator de aceleração (FA) é obtido pela expressão

$$FA = \frac{TS_{MR}}{TS_T}, \quad (4.11)$$

sendo TS_{MR} e TS_T os tempos de solução do MR e do modelo testado, respectivamente.

A função δ_{FRF} é obtida pela Equação (4.1), sendo que a FRF é calculada por

$$FRF = \frac{\langle p \rangle_{S1}}{\langle \varphi \rangle_{S3}}. \quad (4.12)$$

Esta FRF foi escolhida por ser um parâmetro importante na análise de desempenho dos alto-falantes que serão otimizados no próximo capítulo.

4.3 SIMPLIFICAÇÃO DO MODELO ACÚSTICO VISCOTÉRMICO

Nesta análise serão avaliados os modelos acústicos viscotérmicos simplificados apresentados na Seção 2.3.4. A seguir, apresenta-se a forma como estes modelos foram aplicados.

4.3.1 Aplicação do modelo LRF

Conforme os domínios apresentados na Figura 4.15(a), o modelo LRF foi utilizado nos domínios DA1, DA2 e DA3 a Equação (2.75) e nos domínios DP e DE foram aplicadas as equações (2.26) e (2.3), respectivamente.

Como o modelo LRF aplica o efeito viscotérmico com parâmetros globais dentro do domínio que são calculados a partir de soluções analíticas de sistemas simplificados, é necessário escolher o tipo de solução analítica que será utilizada. Neste caso, diante da simplicidade da geometria, pode-se estabelecer com certa facilidade o tipo de solução analítica, sendo que em cada domínio acústico foi aplicada uma solução que melhor represente o respectivo sistema. No domínio DA1, por apresentar apenas uma parede cilíndrica, foi considerada a solução analítica para tubos, conforme apresentado na Equação (2.72). Os domínios DA2 e DA3 são cilíndricos como tubos, porém com comprimentos menores do que o raio com paredes ou estruturas nas extremidades destes cilindros. Devido a esta característica, foram aplicados os parâ-

metros LRF para filmes de fluido, conforme apresentado na Equação (2.73). Esta medida foi arbitrária pois a proximidade das superfícies inferior e superior destes domínios têm maior influência sobre os efeitos viscotérmicos do que as superfícies cilíndricas. Uma das superfícies de cada domínio acústico (DA2 e DA3) é a interface com o domínio estrutural ou piezoeletrico que pode se movimentar na direção radial. Apesar disto, os parâmetros arbitrados para o modelo LRF consideram que a velocidade radial nesta superfície é nula.

Para avaliar, qualitativamente, se a consideração de velocidade radial nula no modelo LRF é razoável, foi avaliada a velocidade radial no modelo MR, conforme mostra a Figura 4.16. Nesta figura, apresenta-se a avaliação da amplitude da velocidade de partícula na direção radial ao longo de uma linha mostrada na Figura 4.17 no modelo de referência (MR). Conforme mostrado na Seção 4.2.4, o MR por utilizar o modelo acústico viscotérmico FLNS acopla os movimento longitudinal e radial das estruturas com o fluido acústico. Na condição de parede, de fato, a velocidade radial nula é imposta no modelo MR. Porém, na Figura 4.16 pode-se notar que a velocidade radial apresenta valores muito baixos tanto próximo à superfície da estrutura ($z = 0$) quanto próximo à parede ($z = 1 \times 10^{-3}$ [m]) e, portanto, a consideração arbitrada no modelo LRF foi considerada, qualitativamente, razoável para o sistema analisado.

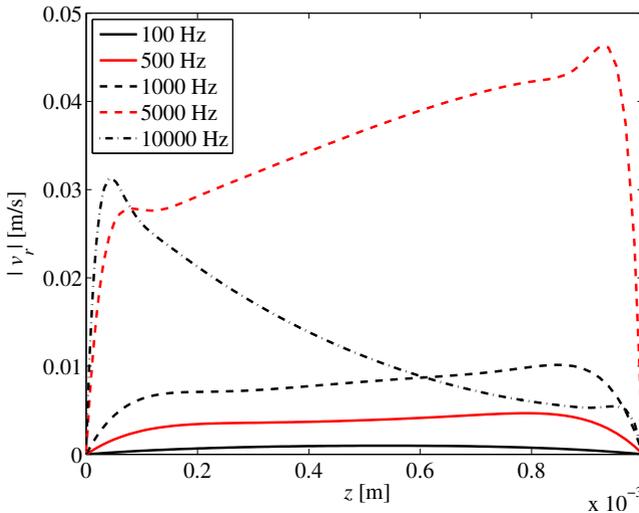


Figura 4.16 – Amplitude da velocidade radial no modelo de referência.

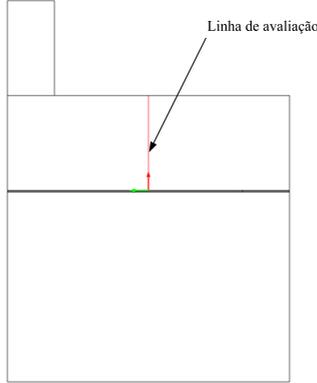


Figura 4.17 – Local de avaliação da velocidade radial no modelo de referência.

As condições de contorno deste modelo foram aplicadas conforme as equações (2.8),(2.27), (2.28) e (2.74), considerando as componentes dos vetores $\mathbf{u}_m = \{u_r \ u_z\}^T$ e $\mathbf{f}_m = \{f_r \ f_z\}^T$, e os valores prescritos aplicados nas superfícies, apresentadas na Figura 4.15(a), estão listados a seguir:

$$g_a = i\omega\rho_0 \frac{p}{Z_{rad}} \quad \text{em S1,} \quad (4.13a)$$

$$g_a = 0 \quad \text{em S2} \cup \text{A1,} \quad (4.13b)$$

$$u_r = 0 \quad \text{em S5} \cup \text{A1,} \quad (4.13c)$$

$$u_z = 0 \quad \text{em S5,} \quad (4.13d)$$

$$f_z = 0 \quad \text{em A1,} \quad (4.13e)$$

$$\varphi_e = 1V \quad \text{em S3,} \quad (4.13f)$$

$$\varphi_e = 0 \quad \text{em S4,} \quad (4.13g)$$

$$q_e = 0 \quad \text{em S6} \cup \text{A1,} \quad (4.13h)$$

$$g_a = -\omega^2\rho_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \quad \text{em SA1} \cup \text{SA3,} \quad (4.13i)$$

$$(\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n}) = p \quad \text{em SA1} \cup \text{SA3,} \quad (4.13j)$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_p \quad \text{em SA2.} \quad (4.13k)$$

Com a aplicação da discretização apresentada na Seção 4.2.2 e as funções de aproximação pelo MEF descritas na Seção 2.4 o modelo multi-físico com aplicação do modelo acústico LRF possui 15817 graus de liberdade (GL) para serem solucionados, sendo 8,9 vezes menor do

que o MR. Na Tabela 4.3 estão apresentadas informações da QGL para cada variável aproximada nos modelos que compõem este modelo multi-físico. Nesta tabela pode-se perceber que o modelo acústico (LRF) possui uma quantidade muito inferior de GL em relação ao FLNS.

Tabela 4.3 – Quantidade de graus de liberdade (QGL) presentes em cada modelo aplicado ao modelo multi-físico com aplicação do modelo acústico LRF.

Modelo	Variável aproximada	QGL em Ω_e	QGL em Ω	QGL Total
Acústico (LRF)	p	3	10670	10670
Estrutural	\mathbf{u}	12	2610	2610
Piezoelétrico	\mathbf{u}	12	1452	2537
	φ	6	1085	

4.3.2 Aplicação do modelo SLNS

Conforme as superfícies de contorno apresentadas na Figura 4.15(a), no modelo SLNS serão utilizados nos domínios DA1, DA2 e DA3 as equações (2.87) e nos domínios DP e DE foram aplicadas as equações (2.26) e (2.3), respectivamente. Como condições de contorno, considerando as componentes dos vetores $\mathbf{u}_m = \{u_r \ u_z\}^T$ e $\mathbf{f}_m = \{f_r \ f_z\}^T$,

os valores prescritos aplicados nas superfícies estão listados a seguir:

$$g_a = i\omega\rho_0 \frac{p}{Z_{rad}} \quad \text{em S1,} \quad (4.14a)$$

$$g_a = 0 \quad \text{em S2} \cup \text{A1,} \quad (4.14b)$$

$$\Psi_h = \Psi_v = 0 \quad \text{em S2} \cup \text{S3} \cup \text{S6} \cup \text{S7,} \quad (4.14c)$$

$$\nabla\Psi_h \cdot \mathbf{n} = \nabla\Psi_v \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em S1} \cup \text{A1,} \quad (4.14d)$$

$$u_r = 0 \quad \text{em S5} \cup \text{A1,} \quad (4.14e)$$

$$u_z = 0 \quad \text{em S5,} \quad (4.14f)$$

$$f_z = 0 \quad \text{em A1,} \quad (4.14g)$$

$$\varphi_e = 1V \quad \text{em S3,} \quad (4.14h)$$

$$\varphi_e = 0 \quad \text{em S4,} \quad (4.14i)$$

$$q_e = 0 \quad \text{em S6} \cup \text{A1,} \quad (4.14j)$$

$$g_a = -\omega^2\rho_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \quad \text{em SA1} \cup \text{SA3,} \quad (4.14k)$$

$$(\mathbf{f}_m \cdot \mathbf{n}) = p \quad \text{em SA1} \cup \text{SA3,} \quad (4.14l)$$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_p \quad \text{em SA2.} \quad (4.14m)$$

Assim como foi considerado no modelo LRF, considera-se aqui também que a velocidade radial é nula nas superfícies de interface entre estruturas e o modelo acústico. Neste caso, esta consideração se aplica através da condição de não-escorregamento ($\Psi_v = 0$) no acoplamento, conforme apresentado acima. A condição de não-escorregamento é uma restrição de velocidade tangencial à superfície. Portanto, além de representar restrições de velocidade radial em superfícies radiais, ela representa também restrições de velocidade na direção z em superfícies cilíndricas, como a superfície presente em SA1 mostrada na Figura 4.15(b).

Com a aplicação da discretização apresentada na Seção 4.2.2 e as funções de aproximação pelo MEF descritas na Seção 2.4 o modelo multi-físico com aplicação do modelo acústico SLNS possui 99557 graus de liberdade para serem solucionados. Na Tabela 4.4 estão apresentadas informações da QGL para cada variável aproximada nos modelos que compõem este modelo multi-físico. Nesta tabela pode-se perceber que o modelo acústico (SLNS) ainda representa grande parte da QGL em relação ao modelo multi-físico com, aproximadamente, 95% do total de GL do modelo multi-físico.

O processo de solução deste modelo multi-físico ocorre da seguinte forma sequencial:

Tabela 4.4 – Quantidade de graus de liberdade (QGL) presentes em cada modelo aplicado ao modelo multi-físico com aplicação do modelo acústico SLNS.

Modelo	Variável aproximada	QGL em Ω_e	QGL em Ω	QGL Total
Acústico (SLNS)	Ψ_v	6	41870	94410
	Ψ_h	6	41870	
	p	3	10670	
Estrutural	\mathbf{u}	12	2610	2610
Piezoelétrico	\mathbf{u}	12	1452	2537
	φ	6	1085	

- Solução dos parâmetros viscotérmicos do modelo SLNS (Ψ_v e Ψ_h);
- Solução do sistema com acoplamento dos sistemas acústico (p), piezoelétrico (\mathbf{u} e φ) e estrutural (\mathbf{u}).

Desta forma, o custo computacional deste modelo multi-físico é menor do que o MR onde todos os GL são solucionados de forma acoplada.

4.3.3 Comparação entre os modelos simplificados

Na Figura 4.18 apresenta-se a FRF extraída dos modelos avaliados para o cálculo da função δ_{FRF} que é apresentada na Figura 4.19. Na Figura 4.18 pode-se notar que a diferença visual entre os modelos parece pequena. Porém, ao se avaliar a função δ_{FRF} na Figura 4.19, pode-se notar que o modelo LRF possui erros maiores do que o modelo SLNS chegando em torno de 1 dB nas frequências naturais (próximas de 3150 Hz e 7700 Hz) e na frequência próxima de 100 Hz. Os erros altos nas frequências naturais se devem ao deslocamento destas frequências em cada modelo avaliado que é também evidenciado pela grande oscilação da função δ_{FRF} em torno destas frequências.

O aumento da função δ_{FRF} nas frequências próximas de 100 Hz para ambos modelos simplificados avaliados não tem, a priori, explicação direta. De fato, nas baixas frequências, tem-se um aumento exponencial das camadas limites viscosa e térmica evidenciado pelas equações (4.7) e (4.8), respectivamente. Diante disto, os efeitos viscotérmicos são maiores nesta região e a diferença entre os modelos

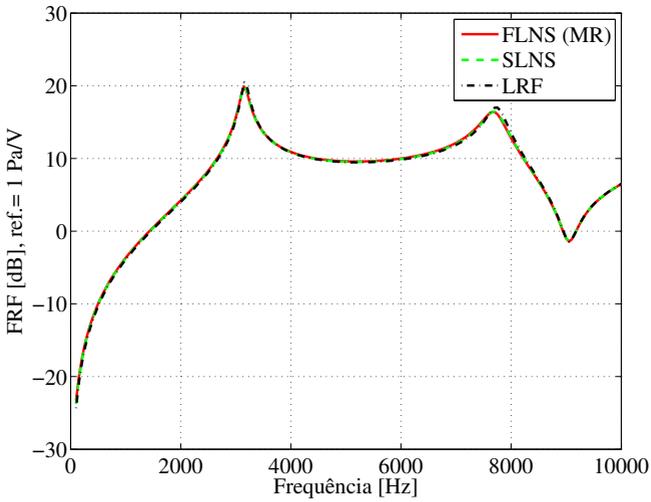


Figura 4.18 – Comparação da magnitude da FRF com o modelo multi-físico utilizando diferentes modelos acústicos com efeito visco-térmico.

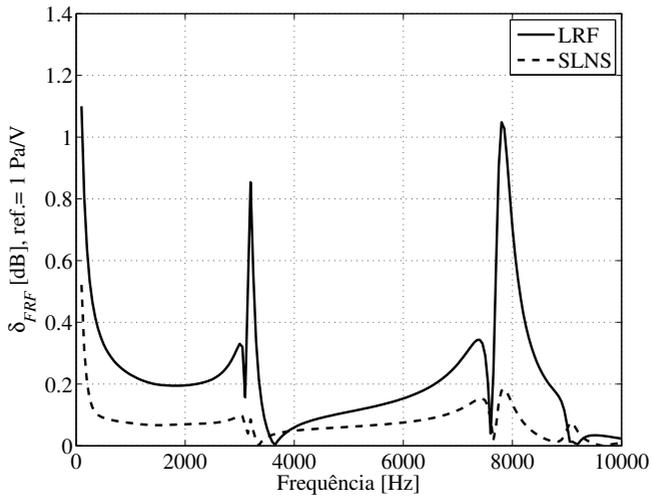


Figura 4.19 – Função δ_{FRF} obtida para cada modelo acústico viscotérmico simplificado.

simplificados e o MR pode ser maior. Porém, para tentar esclarecer melhor a influência destes efeitos nesta análise, uma diferente condição de contorno acústica foi testada. Como, neste caso, a impedância aplicada (Z_{rad}) simula o efeito de tubo aberto, foi testada a troca desta por uma condição parede rígida.

Na Figura 4.20 pode-se visualizar a FRF extraída dos modelos avaliados alterando somente a condição de contorno mencionada acima. Nesta figura pode-se perceber que, novamente, os modelos têm pequena diferença visual entre si. Na avaliação da função δ_{FRF} , apresentada na Figura 4.21, pode-se notar que o comportamento é similar aos apresentados na Figura 4.19, sendo o modelo LRF com maiores erros e os valores mais expressivos de δ_{FRF} na frequência natural (em 5000 Hz aproximadamente). Porém, os erros apresentados nas baixas frequências (em torno de 100 Hz) foram, desta vez, muito menores.

Comparando as FRF das figuras 4.18 e 4.20, pode-se notar que na primeira tem-se um forte decaimento na FRF nas baixas frequências (em torno de 100 Hz), aparentando uma anti-ressonância, com maiores valores para a respectiva função δ_{FRF} . Esta característica não está presente na Figura 4.20 e sua respectiva função δ_{FRF} que apresentou valores baixos. Portanto, apesar dos efeitos viscotérmicos serem mais evidenciados nas baixas frequências, os modelos simplificados apresentaram boa precisão nesta faixa de frequência, a menos que haja comportamentos singulares como ressonâncias ou anti-ressonâncias, conforme verificado nos casos até aqui analisados.

O modelo SLNS apresentou sempre melhores resultados em relação ao modelo LRF, com erros inferiores a 0,52 dB no primeiro caso (Figura 4.19) e 0,2 dB no segundo caso (Figura 4.21). Além deste fato, pode-se perceber nestas funções δ_{FRF} que as oscilações nas regiões de ressonância são menores, evidenciando que o modelo SLNS possui boa precisão, tanto na aproximação da amplitude quanto na aproximação da frequência natural.

Na Tabela 4.5 está apresentada uma comparação global entre os modelos simplificados e o MR. Nesta tabela pode-se destacar a grande diferença entre os tempos de solução dos modelos simplificados e do MR. O caráter distribuído dos parâmetros viscotérmicos no modelo SLNS é uma importante diferença em relação ao modelo LRF. Neste sentido, o modelo SLNS mostra-se como uma boa alternativa ao modelo FLNS (aplicado no MR), principalmente, em geometrias mais complexas onde o modelo LRF apresentará ainda menor precisão devido à indisponibilidade de uma solução analítica precisa para o cálculo dos parâmetros viscotérmicos. Porém, o modelo LRF possui baixo custo computacio-

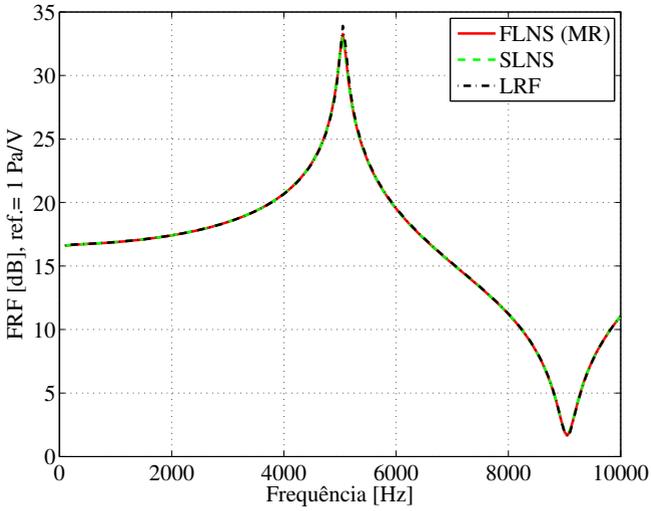


Figura 4.20 – Comparação da magnitude da FRF com o modelo multi-físico utilizando diferentes modelos acústicos com efeito visco-térmico.

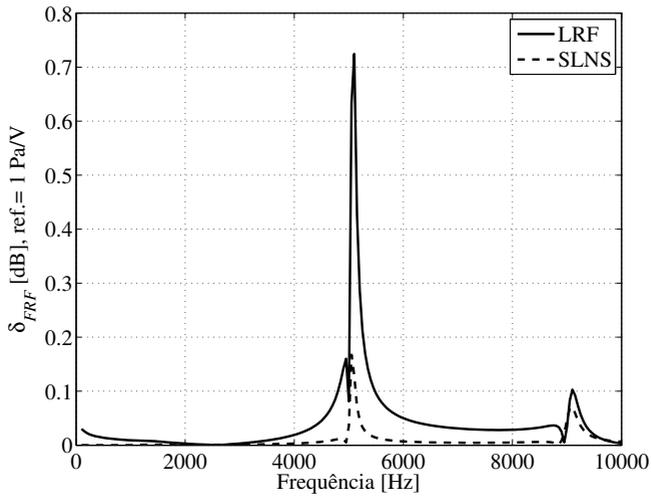


Figura 4.21 – Função δ_{FRF} obtida para cada modelo acústico visco-térmico simplificado considerando parede rígida em S1.

nal sendo 26,7 vezes mais rápido que o MR, podendo ser uma excelente alternativa para redução do custo computacional quando aplicado em geometrias mais simples.

Tabela 4.5 – Comparação global entre os modelos simplificados.

Modelo	FLNS (MR)	LRF	SLNS
QGL	141427	15817	99557
$\langle \delta_{FRF} \rangle_f$ [dB]	N/A	0,22	0,07
$\max(\delta_{FRF})$ [dB]	N/A	1,10	0,52
TS [s]	1202	45	308
FA	N/A	26,7	3,9

4.4 CONCENTRAÇÃO DE PARÂMETROS VISCOTÉRMICOS DO MODELO SLNS

Diante dos resultados aqui apresentados, apesar da simplicidade geométrica do sistema analisado, pode-se verificar uma razoável diferença entre o modelo SLNS e o LRF. Para efeito de comparação, os parâmetros viscotérmicos do modelo SLNS (Ψ_v e Ψ_h) foram concentrados, calculando-se a média destes em cada domínio acústico DA1, DA2 e DA3 e aplicados na equação da onda como um parâmetro global no respectivo domínio, de forma análoga ao modelo LRF.

