

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE DENSIDADE MODAL E DE FATORES DE**  
**ACOPLAMENTO PARA PLACAS REFORÇADAS POR VIGAS**

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ACIR EDVAM OZELAME**

**Florianópolis, julho de 1997**

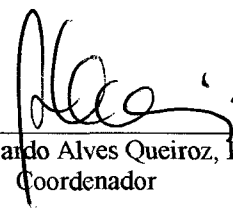
**ANÁLISE DE DENSIDADE MODAL E DE FATORES DE ACOPLAMENTO  
PARA PLACAS REFORÇADAS POR VIGAS**

**ACIR EDVAM OZELAME**

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

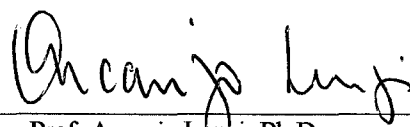
**MESTRE EM ENGENHARIA**

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: VIBRAÇÕES E  
RUÍDO, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



---

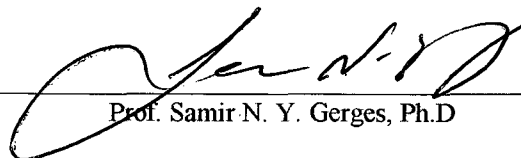
Prof. Abelardo Alves Queiroz, Ph.D  
Coordenador



---

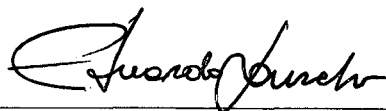
Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D  
Orientador

BANCA EXAMINADORA:



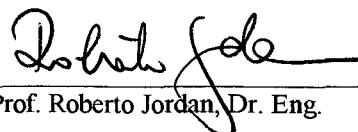
---

Prof. Samir N. Y. Gerges, Ph.D



---

Prof. Eduardo A. Fancello, D.Sc



---

Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng.

**Este trabalho é dedicado aos meus pais,  
Santo e Olivia**

## AGRADECIMENTOS

- Ao amigo Arcanjo, pela amizade, orientação e ensinamentos.
- Ao amigo-irmão Buba, pela força, principalmente na fase final deste trabalho.
- A toda minha família, por todo o apoio, sem o qual não teria chegado aqui.
- Aos amigos do LVA, especialmente ao Carlito.
- À PETROBRÁS, pelo patrocínio e apoio dados através dos Engenheiros Ayres E. Sada e Ernani L. Sztajn bok.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.
- Ao Prof. MS Renilson J. Menegassi, pela gentileza da revisão formal.



## SIMBOLOGIA

Abaixo estão listados os símbolos utilizados ao longo deste trabalho, sendo os mais específicos encontrados adequadamente descritos no texto.

$A$  - Área

$C_L$  - Velocidade de propagação de ondas longitudinais

$C_b$  - Velocidade de propagação de ondas de flexão

$E$  - Módulo de elasticidade

$E$  - Energia vibratória

$F_{RMS}$  - Valor RMS da força

$f$  - Frequência

$f_c$  - Frequência central de uma dada banda

$h$  - Espessura

$i$  - Unidade Complexa

$j$  - Número inteiro

$K_p$  - Número de onda da placa

$L$  - Comprimento da união de duas placas montadas em forma de L

$L_x$  - Dimensão medida na direção do eixo X

$L_y$  - Dimensão medida na direção do eixo Y

$M$  - Massa

$M_R$  - Massa generalizada do R-ésimo modo

$m$  - Número inteiro

$N$  - Número de modos

$n$  - Densidade modal

$q$  - Coordenada generalizada

$R$  - Número de um determinado modo

$S_w$  - Densidade espectral do deslocamento

$S_L$  - Densidade espectral bilateral da força

$t$  - Tempo

$V$  - Velocidade

$X$  - Relação entre espessuras de placas

$W_j^e$  - Potência introduzida ao  $j$ -ésimo grupo de modos

$W_j^d$  - Potência dissipada pelo  $j$ -ésimo grupo de modos

$W_{jk}$  - Potência transferida do  $j$ -ésimo grupo de modos para o  $k$ -ésimo grupo de modos

$w$  - Deslocamento

### **Alfabeto Grego**

$\phi_{\alpha\beta}$  - Constante de acoplamento

$\eta$  - Fator de perda estrutural

$\eta_{jk}$  - Fator de acoplamento do  $j$ -ésimo subsistema para o  $k$ -ésimo subsistema

$\mu$  - Constante de Poisson

$\rho$  - Densidade do material

$\rho_L$  - Densidade por unidade de área

$\omega$  - Velocidade angular

$\tau_{12}$  - Coeficiente de transmissão

$\psi$  - Função de forma

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 3

3.1 - Módulo da mobilidade pontual para discretização com elementos de 9.6 mm.....	25
3.2 - Curvas de fase da mobilidade pontual para discretização com elementos de 9.6mm. ....	25
3.3 - Curvas do módulo da mobilidade pontual para discretização com elementos de 16mm. ....	26
3.4 - Curvas de fase da mobilidade pontual para discretização com elementos de 16mm.....	27
3.5 - Curvas do módulo da mobilidade pontual para discretização com elementos de 24mm.....	27
3.6 - Curvas de fase da mobilidade pontual para discretização com elementos de 24mm.....	28
3.7 - Gráficos comparativos entre curvas de módulo da mobilidade pontual analítica e numérica calculada com 160 modos. ....	28
3.8 - Gráficos comparativos entre curvas de módulo da mobilidade pontual analítica e numérica calculadas com 117 e 160 modos. ....	29
3.9 - Gráficos comparativos entre curvas de módulo da mobilidade pontual analítica e numérica calculadas com elementos de 16 mm e 12 mm. ....	30

## CAPÍTULO 4

4.1 - Esquema da montagem da cabeça de impedância e do excitador eletrodinâmico à placa.....	34
4.2 - Diagrama de blocos da cadeia de medição.....	35
4.3 - Indicação da nomenclatura das placas e da forma de medição.....	37
4.4 - Diagrama de blocos da cadeia de medição de fatores de acoplamento.....	38
4.5 - Diagrama da cadeia de medição do fator de perda estrutural.....	42
4.6 - Fator de perda estrutural $\eta$ para placas com e sem reforços.....	43

