

João Morais da Silva Neto

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MATERIAIS E
ESTRUTURAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À
UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM ENGENHARIA
MECÂNICA

Orientador: José João de Espíndola,
Ph.D.

Florianópolis

1999

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Silva Neto, João Moraes
IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MATERIAIS E ESTRUTURAIS NO
DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA / João Moraes Silva Neto ;
orientador, José João Espíndola - Florianópolis, SC, 1999.
152 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Identificação. 3. Parâmetros.
4. Materiais. 5. Frequência. I. Espíndola, José João . II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

João Morais da Silva Neto

**IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MATERIAIS E
ESTRUTURAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de mestre, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, Maio de 1999.

Júlio César Passos, Dr. Eng.

Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca:

Prof^o. José João de Espíndola, Ph.D.

Orientador

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof^o. Paulo de Tarso da Rocha Mendonça, Ph.D.

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Eng^o. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, Ph.D.

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof^o. Carlos Alberto Bavastri, Dr. Eng.

CEFET-PR

À minha família.

Ao meu avô João (in memoriam)

AGRADECIMENTOS

A Deus;

Aos meus pais e meus irmãos;

Ao meu orientador pelo apoio em todos os momentos, pelos ensinamentos técnicos, pelos conselhos de amigo e pela sabia e brilhante orientação;

A todos os meus amigos pelo incentivo e apoio nos momentos difíceis;

Ao CNPq pelo apoio financeiro em forma de bolsa de estudos.

“Alguns homens veem as coisas como elas são e dizem ‘por que’? Eu sonho com as coisas que nunca foram feitas, e digo, por que não?”

George Bernard Shaw

A compreensão humana não é um exame desinteressado, mas recebe infusões da vontade e dos afetos; disso se originam ciências que podem ser chamadas “ciências conforme a nossa vontade”. Pois um homem acredita mais facilmente no que gostaria que fosse verdade. Assim, ele rejeita coisas difíceis pela impaciência de pesquisar; coisas sensatas, porque diminuem a esperança; as coisas mais profundas da natureza, por superstição; a luz da experiência, por arrogância e orgulho; coisas que não são comumente aceitas, por deferência à opinião do vulgo. Em suma, inúmeras são as maneiras, e às vezes imperceptíveis, pelas quais os afetos coloreem e contaminam o entendimento.

Francis Bacon

RESUMO

Percebeu-se recentemente que o fenômeno de vibrações auto-induzidas proporciona o rompimento de cabos de linhas de transmissão aéreas de alta tensão. Tal fenômeno tem origem no escoamento eólico através do cabo, que gera os chamados vórtices de Von Karman (1912); sua ocorrência tem forma de esteira e sempre alternada, ora na parte superior, ora na inferior. Tal ação gera um desbalanceamento alternado da pressão, induzindo, assim, um movimento para cima e para baixo do cabo condutor. O cabo por sua vez tende a romper por fadiga devido ao efeito da vibração eólica. As dificuldades são muitas na pesquisas nessa área e apresentam-se nas mais diversas formas, entre elas a necessidade de se conhecer alguns parâmetros estruturais e características do cabo em si, bem como dos dispositivos utilizados para redução dos níveis de vibração. Dentre os parâmetros importantes para o estudo deste fenômeno está a rigidez e o amortecimento material do cabo de transmissão e do *Stockbridge*. Uma prática corrente é a medição do decremento logarítmico de um vão do cabo, construído para este fim. Este procedimento, entretanto é conceitualmente incorreto, pois o decremento logarítmico é uma característica estrutural do vão e não uma propriedade intrínseca do cabo, (Lazan, 1968). Portanto, o presente trabalho buscou uma metodologia para a medição do amortecimento histerético da linha e dos *Stockbridges* (que são feitos de elementos de linha), bem como da rigidez à flexão de um cabo ACSR. Três modelos matemáticos de PED (Pêndulo Elástico Duplo) foram elaborados e testados: dois graus de liberdade, n graus de liberdade e método de elementos finitos. O presente trabalho permite a determinação realística da rigidez equivalente e o fator de perda. Isto significa um avanço considerável em relação ao procedimento comum, não adequado, de se medir o decremento logarítmico de tais cabos. O presente trabalho identificou o módulo de rigidez à flexão com resultados muito satisfatórios e concernentes com a literatura conhecida. Consequentemente obteve-se o módulo de elasticidade e o fator de perda material que foram muito próximos dos valores conhecidos.

Palavras-chave: Identificação, parâmetros, materiais, frequência.

ABSTRACT

It has been observed that self-induced vibrations may lead to damage in power lines' cables. Such a phenomena is originated by wind flow around the cable, which results in Von Karman vortex street (1912). These vortices generate a pressure unbalance, resulting in an oscillating motion of the cable, which in turn tends to fail by fatigue. The need for studying and controlling this kind of situation has been pointed out by a variety of work by Dotharad (1978), Hagendorn (1982), Wagner (1973), among others. There are, however, some difficulties, such as the lack of knowledge related to some structural parameters, and efficient devices for reducing cables' vibration levels. Among the important structural parameters for studying the phenomena, one may point to the stiffness and damping of cables and stock-bridges. The logarithmic decrease of a cable's gap is frequently used in this context, which is conceptually incorrect, since this is not an intrinsic characteristic from the cable itself (Lazan, 1968). As the gaps in the design phase are not known previously, this approach is difficult, if not impossible, to be used. Further procedures are related to the estimation of the structural damping. The present work introduces a methodology for measuring the hysteretic damping of cables and stock-bridges, and the flexure stiffness of a ACSR cable. Three mathematical models based on Double Elastic Pendulum (DEP) were developed and tested: two degrees of freedom, n degrees of freedom (the assumed modes method) and the Finite Elements Method. This methodology allows the realistic determination of the equivalent stiffness and the loss factor, which is more suitable than measuring the logarithmic decrement of the cables' gaps. In the case of the DEP-P, for which the elastic "beam" has a simple geometry, the procedure allows the determination of the material's loss factor, whether metallic or non-metallic, and the Young modulus. Results obtained for the flexural stiffnesses were more than reasonable and compared well with other found in the literature. Thus, Young moduli and loss factors obtained were very close to known values.

Keywords: Vibrations, Stockbridge, fatigue, cable.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Representação de um sistema com uma entrada e uma saída.....	34
Figura 1.2 - Diagrama de representação de um processo de Identificação.....	36
Figura 2.1 – Deformações de materiais viscoelásticos.	44
Figura 2.2 – Sistemas simples com um grau de liberdade.....	46
Figura 2.3 – Diagrama de corpo livre (D.C.L.).....	46
Figura 2.4 – Modelo esquemático de um grau de liberdade para amortecimento histerético.....	48
Figura 2.5 – Modelo esquemático de um grau de liberdade para amortecimento viscoso.....	51
Figura 2.6 – Gráficos com a variação apenas do amortecimento, para uma função resposta em frequência (FRF) modelo com um grau de liberdade: a) modelo com amortecimento viscoso, b) modelo com amortecimento histerético.....	53
Figura 3.1 - Modelo físico para o método com dois graus de liberdade.....	55
Figura 3.2 – Modelo físico para o método dos modos assumidos.....	61

Figura 3.3 – Representação dos dois primeiros modos de uma viga engastada apenas em uma de suas extremidades: (a) primeiro modo, (b) segundo modo.....	70
Figura 3.4 – Esquema de um elemento de viga sujeito a esforços e a uma carga distribuída.....	72
Figura 3.5 – Viga engastada com carga distribuída ao longo do seu comprimento.....	73
Figura 3.6 – Elemento de uma viga sujeita a esforços transversais, como exemplo didático para a modelagem por MEF.....	74
Figura 3.7 – Modelo físico da viga com a massa de sintonia, massa da base e força excitadora para o MEF.	77
Figura 3.8 – Figura do dispositivo PED e utilizado na modelagem.....	83
Figura 4.1 – Desenho do neutralizador de Stockbridge usado como PED, com as suas respectivas dimensões.....	86
Figura 4.2 – Desenho esquemático do aparato experimental, visto transversalmente.	87
Figura 4.3 – Tela do DSA com a opção de escolha para o swept sine.	88
Figura 4.4 – Esboço da cadeia de medição com os respectivos equipamentos utilizados e a vista superior do aparato experimental.	89
Figura 4.5 – Foto do neutralizador de Stockbridge modelo AS-2008 ensaiado experimentalmente e utilizado como PED, com o detalhe para a suspensão e fixação na base.....	90
Figura 4.6 – Foto do experimento montado com detalhes da suspensão.....	90
Figura 4.7 – Foto do experimento durante os ensaios dos PED-P (protótipos), com detalhe da união entre o excitador eletrodinâmico, a cabeça de impedância, e o protótipo.....	91

Figura 4.8 – Tela do DSA, exibindo a função resposta em frequência e fase do neutralizador de Stockbridge, após um dos ensaios.....	92
Figura 4.9 - Tela do software de saída do analisador de Fourier, exibindo a função resposta em frequência e fase do protótipo que possui o cabo de nylon, após um dos ensaios.....	92
Figura 5.1 - Correlação entre os modelos dinâmicos (caso amortecido).....	96
Figura 5.2 – Região de interesse e as respectivas regiões dos resíduos.....	97
Figura 5.3 – Fluxograma dos programas utilizados na identificação de parâmetros do neutralizador.....	106
Figura 5.4 - Massa dinâmica experimental e identificada através do método de Elementos Finitos.....	107
Figura 5.5 - fases das massas dinâmicas experimental e a identificada através do modelo de Elementos Finitos.....	108
Figura 5.6 - Massa dinâmica experimental e identificada através do método dos Modos Assumidos.....	108
Figura 5.7 - Fases das massas dinâmicas experimental e a identificada através do método dos Modos Assumidos.....	109
Figura 5.8 - Massa dinâmica experimental e identificada através do método de Dois Graus de Liberdade.....	109
Figura 5.9 - Fases das massas dinâmicas experimental e a identificada através do método de Dois Graus de Liberdade.....	110
Figura 5.10 – Comparação entre as massas dinâmicas obtidas por identificação, utilizando-se os métodos de Elementos Finitos, Modos Assumidos e Dois Graus de Liberdade.....	110
Figura 5.11 - Comparação dos resultados obtidos e a curva experimental, para o primeiro modo da massa dinâmica do PED (maior resolução).....	111

Figura 5.12 - Comparação dos resultados obtidos e a curva experimental, para o segundo modo da massa dinâmica do PED (maior resolução).....	111
Figura 6.1 - Massa dinâmica (módulo) do PED-P, com a viga confeccionada de nylon.....	115
Figura 6.2 - Massa dinâmica do PED-P, com a viga confeccionada de alumínio.....	115
Figura 6.3 - Massa dinâmica do PED-P, com a viga confeccionada de aço.....	116
Figura 6.4 – fotografia do PED-P, composto por viga de aço.....	116
Figura 6.5 - fotografia do PED-P, composto por viga de nylon.....	117
Figura 6.6 - Fotografia da experimentação do protótipo com viga de aço, com detalhes do aparato utilizado.....	117
Figura 6.7 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de nylon.....	120
Figura 6.8 – Maior resolução do 1o modo “zoom” da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de nylon.....	120
Figura 6.9 – Maior resolução do 2o modo “zoom” da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de nylon.....	121
Figura 6.10 - Massa dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos (MA), para o protótipo com viga de nylon.....	122
Figura 6.11 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos (MA), para o protótipo com viga de nylon.....	122
Figura 6.12 - Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos (MA), para o protótipo com viga de nylon.....	123

Figura 6.13 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de nylon.....	124
Figura 6.14 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada via o modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de nylon.....	124
Figura 6.15 - Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada via o modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de nylon.....	125
Figura 6.16 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de aço.....	127
Figura 6.17 – Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de aço.....	127
Figura 6.18 – Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de aço.....	128
Figura 6.19 - Massa dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de aço.....	129
Figura 6.20 – Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de aço.....	129
Figura 6.21 - Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de aço.....	130
Figura 6.22 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de aço.....	130
Figura 6.23 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de aço.....	130

Figura 6.24 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de aço.....	132
Figura 6.25 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de alumínio.....	134
Figura 6.26 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de alumínio.....	134
Figura 6.27 - Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de alumínio.....	135
Figura 6.28 - Massa dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de alumínio.....	135
Figura 6.29 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de alumínio.....	136
Figura 6.30 - Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de alumínio.....	136
Figura 6.31 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de alumínio.....	137
Figura 6.32 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada via o modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de alumínio.....	137
Figura 6.33 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada via o modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de alumínio.....	138

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Tabela comparativa entres os modelos de amortecimento, a partir da variação de um e outro parâmetro.....	54
Tabela 5.1- Comparação entre os valores obtidos a partir dos três métodos utilizados na modelagem do PED e o ponto de partida utilizado.....	113
Tabela 6.1 - Comparação entre os valores obtidos a partir dos três métodos utilizados na modelagem do PEDS-P (protótipo) de nylon e as variáveis estimadas para o início da identificação.....	126
Tabela 6.2 - Comparação entre os valores obtidos a partir dos três métodos utilizados na modelagem do PED-P (protótipo) de aço e as variáveis estimadas para o início da identificação.....	132
Tabela 6.3 - Comparação entre os valores obtidos a partir dos três métodos utilizados na modelagem do PED-P (protótipo) de alumínio e as variáveis estimadas para o início da identificação.....	139
Tabela 6.4 – Valores obtidos das rigidez dos materiais utilizados nos protótipos.....	139

LISTA DE SÍMBOLOS

M_b	É o módulo que descreve a relação entre tensão e deformação, para tal placa sob carga de compressão
B	Módulo volumétrico
G	Módulo de cisalhamento
E_a	Módulo aparente de elasticidade
S	Fator de forma
β	(VER PAGINA 43)
G_a	Módulo dinâmico
G_i	Módulo de perda
η_G	Fator de perda do material
Ω	Frequência circular
Θ	Temperatura
$A(\Omega)$	Matriz de receptância
C	Constante de amortecimento viscoso
Ω	Frequência circular
x	Amplitude do deslocamento harmônico
K	Rigidez complexa
$(1 + i\eta)$	Fator de perda material
E_d	Energia dissipada
H	Matriz de amortecimento histerético
M	Matriz de massa

K	Matriz de rigidez
$q(t)$	Vetor de coordenadas generalizadas
$f(t)$	Vetor de forças
Z	Matriz de perdas
K_e	Matriz de rigidez complexa
F_d	Força dissipativa (Força de amortecimento viscoso)
C	Constante de proporcionalidade
m_b	Metade da massa da base
m_c	Massa do corpo (massa de sintonia)
J_c	Momento de inércia do corpo de sintonia em relação a um eixo normal ao plano do papel passando por G.
e	Distância desde o fim da viga ao centro de gravidade
$q_1(t)$	Coordenada do deslocamento da massa de sintonia
$q_2(t)$	Coordenada da rotação da massa de sintonia
G	Centro de gravidade da massa de sintonia
$y(t)$	Deslocamento da base
$f(t)$	Força excitadora
q	Vetor de coordenadas generalizadas
L	Comprimento da viga
EI	Rigidez à flexão da viga complexa

η	Fator de perda do material
$y(t)$	Deslocamento da base,
$\theta(t)$	Rotação da base,
$f_y(t)$	Componente da força excitadora responsável pela translação,
$f_\theta(t)$	Componente da força excitadora responsável pela rotação,
$\psi(x)$	Função teste ou colocação,
$q(t)$	Vetor de coordenadas generalizadas
$V_e(t)$	Energia Potencial Elástica
$V_e(t)$	Forma quadrática da energia potencial elástica:
Φ_o	Autovetores ortonormalizados
$K(\Omega)$	Rigidez dinâmica,
$Z(\Omega)$	Impedância mecânica
$M(\Omega)$	Massa dinâmica
$f(x,t)$	Representa uma carga distribuída ao longo do elemento
$f_1(t)$	Força cisalhante
$f_2(t)$	Força cisalhante
$w_1(t)$	Deslocamento linear
$w_3(t)$	Deslocamento linear
$f_3(t)$	Força cisalhante
$f_4(t)$	Força cisalhante

$w(x,t)$ Deslocamento total

ρ Densidade volumétrica da viga

A Seção de área transversal

I Módulo de elasticidade complexo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	32
1.1 MOTIVAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA.....	32
1.2 HISTÓRICO E CONCEITOS BÁSICOS.....	34
1.2.1 Identificação.....	34
1.2.2 Neutralizadores.....	37
1.3 ESTUDO DA ARTE	37
2 CONCEITOS E APLICAÇÕES - MODELO VISCOELÁSTICO, HISTERÉTICO E VISCOSO.....	43
2.1 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS.....	43
2.1.1 Propriedades Dinâmicas.....	44
2.1.2 Sistema Viscoelástico com um Grau de Liberdade.....	46
2.1.2.1 FRF para um modelo Viscoelástico.....	46
2.2 ARMORTECIMENTO HISTERÉTICO.....	47
2.2.1 Modelo Histerético com um Grau de Liberdade.....	48
2.2.2 Modelo de Amortecimento Histerético para Vários Graus de liberdade.....	49
2.3 AMORTECIMENTO VISCOSO.....	51
2.3.1 Amortecimento Viscoso para um Grau de Liberdade.....	51
2.3.2 Amortecimento Viscoso em Vários Graus de Liberdade.....	51
2.4 COMPARAÇÃO ENTRE AMORTECIMENTO VISCOSO E HISTERÉTICO.....	52
3 MODELAGEM DO PÊNDULO ELÁSTICO DUPLO – PED...	54
3.1 INTRODUÇÃO.....	54
3.2 MODELAGEM DO PED COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE.....	55
3.2.1 Cálculo da Energia Potencial e Cinética.....	56
3.2.1.1 Energia Potencial.....	56
3.2.1.2 Energia Cinética.....	57
3.2.2 - Desenvolvimento das Equações: Rigidez, Impedância e	

Massa Dinâmica.....	57
3.2.2.1 - Inversão Estável.....	59
3.3 - MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS.....	60
3.3.1 - Cálculo da Energia Cinética e Potencial.....	60
3.3.1.1 Energia Potencial.....	62
3.3.1.2 Energia Cinética.....	63
3.3.2 Desenvolvimento das Equações.....	64
3.3.3 Inversão Estável com Truncamento.....	67
3.3.4 Função teste ou Colocação.....	69
3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS – MEF.....	71
3.4.1 Equação Diferencial de Equilíbrio em Vigas.....	71
3.4.2 Modelagem Matemática do Elemento de Viga por MEF.....	74
3.4.3 Energias Cinética e Potencial do Elemento de Viga.....	76
3.4.4 Modelagem do PED Através do MEF.....	77
3.4.4.1 Expressões da Energia Cinética e Potencial do Dispositivo PED.....	78
3.4.4.2 Desenvolvimento da Equação Dinâmica do Neutralizador.....	78
3.4.4.3 Funções Resposta em Frequência via MEF.....	82
3.4.5 Função Resposta em Frequência do Dispositivo tipo Neutralizador.....	83
4 DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA MASSA DINÂMICA.....	84
4.1 INTRODUÇÃO.....	84
4.2 ESPECIFICAÇÃO DO ENSAIO EXPERIMENTAL.....	84
4.3 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS NA DETERMINAÇÃO DA MASSA DINÂMICA.....	86
4.3.1 Descrição Experimental.....	86
4.3.1.1 Excitação por Swept Sine.....	87
4.3.2 Instrumentação Utilizada nas Medições.....	88
4.3.2.1 Especificação do Equipamento Utilizado.....	89
4.3.3 Massas Dinâmicas Obtidas Durante o Ensaio Experimental.....	91
5 IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA VIA OTIMIZAÇÃO NÃO-	

LINEAR.....	93
5.1 INTRODUÇÃO.....	93
5.2 CONCEITOS E CARACTERIZAÇÃO DOS MODELOS: MODAL, ESPACIAL E RESPOSTA.....	93
5.2.1 Modelo Espacial.....	93
5.2.2 Modelo Modal.....	94
5.2.3 Modelo de Resposta.....	95
5.3 TEORIA DOS RESÍDUOS.....	96
5.4 TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR.....	98
5.4.1 Introdução Histórica.....	98
5.4.2 Métodos de Otimização.....	98
5.4.2.1 Método de Newton.....	98
5.4.2.2 Método Quase-Newton.....	101
5.5 FUNÇÃO OBJETIVO.....	103
5.5.1 Construção da Função Objetivo.....	103
5.6 FLUXOGRAMA ESQUEMÁTICO DA IDENTIFICAÇÃO POR PNL.....	105
5.7 RESULTADOS OBTIDOS.....	107
6 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS.....	114
6.1 INTRODUÇÃO.....	114
6.2 CURVAS EXPERIMENTAIS DOS PROTÓTIPOS.....	114
6.3 CARACTERÍSTICAS MATERIAIS E GEOMÉTRICAS DOS PROTÓTIPOS.....	118
6.4 - RESULTADOS DOS PROTÓTIPOS.....	119
6.4.1 - Resultado do Protótipo com Viga de Nylon.....	119
6.4.2 - Resultado do Protótipo com Viga de Aço.....	126
6.4.3 - Resultado do Protótipo com Viga de Alumínio.....	133
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	140

7.1 COMENTÁRIOS FINAIS.....	140
7.2 CONCLUSÕES.....	141
7.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	141
REFERÊNCIAS.....	144

INTRODUÇÃO

Vibrações são na grande maioria das vezes indesejáveis, pois são responsáveis por desconforto e níveis intensos ruídos. Muitas das atividades humanas, desde a mais simples até as mais sofisticadas, estão relacionadas com vibrações, por exemplo: ato de tocar violino, pilotar um helicóptero ou um avião, lançamento de um satélite, etc.

Nos últimos quarenta anos, estudos e investigações acerca de fenômenos vibratórios intensificaram-se devido a larga aplicação nos vários ramos da engenharia, tais como: projeto de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas e controle de sistemas. O autor acredita que este trata-se de um dos ramos mais nobres da engenharia, servindo de interface a várias especializações, e atraindo cada vez mais pesquisadores com o espírito investigador.

1.1 MOTIVAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

Problemas ocasionados por vibrações auto-induzidas tem-se verificado ao longo dos anos. Um exemplo clássico é o de uma ponte sobre o Tacoma Narrows, Washington, ocorrido em 7 de novembro de 1940 que ocasionou o colapso de sua estrutura. Mais recentemente percebeu-se que este fenômeno ocorre em cabos de linhas de transmissão aéreas de alta tensão (um bom exemplo pode ser verificado por Teixeira (1997), proporcionando o rompimento destes. Tal fenômeno tem origem no escoamento eólico através do cabo, este escoamento gera vórtices conhecidos por vórtices de Von Karman (1912); tais vórtices ocorrem em forma de esteira e sempre alternada, ora na parte superior, ora na inferior. Tal ação gera um desbalanceamento alternado da pressão, induzindo, assim, um movimento para cima e para baixo do cabo condutor.

O cabo por sua vez tende a romper por fadiga devido ao efeito da vibração eólica. A necessidade de se estudar e controlar tal situação tem sido assunto de vários trabalhos como Dotharad (1978), Hagendorn (1982), Wagner (1973) e outros. Contudo, as dificuldades são muitas e apresentam-se nas mais diversas formas, entre estas existe a necessidade de se conhecer alguns parâmetros estruturais e características do cabo em si, bem como dos dispositivos utilizados para redução dos níveis de vibração.

Dentre tais parâmetros esta a rigidez e o amortecimento material do cabo de transmissão e do Stockbridge. Uma prática corrente é a medição do decremento logaritmo de um vão do cabo, construído para

este fim. Este procedimento, entretanto é conceitualmente incorreto, pois o decremento logarítmico é uma característica estrutural do vão e não uma propriedade intrínseca do cabo Lazan, (1968). Outros procedimentos são também utilizados Teixeira (1997), mas todos buscam o amortecimento estrutural.

Como em um projeto de linha, os vãos são de tamanho variáveis e não conhecidos a priori, são de difícil, senão impossível aplicação.

Busca-se aqui, portanto, uma metodologia para a medição do amortecimento histerético da linha e dos Stockbridges (que são feitos de elementos de linha).

A rigidez à flexão (EI) de um cabo ACSR, geralmente é computada por meios aproximados, de difícil confirmação.

A nova metodologia apresentada aqui permite a identificação deste parâmetro também.

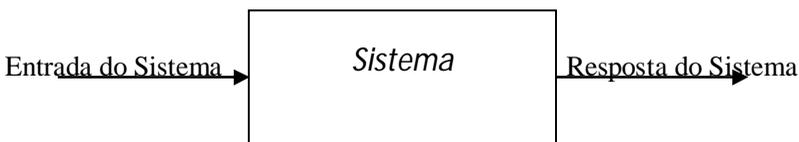
1.2 HISTÓRICO E CONCEITOS BÁSICOS: IDENTIFICAÇÃO E NEUTRALIZADORES

1.2.1 Identificação

A palavra identificação representa uma classe nobre de problemas em engenharia. A necessidade de se conhecer parâmetros ou características para que se possa prever o comportamento de uma estrutura é tão antiga quanto a própria ciência da engenharia. A primeira abordagem para a identificação de um sistema segundo Sage (1971), é relativa a identificação de uma função de transferência de um sistema linear invariante no tempo, composto de uma entrada e uma saída.

Os problemas em engenharia podem ser classificados, na sua maioria, como direto ou inverso. Se um conjunto de equações descrevem o comportamento dinâmico de um sistema, então, tem-se neste caso um problema direto, pois, para uma determinada excitação de entrada ao sistema; obtém-se uma resposta relativa a essa entrada.

Figura 1.1 - Representação de um sistema com uma entrada e uma saída.



Os problemas considerados inversos apresentam um maior grau de dificuldade, pois estes caracterizam-se em alguns casos por não se conhecer a excitação de entrada no sistema, em outros casos não se têm as equações dinâmicas que regem o sistema e em outros não se conhece alguns parâmetros do sistema (caso estudado nesse trabalho). De acordo com Sage (1971), Bekey (1970) subdividiu os problemas inversos em três categorias:

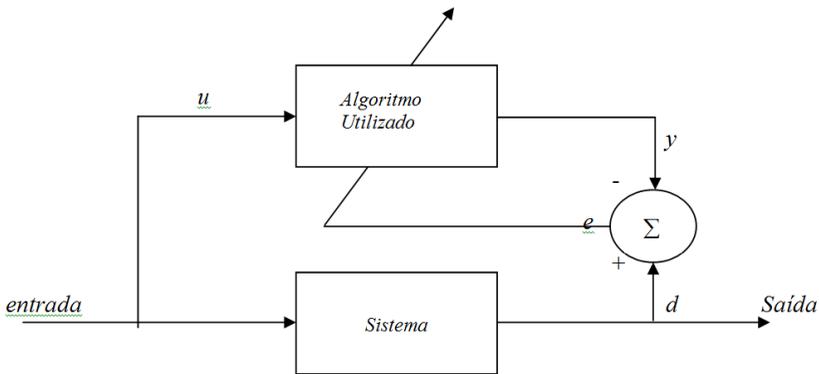
- (i) O Problema de Projeto ou Síntese: Dada uma entrada e uma saída, determinar um sistema “fisicamente realizável” que ajuste a relação entrada-saída tão bem quanto possível. Vários vínculos físicos podem ser impostos. Em geral a solução não é única.
- (ii) O Problema de Controle: São dadas a descrição do sistema e resposta. Deseja-se a entrada que se ajuste à resposta desejada. Se apenas uma entrada for achada, o sistema será dito de malha aberta. Se a entrada for usada juntamente com a saída desejada, o sistema será de malha fechada.
- (iii) O Problema de Identificação de Sistemas: Tanto as entradas de um certo sistema, quanto suas respectivas saídas são conhecidas e pretende-se montar o modelo matemático de tal sistema, ou determinar alguns de seus parâmetros. A identificação de sistemas pode ser subdividida em duas categorias: A primeira caracteriza-se por se ter um sistema totalmente desconhecido, chamado de identificação de “caixa preta”. O segundo, que compreende uma grande maioria dos casos, constitui-se em avaliar um modelo matemático de um sistema, ou determinar alguns de seus parâmetros. Alguns autores preferem classificar a identificação de sistemas em três classes:
 - (a) Identificação da Estrutura de Sistemas: Neste caso informações para o modelo são obtidas através da experiência, de fatos empíricos, naturais, físicas ou sociais no caso de um modelo econômico. Tudo isso para se montar equações diferenciais dos referidos sistemas. Parâmetros desconhecidos do sistema são determinados.
 - (b) Identificação de Funções Critério: Seleciona-se o critério matemático que se deseja otimizar, para se conseguir a

identificação. Com a função critério, a qualidade do ajuste da resposta do modelo com resposta atual do sistema pode ser avaliada.

- (c) Identificação Paramétrica de Sistemas: São algoritmos para ajuste de parâmetros não conhecidos, sendo selecionados e usados na identificação paramétrica, recaindo muitas das vezes na identificação de funções critérios, que serão posteriormente minimizadas.

Existe ainda uma gama de subdivisões, quanto ao domínio, se é do tempo ou da frequência, em tempo real ou não, adaptativos, com redes neurais, algoritmos genéticos e outros. Haykin (1996) dá uma boa introdução acerca de tais divisões. A figura 1.2 apresenta um diagrama de blocos de um sistema de identificação sem maiores detalhes.

Figura 1.2 - Diagrama de representação de um processo de Identificação.



Sendo,

u - entrada no algoritmo de busca

y - resposta encontrada pelo algoritmo

d - resposta obtida do sistema

e - erro estimado

1.2.2 Neutralizadores.

“A natureza mascara seus segredos não por malícia, e sim pela sua altivez e dignidade.”

Albert Einstein.

A natureza tem apresentado todo o seu esplendor em forma de soluções para problemas que se depara no dia a dia. A arte de observar fenômenos e procurar explicá-los com a intenção de associa-los na resolução questões é bastante antiga; um exemplo clássico relatado por Francis Bacon, segundo Nussenweig é o da queda de uma maçã ao desprender-se da macieira. Muitos talvez, que tivessem observado tal fato (provavelmente até este autor), teriam apanhado-a para comê-la; entretanto quem estava observando a queda era nada mais, nada menos que o histórico e famoso físico inglês Sir Isaac Newton (1642 - 1727), que a partir da observação deste fato desenvolveu toda a teoria da gravitação universal, que é utilizada até os dias de hoje.

Ao tratar-se de neutralizadores dinâmicos, verifica-se que a natureza já os apresentava há milhares de anos, um bom exemplo é o citado por Hunt (1979); onde um pica-pau e uma determinada espécie besouro, batem suas cabeças a frequências exatas de 17 e 12 Hz, respectivamente, evitando assim danos aos seus cérebros. Isto se deve a um dispositivo encontrado na cavidade cerebral que faz uso do princípio dos neutralizadores.

Se a teoria de neutralizadores foi ou não desenvolvida tendo em vista tais exemplos da natureza, não se sabe! Mas é fato que a primeira referência acerca desses dispositivos data de 1883 e foi publicada por P. Watts. Contudo, Frahm em 1909 desenvolveu um dispositivo que reduzia o balanço de navios de guerra; mas o primeiro trabalho publicado que possuía certa profundidade com respeito a este assunto é de 1934 e foi realizado por Ormondroyd e Den Hartog em 1985. Este considerava um sistema primário e um neutralizador de um grau de liberdade sempre ligado ao sistema primário por uma mola e um amortecedor viscoso em paralelo. Snowdon (1965), repetiu tal estudo utilizando-se de um material viscoelástico para união entre o neutralizador dinâmico e o sistema primário.