Na Figura 4.22 está apresentada uma comparação da função δ_{FRF} obtida com aplicação da concentração dos parâmetros viscotérmicos no modelo SLNS. Nesta figura pode-se notar o efeito desta concentração de parâmetros na função δ_{FRF} que se aproxima dos valores obtidos pelo modelo LRF. Porém, apesar do aumento de δ_{FRF} , estes ainda ficam abaixo do modelo LRF em quase todo o espectro. Como os parâmetros concentrados no modelo SLNS consideram as distribuições de Ψ_v e Ψ_h em cada domínio, pode-se captar efeitos localizados aumentando a precisão do parâmetro concentrado. Em outras palavras, os parâmetros concentrados no modelo SLNS consideram efeitos viscotérmicos negligenciados no modelo LRF como os efeitos das paredes cilíndricas dos domínios DA2 e DA3 e os efeitos da variação geométrica na junção dos domínios DA1 e DA2.

A concentração de parâmetros viscotérmicos do modelo SLNS, apesar de aumentar os erros em relação ao MR, pode ser uma boa estra-

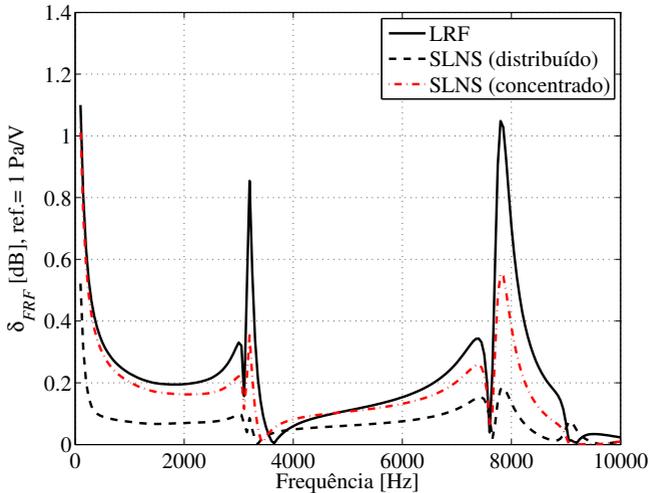


Figura 4.22 – Comparação da função δ_{FRF} para os modelos LRF e SLNS (distribuído e concentrado).

tégia para redução do custo computacional deste modelo, pois permite a aplicação de malhas menos restritas na solução do problema multifísico. Como as equações diferenciais dos parâmetros distribuídos do modelo SLNS, (2.83a) e (2.83b), são desacopladas de sua equação da onda (2.83c), após a concentração dos parâmetros os requisitos de malha não precisam mais ser tão restritos como no modelo distribuído. Neste sentido, pode-se utilizar malhas mais grosseiras na solução da Equação (2.83c) que acopla com modelos piezoelétricos e estruturais (modelo multi-físico).

Na Figura 4.23 está apresentada uma comparação da função δ_{FRF} obtida com os modelos LRF e SLNS (concentrado) com a discretização atual (l_{max}) e uma discretização mais grosseira com tamanho máximo de elemento quatro vezes maior do que a discretização atual ($4l_{max}$). Nesta figura pode-se notar que assim como o modelo LRF, com a malha mais grosseira ($4l_{max}$) o modelo SLNS sofre um incremento na função δ_{FRF} em relação a malha atual (l_{max}), principalmente, nas regiões de ressonâncias do sistema. Porém, o modelo SLNS apresentou valores, geralmente, menores do que o modelo LRF quando considerada a mesma discretização.

Na Tabela 4.6 está apresentada uma comparação global entre os modelos SLNS (concentrados). Nesta tabela, pode-se perceber que

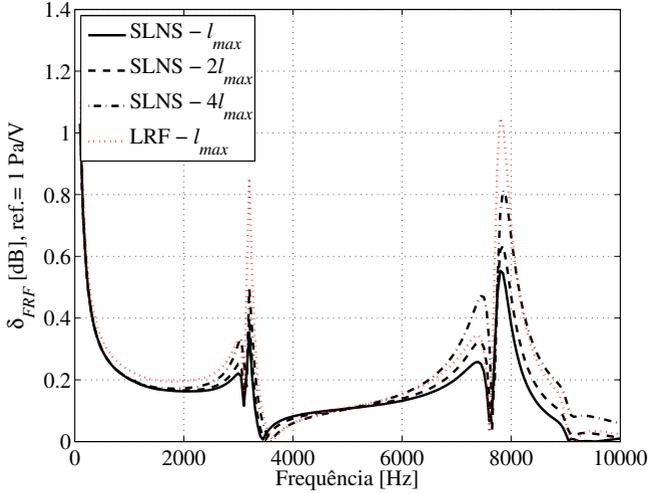


Figura 4.23 – Comparação da função δ_{FRF} para os modelos LRF e SLNS (concentrado) com diferentes malhas.

há pouca variação dos valores médios de δ_{FRF} entre os modelos SLNS concentrados com discretização mais grosseira na solução do modelo acoplado ($2l_{max}$ e $4l_{max}$) e a discretização atual (l_{max}), enquanto que o valor máximo de δ_{FRF} permaneceu igual para todos os casos. O tempo de solução assim como o QGL sofreram pouca alteração em relação ao modelo SLNS distribuído. Este fato se deve a restrição da solução dos parâmetros viscotérmicos com a discretização atual (l_{max}) devido à espessura das camadas limites λ_v e λ_h . Com esta restrição, a solução dos campos Ψ_v e Ψ_h requerem 83740 GL a serem solucionados, representando assim 84% do total de GL do modelo multi-físico. Neste sentido, a utilização de uma discretização mais grosseira na solução do modelo acoplado resulta em pequena redução do QGL total e, conseqüentemente, pouca redução no tempo de solução.

Apesar da baixa redução de custo computacional com a aplicação de discretizações mais grosseiras na solução do problema acoplado com parâmetros concentrados, esta simplificação pode ser bastante útil, principalmente, na análise de problemas onde houver alta densidade de discretização como, por exemplo, em problemas com discretizações tridimensionais.

Tabela 4.6 – Comparação global entre os modelos multi-físico com parâmetros do modelo SLNS concentrados.

Modelo	MR	SLNS (concentrados)		
Tamanho máximo do elemento	l_{max}	l_{max}	$2l_{max}$	$4l_{max}$
QGL	141427	99557	93525	92171
$\langle \delta_{FRF} \rangle_f$ [dB]	N/A	0,16	0,18	0,22
$\max(\delta_{FRF})$ [dB]	N/A	1,03	1,03	1,03
TS [s]	1202	293	280	273
FA	N/A	4,1	4,3	4,4

4.5 INTERPOLAÇÃO DE PARÂMETROS VISCOTÉRMICOS NO MODELO SLNS

Apesar da concentração dos parâmetros viscotérmicos no modelo SLNS apresentar valores razoáveis para a função δ_{FRF} , o seu efeito na redução de custo computacional é relativamente pequeno quando utilizadas malhas mais grosseiras na solução do modelo multi-físico, como mostrado na Seção 4.4. Este fato evidencia que, neste modelo avaliado, a solução dos parâmetros distribuídos Ψ_v e Ψ_h possui custo computacional muito maior que a solução do modelo multi-físico. De fato, a necessidade de uma malha mais refinada e funções de aproximação quadráticas contribuem muito no aumento do custo computacional para se obter os campos Ψ_v e Ψ_h , pois estes são solucionados para cada frequência de análise.

Conforme descrito na Seção 4.2, a faixa de frequência de análise é de 100 Hz a 10000 Hz com discretização de 50 Hz, resultando em 199 frequências analisadas. Na Figura 4.24 pode-se visualizar o campo da amplitude de Ψ_v obtido no modelo SLNS para algumas frequências nesta faixa de análise. Nesta figura pode-se notar que há uma variação relativamente suave no campo de Ψ_v de uma frequência para outra.

Como o campo de Ψ_h é bastante semelhante ao de Ψ_v , propõe-se aqui uma avaliação da interpolação dos campos Ψ_v e Ψ_h na frequência, mantendo-se assim o caráter distribuído destes na solução do modelo acoplado. Nesta análise, foram aplicadas diferentes discretizações na frequência para solução dos parâmetros viscotérmicos Ψ_v e Ψ_h na faixa de 100 à 10000 Hz. Nestas discretizações foram aplicadas distribuições lineares e quadráticas, sendo as frequências analisadas obtidas pela ex-

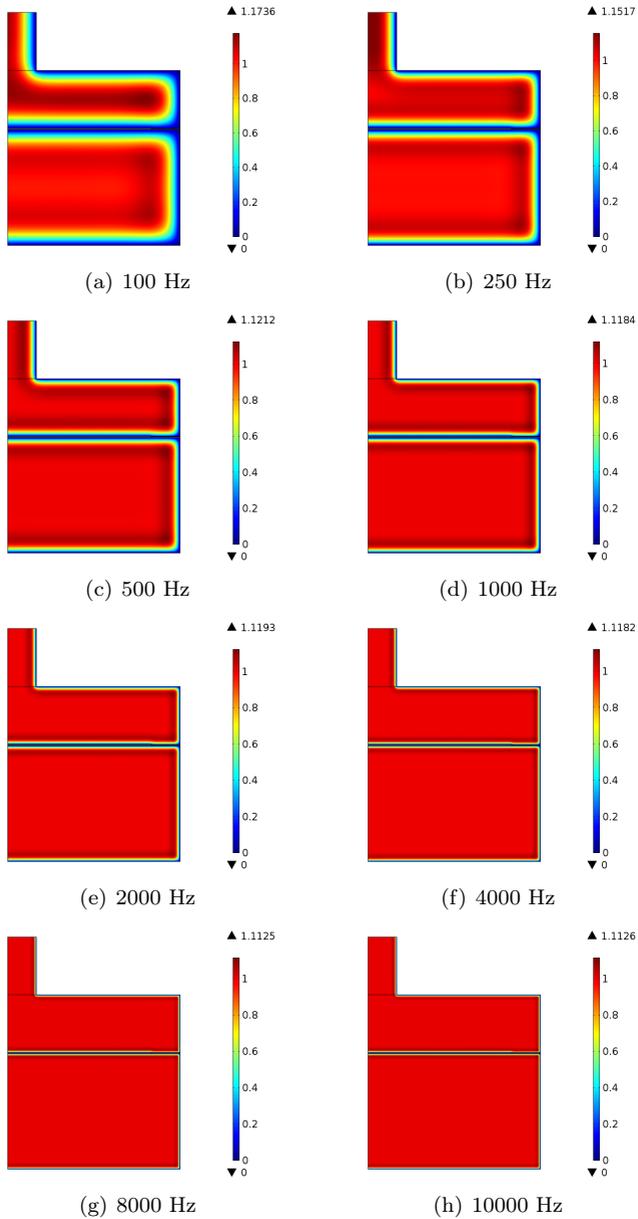


Figura 4.24 – Campo da amplitude Ψ_v para algumas frequências entre 100 Hz e 10000 Hz.

pressão

$$f(nf) = \frac{10000 - 100}{(NF - 1)^m} (nf - 1)^m + 100, \text{ para } nf = 1, 2, \dots, NF, \quad (4.15)$$

sendo $m = 1$ para distribuições lineares, $m = 2$ para distribuições quadráticas e NF a quantidade de frequências utilizadas para solução de Ψ_v e Ψ_h .

Para cada tipo de distribuição foram analisadas discretizações com $NF=20$, $NF=10$ e $NF=5$. Em cada caso, após a solução de Ψ_v e Ψ_h , foi solucionado o modelo acoplado com discretização de 50 Hz, sendo aplicadas interpolações lineares sobre os campos Ψ_v e Ψ_h nas frequências onde estes não foram solucionados.

Na Figura 4.25 estão apresentadas os espectros de δ_{FRF} calculados para o modelo multi-físico (SLNS) com interpolação linear na frequência de distribuições lineares de Ψ_v e Ψ_h ($m = 1$). Nesta figura pode-se visualizar também a função δ_{FRF} sem interpolação ($NF = 199$), sendo que os casos interpolados oscilam em torno desta, conforme esperado. Estas oscilações são maiores nas baixas frequências (entre 100 e 3400 Hz) e são menores ou quase imperceptíveis nas altas frequências (entre 3400 e 10000 Hz). Esta característica pode ser explicada pelo comportamento exponencial das camadas limites, sendo que nas baixas frequências ocorrem as maiores variações na frequência destas camadas, conforme pode ser também visualizado na Figura 4.24.

Na Tabela 4.7 estão apresentados os parâmetros globais de desempenho dos modelos que correspondem às curvas apresentadas na Figura 4.25. Nesta tabela pode-se perceber que os valores de $\langle \delta_{FRF} \rangle_f$ e $\max(\delta_{FRF})$ se mantêm em patamares em torno do caso sem interpolação ($NF=199$). O parâmetro TS dos modelos interpolados sofre uma drástica redução com relação ao modelo sem interpolação, resultando no aumento do parâmetro FA.

Na Figura 4.26 estão apresentadas os espectros de δ_{FRF} calculados para o modelo multi-físico (SLNS) com interpolação linear na frequência de distribuições quadráticas de Ψ_v e Ψ_h ($m = 2$). Nesta figura pode-se perceber que os modelos com as discretizações $NF=20$ e $NF=10$ possuem de forma geral valores muito próximos do modelo sem interpolação. A discretização $NF=5$ também apresenta valores bastante próximos do modelo sem interpolação com leves oscilações abaixo deste nas frequências abaixo de 3000 Hz.

Na Tabela 4.8 estão apresentados os parâmetros globais de desempenho dos modelos que correspondem às curvas apresentadas na Figura 4.26. Nesta tabela pode-se perceber que, assim como nas dis-

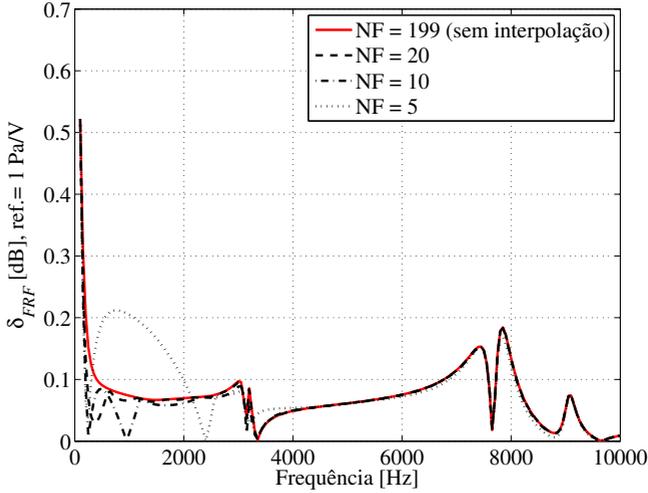


Figura 4.25 – Espectros de δ_{FRF} calculados com modelos multi-físicos (SLNS) com interpolação linear na frequência da solução de Ψ_v e Ψ_h com distribuição linear ($m = 1$).

Tabela 4.7 – Parâmetros globais de desempenho dos modelos multi-físicos (SLNS) com interpolação linear dos campos Ψ_v e Ψ_h solucionados com diferentes valores de NF distribuídos linearmente.

Modelo	SLNS	SLNS (interpolação linear)		
	NF=199	NF=20	NF=10	NF=5
QGL	99557	99557	99557	99557
$\langle \delta_{FRF} \rangle_f$ [dB]	0,073	0,070	0,066	0,085
$\max(\delta_{FRF})$ [dB]	0,52	0,52	0,52	0,52
TS [s]	308	72	65	55
FA	3,9	16,7	18,5	21,9

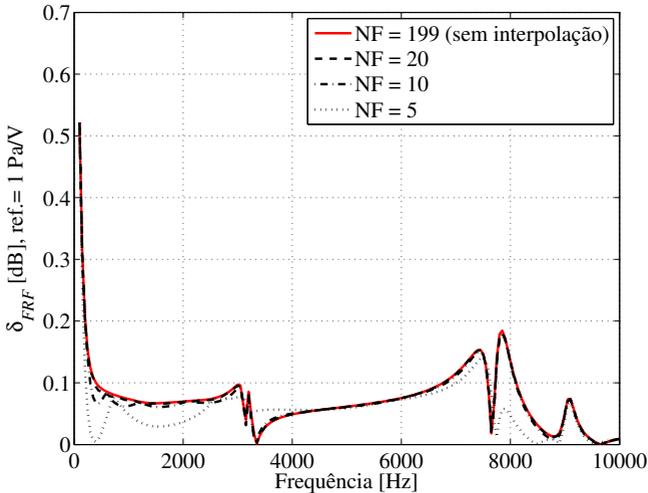


Figura 4.26 – Espectros de δ_{FRF} calculados com modelos multi-físicos (SLNS) com interpolação linear na frequência da solução de Ψ_v e Ψ_h com distribuição quadrática ($m = 2$).

tribuições lineares, os valores de $\langle \delta_{FRF} \rangle_f$ e $\max(\delta_{FRF})$ se mantêm em torno ou iguais ao modelo sem interpolação (NF=199). Os parâmetros TS e FA foram similares aos obtidos na Tabela 4.7, conforme esperado.

Tabela 4.8 – Parâmetros globais de desempenho dos modelos multi-físicos (SLNS) com interpolação linear dos campos Ψ_v e Ψ_h solucionados em uma distribuição quadrática de frequências.

Modelo	SLNS	SLNS (interpolação linear)		
	NF=199	NF=20	NF=10	NF=5
QGL	99557	99557	99557	99557
$\langle \delta_{FRF} \rangle_f$ [dB]	0,073	0,072	0,070	0,057
$\max(\delta_{FRF})$ [dB]	0,52	0,52	0,52	0,52
TS [s]	308	68	63	59
FA	3,9	17,7	19,1	20,4

De forma geral pode-se notar que, nos casos com distribuição quadrática na frequência, os espectros de δ_{FRF} foram mais próximos do modelo sem interpolação do que nos casos com distribuição linear. Isto evidencia, mais uma vez, a maior sensibilidade dos campos Ψ_v e

Ψ_h nas baixas frequências conforme mostrado pelas estimativas de espessura das camadas limites térmica e viscosa. Portanto, como foram utilizadas interpolações lineares para ambas distribuições, a distribuição quadrática permitiu menores oscilações de δFRF por concentrar mais pontos nas baixas frequências onde os campos Ψ_v e Ψ_h possuem maior variação.

4.6 PROPOSTA DE SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA PARA O MODELO SLNS

Diante de todos modelos simplificados e estratégias para redução de custo do modelo multi-físico aqui avaliadas, pode-se afirmar que a aplicação do modelo SLNS é a opção mais versátil e precisa para inclusão dos efeitos viscotérmicos nos modelos acústicos com menor custo computacional em relação ao modelo FLNS. Por outro lado, o modelo LRF, por ser uma abordagem de incorporação de parâmetros viscotérmicos de forma analítica e concentrada na equação da onda de pressão acústica, possui custo computacional muito menor do que o modelo SLNS. Porém a precisão do modelo LRF pode ser somente controlada quando há semelhança geométrica entre o domínio acústico modelado e o domínio onde a solução analítica dos parâmetros viscotérmicos foi obtida.

A interpolação linear dos parâmetros viscotérmicos no modelo SLNS mostrou-se uma alternativa bastante eficiente apresentando precisão no modelo multi-físico e reduções drásticas no tempo de solução, como mostrado na Seção 4.5. Porém, apesar da interpolação dos parâmetros viscotérmicos no modelo SLNS ser viável, ainda se faz necessário obter os campos Ψ_v e Ψ_h de forma numérica, ou seja, solucionar, em algumas frequências, dois sistemas lineares com grande quantidade de graus de liberdade. Para contornar isto, será aqui apresentada uma alternativa para se obter Ψ_v e Ψ_h de forma semi-analítica. Com esta alternativa, pode-se obter um modelo com precisão em torno do modelo SLNS com custo computacional em torno do modelo LRF.

A alternativa de solução aqui proposta é a aplicação de soluções analíticas para representar os campos Ψ_v e Ψ_h em geometrias e frequências arbitrárias. Na Figura 4.27 pode-se observar estes campos (valores real e imaginário) calculados numericamente para a frequência de 1000 Hz. De forma geral, as maiores variações dos campos Ψ_v e Ψ_h ocorrem na direção normal às superfícies onde as condições de contorno $\Psi_v = 0$ e $\Psi_h = 0$ são aplicadas. Diante desta característica, com o auxílio

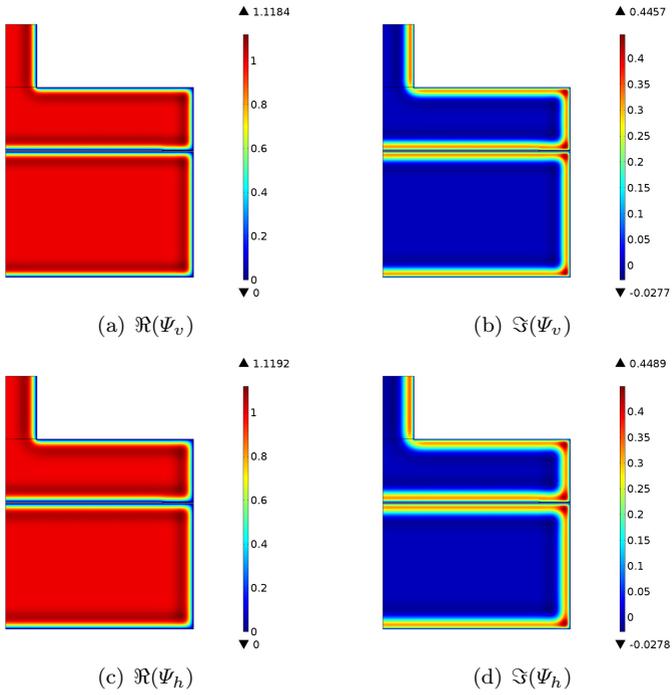


Figura 4.27 – Valores real (\Re) e imaginário (\Im) dos campos Ψ_v e Ψ_h em 1000 Hz.

de uma função distância pode-se aplicar uma função unidimensional para aproximar os campos Ψ_v e Ψ_h . A função distância define em cada ponto do domínio acústico, definido pelo vetor posição \mathbf{r} , um valor $d(\mathbf{r})$ que representa a distância deste ponto até à superfície onde $\Psi_v = 0$ e $\Psi_h = 0$. Portanto, utilizando as soluções analíticas unidimensionais dos campos Ψ_v e Ψ_h aplicadas sobre a função distância, pode-se obter os campos $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e $\Psi_h(d(\mathbf{r}))$ como proposta de aproximação. Sendo estas soluções unidimensionais também dependentes da frequência, tem-se desta forma uma aproximação dos campos Ψ_v e Ψ_h para qualquer frequência arbitrária sem a necessidade de obter numericamente estes campos.