## CAPÍTULO 5

5.1 - Esquemas e nomenclatura dos sistemas de duas placas utilizados nas análises.....	45
5.2 - Desenho esquemático das placas sem reforços unidas em forma de L (Caso 1) (dimensões em mm).....	46
5.3 - Fatores de acoplamento $\eta_{12}$ para placas sem vigas de reforço.....	47
5.4- Fatores de acoplamento $\eta_{21}$ para placas sem vigas de reforço.....	47
5.5 - Curvas de mobilidade média para placa sem reforços de 1.0x0.8 m.....	48
5.6 Desenho esquemático das placas com vigas alinhadas.....	49
5.7 - Fatores de acoplamento $\eta_{12}$ para placas com vigas alinhadas.....	50
5.8 - Fatores de acoplamento $\eta_{21}$ para placas com vigas alinhadas.....	51

5.9 - Desenho esquemático das placas com vigas paralelas(dimensões em mm).....	52
5.10 - Fatores de acoplamento $\eta_{21}$ para placas com vigas paralelas.....	53
5.11 - Fatores de acoplamento $\eta_{12}$ para placas com vigas paralelas.....	53
5.12 - Desenho esquemático das placas com vigas perpendiculares (dimensões em mm).....	54
5.13 - Fatores de acoplamento $\eta_{12}$ para placas com vigas perpendiculares.....	55
5.14 - Fatores de acoplamento $\eta_{21}$ para placas com vigas perpendiculares.....	55
5.15 - Gráfico de número de modos por banda 1/3 oitava.....	56
5.16 - Esquema construtivo da placa sem reforços (dimensões em milímetros).....	57
5.17 - Gráfico comparativo entre densidades modais calculadas pelos métodos analítico, e da contagem de modos para placa plana sem reforços.....	58
5.18 - Gráficos de densidade modal obtidos pelo método da parte real da mobilidade para uma placa sem reforços.....	59
5.19 - Curvas de mobilidade média para placa sem reforços de 1.0x0.8 m.....	59
5.20 - Gráfico de densidade modal para placas sem reforços obtidas pelo método da contagem de modos e da parte real da mobilidade.....	60
5.21 - Esquema construtivo da placa com reforços (dimensões em milímetros).....	61
5.22 - Gráfico de densidade modal para placas com e sem reforços obtidas pelo método da contagem de modos.....	62

5.23 - Gráfico de densidade modal para placas com reforços obtidos pelos métodos da contagem de modos, numérico pela parte real da mobilidade e experimental. ....	63
5.24 - Variação da densidade modal com o número de pontos de leitura das curvas de mobilidade para o caso de uma placa sem reforços. ....	64
5.25 - Variação da densidade modal com o número de pontos de leitura das curvas de mobilidade para o caso de uma placa com reforços. ....	65
5.26 - Esquema da placa reforçada (dimensões em milímetros) .....	67
5.27 - Gráfico de número de modos por banda de 1/3 oitava. ....	68
5.28 - Densidade modal, método da contagem de modos. ....	68
5.29 - Espectros de energia total para cada tipo de componente. ....	69

## **APÊNDICE**

A.1 - Elemento infinitesimal e os respectivos esforços. ....	74
--	----

## RESUMO

Por propiciarem a construção de estruturas relativamente leves e muito robustas, as placas reforçadas por vigas de, forma geral, possuem grande aplicação na engenharia.

O presente trabalho possui um enfoque mais específico em placas de grandes dimensões reforçadas por vigas, que são empregadas nas construções navais. Neste tipo de construção, é de grande importância a predição do ruído gerado em determinada região, causado pela vibração que a atinge através da propagação, pela estrutura, da energia vibratória produzida pelos equipamentos que operam nas proximidades, uma vez que isto possibilita minimizar o ruído ainda em fase de projeto.

Este trabalho busca conhecer o comportamento dinâmico de estruturas tipo placas reforçadas por vigas, através de três parâmetros fundamentais da Análise Estatística Energética, que são: a energia vibratória, a densidade modal e os fatores de acoplamento.

Para calcular esses parâmetros, é necessário obter as médias espaciais de espectros de velocidade e de mobilidade. Essas curvas de resposta em frequência são obtidas utilizando-se o Método de Elementos Finitos. Como forma de avaliação, os resultados numéricos são confrontados com resultados experimentais, obtidos em modelos de tamanho reduzido, e de resultados analíticos conhecidos, de placas sem reforços. Dessa forma, no cálculo dos fatores de acoplamento, são analisadas três configurações diferentes para o posicionamento relativo das vigas de reforço, além do caso de placas sem vigas de reforço. Para a densidade modal, são analisadas uma placa sem reforços, uma com reforços e uma estrutura de grande porte.

A comparação entre resultados obtidos de placas com reforços e de placas sem reforços visa avaliar as diferenças de comportamento dinâmico entre as mesmas de forma a avaliar a possibilidade de simplificação das primeiras pelas últimas.

De forma geral, a concordância entre os valores numéricos e os experimentais é boa. A variação no posicionamento das vigas mostra ter grande influência nos fatores de acoplamento, enquanto que a densidade modal mostrou-se pouco sensível a essa variação.

## ABSTRACT

Plates reinforced by beams have usually found in general engineering applications due to their light and robust constructions characteristics. This work is focused in the behavior of large dimensions beam-reinforced plates as used in naval structures. In this kind of constructions, it is very important to predict the structures-borne sound generate in some specific areas of such structures is caused by vibrations of large and heavy machines attached to the main structures. once this permit to minimize the noise during the project development.

The behavior of parameters used in Statistical Energy Analysis (SEA) modeling, vibratory energy, modal density and coupling loss factors, are analysed in this work. These parameters are calculated from the panels vibratory energy and the space average of the real part of point mobility functions. The Finite Elements Methods was used in the determination of the Frequency Response Functions. Numerical results are compared to those experimentally obtained from small scaled panels and to analytical results. Coupling loss factors were determined for three different reinforcing beams configurations. Modal density was also analysed for a plate without ribs and for a panel of large dimensions. A comparison between results obtained for single and stiffened plates is made with the objective of learning about the recommended procedures for the determination of their dynamic behavior.

A comparison between numerical and experimental results shows good agreement. Different distributions of the reinforcing beams showed little differences upon modal density results, whereas a noticeable influence was observed for coupling loss factors.



## SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO.....	1
2 - EQUAÇÕES BÁSICAS DE SEA.....	5
2.1 - ENERGIA VIBRATÓRIA.....	5
2.2 - DENSIDADE MODAL.....	6
2.3 - FATORES DE ACOPLAMENTO.....	11
2.3.1 - Coeficiente de Transmissão de Energia.....	11
2.3.2 - Relações Básicas de Equilíbrio de Potências.....	13
3 - O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITO.....	18
3.1 - PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS.....	18
3.2 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UMA PLACA PLANA.....	20
3.2.1 - A Análise.....	22
3.2.2 - Resultados e Conclusões.....	24
4 - ANÁLISES EM PLACAS REFORÇADAS.....	31
4.1 - PROCEDIMENTOS UTILIZADOS PARA O CÁLCULO DA DENSIDADE MODAL.....	31
4.1.1 - Procedimentos Numéricos.....	32
4.1.2 - Procedimentos Experimentais.....	33
4.2 - PROCEDIMENTOS UTILIZADOS PARA O CÁLCULO DOS FATORES DE ACOPLAMENTO.....	36
4.2.1 - Procedimentos Numéricos.....	36
4.2.2 - Procedimentos Experimentais.....	37
4.3 - OS MODELOS.....	38
4.3.1 - Geração de Modelos Numéricos.....	38
4.3.2 - Construção dos Modelos Experimentais.....	39
4.4 - FATOR DE PERDA ESTRUTURAL.....	41
5 - ANÁLISE DE RESULTADOS.....	44
5.1 - FATORES DE ACOPLAMENTO.....	44

5.2 - DENSIDADE MODAL.....	56
5.2.1 - Placas Sem Vigas de Reforços.....	58
5.2.2 - Placas Reforçadas.....	61
5.3 - ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA DE GRANDE PORTE .....	66
6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	74
APÊNDICES	
A1 - EQUAÇÃO DA ONDA PARA UMA PLACA PLANA.....	77
A2 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA PARA PLACA PLANA EM FLEXÃO.....	81

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Estruturas tipo placas reforçadas por vigas são amplamente utilizadas nas indústrias aeroespacial e naval, pois possibilitam obter estruturas leves e robustas. Um exemplo desta utilização são as plataformas “offshore” de prospecção e produção de petróleo, que são estruturas onde se encontra instalado um grande número de equipamentos pesados, que geram níveis elevados de vibração e de ruído.

A vibração gerada propaga-se pela estrutura e chega às regiões reservadas, tais como, alojamentos, refeitórios e salas de controle, gerando níveis de ruído excessivamente altos, que diminuem o conforto e aumentam a fadiga dos seus ocupantes. Portanto, otimizar o projeto dessas plataformas, em termos de vibrações e ruído, é de fundamental importância para aumentar a segurança e a produtividade de seus ocupantes.

As metodologias mais difundidas para fazer essa otimização em fase de projeto são o Método de Elementos Finitos (MEF) e o da Análise Estatística Energética (SEA)[1].

Devido as dimensões envolvidas, a modelagem por elementos finitos torna-se lenta, computacionalmente, e ainda fica restrita às baixas frequências. Neste caso, a aplicação de Análise Estatística Energética é preferível, pois, a limitação de exigir grande densidade modal na faixa de frequência de interesse (mínimo de 9 modos por faixa) é compensada justamente devido as grandes dimensões, uma vez que estruturas grandes possuem densidade modal suficiente para que SEA seja aplicada com boa precisão desde poucas dezenas de Hertz.

Entretanto, para aplicar SEA é necessário que a estrutura principal seja dividida em subsistemas, para os quais devem ser conhecidos certos parâmetros, tais como, energia vibratória, densidade modal, fatores de perda, de acoplamento e eficiência de radiação.

Na Análise Estatística Energética estes parâmetros possuem os seguintes significados físicos: a energia vibratória é a energia cinética do subsistema devido ao movimento provocado pelos seus modos de vibração do mesmo; a densidade modal está relacionada com a capacidade de armazenamento de energia vibratória, pois uma das hipóteses que foram utilizadas para o desenvolvimento de SEA é de que a energia vibratória está armazenada nas ressonâncias dos subsistemas em estudo; os fatores de acoplamentos relacionam a fração de energia que é trocada entre dois subsistemas. Finalmente, a eficiência de radiação indica a capacidade de um dado subsistema converter a energia vibratória em ondas sonoras.

O objetivo do presente trabalho é conhecer o comportamento de placas reforçadas por vigas especialmente em relação a dois destes parâmetros: a densidade modal e o fator de acoplamento e, por consequência, a energia vibratória. Para isto, será utilizado o método de elementos finitos para modelar estruturas típicas.

Todavia, a aplicação de elementos finitos em análises que se estendam às frequências elevadas são pouco usuais. Desta forma, outro objetivo deste trabalho é avaliar a aplicação desse método no tipo de análise comentado, mostrando a sua aplicabilidade.

As análises de forma geral são conduzidas em modelos em tamanho reduzido, devido às limitações do *software* de aplicação do MEF e do sistema computacional (*hardware*) disponíveis.

Os resultados obtidos numericamente são comparados com resultados experimentais obtidos com modelos e aos analíticos referentes a placas planas sem reforços.

A comparação entre placas com e sem reforços deve-se ao fato de o cálculo da densidade modal e dos fatores de acoplamento para placas sem reforços serem bastante simples. Assim, além de ter-se uma referência analítica e experimental já conhecida, também foi possível comparar estes resultados aos obtidos para placas reforçadas para

determinar as diferenças entre os dois tipos de placas. Caso a diferença seja pequena, poder-se-á usar os resultados de placas sem reforços em análises de placas reforçadas.

A propagação de ondas vibratórias em estruturas do tipo placa reforçada por vigas é bastante conhecida, encontrando-se desde a década de 60 inúmeros trabalhos publicados por Heckl [2], Wah [3], Rummerman [4], Fahy e Lindqvist et al [5]. Apesar disso, os trabalhos publicados sobre aplicação de SEA a esse tipo de estrutura são poucos, sendo os principais os publicados por Clarkson e seus colaboradores [6,7], nos quais são mostrados alguns resultados experimentais para placas e cilindros reforçados por vigas. Os trabalhos de Williams e Banerjee[8] apresentam um método numérico para estimação da densidade modal, método este baseado na contagem de modos obtidos a partir de um *software* de cálculo de autovalores que é aplicado à placa e cilindros reforçados; porém, os resultados obtidos para este tipo de estruturas não são comparados a qualquer outro tipo de estimação, não mostrando, assim, se o método é aplicável ou não.