1.3 ESTADO DA ARTE

Espíndola e Silva (1992), desenvolveram uma teoria geral de parâmetros equivalentes generalizados com finalidade de se projetar

neutralizadores dinâmicos ótimos, aplicados a uma estrutura genérica de qualquer forma, com qualquer quantidade e distribuição de neutralizadores. Esta por sua vez foi aplicada ao projeto de neutralizadores viscoelásticos dos mais variados tipos. Demonstrou-se que as equações de um sistema composto podem ser escritas em termos apenas das coordenadas generalizadas do sistema primário.

O modelo matemático de massa dinâmica é desenvolvido e aplicado como teoria modal, autovalores e autovetores. A aplicabilidade de tal modelo deve-se ao fato de o modelo espacial, massa, rigidez e amortecimento ser limitado no seu escopo, segundo Silva (1991), assim nesse trabalho o modelo espacial é utilizado para se gerar um problema de autovalores que possibilite a montagem da função resposta em frequência em termos dos parâmetros modais.

A otimização de parâmetros de um neutralizador dinâmico foi estudada por Espíndola e Bavastri (1997) para a redução de radiação sonora de uma estrutura sujeita a excitações em uma determinada faixa de frequência; esta redução foi realizada minimizando-se a resposta em frequência da estrutura composta. O neutralizador dinâmico utilizado era viscoelástico e abordou-se o problema através da teoria modal em conjunto com o conceito de quantidades equivalentes generalizadas, conceitos desenvolvidos pelos referidos autores.

O Estudo do comportamento e propriedades de alguns materiais para aplicações em controle de ruído e vibrações é apresentado por Nashif (1973). O estudo foi feito em materiais elastoméricos em conjunto com metal (vigas sandwich), no qual avaliou o comportamento do fator de perda dos materiais e o módulo de Young da viga em função da frequência e da temperatura. A análise desses materiais foi realizada através do método da viga vibrante, sendo realizado em uma câmara climática. Posteriormente Nashif, Jones e Henderson (1985) em *Vibration Damping*, abordam conceitos de dinâmica estrutural, consolidando as várias formas de modelagem da dissipação de energia em materiais e o uso do conceito de rigidez complexa na representação do fator de perda do material ou para alguns autores amortecimento material; bem como a apresentação de propriedades e características de tal parâmetro, utilizado para quantificar a dissipação de energia em materiais. Snowdon (1968) apresenta o conceito de rigidez complexa, como alternativa para a representação do amortecimento histerético em materiais metálicos e elastoméricos, sendo que no último, tanto a rigidez como o fator de perda variam com a frequência e com a temperatura. Que não é o caso desse trabalho.

Rao (1978) Trabalhou também com vigas compostas por materiais viscoelástico-metal, sendo este variou as condições de contorno das vigas, tais como livre, rotulada, engastada, etc. Estudando, ele comparou os resultados do fator de perda e da primeira frequência natural, obtidos tanto por formulação exata, desenvolvida a partir do modelo de Euler-Bernoulli como por fórmula aproximada desenvolvida pelo autor e computada numericamente. Ele avaliou os efeitos dos modos, da forma geométrica, amortecimento e outros.

A importância e o efeito do amortecimento e mecanismos de dissipação de energia em estruturas e juntas foram investigadas por Ungar (1973), esse avaliou mecanismos de perda por cisalhamento e fricção, em placas, interfaces lubrificantes ou materiais viscoelásticos em alta frequências. Relacionando o amortecimento com a variação de pressão e frequência.

Um trabalho clássico é o de Di Taranto (1965), normalmente citado por outros autores, abordou a teoria de vibrações em vigas compostas. Visando a redução de vibrações e ruído, este autor desenvolveu uma teoria para vigas de material elásticos recheadas por materiais viscoelásticos, levando em consideração efeitos de cisalhamento, flexão, esforço cortante, etc. Mais adiante Mead e Di Taranto (1972), estudaram o amortecimento por intermédio de vibrações em vigas compostas com camadas de material elástico-viscoelástico-elástico. Curvas com resultados de amortecimento foram obtidas variando-se as propriedades geométricas e físicas das vigas.

Espíndola e Floody (1999), avaliaram vigas compostas metal-elastômero com aplicabilidade em estruturas complexas na redução de ruído e vibração. Para isso modelaram a viga por elementos finitos através do modelo de viga Euler-Bernoulli, resolvendo de forma numérica um problema de autovalores generalizado dependente na frequência do qual apresentaram resultados satisfatórios.

Ng e Cunniff (1974) utilizaram técnicas de otimização em um sistema de isolamento para vários graus de liberdade, primeiro desenvolveu uma função composta pelas matrizes de inércia, amortecimento e rigidez, sendo que a matriz de massa é positiva definida e as outras duas podendo ser positiva definida ou positiva semi-definida. A função objetivo é então maximizada e posteriormente minimizada, os métodos utilizados foram Newton-Raphson, DFP(Davidon-Fletcher-Powell) para se maximizar e minimizar respectivamente e tanto as matrizes de amortecimento como de rigidez são proporcionais à outros parâmetros.

Um método de identificação proposto por Minas e Inman (1991), utiliza informação modal incompleta. Para isso as matrizes de massa e rigidez são assumidas de forma analítica e determinadas a priori por um modelo de elementos finitos. Autovalores e autovetores são obtidos experimentalmente, sendo aceitos de forma incompleta. A matriz de amortecimento encontrada para uma posterior investigação é incompleta e assumida real, simétrica e positiva definida. As matrizes de massa e rigidez são reduzidas na sua ordem por avaliação dos dados modais. A partir daí tem-se um novo problema de autovalores uma nova solução e posteriormente uma nova matriz de amortecimento. Neste trabalho foram utilizados tanto o modelo viscoso como o histerético.

O uso de frequências naturais associadas com amortecimento constante e a forma dos modos e ângulos de fase para se identificar a matriz de amortecimento viscoso foi investigada por Béliveau (1976). Para isso o autor utilizou o método de Bayesian com o algoritmo de Newton-Raphson modificado para se estimar os parâmetros baseado em autovetores e autovalores perturbados.

Utilizando o método mínimos quadrados combinado com método da variável instrumental Wang (1998), identificou parâmetros de um sistema mecânico com três graus de liberdade. Para tal, este fez uso de uma FRF contaminada por ruído. Computacionalmente falando, o método da variável instrumental é intenso, pois consome muito tempo para a obtenção da curva resposta em frequência, os mínimos quadrados é utilizado para se obter uma melhor precisão dos resultados.

Estimando através de um método no domínio da frequência as matrizes de massa, rigidez e amortecimento Chen, Ju e Tsuei (1996). O método utilizado pelos autores foi baseado na extração dos modos normais a partir dos modos complexos de uma estrutura, obteve-se a matriz de transformação. A matriz de transformação é empregada no cálculo da construção da matriz de amortecimento, as matrizes de massa e rigidez são identificadas por meio das funções resposta em frequência utilizando o método dos mínimos quadrados.

Utilizando conceitos, tais como: A teoria modal de parâmetros equivalentes e um sistema ótimo de neutralizadores viscoelásticos desenvolvidos na UFSC por Espíndola, J.J., Silva, H.P. e Bavastri, C.A. Teixeira (1997) aplicou tais teorias no desenvolvimento de um neutralizador viscoelástico com o intuito de aumentar a confiabilidade em cabos pára-raios e de linhas de transmissão, sujeitos a vibrações eólicas auto induzidas. Este desenvolveu um modelo numérico é desenvolvido para a estrutura e neutralizadores viscoelásticos são

projetados, sendo que seus parâmetros encontrados por meio de técnicas de otimização não linear.

Espíndola, Teixeira e Bavastri (1998) propuseram uma função objetivo multimodal onde técnicas de otimização não linear, não garantem o mínimo global. Em face de tal problema os autores utilizaram algoritmos genéticos, abeis e bem aceitos em procuras de máximos ou mínimos globais. Exemplos numéricos foram desenvolvidos com aplicabilidade em linhas de transmissão aérea, sendo comparadas as técnicas utilizadas e os respectivos resultados utilizados em neutralizadores com o intuito de se reduzir as vibrações em tais cabos. De forma que o objetivo foi alcançado com sucesso.

Partindo de um modelo analítico da matriz de massa ou elementos finitos e dados modais obtidos de forma experimental, Pilkey (1998) utiliza um método iterativo, onde um problema de autovalores é gerado a partir dos dados pré supostamente conhecidos em conjunto com uma matriz de amortecimento estimada como ponto de partida. Feito isso utiliza-se uma fórmula de “updating” para se encontrar uma nova matriz de amortecimento, sendo isso repetido até a matriz de amortecimento convirja para um conjunto de valores. Um outro método, chamado de direto foi utilizado, sendo que neste considera-se a priori as matrizes de massa, rigidez, autovalores e autovetores conhecidas e normaliza-se em relação aos autovetores e a matriz de amortecimento é obtido através da aplicação direta na fórmula de “updating”.

Através do conceito de amortecimento viscoso proporcional, do modelo espacial da estrutura e supondo conhecer as matrizes de rigidez e massa, Okuma e Oho (1997) uma matriz de massa é gerada por meio de características físicas e geométricas da estrutura, como essa matriz é simétrica, e a matriz de massa é conhecida; encontra-se então a matriz responsável pela transformação. A partir desse fato um a restrição é imposta entre essa matriz e a de rigidez. Resolvida a restrição obtém-se a matriz de rigidez e é resolvido um problema de autovalores não amortecido de forma que os parâmetros modais obtidos serão utilizados para compor uma nova restrição que originará a matriz de amortecimento viscoso do estrutura.

Outros autores foram pesquisados acerca de temas como identificação, controle modal, neutralizadores dinâmicos, técnicas de otimização, materiais viscoelásticos, amortecimento estrutural e material, etc. Contudo fez necessário a omissão de tais trabalhos na revisão bibliográfica onde apresentou-se os mais interessantes. Alguns dos autores que estão relacionados a seguir formam com os apresentados na revisão uma sólida base de conhecimento para uma melhor

compreensão desta obra. Mais informações podem ser pesquisadas em Fabunni, Chang e Vorwald ; Roemer e Mook; Bowles e outros.

Esse trabalho objetiva criar uma metodologia para identificação de amortecimento material em cabos, tanto os de linha de transmissão do tipo ACR, bem como os envolvidos na fabricação do Stockbridge, apresentar uma nova forma de se quantificar o módulo de rigidez de tais cabos, comparar os resultados dos modelos utilizados entre si, e com a literatura existente acerca do assunto, e por último, verificar a eficiência dos três métodos apresentados.

Em Materiais viscoelásticos é apresentado uma descrição dos possíveis modelos de amortecimento estrutural e material normalmente utilizados na teoria geral em identificação. Mostra-se primeiro o modelo viscoelástico, sua abrangência. Logo a seguir aborda-se o modelo histerético de amortecimento, com grande aplicabilidade em materiais metálicos e, a título de comparação, fez-se uma incursão no modelo viscoso, muito utilizado para identificação no domínio do tempo e sua comparação com o modelo histerético.

Em amortecimento histerético são abordados os métodos matemáticos para a modelagem da estrutura tipo neutralizador. Procurou-se mostrar os detalhes durante a modelagem e as características de cada um desses. A abordagem foi realizada começando por um modelo de dois graus de liberdade, o qual assume que a viga é desprovida de massa e, em conjunto com as equações de Lagrange, monta-se as equações dinâmicas que regem o sistema e posteriormente as FRF's utilizadas. O método dos modos assumidos trabalha com funções bases, que são utilizadas para representar os modos do sistema estudado. Tais funções são necessárias para uma posterior aproximação dos verdadeiros modos do neutralizador. O último método aplicado na modelação do neutralizador, é um método mais robusto e com a grande vantagem de utilizar funções bases, já anteriormente comprovadas. Tal modelo foi realizado pelo método dos elementos finitos utilizando o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Em todos três métodos usou-se o conceito de rigidez complexa da viga, já conhecido por meio de outros trabalhos citados com anterioridade.

Em determinação experimental da massa dinâmica coube a parte experimental desta dissertação. Fez-se uma descrição dos equipamentos utilizados bem como dos procedimentos utilizados durante tal etapa. Tais procedimentos foram utilizados tanto na experimentação do neutralizador de Stockbridge real como dos protótipos construídos para validação da técnica. Este capítulo apresenta características geométricas dos neutralizadores e as funções resposta em frequência (massa

dinâmica), utilizadas no processo de identificação apresentado no capítulo seguinte.

Identificação paramétrica via otimização não-linear é responsável por apresentar o processo de identificação. Nesse capítulo mostra-se a técnica de otimização não-linear utilizada, sem procurar estender-se muito no desenvolvimento matemático do método, visto que tais técnicas já são bastante comprovadas. Posteriormente, incorre-se na montagem da função objetivo, a ser minimizada. A técnica utilizada para a obtenção do mínimo ou dos mínimos, é a de Davidon-Fletcher-Powell ou da variável métrica, como é também conhecida. Resultados obtidos são apresentados e posteriormente discutidos.

A validação dos resultados discute e apresenta a validação dos resultados. É apresentada a construção de alguns protótipos tipo Stockbridges, sendo utilizado três materiais distintos para a confecção dos mesmos. Estes por sua vez foram excitados e alguns parâmetros, já conhecidos, foram identificados como validação da metodologia empregada.

Conclusões e sugestões é o responsável pelos comentários finais, conclusões e apresentação de propostas para futuros trabalhos.

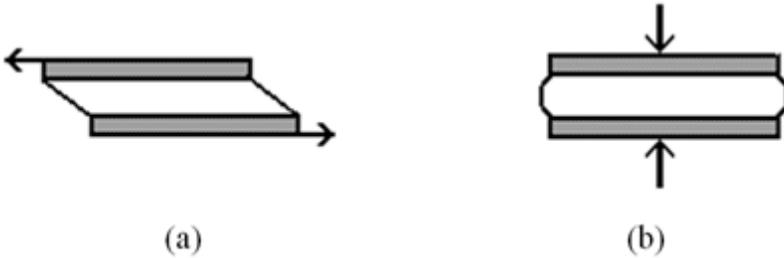
2 CONCEITOS E APLICAÇÕES – MODELO VISCOELÁSTICO, HISTERÉTICO E VISCOSO

Neste tópico mostrar-se-á modelos matemáticos para sistemas com um e dois graus de liberdade, bem como discutir-se-á algumas características de materiais viscoelásticos. Após algumas considerações obtêm-se o modelo histerético, onde o fator de perda e o módulo de rigidez não variam com a frequência e temperatura. Neste mesmo capítulo far-se-á a apresentação de um sistema dinâmico, muito similar a um neutralizador, que será modelado pelos conceitos viscoelásticos e histeréticos. Para uma maior informação recomenda-se que se leia os seguintes trabalhos: Espíndola (1987), Bavastrri (1997).

2.1 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Materiais elásticos são os que possuem comportamento puramente elástico, ou seja, onde a deformação é proporcional à tensão. Esses materiais estão sujeitos a dois tipos de deformações que são: cisalhamento, onde há apenas variação da forma e compressão em que o material sofre apenas variação de volume (ver figura 2.1).

Figura 2.1 – Deformações de materiais viscoelásticos.



2.1.1 Propriedades Dinâmicas

Para o caso da compressão pura (hidrostática), o comportamento desses materiais é ditado pelo módulo volumétrico B , enquanto que na variação da forma, o responsável é o módulo de cisalhamento G .

Na verdade o que ocorre na prática é um misto entre cisalhamento e compressão, onde pode predominar uma ou outra forma.

Por exemplo, em uma placa de material viscoelástico, onde a espessura é muito menor do que as demais dimensões, tem-se:

$$M_b = B + \left(\frac{4G}{3} \right) \cong B, \quad B \gg G, \quad (2.1)$$

onde M_b é o módulo que descreve a relação entre tensão e deformação, para tal placa sob carga de compressão.

Para o caso de dimensões laterais pequenas de um corpo viscoelástico, se comparadas com a espessura, o módulo que descreve a relação entre tensão e deformação, para tal corpo em compressão (tração) será:

$$E = \frac{9BG}{3B + G} \approx 3G, \quad B \gg G, \quad (2.2)$$

Para corpos viscoelásticos rigidez dos mesmos à compressão (distensão) pode ser escrita assim:

$$K_a = \frac{E_a A}{h}, \quad (2.3)$$

onde E_a é o módulo aparente de elasticidade. E_a depende da forma da seção reta do corpo e do enchimento do material e é dado por:

$$E_a = 3(1 + \beta S^2)G, \quad (2.4)$$

onde β depende da seção reta e do enchimento e S é chamado fator de forma, ver Snowdon (1968).

Na prática verifica-se que G depende fortemente da temperatura e da frequência (logo o mesmo ocorre com K_a). De fato a experiência mostra que tensão e deformação não estão em fase, quando se trata de materiais viscoelásticos, a diferença de fase constitui-se em uma medida de dissipação da energia mecânica no seio do material. Coerentemente, então, considera-se o módulo de elasticidade uma grandeza complexa e se escreve:

$$G(\Omega, \theta) = G_r(\Omega, \theta) + iG_i(\Omega, \theta), \quad (2.5)$$

$$\text{ou, } G(\Omega, \theta) = G_r(\Omega, \theta)(1 + i\eta_G(\Omega, \theta)), \quad (2.6)$$

$$\text{onde } \eta_G(\Omega, \theta) = \frac{G_i(\Omega, \theta)}{G_r(\Omega, \theta)}, \quad (2.7)$$

Na expressão acima G_a é o módulo dinâmico, ou de armazenamento, G_i , o módulo de perda e η_G o fator de perda do material. Ω é a frequência circular e Θ a temperatura.

Obviamente que também se terá.

$$B(\Omega, \theta) = B_r(\Omega, \theta)(1 + i\eta_B(\Omega, \theta)), \quad (2.8)$$

$$E(\Omega, \theta) = E_r(\Omega, \theta)(1 + i\eta_E(\Omega, \theta)) \quad (2.9)$$

Para materiais viscoelásticos, pode-se demonstrar que

$$\eta_G = \eta_E = \eta_B = \eta$$

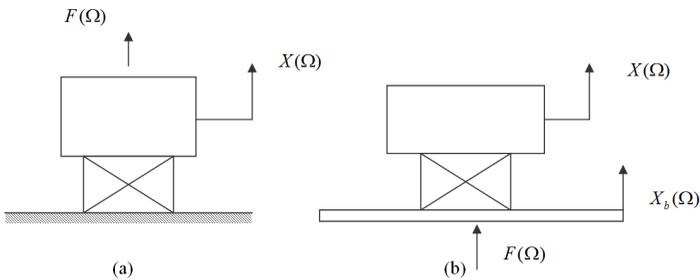
A rigidez de uma peça de material viscoelástico será também dependente da temperatura e frequência e pode ser escrita assim:

$K(\Omega, \theta) = LG(\Omega, \theta)$, onde L depende da geometria da peça e tem dimensão de comprimento.

2.1.2 Sistema Viscoelástico com um Grau de Liberdade

Os sistemas em que se necessita apenas de uma ordenada física para se determinar sua dinâmica, são ditos sistemas com um grau de liberdade. Estes sistemas possuem uma frequência natural, e são representados por uma massa e um material viscoelástico ligado à terra.

Figura 2.2 – Sistemas simples com um grau de liberdade

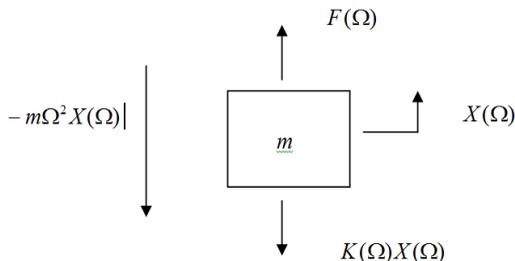


2.1.2.1 Função Resposta em Frequência para um modelo viscoelástico

Uma função resposta em frequência é uma característica do sistema. A guisa de introdução e para harmonizar a terminologia, apresentar-se-á a resposta em frequência de um sistema com um grau de liberdade, em que a parte resiliente é viscoelástica.

O diagrama de corpo livre da figura 2.3 mostra a forças, no domínio da frequência, que atuam sobre o corpo rígido.

Figura 2.3 – Diagrama de corpo livre (D.C.L.)



Através da Segunda lei de Newton, tem-se:

$$-m\Omega^2 X(\Omega) = F(\Omega) - LG(\Omega) X(\Omega)$$

onde

$$K(\Omega) = LG(\Omega)$$

Daí se tira:

$$X(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{[-m\Omega^2 + LG(\Omega)]}, \quad (2.11)$$

bem como:

$$A(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{-m\Omega^2 + LG(\Omega)}, \quad (2.12)$$

onde $A(\Omega)$ é uma resposta em frequência, no caso, a receptância.

Esta depende apenas dos parâmetros do sistema e da frequência, mas não da excitação que está sendo aplicada.

Lembrando a equação 2.4, pode-se escrever:

$$A(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{[-m\Omega^2 + LG(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))]}, \quad (2.13)$$

onde a dependência da temperatura ficou implícita.

2.2 AMORTECIMENTO HISTERÉTICO

Tem-se conhecimento que a energia dissipada por ciclo de movimento harmônico em um mecanismo viscoso é dada por:

$$E_d = \pi.C.\Omega.x^2,$$

onde C é uma constante de amortecimento viscoso, Ω é a frequência circular e x a amplitude do deslocamento harmônico.

Percebe-se que a energia dissipada por ciclo é diretamente proporcional à frequência e ao quadrado da amplitude.

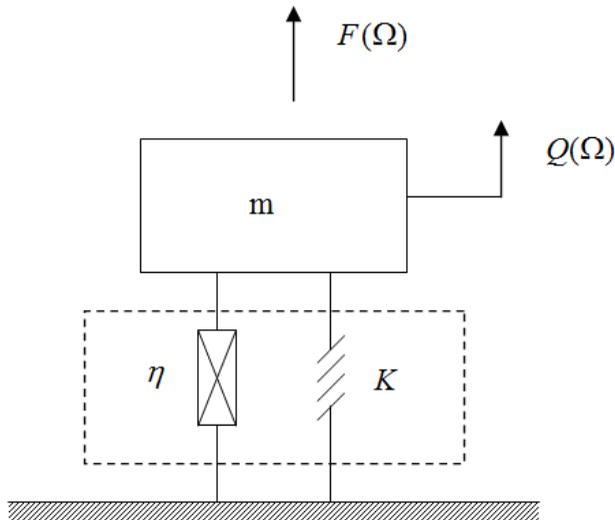
É conhecimento comum que a resposta harmônica de uma estrutura real não mostra esta proporcionalidade entre energia dissipada por ciclo e a frequência.

A dependência da frequência existe, mas com uma lei bem mais complexa.

Em particular se o fator de perda for constante com a frequência, diz-se que o mesmo é *histerético*.

2.2.1 Modelo Histerético com um Grau de Liberdade

Figura 2.4 – Modelo esquemático de um grau de liberdade para o amortecimento histerético.



Para o modelo acima utiliza-se o conceito de rigidez complexa $K = K_r(1 + i\eta)$, onde a parte real é a rigidez do material e a imaginária representa o produto da rigidez pelo fator de perda material, que é uma forma de se quantificar o amortecimento do material.

A equação dinâmica do sistema no domínio da frequência é :

$$-\Omega^2 mQ(\Omega) + K Q(\Omega) = F(\Omega), \quad (2.14)$$

de onde se tira

$$A(\Omega) = \frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{\left[-\Omega^2 m + \bar{K} \right]} = \frac{1}{\left[-\Omega^2 m + K(1+i\eta) \right]}, \quad (2.15)$$

2.2.2 Modelo de Amortecimento Histerético para vários graus de liberdade

A energia dissipada devido ao amortecimento histerético é dada pela seguinte expressão:

$$E_d = \pi h(\Omega) \cdot X^2, \quad (2.16)$$

Onde a dependência com a frequência é verificada de forma experimental. No caso de estruturas comuns esta dependência, pode-se dizer, não é notável, ou seja, $h(\Omega)$ varia pouco com a frequência, de sorte que se considera este constante.

Desta forma a energia histerética pode ser apresentada com uma certa aproximação pela equação:

$$E_d = \pi h \cdot X^2$$

Para um sistema com múltiplos graus de liberdade, o modelo histerético conduz à seguinte matriz de amortecimento:

$$C = \frac{1}{\Omega} H, \text{ onde } H \text{ é a matriz de amortecimento histerético.}$$

As equações diferenciais dos sistemas ficam então

$$M \ddot{q}(t) + \frac{1}{\Omega} H \dot{q}(t) + K q(t) = f(t), \quad (2.17)$$

onde M , K , $q(t)$ e $f(t)$ são respectivamente a matriz de massa, matriz de rigidez, vetor de coordenadas generalizadas e o vetor de forças atuando no sistema.

Aplicando-se a transformada em ambos os membros, tem-se:

$$\left[-\Omega^2 M + iH + K \right] Q(\Omega) = F(\Omega), \quad (2.18)$$

de onde se tira

$$A(\Omega) = \frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{[-\Omega^2 M + iH + K]}, \quad (2.19)$$

Aqui, $A(\Omega)$ é uma matriz de receptância.

Escrevendo:

$$K_e = K + iH = K(I + iZ), \quad (2.20)$$

Sendo $Z = K^{-1}H$, matriz de perda, onde suas componentes são fatores de perda e K_e é matriz de rigidez complexa.

2.3 AMORTECIMENTO VISCOSO

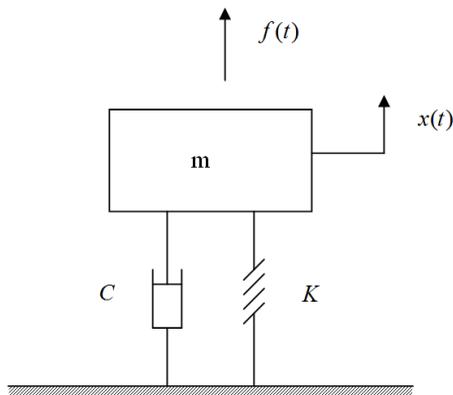
O modelo viscoso caracteriza-se por apresentar uma força dissipativa que tem como característica ser proporcional à velocidade, o que conduz a um tratamento matemático mais simples e produz, em muitas das vezes, prognósticos e resultados satisfatórios. A força dissipativa é conhecida como força de amortecimento viscoso, é expressa pela seguinte equação.

$$F_d = C \dot{x},$$

onde C é uma constante de proporcionalidade.

2.3.1 Amortecimento viscoso para um grau de liberdade

Figura 2.5 – Modelo esquemático de um grau de liberdade para amortecimento viscoso



A equação do movimento é:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad (2.21)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier na equação 2.24

$$-\Omega^2 m X(\Omega) + i\Omega c X(\Omega) + kX(\Omega) = F(\Omega), \quad (2.22)$$

de onde

$$A(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{[-\Omega^2 m + k + i\Omega c]}, \quad (2.23)$$

2.3.2 Amortecimento Viscoso em Vários graus de Liberdade

A equação dinâmica abaixo governa o movimento de um sistema linear invariante no tempo, causal para múltiplos graus de liberdade.

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = f(t), \quad (2.24)$$

onde M é a matriz de massa, C a matriz de amortecimento viscoso, K a matriz de rigidez, $f(t)$ o vetor de forças e $q(t)$ o vetor de coordenadas generalizadas.

Escrevendo-se a equação 2.28 no domínio da frequência, tem-se:

$$\left[-\Omega^2 M + i\Omega C + K\right]Q(\Omega) = F(\Omega), \quad (2.25)$$

Através de uma transformação de coordenadas, pois, $F(\Omega)$ e $Q(\Omega)$ são respectivamente as transformadas de Fourier de $f(t)$ e $q(t)$, onde se tem:

$$Q(\Omega) = \Psi P(\Omega), \quad (2.26)$$

$$N(\Omega) = \Psi^T P(\Omega) \quad (2.27)$$

Através dessas transformações chega-se no espaço modal, onde as questões são desacopladas conforme a equação abaixo:

$$\left(-\Omega^2 + i\Omega 2\zeta\Omega_r + \Omega_r\right)P_r(\Omega) = N_r(\Omega) \quad , \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

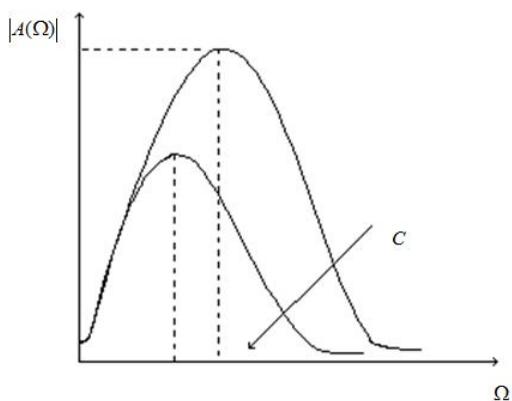
Uma das vantagens de se trabalhar com o espaço modal é que o desacoplamento das equações facilita a resolução do sistema de equações onde pode-se resolver cada equação separadamente, se o modelo de amortecimento for proporcional

2.4 COMPARAÇÃO ENTRE AMORTECIMENTO VISCOSO E HISTERÉTICO

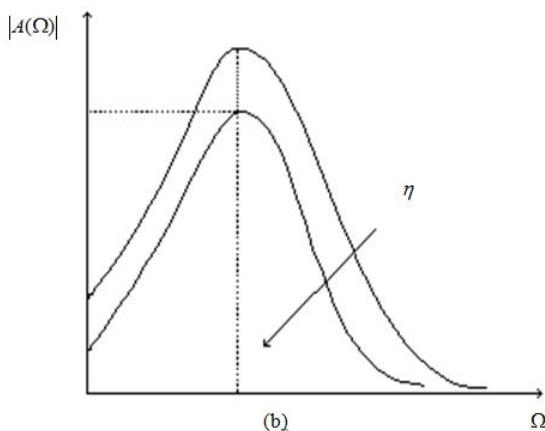
Com o intuito de justificar a escolha do modelo histerético de amortecimento, far-se-á uma comparação breve entre os dois modelos citados anteriormente e quais as vantagens de um em detrimento do outro. A finalidade desta incursão não é mostrar se este ou aquele modelo é melhor; e sim o porquê da escolha. Os gráficos a seguir mostram o que ocorre quando se varia apenas o amortecimento em um e no outro modelo. Posteriormente apresenta-se uma tabela com as principais características dos modelos apresentados e suas principais variáveis.

A importância do modelo de amortecimento a ser escolhido é fundamental para que a modelagem matemática represente com fidelidade o modelo físico da estrutura, pois estruturas apresentam diversas formas de dissipação de energia que estão intimamente relacionadas com o amortecimento do material, termo definido por Lazan (1968), segundo Lundin (1982).

Figura 2.6 – Gráficos com a variação apenas do amortecimento, para uma função resposta em frequência (FRF) modelo com um grau de liberdade:
a) modelo com amortecimento viscoso, b) modelo com amortecimento histerético



(a)



(b)

Tabela 2.1 – Tabela comparativa entre os modelos de amortecimento, a partir da variação de um e outro parâmetro.

	Amortecimento Viscoso	Amortecimento Histerético
Eq. Diferencial	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \cos(\Omega t)$	$m\ddot{x} + k(1 + i\eta)x = \text{Re}\{fe^{i\Omega t}\}$
Solução Particular	$x = A_1 \cos(\Omega t - \phi)$	$x = B_1 \cos(\Omega t - \phi)$
Energia Dissip. Por ciclo	$E_d = \pi c \Omega A_1^2$	$E_d = \pi k \eta B_1^2$
Frequência Ressonância	Decai com o incremento de c	Independente do valor de η
Desloc. Estático ($\omega = 0$)	$\frac{f}{k}$	Depende do valor de η
Amplit. de Ressonância	Depende de todos os parâmetros da equação	Independente da massa

Onde,

$$A_1 = \frac{F(\Omega)}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} \text{ e } B_1 = \frac{F(\Omega)}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (k\eta)^2}}$$

No tópico seguinte far-se-á uma explanação dos métodos matemáticos utilizados para a modelagem matemática de um sistema usado para medição de propriedades materiais.