A função distância pode ser obtida de diversas formas como, por exemplo: algoritmos de busca [75] e equações diferenciais [76, 77]. Neste trabalho, por conveniência, foi utilizado um método por equação diferencial para se determinar a função distância devido a sua disponibilidade no software Comsol [28] que foi utilizado na construção dos modelos multi-físicos. A seguir, será apresentado de forma breve a equação diferencial utilizada para se determinar a função distância.

4.6.1 Equação diferencial da função distância

Na literatura, há diversos métodos para se determinar a função distância por equações diferenciais utilizando as equações de Poisson, Eikonal e Hamilton-Jacobi [76, 77]. Neste trabalho, a equação diferencial utilizada para se obter o campo de distâncias é desenvolvida a partir da equação Eikonal dada por [78]

$$|\nabla d| = 1, \quad (4.16)$$

com a seguinte condição de contorno nas paredes do sistema:

$$d = 0 \text{ (condição de contorno essencial)}. \quad (4.17)$$

A equação Eikonal calcula a distância exata da parede mais próxima. Porém, para contornar alguns problemas na solução numérica, esta equação é modificada por Fares [78] substituindo-se a função d por sua inversa $G = 1/d$, obtendo-se

$$|\nabla G|^2 = \nabla G \cdot \nabla G = G^4. \quad (4.18)$$

Adicionalmente, termos de difusão são adicionados do lado es-

querdo da Equação (4.18) e compensados no lado direito desta através do termo de suavização σ_w resultado em

$$\nabla G \cdot \nabla G + \sigma_w G \Delta G = (1 + 2\sigma_w)G^4, \quad (4.19)$$

com as seguintes condições de contorno essencial e natural:

$$G = G_0 = \frac{4}{l_{ref}} \text{ (condição de contorno onde há paredes),} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla G = 0 \text{ (condição contorno onde não há paredes).} \quad (4.21)$$

Com a solução da Equação (4.19) obtém-se a função G , sendo a função distância aproximada (\hat{d}) obtida por

$$\hat{d} = \frac{1}{G} + \frac{1}{G_0}. \quad (4.22)$$

Por ser uma equação não-linear, o processo de solução da Equação (4.19) é iterativo sendo $G_{init} = G_0$ a distribuição inicial no interior do domínio. Os parâmetros σ_w e G_0 têm influência na precisão e estabilidade da solução de \hat{d} , sendo estas influências avaliadas no trabalho de Fares [78]. Os parâmetros utilizados nas análises aqui realizadas serão de $\sigma_w = 0, 1$ e $G_0 = 4/l_{ref}$, sendo l_{ref} igual ao valor mínimo entre o comprimento e a altura do retângulo (em um modelo 2D) que envolve o domínio da Equação (4.19), respectivamente.

A Equação (4.19) é solucionada numericamente pelo MEF, com utilização da formulação fraca dada por

$$\int_{\Omega} -\sigma_w \nabla G^* \cdot G \nabla G + G^* (1 - \sigma_w) (\nabla G \cdot G \nabla) - \\ -G^* (1 + 2\sigma_w) G^4 \, d\Omega = 0, \quad (4.23)$$

aplicando-se a condição de contorno essencial apresentada na Equação (4.20) nos contornos onde há paredes, pois a condição natural já está implicitamente satisfeita na Equação (4.23).

A função G^* da Equação (4.23) é a função ponderação, conforme o método de resíduos ponderados [39]. Assim como nos demais modelos aqui apresentados, na discretização da formulação fraca considera-se o método de Galerkin onde a função ponderação corresponde a mesma função de aproximação aplicada em G . Neste trabalho, nos elementos finitos construídos para aproximação de G , foram aplicadas funções quadráticas.

A formulação fraca descrita acima foi aplicada nos domínios acústicos do sistema multi-físico apresentado na Seção 4.2 aplicando a condição de contorno essencial em todas as superfícies descritas na Figura 4.15(a) com exceção das superfícies S1 e S4 e da aresta A1.

Na Figura 4.28 está apresentado o mapa de cores e a superfície gerados pela função distância obtida numericamente nos domínios acústicos. Na Figura 4.28(a) pode-se notar que o valor máximo da função distância na cavidade inferior (aproximadamente 0,9 mm) apresenta um erro de, aproximadamente, 10% em relação ao valor real geométrico que é igual a 1 mm. Este erro pode ser controlado pelo parâmetro σ_w , que introduz uma suavização na função distância, como pode-se perceber pelo arredondamento da superfície gerada pela função distância na Figura 4.28(b).

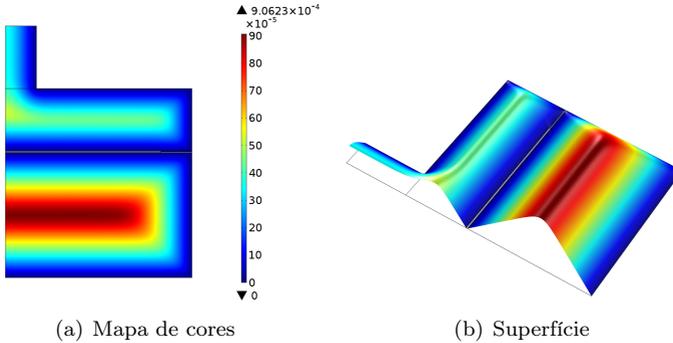


Figura 4.28 – Função distância (em m) obtida nos domínios acústicos do modelo multi-físico analisado.

Com a função distância obtida na Figura 4.28 serão aplicadas soluções analíticas (unidimensionais) das equações (2.83a) e (2.83b) apresentadas a seguir.

4.6.2 Solução analítica dos parâmetros viscotérmicos

Para a solução analítica dos parâmetros viscotérmicos considera-se uma variação unidimensional de Ψ_v e Ψ_h tornando as equações (2.83a) e (2.83b) nas seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$k_v^{-2} \frac{d^2 \Psi_v}{d\xi^2} + \Psi_v = 1, \quad (4.24a)$$

$$k_h^{-2} \frac{d^2 \Psi_h}{d\xi^2} + \Psi_h = 1, \quad (4.24b)$$

sendo ξ a coordenada unidimensional.

Este método pretende utilizar a solução das equações (4.24) para gerar os campos Ψ_v e Ψ_h no domínio acústico em uma frequência arbitrária. Neste sentido, estas equações são solucionadas, analiticamente, considerando as seguintes condições de contorno:

$$\Psi_v(\xi = 0) = 0, \quad (4.25a)$$

$$\Psi_h(\xi = 0) = 0, \quad (4.25b)$$

$$\Psi_v(\xi \rightarrow \infty) = 1, \quad (4.25c)$$

$$\Psi_h(\xi \rightarrow \infty) = 1. \quad (4.25d)$$

As duas primeira condições são as mesmas já apresentadas anteriormente, sendo a posição $\xi = 0$ referente a superfícies de não-escorregamento e isotérmicas. As duas últimas condições foram utilizadas para tornar a solução aplicável à qualquer distância da parede, sendo a posição $\xi \rightarrow \infty$ referente à uma distância da parede do sistema onde os efeitos viscotérmicos não estão mais presentes.

Com a aplicação das condições apresentadas na Equação (4.25) obtêm-se seguintes soluções:

$$\Psi_v(\xi) = 1 - e^{-ik_v \xi}, \quad (4.26a)$$

$$\Psi_h(\xi) = 1 - e^{-ik_h \xi}. \quad (4.26b)$$

As soluções acima com utilização da função distância como argumento, ou seja $\xi = d(\mathbf{r})$, permitem obter os campos $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e $\Psi_h(d(\mathbf{r}))$ para qualquer frequência e então aplicá-los na equação da onda de pressão acústica tal como é feito no modelo SLNS, sendo esta abordagem aqui chamada de modelo SLNS semi-analítico (SLNS-SA).

4.6.3 Análise dos resultados

Na Figura 4.29 tem-se uma comparação dos campos $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e a solução numérica de Ψ_v , na frequência de 1000 Hz. Nesta comparação pode-se perceber que os campos $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e Ψ_v possuem muitas semelhanças tanto na forma como também os valores obtidos, sendo as principais diferenças encontradas nos cantos vivos da cavidade onde

há um acúmulo do campo Ψ_v que não é contemplado pela aproximação $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$, como pode ser percebido com mais evidência na comparação das figuras 4.29(d) e 4.29(b).

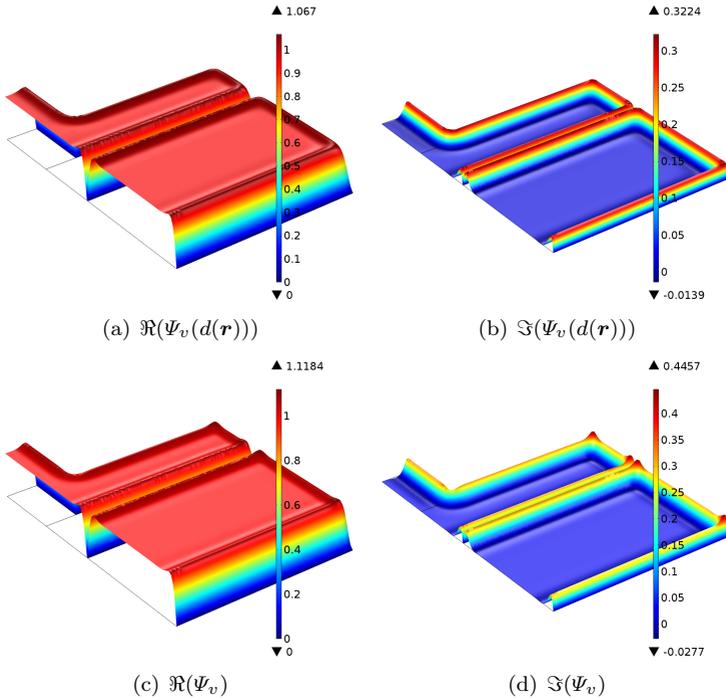


Figura 4.29 – Valores real (\Re) e imaginário (\Im) dos campos $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e a solução numérica de Ψ_v em 1000 Hz.

Com a aplicação dos campos aproximados $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e $\Psi_h(d(\mathbf{r}))$ no modelo multi-físico, foi obtida a função δ_{FRF} apresentada na Figura 4.30, onde pode-se ver a comparação entre os modelos multi-físicos com aplicação dos modelos acústicos SLNS-SA, SLNS e LRF. Nesta comparação, pode-se perceber a grande proximidade entre as curvas SLNS-SA e SLNS evidenciando que a abordagem aplicada para aproximação dos campos $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e $\Psi_h(d(\mathbf{r}))$ tem grande precisão na avaliação global deste sistema multi-físico, quantificada aqui pela FRF. Pode-se verificar também que a curva SLNS-SA está, muitas vezes, um pouco abaixo da curva SLNS. Esta característica é interessante pois evidencia que os campos aproximados $\Psi_v(d(\mathbf{r}))$ e $\Psi_h(d(\mathbf{r}))$ foram capazes de compensar,

globalmente no sistema analisado, erros gerados pelas simplificações adotadas para se obter o modelo SLNS.

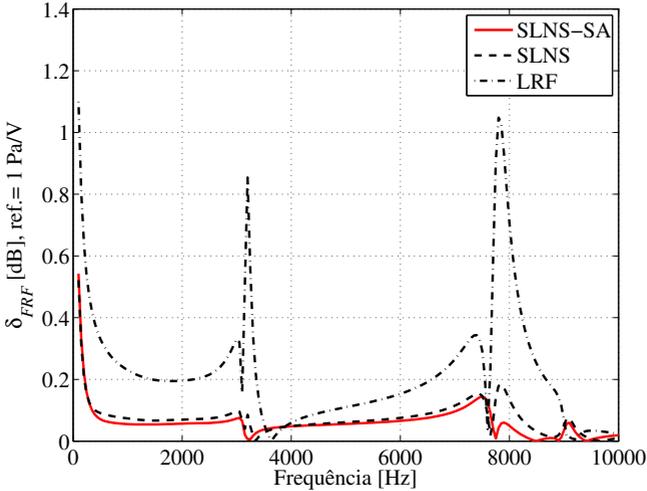


Figura 4.30 – Função δ_{FRF} obtida para os modelos SLNS-SA e SLNS.

Na Tabela 4.9 estão comparados os parâmetros globais obtidos pela aplicação dos modelos acústicos SLNS-SA, SLNS e LRF no modelo multi-físico. Os modelos SLNS-SA e SLNS apresentaram parâmetros relacionados à precisão do modelo ($\langle \delta_{FRF} \rangle_f$ e $\max(\delta_{FRF})$) muito próximos, conforme já evidenciado na Figura 4.30. Quanto à avaliação dos custos computacionais, o modelo SLNS-SA possui um custo muito menor do que o SLNS apresentando um tempo de solução próximo ao modelo LRF. Este fato pode ser justificado pela quantidade de graus de liberdade (QGL) em cada modelo. Enquanto que o modelo SLNS necessita solucionar 99557 graus de liberdade (GL) em cada frequência de análise, o modelo SLNS-SA necessita solucionar somente 15817 GL em cada frequência precedido de uma única solução de 41870 GL para se obter a função distância.

Para demonstrar, de forma qualitativa, que a precisão do modelo SLNS-SA se mantém em geometrias mais complexas, este modelo foi aplicado alterando-se a geometria das cavidades acústicas do sistema multi-físico, conforme mostra a Figura 4.31. Nesta figura, onde tem-se a geometria atual e alterada, pode-se perceber que as alterações aplicadas foram formas senoidais nas superfícies superior e inferior das cavidades superior e inferior, respectivamente. Na superfície superior

Tabela 4.9 – Comparação global entre os modelos SLNS-SA, SLNS e LRF.

Modelo	SLNS-SA	SLNS	LRF
QGL	41870(1 ×)+15817	99557	15817
$\langle \delta_{FRF} \rangle_f$ [dB]	0,06	0,07	0,22
$\max(\delta_{FRF})$ [dB]	0,54	0,52	1,10
TS [s]	50	308	45
FA	24,0	3,9	26,7

foi aplicada uma amplitude senoidal de 0,5 mm e na superfície inferior uma amplitude de 1 mm.

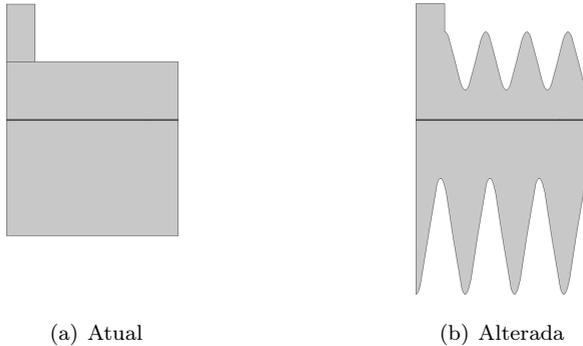


Figura 4.31 – Alteração geométrica das cavidades acústicas do modelo multi-físico para avaliação do modelo SLNS-SA em uma geometria mais complexa.

Com somente as alterações geométricas mostradas na Figura 4.31, foram solucionados modelos multi-físicos com aplicação dos modelos SLNS-SA, SLNS e LRF, além do MR para se obter as funções δ_{FRF} apresentadas na Figura 4.32. Como pode-se observar nesta figura, a precisão do modelo SLNS-SA se mantém próxima ao modelo SLNS.

Como já mostrado na Seção 4.3.1, o modelo LRF necessita de parâmetros geométricos para definição das funções analíticas que representam o efeito viscotérmico de forma concentrada. Neste sentido, o modelo LRF foi aplicado nas cavidades acústicas alteradas considerando-se as respectivas espessuras médias como parâmetro para estas funções analíticas. Como as alterações geométricas foram funções se-

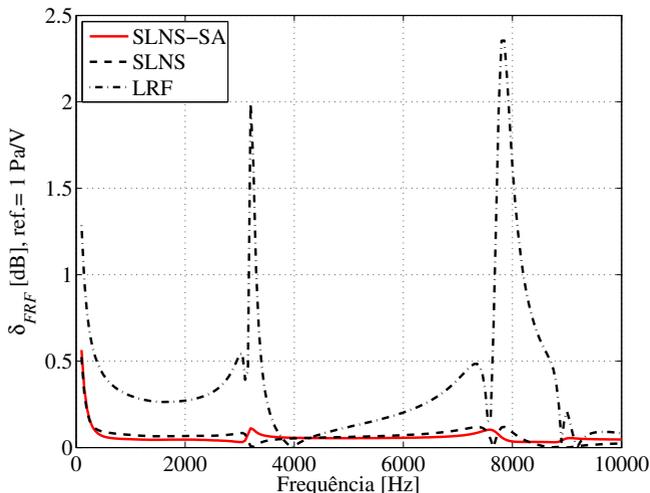


Figura 4.32 – Função δ_{FRF} obtida para os modelos SLNS-SA e SLNS aplicados no modelo multi-físico com geometria alterada.

noidais, as espessuras médias aplicadas foram as mesmas da geometria mostrada na Figura 4.31(a). A função δ_{FRF} com a aplicação do modelo LRF apresentou valores ainda maiores na avaliação do modelo multi-físico com geometria alterada, obtendo-se valores acima de 2 dB conforme mostrado na Figura 4.32. Diante disto, os parâmetros geométricos utilizados para se obter as funções analíticas do modelo LRF obtiveram menor precisão devido a variação geométrica das cavidades que foram, propositalmente, exageradas para esta análise.

Portanto, diante dos resultados obtidos nesta seção, pode-se concluir que a aplicação do modelo SLNS-SA é bastante precisa e computacionalmente eficiente. Com erros próximos aos modelo SLNS e custo computacional próximos ao modelo LRF, a abordagem aplicada no modelo SLNS-SA se apresenta como uma alternativa com grande custo-benefício para aplicação de efeitos viscotérmicos sistemas acústicos com geometrias arbitrárias.

5 OTIMIZAÇÕES PARAMÉTRICAS DE TRANSDUTORES PIEZOELÉTRICOS

Os protótipos de transdutores considerados na Seção 3 não foram projetados especificamente para aparelhos auditivos. Eles foram projetados com dimensões maiores do que os transdutores de aparelhos auditivos atuais para garantir a simplicidade do sistema e facilidade de fabricação, permitindo assim a validação dos modelos. A diferença de performance entre os protótipos de alto-falantes testados e os alto-falantes comerciais utilizados em aparelhos auditivos pode ser vista na Figura 5.1, que mostra uma comparação entre a resposta dos protótipos (NPS no microfone para um potencial elétrico de entrada de 1V) com dois modelos de alto-falantes comerciais para aparelhos auditivos. No entanto, os protótipos incluem os fenômenos físicos esperados na análise da resposta dinâmica de alto-falantes piezoelétricos e os conhecimentos adquiridos durante a modelagem e validação destes podem agora serem usados para projetar alto-falantes para aparelhos auditivos.

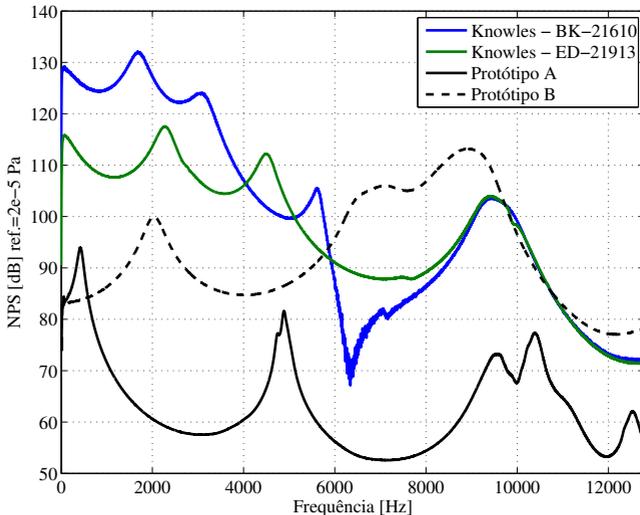


Figura 5.1 – Comparação do NPS de alto-falantes para aparelhos auditivos comerciais e os protótipos de alto-falantes piezoelétricos ($\varphi = 1$ V).

Os alto-falantes de aparelhos auditivos comerciais mostrados na Figura 5.1 são cuboides com dimensões nominais de 6,30 mm \times 4,29

mm \times 2,97 mm (fabricante Knowles ED 21913) e 7,87 mm \times 5,59 mm \times 4,01 mm (fabricante Knowles BK 21610). Apesar de suas dimensões serem menores que a dos protótipos, os alto-falantes comerciais produzem maior NPS em frequências inferiores a 6 kHz. Do ponto de vista do desempenho de alto-falante para aparelhos auditivos, esta faixa de frequência é particularmente importante porque é a principal faixa espectral dos sons da fala.