Este trabalho está baseado principalmente nas publicações de Clarkson e na sua aplicação em placas sem reforços feita por Bonilha [9].

Para aplicar os conceitos apresentados por Clarkson para placas sem reforços às placas reforçadas, teve-se que aumentar de forma acentuada o número de pontos de excitação e de obtenção dos dados, para conseguir que as médias necessárias para a aplicação destes conceitos se tornassem mais consistentes e representativas da estrutura. Estas possuem sua resposta em frequência altamente heterogênea, devido as descontinuidades provocadas pelas vigas de reforços.

O Capítulo 2 deste trabalho apresenta o equacionamento básico de SEA, em que é feita a demonstração de algumas das equações por mostrarem de onde surgiram os métodos empregados no cálculo dos fatores de acoplamento, da densidade modal e da energia vibratória.

No Capítulo 3, são apresentadas análises numéricas preliminares feitas com o objetivo de conhecer o método de elementos finitos, suas limitações e os cuidados necessários para obterem-se resultados confiáveis.

No Capítulo 4, são apresentados os métodos numéricos e experimentais empregados para a obtenção dos fatores de acoplamento, densidade modal, energia vibratória e para a determinação experimental do fator de perda estrutural.

No Capítulo 5 são apresentados e discutidos os resultados obtidos para fatores de acoplamento e densidade modal. Os resultados de fatores de acoplamento são mostrados para três casos diferentes de posicionamento relativo das vigas de reforços, além do caso de placas sem reforços. Para a densidade modal, são apresentados os resultados obtidos para placas reforçadas e sem reforços, através de dois métodos diferentes: o método da contagem de modos e o método da parte real da mobilidade.

Neste capítulo, também são apresentados os resultados numéricos de densidade modal e energia vibratória para uma estrutura de grande porte, como forma de mostrar a aplicabilidade de SEA a frequências relativamente baixas.

Finalmente, no Capítulo 6, são feitos alguns comentários adicionais aos apresentados ao longo deste trabalho e várias sugestões para dar procedimento ao estudo em trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### EQUAÇÕES BÁSICAS DE SEA

Neste capítulo, são apresentadas as equações básicas empregadas na determinação da energia vibratória, da densidade modal e dos fatores de acoplamento de chapas reforçadas por vigas, com o objetivo de analisar o comportamento de diversas configurações.

São mostrados os desenvolvimentos de algumas equações relacionadas a essa análise, pelo fato de serem encontradas em poucas referências bibliográficas.

#### 2.1 - ENERGIA VIBRATÓRIA

A energia vibratória de um componente estrutural é dada pela massa dessa estrutura multiplicada pela média temporal e espacial da velocidade quadrada[10], isto é,

$$E = M \langle \bar{V}^2 \rangle \quad (2.1)$$

em que M representa a massa da estrutura e  $\langle \bar{V}^2 \rangle$  a média temporal e espacial da velocidade quadrada.

A expressão é de grande importância, pois, como será mostrado adiante, ela possibilitará também a determinação experimental da energia vibratória e o cálculo dos fatores de acoplamento.

## 2.2 - DENSIDADE MODAL

1 A densidade modal é definida como a razão entre o número de modos de vibração presentes em uma banda de frequência e a largura desta banda, isto é,

$$n(f_c) = \frac{N_{\Delta f}}{\Delta f} \quad (2.2)$$

em que  $f_c$  denota a frequência central da banda de interesse,  $N_{\Delta f}$  o número de modos presentes na faixa  $\Delta f$  de frequências,  $f_1$  e  $f_2$  as frequências inferior e superior, respectivamente, desta faixa ( $\Delta f = f_2 - f_1$ ). Porém, a obtenção da densidade modal através desta expressão somente é viável em baixas frequências, onde os modos se apresentam afastados entre si o suficiente para serem claramente identificados, em uma curva de resposta em frequência ou através de métodos numéricos que indiquem os autovalores na faixa de frequência de interesse. Em frequências mais elevadas, nas quais existem um grande número de modos em faixas estreitas de frequência, a abordagem utilizada é baseada em métodos que consideram apenas os valores médios da mobilidade.

Através da propagação de onda em placas planas sem reforços e simplesmente apoiada em toda a borda, Heckl [11] apresenta uma expressão analítica para a densidade modal, dada por

$$n = \frac{A \cdot \sqrt{3}}{h \cdot C_L} \quad (2.3)$$

em que  $A$  denota a área da placa,  $h$  a espessura e  $C_L$  a velocidade de propagação da onda longitudinal, dada por

$$C_L = \sqrt{\frac{E}{(1 - \mu^2)\rho}} \quad (2.4)$$



sendo  $E$  o módulo de elasticidade,  $\mu$ , o coeficiente de Poisson e  $\rho$ , a densidade do material.

Deve-se salientar que a densidade modal dada por 2.3 é invariante com a frequência.

Outra forma de obter-se a densidade modal é através do método baseado em valores médios desenvolvido por Clarkson [12], para placas planas sem reforços. Este método relaciona a densidade modal  $n(f)$  com a parte real da média temporal e espacial da mobilidade pontual.

Para obter a expressão que fornece a relação entre a parte real da mobilidade e a densidade modal, deve-se, inicialmente, escrever a expressão do deslocamento de um modo  $R$  em um ponto  $x_1$  de uma placa plana contínua sem reforços vibrando sob ação de forças aleatórias. Isso pode ser feito através do método de modos assumidos [13], desta forma pode-se escrever

$$w_R(x_1, t) = q_R(t) \cdot \Psi_R(x_1) \quad (2.5)$$

em que  $q_R(t)$  denota a coordenada generalizada  $R$  e  $\Psi_R(x_1)$  é o valor do deslocamento do modo normal  $R$ , no ponto  $x_1$ .