Este sistema lembra um neutralizador de Stockbridge, muito embora este trabalho não trate de neutralizadores. Ele será aqui referido como pêndulo elástico duplo, para o qual usar-se-á a sigla PED.

3 MODELAGEM DO PÊNDULO ELÁSTICO DUPLO (PED)

3.1 INTRODUÇÃO

Em conceitos e aplicações, fez-se uma revisão dos modelos viscoelástico, histerético e viscoso, sendo abordadas as vantagens, desvantagens e principais características respectivamente. Esses modelos de amortecimento foram citados em vista de apresentar como o amortecimento material e estrutural é representado na grande maioria dos casos em que necessita-se de tal modelagem.

Nesse tópico, far-se-á a modelagem do dispositivo PED e dos protótipos por meio dos seguintes métodos: (i) Modelagem por dois

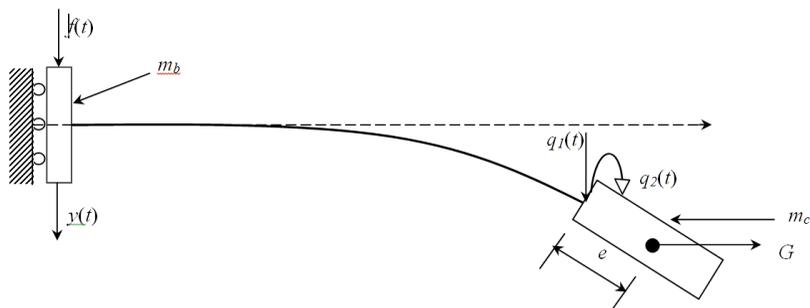
graus de liberdade, (ii) Método dos Modos Assumidos, (iii) Método dos Elementos Finitos. Esses métodos serão apresentados de forma a ressaltar suas peculiaridades e as devidas considerações durante a modelagem.

3.2 MODELAGEM DO PED COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Este método é bastante simplificado, pois, utiliza-se de duas coordenadas que descrevem os movimentos de translação e rotação da extremidade livre da viga. Com o propósito de facilitar a análise da estrutura em questão e tendo em vista que esta é simétrica, adotou-se apenas metade do dispositivo utilizado. Este foi, então, modelado como uma viga engastada em uma base com massa previamente definida, que está sujeita ao movimento de translação. A massa da viga não foi considerada e a massa de sintonia na sua extremidade tem seus movimentos restritos a rotação e translação. Logo a seguir encontra-se um desenho esquemático do modelo com dois graus de liberdade, conforme a figura 3.1.

O modelo de dois graus de liberdade, assim chamado, nada mais é que o método dos elementos finitos com um elemento de viga de dois graus de liberdade por nó. A viga é considerada como um elemento apenas desprovido de massa e submetida apenas a esforços de flexão, desconsiderando-se os efeitos relativos ao cisalhamento.

Figura 3.1 - Modelo físico para o método com dois graus de liberdade



Na figura 3.1, tem-se

m_b - metade da massa da base

m_c - massa do corpo (massa de sintonia)

J_c - momento de inércia do corpo de sintonia em relação a um eixo normal ao plano do papel passando por G.

e - distância desde o fim da viga ao centro de gravidade

$q_1(t)$ - coordenada do deslocamento da massa de sintonia

$q_2(t)$ - coordenada da rotação da massa de sintonia

G - centro de gravidade da massa de sintonia

$y(t)$ - deslocamento da base

$f(t)$ - força excitadora

3.2.1 Cálculo da Energia Potencial e Cinética

3.2.1.1 Energia Potencial

$$V = \frac{1}{2} q^T K q - f(t) y(t),$$

(3.1)

onde,

$$q = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$q = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$EI = EI_r (1 + i\eta)$$

com,

q - Vetor de coordenadas generalizadas

K - Matriz da rigidez complexa

L - Comprimento da viga

EI - Rigidez à flexão da viga complexa

η - Fator de perda do material

A matriz de rigidez é facilmente demonstrável, mas esta demonstração não será feita aqui.

3.2.1.2 Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2}m_c(\dot{y}(t) + \dot{q}_1(t) + e\dot{q}_2(t))^2 + \frac{1}{2}J_c\dot{q}_2^2(t) + \frac{1}{2}m_b\dot{y}^2(t), \quad (3.2)$$

3.2.2 Desenvolvimento das equações: Rigidez Dinâmica, Impedância Mecânica e Massa Dinâmica

Será feito através das equações de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} - f_{nc} = 0, \quad (3.3)$$

A única força externa atuando sobre o sistema é $f(t)$. A energia cinética depende apenas das derivadas das velocidades generalizadas, logo:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0.$$

Obtém-se então, o sistema de equações do movimento:

$$\begin{cases} m_c(\ddot{y} + \ddot{q}_1 + e\ddot{q}_2) + K_{11}q_1 + K_{12}q_2 = 0 \\ em_c(\ddot{y} + \ddot{q}_1 + e\ddot{q}_2) + J_c\ddot{q}_2 + K_{21}q_1 + K_{22}q_2 = 0, \\ (m_b + m_c)\ddot{y} + m_c\ddot{q}_1 + em_c\ddot{q}_2 - f(t) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

que na forma matricial apresenta-se como:

$$\begin{bmatrix} m_c & em_c & m_c \\ em_c & e^2m_c + J_c & em_c \\ m_c & em_c & (m_b + m_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

Coloca-se a equação 3.5 na forma particionada,

$$\begin{cases} M \ddot{q} + m_L \ddot{y} + K \ddot{q} = \{0\} \\ m_L^T \ddot{q} + (m_b + m_c) \ddot{y} = f(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} m_c & e m_c \\ e m_c & J_c + e^2 m_c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad m_L = [m_c \quad e m_c]^T$$

Utilizando-se da transformada de Fourier, o sistema equações 3.7 passa a ser apresentado no domínio da frequência, de acordo com as equações do sistema 3.8.

$$\begin{cases} [-\Omega^2 M + K] Q(\Omega) - \Omega^2 \{m_L\} Y(\Omega) = 0 \\ -\Omega^2 m_L^T Q(\Omega) - \Omega^2 (m_b + m_c) Y(\Omega) = F(\Omega) \end{cases} \quad (3.8)$$

onde

$$Q(\Omega) = F(q(t)) \quad , \quad Y(\Omega) = F(y(t))$$

Da primeira equação 3.8, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{1}{Y(\Omega)} Q(\Omega) = \Omega^2 [-\Omega^2 M + K]^{-1} m_L. \quad (3.9)$$

Então combinando-se a equação 3.9 com a segunda da 3.8, tem-se:

$$\frac{F(\Omega)}{Y(\Omega)} = \Omega^4 m_L^T [-\Omega^2 M + K]^{-1} m_L - \Omega^2 (m_b + m_c). \quad (3.10)$$

A equação 3.10, que é escrita no domínio da frequência. É conhecida como F.R.F. (Função Resposta em Frequência); a relação acima, que é força sobre deslocamento, recebe o nome de rigidez dinâmica:

$$K(\Omega) = -\Omega^2 (m_b + m_c) - \Omega^4 m_L^T [-\Omega^2 M + K]^{-1} m_L. \quad (3.11)$$

Dividindo-se a equação acima por $i\Omega$, tem-se a impedância mecânica:

$$Z(\Omega) = i\Omega(m_b + m_c) + i\Omega^3 m_L^T \left[-\Omega^2 M + K \right]^{-1} m_L. \quad (3.12)$$

Dividindo-se novamente, equação acima por $i\Omega$, tem-se a massa dinâmica:

$$Z(\Omega) = i\Omega(m_b + m_c) + i\Omega^3 m_L^T \left[-\Omega^2 M + K \right]^{-1} m_L. \quad (3.13)$$

3.2.2.1 Inversão Estável

Muitos problemas numéricos residem na inversão de matrizes. Muitas das vezes essas matrizes são mal condicionadas. Tendo em vista que a inversão do termo $\left[-\Omega^2 M + K \right]$ pode não ser estável e, em vista de se trabalhar no espaço modal, aliado à necessidade de se evitar possíveis problemas numéricos, usar-se-á então uma forma mais eficiente para se obter a inversa do respectivo termo.

Considere o seguinte problema de autovalores:

$$K \phi = \lambda M \phi \quad (3.14)$$

com,

$$\begin{aligned} \Phi^T K \Phi &= \Lambda = \text{diag}(\lambda_j), \quad j = 1, 2 \\ \Phi^T M \Phi &= I \end{aligned} \quad (3.15)$$

Seja a matriz X , definida como $X = \left[-\Omega^2 M + K \right]$.

Logo:

$$\Phi^T X \Phi = \left[-\Omega^2 I + \Lambda \right]. \quad (3.16)$$

Invertendo, tem-se:

$$\Phi^{-1} X^{-1} \Phi^{-T} = \left[-\Omega^2 I + \Lambda \right]^{-1}. \quad (3.17)$$

Finalmente, obtém-se:

$$X^{-1} = \Phi \left[-\Omega^2 I + \Lambda \right]^{-1} \Phi^T . \quad (3.18)$$

Então, a partir da equação acima, tem-se as seguintes expressões para rigidez, impedância e massa dinâmica, respectivamente, conforme as equações 3.19, 3.20 e 3.21:

$$K(\Omega) = -\Omega^2 (m_b + m_c) - \Omega^4 m_L^T \Phi \left[-\Omega^2 I + \Lambda \right]^{-1} \Phi^T m_L \quad (3.19)$$

$$Z(\Omega) = i\Omega (m_b + m_c) + i\Omega^3 m_L^T \Phi \left[-\Omega^2 I + \Lambda \right]^{-1} \Phi^T m_L \quad (3.20)$$

$$M(\Omega) = (m_b + m_c) + \Omega^2 m_L^T \Phi \left[-\Omega^2 I + \Lambda \right]^{-1} \Phi^T m_L . \quad (3.21)$$

3.3 MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS

A mecânica analítica conduz a procedimentos gerais de formulações, tais como as equações de Lagrange, equações de Hamilton, Princípio de Hamilton, etc. Estas formulações caracterizam-se por apresentar o sistema como um todo, podendo-se então obter as equações do movimento através das funções das energias cinética e potencial do sistema em questão.

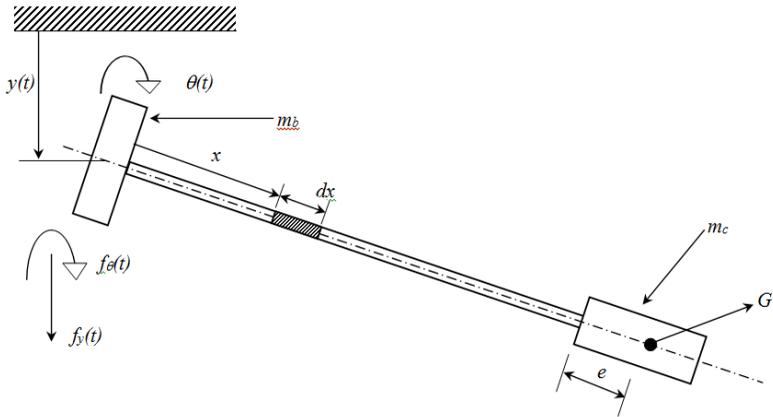
O método aqui exposto possui uma formulação similar ao de Rayleigh-Ritz, onde a solução decorre da combinação linear de funções admissíveis (testes) que satisfazem as condições de contorno geométricas, multiplicadas por coordenadas generalizadas dependentes do tempo. A diferença básica entre este método e o de Rayleigh-Ritz consiste em que neste, aplicam-se as equações de Lagrange para se encontrar as equações dinâmicas que regem o sistema. O outro se monta um funcional a ser minimizado, ancorado no princípio de Rayleigh. Maiores características acerca desses métodos podem ser obtidas através das seguintes referências Meirovitch (1986), Clough (1982) e Rao (1995).

3.3.1 Cálculo da Energia Cinética e Potencial

O sistema físico é assumido da seguinte forma: uma viga engastada em uma base, que possui massa definida. Inicialmente, para uma maior abrangência das equações, supõe-se que esta base está sujeita a uma rotação, conforme figura a seguir. Na extremidade da viga tem-se uma massa de sintonia com o centro de gravidade desta deslocada da

linha de união massa-viga. Este modelo físico é similar ao de dois graus de liberdade, ilustrado anteriormente na seção 3.1, com a exceção de que neste caso a viga é considerada uniforme, isto é, com rigidez à flexão constante e massa uniformemente distribuída.

Figura 3.2 – Modelo físico para o método dos modos assumidos



Considerando apenas deslocamentos pequenos para o conjunto como um todo e tendo em vista que a base da viga está sujeita a forças de translação e rotação então a função que descreve o sistema é:

$$\omega(x, t) = y(t) + \theta(t)x + \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \cdot q_j(t), \quad (3.22)$$

onde:

$y(t)$ - deslocamento da base,

$\theta(t)$ - rotação da base,

$f_y(t)$ - componente da força excitadora responsável pela translação,

$f_\theta(t)$ - componente da força excitadora responsável pela rotação,

$\psi(x)$ - função teste ou colocação,

$q(t)$ - vetor de coordenadas generalizadas.

3.3.1.1 Energia Potencial

A energia potencial do sistema é dada da seguinte forma:

$$V = V_e(t) - f_y(t) \cdot y(t) - f_\theta(t) \cdot \theta(t) \quad , \quad (3.23)$$

onde, $V_e(t)$ é a energia potencial elástica da viga, podendo ser determinada da seguinte forma:

$$z(x,t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \cdot q_j(t) \quad , \quad (3.24)$$

$$V_e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \cdot \left[\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \quad , \quad (3.25)$$

Desenvolvendo-se a expressão acima, tem-se uma nova expressão para $V_e(t)$, conhecida como forma quadrática da energia potencial elástica:

$$V_e(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} q_i(t) q_j(t) \quad (3.26)$$

Onde

$$K_{ij} = EI \int_0^L \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx^2} dx \quad (3.27)$$

Faz-se importante ressaltar dois fatos: (1) que as derivadas na expressão 3.27 das funções teste são de segunda ordem, o que é consistente, pois a equação diferencial de uma viga sujeita a flexão é de quarta ordem; (2) o EI foi considerado constante tendo em vista a hipótese do material ser homogêneo ao longo da viga.

3.3.1.2 Energia Cinética

A energia cinética do sistema é composta por três partes: uma é a energia da viga, a outra se deve ao efeito da massa de sintonia e a terceira é relativa ao momento de inércia.

$$T(t) = T_1(t) + T_2(t) + T_3(t) \quad (3.28)$$

onde,

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) \left[\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \\ T_2(t) &= \frac{1}{2} m_c \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\omega(L,t)] + e \omega'(L,t) \right\}^2 \\ T_3(t) &= \frac{1}{2} J_c \left[\frac{\partial \omega'(L,t)}{\partial t} \right]^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde

$$\omega'(x,t) = \left. \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L}$$

Uma observação faz-se necessária: a parte da energia cinética relativa à viga é uma matriz simétrica com coeficientes de massas constantes que dependem da distribuição de massa do sistema e das funções base. Esta parte da energia cinética pode ser escrita da seguinte forma.

$$T_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \quad (3.30)$$

3.3.2 Desenvolvimento das Equações

Aplicando-se as equações de Lagrange, tanto na equação 3.28 como na 3.23, ou seja, da energia potencial e cinética respectivamente, tem-se os seguintes coeficientes:

$$a = m_c + \rho \int_0^L dx ; \quad b = m_c (L+e) + \rho \int_0^L x \cdot dx ,$$

$$m_j = m_c \cdot (\psi_j(L) + e \cdot \psi_j'(L)) + \rho \cdot \int_0^L \psi_j(x) \cdot dx$$

$$c = m_c (L+e) + \rho \int_0^L x dx ; \quad d = m_c (L+e)^2 + J_p + \rho \int_0^L x^2 dx$$

$$p_j = m_c (L+e) \cdot (\psi_j(L) + e \cdot \psi_j'(L)) + J_c \psi_j'(L) + \rho \int_0^L x \psi_j(x) dx$$

$$C_i = \rho \int_0^L \psi_i(x) dx + m_c (\psi_i(L) + e \psi_i'(L)) = m_i$$

$$d_i = \rho \int_0^L x \psi_i(x) dx + m_c (L+e) \cdot (\psi_i(L) + e \psi_i'(L)) + J_p \psi_i'(L) = p_i$$

$$m_{ij} = \rho \int_0^L \psi_i(x) \psi_j(x) dx + m_c [\psi_i(L) + e \psi_i'(L)] \cdot [\psi_j(L) + e \psi_j'(L)] + J_p \psi_i'(L) \psi_j'(L)$$

Os coeficientes acima foram extraídos das três expressões de energia cinética que compõem a energia cinética total. Para a energia potencial, tem-se os seguintes termos que se unem aos coeficientes citados anteriormente para compor o sistema de equações.

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -f_y(t) \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -f_\theta \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = a \dot{y} + b \dot{\theta} + \sum_j \dot{q}_j m_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = c \dot{y} + d \dot{\theta} + \sum_j \dot{q}_j p_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \dot{y} C_i + \dot{\theta} d_i + \sum_j m_{ij} \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = a \ddot{y} + b \ddot{\theta} + \sum_j \ddot{q}_j m_j$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = c \ddot{y} + d \ddot{\theta} + \sum_j \ddot{q}_j p_j$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{y} C_i + \ddot{\theta} d_i + \sum_j m_{ij} \ddot{q}_j$$

As equações do sistema ficam:

$$\begin{bmatrix} a & b & m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ b & d & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ m_1 & p_1 & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_2 & p_2 & m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_n & p_n & m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_\theta \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.31)$$

Para o caso em questão $\theta(t) = 0$, pois supõe-se que a base não está sujeita a rotações, nem movimentos torcionais. Com esta hipótese, o sistema acima reduz-se à seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_n & m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Então equação matricial 3.32, pode ser reeditada na forma particionada, segundo a equação 3.33, onde:

$$M_1 = a, \quad M_2 = [m_1, m_2, \dots, m_n]; \quad M_3 = M_2^T; \quad M_4 = \sum_{i=1, j=i}^n m_{ij}$$

$$K_1 = 0; \quad K_2 = [0, 0, \dots, 0]; \quad K_3 = K_2^T; \quad K_4 = \sum_{i=1, j=i}^n k_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & \vdots & M_2 \\ \dots & \vdots & \dots \\ M_3 & \vdots & M_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dots \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & \vdots & K_2 \\ \dots & \vdots & \dots \\ K_3 & \vdots & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \dots \\ q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_d \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\text{Pondo } d = y \quad \therefore \quad \ddot{d} = \ddot{y}; \quad f_d = f_y ,$$

Aplicando-se a transformada de Fourier, no sistema de equações 3.34, têm-se então as referidas equações no domínio da Frequência:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{d} + M_2 \ddot{q} = f_d \\ M_3 \ddot{d} + M_4 \ddot{q} + K_4 q = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Aplicando-se a transformada de Fourier, no sistema de equações 3.34, têm-se então as referidas equações no domínio da Frequência:

$$\begin{cases} (-\Omega^2 M_4 + K_4) Q(\Omega) = \Omega^2 M_3 D(\Omega) \\ -M_2 \Omega^2 Q(\Omega) - \Omega^2 M_1 D(\Omega) = F_d(\Omega) \end{cases} \quad (3.35)$$

Combinando as equações 3.35, tem-se a seguinte expressão:

$$\left[-\Omega^4 M_2 (K_4 - \Omega^2 M_4)^{-1} M_3 - \Omega^2 M_1 \right] D(\Omega) = F_d(\Omega) \quad (3.36)$$

A expressão 3.36 resulta em uma outra, já vista anteriormente, conhecida como rigidez dinâmica.

$$K(\Omega) = \frac{F_d(\Omega)}{D(\Omega)} \quad (3.37)$$

3.3.3 Inversão Estável com Truncamento

A inversão direta $(K_4 - \Omega^2 M_4)^{-1}$ pode apresentar problemas numéricos, então para se evitar tais problemas a inversão será feita de forma a garantir uma maior estabilidade numérica, visto que a matriz de massa é de ordem $n \times n$ e apresenta valores muito pequenos.

Seja,

$$\left[-\Omega_k^2 M_4 + K_4\right]^{-1}, k=1, n \quad ; \quad M_4 \in R^{n \times n} \text{ e } K_4 \in C^{n \times n} \quad (3.38)$$

Dado um vetor $F(\Omega) \in C^{n \times 1}$, o sistema abaixo tem solução:

$$\left[-\Omega_k^2 M_4 + K_4\right] Q(\Omega_k) = F(\Omega_k), k=1, n \quad (3.39)$$

Que formalmente pode ser escrita da seguinte forma:

$$Q(\Omega_k) = \left[-\Omega_k^2 M_4 + K_4\right]^{-1} F(\Omega_k) \quad (3.40)$$

A solução da expressão 3.40 pode ser apresentada de uma forma aproximada, porém adequada.

Resolve-se o problema de autovalores.

$$K_4 \phi = \sigma M_4 \phi \quad (3.41)$$

Com, $\Phi^T K_4 \Phi = \Sigma$ e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_j), j=1,2,\dots,$

Como $\Phi \in C^{n \times \hat{n}}$ e retêm apenas $\hat{n} \ll n$ autovalores de 3.41, a matriz modal é diagonal e $\Sigma \in C^{\hat{n} \times \hat{n}}$.

Vale ainda lembrar que:

$$\Phi^T M_4 \Phi = I_n \quad (3.42)$$

A expressão 3.42 é válida se os autovetores forem ortonormalizados. Caso estes não sejam ortonormalizados, tem-se:

$$\Phi^T M_4 \Phi = M_r = \text{diag}(m_r), \text{ sendo } M_r \in C^{\hat{n} \times \hat{n}}$$

Sendo a ortonormalização efetuada da seguinte forma:

$$\Phi_o = \Phi M_r^{-1/2}, \text{ sendo } \Phi_o \text{ os autovetores ortonormalizados.}$$

Fazendo-se a seguinte transformação:

$$Q(\Omega_k) = \Phi Y(\Omega_k), \quad k=1, n \quad (3.43)$$

Onde:

$$Y(\Omega_k) \in C^{\hat{n} \times 1}$$

Substituindo a expressão 3.43 na 3.39 e pré-multiplicando por tem-se:

$$\left[-\Omega_k^2 I_{\hat{n}} + \Sigma \right] Y(\Omega_k) = \Phi^T F(\Omega_k)$$

Então,

$$Y(\Omega_k) = \left[-\Omega_k^2 I_{\hat{n}} + \Sigma \right]^{-1} \Phi^T F(\Omega_k)$$

que substituindo na 3.43, tem-se:

$$Q(\Omega_k) = \Phi \left[-\Omega_k^2 I_{\hat{n}} + \Sigma \right]^{-1} \Phi^T F(\Omega_k) \quad (3.44)$$

Comparando a equação 3.44 com a equação 3.39, conclui-se que:

$$\left[-\Omega_k^2 M_4 + K_4 \right]^{-1} \approx \Phi \left[-\Omega_k^2 I_{\hat{n}} + \Sigma \right]^{-1} \Phi^T$$

o grau de aproximação da equação acima depende da relação

Constatada uma melhor inversão através dos parâmetros modais, tem-se como expressões para a rigidez dinâmica, impedância mecânica e massa dinâmica respectivamente (ver 3.36):

$$K(\Omega) = -\Omega^2 M_1 - \Omega^4 M_2 \Phi \left[-\Omega^2 I_{\hat{n}} + \Sigma \right]^{-1} \Phi^T M_3 \quad (3.45)$$

$$Z(\Omega) = \Omega i M_1 + i\Omega^3 M_2 \Phi \left[-\Omega^2 I_{\hat{n}} + \Sigma \right]^{-1} \Phi^T M_3 \quad (3.46)$$

$$M(\Omega) = M_1 + \Omega^2 M_2 \Phi \left[-\Omega^2 I_{\hat{n}} + \Sigma \right]^{-1} \Phi^T M_3 \quad (3.47)$$

3.3.4 Função Teste ou Colocação

Para a função teste adotou-se a seguinte expressão, pois, conforme pode-se verificar graficamente, esta representa com boa aproximação os dois primeiros modos de uma viga engastada em uma de suas extremidades e a outra livre com uma massa fixada. De acordo com os gráficos abaixo.

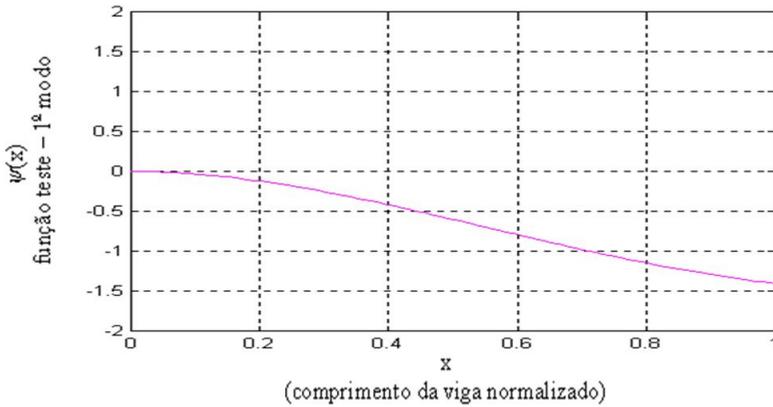
$$\psi_j(x) = \cos(\beta_j L \bar{x}) - \text{sen}(\beta_j L \bar{x}) - e^{-\beta_j L \bar{x}} \quad (3.48)$$

de forma que,

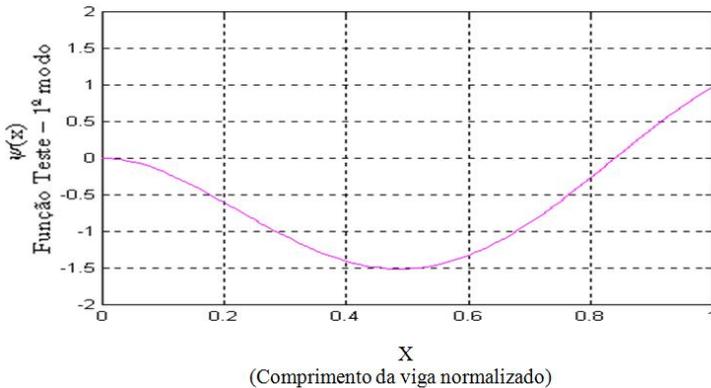
$$\bar{x} = x / L \quad \text{e} \quad \bar{x} \in [0,1], \quad \text{pois} \quad x \in [0, L]$$

Abaixo apresentam-se os gráficos da função colocação para os dois primeiros modos de uma viga engastada em uma de suas extremidades e a outra livre:

Figura 3.3 – Representação dos dois primeiros modos de uma viga engastada apenas em uma de suas extremidades: (a) primeiro modo, (b) segundo modo.



(a)



(b)

Para o argumento, fez-se a seguinte aproximação, que é bastante satisfatória:

$$\beta_j L = (j - 1/2)\pi \quad (3.49)$$

Faz-se necessário a seguinte observação, para os cinco primeiros termos de, aconselha-se usar as cinco primeiras raízes obtidas da

equação transcendental abaixo, isto deve-se ao fato de os primeiros termos da aproximação 3.48 apresentarem erros, o que pode acarretar uma dificuldade de convergência durante a execução do método.

$$\cos(\beta L) \cosh(\beta L) = -1 \quad (3.50)$$

3.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Este método apresenta-se como um dos mais difundidos quando a palavra de ordem é Análise Estrutural, Modificação Estrutural, etc. Trata-se de uma ferramenta matemática muito poderosa, tanto na solução como na análise de problemas de natureza dinâmica. Contudo este tópico não tem como finalidade discorrer detalhadamente acerca desse assunto, visto que, existem bibliografias mais acabadas, tais como Fancello e Medonça (1997), Yang (1986), Bathe (1987), etc.

Uma das grandes vantagens desse método é a sua concordância com o modelo físico real e o modelo matemático. Fez-se a modelagem do sistema físico, que consiste em uma viga já descrita anteriormente. Para a modelagem do PED adotou-se o modelo de viga Euler-Bernoulli, estimando que a viga esteja sujeita apenas a esforços de flexão, combinado com um momento devido a massa fixada na extremidade da viga.

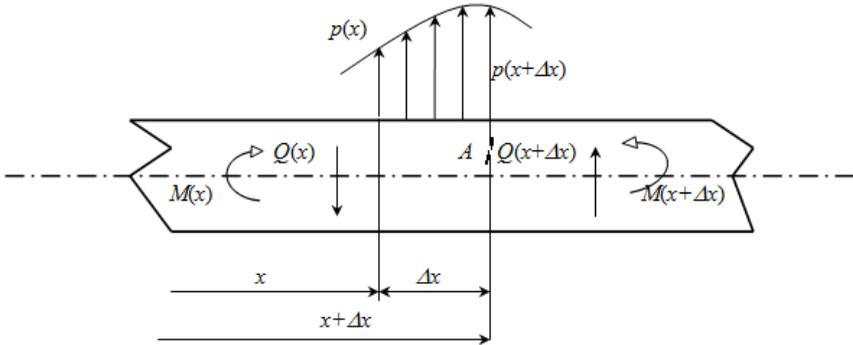
A modelagem por MEF, para o PED em questão, apresenta como características 10 elementos utilizados para a discretização da viga, quatro coordenadas descrevem os deslocamentos de cada elemento, onde cada coordenada representa um grau de liberdade e cada nó possui dois graus de liberdade. As funções bases utilizadas para a interpolação, são os polinômios de Hermite que apresentam-se bem difundidos na literatura existente.

3.4.1 Equação Diferencial de Equilíbrio em Vigas

Tem-se conhecimento que um modelo de barra admite apenas esforços axiais, ou seja, esse modelo parte da premissa que esforços externos atuam na direção da barra, que os deslocamentos axiais são os mesmos para todos os pontos e a área seção da transversal possui dimensões muito menores que o comprimento. Tendo em vista a admissão de esforços de flexão e cisalhantes criou-se o modelo de viga, o qual tem sua sustentação em hipóteses geométricas e cinemáticas, podendo-se encontrá-las em literaturas mais específicas do assunto. Seja

um elemento de viga da figura 3.4 submetido a uma carga distribuída por unidade de comprimento $p(x)$, então se esta encontra-se em equilíbrio estático, deve satisfazer as seguintes equações:

Figura 3.4 – Esquema de um elemento de viga sujeito a esforços e a uma carga distribuída.



$$\sum F_y = 0$$

$$-Q(x) + \int_x^{x+\Delta x} p(x)dx + Q(x + \Delta x) = 0 \quad (3.51)$$

onde, $Q(x)$ é a força responsável pelo cisalhamento. Fazendo-se uma aproximação de $Q(x + \Delta x)$ por série de Taylor, aplicando-se o teorema do valor médio no termo integral da equação (3.50) e substituindo-se os resultados na mesma, depois de algumas simplificações tem-se, afinal, a seguinte expressão:

$$p(x) = -\frac{dQ(x)}{dx} \quad (3.52)$$

Contudo, para que o equilíbrio seja satisfeito por completo, faz-se necessário que validar a equação dos momentos, ou seja, $\sum M = 0$, tomando-se como referência o ponto A da figura 3.4. Feito isso, realiza-

se todas as considerações simplificatórias utilizadas para o esforço cortante e encontra-se uma outra expressão, que relaciona o esforço cortante com a derivada do momento:

$$Q(x) = -\frac{dM(x)}{dx} \quad (3.53)$$

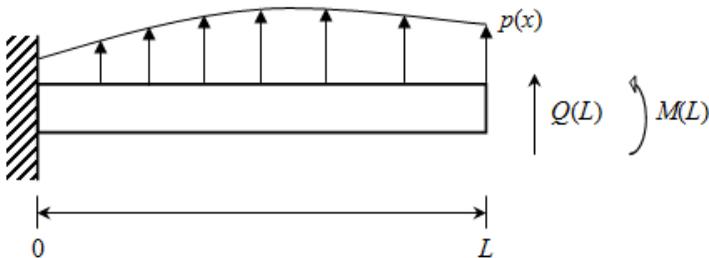
Substituindo (3.52) em (3.51) encontra-se $p(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2}$.