Assim como na configuração de alto-falantes, o Protótipo B configurado como microfone apresenta também baixo espectro de sensibilidade (mV/Pa), além de grandes variações na faixa de frequência de interesse, em relação aos microfones para aparelhos auditivos comerciais, conforme mostra a Figura 5.2. Neste sentido, com a utilização dos modelos avaliados no Capítulo 4, serão aplicadas técnicas de otimização em projetos básicos de alto-falantes e microfones piezoelétricos com o intuito de obter projetos com desempenho próximo ou superior aos transdutores comerciais. Primeiramente, serão aplicadas otimizações paramétricas com projetos básicos de alto-falante e microfone com geometrias simples. Em seguida, serão aplicadas otimizações com parâmetros de forma permitindo a geração de geometrias mais complexas.

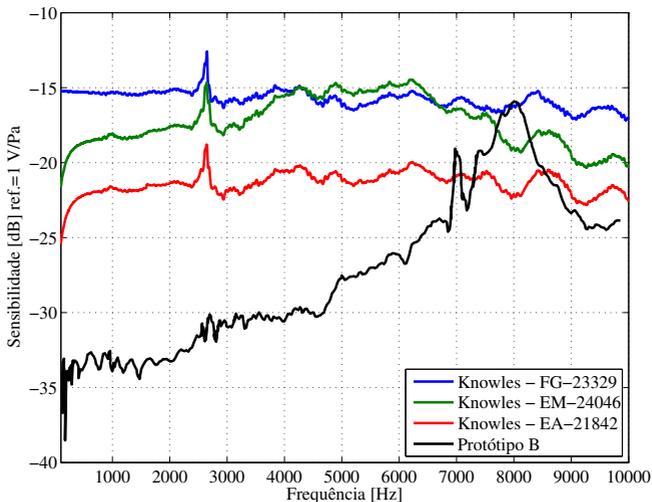


Figura 5.2 – Comparação da sensibilidade de microfones para aparelhos auditivos comerciais e o Protótipo B configurado como microfone piezoelétricos.

5.1 OTIMIZAÇÃO DE ALTO-FALANTES PIEZOELÉTRICOS

A seguir, serão apresentadas as configurações dos projetos básicos de alto-falantes piezoelétricos que serão otimizados.

5.1.1 Projetos básicos de alto-falantes

Dois projetos básicos inspirados no Protótipo B foram criados, como mostrado na Figura 5.3. Estes projetos têm configurações semelhantes ao protótipo B com a adição de uma cavidade traseira para torná-los semelhantes aos alto-falantes de aparelho auditivo comerciais e evitar a radiação do som para o interior do aparelho auditivo. Os parâmetros X_1 e X_2 são índices que denotam grupos de propriedades de materiais piezoelétricos e estruturais. Neste sentido, estes parâmetros são variáveis inteiras que correspondem aos materiais da Tabela 5.1. As propriedades aplicadas para cada material estão detalhadas no Apêndice A. Em ambos projetos há um tubo por onde as ondas sonoras deixam o sistema, conforme já explicado no Capítulo 3. Como também mostrado neste capítulo, este tubo é acoplado a outros tubos que conduzem as ondas sonoras para o canal auditivo ou um sistema que o simule. Portanto, considerando que os alto-falantes são acoplados em sistemas padronizados de teste e de utilização, foi considerado um tubo de saída de tamanho compatível com os alto-falantes de aparelhos auditivos atuais com diâmetro de 1 mm e comprimento de 1,5 mm.

Tabela 5.1 – Materiais que correspondem aos valores (índices) das variáveis inteiras na otimização.

Índice	Estrutural	Piezoelétrico
1	Aço	Titanato Zirconato de Chumbo (PZT-5A)
2	Cobre	Titanato de Bário
3	Alumínio	Nitreto de Alumínio
4	Acrílico	Fluoreto de Polivinilideno (PVDF)

No Projeto A1, a estrutura do diafragma é a mesma utilizada nos protótipos, ao passo que, no Projeto A2, a estrutura de membrana é composta por duas camadas piezoelétricas, sendo os materiais denotados por X_1 e X_2 .

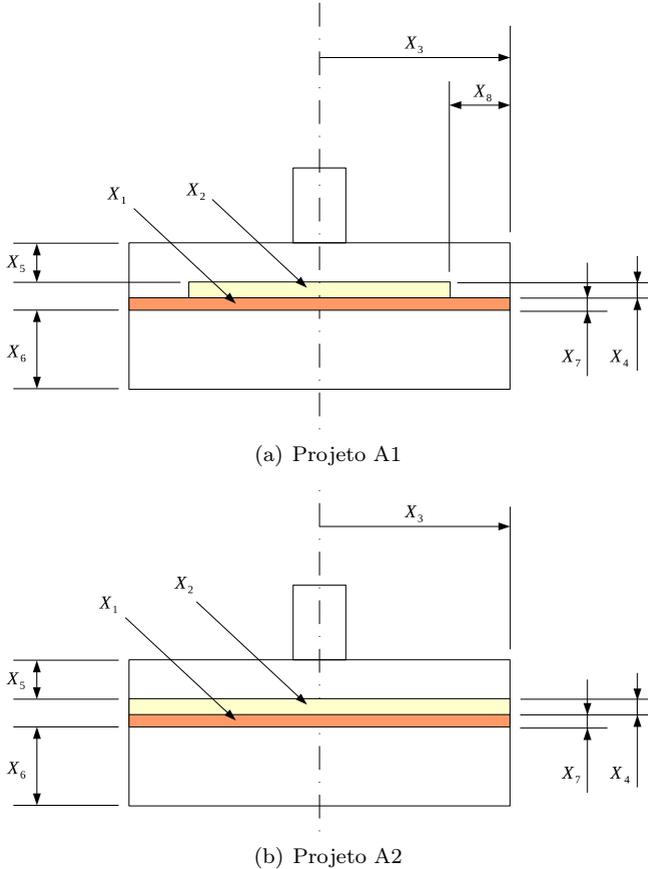
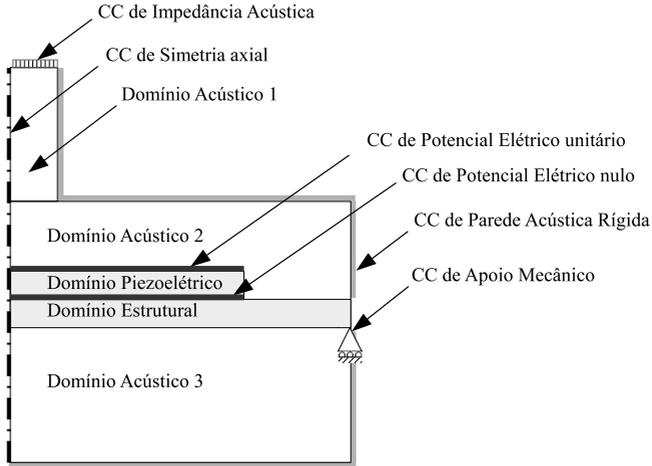


Figura 5.3 – Projetos de alto-falantes piezoelétricos a serem otimizados.

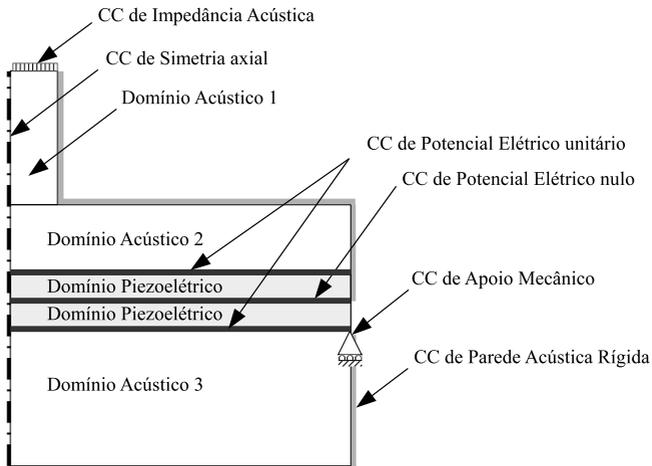
5.1.1.1 Modelo MEF

A Figura 5.4 mostra os domínios e as condições de contorno (CC) consideradas nos modelos MEF de alto-falantes. Os domínios acústicos, como são geometrias simples, foram modelados com o modelo LRF, considerando assim os efeitos viscotérmicos com menor custo computacional. Em outras palavras, esses domínios foram modelados usando a Equação (2.56) com as funções LRF $B(s)$ e $D(s, Pr)$, considerando o domínio acústico 1 como um tubo e domínios acústicos 2 e 3, como camadas. A CC de apoio mecânico foi aplicada ao diafragma para re-

presentar a sua ligação com a carcaça externa, pois é esperado que esta estrutura tenha rigidez relativamente baixa como já observado na validação experimental e não podendo ser representada como um engaste.



(a) Projeto A1



(b) Projeto A2

Figura 5.4 – Configuração do modelo do alto-falante piezoelétrico utilizado no processo de otimização.

O procedimento para o acoplamento do modelo MEF do alto-

falante e o modelo MMT do acoplador do microfone descrito na Seção 3.2.2.3 requer que a solução do modelo MEF seja determinada duas vezes para assim se obter a sua matriz de transferência. Como o processo de otimização requer que o modelo de elementos finitos seja resolvido, muitas vezes, é desejável que o acoplamento dos modelos MEF e MMT seja simplificado para reduzir o custo computacional. Para este fim, uma CC de impedância Z foi aplicada ao modelo de elementos finitos, considerando o inverso da matriz de transferência do acoplador acústico $[M]_c$ descrito na seção 3.2.2.1 e a impedância do microfone Z_{mic} :

$$Z = \frac{M_{11}Z_{mic} + M_{12}}{M_{21}Z_{mic} + M_{22}} \quad (5.1)$$

sendo

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = [M_c]^{-1} = [M_3][M_2][M_1]. \quad (5.2)$$

A pressão no microfone (p_{mic}) considerando o modelo MMT é então determinada da seguinte forma:

$$p_{mic} = \frac{p_{FE}}{M_{11} + M_{12}/Z_{mic}}, \quad (5.3)$$

sendo p_{FE} a pressão acústica obtida utilizando o modelo FEM.

5.1.2 Problema de otimização

O objetivo da otimização do alto-falante é maximizar o espectro de NPS na faixa de frequência de 20 Hz - 8 kHz. Idealmente, um nível semelhante ao exibido por alto-falantes de aparelhos auditivos comerciais é desejado. É também desejável que o espectro de NPS do alto-falante não apresente antirressonâncias, ou seja, um alto decaimento do NPS em determinadas frequências. Neste sentido, a função desempenho da otimização foi definida da seguinte forma:

$$fitness(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}} [NPS(\mathbf{X}, \mathbf{f})], \quad (5.4)$$

sendo:

$$\mathbf{f} = \{20 \quad \dots \quad 8000\} \text{ [Hz]}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{X} = \{X_1 \quad \dots \quad X_n\}. \quad (5.6)$$

A função NPS é depende de \mathbf{f} e \mathbf{X} , que são os vetores de frequên-

cias analisadas e de parâmetros de projeto, respectivamente, e a função desempenho (*fitness*) obtém o valor mínimo de NPS nas frequências analisadas. Os componentes de \mathbf{X} dependem dos projetos básicos de alto-falantes descritos abaixo. Uma discretização na frequência de 500 Hz foi escolhida para redução do custo computacional mantendo-se um nível de precisão razoável da função $fitness(\mathbf{X})$.

O problema de otimização aplicado neste estudo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\max_{\mathbf{X}} fitness(\mathbf{X}) \quad (5.7)$$

com

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u, \quad (5.8)$$

sendo que X_i^l e X_i^u denotam os limites inferior e superior dos parâmetros de projeto X_i , respectivamente, e seus valores estão listados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Faixa de variação do parâmetros de projeto no processo de otimização.

\mathbf{X}	\mathbf{X}^l	\mathbf{X}^u
X_1	1	4
X_2	1	4
X_3	1500 [μm]	3000 [μm]
X_4	1 [μm]	1000 [μm]
X_5	10 [μm]	2000 [μm]
X_6	10 [μm]	4500 [μm]
X_7	1 [μm]	1000 [μm]
X_8	10 [μm]	1000 [μm]

5.1.3 Procedimento de otimização

O procedimento de otimização proposto neste trabalho é baseado nos métodos: Algoritmo Genético (GA) e Nelder-Mead (NM). Esses métodos não levam em conta os gradientes da função desempenho e das funções de restrição facilitando a implementação destes em softwares comerciais de análise numérica. O método GA é um método de otimização evolutiva que, a partir de um primeiro grupo de parâmetros de projeto \mathbf{X} (população inicial), melhora o projeto através das

operações de: seleção, cruzamento e mutação sobre a população [66]. A vantagem deste método é que ele permite uma maior exploração de todo o espaço de solução, não ficando restrito a uma região de projeto. Neste sentido, este método aumenta a possibilidade de se chegar a um projeto mais próximo de um projeto ótimo global.

O método NM é um otimizador local, que utiliza um projeto inicial \mathbf{X}_{init} para construir um simplex inicial e melhora o projeto a partir de iterações onde são realizadas as operações de reflexão, expansão e contração do simplex [65].

Os métodos GA e NM são, portanto, complementares porque o método GA pode ser usado para pesquisar todo o espaço de solução para pontos próximos a um projeto ótimo global, enquanto o método NM pode ser usado para chegar ao projeto ótimo global a partir do ponto encontrado pelo método GA. Os projetos do alto-falante foram otimizados de acordo com as duas seguintes etapas sequenciais:

1. Otimização com o método GA obtendo-se o projeto otimizado \mathbf{X}_{GA} ;
2. Otimização utilizando o método NM aplicando-se o projeto inicial como $\mathbf{X}_{init} = \mathbf{X}_{GA}$.

Os métodos GA e NM foram aplicados utilizando as ferramentas de otimização do software comercial MATLAB [79] de acordo com os algoritmos “ga.m” e “fminsearch.m”, respectivamente. Os principais parâmetros de entrada aplicados nestes algoritmos de otimização estão listadas na Tabela 5.3, sendo os demais parâmetros mantidos nos valores padrão, dados em [79].

No método GA se escolhe o tamanho da população ou de subpopulações (parâmetro *PopulationSize*) que serão evoluídas no processo de otimização. Quando são aplicadas subpopulações, estas são evoluídas isoladamente havendo, em intervalos de gerações arbitrados pelo parâmetro *MigrationInterval*, uma migração dos melhores indivíduos (projetos) de uma subpopulação para outra. Nas otimizações aqui realizadas foram aplicadas duas subpopulações com tamanho igual ao número de parâmetros em cada projeto otimizado.

Como o algoritmo “fminsearch.m” é para problemas de otimização sem restrições foi utilizado um algoritmo que aplicada uma mudança de variável para transformar o problema descrito na Seção 5.1.2 em um problema sem restrição com a seguinte relação:

$$X_i = X_i^l + (X_i^u - X_i^l) \frac{\text{sen}(Z_i) + 1}{2}, \quad (5.9)$$

Tabela 5.3 – Principais parâmetros aplicados aos otimizadores do MATLAB.

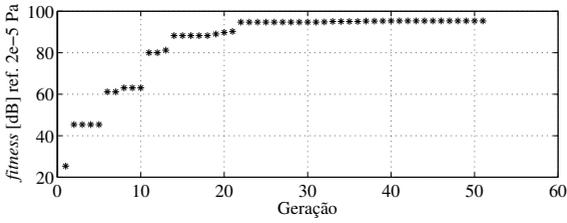
Otimizador GA (ga.m)		
Parâmetro	Projeto A1	Projeto A2
<i>PopulationSize</i>	[8 8]	[7 7]
<i>EliteCount</i>		1
<i>CrossoverFraction</i>		0.5
<i>MigrationInterval</i>		10
<i>StallGenLimit</i>		50
<i>TolFun</i>		1e-3
Otimizador NM (fminsearch.m)		
Parâmetro	Projeto A1	Projeto A2
<i>MaxIter</i>		500
<i>TolFun</i>		1e-3
<i>TolX</i>		1e-4

sendo Z_i uma variável sem restrição associada à variável X_i . Mais detalhes do algoritmo estão apresentados no Anexo A.

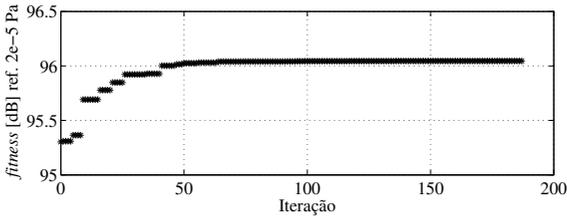
5.1.4 Análise dos resultados

Nas Figuras 5.5 e 5.6 estão apresentadas as convergências dos métodos de otimização aplicados nos projetos A1 e A2. Na convergência do método GA é apresentada a melhor função de desempenho em cada geração, ou seja, o máximo valor da função $fitness(\mathbf{X})$ entre os projetos pertencentes a cada geração. Na convergência do método NM as funções $fitness(\mathbf{X})$ são apresentadas a cada iteração do algoritmo. No Projeto A1 foram avaliadas 1172 funções $fitness(\mathbf{X})$ em 4,3 horas enquanto que no Projeto A2 foram 1259 avaliações em 6 horas. Pode-se notar nas figuras de convergência apresentadas que houve geralmente uma estabilização da função $fitness(\mathbf{X})$ por muitas gerações do método GA e, principalmente, por muitas iterações do método NM, mostrando que o procedimento de otimização apresentado na seção anterior convergiu para um valor máximo local.

A Tabela 5.4 relaciona os parâmetros de projeto obtidos no processo de otimização. No Projeto A1 o parâmetro X_8 , que denota a diferença entre os raios da cavidade e do disco piezoelétrico, ficou muito próximo à restrição mínima indicando que o raio do disco piezoelétrico poderia ser maior cobrindo todo o disco de aço, como no Projeto A2. O parâmetro X_3 , que denota o raio da cavidade, apresentou valores

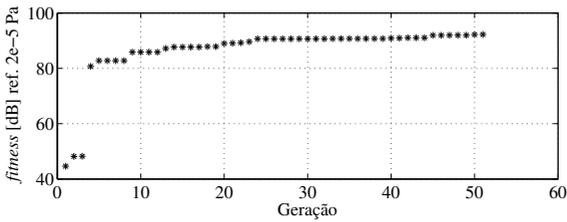


(a) GA

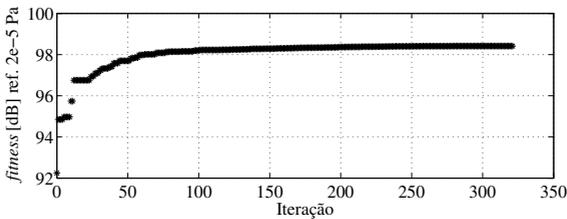


(b) NM

Figura 5.5 – Convergência na otimização do Projeto A1.



(a) GA



(b) NM

Figura 5.6 – Convergência na otimização do Projeto A2.

próximo e sobre a restrição máxima nos projetos A1 e A2, respectivamente. Estas características eram esperadas, pois este parâmetro propicia o aumento da amplitude de flexão do diafragma e, consequentemente, aumento do NPS. O parâmetro X_6 , que denota a espessura da cavidade inferior, ficou próximo à restrição máxima somente no Projeto A1. Como a cavidade inferior é fechada por paredes rígidas e o diafragma é a única superfície flexível em contato com este sistema, o efeito desta é aumentar a rigidez do diafragma através da compressibilidade do volume de ar no seu interior. O parâmetro X_6 é diretamente proporcional ao volume de ar no interior da cavidade que, por sua vez, influencia inversamente na rigidez do diafragma e, consequentemente, nas frequências naturais sistema. Portanto, o parâmetro X_6 auxilia no ajuste das frequências naturais do sistema de forma que a função $fitness(\mathbf{X})$ não tenha decaimento na faixa de frequência da otimização.

Tabela 5.4 – Parâmetros de projeto obtidos pelo procedimento de otimização.

\mathbf{X}	Projeto A1	Projeto A2
X_1	1 (Aço)	1 (PZT-5A)
X_2	1 (PZT-5A)	1 (PZT-5A)
X_3	2968,9 [μm]	3000 [μm]
X_4	9,8 [μm]	26,2 [μm]
X_5	314,1 [μm]	213,2 [μm]
X_6	4483,3 [μm]	1893,6 [μm]
X_7	27,0 [μm]	18,7 [μm]
X_8	10,8 [μm]	N/A
<i>fitness</i>	95,9 [dB]	97,7 [dB]

A Figura 5.7 mostra uma comparação da resposta acústica dos projetos otimizados com as de um alto-falante comercial e o Protótipo B. Ambos os projetos têm desempenho semelhante, com o seu espectro de NPS mais próximos ao do alto-falante comercial e maior do que o Protótipo B em grande faixa de frequências. Em comparação com Protótipo B, que tem um diâmetro maior do que os projetos otimizados, o NPS mínimo foi aumentado em mais de 10 dB para a maioria das frequências abaixo de 5 kHz.