A amplitude da coordenada  $q_R(t)$ , quando sob ação de uma força generalizada  $F_R(t)$  pode ser definida por [14]

$$q_R(t) = \frac{F_R(t)}{M_R(\omega_R^2 - \omega^2 + i\eta_R\omega^2)} = \frac{F_R(t)}{M_R}(X_R - iY_R) \quad (2.6)$$

em que  $M_R$  denota a massa modal,  $\omega_R$  a velocidade angular do modo  $R$ ,  $\eta_R$  o amortecimento modal. O deslocamento, dado por

$$w(\omega, x) = \sum_{R=1}^{\infty} F_R(\omega) \frac{\Psi_R(x)}{M_R} (X_R - iY_R) \quad (2.7)$$

O valor RMS, ao quadrado, da resposta no ponto  $x_1$ , na forma de velocidade, pode ser calculado pela expressão abaixo, em função de uma excitação pontual aplicada no ponto  $x_p$ , tendo densidade espectral bilateral  $S_L(\omega)$ [9].

$$\bar{v}^2(x_1) = \sum_{R=1}^N \frac{S_L(\omega)}{4\pi f_R \eta_R} \frac{\Psi_R^2(x_1)\Psi_R^2(x_p)}{M_R^2} \quad (2.8)$$

Realizando-se a integração da última expressão em um único modo e sobre a área da placa através da variação independente dos pontos de aplicação da força  $x_p$  e da medição do deslocamento ( $x_1$ ), determina-se a velocidade média desse modo ao longo da superfície da placa. Desta forma, tem-se

$$\langle \bar{v}_R^2 \rangle = \frac{S_L(f_R)}{4\pi f_R \eta_R M^2} \quad (2.9)$$

A Equação 2.9 é obtida considerando-se que a distribuição de massa da placa é uniforme. Esta é uma observação muito importante, pois, explica o porquê da grande variação dos resultados quando esse método é aplicado às placas reforçadas por vigas.

Para chegar-se à Equação 2.9, considerou-se que os modos  $\Psi_R(x)$  sejam normalizados, utilizando as seguintes relações,

$$M_R = \int_A \rho_L \Psi_R^2(x) dA = \rho_L \int_A \Psi_R^2(x) dA \quad \text{e} \quad M = \rho_L A \quad (2.10)$$

com  $\rho_L$  denotando a densidade por unidade de área.

A velocidade média quadrada  $\langle v^2(t) \rangle$  em uma faixa de frequência ( $f_2-f_1$ ) pode ser determinada a partir do somatório das velocidades de todos os modos presentes nesta banda,

através da Equação 2.9. Escrevendo esse somatório em termos de valores médios, tem-se

$$\langle \bar{v}_R^2 \rangle = \frac{n(f_c)(f_2 - f_1)G(f_c)}{8\pi f_c \eta M^2} \quad (2.11)$$

em que  $G(f_c)$  representa a densidade espectral unilateral, constante na banda, com frequência central  $f_c$  e  $\eta$  o fator de perda médio na banda.

Sabendo-se que a força média quadrada[12] nessa mesma banda é fornecida por

$$F_{RMS\Delta f}^2 = (f_2 - f_1) \cdot G(f_c) \quad (2.12)$$

substituindo 2.10 em 2.11, tem-se que

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \frac{n(f) \cdot \langle F_{RMS}^2 \rangle}{8\pi \cdot f_c \cdot \eta \cdot M^2} \quad (2.13)$$

Pode-se demonstrar que a potência média fornecida por uma fonte pontual a uma estrutura é dada por

$$W^e = F_{RMS}^2 \cdot \langle \text{Re}\{Y\} \rangle \quad (2.14)$$

A potência dissipada por um modo de um dado subsistema é dado pela equação abaixo:

$$W_j^d = \omega_j \cdot \eta_j \cdot \bar{E}_j \quad (2.15)$$

com  $\omega_j$  representado a frequência angular,  $\eta_j$  o amortecimento modal do j-ésimo grupo de

modos e  $\bar{E}_j$ , a energia modal do j-ésimo modo, obtida conforme a seguinte equação:

$$\bar{E}_j = M_j \frac{\langle a_j^2 \rangle}{4\pi^2 f_c^2} \quad (2.16)$$

em que  $M_j$  denota a massa da placa,  $f_c$  a frequência central da banda em análise e  $\langle a_j^2 \rangle$  a aceleração média espacial do j-ésimo grupo de modos.

Manipulando as três últimas expressões, chega-se finalmente à equação que relaciona a densidade modal de uma placa plana à parte real da média espacial da mobilidade, dada por[12]

$$n(f) = 4M \text{Re}\{\langle Y(f) \rangle\} \quad (2.17)$$

sendo que  $M$  denota a massa da placa e  $\text{Re}\{\langle Y(f) \rangle\}$  a parte real da média espacial da mobilidade pontual que é definida como

$$Y(f) = \frac{V(f)}{F(f)} \quad (2.18)$$

com  $V(f)$  representando a velocidade no ponto de aplicação da força  $F(f)$ , ambas em função da frequência.

A Expressão 2.17, por ser desenvolvida a partir de valores médios, somente é válida em bandas de frequência nas quais o número de modos seja superior a 5 [6]. Bonilha [9] recomenda um número mínimo de 10 modos por banda para aplicação em uma placa plana sem reforços.

Outra forma de escrever a Expressão 2.17 é através da inertância pontual ( $I_n$ ), que

é definida como o quociente entre a aceleração e a força, ou seja,

$$\ln(f) = \frac{a(f)}{F(f)} \quad (2.19)$$

na qual  $a(f)$  representa a aceleração do ponto de aplicação da força  $F(f)$ , ambos em função da frequência. Assim, reescrevendo a Equação 2.26 em função da inertância tem-se

$$n(f_c) = \frac{1}{f_2 - f_1} \int_{f_1}^{f_2} 4M \frac{\text{Im}\{\langle \ln(f) \rangle\}}{2\pi f_c} \cdot df \quad (2.20)$$

com  $\text{Im}\{\langle \ln(f) \rangle\}$  representando a média espacial da parte imaginária da inertância.

## 2.3 - FATORES DE ACOPLAMENTO

Neste item são apresentadas as equações analíticas de fatores de acoplamento para placas planas sem reforços e as derivadas a partir de relações de balanço de potências, que são utilizadas para a obtenção dos fatores de acoplamento de placas com reforços.