Sendo $M(x) = EI(x) \frac{d^2v(x)}{dx^2}$, como $I(x)$ é o segundo momento de área da viga e E o módulo de Young, tem-se então:

$$EI(x)v^{iv}(x) - p(x) = 0 \quad (3.54)$$

A equação diferencial acima expressa o equilíbrio de uma viga, ou seja, é a equação elástica da viga, sendo $v(x)$ a função elástica. Esta representa o campo de deslocamento que dá equação 3.53. Para um exemplo de uma viga engastada conforme figura abaixo, com seção de área constante, a equação da viga apresenta-se da seguinte forma.

Figura 3.5 – Viga engastada com carga distribuída ao longo do seu comprimento.



$$EI v^{iv}(x) - p(x) = 0 \quad (3.55)$$

onde, $v(0)=0$ para $x=0$

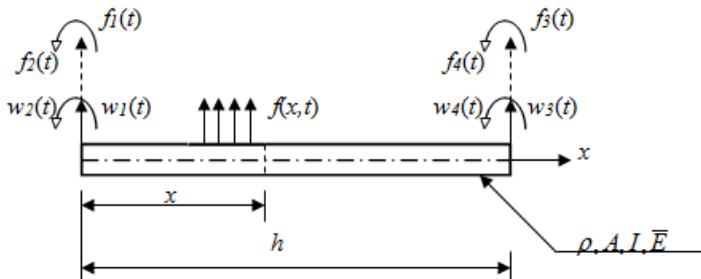
Faz-se necessário o seguinte comentário: a viga a ser modelada é um cabo composto de filamentos de alumínio entrelaçados em forma de

espiral que muitas das vezes sobre uma alma de aço. Com intuito de simplificar a modelagem, fez-se a consideração de que a seção do cabo é aproximadamente circular e permanece constante ao longo do mesmo. O módulo de elasticidade é complexo, com parte real e imaginária constantes, equação 3.54, o motivo de este ser complexo já se explicou e tem a ver com as hipóteses básicas de amortecimento relativas a este trabalho.

3.4.2 Modelagem Matemática do Elemento de Viga por MEF

Nesta fase constrói-se o modelo discreto de viga baseando-se na função $v(x)$, que descreve o comportamento da linha elástica de cada elemento que compõe a viga total. Para isso lançou-se mão do uso de funções de interpolação, estas conhecidas como funções de Hermite. Onde $v(x)$ é representado pela combinação linear das funções bases (funções de interpolação). Essa aproximação fornece uma solução que é conhecida como solução aproximada, isso para cada elemento de viga conforme figura 3.6. Ao se discretizar a viga em elementos é uma das grandes vantagens do MEF, se comparado com os outros dois citados anteriormente, pois, se tratando do método de dois graus de liberdade no qual a viga foi modelada como se fosse um único elemento sem considerar massa. Para o método dos modos assumidos, durante a modelagem foi assumida uma função que representasse de forma aproximada os modos naturais de uma viga engastada em apenas uma de suas extremidades, também nesse caso a massa da viga não foi considerada, e a função colocação assume de forma aproximada o comportamento da viga. Abaixo a figura 3.6 representa um elemento de viga e os seus respectivos esforços.

Figura 3.6 – Elemento de uma viga sujeita a esforços transversais, como exemplo didático para a modelagem por MEF.



Para a figura 3.6, $f(x,t)$ representa uma carga distribuída ao longo do elemento, $f_1(t)$ e $f_3(t)$ são forças cisalhantes nos nós, com os seus respectivos deslocamentos lineares $w_1(t)$, $w_3(t)$. Os momentos fletores nas extremidades do elemento são $f_2(t)$ e $f_4(t)$ sendo seus deslocamentos angulares $w_2(t)$, $w_4(t)$ respectivamente. Assume-se que o deslocamento total do elemento é $w(x,t)$, que aplicando-se as condições de contorno relativas ao elemento tem-se a função do deslocamento total expressa através de uma combinação linear dos deslocamentos lineares e angulares e polinômios de terceiro grau (polinômios de Hermite). Os termos ρ , A , I , são, respectivamente, a densidade volumétrica da viga, seção de área transversal, segundo momento de área e módulo de elasticidade complexo.

Condições de contorno:

$$w(0,t) = w_1(t), \quad \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = w_2(t)$$

$$w(h,t) = w_3(t), \quad \frac{\partial w(h,t)}{\partial x} = w_4(t)$$

Montando-se a expressão $w(x,t) = N_1(x) w_1(t) + N_2(x) w_2(t) + N_3(x) w_3(t) + N_4(x) w_4(t)$, de uma forma mais compacta, tem-se:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x) w_i(t),$$

$$(3.56) \text{ onde } \begin{cases} N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ N_2(x) = x - 2h\left(\frac{x}{h}\right)^2 + h\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ N_3(x) = 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ N_4(x) = -h\left(\frac{x}{h}\right)^2 + h\left(\frac{x}{h}\right)^3 \end{cases} \text{ são os polinômios que}$$

satisfazem as condições prescritas.

3.4.3 Energias Cinética e Potencial Do Elemento de Viga.

As expressões da energia cinética e potencial são obtidas através da teoria e formulações da mecânica analítica, como teorema dos trabalhos virtuais, equações de Lagrange e o princípio de Hamilton. Este trata-se de um princípio integral e serve tanto para sistemas conservativos como para não conservativos. Dentre os princípios e teoremas acima, não existe vantagem significativa deste ou aquele, e sim uma melhor aplicação dependendo do sistema de coordenadas a ser utilizado; para o caso em questão o Lagrangiano foi o utilizado. A formulação a seguir foi desenvolvida tendo em vista apenas deslocamentos pequenos:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^h \rho A \left\{ \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right\}^2 dx = \frac{1}{2} \dot{w}(t)^T m \dot{w}(t), \quad (3.57)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^h EI \left\{ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right\}^2 dx = \frac{1}{2} w(t)^T k w(t), \quad (3.58)$$

É bom lembrar que essas expressões 3.57 e 3.58 são elementares, ou seja, são desenvolvidas para um elemento de viga, sendo m e k as matrizes de massa e rigidez elementares respectivamente. Substituindo a expressão da função deslocamento $w(x,t)$ na energia cinética e potencial, e após aplicar a equação de Lagrange, obtém-se a equação dinâmica do elemento de viga com quatro graus de liberdade:

$$m \ddot{w}(t) + k w(t) = f(t), \quad (3.59)$$

Os elementos que compõem as matrizes de massa e rigidez são obtidos também da aplicação da equação de Lagrange:

$$m_{ij} = \rho A \int_0^h N_i(x) N_j(x) dx, \quad (3.60)$$

$$k_{ij} = EI \int_0^h N_i''(x) N_j''(x) dx, \quad (3.61)$$

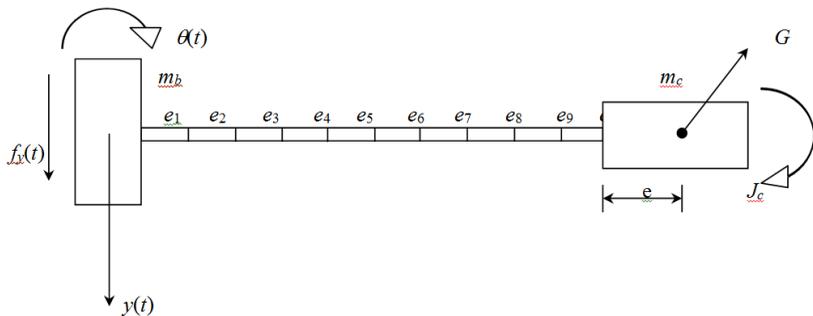
sendo as respectivas matrizes da seguinte forma:

$$m = \frac{\rho Ah}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \quad k = \frac{EI}{h} \begin{bmatrix} \frac{12}{h^2} & \frac{6}{h} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h} \\ \frac{6}{h} & 4 & -\frac{6}{h} & 2 \\ -\frac{12}{h^2} & -\frac{6}{h} & \frac{12}{h^2} & -\frac{6}{h} \\ \frac{6}{h} & 2 & -\frac{6}{h} & 4 \end{bmatrix}$$

3.4.4 Modelagem do PED Através do MEF

O modelo físico mais uma vez foi o de uma viga engastada em uma base que estará sujeita a movimento de translação e, na outra extremidade, encontra-se uma massa em forma de copo com o seu centro de gravidade fora da união massa-viga, como já descrito anteriormente no início deste capítulo. As vantagens e simplificações desse modelo não serão mais abordadas, mas sim a do método em questão. Uma dessas vantagens reside no fato de o MEF adequar-se de forma simples à maioria dos problemas estruturais, a sistematização para as funções bases utilizada na modelagem, uma grande conformidade entre o modelo real, o físico e o matemático. A figura abaixo apresenta um esboço do modelo físico adotado e posteriormente dar-se-á início à modelagem matemática.

Figura 3.7 – Modelo físico da viga com a massa de sintonia, massa da base e força excitadora para o MEF.



3.4.4.1 Expressões da Energia Cinética e Potencial do Dispositivo PED

A expressão da energia cinética é composta de três parcelas: a primeira reporta-se a energia relativa à viga, outra está relacionada com a massa de sintonia (massa do copo), que por sua vez possui energia cinética tanto de translação como de rotação e uma terceira parcela com a energia da base do dispositivo PED. Para a energia potencial existe uma grande similaridade com os dois métodos descritos em tópicos anteriores.

$$T(t) = \frac{1}{2} \dot{z}(t)^T M_{EF} \dot{z}(t) + \frac{1}{2} m_c (\dot{y}(t) + \dot{u}_{21}(t) + e\dot{u}_{22}(t))^2 + \frac{1}{2} m_b \dot{y}(t)^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{u}_{22}(t)^2 \quad (3.62)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} u(t)^T K_{EF} u(t) - f_y(t) y(t), \quad (3.63)$$

sendo,

$$u(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t) \quad \cdots \quad u_{22}(t)]^T \quad e$$

$$z(t) = [u_1(t) + y(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t) + y(t) \quad u_4(t) \quad \cdots \quad u_{21}(t) + y(t) \quad u_{22}(t)]^T$$

$u(t)$ - vetor de coordenadas generalizadas.

$z(t)$ - vetor composto da soma das coordenadas generalizadas de translação com o deslocamento de corpo rígido.

M_{EF} - matriz de massa da viga gerada por elementos finitos.

K_{EF} - matriz de rigidez da viga gerada por elementos finitos.

3.4.4.2 Desenvolvimento da Equação Dinâmica do Neutralizador

De posse das equações da energia cinética e potencial, então aplica-se a equação de Lagrange, que já se apresentou anteriormente. Na sequência abaixo não se apresentarão uma todos os passos, porque o propósito desta incursão é apenas dar uma sequência lógica de como foram obtidas as equações finais:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left([1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T M_{EF} \dot{z}(t) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left([0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]^T M_{EF} \dot{z}(t) \right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_{21}} \right) = \frac{d}{dt} \left([0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0]^T M_{EF} \dot{z}(t) + m_c (\dot{y} + \dot{u}_{21} + e\dot{u}_{22}) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_{22}} \right) = \frac{d}{dt} \left([1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T M_{EF} \dot{z}(t) + em_c (\dot{y} + \dot{u}_{21} + e\dot{u}_{22}) + J_c \dot{u}_{22} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} \left([1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]^T M_{EF} \dot{z}(t) + m_c (\dot{y} + \dot{u}_{21} + e\dot{u}_{22}) + m_b \dot{y} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial u_3} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial T}{\partial u_{22}} = 0$$

Para a energia potencial tem-se,

$$\frac{\partial V}{\partial u_1} = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T K_{EF} u(t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_2} = [0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0]^T K_{EF} u(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_{21}} = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0]^T K_{EF} u(t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial u_{22}} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T K_{EF} u(t)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -f_y(t)$$

De posse das expressões das respectivas derivadas, monta-se o sistema de equações que governam o movimento do dispositivo. Feito isso, faz-se importante ressaltar que o problema não será resolvido no domínio do tempo, como a maior parte dos problemas de elementos

finitos, ou seja, a finalidade é montar uma função resposta em frequência sedimentada em um modelo matemático que represente, com maior fidelidade, o comportamento dinâmico do sistema físico em questão. Obtidas as matrizes de massa e rigidez, gera-se então um problema de autovalores. Resolvido esse problema, acha-se então, os parâmetros modais (autovalores e autovetores). Quanto maior a proximidade da modelo matemático com o modelo físico, melhor será a representação das matrizes de massa e rigidez da estrutura.

Justificada a necessidade de se ter uma boa qualidade do modelo em questão, retomar-se-á o desenvolvimento das equações, para uma posterior conclusão.

A equação na forma matricial é:

$$M_c \ddot{Z}_c(t) + K_c Z_c(t) = f(t), \quad (3.64)$$

onde:

M_c - matriz de massa composta pela matriz de massa da viga mais os termos de acoplamento da massa de sintonia (massa do copo), essa matriz possui dimensão 23 por 23, que é resultante do número de elementos adotados mais o acoplamento da massa de sintonia.

K_c - matriz de rigidez, composta pela matriz obtida via M_{EF} mais uma coluna e linha de zeros ligados a coordenada $y(t)$, pertencente ao vetor

Z_c - Ver equações 3.6 e 3.7 referente ao modelo com dois graus de liberdade, pois o procedimento foi o mesmo para se particionar as matrizes da equação 3.64.

$Z_c(t)$ - vetor de composto pelas coordenadas generalizadas e a coordenada $y(t)$. sendo apresentado da seguinte forma

$$Z_c(t) = [u_1(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t) \quad \cdots \quad u_{22}(t) \quad y(t)]^T$$

$f(t)$ - vetor composto por zeros e a força excitadora.

$$f(t) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad f(t)]^T$$

Escrevendo a equação (3.64) de forma compacta e particionada, tem-se a seguinte forma:

$$\begin{cases} M_{EF} \ddot{u}(t) + m \ddot{y}(t) + K_{EF} u(t) = 0 \\ m^T \ddot{u}(t) + (m_b + m_c) \ddot{y}(t) = f(t) \end{cases}, \quad (3.65)$$

onde M_{EF} e K_{EF} , são matrizes de massa e rigidez obtidas por elementos finitos e mt é o vetor resultante da desacoplagem do sistema de equações 3.63, sendo formado por elementos de uma coluna da matriz M_c (similar a equação 3.6, modelo de dois graus de liberdade).

Antes de se aplicar a transformada de Fourier e passar as duas equações para o domínio da frequência, resta fazer algumas observações, tais como:

- (i) As coordenadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ do vetor de deslocamento $u(t)$ são nulas, pois estas estão fixadas em uma das extremidades da viga, a base, portanto não estão sujeitas a translação e nem rotação.
- (ii) Outra observação pertinente é que, como as duas primeiras coordenadas do vetor de deslocamento são nulas, então a sua segunda derivada é nula. Isto faz com que o produto desses vetores pelas matrizes de massa e rigidez promovem o desaparecimento das duas primeiras linhas e colunas das respectivas matrizes, tornando estas com dimensão de 20 por 20 elementos.

As matrizes de massa e rigidez que eram M_{EF} e K_{EF} respectivamente, passam a ser M_{EF}^* e K_{EF}^* . Isto se dá conforme a observação (i), pois já que as coordenadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ do vetor de deslocamento são nulas, as respectivas linhas e colunas das matrizes de rigidez e massa referentes a tais variáveis desaparecerão. Desta forma, reescreve-se o sistema de equações 3.65 com as novas matrizes e , ou seja, sem as devidas linhas e colunas anuladas, tem-se expressão 3.66.

$$\begin{cases} M_{EF}^* \ddot{u}(t)^* + mt^* \ddot{y}(t) + K_{EF}^* u(t)^* = 0 \\ mt^{*T} \ddot{u}(t)^* + (m_b + m_c) \ddot{y}(t) = f(t) \end{cases}, \quad (3.66)$$

É importante lembrar que o vetor de coordenadas foi também alterado, de forma que este passou a ter 20 elementos.

3.4.4.3 Funções Resposta em Frequência via MEF

De posse do sistema de equações modificado, aplica-se a transformada de Fourier e o sistema fica escrito no domínio da frequência. Com o desígnio de facilitar a notação das variáveis relativas à transformada de Fourier do sistema (3.66), estas apresentar-se-ão sem o asterisco, mas as matrizes de massa, rigidez e o vetor mt^* continuarão da mesma forma, para indicar a redução de ordem das matrizes. Assim tem-se:

$$\begin{cases} (-\Omega^2 M_{EF}^* + K_{EF}^*)U(\Omega) - \Omega^2 mt^* Y(\Omega) = \{0\} \\ -\Omega^2 mt^{*T} U(\Omega) - \Omega^2 (m_b + m_c)Y(\Omega) = F(\Omega) \end{cases}, \quad (3.67)$$

obtém-se:

$$\frac{U(\Omega)}{Y(\Omega)} = \Omega^2 \left(-\Omega^2 M_{EF}^* + K_{EF}^* \right)^{-1} mt^*, \quad (3.68)$$

que combinada com a segunda fornece a seguinte expressão:

$$\frac{F(\Omega)}{Y(\Omega)} = -\Omega^2 (m_b + m_c) - \Omega^4 mt^{*T} \left(-\Omega^2 M_{EF}^* + K_{EF}^* \right)^{-1} mt^*, \quad (3.69)$$

Como já foi visto anteriormente, esta relação, no domínio da frequência, é conhecida como rigidez dinâmica. A inversão do termo $\left(-\Omega^2 M_{EF}^* + K_{EF}^* \right)$, pode ser realizada de forma estável, como se verá a seguir, se se colocar a rigidez dinâmica, e outras funções derivadas na seguinte forma:

$$K(\Omega) = -\Omega^2 (m_b + m_c) - \Omega^4 mt^{*T} \Phi_{EF} \left(-\Omega^2 I + \Sigma_{EF} \right)^{-1} \Phi_{EF}^T mt^*, \quad (3.70)$$

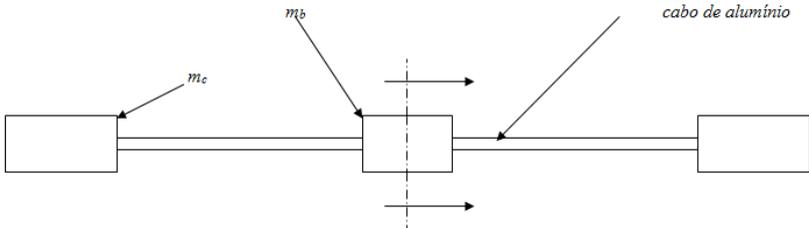
$$Z(\Omega) = i\Omega(m_b + m_c) + i\Omega^3 mt^{*T} \Phi_{EF} \left(-\Omega^2 I + \Sigma_{EF} \right)^{-1} \Phi_{EF}^T mt^*, \quad (3.71)$$

$$M(\Omega) = (m_b + m_c) + \Omega^2 m t^{*T} \Phi_{EF} \left(-\Omega^2 I + \Sigma_{EF} \right)^{-1} \Phi_{EF}^T m t^*, \quad (3.72)$$

3.4.5 Função Resposta em Frequência Completa do Dispositivo Tipo Neutralizador

Até então o modelo físico utilizado na modelagem é o de uma viga com uma de suas extremidades engastada em uma parte conhecida como base do dispositivo e uma massa de sintonia fixada em outra extremidade. Este modelo, como já citado no início deste capítulo, foi adotado pela simples razão de o PED (nome do dispositivo, ver capítulo II) ser simétrico, o que facilitou a sua modelagem. Como as funções resposta em frequência encontradas a partir dos modelos apresentados neste capítulo, representam apenas um dos lados do dispositivo em questão, então para efeito de correção. Toma-se as F.R.F's obtidas e multiplica-se por dois, cada uma delas, encontrando dessa forma as F.R.F's originais, que serão utilizadas para compor a função objetivo, usada na regeneração das mesmas.

Figura 3.8 – Figura do dispositivo PED e utilizado na modelagem.



As novas expressões da rigidez, impedância e massa dinâmica, são:

$$K_T(\Omega) = 2K(\Omega) = -2\Omega^2(m_b + m_c) - 2\Omega^4 m t^{*T} \Phi_{EF} \left(-\Omega^2 I + \Sigma_{EF} \right)^{-1} \Phi_{EF}^T m t^*, \quad (3.73)$$

$$Z_T(\Omega) = 2Z(\Omega) = 2i\Omega(m_b + m_c) + 2i\Omega^3 m t^{*T} \Phi_{EF} \left(-\Omega^2 I + \Sigma_{EF} \right)^{-1} \Phi_{EF}^T m t^*, \quad (3.74)$$

$$M_T(\Omega) = 2M(\Omega) = 2(m_b + m_c) + 2\Omega^2 m t^{*T} \Phi_{EF} (-\Omega^2 I + \Sigma_{EF})^{-1} \Phi_{EF}^T m t^* \quad (3.75)$$

Este exemplo com as F.R.F. de elementos finitos, apresenta-se de forma ilustrativa, mas vale para os outros dois métodos anteriormente explanados.

Neste capítulo apresentou-se três métodos utilizados na modelação de um dispositivo de nome PED (tipo neutralizador de dinâmico de Stockbridge), apontando-se de forma sucinta suas peculiaridades e considerações adotadas na modelagem.

A próxima matéria a ser abordada será relativa a experimentação, onde apresentará: a) montagem do aparato, tanto no ensaio do PED como dos protótipos (os protótipos construídos serão chamados a partir desse momento de PED-P) construídos para a validação dos resultados, b) a cadeia de medição com os respectivos aparelhos utilizados, c) a forma de excitação, d) os softwares utilizados no processo experimental desse trabalho.

4 DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA MASSA DINÂMICA

4.1 INTRODUÇÃO

Fez-se um apanhado dos métodos usados na modelagem matemática do PED. como citado anteriormente esses métodos são de suma importância para se montar a função massa dinâmica (FRF), que será utilizada na composição da função objetivo usada no processo de identificação, por meio de técnicas de otimização não linear.

Esse tópico tem como propósito apresentar os procedimentos experimentais utilizados para se encontrar a massa dinâmica que em conjunto com o modelo teórico, desenvolvido no capítulo anterior, formará a função objetivo. Conceito que será explanado no próximo capítulo.

Tem por finalidade. Apresentar os equipamentos e software usados no desenvolvimento desse trabalho, bem como descrever a conduta adotada durante a fase experimental.

4.2 ESPECIFICAÇÃO DO ENSAIADO EXPERIMENTALMENTE

Por facilidade existente, usou-se um neutralizador do tipo Stockbridge para os primeiros ensaios de identificação. A “viga” deste dispositivo é um cabo trançado de aço, cuja rigidez equivalente e fator de perda se deseja identificar.

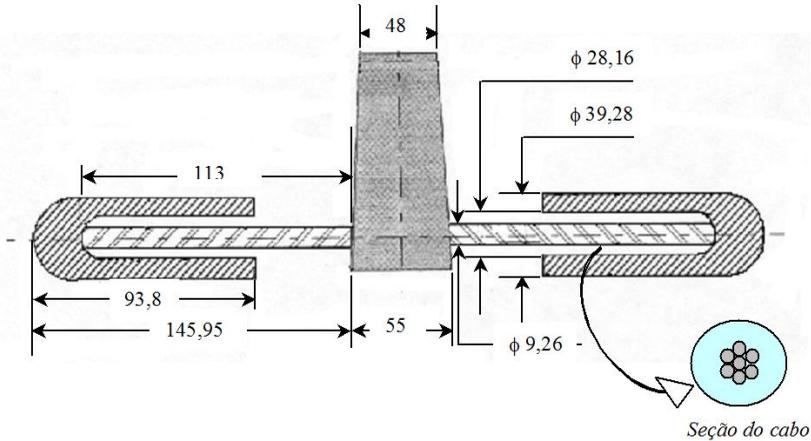
Esse neutralizador dinâmico, segundo Hunt (1979) foi desenvolvido por George H. Stockbridge de acordo com a teoria de Hartog (1956).

Este caracteriza-se por ser composto de duas hastes em forma de cordoalha que podem ser de aço ou alumínio, na extremidade de cada haste existe uma massa fixada em forma de copo quase cilíndrico, estas por sua vez, são simétricas e conhecidas como massas de sintonia. A outra extremidade das hastes esta engastada em uma base que normalmente é feita de alumínio. A seguir a figura 4.1 mostra um esboço do neutralizador utilizado na etapa experimental com suas respectivas dimensões.

Segundo Teixeira (1997) a primeira publicação acerca desse neutralizador se deu através da revista **Electrical world** em dezembro de 1925. Os primeiros modelos apresentavam como fator preponderante, apenas a redução de vibração, contudo com o passar do tempo e o aumento de sua utilização. Verificou-se a necessidade de melhorar sua forma geométrica, tornando-a mais arredondadas; outro fator relevante é o baixo amortecimento do material utilizado para compor a cordoalha, levando o mesmo a entrar em processo de fadiga. A identificação do fator de perda do material que compõe a cordoalha sempre foi muito custosa e pouco precisa chegando-se a valores poucos confiáveis resultantes muitas das vezes de formulas empíricas. Sendo esta necessidade um dos principais motivos desse trabalho.

As medidas apresentadas na figura 4.1, foram obtidas de forma manual com o uso de paquímetro. Fez-se um valor de nove medições para cada cota e a partir da média estabeleceu-se um valor final.

Figura 4.1 – Desenho do neutralizador de Stockbridge usado como PED, com as suas respectivas dimensões.



4.3 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS NA DETERMINAÇÃO DA MASSA DINÂMICA

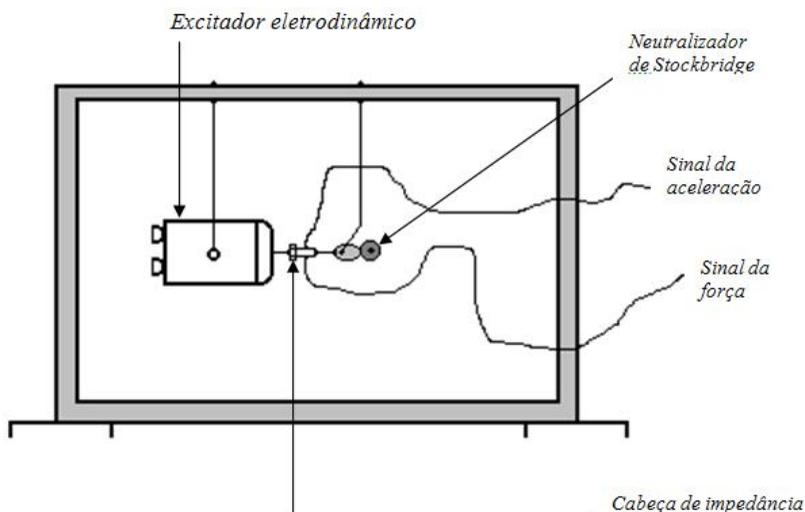
O PED (neutralizador) foi excitado pela base em apenas um ponto, e será detalhado no item posterior. O motivo de se ter escolhido a massa dinâmica, deve-se ao fato de o Stockbridge ser excitado na base de fixação, além a dificuldade de se colher o sinal da força excitadora e da aceleração ao mesmo tempo, e em outro ponto que não fosse a base. Então, em face dessas questões, utilizou-se uma cabeça de impedância, que será especificada posteriormente.

4.3.1 Descrição Experimental

Como já citado, as massas dinâmicas foram obtidas através de excitação pela base do neutralizador. Essas massas dinâmicas obtidas durante o processo experimental, correspondem apenas a uma coluna da matriz total, pois, as respostas a excitação foram colhidas em apenas

em ponto. A figura 4.2 apresenta um esboço do aparato utilizado na fase experimental.

Figura 4.2 – Desenho esquemático do aparato experimental, visto transversalmente.



Este dispositivo consiste de um suporte metálico em forma de um pórtico, que foi utilizado para a montagem da experimentação.

Para eliminar os esforços de realimentação, o excitador foi suspenso pelo centro de gravidade, e articulado ao centro do corpo de prova através de um cabeçote de impedância, que mede força e aceleração.

Os sinais de saída da cabeça de impedância são levados, cada um, para amplificadores de carga, os quais enviam este sinal para o analisador digital de sinais (Digital Signal Analyser- DSA)

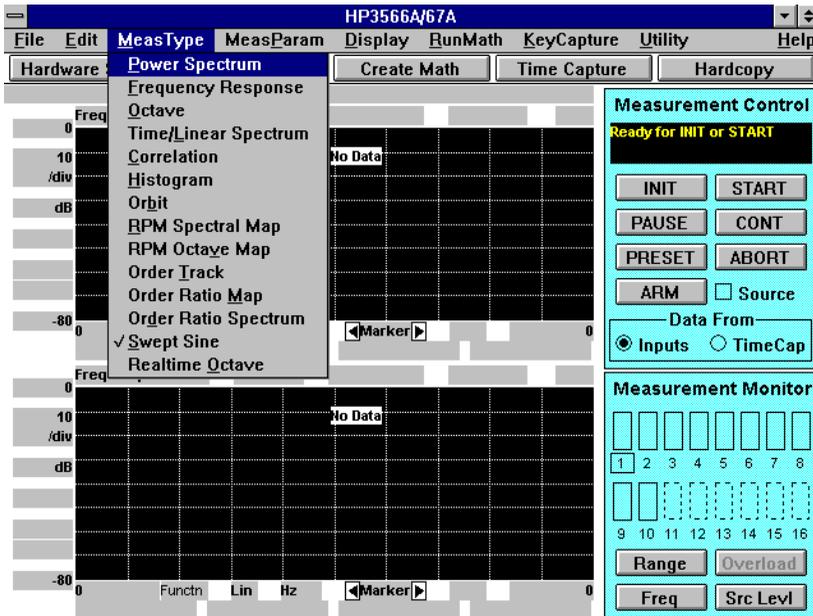
4.3.1.1 Excitação por Swept Sine

No decorrer desta etapa, do trabalho em questão algumas características experimentais são de suma importância no decorrer do

processo. Tendo em vista um melhor entendimento, é necessário uma maior explanação acerca de variáveis utilizadas inerentes ao programa existente no DSA.

Uma dessas variáveis foi a forma de excitação a ser utilizada, dentre as quais escolheu-se a swept sine: Consiste em excitar através de ondas em forma de seno em pontos distintos de frequência, este tipo análise é realizado no domínio do tempo através de um processo de integração com varias simulações para cada ponto de frequência. A principal vantagem consiste em ser ter um espectro plano de frequência, entre a banda de interesse, e, portanto, uma excelente transferência de energia de excitação. A figura 4.3 mostra a tela do DSA com a opção do swept sine.