Conforme já mostrado na Tabela 5.4 os materiais convergidos para ambos os projetos foram PZT-5A e Aço (no Projeto A1). Este fato

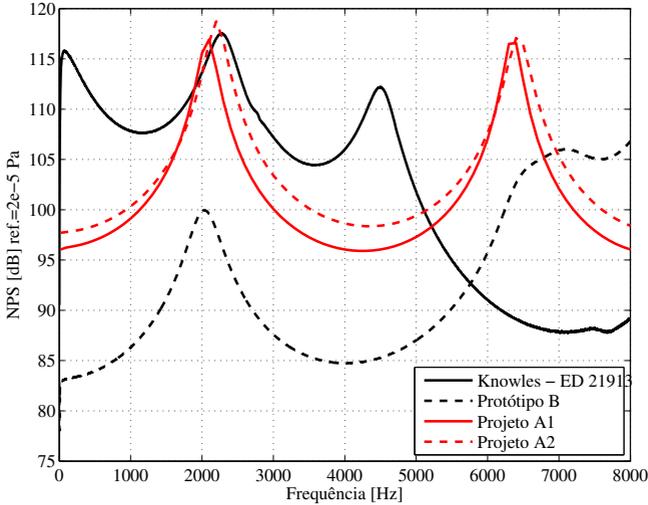


Figura 5.7 – NPS de projetos otimizados em comparação com os alto-falantes Knowles e Protótipo B ($\varphi = 1$ V).

não era esperado pois estes materiais são os mais rígidos entre os disponíveis. Portanto, apesar do método GA permitir uma exploração mais abrangente do espaço de projeto, há dificuldades para se encontrar certas configurações que podem ser mais promissoras. O fato de, em ambos projetos, haver dois materiais aplicados de forma discreta pode ser um fator que dificulta a exploração do espaço de solução. Neste sentido, as otimizações foram repetidas fixando-se um dos materiais discretos (parâmetro X_1) aplicando-se o material mais flexível dos disponíveis na Tabela 5.1.

Na Tabela 5.5 estão apresentados os parâmetros de projeto obtidos pela otimização com a fixação de X_1 . Na Figura 5.8 tem-se a comparação entre os espectros de NPS dos projetos otimizados (com X_1 fixo), do alto-falante comercial e do Protótipo B. Novamente, os projetos A1 e A2 têm desempenho semelhante porém os patamares do espectro de NPS estão muito mais próximos ao do alto-falante comercial. Em comparação com Protótipo B, o NPS mínimo foi aumentado em mais de 20 dB para frequências abaixo de 5 kHz. De fato, o espectro de NPS dos projetos otimizados (com X_1 fixo) tem níveis mais elevados do que no alto-falante comercial algumas frequências, como pode ser visto na Figura 5.8. O espectro de NPS do Projeto A1 também é mais plano do que o alto-falante comercial, que é uma característica desejada

e um alto-falante para aparelho auditivo. Além disso, ambos os projetos têm níveis de NPS mais elevados do que o alto-falante comercial para frequências superiores a 5 kHz, o que poderia ser uma melhoria da qualidade sonora em aparelhos auditivos.

Tabela 5.5 – Parâmetros de projeto (com X_1 fixo) obtidos pelo procedimento de otimização.

\mathbf{X}	Projeto A1	Projeto A2
X_1 (fixado)	4 (Acrílico)	4 (PVDF)
X_2	1 (PZT-5A)	1 (PZT-5A)
X_3	2993,1 [μm]	2958,5 [μm]
X_4	1,0 [μm]	1,0 [μm]
X_5	58,9 [μm]	178,9 [μm]
X_6	4340,9 [μm]	3456,0 [μm]
X_7	120,1 [μm]	122,7 [μm]
X_8	14,6 [μm]	N/A
<i>fitness</i>	104,3 [dB]	104,9 [dB]

A fixação de X_1 propiciou a obtenção de projetos otimizados com melhor desempenho em relação aos projetos sem a fixação de X_1 . Este fato não era esperado pois no espaço de projetos sem a fixação de X_1 está contido o espaço de projetos com a fixação de X_1 . Porém, como o parâmetro X_1 é uma variável discreta, este provoca descontinuidades no espaço de solução do problema de otimização, aumentando assim a possibilidade de estagnação do otimizador em um projeto ótimo local. Portanto, a fixação de X_1 aumentou a suavidade do espaço de solução do problema de otimização, reduzindo a possibilidade estagnação em um projeto ótimo local e, conseqüentemente, permitiu a obtenção de projetos otimizados com melhor desempenho.

Os projetos otimizados não foram validados experimentalmente, mas o procedimento de otimização aplicado aqui mostrou que é possível projetar alto-falantes para aparelhos auditivos com base no efeito piezoelétrico com desempenho semelhante a alto-falantes de aparelhos auditivos eletrodinâmicos.

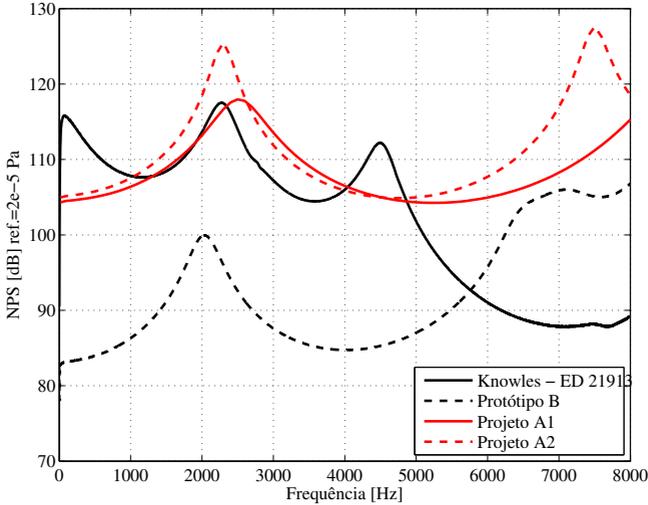


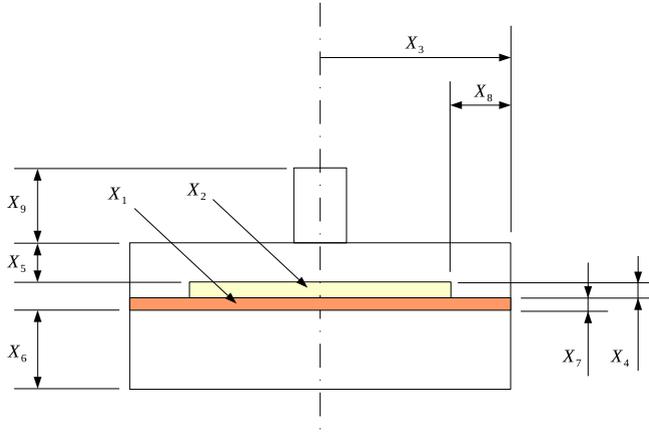
Figura 5.8 – NPS de projetos (com X_1 fixo) otimizados em comparação com os alto-falantes Knowles e Protótipo B ($\bar{\varphi} = 1$ V).

5.2 OTIMIZAÇÃO DE MICROFONES PIEZOELÉTRICOS

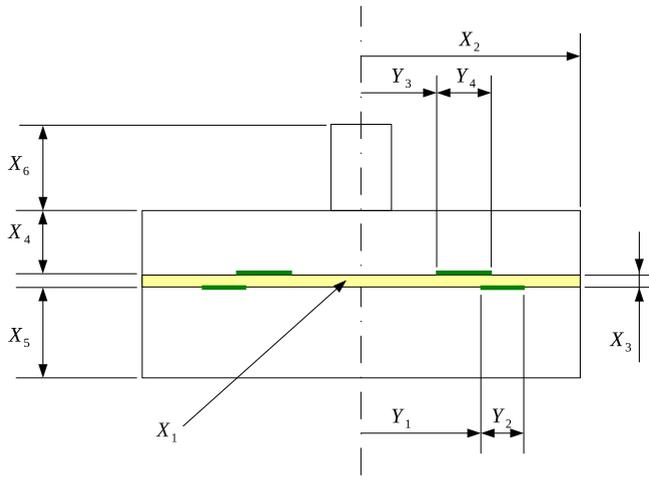
A seguir, serão apresentadas as configurações dos projetos básicos de microfones piezoelétricos para a sua otimização.

5.2.1 Projetos básicos de microfones

Assim como na otimização dos alto-falantes, dois projetos de microfones foram otimizados. A Figura 5.9 mostra a configuração destes projetos sendo que, como na otimização de alto-falantes, os parâmetros X_1 (em ambos projetos) e X_2 (somente no Projeto M1) denotam os materiais listados na Tabela 5.1 sendo as respectivas propriedades mecânicas e piezoelétricas detalhadas no Apêndice A.



(a) Projeto M1



(b) Projeto M2

Figura 5.9 – Projetos básicos de microfones piezoelétricos a serem otimizados.

O Projeto M1 possui configuração semelhante ao primeiro projeto de alto-falante (Projeto A1) com a adição de um parâmetro que corresponde ao comprimento do tubo (com 1 mm de diâmetro) por onde a pressão sonora incide no sistema. O Projeto M2 possui um diafragma composto por somente uma camada piezoelétrica com eletrodos configurados pelos parâmetros Y_1 , Y_2 , Y_3 e Y_4 . Estes parâmetros, que

definem diretamente a posição radial e a área dos eletrodos superior e inferior, são funções dependentes dos parâmetros adimensionais X_7 , X_8 , X_9 e X_{10} na otimização da seguinte forma:

$$Y_1(X_7, X_8, X_2) = X_7(1 - X_8)X_2 = X_7(X_2 - Y_2), \quad (5.10a)$$

$$Y_2(X_8, X_2) = X_8X_2, \quad (5.10b)$$

$$Y_3(X_9, X_{10}, X_2) = X_9(1 - X_{10})X_2 = X_9(X_2 - Y_4), \quad (5.10c)$$

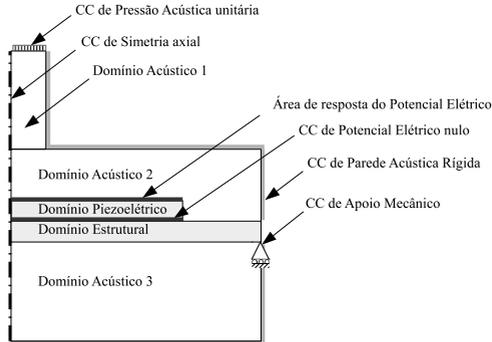
$$Y_4(X_{10}, X_2) = X_{10}X_2, \quad (5.10d)$$

sendo os parâmetros X_8 e X_{10} correspondentes a uma fração do raio do diafragma que é coberto pelo eletrodo inferior e superior, respectivamente, enquanto que os parâmetros X_7 e X_9 definem a fração do raio do diafragma onde serão posicionados os respectivos eletrodos.

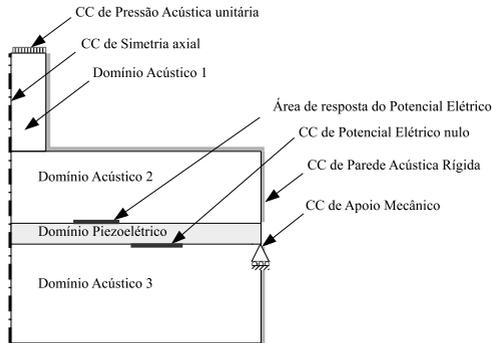
Os eletrodos configurados no Projeto M2 não foram modelados fisicamente sendo considerados como eletrodos ideais representados apenas pelas condições de contorno de aterramento na superfície inferior e a captação do potencial elétrico na superfície superior, conforme será mostrado a seguir. A configuração anelar destes eletrodos foi configurada como parâmetro do projeto para se verificar o efeito desta no desempenho do microfone.

5.2.1.1 Modelo MEF

Na Figura 5.10 estão apresentadas as configurações do modelo MEF (bidimensional com simetria axial) utilizado para avaliação do desempenho dos projetos básicos apresentados na seção anterior. Os domínios acústicos foram modelados com o modelo LRF da mesma forma como foi aplicado nos modelos MEF de alto-falantes, considerando assim os efeitos viscotérmicos com menor custo computacional para a otimização.



(a) Projeto M1



(b) Projeto M2

Figura 5.10 – Configuração do modelo de microfone piezoelétrico utilizado no processo de otimização.

O desempenho do microfone foi avaliado pela função sensibilidade (S_{mic}) que é relação entre a pressão acústica de entrada (p_{in}) e o potencial elétrico obtido nos eletrodos (φ_{out}) dada por

$$S_{mic}(f) = \frac{\varphi_{out}(f)}{p_{in}(f)}. \quad (5.11)$$

Neste sentido, pode-se avaliar S_{mic} no modelo MEF aplicando-se uma CC de pressão acústica unitária ($p_{in} = 1Pa$) na entrada do microfone e avaliando-se o potencial elétrico médio (φ_{out}) gerado na superfície do eletrodo superior considerando o outro aterrado (CC de potencial elétrico nulo), conforme apresentado na Figura 5.10. A configuração do modelo acústico (LRF) foi a mesma utilizada na otimização do alto-

falante, apresentada na Seção 5.1.1.1.

Assim como na otimização do alto-falante, no modelo MEF foi considerado que o diafragma encontra-se mecanicamente apoiado sobre uma aresta do mesmo (considerado como um ponto no modelo 2D com simetria axial), conforme mostrado na Figura 5.10. A seguir, será apresentada a formulação do problema de otimização para o microfone piezoelétrico.

5.2.2 Problema de otimização

O objetivo na otimização do microfone é maximizar o espectro de sensibilidade na faixa de frequência de 20 Hz - 8 kHz. Neste sentido, a função desempenho é semelhante à utilizada na otimização do alto-falante sendo definida da seguinte forma:

$$fitness(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{f}} [S_{mic}(\mathbf{X}, \mathbf{f})], \quad (5.12)$$

Assim como na otimização de alto-falantes, a função S_{mic} também é dependente de \mathbf{f} e \mathbf{X} e a função desempenho obtém o valor mínimo de S_{mic} nas frequências analisadas com uma discretização na frequência de 500 Hz para redução do custo computacional mantendo-se uma precisão razoável da função $fitness(\mathbf{X})$ na faixa de frequência da otimização.

O problema de otimização aplicado neste estudo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\max_{\mathbf{X}} fitness(\mathbf{X}) \quad (5.13)$$

com

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u. \quad (5.14)$$

Os valores dos limites inferiores (X_i^l) e superiores (X_i^u) dos parâmetros de projeto estão listados na Tabelas 5.6. Lembrando que X_1 (em ambos projetos) e X_2 (somente no Projeto M2) são variáveis inteiras que denotam um índice para cada material (estrutural ou piezoelétrico) detalhado na Tabela 5.1 sendo as propriedades encontradas no Apêndice A.

Tabela 5.6 – Faixa de variação dos parâmetros dos projetos M1 e M2 na otimização.

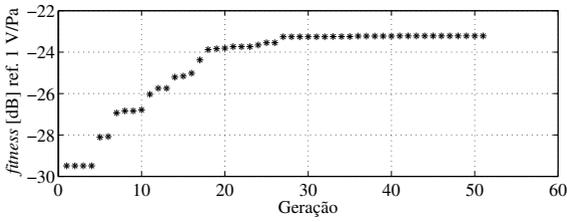
\mathbf{X}	Projeto M1		Projeto M2	
	\mathbf{X}^l	\mathbf{X}^u	\mathbf{X}^l	\mathbf{X}^u
X_1	1	4	1	4
X_2	1	4	1500 [μm]	3000 [μm]
X_3	1500 [μm]	3000 [μm]	1 [μm]	1000 [μm]
X_4	1 [μm]	1000 [μm]	10 [μm]	2000 [μm]
X_5	10 [μm]	2000 [μm]	10 [μm]	4500 [μm]
X_6	10 [μm]	4500 [μm]	10 [μm]	1500 [μm]
X_7	1 [μm]	1000 [μm]	0 %	100 %
X_8	10 [μm]	1000 [μm]	5 %	100 %
X_9	10 [μm]	1500 [μm]	0 %	100 %
X_{10}	N/A	N/A	5%	100%

5.2.3 Análise dos resultados

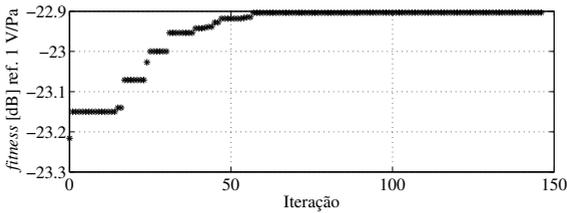
Nesta seção serão apresentados os parâmetros otimizados e os resultados de sensibilidade obtidos com estes parâmetros em cada projeto descrito na seção anterior. O procedimento de otimização aplicado foi o mesmo descrito na Seção 5.1.3 e os resultados obtidos serão apresentados a seguir.

Nas figuras 5.11 e 5.12 estão apresentadas as convergências dos métodos de otimização aplicados nos projetos M1 e M2, respectivamente. No Projeto M1 foram avaliadas 1237 funções $fitness(\mathbf{X})$ em 4 horas enquanto que no Projeto M2 foram 1437 avaliações em 4,6 horas. Assim como na otimização dos alto-falantes, pode-se notar que houve uma estabilização dos algoritmos apresentando assim uma convergência para um valor máximo local.

A Tabela 5.7 relaciona os parâmetros obtidos no processo de otimização dos projetos M1 e M2. De forma oposta aos projetos de alto-falante, os parâmetros de material piezoelétrico convergiram para o PVDF em ambos projetos de microfone. Este material têm coeficientes piezoelétricos cerca de 100 vezes menor do que o PZT-5A (material que convergiu nos projetos de alto-falante). Porém, por ser um material polimérico, o PVDF possui maior flexibilidade que PZT-5A permitindo maior mobilidade diante da pressão acústica incidente, sendo mais eficiente como sensor. No Projeto M1 o material estrutural também con-

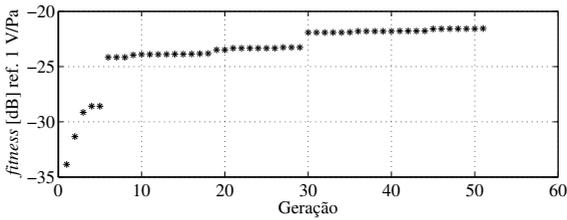


(a) GA

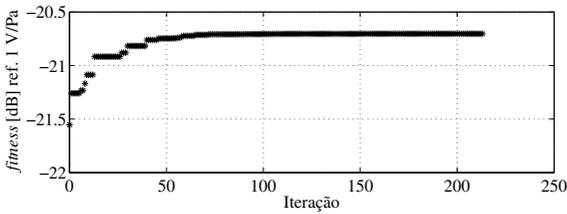


(b) NM

Figura 5.11 – Convergência na otimização do Projeto M1.



(a) GA



(b) NM

Figura 5.12 – Convergência na otimização do Projeto M2.

vergiu para o mais flexível das opções possíveis e, no Projeto M2, o raio geométrico (X_2) convergiu para um valor próximo à restrição máxima estipulada, ressaltando que a flexibilidade é mais importante do que o coeficiente piezoelétrico neste caso. Ambos projetos convergiram para valores próximos à restrição máxima nos parâmetros que denotam a espessura da cavidade inferior, X_6 (Projeto M1) e X_5 (Projeto M2). Como já mencionado anteriormente, o volume de ar na cavidade inferior proporciona aumento da rigidez do diafragma sendo este inversamente proporcional à espessura da cavidade.

Tabela 5.7 – Parâmetros obtidos na otimização dos projetos M1 e M2.

\mathbf{X}	Projeto M1	Projeto M2
X_1	4 (Acrílico)	4 (PVDF)
X_2	4 (PVDF)	2999,8 [μm]
X_3	3000,0 [μm]	86,0 [μm]
X_4	44,6 [μm]	1055,1 [μm]
X_5	1717,1 [μm]	4499,5 [μm]
X_6	4499,6 [μm]	1471,0 [μm]
X_7	51,2 [μm]	0 %
X_8	987,9 [μm]	5,0 %
X_9	620,5 [μm]	99,9 %
X_{10}	N/A	5,0 %
<i>fitness</i>	-22,9 [dB]	-20,7 [dB]

Na Figura 5.13 tem-se os espectros de sensibilidade obtidos pelos projetos M1 e M2 otimizados (apresentados na Tabela 5.7) em comparação com os microfones comerciais de aparelhos auditivos e o Protótipo B. Ambos os projetos têm desempenho semelhantes, com espectros de sensibilidade próximos aos microfones comerciais e muito maiores do que o Protótipo B em toda a faixa de frequência analisada.

De forma geral, o Projeto M2 apresentou melhores resultados de sensibilidade que o Projeto M1. De fato, este melhor desempenho se deve, principalmente, à forma como os eletrodos foram configurados. No Projeto M2 a posição e tamanho dos eletrodos convergiram para a configuração apresentada na Figura 5.14(a). Nesta figura pode-se notar que os eletrodos ficaram com o valor mínimo possível representando 5% do raio do diafragma, conforme os valores dos parâmetros X_8 e X_{10} . Adicionalmente, estes eletrodos apresentaram um deslocamento máximo entre eles, conforme os valores dos parâmetros X_7 e X_9 . Como

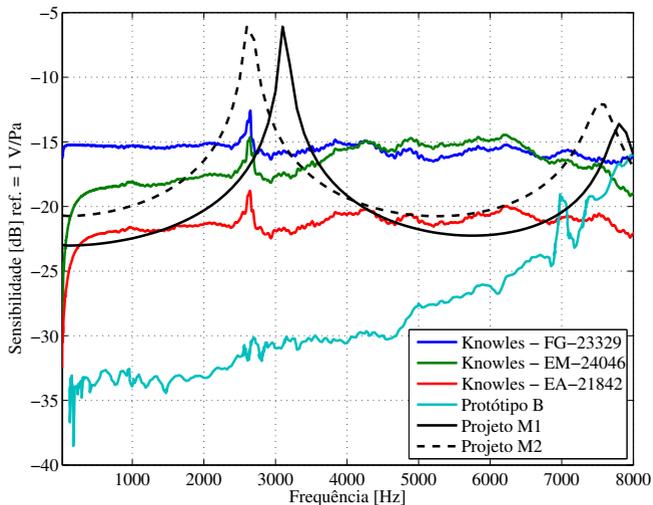


Figura 5.13 – Sensibilidade obtida pelos projetos M1 e M2 otimizados em comparação com microfones comerciais de aparelhos auditivos e o Protótipo B.

comparação, aplicando-se no Projeto M2 eletrodos cheios conforme a Figura 5.14(b), ou seja, preenchendo toda a face superior e inferior do diafragma tem-se uma grande queda na sensibilidade conforme pode-se ver na Figura 5.15.