### 2.3.1 - Coeficiente de Transmissão de Energia

Este parâmetro representa a fração de energia perdida por um subsistema devido ao acoplamento com outro.

Heckl [11] apresenta a forma analítica do fator de acoplamento entre duas placas planas e semi-infinitas sem reforços, unidas em forma de L, dada por

$$\eta_{12}(f) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{L}{k_p A_1} \tau_{12} \quad (2.21)$$

em que  $\eta_{12}$  denota o fator de acoplamento da placa 1 para a 2,  $f$  a frequência,  $L$  o comprimento da união entre as duas placas,  $A_1$  a área da placa 1 e  $k_p$ , o número de onda da placa, dado por

$$k_p = \frac{\omega}{C_b} \quad (2.22)$$

sendo  $\omega$  a frequência angular ( $\omega=2\pi f$ ) e  $C_b$ , a velocidade das ondas de flexão para placa plana e fina, expressa por

$$C_b \cong \sqrt{1,8 \cdot C_L \cdot h \cdot f} \quad (2.23)$$

O coeficiente de transmissão  $\tau_{12}$ , para ondas de flexão incidindo aleatoriamente a uma união rígida em  $L$ , para duas placas semi-infinitas de mesmo material, é dado por [9]

$$\tau_{12} = \tau_{12}(0) \frac{2,754X}{1 + 3,24X} \quad (2.24)$$

em que  $\tau_{12}(0)$  representa o coeficiente de transmissão de ondas de flexão incidindo normalmente em uma união rígida, em forma de  $L$ , de duas placas semi-infinitas. Este coeficiente é expresso por

$$\tau_{12}(0) = 2 \left( X^{\frac{5}{4}} + X^{\frac{3}{4}} \right)^{-2} \quad (2.25)$$

sendo  $X = \frac{h_1}{h_2}$ , onde  $h_1$  e  $h_2$  são as espessuras das placas 1 e 2, respectivamente.

Para desenvolver a Expressão 2.21, Heckl considerou apenas a propagação das

ondas de flexão, pois estas possuem maior densidade modal e, portanto, são responsáveis pela maior parte da propagação de energia nesse tipo de estrutura.

### 2.3.2 - Relações Básicas de Equilíbrio de Potências

Outra forma de obter-se os fatores de acoplamento é através do método estatístico baseado na troca de energia entre grupos de modos de vibração de subsistemas diferentes [10]. Assim, sejam dois grupos de modos contendo  $N_1$  e  $N_2$  modos, respectivamente, em uma faixa de frequências e representados graficamente na Figura 2.1.

Definindo  $W_1^e$  como sendo a potência introduzida no grupo 1 de modos, por uma fonte externa que não seja o grupo 2,  $W_1^d$  como a potência dissipada pelo grupo de modos 1, em forma de calor ou outras formas que não sejam de transferência para o grupo 2, e  $W_{12}$  a potência transmitida do grupo 1 para o grupo 2.

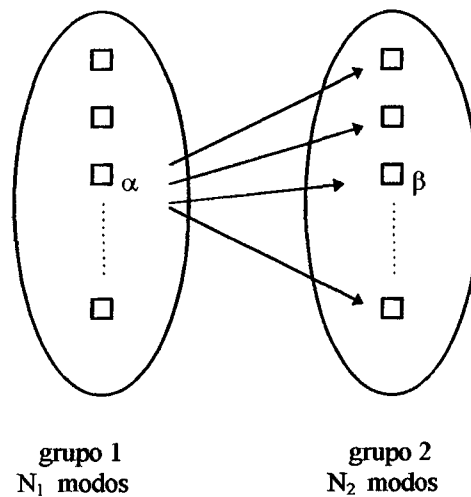


Fig. 2.1 - Troca de energia entre modos de subsistemas diferentes.

Assim, a potência dissipada pelos modos do grupo 1 é dada por

$$W_1^d = \omega \eta_1 E_1 \quad (2.26)$$

em que  $\eta_1$  é o fator de perda médio dos modos do grupo 1;  $E_1$ , a energia total dos modos do grupo 1, dada por  $E_1 = N_1 \bar{E}_1$ , com  $\bar{E}_1$  representando a energia modal dos modos do grupo 1. Da mesma forma,  $E_2 = N_2 \bar{E}_2$  representa a energia total dos modos do grupo 2, sendo  $\bar{E}_2$  a energia modal dos modos do grupo 2.

Considerando que a constante de acoplamento de um dos modos ( $\alpha$ ) do grupo 1 com um dos modos ( $\beta$ ) do grupo 2 é expressa por  $\phi_{\alpha\beta}$  e que seja constante para todos os modos e igual a  $\phi_0$ , então, a expressão da potência líquida transmitida entre dois modos de grupos diferentes é dada por

$$W_{\alpha\beta} = \phi_0 \cdot [\bar{E}_\alpha - \bar{E}_\beta] = \phi_0 \cdot [\bar{E}_1 - \bar{E}_2] \quad (2.27)$$

Assim, a potência líquida transferida pelos  $N_1$  modos do grupo 1, para o modo  $\beta$  do grupo 2, é representada por

$$W_{1\beta} = \phi_0 N_1 \cdot [\bar{E}_1 - \bar{E}_\beta] = \phi_0 N_1 \cdot [\bar{E}_1 - \bar{E}_2] \quad (2.28)$$

e a potência líquida transmitida por todos os modos de 1, para todos os modos de 2, é

$$W_{12} = \phi_0 N_1 N_2 \cdot [\bar{E}_1 - \bar{E}_2] \quad (2.29)$$

Através de um balanço de potências para os modos do grupo 1, pode-se escrever

$$W_1^e = W_1^d + W_{12_{liq}} \quad (2.30)$$

$$W_1^e = \omega \eta_1 E_1 + \phi_0 E_1 N_2 - \phi_0 E_2 N_1 \quad (2.31)$$

em que o termo  $\phi_0 E_1 N_2$  representa fisicamente a transferência de potência dos  $N_1$  modos do grupo 1, para o grupo 2. Dessa forma, pode-se definir o fator de acoplamento por



$$W_{12} = \omega \eta_{12} E_1 \quad (2.32)$$

$$W_{21} = \omega \eta_{21} E_2$$

em que  $W_{12}$  e  $\eta_{12}$  representam, respectivamente, a potência transferida e o fator de acoplamento do grupo de modos 1 para o 2,  $W_{21}$  e  $\eta_{21}$  a potência transferida e o fator de acoplamento do grupo de modos 2 para o 1, respectivamente, e  $\omega$  a frequência angular.