Figura 4.3 – Tela do DSA com a opção de escolha para o swept sine.

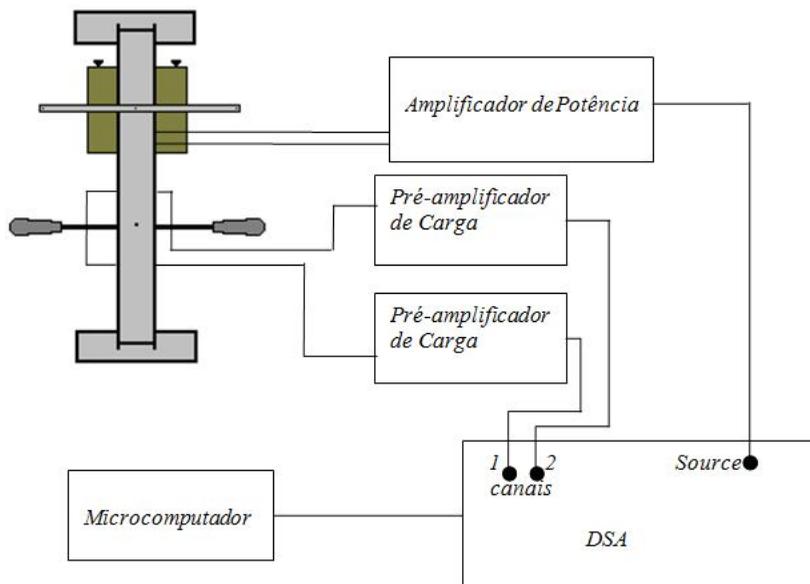


4.3.2 Instrumentação Utilizada nas Medições

A figura 4.4 representa todo o aparato utilizado durante a etapa experimental na determinação das curvas obtidas. Abaixo segue esboço do sistema de medição, para a obtenção da massa dinâmica com uma

vista superior do aparato utilizado. Esta cadeia de medição foi utilizada tanto na experimentação do PED (tipo Stockbridge) bem como dos protótipos ensaiados posteriormente como validação dos resultados e que serão apresentados em um capítulo a seguir.

Figura 4.4 – Esboço da cadeia de medição com os respectivos equipamentos utilizados e a vista superior do aparato experimental.



Durante a realização da experiência, o canal 1 sempre foi o adotado como referência e neste colocava-se a conexão do sinal da aceleração e, no canal 2, a conexão relativa ao sinal da força.

4.3.2.1 Especificação do Equipamento Utilizado

Abaixo segue uma lista dos equipamentos utilizados com suas respectivas especificações:

- 1 amplificador de potência B&K 2706
- 1 microcomputador 486 DX2 - 66
- 2 pré-amplificadores de carga B&K 2635
- 1 excitador de vibrações B&K 4809
- 1 Digital Signal Analyser (DSA) de dez canais HP-3566A/67A
- 1 cabeça de impedância B&K 8001

A seguir apresenta-se algumas figuras, que são fotos de partes e do sistema utilizado durante o ensaio dos PED (Stockbridge):

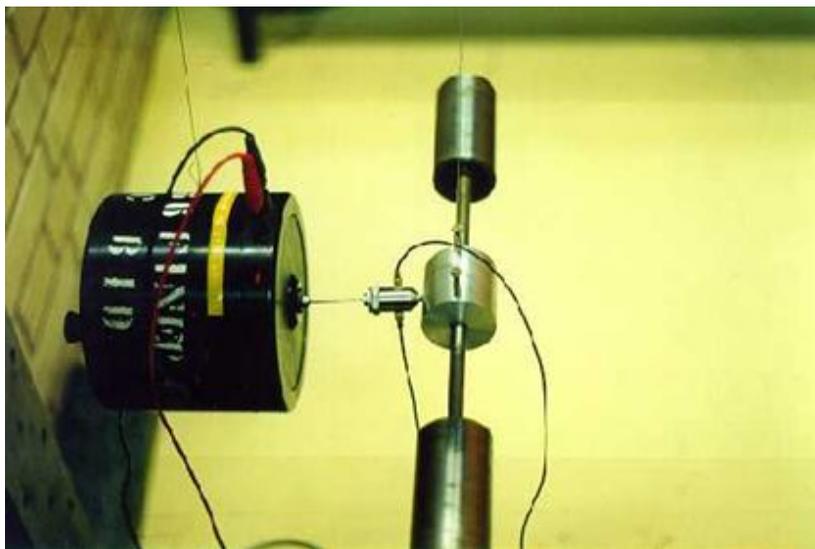
Figura 4.5 – Foto do neutralizador de Stockbridge modelo AS-2008 ensaiado experimentalmente e utilizado como PED, com o detalhe para a suspensão e fixação na base.



Figura 4.6 – Foto do experimento montado com detalhes da suspensão.



Figura 4.7 – Foto do experimento durante os ensaios dos PED-P (protótipos), com detalhe da união entre o excitador eletrodinâmico, a cabeça de impedância, e o protótipo.



4.3.3 Massas dinâmicas Obtidas Durante o Ensaio Experimental

As FRF's apresentadas abaixo foram utilizadas durante o processo de identificação, parte esta que será apresentada no próximo capítulo. Muitas curvas de massa dinâmica foram obtidas, contudo, apenas algumas foram utilizadas durante a etapa numérica. As apresentadas logo a seguir, figuras 4.8 e 4.9 estão entre as selecionadas.

Figura 4.8 – Tela do DSA, exibindo a função resposta em frequência e fase do neutralizador de Stockbridge, após um dos ensaios.

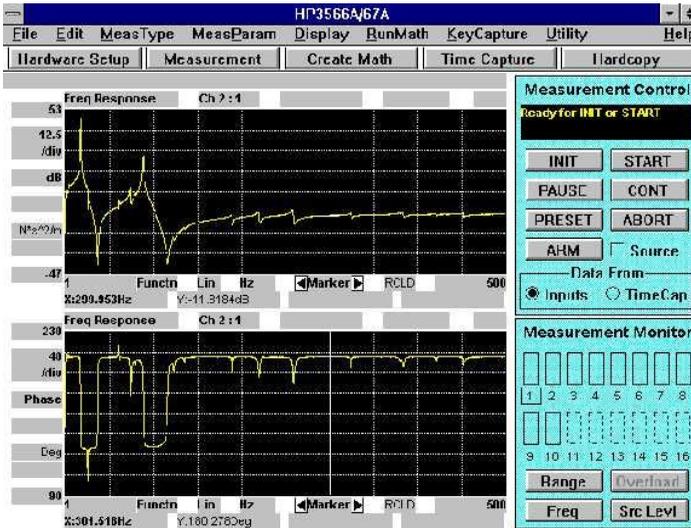
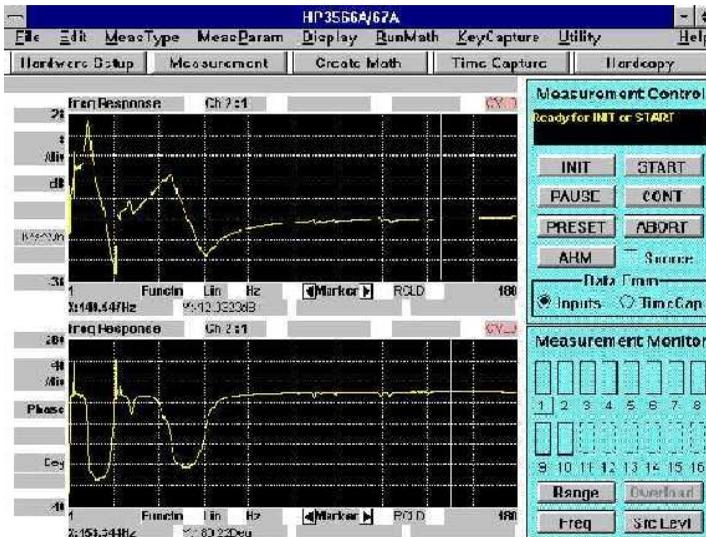


Figura 4.9 - Tela do software de saída do analisador de Fourier, exibindo a função resposta em frequência e fase do protótipo que possui o cabo de nylon, após um dos ensaios.



É importante salientar que:

- Os protótipos foram ensaiados segundo o mesmo critério experimental utilizado no ensaio do neutralizador original.
- A faixa de frequência de utilizada em alguns dos casos foi maior. Isto se deve a necessidade de se utilizar a teoria de resíduos para uma melhor convergência do programa.
- Mesmo nos protótipos observou-se uma pequena variação nas massas de sintonia devido a fabricação, podendo ocasionar a presença de modos torcionais que são inconvenientes durante a execução parte numérica.
- O erro relativo da variação de massa nos protótipos, não ultrapassou os a casa dos 0,2%. O PEDS (neutralizador) apresenta um erro um pouco maior, o que provocou um maior incomodo durante a fase experimental do mesmo. Tal erro relativo, ficou em torno de 4,6%, razoável dada a imprecisão da construção do mesmo, pois, as massas são fixadas nos cabos de alumínio por chumbo. Este é derretido e vazado em uma cavidade, provocando assim o engaste das massas.

5 IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA VIA OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR

5.1 INTRODUÇÃO

A este capítulo cabe a apresentação da técnica utilizada para a identificação. Far-se-á ,primeiramente, uma incursão nos conceitos de modelos modal, espacial e resposta. Em seguida será apresentada a teoria de resíduos e o porque de ser utilizada.

A montagem dá função objetivo dá início ao estudo das técnicas de otimização não-linear com a descrição do método utilizado e suas implicações, sendo acompanhado dos resultados obtidos durante a realização deste trabalho.

5.2 CONCEITOS E CARACTERIZAÇÃO DOS MODELOS: MODAL, ESPACIAL E RESPOSTA

5.2.1 Modelo Espacial

Neste modelo estão contidas características do sistema dinâmico, tais como: distribuição de massa, rigidez e propriedades de amortecimento. Estas, por sua vez, são descritas por matrizes de massa, rigidez e fator de perda com dimensão $n \times n$. O modelo espacial dado por:

M que é matriz de massa, K a matriz de rigidez e η matriz de perda (caso histerético), geram um problema de autovalores equação 5.5 que, solucionado, apresenta o modelo modal.

Procurando direcionar para a teoria utilizada, que é a histerética, utiliza-se o conceito de rigidez complexa, conforme a equação 5.1.

As matrizes que compõe este modelo são obtidas através de relações dos autovalores e autovetores ortonormalizados.

Sendo:

$$K = K_r (I + i\eta) \quad (5.1)$$

tem-se,

$$M = \Phi^{-T} \Phi^{-1} \quad (5.2)$$

$$K = \Phi^{-T} \Lambda \Phi^{-1} \quad (5.3)$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda^2) = \text{diag}(\Omega^2(1 + i\eta_r)) \quad (5.4)$$

5.2.2 O Modelo Modal

O modelo modal contém as propriedades modais, ou seja, é composto pelos autovalores que dão as frequências naturais amortecidas, os autovetores, que contém os vetores que representam as formas de vibrar, isto é as varias maneiras de deformação da estrutura quando submetida à frequência natural.

A composição de um “autoproblema”, ou seja um problema de autovalores a partir das matrizes do modelo espacial, gera-se então o modelo modal. Este modelo foi o escolhido para se montar a função objetivo que foi utilizada no processo de identificação por otimização não linear.

Dado o problema de autovalores auto adjunto

$$K\phi = \lambda^2 M\phi \quad (5.5)$$

valem as seguintes condições de ortonormalidade:

$$I = \Phi^T M \Phi \quad (5.6)$$

$$diag(\lambda^2) = \Phi^T K \Phi \quad (5.7)$$

de onde as expressões 5.2 e 5.3 derivam.

O procedimento de ortonormalização foi utilizado nos autovetores que compõe a função objetivo, e pode ser observado no capítulo III.

5.2.3 Modelo de Resposta

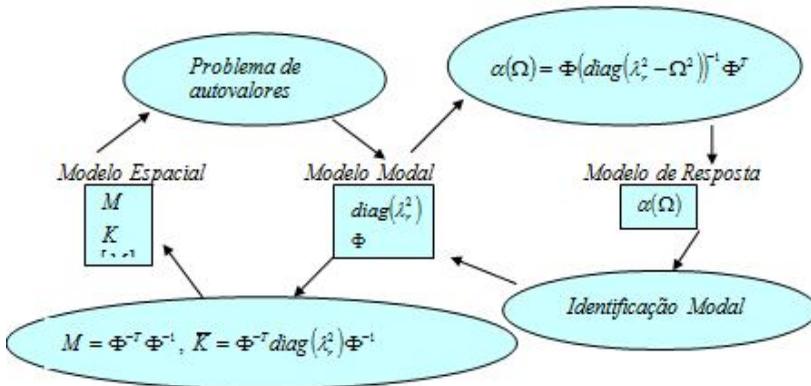
Os modelos de resposta são descritos por uma matriz de FRF's, com todos os seus elementos obtidos de forma experimental, ou calculados analiticamente, podendo acontecer de em alguns casos esses elementos serem obtidos através de uma composição das duas formas. Este modelo relaciona teoricamente a resposta com o modelo espacial ou o modelo modal, as equações abaixo mostram a matriz de receptância para um sistema com amortecimento

$$\alpha(\Omega) = \Phi \left(diag(\Omega_r^2(1 + i\eta_r) - \Omega^2) \right)^{-1} \Phi^T \text{ histerético.}$$

(5.8)

No trabalho em questão não se obteve uma matriz de massa dinâmica, mas sim apenas uma coluna da mesma. Isto se deve a dois motivos: o primeiro é que para a montagem da função objetivo necessita-se apenas de um único vetor coluna da matriz de FRF's e a segunda foi que o PEDS foi excitado e teve sua resposta colhida em apenas um único ponto. A figura 5.1 apresenta a correlação entre os modelos dinâmicos citados até então.

Figura 5.1 - Correlação entre os modelos dinâmicos (caso amortecido).



5.3 TEORIA DOS RESÍDUOS

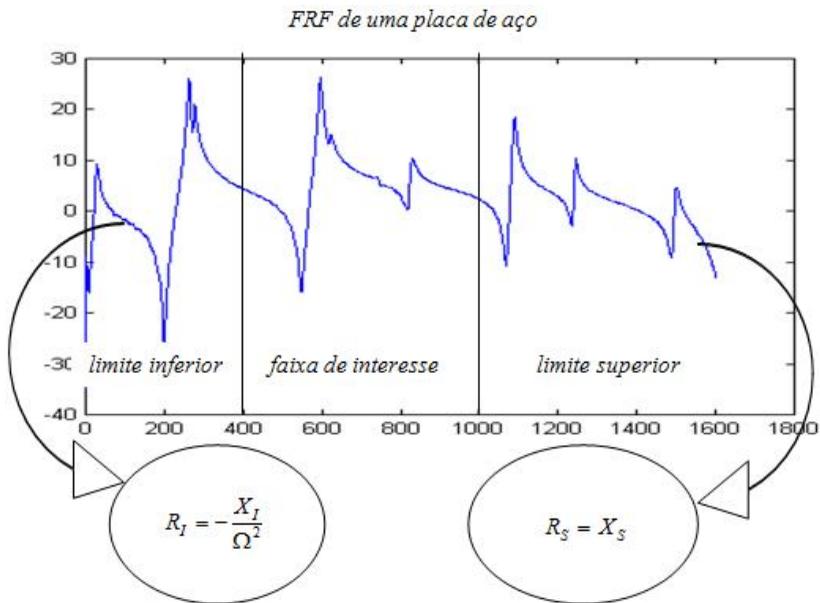
O conceito de resíduos é muito comum quando o assunto é identificação paramétrica de estruturas. A necessidade de inclusão dos resíduos deve-se ao fato de que na prática, quando efetua-se uma análise modal, esta é feita, apenas em uma faixa de frequência que não contém todos os modos da estrutura real, contudo os modos interrompidos estão acoplados com os da faixa a ser analisada Ewins (1984), Espíndola (1986) e Maia (1997).

A influência dos modos superiores, ou inferiores, à banda considerada no modelo, recebe o nome de resíduos. Tem-se, portanto dois tipos de resíduos: aqueles que representam os modos superiores e os que representam os inferiores:

$$\alpha_{jk}(\Omega) = R_I + \sum_{r=m_1}^{m_2} \frac{r A_{jk}}{\Omega_r^2 - \Omega^2 + i \eta_r \Omega_r^2} + R_S \quad (5.9)$$

Tem-se, pois, dois tipos de resíduos, um relativo às ressonâncias das frequências mais baixas e outro correspondente as frequências mais altas de acordo com a equação 5.10. Ao resíduo responsável pela contribuição dos modos inferiores R_I diz-se ser a contribuição da massa e ao termo R_S dos modos superiores, atribui-se a contribuição da rigidez. As palavras “inferiores” e “superiores” citadas anteriormente são relativas há antes e depois da faixa de interesse da medição.

Figura 5.2 – Região de interesse e as respectivas regiões dos resíduos.



$$\alpha_{jk}(\Omega) = R_I + \alpha_{jk}(\Omega) + R_S \quad (5.10)$$

Os termos \bar{X}_m e \bar{X}_R são complexos e constantes, podendo estes serem determinados através do método de identificação utilizado.

Acerca do trabalho em questão o resíduo foi calculado iterativamente durante a minimização da norma do erro gerado, entre a FRF experimental e dos modelos utilizados na modelagem. Essa norma do erro é a função objetivo e será apresentada posteriormente nesse capítulo.

Apenas um tipo de resíduo foi utilizado, pois, a faixa de interesse começa do zero incluindo os dois primeiros modos do neutralizador excitado. Utilizou-se então apenas o resíduo superior, responsável pela contribuição da rigidez.

5.4 TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR

5.4.1 Introdução Histórica

A existência de métodos de otimização é conhecida desde os dias de Newton, Lagrange e Cauchy. Com o aparecimento do cálculo diferencial e integral aumentaram-se as contribuições em otimização. Mínimização de funcionais através do cálculo das variações, foram primeiro abordados por Bernoulli, Euler, Lagrange e Weirstrass que trabalharam com tal aplicação. Segundo (Rao-1997) o método utilizado para a solução de problemas com restrições, envolvendo multiplicadores desconhecidos, tornou-se popular pelo nome do seu inventor, Lagrange. Cauchy desenvolveu a primeira aplicação para “steepest descent” com intuito de resolver um problema de minimização sem restrições.

Faz-se interessante notar que grandes contribuições na área numérica, com respeito à otimização, aconteceram no Reino Unido. O surgimento do método “simplex”, muito utilizado em programação linear, foi desenvolvido por Dantzig em 1947. Em 1957 lançou-se o princípio da otimalidade desenvolvido por Bellman e muito utilizado em programação dinâmica e problemas com restrições. Autores como Kuhn e Tucker, Zoutendijk e Rosen, Carrol e Fiacco e McCormick, Duffin, Zener, Peterson e outros contribuíram e contribuem de forma relevante em Programação Matemática, facilitando e ajudando a solucionar uma quantidade de problemas cada vez maior nas mais diversas áreas da Física, Química, Economia e Engenharia.

Abaixo apresenta-se, apenas para compor um quadro simples sobre o assunto, uma resenha dos mais comuns métodos de otimização.

5.4.2 Métodos de otimização

5.4.2.1 Método de Newton

(i) - Considere uma função quadrática $f(\lambda)$ de apenas uma variável. Através da série de

Taylor equação 5.11 faz-se uma aproximação da função em torno do ponto $\lambda = \lambda_i$.

$$f(\lambda) = f(\lambda_i) + f'(\lambda_i)(\lambda - \lambda_i) + \frac{1}{2} f''(\lambda_i)(\lambda - \lambda_i)^2 \quad (5.11)$$

Derivando a expressão 5.14 e igualando a zero, pois uma condição necessária para que λ^* seja um ponto de mínimo é que $f'(\lambda) = 0$ tem-se então:

$$f'(\lambda) = f'(\lambda_i) + f''(\lambda_i)(\lambda - \lambda_i) = 0 \quad (5.12)$$

negligenciando parcelas de ordem superior.

Como λ_i denota aproximação do mínimo da função, a partir da equação 5.12 extrai-se a seguinte expressão de convergência para o ponto de mínimo.

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{f'(\lambda_i)}{f''(\lambda_i)}, \quad f''(\lambda_i) \neq 0 \quad (5.13)$$

A equação (5.13) é equivalente a uma aproximação quadrática para $f(\lambda)$ com a aplicação das condições necessárias. O processo de convergência é iterativo, assumindo uma convergência para $f'(\lambda_{i+1})$, de acordo com o seguinte critério.

$$|f'(\lambda_{i+1})| \leq \varepsilon$$

sendo ε uma quantidade positiva muito pequena.

Este método foi desenvolvido por Newton com o objetivo de resolver equações não-lineares, mais tarde refinado por Raphson. O método requer a primeira e segunda derivadas da função $f(\lambda)$.

Uma vantagem do método de Newton é uma forte convergência, conhecida como convergência quadrática.

(ii) - Considere uma função quadrática de várias variáveis $f(\mathbf{X})$. Usando-se da série de Taylor para uma aproximação da função em torno do ponto $\mathbf{X} = \mathbf{X}_i$, a expressão abaixo representa a função em torno do ponto citado.

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_i) + \nabla f_i^T (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i)^T H_i (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \quad (5.14)$$

A matriz $H_i = H |_{\mathbf{x}=\mathbf{X}_i}$ é composta por derivadas parciais segundas da função em torno do ponto \mathbf{X}_i , essa matriz é a hessiana e como a função $f(\mathbf{X})$ é multivariável, e \mathbf{X} nada mais é do que um vetor de componentes x_j que representam as variáveis independentes. Igualando-se a zero derivadas parciais da expressão 5.14, encontra-se:

$$\frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

obtendo-se então:

$$\nabla f = \nabla f_i + H_i (\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) = 0 \quad (5.15)$$

Se H_i é não singular a equação 5.15 pode ser resolvida pela aproximação $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{i+1}$, de forma que:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i - H_i^{-1} \nabla f_i \quad (5.16)$$

Caso $f(\mathbf{X})$ seja não quadrática o método de Newton pode ocasionalmente não convergir ou convergir para um ponto de sela região onde se tem um máximo ou um mínimo relativo. Este problema pode ser solucionado com a seguinte modificação na equação (5.16), de sorte que a expressão citada passa a apresentar a seguinte forma:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \delta \mathbf{S}_i = \mathbf{X}_i - \delta H_i^{-1} \nabla f_i \quad (5.17)$$

$$\mathbf{S}_i = -H_i^{-1} \nabla f_i$$

Sendo \mathbf{S}_i as direções de busca. Uma vez estabelecida as direções de busca, utiliza-se δ para uma busca unidimensional, funcionando como um passo de busca para cada direção, de forma que ao se

encontrar δ^* encontra-se o ponto ótimo \mathbf{X}^* . Bibliografias mais completas acerca deste assunto, são Rao (1997), Alves (1996) e Mateus (1986).

5.4.2.2 Método Quase-Newton

Dentre os métodos mais conhecidos encontra-se o de **Davidon-Fletcher-Powell** (DFP), que foi o utilizado neste trabalho. Uma outra versão muito utilizada é a de **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno** (BFGS), a diferença básica entre esses dois métodos consiste na fórmula utilizada na obtenção da matriz hessiana.

Os Quase-Newton são, analiticamente, os métodos mais sofisticados para os problemas irrestritos. Esses possuem a simplicidade do método do gradiente e a rapidez do método de Newton, como o próprio nome informa. Não calculam a inversa da matriz hessiana (método de Newton) e a aproximam através de um processo iterativo finito, onde são utilizadas apenas derivadas de primeira ordem. Com isso esse método ganha em rapidez do método de Newton e a dificuldade de avaliação a cada passo da hessiana é contornada. Através do método de Newton, tem-se a seguinte expressão:

$$S_i = -H_i^{-1} \nabla f_i \quad (5.18)$$

Faz-se interessante ressaltar que esse método admite a inconveniência da obtenção da inversa da hessiana. Expressões foram desenvolvidas de forma a que a hessiana é encontrada por aproximação. Um exemplo didático e comparativo de como o método funciona para o cálculo de tal matriz é apresentado abaixo.

Sejam:

$$B_i(\mathbf{X}) = I \quad \text{Método de gradiente}$$

$$I < B_i(\mathbf{X}) < H^{-1} \quad \text{Método Quase-Newton}$$

$$B_i(\mathbf{X}) = H^{-1} \quad \text{Método de Newton}$$

No Quase-Newton a inversa da hessiana na equação 5.18, é substituída da seguinte forma:

$$\mathbf{S}_i = -\mathbf{B}_i \nabla f_i \quad (5.19)$$

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \delta \mathbf{S}_i \quad (5.20)$$

Sendo \mathbf{B}_i equivalente à inversa da hessiana, esta é computada através da expressão abaixo. A expressão abaixo é um tipo de “updating” para o computo da matriz hessiana e utiliza informação do gradiente por intermédio dos pontos do processo iterativo anterior.

A construção da matriz \mathbf{B}_i faz-se da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_{i+1} = \mathbf{B}_i + \Delta \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i + \frac{\mathbf{d}_i \mathbf{d}_i^T}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_i} - \frac{\mathbf{B}_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^T \mathbf{B}_i^T}{\mathbf{g}_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{g}_i} \quad (5.21)$$

onde,

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i = \delta \mathbf{S}_i \quad (5.22)$$

e

$$\mathbf{g}_i = \nabla f_{i+1} - \nabla f_i \quad (5.23)$$

A equação apresentada acima pode ser escrita ainda, da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_{i+1} = \mathbf{B}_i + \Delta \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i + \frac{\delta \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^T}{\mathbf{S}_i^T \mathbf{g}_i} - \frac{\mathbf{B}_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^T \mathbf{B}_i^T}{\mathbf{g}_i^T \mathbf{B}_i \mathbf{g}_i} \quad (5.24)$$

Quando a aproximação da hessiana se dá através da expressão acima, equação 5.24, diz-se utilizar o método de Davidon-Fletcher-Powell. Isto se deve ao fato de este ter sido proposto por Davidon (1959) e estendido por Fletcher e Powell (1963). Existe ainda uma outra expressão para o computo da hessiana, caracterizando o método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno. Este, por sua vez, foi desenvolvido inicialmente por Broyden (1967). A equação abaixo apresenta a

expressão de “updating” do BFGS. Contudo este método não foi utilizado neste trabalho e a expressão 5.25 é apresentada apenas a título de informação, podendo-se adquirir maiores informações nas referências Mateus (1986), Rao (1996), Bazaraa (1979), Arora (1989), etc.

$$B_{i+1} = B_i + \left(1 + \frac{\mathbf{g}_i^T B_i \mathbf{g}_i}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_i} \right) \frac{\mathbf{d}_i \mathbf{d}_i^T}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_i} - \frac{\mathbf{d}_i \mathbf{g}_i^T B_i}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_i} - \frac{B_i \mathbf{g}_i \mathbf{d}_i^T}{\mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_i} \quad (5.25)$$

5.5 FUNÇÃO OBJETIVO

A função objetivo a ser otimizada foi montada a partir das funções massas dinâmicas (ver capítulo III). Essas foram obtidas experimentalmente e ajustadas aos modelos teóricos desenvolvidos no capítulo III. O resíduo estudado foi de suma importância durante o processo de convergência, principalmente no que diz respeito a convergência das anti-ressonâncias.

Os passos dados na construção da função objetivo foram:

- (i) Fez-se um programa para gerar uma FRF a partir do modelo teórico.
- (ii) Feito isso utiliza-se a FRF gerada a partir de um modelo e a experimental para se criar uma função erro.
- (iii) A função erro é criada a partir da diferença das duas FRF's, a experimental e a do modelo teórico.
- (iv) De posse desse erro, cria-se a norma do erro.
- (v) Essa norma é a função objetivo que deverá ser minimizada.

5.5.1 Construção da Função Objetivo

A construção da função a ser otimizada deu-se conforme a sequência abaixo:

$$E = M_{teo}(\Omega) - M_{exp}(\Omega) \quad (5.26)$$

A massa dinâmica experimental foi medida conforme explicado no capítulo anterior e de acordo com os critérios apresentados no mesmo. A teórica, $M_{teo}(\Omega)$, foi desenvolvida de acordo com a

modelagem apresentada no capítulo III, sendo nesta que se encontram as variáveis de projeto, isto é, os parâmetros a serem otimizados. Tais variáveis serão apresentadas logo a seguir.

A função a ser otimizada é a norma do erro E . O erro foi desmembrado em duas partes: uma parte real e outra imaginária, de sorte que, a função utilizada no processo de otimização é uma composição de duas funções, uma que representa a parte real da expressão 5.26 e outra representando a parte imaginária da mesma equação. De acordo com as expressões 5.27 e 5.28 respectivamente.

$$E^R = \Re\{E\} \quad (5.27)$$

$$E^I = \Im\{E\} \quad (5.28)$$

As funções geradas a partir das expressões 5.29 e 5.30 utilizam o conceito de norma. A norma utilizada foi a euclidiana e esta apresentou bons resultados, como serão apresentados posteriormente:

$$H^R(\Omega, \mathbf{X}) = \|E^R\| \quad (5.29)$$

$$H^I(\Omega, \mathbf{X}) = \|E^I\| \quad (5.30)$$

$$H(\Omega, \mathbf{X}) = H^R(\Omega, \mathbf{X}) + H^I(\Omega, \mathbf{X}) \quad (5.31)$$

Onde $H(\Omega, \mathbf{X})$ é a função otimizada, que, como pode ser verificado, está em função da frequência e do vetor de projeto \mathbf{X} , o qual contém as variáveis de projeto a serem otimizadas durante o processo de otimização. Tais variáveis são: o módulo da rigidez à flexão, o momento de inércia baricêntrico da massa de sintonia, os autovalores não amortecidos, os fatores de perda modal tanto do primeiro como do segundo modo e a excentricidade da massa de sintonia do PEDS, ou seja:

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10}]^T$$

$$x_1 = e, x_2 = J_c, x_3 = \Re\left\{\overline{EI}\right\}, x_4 = \Im\left\{\overline{EI}\right\}, x_5 = \lambda_r^1, x_6 = \lambda_r^2, x_7 = \eta_1, x_8 = \eta_2$$

$$\lambda^1 = \lambda_r^1 (1 + i\eta_1) \quad (5.32)$$

$$\lambda^2 = \lambda_r^2 (1 + i\eta_2) \quad (5.33)$$

$$EI = EI_r (1 + i\eta) \quad (5.34)$$

$$R = R_r + iR_i \quad (5.35)$$

As expressões 5.32, 5.33 e 5.34 foram colocadas a título de comodidade para o leitor, visto que a equação 5.34 consta no capítulo III e é citada com certa insistência ao longo do mesmo. As equações 5.32 e 5.33 são os autovalores amortecidos e faz-se necessária a seguinte observação. Não confundir λ e η , pois os dois primeiros são relativos ao amortecimento modal, enquanto que o outro refere-se ao fator de perda do material de que se constitui a viga utilizada no dispositivo de amostra.

Feita as devidas considerações mostrar-se-á um fluxograma de como se deu o processo de otimização.