Apesar da configuração com eletrodos otimizados proporcionar melhor resultado de sensibilidade é preciso lembrar que estes eletrodos são considerados ideais, ou seja, não se considera a impedância elétrica do sistema de aquisição do sinal elétrico gerado nos eletrodos. A posição e tamanho da superfície dos eletrodos otimizados captam a região onde tem-se maior média de potencial elétrico gerado. Porém, com a redução da superfície dos eletrodos, a potência elétrica deste sinal gerado é reduzida podendo ser necessário uma pré-amplificação deste sinal para suprir a impedância do sistema de aquisição.

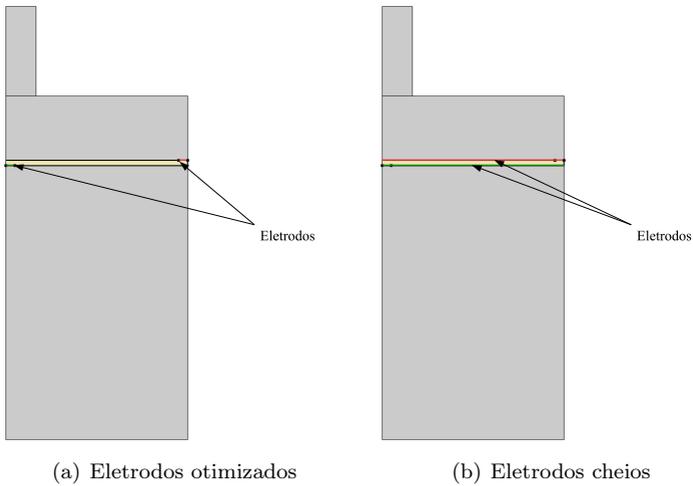


Figura 5.14 – Posição dos eletrodos no Projeto M2.

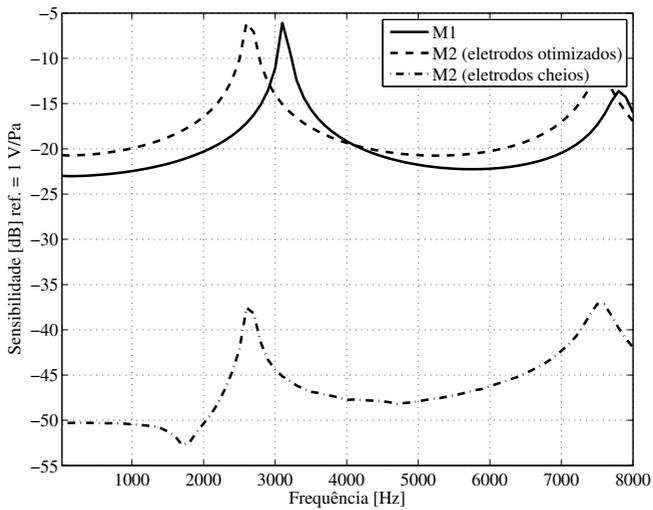


Figura 5.15 – Comparação entre a sensibilidade obtida pelos projetos M1 e M2 otimizados em relação ao Projeto M2 com eletrodos cheios otimizado.

5.3 OTIMIZAÇÃO COM PARÂMETROS DE FORMA

Com o aprendizado obtido nas otimizações paramétricas dos projetos básicos de transdutor, propõe-se agora uma otimização com parâmetros de forma permitindo-se analisar o desempenho de transdutores com geometrias menos convencionais. Para parametrizar as formas dos sistemas aqui analisados foram utilizadas curvas Bézier racionais [80].

5.3.1 Projeto de microfone com parâmetros de forma

O Projeto M3 foi configurado de forma semelhante ao Projeto M2 com adição de parâmetros que configuram formas geométricas da cavidade acústica e do diafragma piezoelétrico. Com a aplicação do mesmo material piezoelétrico que convergiu na otimização do Projeto M2 (PVDF), os parâmetros do Projeto M3 foram configurados conforme mostra a Figura 5.16.

Na Figura 5.16 os parâmetros que não contém índices numéricos são valores constantes conforme mostrado na Tabela 5.8. As variações na forma foram configuradas com a utilização de curvas Bézier cúbicas racionais, como as curvas em azul, vermelho e verde na Figura 5.16. A curva Bézier cúbica racional é parametrizada por quatro pontos de controle sendo que esta passa necessariamente pelo primeiro e último pontos chamados de pontos extremos. Na parametrização da curva em azul foram considerados como parâmetros de projeto apenas os pontos internos da curva definidos pelas coordenadas espaciais $[X_i(R - R_T), Y_i L_T]$ e pelo parâmetro de peso W_i . O parâmetro de peso, nas curvas de Bézier racionais, tem a função de aproximar a curva ao ponto interno correspondente [80]. Na parametrização das curvas em vermelho e verde foram considerados como parâmetros de projeto somente as coordenadas $Y_i V_P$ (curva em vermelho) e $T_i T_P$ (curva em verde), sendo mantidas constantes as coordenadas radiais destes pontos e os pesos, que foram arbitrados iguais a 5 nos pontos internos e 1 nos pontos extremos das respectivas curvas. Como pode-se notar na Figura 5.16 a curva em verde é definida a partir da curva vermelha permitindo, além da variação da forma, uma variação da espessura do diafragma. Por último, o parâmetro Y_7 tem função de ajustar a espessura da cavidade inferior, conforme mostrado na Figura 5.16.

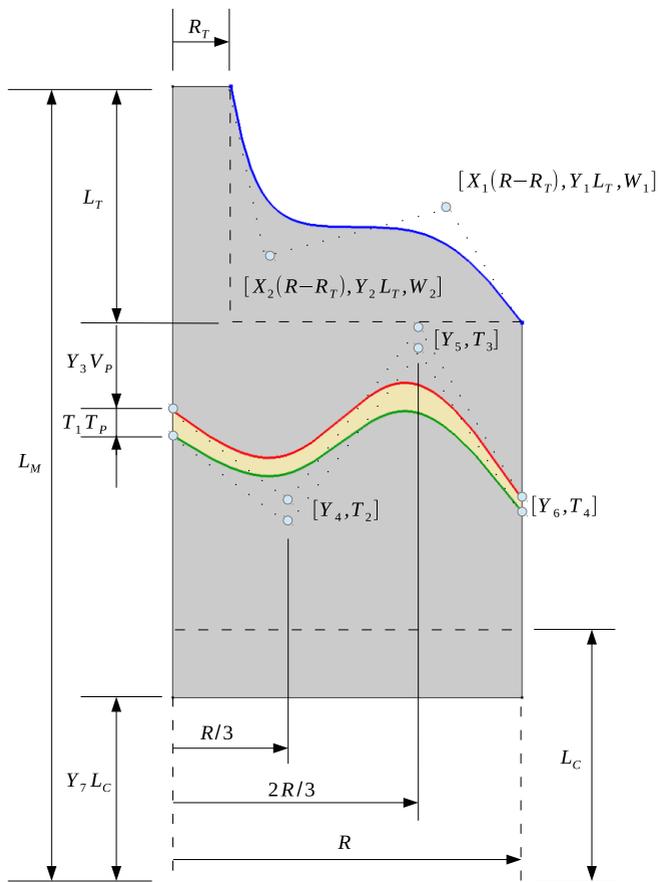


Figura 5.16 – Projeto de microfone piezoeletrico com parâmetros de forma.

Tabela 5.8 – Parâmetros constantes na parametrização do Projeto M3.

Parâmetro	Valor [mm]
L_M	7,00
L_T	2,00
L_C	2,48
R	3,00
R_T	0,50
V_P	1,50
T_P	1,00

O problema de otimização aplicado neste projeto será o mesmo descrito na Seção 5.2.2, sendo as restrições mínima e máxima para cada parâmetro de projeto listada na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Faixa de variação dos parâmetros do Projeto M3 na otimização.

Parâmetro	Mínimo	Máximo
X_1	0,5	1
X_2	0	0,5
Y_1	0	1
Y_2	0	1
Y_3	0	1
Y_4	0	1
Y_5	0	1
Y_6	0	1
Y_7	0	1
T_1	0,01	1
T_2	0,01	1
T_3	0,01	1
T_4	0,01	1
W_1	1	100
W_2	1	100

5.3.1.1 Modelo MEF

Na Figura 5.17 estão apresentadas as configurações dos domínios e condições de contorno (CC) do modelo MEF utilizado para avaliação de desempenho do Projeto M3 apresentado na seção anterior. Este modelo têm configuração semelhante ao Projeto M2 porém, como as cavidades internas podem assumir formas mais arbitrárias, os domínios acústicos foram modelados com o modelo SLNS com adição da proposta semi-analítica (apresentada na Seção 4.6) para redução do custo computacional da análise. Neste modelo, nas paredes das cavidades acústicas e nas superfícies de interface com o domínio piezoelétrico foram aplicadas as condições de contorno de não-escorregamento ($\psi_v = 0$) e isotérmicas ($\psi_h = 0$).

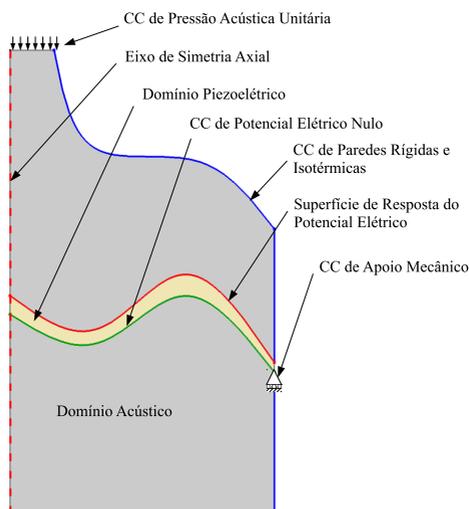
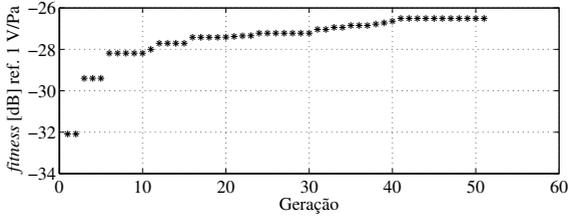


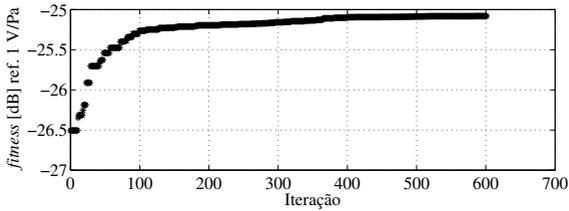
Figura 5.17 – Configuração do modelo de microfone piezoelétrico utilizado no processo de otimização.

5.3.1.2 Análise dos resultados

Com a aplicação do procedimento de otimização descrito na Seção 5.1.3 no Projeto M3, foram obtidas as convergências apresentadas na Figura 5.18 onde foram avaliadas 2564 funções desempenho (*fitness*) em 14 horas.



(a) GA



(b) NM

Figura 5.18 – Convergência na otimização do Projeto M3.

Na Tabela 5.10 estão apresentados os parâmetros e a função de desempenho obtidos na otimização do Projeto M3. Conforme apresentado nesta tabela, mesmo com a utilização de eletrodos preenchendo completamente as faces superior e inferior do diafragma piezoelétrico, a função de desempenho (*fitness*) apresentou valor mais próximo dos projetos M1 e M2. Para uma visualização mais direta dos parâmetros otimizados, na Figura 5.19 tem-se a geometria gerada por eles.

Na Figura 5.20 estão comparadas as geometrias otimizadas para os projetos M1, M2 e M3. Pode-se perceber que os projetos otimizados possuem características em comum como as dimensões das cavidades inferiores e o diâmetro total que convergiram na restrição do problema de otimização. Os diafragmas piezoelétricos dos projetos M1, M2 e M3 também possuem algumas semelhanças entre si. O material piezoelétrico, que convergiu (como parâmetro de projeto) para o PVDF nos projetos M1 e M2, foi aplicado como parâmetro fixo no Projeto M3. A espessura do diafragma piezoelétrico nos projetos M1 e M2 foram bastante semelhantes pois se for considerada a soma das espessuras dos materiais sobrepostos no Projeto M1 tem-se $95,8 \mu\text{m}$ contra $86,0 \mu\text{m}$ de espessura no Projeto M2. A espessura variável do Projeto M3 apresenta um valor máximo de $250 \mu\text{m}$ no centro do diafragma e um valor mínimo de, aproximadamente, $10 \mu\text{m}$, como pode-se notar na Figura

Tabela 5.10 – Parâmetros e função de desempenho obtidos na otimização do Projeto M3.

Parâmetro	Valor
X_1	0,8608
X_2	0,4631
Y_1	0,9643
Y_2	0,3945
Y_3	0,4084
Y_4	0,4729
Y_5	0,4561
Y_6	0,3584
T_1	0,2500
T_2	0,0122
T_3	0,0186
T_4	0,1378
Y_7	0,0001
W_1	58,9780
W_2	95,9060
<i>fitness</i>	-25,0830 [dB]

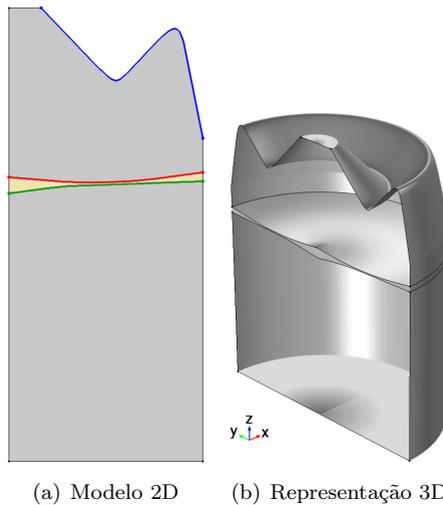


Figura 5.19 – Configuração otimizada do Projeto M3.

5.20(c).

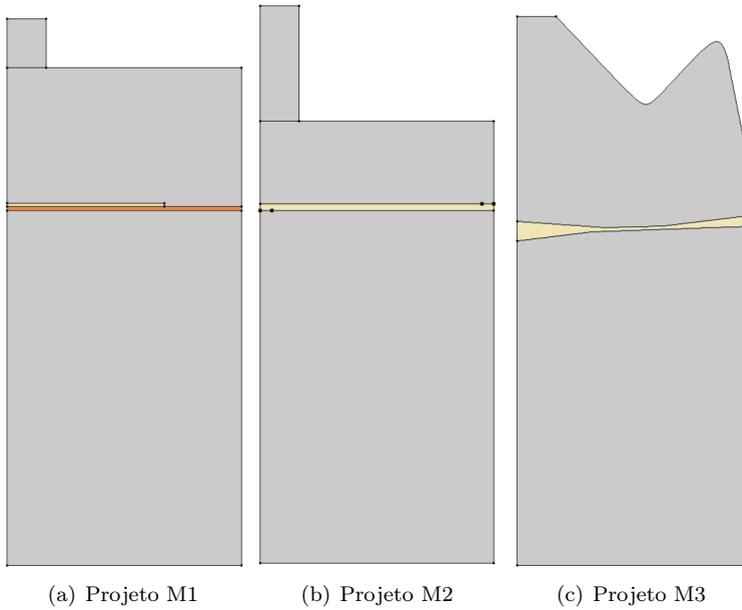


Figura 5.20 – Comparação das configurações geométricas otimizadas dos projetos M1, M2 e M3.

Na Figura 5.21 há uma comparação dos espectros de sensibilidade dos projetos M1, M2 e M3 otimizados. Nesta figura pode-se notar que as características de variação de forma e de espessura no Projeto M3 proporcionou a obtenção de uma sensibilidade muito superior ao Projeto M2 com eletrodos cheios no diafragma piezoeletrico. Apesar da configuração otimizada do diafragma no Projeto M3 ser difícil ou, até mesmo, inviável para fabricação, estes resultados são interessantes para um entendimento da sensibilidade deste sistema com relação às formas geométricas abrindo possibilidades para o projeto de novas configurações de microfones piezoeletricos.

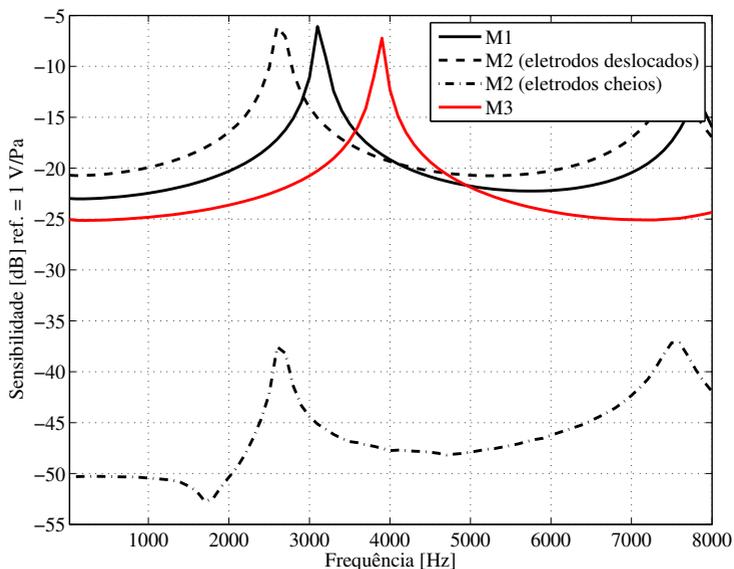


Figura 5.21 – Comparação das sensibilidades obtidas pelos projetos M1, M2 e M3 otimizados.

5.3.2 Projeto de alto-falante com parâmetros de forma

Este projeto, nomeado de Projeto A3, foi baseado no Projeto A2 e sua parametrização é bastante semelhante ao Projeto M3 com a adição de mais uma camada de material piezoelétrico, conforme mostra a Figura 5.22. Nesta figura pode-se notar que a única diferença entre este e o Projeto M3 é a adição de mais quatro parâmetros (T_5 , T_6 , T_7 e T_8) que definem a variação da espessura da camada inferior de material piezoelétrico. Assim como no Projeto M3, os parâmetros fixos descritos na Figura 5.22 estão listados na Tabela 5.8 sendo apenas alterado o valor de T_P para 0,5 mm. O material aplicado nas duas camadas do diafragma piezoelétrico foi o PZT-5A, sendo as propriedades listadas no Apêndice A. Este material foi escolhido por ter convergido na maioria das otimizações de alto-falante aqui apresentadas.

O problema de otimização aplicado neste projeto será o mesmo descrito na Seção 5.1.2, sendo as restrições mínima e máxima para cada parâmetro de projeto listada na Tabela 5.11.

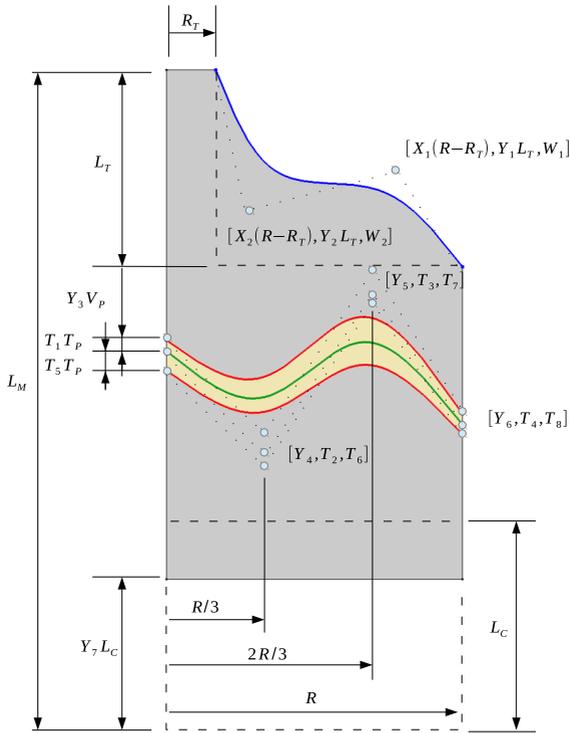


Figura 5.22 – Parâmetros do Projeto A3 de alto-falante piezoelétrico.

Tabela 5.11 – Faixa de variação dos parâmetros do Projeto A3 na otimização.

Parâmetro	Mínimo	Máximo	Parâmetro	Mínimo	Máximo
X_1	0,5	1	Y_1	0	1
X_2	0	0,5	Y_2	0	1
W_1	1	100	W_2	1	100
Y_3	0	1	T_1	0,01	1
Y_4	0	1	T_2	0,01	1
Y_5	0	1	T_3	0,01	1
Y_6	0	1	T_4	0,01	1
T_5	0,01	1	T_6	0,01	1
T_7	0,01	1	T_8	0,01	1
Y_7	0	1			

5.3.2.1 Modelo MEF

Na Figura 5.23 estão apresentadas as configurações dos domínios e condições de contorno (CC) do modelo MEF utilizado para avaliação de desempenho do Projeto A3 apresentado na seção anterior. Este modelo tem configuração semelhante ao Projeto A2 porém, assim como feito no Projeto M3 os domínios acústicos foram modelados com o modelo SLNS com adição da proposta semi-analítica (apresentada na Seção 4.6) para redução do custo computacional da análise. No modelo SLNS, foram aplicadas as condições de contorno de não-eskorregamento ($\Psi_v = 0$) e isotérmicas ($\Psi_h = 0$) nas paredes das cavidades acústicas e nas superfícies de interface com o domínio piezoeletrico.