Pode-se ainda escrever a seguinte relação envolvendo os fatores de acoplamento

$$\phi_0 = \frac{\omega \eta_{12}}{N_2} = \frac{\omega \eta_{21}}{N_1} \quad (2.33)$$

sendo que, aplicando-se a definição de densidade modal ( $n=N/\Delta f$ ), chega-se à importante relação:

$$\eta_{12} n_1 = \eta_{21} n_2 \quad (2.34)$$

Fazendo um balanço de potências para cada subsistema, mostrados na Figura 2.2, em que  $W_1^e$  é a potência fornecida ao subsistema 1,  $W_2^e$  a potência fornecida ao subsistema 2,  $W_1^d$  e  $W_2^d$  as potências dissipadas pelos subsistemas 1 e 2, respectivamente,  $W_{12}$  é a potência transferida do subsistema 1 para o 2 e  $W_{21}$  a potência transferida do subsistema 2 para o 1,

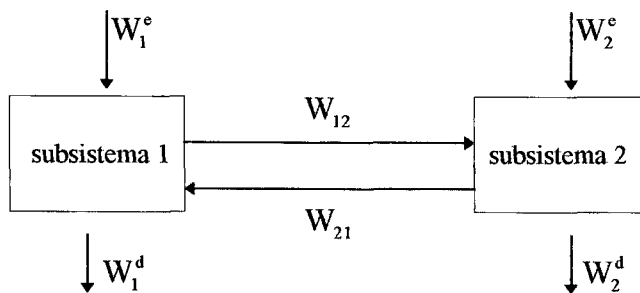


Fig. 2.2 - Esquema da troca de energia entre subsistemas.

chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} W_1^e &= W_{12} + W_1^d - W_{21} \\ W_2^e &= W_{21} + W_2^d - W_{12} \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo  $W_1^d = \omega \eta_1 E_1$ ,  $W_2^d = \omega \eta_2 E_2$ ,  $W_{12} = \omega \eta_{12} E_1$  e  $W_{21} = \omega \eta_{21} E_2$  na qual  $\omega$  é a velocidade angular,  $\eta_1$  e  $\eta_2$  os fatores de perda dos subsistemas 1 e 2, respectivamente,  $\eta_{12}$  e  $\eta_{21}$  os fatores de acoplamento entre os subsistemas e as energias totais dos subsistemas 1 e 2 são  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente.

Aplicando-se a relação dada pela Equação 2.34, ao sistema acima, e fazendo  $W_2^e = 0$ , obtêm-se as seguintes expressões para os fatores de acoplamento:

$$\eta_{21} = \frac{n_1 \cdot E_{12} \cdot \eta_2}{n_2 \cdot E_{11} - n_1 \cdot E_{12}} \quad (2.36)$$

e

$$\eta_{12} = \frac{n_2 \cdot \eta_{21}}{n_1} \quad (2.37)$$

em que  $E_{12}$  e  $E_{11}$  denotam as energias vibratórias dos subsistemas 2 e 1, respectivamente, quando somente o subsistema 1 recebe energia externa. A Expressão 2.36 também é apresentada por Clarkson e Pope [6].

Por outro lado, repetindo-se o procedimento utilizado para obter as equações 2.36 e 2.37, porém fazendo  $W_1^e = 0$ , obtêm-se um segundo par de equações que é dado abaixo:

$$\eta_{12} = \frac{n_1 \cdot E_{22} \cdot \eta_1}{n_2 \cdot E_{21} - n_1 \cdot E_{22}} \quad (2.38)$$

e

$$\eta_{21} = \frac{n_1 \cdot \eta_{12}}{n_2} \quad (2.39)$$

sendo que  $E_{22}$  e  $E_{21}$  denotam as energias dos subsistemas 2 e 1, respectivamente, quando somente o subsistema 2 recebe energia externa.

As equações acima mostram os procedimentos que podem ser adotados para a determinação dos parâmetros principais usados em modelos de sistemas dinâmicos de alta densidade modal por Análise Estatística Energética.

A densidade modal e os fatores de acoplamento são, talvez, os parâmetros mais importantes utilizados em SEA, sendo que os fatores de acoplamento relacionados à união de duas placas reforçadas por vigas podem ser determinados a partir das energias vibratórias e do conhecimento do amortecimento estrutural, usando, por exemplo, as equações 2.36 e 2.37. Estas equações podem ser usadas com dados de energia vibratórias obtidos tanto de forma numérica, como experimental.

Placas de geometria regular e valores contínuos dos esforços, e das deflexões ao longo da união, podem também ser analisadas a partir de dados do coeficiente de transmissão de energia,  $\tau_{ij}$ , conforme indica a Equação 2.21. } (2)

A densidade modal pode ser obtida a partir dos valores da mobilidade em vários pontos da placa, conforme mostra a Equação 2.17. Para geometrias mais simples, expressões analíticas podem também ser empregadas, como por exemplo, a Equação 2.3.

## **CAPÍTULO 3**

### **O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Neste capítulo, é apresentado o procedimento numérico empregado nas análises realizadas.

O Método de Elementos Finitos (MEF) é aplicado ao longo deste trabalho através do *software* ANSYS, revisão 5.0, versão universitária.

#### **3.1. PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS**

As Equações 2.1, 2.17, 2.20, 2.36 e 2.37 mostram que os procedimentos adotados para o cálculo dos parâmetros de SEA analisados estão ligados à obtenção dos espectros de velocidade pontual e da força aplicada às estruturas em estudo. A partir desses dados, podem ser obtidas as energias vibratórias e as mobilidades empregadas na determinação dos parâmetros anteriormente citados.

Assim, o Método de Elementos Finitos é empregado ao longo deste trabalho para a obtenção de forma numérica, através de análises harmônicas, de espectros de deslocamentos pontuais, que, por sua vez, através de uma derivação em relação ao tempo, fornecem os espectros de velocidades necessários. Como para a realização das análises harmônicas é necessário introduzir uma força de excitação na estrutura, são também determinados os espectros de mobilidade.