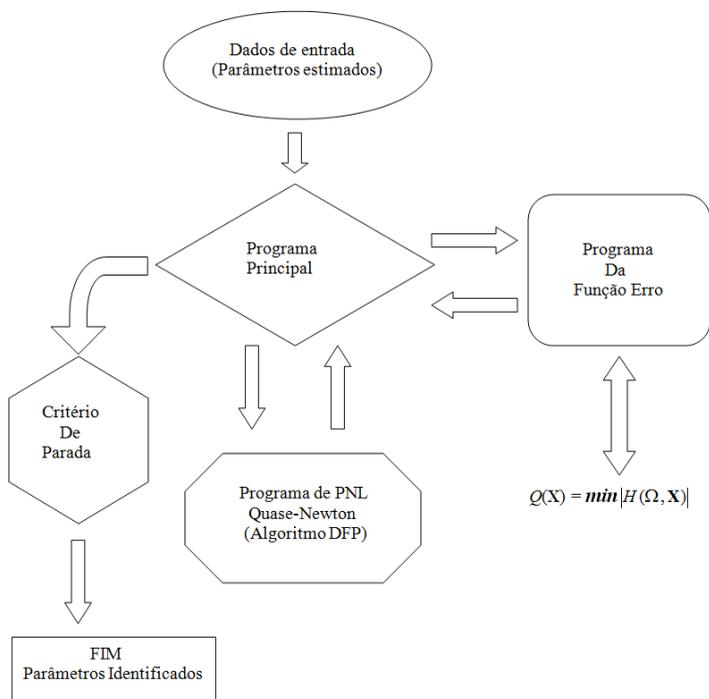
5.6 FLUXOGRAMA ESQUEMÁTICO DA IDENTIFICAÇÃO POR PNL

A identificação fez-se por intermédio de três programas. O primeiro é o programa principal responsável pela entradas de dados, definição de algumas constantes, gerenciamento dos outros dois programas e verificação do critério de erro de parada do programa de otimização. O segundo é um programa encarregado de gerar a função a ser minimizada, segundo o critério de parada estabelecido no programa principal. Para que isso ocorra, este chama um arquivo de dados contendo a FRF experimental, que é armazenada em uma variável; em seguida utilizam-se os dados de entrada (estimados) e algumas das constantes definidas para se gerar um problema de autovalores; este é resolvido, e utilizam-se os autovalores e autovetores encontrados na construção da FRF via o modelo teórico utilizado. De posse das duas FRF's, a experimental e a gerada pelo modelo teórico, cria-se a função

erro a ser minimizada. O ultimo programa da sequência citada é o que promove a minimização da função definida pela rotina anterior. Este por sua vez é um algoritmo de minimização irrestrita de programação não-linear (PNL), do tipo Quase-Newton (DFP) para uma função composta por varias variáveis.

Os resultados encontrados após a primeira iteração são enviados ao programa principal, o qual se encarrega de envia-los ao programa que gera uma nova função erro, a qual é submetida ao principal para uma avaliação do critério de parada. Se este é satisfeito, então os parâmetros encontrados são apresentados como solução final e promoveu-se a identificação. Caso contrário, estes retornam à rotina de minimização para uma nova procura e assim sucessivamente. A figura 5.3 apresenta um fluxograma de como se processou a identificação.

Figura 5.3 – Fluxograma dos programas utilizados na identificação de parâmetros do neutralizador



5.7 RESULTADOS OBTIDOS

Neste item far-se-á a apresentação dos resultados encontrados durante as simulações computacionais de identificação. Os resultados apresentados a seguir são relativos apenas as simulações do PED (neutralizador de Stockbridge **AS-2008** da **WETZEL**). Os resultados encontrados a partir das curvas dos outros protótipos construídos serão apresentados posteriormente em outro capítulo.

Os gráficos a seguir apresentam resultados obtidos durante as varias simulações utilizando os três métodos de modelagem apresentados no capítulo III. A comparação é feita em relação à curva experimental, obtida conforme descrição no capítulo IV. Gráficos da fase são também apresentados sendo os resultados discutidos posteriormente.

O gráfico apresentado na figuras 5.4 é relativo a comparação entre a massa dinâmica experimental e a identificada utilizando-se o MEF, posteriormente encontra-se a comparação das fases obtidas das massas dinâmicas citadas, conforme figura 5.5.

Figura 5.4 - Massa dinâmica experimental e identificada através do método de Elementos Finitos.

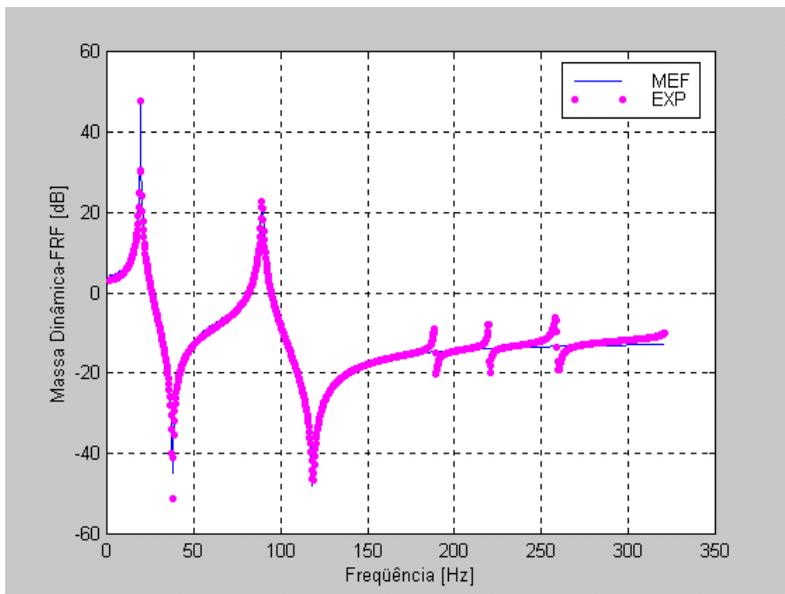


Figura 5.5 - fases das massas dinâmicas experimental e a identificada através do modelo de Elementos Finitos.

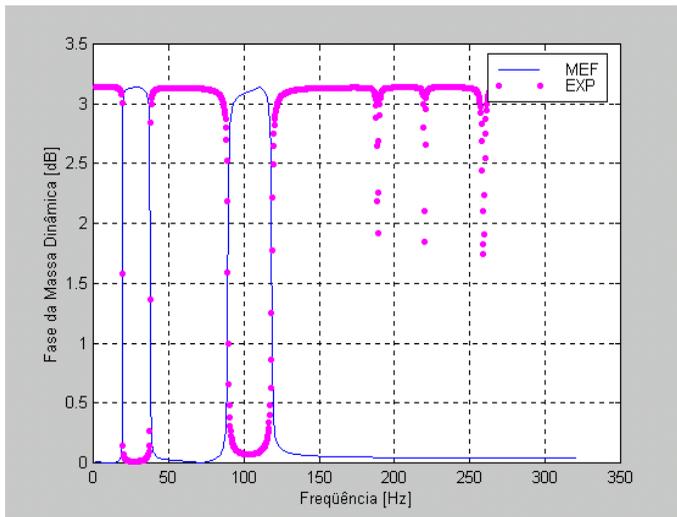


Figura 5.6 - Massa dinâmica experimental e identificada através do método dos Modos Assumidos.

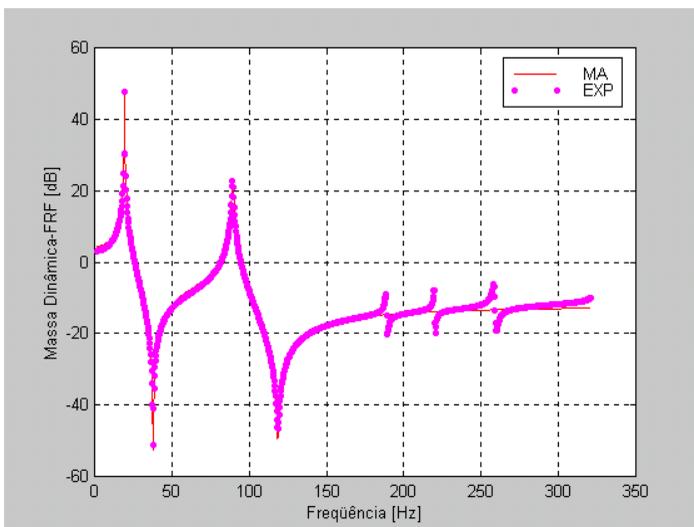


Figura 5.7 - Fases das massas dinâmicas experimental e a identificada através do método dos Modos Assumidos.

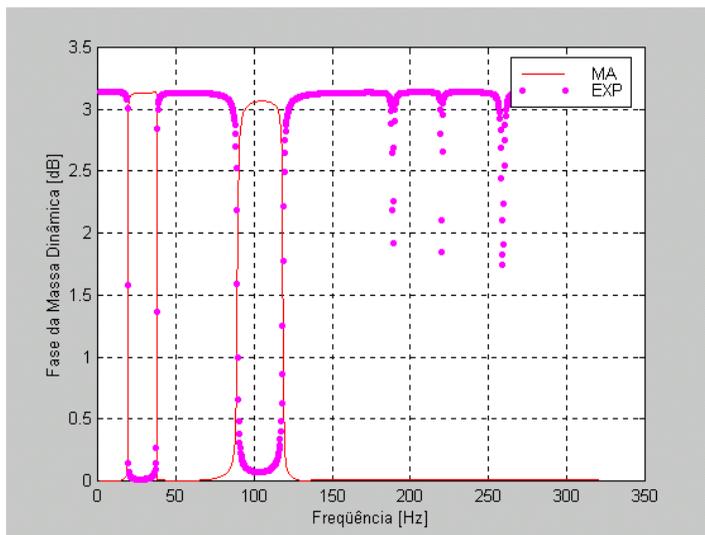


Figura 5.8 - Massa dinâmica experimental e identificada através do método de Dois Graus de Liberdade.

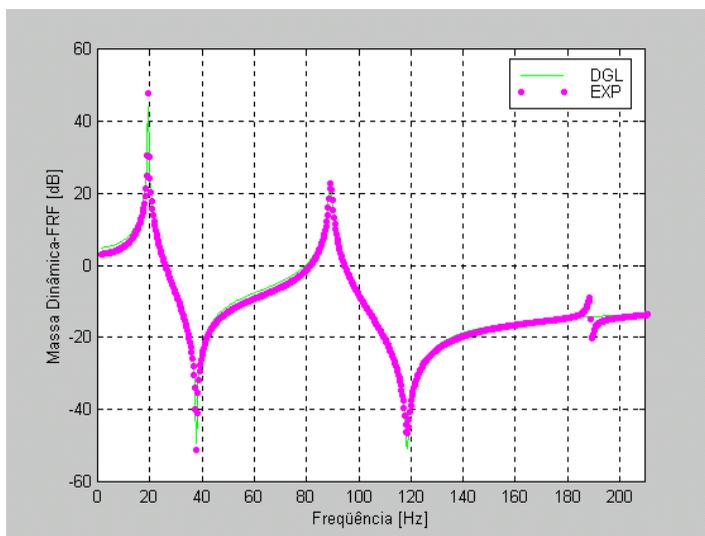


Figura 5.9 - Fases das massas dinâmicas experimental e a identificada através do método de Dois Graus de Liberdade.

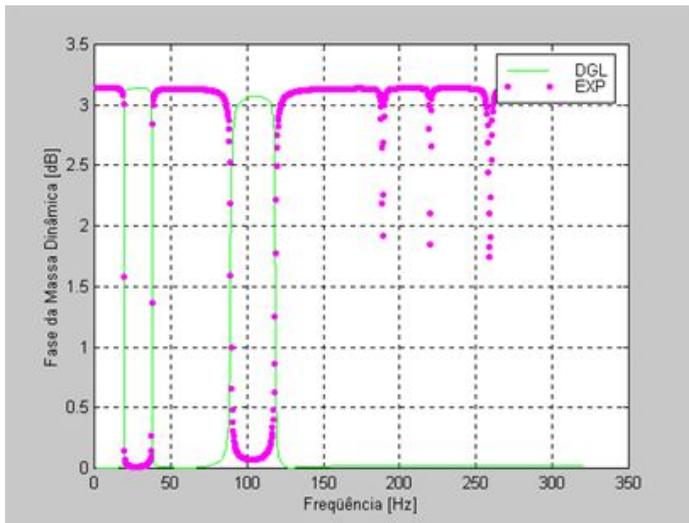


Figura 5.10 – Comparação entre as massas dinâmicas obtidas por identificação, utilizando-se os métodos de Elementos Finitos, Modos Assumidos e Dois Graus de Liberdade.

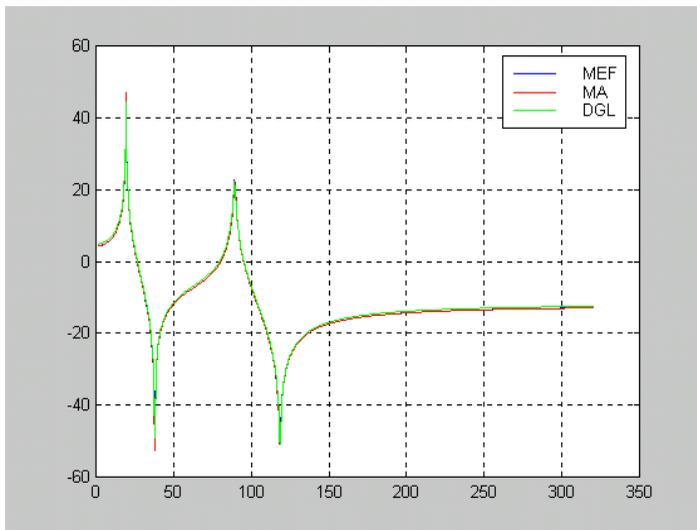


Figura 5.11 - Comparação dos resultados obtidos e a curva experimental, para o primeiro modo da massa dinâmica do PED (maior resolução).

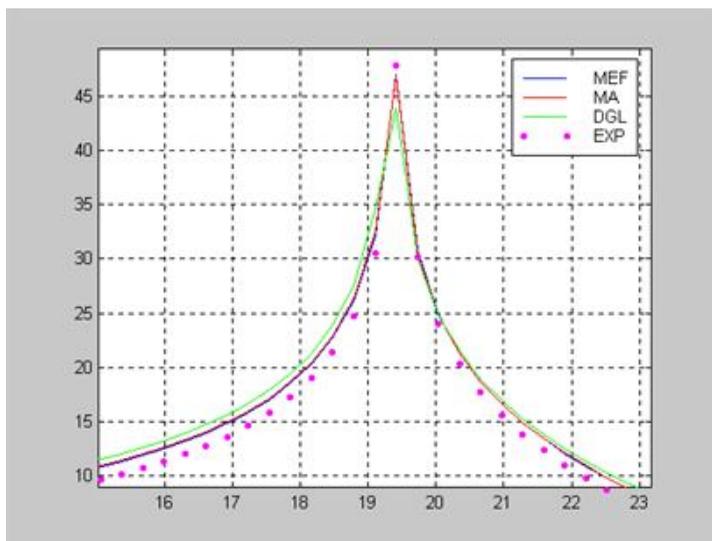
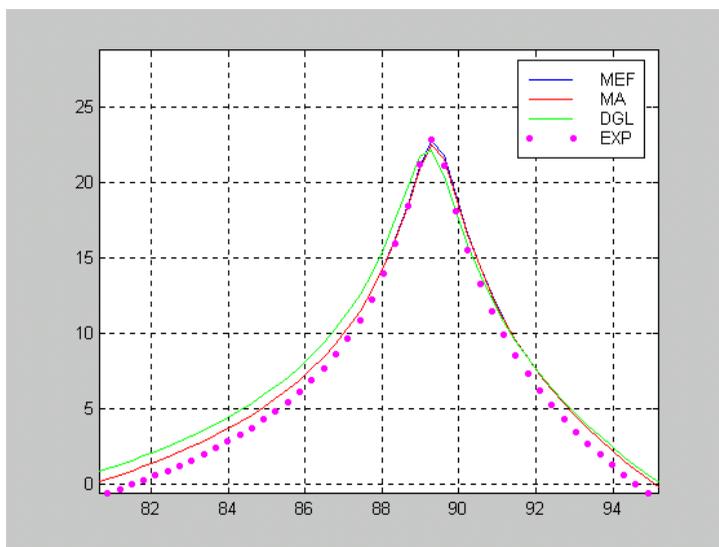


Figura 5.12 - Comparação dos resultados obtidos e a curva experimental, para o segundo modo da massa dinâmica do PED (maior resolução).



Dentre os métodos utilizados, o Método dos Elementos finitos (MEF) foi o que apresentou melhor resultado na identificação. Acredita-se que isto se deva ao fato de este apresentar uma melhor formação das matrizes de rigidez e massa, visto que tal método discretiza a viga em elementos, que serão responsáveis pela composição do resultado final. Contudo os métodos dos Modos Assumidos e de Dois graus de Liberdade apresentaram resultados muito bons. Algumas circunstâncias ocorridas durante o processo de identificação devem ser citadas:

- (i) Os parâmetros ‘ e ’ e ‘ J_c ’ que são a excentricidade e o momento de inércia, respectivamente, exigem uma boa estimativa como pontos de partida por parte do programa; se for possível mensurar tais parâmetros o programa se desenvolve de forma mais eficiente.
- (ii) As partes real e imaginária do módulo de rigidez a flexão são colocadas como variáveis independentes no problema, mas com o decorrer do processo de identificação percebeu-se que tais parâmetros estão acoplados, dificultando em muita das vezes o desenvolvimento de busca das variáveis satisfatórias, exigindo assim uma constante avaliação dos valores apresentados pelo algoritmo.
- (iii) Um fator importante para a convergência do programa foi a utilização dos resíduos, principalmente no ajuste das anti-ressonâncias. Um fato interessante a ser citado foi a dificuldade de ajuste dos modos, acredita-se este fato ter ocorrido devido ao acoplamento dos mesmos. Neste caso em questão, se percebeu um melhor desenvolvimento do MEF com relação aos outros dois métodos utilizados.

Abaixo tem-se uma tabela com os resultados obtidos na identificação da FRF do dispositivo. Grande importância dessa técnica está no fato de obter-se o fator de perda do cabo do neutralizador utilizado como PED, ou melhor o amortecimento “material”. Este por sua vez foi identificado com sucesso, pois, os valores encontrados foram muito baixos, comprovando suspeitas de este possuir fator de perda muito pequeno. Isso reforça a importância da técnica utilizada, bem como a necessidade de se mensurar adequadamente tal parâmetro, visto que as técnicas normalmente utilizadas não expressam tal variável, mascarada por outros mecanismos de dissipação. Como citado na

introdução, um dos objetivos de tal trabalho é o incentivo à formação de uma norma para a determinação de amortecimento material em cabos.

TABELA 5.1- Comparação entre os valores obtidos a partir dos três métodos utilizados na modelagem do PED e o ponto de partida utilizado.

	PONTOS DE PARTIDA	MEF	MODOS ASSUMIDOS	DGL
$Q(X)$	113,125	91,33735	90,63342	90,23352
$\Re\{\overline{EI}\} (N.m^2)$	4,5	3,61965	3,70793	3.73359
$\Im\{\overline{EI}\} (N.m^2)$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$1,98074 \cdot 10^{-2}$	$2,06995 \cdot 10^{-2}$	$2,02773 \cdot 10^{-2}$
$e (m)$	$-8.1356 \cdot 10^{-3}$	$-8,67097 \cdot 10^{-3}$	$-8,38257 \cdot 10^{-3}$	$-8,51703 \cdot 10^{-3}$
$J_c (kg.m^2)$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$0,37826 \cdot 10^{-3}$	$0,86445 \cdot 10^{-3}$	$0,38436 \cdot 10^{-3}$
η	0.006667	0,00547218	0,00558240	0,00543105
R_1	0,1	0,09343	0,03334	0,21378
R_2	0,1	0,00946	0,00335	0,00404
$\lambda_1 (Hz)$	19,4	19,38715	19,37754	19,33208
η_1	$0,2 \cdot 10^{-2}$	$0,49736 \cdot 10^{-2}$	$0,45572 \cdot 10^{-2}$	$0,25782 \cdot 10^{-2}$
$\lambda_2 (Hz)$	89,5	89,35496	89,35247	89,20109
η_2	$0,6 \cdot 10^{-2}$	$1,15543 \cdot 10^{-2}$	$1,18956 \cdot 10^{-2}$	$1,30726 \cdot 10^{-2}$

De posse desses valores tem-se então as matrizes de rigidez e massa identificadas e conjunto com os autovalores e autovetores do sistema utilizado. As matrizes podem ser obtidas de acordo com suas respectivas formulações desenvolvidas no capítulo III.

É importante salientar que qualquer reconstrução da FRF a partir dos valores acima, apresentados na Tabela 5.1, requer a utilização dos resíduos, pois os mesmos representam a influência de modos que foram truncados durante a experimentação. Como já citado anteriormente, estes estão acoplados, um influenciando sobre os outros.

Maiores comentários a cerca dos amortecimentos encontrados, tanto os modais como o amortecimento material e outros parâmetros identificados; serão explicitados no capítulo VII que foi reservado para as conclusões finais.

6 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

6.1 INTRODUÇÃO

Neste item far-se-á apresentação dos dados obtidos com a identificação de parâmetros do PED-P (é utilizado para indicar protótipos), que foram simulados de acordo com os métodos apresentados. Esses protótipos foram construídos com a finalidade de corroborar os resultados obtidos com o, modelos matemáticos (ver capítulo III).

Abaixo estão algumas das vantagens de se ter construído os protótipos para validação dos modelos teóricos:

- (i) Possuem características geométricas (eixo cilíndrico), inerciais (J_c , momento de inércia da massa de sintonia; e, excentricidade do centro de massa da massa de sintonia) e de material conhecidas. Serem pois como um bom calibre para a validação da teoria.
- (ii) O fator de perda do material é conhecido na literatura.

Os procedimentos experimentais utilizados para a obtenção das massas dinâmicas (FRF's) dos PED-P foram os mesmos apresentados na determinação experimental da massa dinâmica e utilizados para a experimentação do PED (modelo Stockbridge).

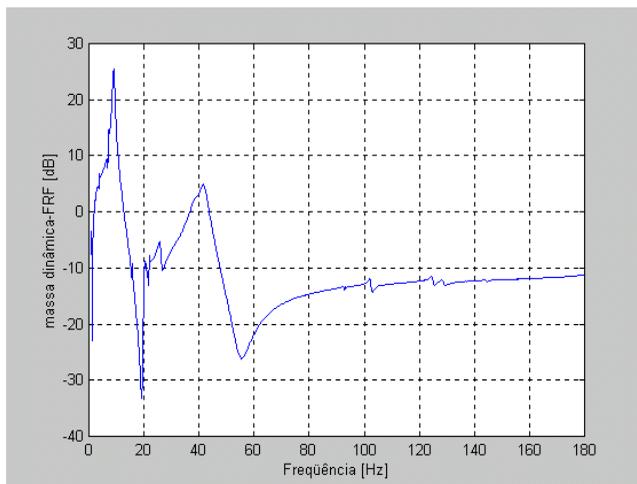
A seguir apresentam-se gráficos e figuras resultantes da etapa experimental dos PED-P.

6.2 CURVAS EXPERIMENTAIS DOS PROTÓTIPOS

Os módulos das FRF's, obtidas a partir da experimentação dos PED-P, estão apresentadas abaixo nas figuras 6.1, 6.2, 6.3. Essas FRF's foram utilizadas no processo de identificação e os resultados serão apresentados posteriormente nesse capítulo (ver capítulo V).

O gráfico abaixo (figura 6.1) foi obtido do protótipo com viga de nylon.

Figura 6.1 - Massa dinâmica (módulo) do PED-P, com a viga confeccionada de nylon.



Os gráficos a seguir referem-se as massas dinâmicas obtidas dos protótipos (PED-P), confeccionados com vigas de alumínio e aço (figuras 6.2 e 6.3). Todas com seção circular.

Figura 6.2 - Massa dinâmica do PED-P, com a viga confeccionada de alumínio.

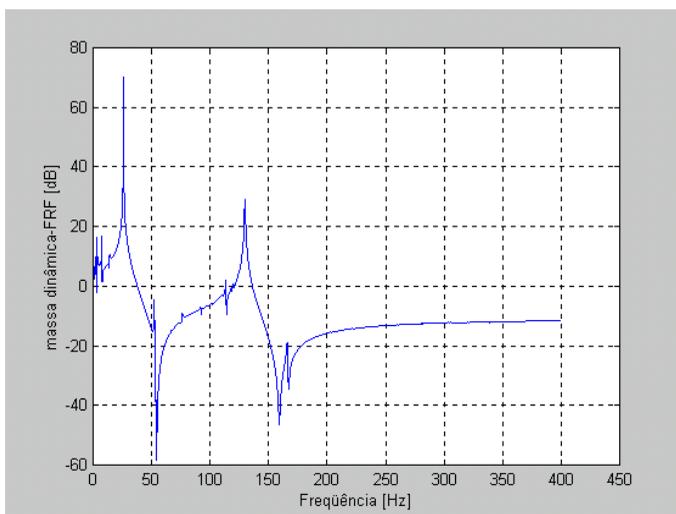
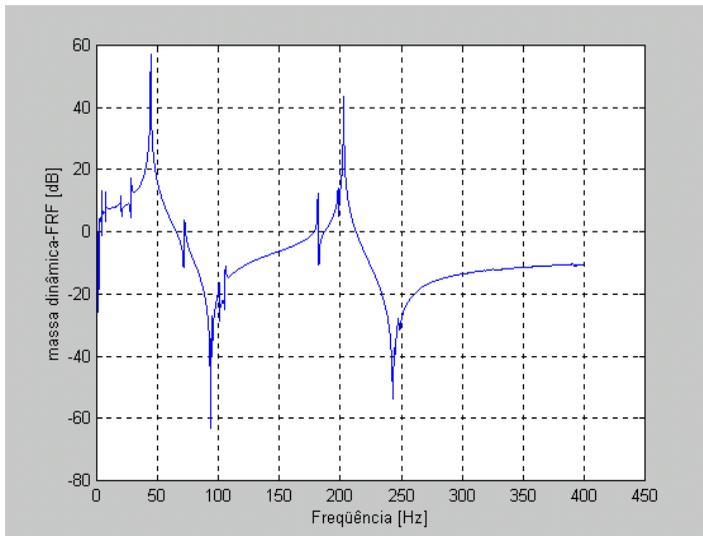


Figura 6.3 - Massa dinâmica do PED-P, com a viga confeccionada de aço.



As fotografias abaixo mostram protótipos utilizados na validação dos resultados (figuras 6.4 e 6.5). A primeira figura refere-se ao modelo de PED-P, com viga confeccionada de aço e apresentando detalhe por onde foi suspenso. A segunda fotografia é do modelo composto por viga de nylon e também apresenta detalhe da forma como foi suspenso.

Figura 6.4 – fotografia do PED-P, composto por viga de aço.

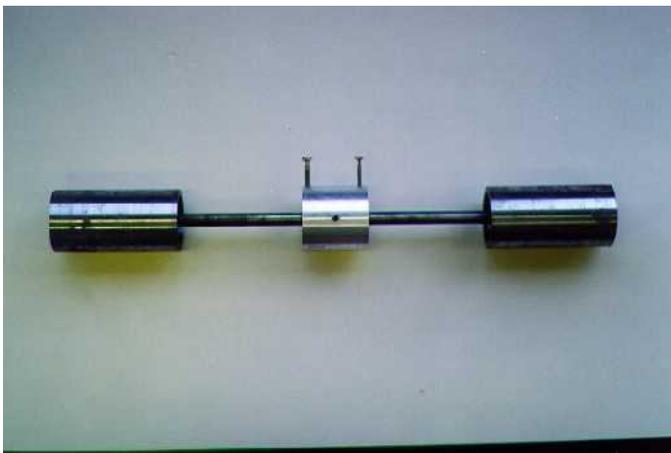
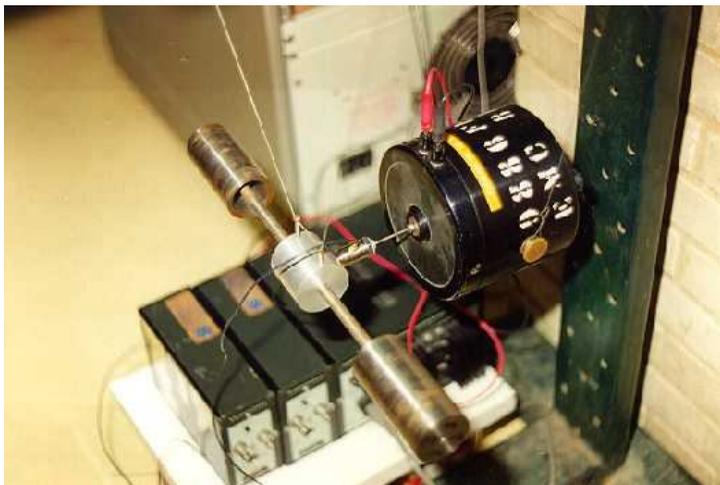


Figura 6.5 - fotografia do PED-P, composto por viga de nylon.



A figura 6.6 é uma fotografia do aparato experimental utilizado durante a fase de experimentação, na qual se obteve as FRF's (massas dinâmicas) utilizadas para a obtenção dos parâmetros. A descrição do sistema de medição já foi feita no capítulo IV.

Figura 6.6 - Fotografia da experimentação do protótipo com viga de aço, com detalhes do aparato utilizado.



6.3 CARACTERÍSTICAS MATERIAIS E GEOMÉTRICAS DOS PROTÓTIPOS

Os PED-P foram todos construídos com as seguintes características em comum: diâmetro da base e massa de sintonia confeccionada de aço, com as mesmas dimensões.

Os protótipos não apresentam os mesmos comprimentos de viga, devido a problemas de montagem dos mesmos. A viga confeccionada de nylon ficou com o menor comprimento. Esse fato ocorreu com a finalidade de se evitar uma deflexão estática grande, quando esta estava sujeita apenas à força peso da massa de sintonia.

Quanto aos protótipos com vigas de aço e alumínio, estes não apresentaram problemas de excessiva deflexão estática. Contudo o de alumínio apresentou problemas durante o encaixe por interferência, resultando em um comprimento de viga um pouco maior do que o do protótipo de aço. A seguir apresentar-se-ão os valores, medidos, calculados e estimados dos parâmetros de entrada no programa de identificação.

-Parâmetros do Nylon:

$l = 151,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	(comprimento da viga)
$m_b = 0,129272 \text{ kg}$	(massa da base)
$m_c = 0,6776972 \text{ kg}$	(massa de sintonia)
$I = 1512,804 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$	(segundo momento de área)
$E = 700 \text{ M Pa a } 2000 \text{ M Pa}$	(módulo de elasticidade)
$\rho = 1156,5763 \text{ kg/m}^3$	(densidade volumétrica)

-Parâmetros do Aço:

$l = 170,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	(comprimento da viga)
$m_b = 0,141866 \text{ kg}$	(massa da base)
$m_c = 0,685665 \text{ kg}$	(massa de sintonia)
$I = 490,87375 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$	(segundo momento de área)
$E = 207 \text{ G Pa}$	(módulo de elasticidade)
$\rho = 7863,1652 \text{ kg/m}^3$	(densidade volumétrica)

-Parâmetros do Alumínio:

$l = 173,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	(comprimento da viga)
$m_b = 0,1372587 \text{ kg}$	(massa da base)
$m_c = 0,681945 \text{ kg}$	(massa de sintonia)
$I = 490,87375 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$	(segundo momento de área)
$E = 70,0 \text{ G Pa}$	(módulo de elasticidade)

$$\rho = 2719,8827 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{densidade volumétrica})$$

Cabe a ainda seguinte observação: os valores do módulo de elasticidade foram estimados de acordo com tabelas para tais materiais e não mensurado por meio de ensaios mecânicos, como talvez fosse melhor.