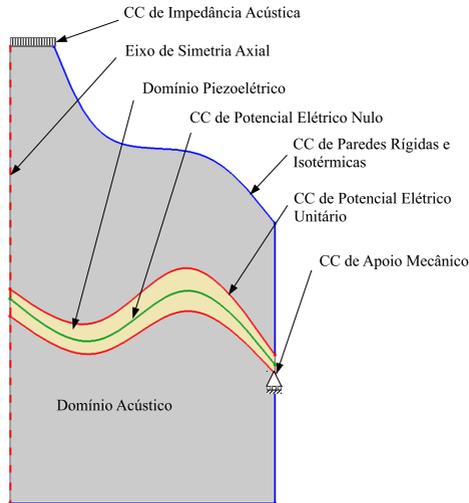
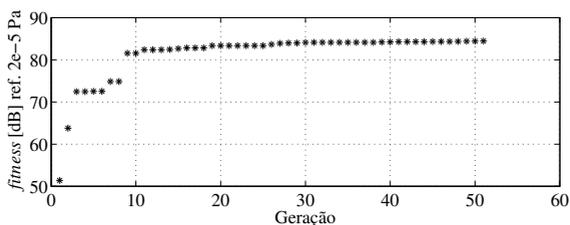


Figura 5.23 – Configuração do modelo para otimização do Projeto A3.

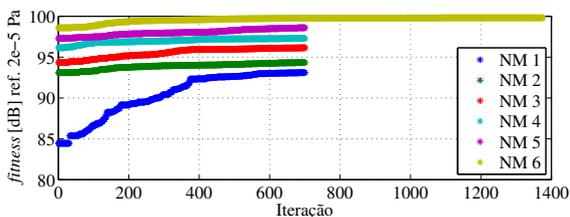
5.3.2.2 Análise dos resultados

Com a aplicação do procedimento de otimização descrito na Seção 5.1.3 no Projeto A3, foram obtidas as convergências apresentadas na Figura 5.24. O método NM, desta vez, não conseguiu satisfazer o critério de convergência sendo o algoritmo terminado pelo critério de máximo número de iterações definido como 700 iterações, conforme

pode-se notar pela curva NM 1 na Figura 5.24(b). Diante desta característica o método NM foi reiniciado a partir do projeto otimizado em NM 1. Surpreendentemente, após mais 700 iterações (curva NM 2) o método NM não convergiu pelo critério de convergência sendo reiniciado novamente por mais 3 vezes. Na sexta vez, na tentativa de se obter convergência, foi ampliado o número máximo de iterações sendo, finalmente, obtido o critério de convergência na curva NM 6 após 1376 iterações.



(a) GA



(b) NM

Figura 5.24 – Convergência na otimização do Projeto A3.

Na Tabela 5.12 estão apresentados os parâmetros e a função desempenho obtidos na otimização do Projeto A3. Conforme apresentado nesta tabela, a função desempenho (*fitness*) apresentou valor acima dos projetos A1 e A2 (sem fixação do parâmetro X_1), como pode-se verificar na Tabela 5.4. Para uma visualização mais direta dos parâmetros otimizados, na Figura 5.25 tem-se a geometria gerada por eles.

Na Figura 5.26 estão apresentados os espectros de NPS do Projeto A2 otimizado (sem a fixação do parâmetro X_1) em comparação com o Projeto A3 otimizado. Nesta figura pode-se notar que o Projeto A3, que possui configuração semelhante ao Projeto A2, apresentou melhor desempenho do que o mesmo. Esta característica pode ser atribuída aos parâmetros de forma acrescentados no Projeto A3 que permitiu

Tabela 5.12 – Parâmetros e função de desempenho obtidos na otimização do Projeto A3.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
X_1	0,50013	T_1	0,0704
X_2	0,040368	T_2	0,01852
Y_1	0,0012728	T_3	0,05436
Y_2	0,13538	T_4	0,010319
Y_3	0,30322	T_5	0,059992
Y_4	0,0016555	T_6	0,13525
Y_5	0,14614	T_7	0,015534
Y_6	0,13853	T_8	0,010005
Y_7	0,19412	W_2	74,089
W_1	76,232		
<i>fitness</i>	99.8 [dB]		

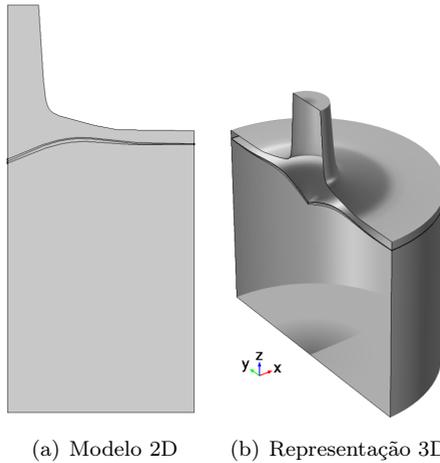


Figura 5.25 – Configuração otimizada do Projeto A3.

avaliação de outras possibilidades geométricas em relação ao Projeto A2.

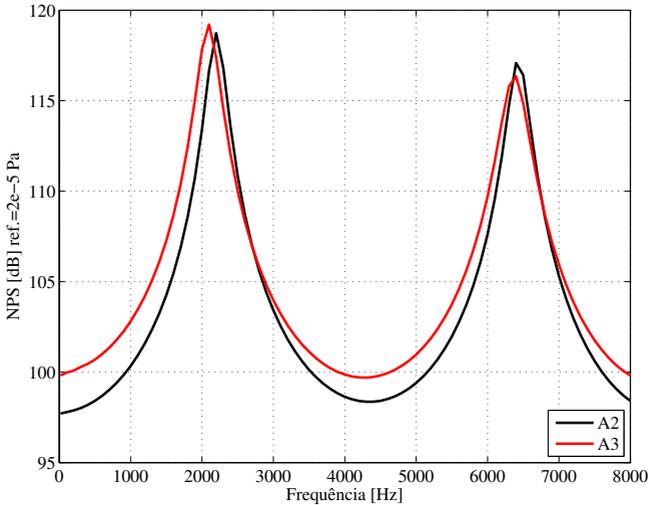


Figura 5.26 – Comparação do NPS obtido para os projetos A2 e A3 otimizados.

Na Figura 5.27 estão comparadas as geometrias otimizadas para os projetos A2 e A3. Pode-se perceber que estes projetos otimizados, apesar de ter configurações semelhantes, possuem características geométricas distintas como o tamanho das cavidades inferior e superior assim como a forma do diafragma piezoelétrico, como já era esperado. Embora sejam variáveis, as espessuras dos materiais piezoelétricos no Projeto A3 otimizado foram, na média, da mesma ordem de grandeza do Projeto A2 otimizado. No Projeto A3 otimizado a espessura dos materiais piezoelétricos tem maior dimensão na parte central sendo gradualmente reduzidas até restrição mínima (equivalente a $5 \mu\text{m}$ na otimização) na parte mais externa onde há o apoio mecânico do diafragma. Na parte central também há uma variação da forma do diafragma que se configura em um formato cônico, como pode ser melhor visualizado na Figura 5.25(b).

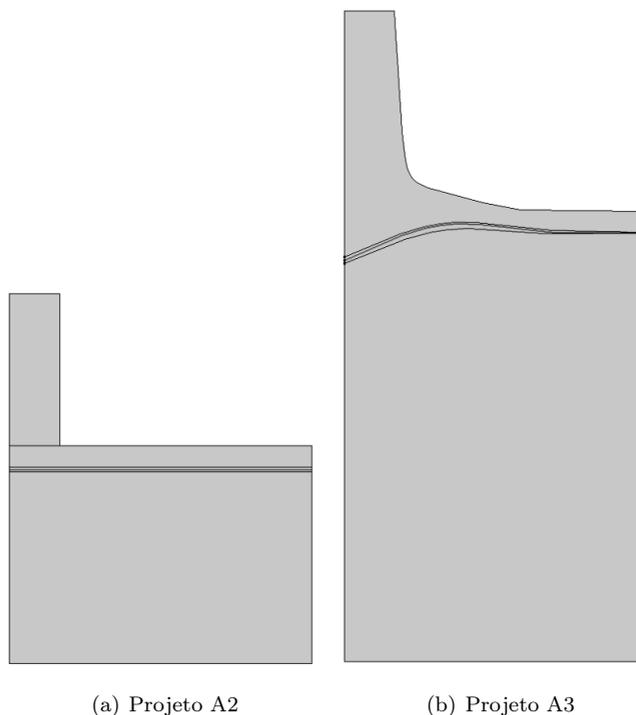


Figura 5.27 – Comparação das configurações geométricas dos projetos A2 e A3 de alto-falante otimizados.

Apesar das configurações otimizadas de transdutores com parâmetros de forma serem difíceis ou, até mesmo, inviáveis para fabricação, os resultados aqui apresentados são interessantes para o entendimento da sensibilidade destes sistemas com relação às formas geométricas. Neste sentido as ferramentas aqui desenvolvidas e aplicadas podem ser bastante úteis em projeto futuros de transdutores abrindo possibilidades para novas configurações de transdutores piezoelétricos à medida que os processos de fabricação forem avançando.

6 CONCLUSÕES

No presente trabalho foram construídos, avaliados e validados modelos numéricos multi-físicos de transdutores piezoelétricos para aparelhos auditivos com vistas à aplicação de técnicas de otimização. Primeiramente, no Capítulo 2, foram apresentados os equacionamentos para representação dos diferentes fenômenos físicos envolvidos no transdutor juntamente com a respectiva formulação fraca de cada equacionamento para solução destes pelo Método de Elementos Finitos (MEF). A técnica de representação por parâmetros concentrados também foi apresentada, pois auxilia na redução do custo computacional da análise. Por último, neste capítulo, foi apresentada uma breve introdução à otimização onde foram mostradas as técnicas que foram posteriormente aplicadas em otimizações paramétricas de transdutores piezoelétricos.

Os modelos apresentados foram validados experimentalmente a partir da análise de protótipos simples construídos de forma manual. Primeiramente, foi construído e validado, experimentalmente, um modelo MEF de um diafragma piezoelétrico comercial. Os resultados desta validação foram bastante satisfatórios mediante um pequeno ajuste de propriedades mecânicas no metal de substrato (latão). Posteriormente, utilizando estes diafragmas piezoelétricos validados, foram construídos dois protótipos de transdutor acoplando-os à diferentes cavidades acústicas. Estes protótipos foram avaliados tanto na configuração de alto-falante como na configuração de microfone.

Na configuração de alto-falante os protótipos foram conectados a um acoplador e microfone que representam, de forma artificial, o canal auditivo do usuário na avaliação experimental de alto-falantes para aparelho auditivo. Na modelagem deste sistema foi construído um modelo MEF multi-físico de cada protótipo de alto-falante sendo aplicado um modelo por parâmetros concentrados para representação do acoplador e do microfone de medição. A abordagem por parâmetros concentrados utilizada foi o Método de Matrizes de Transferência (MMT) que foi validado apresentando resultados muito satisfatórios. Em cada protótipo, devido aos diferentes tamanhos de suas cavidades internas, foi aplicado um modelo acústico diferente. Os resultados da validação apresentaram concordância satisfatória mediante um ajuste das condições de contorno que representaram a fixação do diafragma piezoelétrico às cavidades.

Configurando um dos protótipos como microfone, o modelo multi-físico do microfone foi validado experimentalmente apresentando resul-

tados satisfatórios mediante o mesmo ajuste de condição de contorno aplicado na configuração de alto-falante.

Como os sistemas acústicos internos dos transdutores para aparelhos auditivos se constituem de cavidades miniaturizadas, os efeitos de cisalhamento viscoso e difusão térmica se tornam mais significativos sendo necessária a inclusão destes nos modelos acústicos. Para se considerar estes efeitos em geometrias arbitrárias tem-se disponível na literatura e em alguns softwares comerciais o modelo FLNS cujo o custo computacional para a sua solução é extremamente elevado para a aplicação de técnicas de otimização. Neste sentido, com o foco no modelo multi-físico de transdutores para aparelhos auditivos, no Capítulo 4 foram estudadas alternativas para redução do custo computacional do modelo multi-físico, sendo o modelo acústico viscotérmico o principal modelo avaliado.

No Capítulo 4 foram analisadas a discretização do modelo piezoelétrico e de modelos acústicos viscotérmicos para se determinar uma discretização para representação aceitável destes sistemas na escala geométrica dos transdutores para aparelhos auditivos. Em seguida foram analisadas alternativas para redução do custo computacional do modelo acústico viscotérmico. Para isto, foi construído um modelo de referência (MR) multi-físico de transdutor com tamanho compatível aos transdutores de aparelhos auditivos. Com o MR foram avaliados os modelos acústicos viscotérmicos simplificados LRF e SLNS. Estes modelos foram analisados, principalmente, em termos de precisão e velocidade da solução em relação ao MR. Nestas análises, o modelo LRF apresentou maior velocidade de solução e menor precisão enquanto o modelo SLNS apresentou maior precisão e menor velocidade.

A característica distribuída dos parâmetros viscotérmicos (Ψ_v e Ψ_h) no modelo SLNS permite a aplicação deste modelo em geometrias arbitrárias, porém seu custo computacional é relativamente alto em relação ao modelo LRF. Neste sentido, foram analisadas formas de redução do custo computacional do modelo SLNS avaliando-se tanto a concentração (na geometria) como a interpolação (na frequência) dos parâmetros viscotérmicos. A concentração destes parâmetros permite a utilização de malhas e Elementos Finitos menos refinadas em parte do processo de solução, conforme detalhado na Seção 4.4. Porém, a redução do custo computacional atingida por esta alternativa foi muito pequena nas análises aqui realizadas. Na análise da interpolação na frequência dos parâmetros viscotérmicos houve uma grande redução do custo computacional do modelo SLNS em relação ao MR com velocidade acima de 5 vezes maior do que o modelo SLNS sem interpolação

e 20,4 vezes maior do que o MR. Nesta análise, foram realizadas interpolações lineares dos parâmetros viscotérmicos nas frequências intermediárias a partir de soluções destes parâmetros em determinadas frequências distribuídas de duas diferentes formas: linear e quadrática. A distribuição quadrática apresentou melhor precisão com erros da mesma ordem que o modelo SLNS sem interpolação devido a maior variação dos parâmetros viscotérmicos nas baixas frequências, que pode ser constatado pela variação exponencial das camadas limites térmica e viscosa.

Por último, ainda no Capítulo 4, foi avaliada uma proposta de solução semi-analítica dos parâmetros viscotérmicos distribuídos do modelo SLNS. Esta proposta, que foi obtida mediante a solução numérica de uma função distância, se apresentou muito precisa e computacionalmente eficiente com tempo de solução 24 vezes mais rápido que o MR sendo aplicável em geometrias arbitrárias.

Após a validação e relativa redução de custo computacional dos modelos multi-físicos, o próximo passo foi a aplicação deste modelos juntamente com técnicas de otimização no Capítulo 5. Neste capítulo foram aplicadas otimizações paramétricas em projetos de alto-falantes e microfones piezoelétricos para aplicação em aparelhos auditivos. Primeiramente, foram otimizados projetos básicos destes transdutores. Neste projetos básicos, devido às geometrias simples, os modelos multi-físicos foram construídos com o modelo acústico viscotérmico LRF. Com a aplicação de um procedimento simples de otimização, utilizando-se os métodos de algoritmos genéticos (GA) e Nelder-Mead (NM) nestes projetos básicos, foram obtidas, de forma geral, configurações com desempenhos próximos aos transdutores comerciais.

Na otimização de projetos básicos de alto-falantes foram, primeiramente, obtidas configurações otimizadas com desempenhos um pouco aquém dos transdutores comerciais. A partir da fixação de um dos materiais do diafragma foram obtidas configurações otimizadas com desempenho mais satisfatório em relação aos transdutores comerciais.

Na otimização de microfones foram obtidas configurações otimizadas dos projetos básicos iniciais com desempenhos próximos aos microfones comerciais. O Projeto M2 otimizado, que possui parâmetros que configuram a área e posição dos eletrodos no diafragma piezoelétrico, apresentou melhor desempenho em relação ao Projeto M1. No Projeto M2, os eletrodos otimizados convergiram para áreas muito pequenas com um deslocamento máximo entre os eletrodos superior e inferior. Esta característica contribuiu muito para o aumento do desempenho do transdutor, conforme demonstrado pela diferença

de desempenho entre o Projeto M2 com eletrodos otimizados e cheios (preenchendo toda a superfície do diafragma). Entretanto, questões envolvendo a aplicabilidade prática desse tipo de eletrodo ainda precisam ser verificadas.

Posteriormente, no Capítulo 5, foi aplicado o mesmo procedimento de otimização utilizado nos projetos básicos de transdutores em otimizações com parâmetros de forma, permitindo assim a concepção de projetos com formas geométricas menos convencionais. Nestas otimizações, devido à possibilidade de geração de geometrias mais complexas, os modelos multi-físicos dos transdutores foram construídos aplicando-se o modelo acústico viscotérmico SLNS. Para redução do custo computacional do modelo SLNS, foi aplicada a proposta de solução semi-analítica descrita na Seção 4.6.

Na otimização do microfone com parâmetros de forma foi construído um projeto semelhante ao Projeto M2 (com eletrodos cheios) adicionando-se parâmetros que permitem a alteração da forma do diafragma piezoelétrico e da cavidade superior do transdutor. Com este projeto obteve-se uma configuração com desempenho próximo aos projetos básicos mesmo com a aplicação de eletrodos cheios no diafragma, mostrando que a variação de forma permite um aumento significativo do desempenho deste sistema.

Na otimização do alto-falante com parâmetros de forma foi construído um projeto semelhante ao Projeto A2 com adição de parâmetros que permitem a alteração da forma do diafragma piezoelétrico e da cavidade superior do transdutor. Com este projeto obteve-se uma configuração com desempenho superior ao projeto básico A2.

De forma geral, este trabalho trouxe contribuições para a análise e otimização de transdutores piezoelétricos para aparelhos auditivos. Neste sentido desenvolvimentos aqui apresentados podem ser utilizados como ferramentas de projeto, contribuindo assim para o avanço no desenvolvimento destes transdutores.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foram aplicadas, desenvolvidas e analisadas algumas ferramentas e técnicas para a avaliação e otimização de transdutores piezoelétricos para aparelhos auditivos. Entretanto, muitos aspectos podem ser melhorados ou expandidos como, por exemplo:

- Desenvolvimento de modelos MEF para materiais piezoelétricos com menor custo computacional para a análise dos transdutores;

- Desenvolvimento de técnicas de solução para se obter de forma mais rápida a solução na frequência de modelos MEF multi-físicos como, por exemplo, aplicação de técnicas de redução de modelo;
- Aplicação de técnicas de otimização topológica nos modelos multi-físicos aqui desenvolvidos;
- Inclusão de sistemas periféricos no modelo do microfone a ser otimizado como, por exemplo, a representação dos sistemas de pré-amplificação e aquisição do sinal elétrico;
- Inclusão de restrições do processo de fabricação nos procedimentos de otimização numérica dos transdutores.

REFERÊNCIAS

- [1] DILLON, H. *Hearing aids*. [S.l.]: Thieme, 2001.
- [2] THOMPSON, S. C. et al. Noise in miniature microphones. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 111, n. 2, p. 861–866, 2002.
- [3] ARAUJO, D. *Caracterização experimental de alto-falantes para aparelhos auditivos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.
- [4] PEREIRA, I. *Caracterização numérica e experimental de um protótipo de microfone piezoelétrico visando uso em aparelhos auditivos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.
- [5] YANAGIHARA, N. et al. Development of an implantable hearing aid using a piezoelectric vibrator of bimorph design: state of the art. *Otolaryngology—Head and Neck Surgery*, SAGE Publications, v. 92, n. 6, p. 706–712, 1984.
- [6] YANAGIHARA, N.; GYO, K.; HINOHIRA, Y. Partially implantable hearing aid using piezoelectric ceramic ossicular vibrator. results of the implant operation and assessment of the hearing afforded by the device. *Otolaryngologic clinics of North America*, v. 28, n. 1, p. 85–97, February 1995.
- [7] LEYSIEFFER, H. et al. An implantable piezoelectric hearing aid transducer for inner ear hearing loss. i: Development of a prototype. *HNO*, v. 45, n. 10, p. 792, 1997.
- [8] LEYSIEFFER, H. et al. An implantable piezoelectric hearing aid transducer for inner ear deafness. ii: Clinical implant. *HNO*, v. 45, n. 10, p. 801, 1997.
- [9] YASUI, H. et al. Piezoelectric transducer for hearing aid using pzt thin film. In: *Proceedings of the 16th International Congress on Acoustics, Seattle*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 2201–2202.
- [10] KO, S. C. Micromachined piezoelectric membrane acoustic device. *Sensors and Actuators*, v. 103(A), p. 130–134, 2003.