O fator de perda material foi estimado em concordância com a literatura existente que atribui os seguintes valores para o nylon, aço e alumínio respectivamente:

$$\eta_{ny} \quad 0,03 \text{ a } 0,08 ,$$

$$\eta_{aco} \quad 2 \text{ a } 6 \cdot 10^{-4} ,$$

$$\eta_{al} \quad 1,0 \cdot 10^{-4} .$$

6.4 RESULTADOS DOS PROTÓTIPOS (PED-P)

Os resultados apresentados a seguir são decorrentes da identificação dos protótipos (PED-P) e far-se-á alguns comentários durante a exposição dos mesmos.

A identificação dos PED-P foi desenvolvida da mesma forma que no PED, sendo que houve algumas inconveniências durante o processo de minimização da função objetivo. Uma dessas, foi o baixo fator de perda material do o aço e do alumínio, dificultando assim a identificação dos mesmos. Outra situação dificultosa, se deu devido à pequena quantidade de pontos nas regiões de ressonância, dificultando assim a convergência do programa. Con tudo, far-se-á maiores comentários no final desse capítulo, com suas devidas considerações.

6.4.1 Resultado do Protótipo com Viga de Nylon.

Os gráficos a baixo figuras 6.7, 6.8 e 6.9 foram obtidos para o protótipo com viga de nylon. Este apresentou bons resultados. As figuras 6.8 e 6.9 apresentam uma maior resolução “zoom” do primeiro e do segundo modo para o modelo de elementos finitos.

Nota-se um excelente ajuste da curva regenerada (identificada) com a obtida experimentalmente.

Figura 6.7 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de nylon.

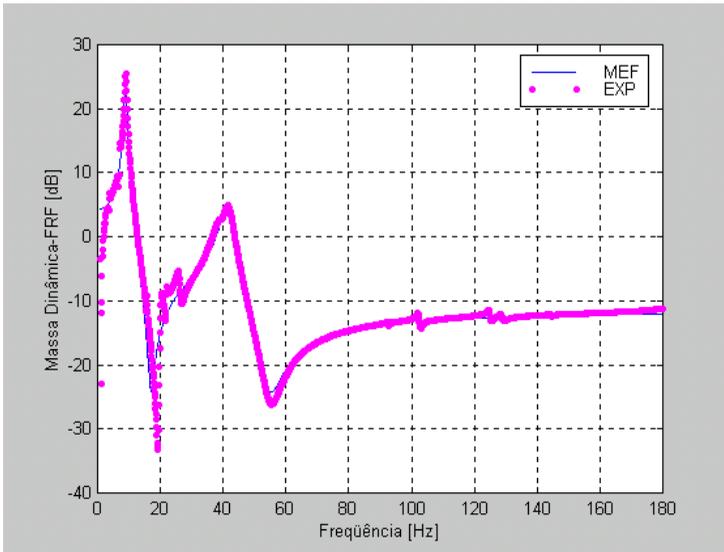


Figura 6.8 – Maior resolução do 1o modo “zoom” da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de nylon

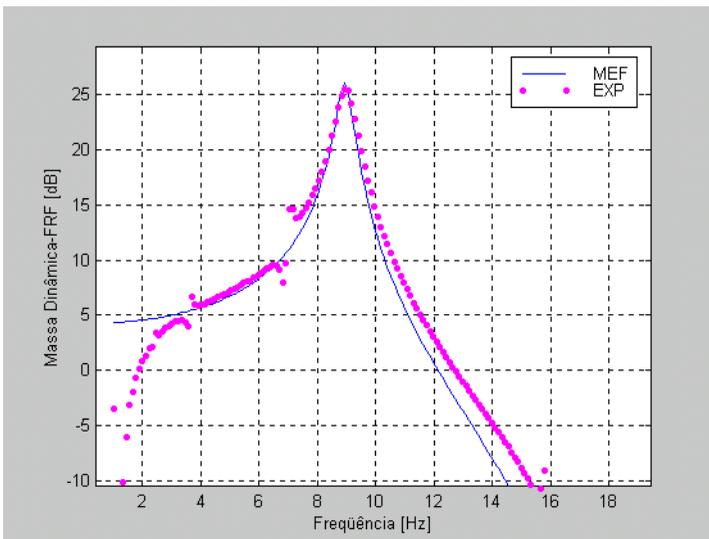
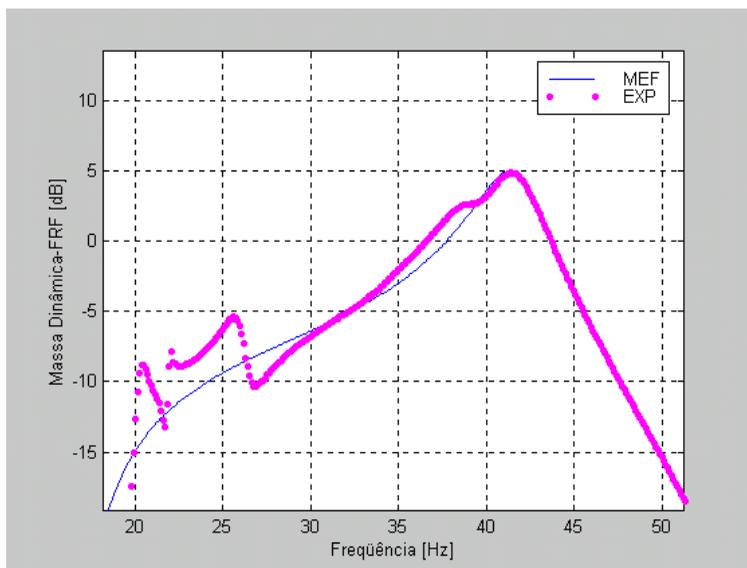


Figura 6.9 – Maior resolução do 2o modo “zoom” da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de nylon.



A seguir são apresentados os resultados obtidos via o método dos modos assumidos. Os resultados obtidos foram dentro da expectativa do método com uma pequena discordância para o momento de inércia. As figuras 6.10, 6.11 e 6.12 mostram os resultados obtidos com a simulação do método, sendo que as duas últimas curvas apresentadas mostram uma maior resolução do primeiro e segundo modos, tendo assim uma melhor visão dos ajustes efetuados.

Figura 6.10 - Massa dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos (MA), para o protótipo com viga de nylon.

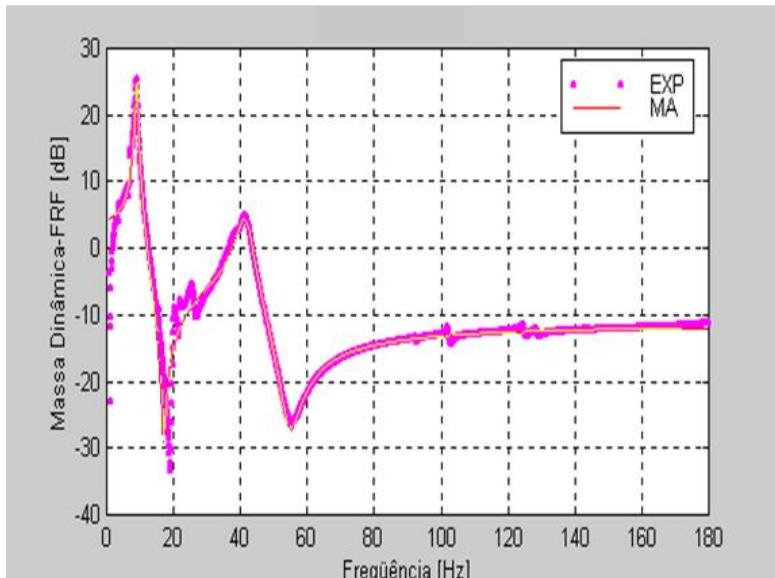


Figura 6.11 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos (MA), para o protótipo com viga de nylon.

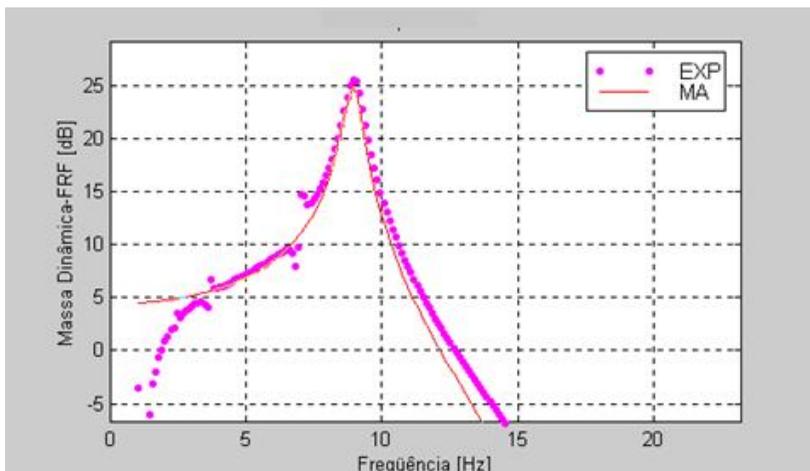
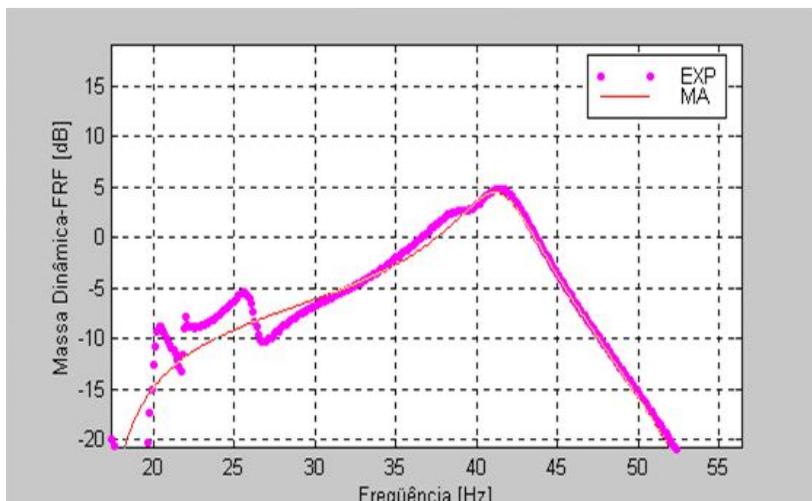


Figura 6.12 - Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos (MA), para o protótipo com viga de nylon.



Finalizando os resultados do nylon, apresentar-se-á os gráficos com ajustes obtidos pelo modelo de dois graus de liberdade. Apesar de este ser o mais simples dos três modelos utilizados na modelagem dos PED e PED-P, tem apresentado resultados muito bons, conforme pode ser verificado nas figuras 6.13, 6.14 e 6.15.

Figura 6.13 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de nylon.

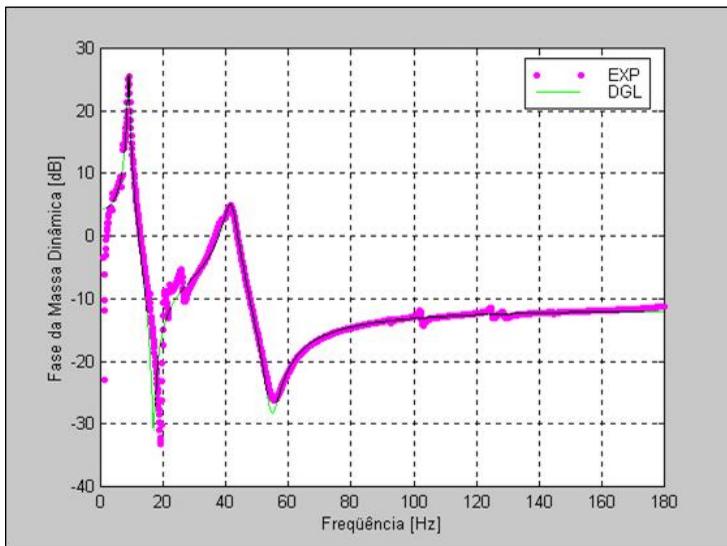


Figura 6.14 - Maior resolução do 1º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada via o modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de nylon.

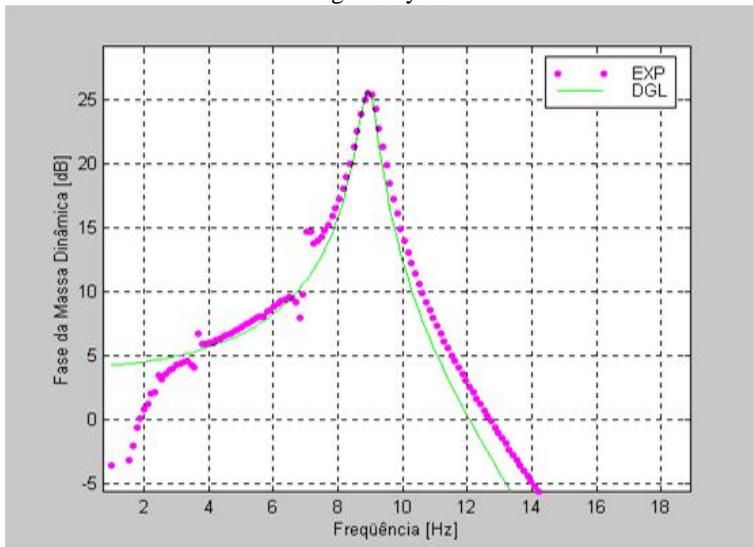
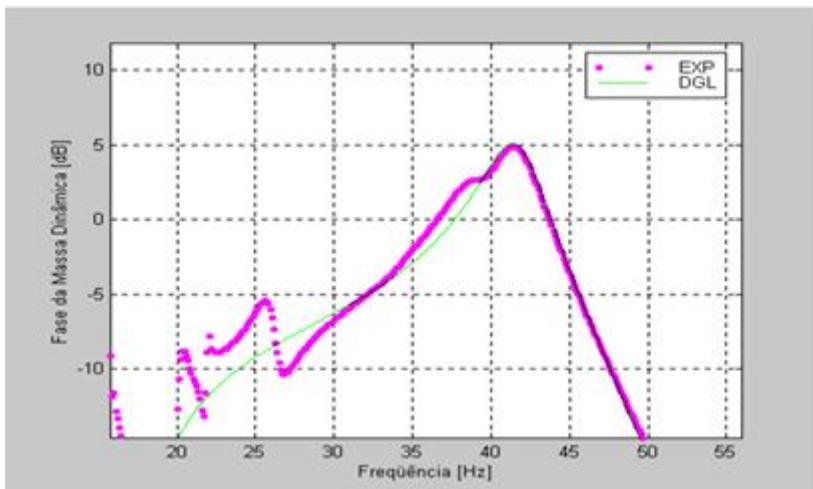


Figura 6.15 - Maior resolução do 2º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada via o modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de nylon.



A tabela 6.1 contém as variáveis de projeto, estimadas como pontos de partida, o valor de partida e o encontrado pela função objetivo $Q(\mathbf{X})$, e os resultados obtidos a partir dos valores estimados através dos modelos utilizados.

Tabela 6.1 - Comparação entre os valores obtidos a partir dos três métodos utilizados na modelagem do PEDS-P (protótipo) de nylon e as variáveis estimadas para o início da identificação.

	PONTOS DE PARTIDA	MEF	MODOS ASSUMIDOS	DGL
$Q(X)$	118,3426	96,23284	97,1856	96,34675
$\Re\{EI\} (N.m^2)$	3,4547	2,93857	2.928344	2.82275
$\Im\{EI\} (N.m^2)$	0,155461	0,223238	0,233077	0,23594
$e (m)$	$-18,62297.10^{-3}$	$-18,76372.10^{-3}$	$-17,30081.10^{-3}$	$-15,8506.10^{-3}$
$J_c (kg.m^2)$	$0,729448.10^{-3}$	$0,690286.10^{-3}$	$1,602895.10^{-3}$	$0,70164.10^{-3}$
η	0.045	0,07596842	0,0795934	0,0835851
R_1	0,1	0,0095325	0,0500830	0,0051
R_2	0,1	0,1096754	0,0143464	0,0147
$\lambda_1 (Hz)$	8,94	8,936245	8,94310	8,9332
η_1	$5,0.10^{-2}$	$6,0130343.10^{-2}$	$7,003034.10^{-2}$	$6.12354.10^{-2}$
$\lambda_2 (Hz)$	41,38	41,5798678	41,387005	41,60620
η_2	$6,0.10^{-2}$	$9,4688068.10^{-2}$	$10,468806.10^{-2}$	$9,45326.10^{-2}$

6.4.2 Resultados do Protótipo com Viga de Aço

Aqui serão apresentados os resultados decorrentes dos três modelos utilizados na identificação do protótipo de aço. O primeiro modelo a ser apresentado é o de elementos finitos, o qual apresentou resultados satisfatórios que podem ser verificados de acordo com as figuras 6.16, 6.17 e 6.18.

Figura 6.16 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de aço.

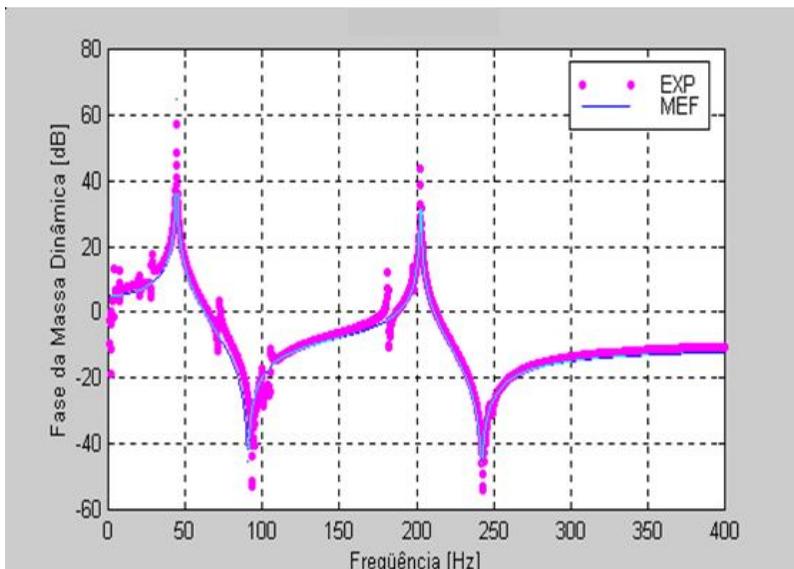


Figura 6.17 – Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de aço.

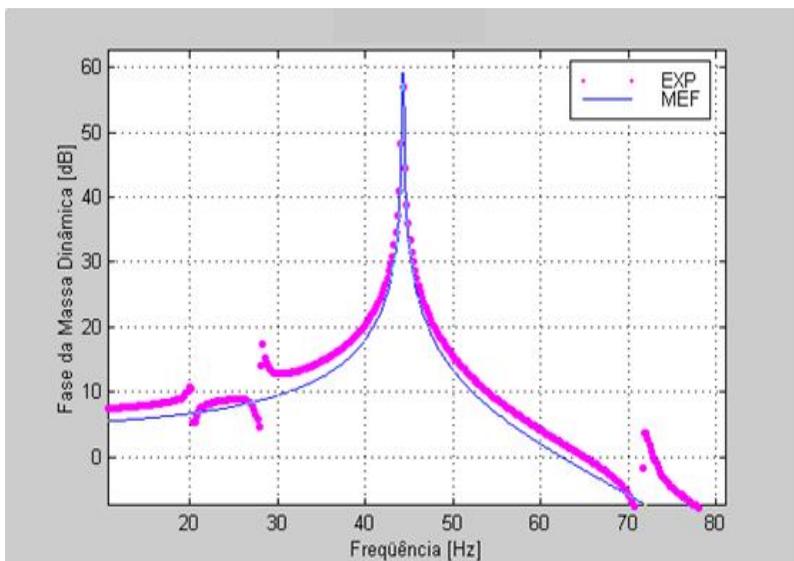
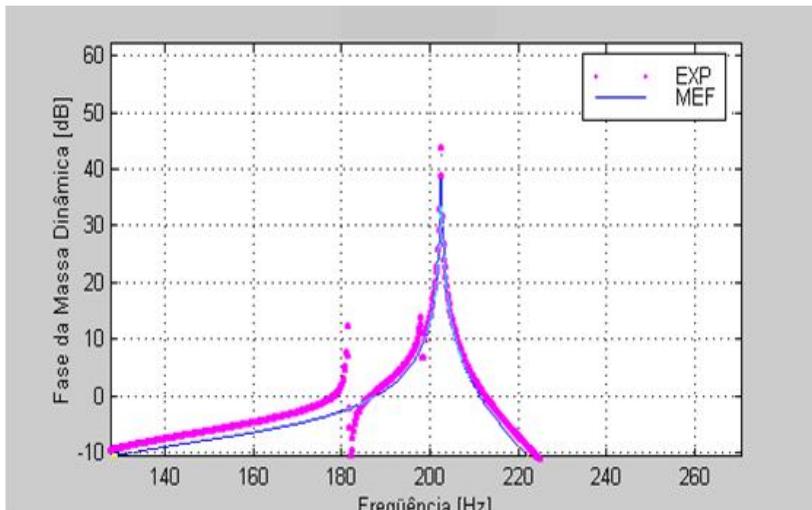


Figura 6.18 – Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de aço.



As figuras abaixo referem-se aos resultados obtidos com a modelagem pelo método dos modos assumidos. Novamente, mostra-se o resultado deste método em três gráficos, sendo dois deles um ampliação referentes ao primeiro e segundo modo.

Figura 6.19 - Massa dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de aço.

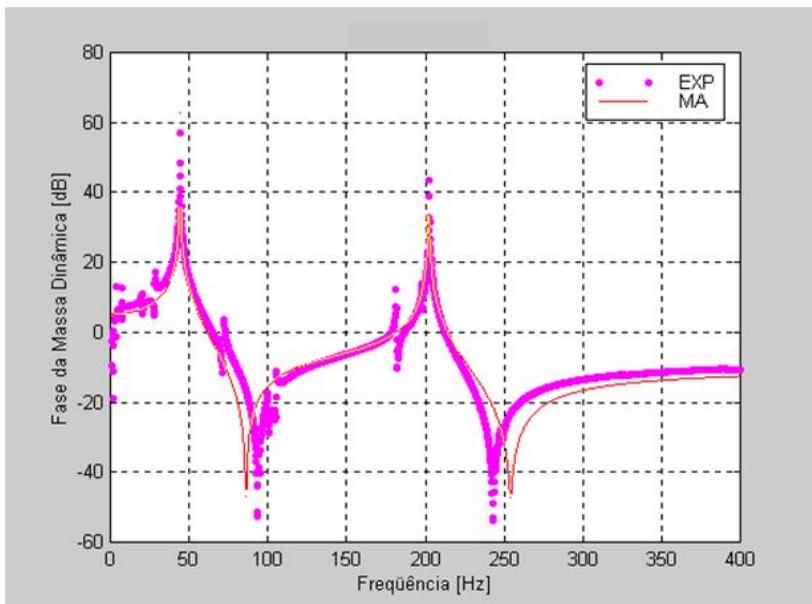


Figura 6.20 – Maior resolução do 1º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de aço.

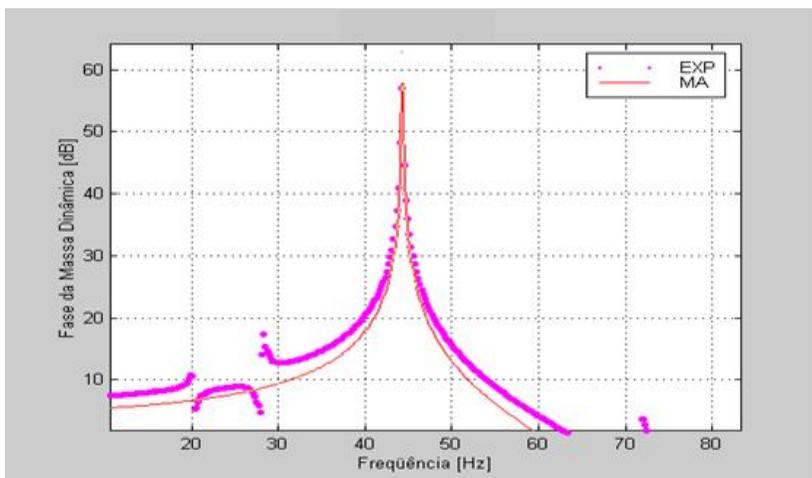
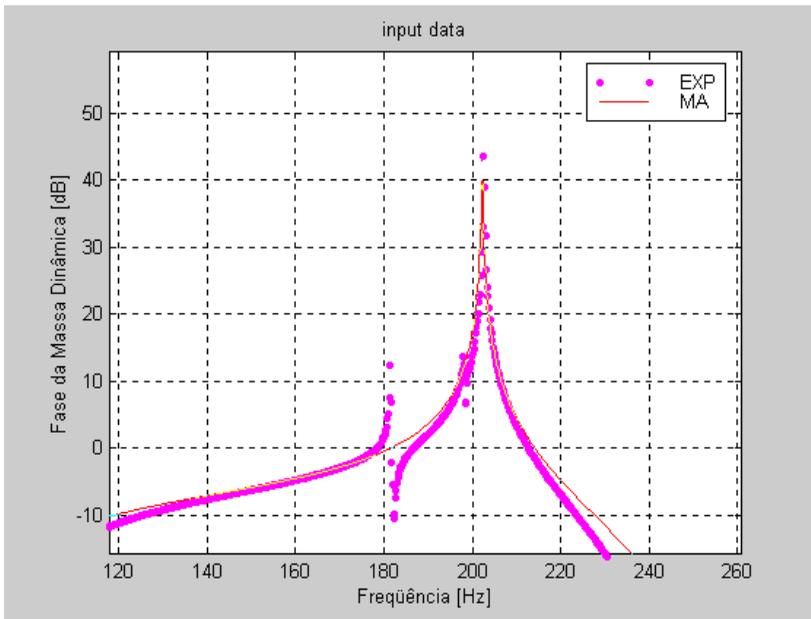


Figura 6.21 - Maior resolução do 2o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de aço.



Para o modelo de dois graus de liberdade tem-se os resultados abaixo conforme figuras 6.22, 6.23 e 6.24.

Figura 6.22 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de aço.

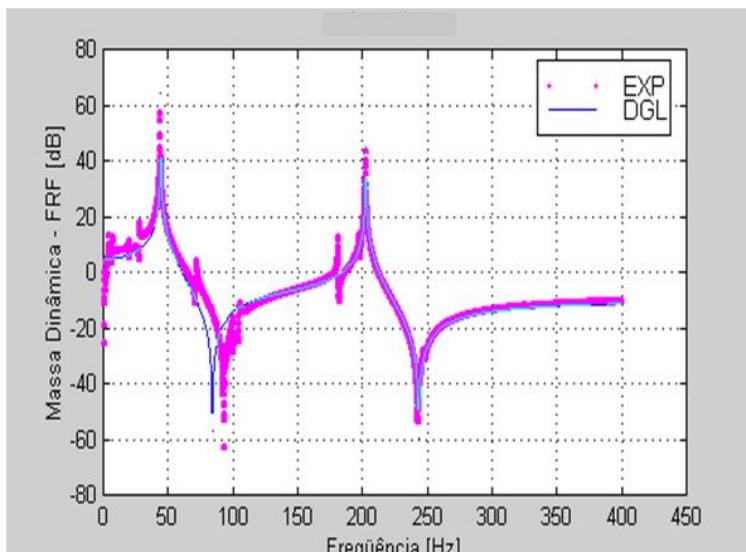


Figura 6.23 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de aço.

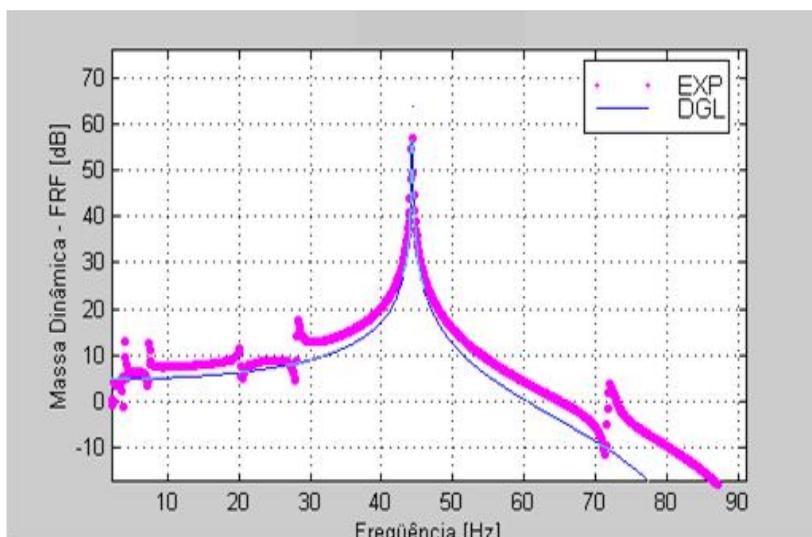
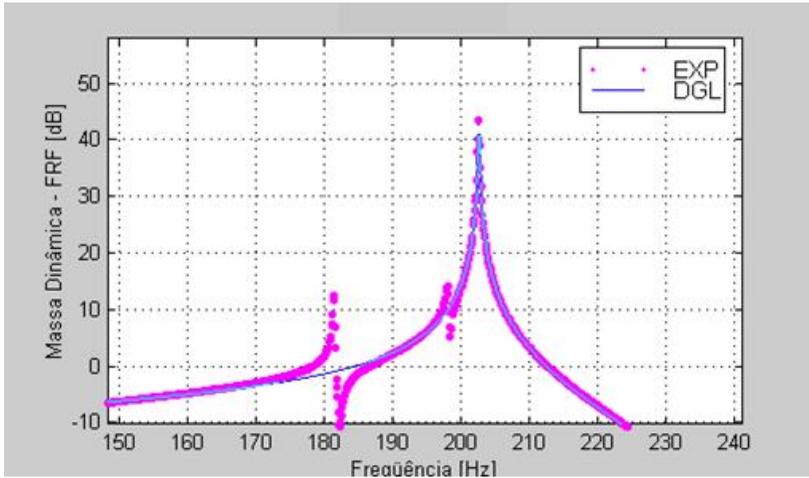


Figura 6.24 - Maior resolução do 1o modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de aço.



A tabela 6.2 contém as variáveis de projeto, estimadas como pontos de partida e os resultados obtidos a partir dos valores estimados através dos modelos utilizados para o protótipo com viga de aço.

Tabela 6.2 - Comparação entre os valores obtidos a partir dos três métodos utilizados na modelagem do PED-P (protótipo) de aço e as variáveis estimadas para o início da identificação.

	PONTOS DE PARTIDA	MEF	MODOS ASSUMIDOS	DGL
$Q(\mathbf{X})$	119,5743	105,4371	106,8342	104,3205
$\Re\{EI\} (N.m^2)$	104,5	98,2725	97,416324	97,9396786
$\Im\{EI\} (N.m^2)$	$31,35 \cdot 10^{-3}$	$32,6676 \cdot 10^{-3}$	$33,45367 \cdot 10^{-3}$	$29,162820 \cdot 10^{-3}$
$e (m)$	$-18,62297 \cdot 10^{-3}$	$-17,7219 \cdot 10^{-3}$	$-13,83651 \cdot 10^{-3}$	$-22,082304 \cdot 10^{-3}$
$J_c (kg.m^2)$	$0,729448 \cdot 10^{-3}$	$0,598242 \cdot 10^{-3}$	$0,86424 \cdot 10^{-3}$	$0,6146877 \cdot 10^{-3}$
η	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$3,324185 \cdot 10^{-4}$	$3,4340929 \cdot 10^{-4}$	$2,977628 \cdot 10^{-4}$
R_1	0,1	0,1294	0,06453	0,0464134
R_2	-0,1	0,0058	0,0025643	0,00193173
$\lambda_1 (Hz)$	44,3	44,3024	44,3254	44,31292
η_1	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$7,7925 \cdot 10^{-4}$	$6,54635 \cdot 10^{-4}$	$7,9666 \cdot 10^{-4}$
$\lambda_2 (Hz)$	202,5	202,5416	202,15523	202,59612
η_2	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$8,22538 \cdot 10^{-4}$	$8,3547 \cdot 10^{-4}$	$9,351026 \cdot 10^{-4}$

6.4.3 Resultados do Protótipo com Viga de Alumínio

Os resultados do protótipo de alumínio estão apresentados neste tópico. Este mais uma vez, teve seus parâmetros identificados através dos modelos apresentados no capítulo III.