- [11] LEE, W. S.; LEE, S. S. Piezoelectric microphone built on circular diafragm. *Sensors and Actuators*, v. 144 (A), p. 367–373, 2008.
- [12] GERMANO, C. Flexure mode piezoelectric transducers. *Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 19, n. 1, p. 6–12, 1971.
- [13] GORDON, R. S.; PARAD, L.; BUTLER, J. L. Equivalent circuit of a ceramic ring transducer operated in the dipole mode. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 58, n. 6, p. 1311–1314, 1975.
- [14] LOTTON, P. et al. A model to describe the behaviour of a laterally radiating piezoelectric loudspeaker. *Applied Acoustics*, Elsevier, v. 58, n. 4, p. 419–442, 1999.
- [15] NEWBURY, K. M.; LEO, D. J. Linear electromechanical model of ionic polymer transducers-part i: model development. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Sage Publications, v. 14, n. 6, p. 333–342, 2003.
- [16] ARONOV, B. The energy method for analyzing the piezoelectric electroacoustic transducers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 117, n. 1, p. 210–220, 2005.
- [17] ARONOV, B. The energy method for analyzing the piezoelectric electroacoustic transducers. ii.(with the examples of the flexural plate transducer). *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 118, n. 2, p. 627–637, 2005.
- [18] PRASAD, S. A. *Two-port electroacoustic model of a piezoelectric composite circular plate*. Tese (Doutorado) — University of Florida, 2002.
- [19] PRASAD, S. A. et al. Analytical electroacoustic model of a piezoelectric composite circular plate. *AIAA journal*, v. 44, n. 10, p. 2311–2318, 2006.
- [20] ZHANG, J. *Miniaturized flextensional transducers and arrays*. Tese (Doutorado) — The Pennsylvania State University, 2000.
- [21] BAI, M. R. et al. Finite-element electroacoustic analysis and taguchi design of piezoelectric buzzers based on the vibration absorber model. *Open Acoustics Journal*, Bentham Science Publishers B. V., P. O. Box 1673 Hilversum 1200 BR Netherlands, v. 1, p. 34–48, 2008.

- [22] TIJDEMAN, H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *Journal of Sound and Vibration*, v. 39, p. 1–33, 1975.
- [23] BELTMAN, W. M. Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction, part i: Theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 227, n. 3, p. 555 – 586, 1999.
- [24] BELTMAN, W. M. Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction, part ii: Applications. *Journal of Sound and Vibration*, v. 227, n. 3, p. 587 – 609, 1999.
- [25] KAMPINGA, W. R. et al. The coupling of a hearing aid loudspeaker membrane to visco-thermal air layers. In: *Proceedings of 14th International Congress on Sound and Vibration*. [S.l.: s.n.], 2007.
- [26] MARTINS, G. C. *Modelagens acústicas incluindo efeitos viscotérmicos com vistas à aplicação em alto-falantes de aparelhos auditivos*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (UFSC), 2011.
- [27] MALINEN, M. et al. A finite element method for the modeling of thermo-viscous effects in acoustics. In: *Proc. ECCOMAS*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [28] Comsol AB. *Comsol Multiphysics user's guide*. 4.3. ed. [S.l.], 2012.
- [29] KAMPINGA, W. R.; WIJNANT, Y. H.; BOER, A. de. A finite element for viscothermal wave propagation. In: *Proceedings of ISMA 2008*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 4271–4278.
- [30] FRECKER, M. Recent advances in optimization of smart structures and actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Sage Publications, v. 14, n. 4-5, p. 207–216, 2003.
- [31] WEIN, F. et al. Topology optimization of a piezoelectric loudspeaker coupled with the acoustic domain. *Proceedings WCSMO-08*, p. 1–5, 2009.
- [32] WEIN, F. et al. On the effect of self-penalization of piezoelectric composites in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 43, n. 3, p. 405–417, 2011.
- [33] WEIN, F. *Topology Optimization of Smart Piezoelectric Transducers*. Tese (Doutorado) — Universität Erlangen-Nürnberg, 2011.

- [34] NAKASONE, P. *Projeto de transdutores baseados em placas piezelétricas através do método de otimização topológica*. Tese (Doutorado) — USP, 2011.
- [35] BAI, M.; HUANG, C. Optimization and implementation of piezoelectric radiators using the genetic algorithm. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 113, p. 3197, 2003.
- [36] BAI, M. R. Optimal implementation of miniature piezoelectric panel speakers using the taguchi method and genetic algorithm. *Journal of Vibration and Acoustics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 126, n. 3, p. 359–369, 2004.
- [37] BAI, M. et al. Optimal design of resonant piezoelectric buzzer from a perspective of vibration-absorber theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 122, p. 1568, 2007.
- [38] CHUANG, C.-H.; LAI, J.-Y.; WANG, C.-H. Flexible microspeaker based on bimorph piezoelectric transducer. In: *The Asia-Pacific Conference on Transducers and Micro-Nano Technology*. [S.l.: s.n.], 2008.
- [39] COOK, R. et al. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. [S.l.]: Wiley, 2001.
- [40] KALTENBACHER, M. *Numerical simulation of mechatronic sensors and actuators*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2007.
- [41] MARINHO, M. *Modelagem dinâmica por elementos finitos e controle de placas e vigas usando sanduíches de sensor-atuador piezelétricos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- [42] HEYWANG, W.; LUBITZ, K.; WERSING, W. *Piezoelectricity: Evolution and Future of a Technology*. [S.l.]: Springer Verlag, 2008.
- [43] HENDERSON, I. *Piezoelectric Ceramics: Principles and Applications*. [S.l.]: APC international Ltd, 2002.
- [44] SILVA, F. *Modelagem de uma placa de materiais compósitos e piezelétricos pelo método dos elementos finitos. Aplicação de controle de vibração*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

- [45] BENJEDDOU, A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers & Structures*, v. 76, p. 347–363, 2000.
- [46] BLACKSTOCK, D. T. *Fundamentals of physical acoustics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [47] FOX, R.; MCDONALDS, A. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 5a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [48] FOX, M.; WHITTON, P. The damping of structural vibration by thin gas films. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 73, n. 2, p. 279–295, 1980.
- [49] BRUNEAU, M. Acoustique des cavités: modèles et applications. *Le Journal de Physique IV*, v. 4, n. C5, p. 5–5, 1994.
- [50] BASTEN, T. et al. On the acousto-elastic behaviour of double-wall panels with a viscothermal air layer. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 243, n. 4, p. 699–719, 2001.
- [51] KAMPINGA, R.; WIJNANT, Y.; BOER, A. Viscothermal wave propagation in a circular layer with a partially open and partially closed boundary. In: *Proceedings of the ISMA*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 4617–4626.
- [52] BRUNEAU, M. et al. General formulation of the dispersion equation in bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries. *Wave Motion*, v. 11, n. 5, p. 441 – 451, 1989.
- [53] HAMERY, P.; BRUNEAU, M.; BRUNEAU, A. M. Mouvement d’une couche de fluide dissipatif en espace clos sous l’action d’une source étendue. *Journal de Physique IV*, HAL - CCSD, p. 4:C5–213–C5–216, 1994.
- [54] KAMPINGA, W. R. *Viscothermal acoustics using finite elements : analysis tools for engineers*. Tese (Doutorado) — University of Twente, Enschede, June 2010. Disponível em: <<http://doc.utwente.nl/71858/>>.
- [55] BELTMAN, W. M. *Viscothermal wave propagation including acousto-elastic interaction*. Tese (Doutorado) — University of Twente, Enschede (the Netherlands), 1998.
- [56] ZWIKKER, C.; KOSTEN, C. W. *Sound absorbing materials*. Amsterdam: Elsevier, 1949.

- [57] IBERALL, A. S. Attenuation of oscillatory pressures in instrument lines. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, v. 45, p. 85–108, 1950.
- [58] MUNJAL, M. *Acoustics of ducts and mufflers with application to exhaust and ventilation system design*. New York: Wiley-Interscience, 1987.
- [59] EGOLF, D.; LEONARD, R. Experimental scheme for analyzing the dynamic behavior of electroacoustic transducers. *Journal of Acoustical Society of America*, v. 62, p. 1013, 1977.
- [60] JÚNIOR, A. L. *Análise comparativa de métodos de otimização topológica em elasticidade 2D e 3D*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.
- [61] BENDSØE, M.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.
- [62] ESCHENAUER, H.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures: a review. *Applied Mechanics Reviews*, AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, v. 54, n. 4, p. 331–389, 2001.
- [63] TANSKANEN, P. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 191, n. 47, p. 5485–5498, 2002.
- [64] DANTZIG, G. *Linear programming and extensions*. [S.l.]: Princeton university press, 1963.
- [65] RAO, S. *Engineering optimization: theory and practice*. [S.l.]: Wiley, 2009.
- [66] HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. *Practical genetic algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.
- [67] NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, Br Computer Soc, v. 7, n. 4, p. 308–313, 1965.
- [68] MURATA MANUFACTURING CO., LTD. *Piezoelectric Sound Components*. Tokyo - Japan.

- [69] LUENG, C. et al. Piezoelectric coefficient of aluminum nitride and gallium nitride. *Journal of Applied Physics*, v. 88, p. 5360, 2000.
- [70] HUANG, Z. et al. Comparative measurements of piezoelectric coefficient of pzt films by berlinecourt, interferometer, and vibrometer methods. *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 53, n. 12, p. 2287–2293, 2006.
- [71] HUANG, Z. et al. Determination of piezoelectric coefficients and elastic constant of thin films by laser scanning vibrometry techniques. *Sensors and Actuators A: Physical*, Elsevier, v. 135, n. 2, p. 660–665, 2007.
- [72] EERDEN, F. J. M. van der. *Noise reduction with coupled prismatic tubes*. Tese (Doutorado) — Universiteit Twente, Enschede (the Netherlands), 2000.
- [73] FAHY, F.; GARDONIO, P. *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. [S.l.]: Academic Press, 2007.
- [74] SCHENK, O. <http://www.pardiso-project.org/>.
- [75] ROGET, B.; SITARAMAN, J. Wall distance search algorithm using voxelized marching spheres. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 241, p. 76–94, 2013.
- [76] TUCKER, P. Differential equation-based wall distance computation for {DES} and {RANS}. *Journal of Computational Physics*, v. 190, n. 1, p. 229 – 248, 2003.
- [77] TUCKER, P. G. et al. Computations of wall distances based on differential equations. *AIAA journal*, v. 43, n. 3, p. 539–549, 2005.
- [78] FARES, E.; SCHRÖDER, W. A differential equation for approximate wall distance. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 39, n. 8, p. 743–762, 2002.
- [79] MATHWORKS. *MATLAB R2012b User's Guide*. [S.l.], 2012.
- [80] BÖHM, W.; FARIN, G.; KAHMANN, J. A survey of curve and surface methods in {CAGD}. *Computer Aided Geometric Design*, v. 1, n. 1, p. 1 – 60, 1984.
- [81] D'ERRICO, J. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/>. Março 2015.

APÊNDICE A – Propriedades dos materiais

As propriedades dos materiais utilizados nos modelos serão apresentadas a seguir.

A.1 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS NOS MODELOS ACÚSTICOS

A Tabela A.1 lista as propriedades físicas do ar que foram aplicadas nos modelos acústicos.

Tabela A.1 – Propriedades físicas do ar utilizadas nos modelos acústicos.

Símbolo	Valor
T_0	293 [K]
P_0	101325 [Pa]
ρ_0	1.201 [kg/m ³]
C_p	1004 [J/(kg.K)]
κ	25.6 e-3 [W/(mK)]
μ	1.81 e-5 [Pa.s]
λ	-1.21 e-6 [Pa.s]
c_0	344 [m/s]

A.2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS NOS MODELOS ESTRUTURAIIS

A Tabela A.2 lista as propriedades mecânicas aplicadas ao modelo dinâmico-estrutural do disco de latão (componente do diafragma piezoelétrico) na validação experimental dos modelos apresentado no Capítulo 3.

Tabela A.2 – Propriedades mecânicas aplicadas ao modelo estrutural.

Símbolo	Valor
E	110 [GPa]
ρ	8000 [kg/m ³]
ν	0.32
η	0.025

A.3 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS NOS MODELOS PIEZOE-LÉTRICOS

As propriedades físicas do material piezoeletrico foram aplicadas considerando a relação constitutiva deformação - deslocamento elétrico ($\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}$) Equação (2.38), sendo que as matrizes $[\mathbf{s}]$, $[\mathbf{d}]$ e $[\boldsymbol{\epsilon}_c]$ foram apresentadas na Equação (2.42). A Tabela A.3 lista os coeficientes (com as mesmas unidades da Equação (2.42)) destas matrizes e a densidade do PZT-5A que foram utilizados na validação experimental dos modelos no Capítulo 3.

Tabela A.3 – Propriedades físicas do PZT-5A.

Símbolo	Valor	Símbolo	Valor
s_{11}	16.4	d_{31}	-171
$s_{12} = s_{21}$	-5.74	d_{32}	-171
$s_{13} = s_{31}$	-7.22	d_{33}	374
s_{22}	16.4	d_{24}	584
$s_{23} = s_{32}$	-7.22	d_{15}	584
s_{33}	18.8	ϵ_{11}	1730
s_{44}	47.5	ϵ_{22}	1730
s_{55}	47.5	ϵ_{33}	1700
s_{66}	44.3	ρ	7750 [kg/m ³]

A.4 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS NAS OTIMIZAÇÕES

A Tabela A.4 lista as propriedades físicas dos materiais estruturais e piezoelétricos de acordo com os índices da Tabela 5.1. As unidades dos coeficientes das matrizes $[s]$, $[d]$ e $[\epsilon_c]$ estão de acordo com a Equação (2.42).

Tabela A.4 – Propriedades físicas dos materiais estruturais e piezoelétricos aplicadas nas otimizações.

Materiais estruturais				
Índice	1	2	3	4
E [GPa]	200	110	70	3.2
ρ [kg/m ³]	7850	8700	2700	1190
ν	0.33	0.35	0.33	0.35
Materiais Piezoelétricos				
Índice	1	2	3	4
s_{11}	16.4	9.10	2.86	365
$s_{12} = s_{21}$	-5.74	-2.70	-0.90	-110
$s_{13} = s_{31}$	-7.22	-2.90	-0.38	-209
s_{22}	16.4	9.10	3.12	424
$s_{23} = s_{32}$	-7.22	-2.90	-0.96	-192
s_{33}	18.8	9.5	3.04	472
s_{44}	47.5	22.8	8.00	1148
s_{55}	47.5	22.8	8.00	1148
s_{66}	44.3	23.6	8.00	950
d_{31}	-171	-78	-1.73	25
d_{32}	-171	-78	-2.78	2
d_{33}	374	190	5.49	-33
d_{24}	584	260	-3.84	27
d_{15}	584	260	-3.84	27
ϵ_{11}	1730	1450	9.21	12
ϵ_{22}	1730	1450	9.21	12
ϵ_{33}	1700	1700	-10.26	12
ρ [kg/m ³]	7750	5700	3300	1880

ANEXO A – Código Matlab

A seguir apresenta-se o código Matlab [79] para utilização do algoritmo “fminsearch.m” em problemas com restrições laterais. Este código foi desenvolvido por John D’Errico e está disponível no site [81].

```

function [x,fval,exitflag,output] = ...
    fminsearchbnd(fun,x0,LB,UB,options,varargin)
% FMINSEARCHBND: FMINSEARCH, but with bound constraints by
% transformation
% usage: x=FMINSEARCHBND(fun,x0)
% usage: x=FMINSEARCHBND(fun,x0,LB)
% usage: x=FMINSEARCHBND(fun,x0,LB,UB)
% usage: x=FMINSEARCHBND(fun,x0,LB,UB,options)
% usage: x=FMINSEARCHBND(fun,x0,LB,UB,options,p1,p2,...)
% usage: [x,fval,exitflag,output]=FMINSEARCHBND(fun,x0,...)
%
% arguments:
% fun, x0, options - see the help for FMINSEARCH
%
% LB - lower bound vector or array, must be the same size as x0
%
% If no lower bounds exist for one of the variables, then
% supply -inf for that variable.
%
% If no lower bounds at all, then LB may be left empty.
%
% Variables may be fixed in value by setting the corresponding
% lower and upper bounds to exactly the same value.
%
% UB - upper bound vector or array, must be the same size as x0
%
% If no upper bounds exist for one of the variables, then
% supply +inf for that variable.
%
% If no upper bounds at all, then UB may be left empty.
%
% Variables may be fixed in value by setting the corresponding
% lower and upper bounds to exactly the same value.
%
% Author: John D'Errico
% E-mail: woodchips@rochester.rr.com
% Release: 4
% Release date: 7/23/06
%
% size checks
xsize = size(x0);
x0 = x0(:);
n=length(x0);

if (nargin<3) || isempty(LB)
    LB = repmat(-inf,n,1);

```

```

else
    LB = LB(:);
end
if (nargin<4) || isempty(UB)
    UB = repmat(inf,n,1);
else
    UB = UB(:);
end

if (n~=length(LB)) || (n~=length(UB))
    error 'x0 is incompatible in size with either LB or UB.'
end

% set default options if necessary
if (nargin<5) || isempty(options)
    options = optimset('fminsearch');
end

% stuff into a struct to pass around
params.args = varargin;
params.LB = LB;
params.UB = UB;
params.fun = fun;
params.n = n;
% note that the number of parameters may actually vary if
% a user has chosen to fix one or more parameters
params.xsize = xsize;
params.OutputFcn = [];

% 0 --> unconstrained variable
% 1 --> lower bound only
% 2 --> upper bound only
% 3 --> dual finite bounds
% 4 --> fixed variable
params.BoundClass = zeros(n,1);
for i=1:n
    k = isfinite(LB(i)) + 2*isfinite(UB(i));
    params.BoundClass(i) = k;
    if (k==3) && (LB(i)==UB(i))
        params.BoundClass(i) = 4;
    end
end

% transform starting values into their unconstrained
% surrogates. Check for infeasible starting guesses.
x0u = x0;
k=1;
for i = 1:n
    switch params.BoundClass(i)
    case 1
        % lower bound only
        if x0(i)<=LB(i)

```

```

        % infeasible starting value. Use bound.
        x0u(k) = 0;
    else
        x0u(k) = sqrt(x0(i) - LB(i));
    end

    % increment k
    k=k+1;
case 2
    % upper bound only
    if x0(i)>=UB(i)
        % infeasible starting value. use bound.
        x0u(k) = 0;
    else
        x0u(k) = sqrt(UB(i) - x0(i));
    end

    % increment k
    k=k+1;
case 3
    % lower and upper bounds
    if x0(i)<=LB(i)
        % infeasible starting value
        x0u(k) = -pi/2;
    elseif x0(i)>=UB(i)
        % infeasible starting value
        x0u(k) = pi/2;
    else
        x0u(k) = 2*(x0(i) - LB(i))/(UB(i)-LB(i)) - 1;
        % shift by 2*pi to avoid problems at zero in fminsearch
        % otherwise, the initial simplex is vanishingly small
        x0u(k) = 2*pi+asin(max(-1,min(1,x0u(k))));
    end

    % increment k
    k=k+1;
case 0
    % unconstrained variable. x0u(i) is set.
    x0u(k) = x0(i);

    % increment k
    k=k+1;
case 4
    % fixed variable. drop it before fminsearch sees it.
    % k is not incremented for this variable.
end

end

end
% if any of the unknowns were fixed, then we need to shorten
% x0u now.
if k<=n
    x0u(k:n) = [];

```

end

```

% were all the variables fixed?
if isempty(x0u)
    % All variables were fixed. quit immediately, setting the
    % appropriate parameters, then return.

    % undo the variable transformations into the original space
    x = xtransform(x0u,params);

    % final reshape
    x = reshape(x,xsize);

    % stuff fval with the final value
    fval = feval(params.fun,x,params.args{:});

    % fminsearchbnd was not called
    exitflag = 0;

    output.iterations = 0;
    output.funcCount = 1;
    output.algorithm = 'fminsearch';
    output.message = ...
        'All variables were held fixed by the applied bounds';

    % return with no call at all to fminsearch
    return
end

% Check for an outputfcn. If there is any, then substitute my
% own wrapper function.
if ~isempty(options.OutputFcn)
    params.OutputFcn = options.OutputFcn;
    options.OutputFcn = @outfun_wrapper;
end

% now we can call fminsearch, but with our own
% intra-objective function.
[xu,fval,exitflag,output] = ...
    fminsearch(@intrafun,x0u,options,params);

% undo the variable transformations into the original space
x = xtransform(xu,params);

% final reshape to make sure the result has the proper shape
x = reshape(x,xsize);

% Use a nested function as the OutputFcn wrapper
function stop = outfun_wrapper(x,varargin);
    % we need to transform x first
    xtrans = xtransform(x,params);

```

```

    % then call the user supplied OutputFcn
    stop = params.OutputFcn(xtrans,varargin{1:(end-1)});

end

end % mainline end

% =====
% ===== begin subfunctions =====
% =====
function fval = intrafun(x,params)
% transform variables, then call original function

% transform
xtrans = xtransform(x,params);

% and call fun
fval = feval(params.fun,reshape(xtrans,params.xsize),...
    params.args{:});

end % sub function intrafun end

% =====
function xtrans = xtransform(x,params)
% converts unconstrained variables into their original domains

xtrans = zeros(params.xsize);
% k allows some variables to be fixed, thus dropped from the
% optimization.
k=1;
for i = 1:params.n
    switch params.BoundClass(i)
        case 1
            % lower bound only
            xtrans(i) = params.LB(i) + x(k).^2;

            k=k+1;
        case 2
            % upper bound only
            xtrans(i) = params.UB(i) - x(k).^2;

            k=k+1;
        case 3
            % lower and upper bounds
            xtrans(i) = (sin(x(k))+1)/2;
            xtrans(i) = xtrans(i)*(params.UB(i) - params.LB(i)) ...
                + params.LB(i);
            % just in case of any floating point problems
            xtrans(i) = max(params.LB(i),min(params.UB(i),xtrans(i)));

            k=k+1;
        case 4

```

```
    % fixed variable, bounds are equal, set it at either bound
    xtrans(i) = params.LB(i);
case 0
    % unconstrained variable.
    xtrans(i) = x(k);

    k=k+1;
end
end
end % sub function xtransform end
```