Os gráficos logo a seguir referem-se aos resultados obtidos via método dos elementos finitos, de acordo com as figuras 6.25, 6.26 e 6.27.

Figura 6.25 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de alumínio.

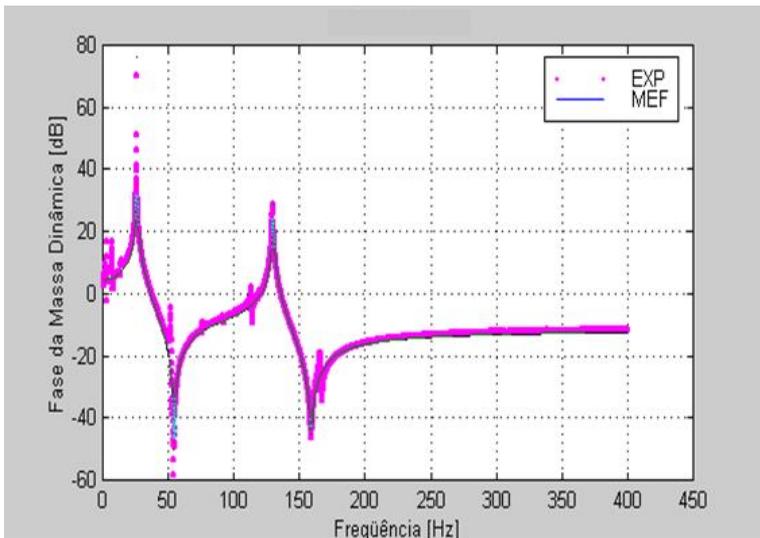


Figura 6.26 - Maior resolução do 1º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de alumínio.

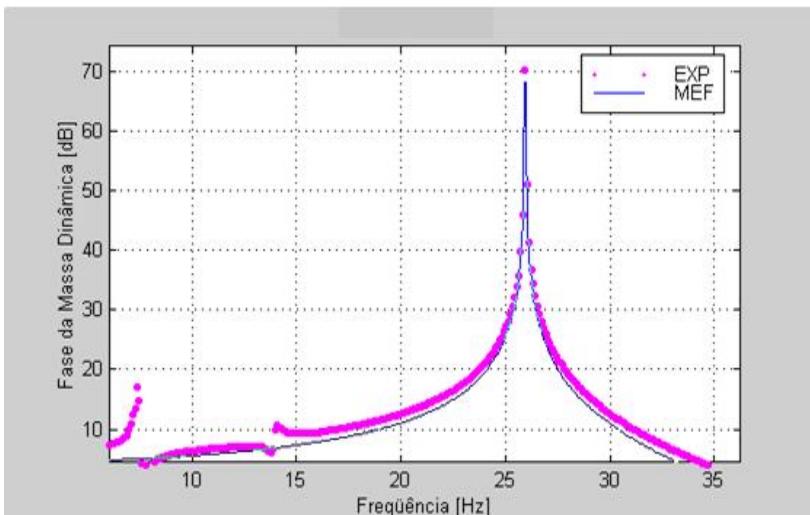
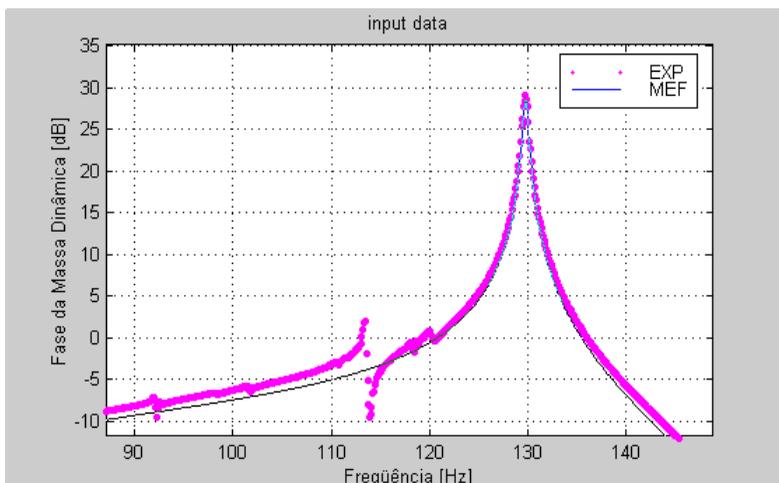


Figura 6.27 - Maior resolução do 2º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através do MEF, para o protótipo com viga de alumínio.



Os gráficos 6.28, 6.29 e 6.30 logo abaixo são referentes a identificação com o método dos modos assumidos.

Figura 6.28 - Massa dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de alumínio.

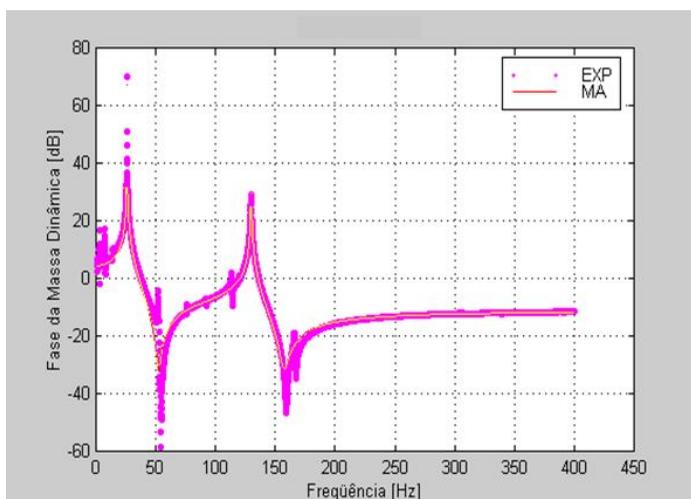


Figura 6.29 - Maior resolução do 1º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de alumínio.

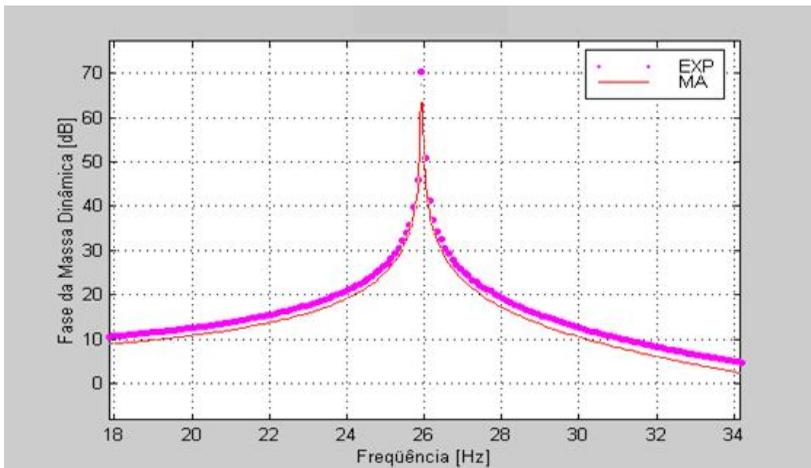
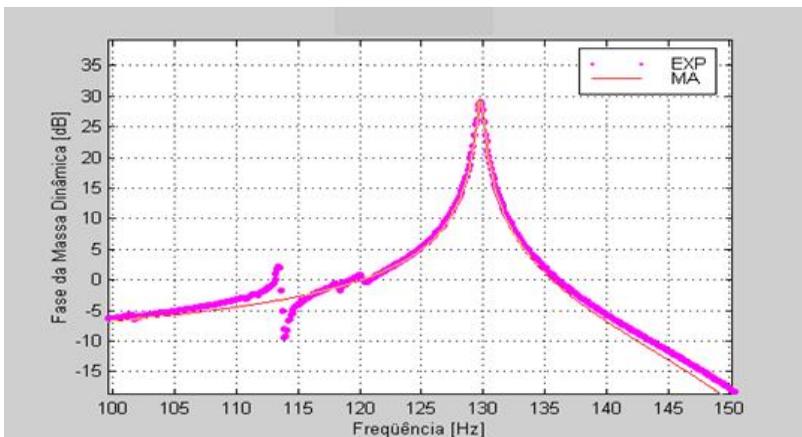


Figura 6.30 - Maior resolução do 2º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada através dos modos assumidos, para o protótipo com viga de alumínio.



Os gráficos apresentados abaixo foram obtidos através do modelo de dois graus de liberdade, e os resultados estão nas figuras 6.31, 6.32 e 6.33.

Figura 6.31 - Massa dinâmica experimental e a identificada através do modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de alumínio.

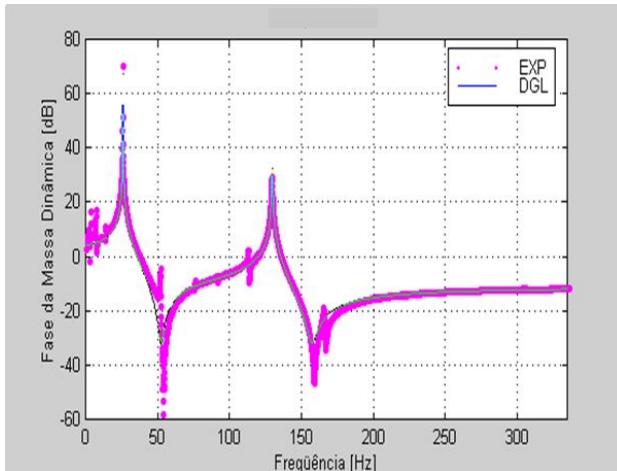


Figura 6.32 - Maior resolução do 1º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada via o modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de alumínio.

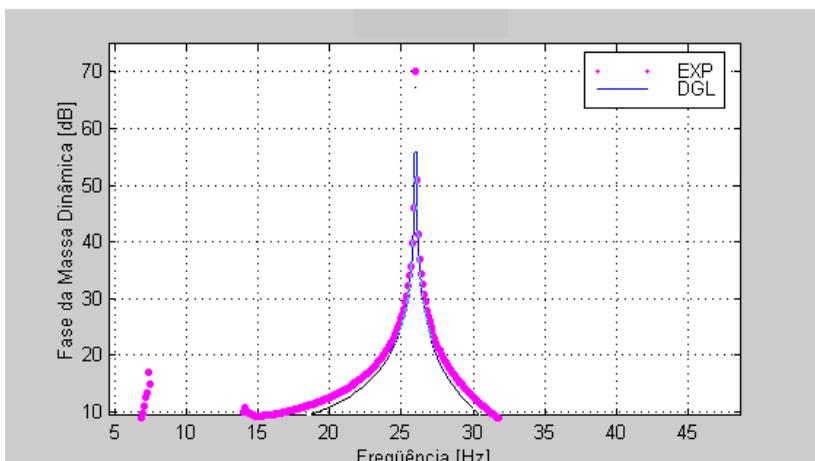
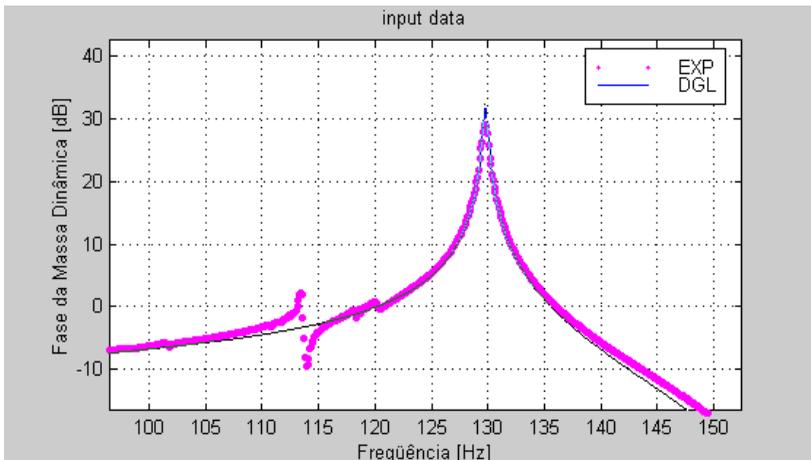


Figura 6.33 - Maior resolução do 1º modo da massa da dinâmica experimental e a identificada via o modelo de dois graus de liberdade, para o protótipo com viga de alumínio.



A tabela 6.3 contém as variáveis de projeto, estimadas como pontos de partida e os resultados obtidos a partir dos valores estimados através dos modelos utilizados para o protótipo com viga de alumínio.

Tabela 6.3 - Comparação entre os valores obtidos a partir dos três métodos utilizados na modelagem do PED-P (protótipo) de alumínio e as variáveis estimadas para o início da identificação.

	PONTOS DE PARTIDA	MEF	MODOS ASSUMIDOS	DGL
$Q(X)$	121,04326	105,6518	106,8342	104,3205
$\Re\{EI\} (N.m^2)$	34,3	34,34567	34,0352	33,9675
$\Im\{EI\} (N.m^2)$	$34,3 \cdot 10^{-4}$	$45,45678 \cdot 10^{-4}$	$33,2872 \cdot 10^{-4}$	$33,65430 \cdot 10^{-4}$
$e (m)$	$-18,62297 \cdot 10^{-3}$	$-16,65389 \cdot 10^{-3}$	$-10,51432 \cdot 10^{-3}$	$-17,3562 \cdot 10^{-3}$
$J_c (kg.m^2)$	$0,729448 \cdot 10^{-3}$	$0,634372 \cdot 10^{-3}$	$0,573382 \cdot 10^{-3}$	$0,66259 \cdot 10^{-3}$
η	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,3235083 \cdot 10^{-4}$	$0,9780227 \cdot 10^{-4}$	$0,9907794 \cdot 10^{-4}$
R_1	0,1	0,0182	0,0099342	0,05319
R_2	-0,1	-0,0025	-0,0031523	-0,004532
$\lambda_1 (Hz)$	25,9	25,9447	25,941354	25,94219
η_1	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$1,39413 \cdot 10^{-5}$	$1,0542 \cdot 10^{-5}$	$1,09567 \cdot 10^{-4}$
$\lambda_2 (Hz)$	129,8	129,87223	129,8345	129,86454
η_2	$6,0 \cdot 10^{-5}$	$3,90215 \cdot 10^{-5}$	$8,3547 \cdot 10^{-4}$	$2,894567 \cdot 10^{-5}$

Os valores da rigidez a flexão (EI_r), obtidos via identificação dos materiais utilizados na composição das vigas dos PED-P (protótipos), são utilizados para calcular o módulo de elasticidade dos mesmos e estão apresentados abaixo na tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Valores obtidos das rigidez dos materiais utilizados nos protótipos.

	Módulo de Elasticidade (MEF)	Módulo de Elasticidade (MA)	Módulo de Elasticidade (DGL)
NYLON	$1,942239 \cdot 10^9$	$1,9354803 \cdot 10^9$	$1,86568832 \cdot 10^9$
AÇO	$200,1991347 \cdot 10^9$	$198,4549387 \cdot 10^9$	$199,52111 \cdot 10^9$
ALUMÍNIO	$69,968438 \cdot 10^9$	$69,335954 \cdot 10^9$	$68,559991 \cdot 10^9$

Alguns comentários são necessários:

Durante a identificação do protótipo de nylon verificou-se uma certa dificuldade no ajuste do primeiro e segundo modos. Acredita-se que esta dificuldade se deve ao fato de o material possuir o módulo de elasticidade e o fator de perda material variando na frequência, o que não ocorre para o aço e alumínio.

Para o caso do aço e do alumínio, o baixo fator de perda contribuiu para a dificuldade do ajuste e obtenção dos parâmetros.

De um modo geral, entretanto, os resultados foram muito bons, inclusive o do modelo com dois graus de liberdade.

Talvez a qualidade desse modelo simples possa ser atribuída, de um lado, à predominância dos primeiro e segundo modos e, de outro ao uso dos resíduos.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 COMENTÁRIOS FINAIS

Três modelos matemáticos de PED (Pêndulo Elástico Duplo) foram elaborados e testados: dois graus de liberdade, n graus de liberdade método dos modos assumidos e método de elementos finitos.

O principal objetivo, que era a identificação não-linear do fator de perda e da rigidez equivalente da secção reta da parte elástica do modelo, foi atingido a contento.

No caso da parte elástica ser complexa, do ponto de vista construtivo, como nos cabos trançados e do tipo ACSR, esta técnica permite a determinação realística da rigidez equivalente e o fator de perda. Isto significa um avanço considerável em relação ao procedimento comum (e errado!) de se medir o decremento logarítmico de tais cabos.

No caso do PED-P, onde a “viga” elástica tem geometria simples, o procedimento permite a determinação do fator de perda do material, quer seja metálico ou não metálico. Permite ainda a determinação do módulo de elasticidade.

Mais ainda, os modelos acima, bem como os testes podem ser modificados para se levar em conta materiais do tipo viscoelástico, cujo módulo de elasticidade e fator de perda são largamente dependentes da frequência.

7.2 CONCLUSÕES

A técnica de otimização não linear Quase-Newton mostrou ser bastante eficaz no processo de identificação. Esta apresentou um tempo computacional razoável na procura do ótimo. Entretanto algumas conclusões foram tiradas acerca do método:

- i) É muito importante uma boa estimativa do ponto de partida ser utilizado pelo algoritmo.
- ii) A otimização não-linear não garante o ótimo global da função, podendo haver outros pontos que satisfaçam o critério de parada.
- iii) Acredita-se que a função seja multimodal, caracterizando vários mínimos.

Para os modelos matemáticos, percebeu-se que estes representaram muito bem a estrutura física em questão, mesmo para o caso do nylon que possui fator de perda variando com a frequência.

Durante a identificação do momento de inércia e da excentricidade percebeu-se que é interessante que estes parâmetros sejam estimados com um certo cuidado, pois os mesmos podem dificultar a convergência do algoritmo.

A teoria de resíduos foi de fundamental importância na identificação dos parâmetros, visto que, esta substitui a influência de modos que foram truncados, mas que continuam a influenciar a faixa de interesse. Importância deste se fez principalmente na convergência das antirressonâncias.

A identificação do módulo de rigidez à flexão foi muito satisfatória, apresentando resultados muito concernentes com a literatura conhecida. Em face de tal acontecimento, conseqüentemente obteve-se o módulo de elasticidade e fator de perda material que foram muito próximos dos valores conhecidos, principalmente para o caso dos PED-P (protótipos).

7.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Utilizar outras técnicas de otimização não-linear para posterior comparação a utilizada neste trabalho:

Tendo em vista a função ser aparentemente multimodal, aconselha-se implementar técnicas de procura global, como por exemplo algoritmo genéticos ou formas híbridas como otimização não linear, redes neurais ou outras técnicas de programação evolucionária.

Implementar um modelo de elementos finitos de viga com três graus de liberdade por nó.

Desenvolver um modelo de fator de perda e de módulo de elasticidade variando com a frequência, com intenção de avaliar o seu comportamento ao longo do mesmo.

REFERÊNCIAS

ALLEMANG, R. J., BROWN, D. L., **Experimental Modal Analysis and Dynamic component Synthesis**, Technical Report, vol 03, Modal Parameter Estimation, 1987, University of Cincinnati, Ohio.

ALVARENGA, E. S., **Otimização de Neutralizadores Dinâmicos. Tipo Pendular**, Dissertação de Mestrado, 1994, UFSC, Santa Catarina Brasil.

ALVES, M. K., **Apostila do Curso de Otimização**, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 1996, UFSC, Santa Catarina, Brasil.

ARORA, J. S., **Introduction to Optimum Design**, 1989, Mcgraw-Hill Publishing Company New York.

BATHE, J., **Finite Element Proceedins in Engineering**, 1982, Pentice-Hall Inc.

BAVASTRI, C. A., ESPÍNDOLA, J. J., **Modal Reduction of Vibration by Dynamic Neutralizers in Frequency Range - Generalized Approach**, IV Diname, 1995, Caxambú, Minas Gerais, Brasil.

BAZARAA, M. S., SHETTY, C. M., **Nonlinear Programming**, 1979, John Wiley & Sons, New York.

BÉLIVEAU, J., **Identification of Viscous Damping in Structures From Modal Information**, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, june 1976, pp. 335-339.

BERANEK, L. L., **Noise and Vibration Control**, 1988, Published by Institute of Noise Control Engineering.

BOWLES, R. L., **System Identification Computational Considerations**, System Identification of Vibration Structures, Mathematical Models From Test Data, 1972, pp. 23-43, ASME.

CLOUGH, R. W., PENZIEN, J., **Dynamics of Structures**, 1982, McGraw-Hill, New York.

CRAIG, R. R., **Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods**, 1981, John Wiley & Sons, New York.

CHEN, S. Y., JU, M. S., TSUEI, G. Y., **Estimation of Mass, Stiffness and Damping Matrices from Frequency Response Functions**, Transactions of the ASME, Journal of Vibrations and Acoustics, January 1996, vol. 118, pp. 78-82 .

CHU, F. H., WANG, B. P., **Experimental Determination of Damping in Materials and Structures**, Damping Applications for Vibration Control, 1980, AMD – vol. 38, pp. 113-122, ASME.

DI TARANTO, R. A., **Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-length Beams**, Journal of Applied Mechanics, ASME, December 1965, pp. 881-886.

DEN HARTOG, J. P., Mechanical Vibrations, 1956, McGraw-Hill, New York.

ESPÍNDOLA, J. J., **Apostila de Fundamentos de Vibrações**, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 1985, UFSC, Santa Catarina.

ESPÍNDOLA, J. J., **Apostila de Dinâmica de Estruturas**, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 1986, UFSC, Santa Catarina.

ESPÍNDOLA, J. J., **Apostila de Controle de Vibrações**, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 1987, UFSC, Santa Catarina.

ESPÍNDOLA, J. J., SILVA, H. P., **Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers: A General Approach**, 10th International Modal Analysis Conference, 1992, pp. 1367-1373, San Diego, California.

ESPÍNDOLA, J. J., BAVASTRI, C. A., **Reduction of Vibrations in Complex Structures with Viscoelastic Neutralizers - A Generalized Approach**, ASME Design Engineering Technical Conferences, 1995, Boston.

ESPÍNDOLA, J. J., BAVASTRI, C. A., **Reduction of Vibrations in Complex Structures with Viscoelastic Neutralizers - A Generalized Approach and a Physical Realization**, Proceeding of DETC'97/VIB-4187, ASME Design Engineering Technical Conferences, 1997, Sacramento, California.

ESPÍNDOLA, J. J., BAVASTRI, C. A., **An Efficient Definition of Transmissibility for a General Equipment Isolation Systems**, Proceeding of DETC'97/VIB-4187, ASME Design Engineering Technical Conferences, 1997, Sacramento, California.

ESPÍNDOLA, J. J., BAVASTRI, C. A., **Viscoelastic Neutralizers in Vibration Abatement: A Nonlinear Optimization Approach**, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol. XIX, NO 02, março de 1997, pp. 154-163.

ESPÍNDOLA, J. J., BAVASTRI, C. A., TEIXEIRA, P. H., **A Hybrid Algorithm to Compute the Optimal Parameters of a System of Viscoelastic Vibration Neutralisers in a Frequency Band**, MOVIC'98, August 1998, pp.577-582, ETH Zurich, Switzerland.

ESPÍNDOLA, J. J., FLOODY, S. E., **On the Modeling of Metal-elastomer Composite Structures: A Finite Element Method Approach**, PACAM VI/DINAME'99, 1999, Vol. 8, pp. 1335-13338, Rio de Janeiro, Brasil.

EWINS, D. J., **Modal Testing: Theory and Practice**, 1984, Research Studies Press LTD., England, John Wiley & Sons, New York.

FABUNMI, J., CHANG, P., VORWALD, J., **Damping Matrix Identification Using the Spectral Basis Technique**, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Stress, and Reliability in Design, July 1988, vol. 110, pp. 332-337.

FANCELLO, E. A., MENDONÇA, P. T. R., **Apostila do Curso de Elementos Finitos, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**, 1997, UFSC, Santa Catarina.

FLOODY, S. E., **Otimização de Neutralizadores de Vibração: Uma Aproximação Usando a Técnica de Elementos Finitos**, Projeto de Tese de Doutorado, 1997, USFC, Santa Catarina.

GLADWELL, G. M. L., **Inverse Problems in Vibration**, 1986, Martinus Nijhoff Publishers.

GOYDER, H. G. D., **Methods and Application of Structural Modelling from Measured Structural Frequency Response Data**, Journal of Sound and Vibration, 1980, 68(2), pp. 209-230.

- HAYKIN, S., **Adaptive Filter Theory**, Third Edition, 1996, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- HIMMELBLAU, D. M., **Applied Nonlinear Programming**, 1972, McGraw-Hill Book Company, USA.
- HUNT, J. B., **Dynamic Vibration Absorbers**, 1979, Mechanical Engineering Publication LTD., London.
- HUGHES, T., **The Finite Element Method**, 1987, Prentice-Hall Inc.
- ICATS, **Reference Manual**, 1995, ICATS (Imperial College Analysis, Testing and Software), London.
- INMAN, D. J., **Engineering Vibration**, 1996, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- JONES, D. I. G., **Viscoelastic Materials for Damping Applications, Damping Applications for Vibration Control**, 1980, AMD – vol. 38, pp. 27-51, ASME.
- LOPES, E. M. O., **Estudo da Precisão do Método da Viga Vibrante**, Proceeding of DETC'97, ASME Design Engineering Technical Conferences, 1997, Sacramento, California.
- LAZAN, B. J., **Damping of Materials and Members in Structural Mechanics**, 1968, Pergamon Press, Oxford.
- MAIA, N. M. M., SILVA, J. M. M., et al , **Theoretical and Experimental Modal Analysis**, 1997, Research Studies Press LTD and John Wiley & Sons, England and New York.
- MAIA, N. M. M., et al , **On General Model for Damping**, **Journal of Sound and Vibration**, 1998, 218(5), pp. 749-767.
- MEAD, D. J., DI TARANTO, R. A., **Ressonance Response Criteria of a Damped Three-layered Beam**, **Transactions of the ASME**, Journal of Engineering for Industry, 1972, pp. 174-180.
- MEIROVITCH, L., **Elements of Vibration Analysis**, Second Edition, 1986, McGraw-Hill Book Company.

MEIROVITCH, L., **Analytical Methods in Vibration**, 1967, Macmillan Co., New York.

MERCER, C. A., REES, P. L., **An Optimum Shock Isolator**, *Journal of Sound and Vibration*, 1971, 18(4), pp. 511-520.

MINAS, C., INMAN, D. J., **Identification of Nonproportional Damping Matrix from Incomplete modal Information**, *Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 1991, vol. 113, pp. 219-224.

NASHIF, A. D., **Materials for Vibration Control in Engineering**, *Shock Vibration Bulletin*, 1973, vol. 43, pp. 145-151.

NASHIF, A. D., **Application of Damping for Noise Control in Diesel Engine Components**, *Damping Applications for Vibration Control*, 1980, AMD – vol. 38, pp. 133-143, ASME.

NASHIF, A. D., JONES, D. I. G., HENDERSON, J. P., **Vibration Damping**, 1985, John Wiley & Sons, New York.

NG, C., CUNNIFF, P. F., **Optimization of Mechanical Vibration Isolation Systems With Multi-Degrees of Freedom**, *Journal of Sound and Vibration*, 1974, 36(1), pp. 105-117.

NUSSENZVEIG, H. M., **Curso de Física Básica**, 1988, Editora Edgard Blücher.

OKUMA, M., OHO, T., **Experimental Spatial Matrix Identification Method**, *Fifth International Congress on Sound and Vibration*, 1997.

PIERRE, C., PESHECK, E., **An Analysis of a Friction Damped System Using Two Component Mode Methods**, *Proceeding of DETC'97/VIB-3844*, ASME Design Engineering Technical Conferences, 1997, Sacramento, California.

PRODONOFF, V., **Vibrações Mecânicas Simulação e Análise**, 1990, Maity Comunicação e Editora Ltda.

PILKEY, D. F., **Computation of a Damping Matrix for Finite Element Model Updating**, Thesis Ph.D., april 1998, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg.

RAO, D. K., **Frequency and Loss Factors of Sandwich Beams Under Various Boundary Conditions**, Journal Mechanical Engineering Science, 1978, vol. 20, No 5, pp. 271-282.

RAO, S. S., **Mechanical Vibrations**, Third Edition, 1995, Addison-Wesley Publishing Company.

RAO, S. S., **Engineering Optimization: Theory and Practice**, Third Edition, 1996, Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc.

REDDY, J. N., **An Introduction to The Finite Element Method**, Second Edition, 1993, McGraw-Hill Company.

ROEMER, M. J., MOOK, D. J., **Mass, Stiffness, and Damping Matrix Identification: An Integrated Approach**, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, July 1992, vol. 114, pp. 358-363.

ROSS, D., UNGAR, E., KERWIN, M., **Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminate Structural Damping**, Structural Damping, 1959, pp. 49-58, ASME, New York.

SILVA, H. P., **Controle Modal de Vibrações por Neutralizadores Dinâmicos: Uma Abordagem Generalizada**, Dissertação de Mestrado, 1991, UFSC, Santa Catarina.

SNOWDON, J. C., **Steady – State Behaviour of the Dynamic Absorber**, The Journal of the Acoustical Society of America, 1959, vol. 31, No. 8, pp. 1096-1103.

SNOWDON, J. C., **Vibration of Cantilever Beams to Which Dynamic Absorbers are Attached**, The Journal of the Acoustical Society of America, 1966, vol. 39, No. 5, part 1, pp. 878-881.

SNOWDON, J. C., **Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems**, 1968, John Wiley & Sons, New York.

SNOWDON, J. C., NOBILE, M. A., **Beamlike Dynamic Vibration Absorbers**, Acustica, 1980, vol. 44, pp. 98-108.

SNOWDON, J. C., WOLF, A. A., KERLIN, R. L., **The Cruciform Dynamic Vibration Absorber**, Journal of the Acoustical Society of America, 1984, vol. 75, No. 6, pp. 1792-1799.

SAGE, P. A., **System Identification History, Methodology, Future Prospects., System Identification of Vibration Structures, Mathematical Models From Test Data**, 1972, pp. 1-22, ASME.

THOMSON, W. T., **Teoria da Vibração com Aplicações**, 1973, Editora Interciência Ltda.

TEIXEIRA, P. H., **Controle de Vibrações em Cabos Singelos das Linhas de Transmissão Aéreas de Energia Elétrica Através de Neutralizadores Viscoelásticos**, Dissertação de Mestrado, 1997, UFSC, Santa Catarina.

UNGAR, E. E., **The Status of Engineering Knowledge Concerning the Damping of Built-Up Structures**, Journal of Sound and Vibration, 1973, 26(1), pp. 141-154.

WANG, J. H., **Mechanical Parameters Identification With Special Consideration of Noise Effects.**, Journal of Sound and Vibration, 1988, 123(1), pp. 151-167.

YANG, T. Y., **Finite Element Structural Analysis**, 1986, Prentice Hall Inc., New Jersey.

AKLONIS, J. J. **Introduction to Polymer Viscoelasticity**, Wiley, New