O procedimento numérico utilizado na realização das análises harmônicas através de elementos finitos é dividido em 3 etapas fundamentais, enumeradas abaixo:

1. - Geração da geometria a ser analisada e respectiva discretização, através da definição das dimensões e tipo de elemento a ser empregado, bem como das características físicas e geométricas do material a ser simulado (geração da malha de elementos sobre a forma geométrica).
2. - Solução do sistema de equações gerados pela discretização da forma geométrica.
3. - Preparação e apresentação dos resultados obtidos de forma que possam ser interpretados com relativa facilidade.

O ANSYS possui capacidade de realizar estas três etapas, porém, devido à necessidade de realizar médias espaciais e temporais, parte da terceira etapa, a de preparação dos resultados, foi realizada com o auxílio do *software* MathCad, versão 6.0 Plus.

Apesar dos procedimentos utilizados serem tradicionais, a necessidade de estender a faixa de frequência, em análise a valores maiores possíveis, exigiu a realização de análises preliminares em estruturas mais simples, com equacionamentos analíticos bem estabelecidos, de forma a avaliar os resultados obtidos numericamente, comparando-os aos analíticos. Tal procedimento permite estimar os erros que poderiam eventualmente serem introduzidos nos resultados obtidos nas análises em frequências mais altas.

Essas análises foram utilizadas para os métodos de solução e as dimensões dos elementos a serem utilizados, visando obter uma solução de compromisso entre precisão dos resultados e tempo computacional dispendido. Outra finalidade dessas análises consistiu em determinar o grau de confiança dos resultados, quando a última frequência da análise se aproxima da frequência do último modo utilizado na análise modal (no caso da utilização do método de solução por superposição modal).

Em todas as análises realizadas através do MEF, neste trabalho, utilizaram-se dois tipos de elementos, um do tipo casca e outro do tipo viga. A descrição destes elementos é dada abaixo.

O elemento do tipo casca, escolhido dentro da biblioteca de elementos do ANSYS, é denominado “SHELL 63” e possui as seguintes características: capacidade de flexão, admite forças aplicadas tanto no plano do elemento como fora dele, possui quatro nós com seis graus de liberdade cada nó (três translações e três rotações). As funções de forma, tanto da matriz de rigidez, como a de massa do elemento, são compostas por quatro triângulos sobrepostos com três pontos de integração cada triângulo (as funções de forma para cada um dos triângulos são dadas em[15]).

O elemento de viga escolhido foi o “BEAM 04,” por possuir as seguintes características: dois nós, com seis graus de liberdade em cada nó. É uniaxial, com capacidade de tração, compressão, torção e flexão[16].

A geração das malhas em todas as análises apresentadas neste trabalho empregaram apenas elementos retangulares, sendo que a dimensão do elemento citada em diversos pontos do trabalho refere-se às dimensões de dois lados paralelos do elemento. As dimensões dos outros dois lados são determinadas automaticamente pelo ANSYS, de forma a obter elementos com o formato o mais próximo possível de quadrados.

### **3.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA UMA PLACA PLANA**

Para conhecer e avaliar os procedimentos utilizados numericamente, primeiro foi analisada uma placa plana, de pequenas dimensões, que representa uma estrutura dinamicamente bem comportada, com equacionamento amplamente conhecido e apresentado no Apêndice A1, possibilitando, assim, uma comparação entre os resultados obtidos pelas equações e os obtidos numericamente, pelo ANSYS. A expressão da mobilidade, para uma placa plana simplesmente apoiada, pode ser obtida a partir da Equação (A.21), mostrada no Apêndice A2, introduzindo um fator devido ao amortecimento, fazendo

sua derivada primeira em relação ao tempo e dividindo por uma força harmônica. Assim, tem-se

$$Y(\omega) = \frac{4i\omega}{M} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\phi_{j,k}^2}{\omega^2 + i\omega\omega_{j,k}\eta - \omega_{j,k}^2} \right] \quad (3.1)$$

sendo que, para uma placa simplesmente apoiada nas bordas, a função de forma  $\phi_{j,k}$  para os autovetores é dada por

$$\phi_{j,k} = \text{sen}\left(\frac{j\pi x_0}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{k\pi y_0}{L_y}\right) \quad (3.2)$$

para  $j=1,2,\dots,n$  e  $k=1,2,\dots,m$ .

Os respectivos autovalores são dados por

$$\omega_{j,k} = \left[ \left(\frac{j\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{L_y}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{Q}{\rho h}} \quad (3.3)$$

em que  $x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do ponto de aplicação da força harmônica,  $L_x$  e  $L_y$  as dimensões da placa nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $h$  a espessura da placa e com a rigidez a flexão  $Q$  definida como

$$Q = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (3.4)$$

na qual  $E$  representa o módulo de elasticidade,  $\mu$  o coeficiente de Poisson do material e  $h$  a espessura da placa.

### 3.2.1 - A Análise

A placa utilizada nesta análise é de aço tipo ABNT 1020, com dimensões de 354 por 240mm e 2 mm de espessura. As constantes empregadas para o material foram Módulo de Elasticidade ( $E$ ), de  $2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  e coeficiente de Poisson ( $\mu$ ), de 0,3.

Na discretização dessa placa, utilizou-se o elemento “SHELL 63”, já descrito anteriormente.

As condições de contorno do tipo apoio simples foram usadas ao longo de toda a borda e representam a restrição nos três graus de liberdade de translação de cada nó da borda.

A resposta em frequência de uma estrutura é obtida pelo ANSYS, através da análise harmônica. Para isso, ele dispõe de três métodos de solução: o método “full”, que trabalha com matrizes completas (matrizes com ordem igual ao número de graus de liberdade presente no modelo), o que garante maior precisão, mas implica em maior tempo de processamento; o método reduzido, que utiliza matrizes de ordem reduzidas a um certo número de graus de liberdade, previamente selecionados, chamados de graus “masters”, e, por último, o método da superposição modal, que faz uso de somatórios dos autovalores da estrutura em análise.

Para este trabalho, foi escolhido o método da superposição modal, que proporcionou a melhor relação entre tempo computacional e precisão. O método “full” aumenta muito o tempo de processamento em relação ao ganho de precisão obtido. Além disso, devido a grande discretização em relação a frequência exigida nas curvas de resposta em frequência, os arquivos gerados pelo *software* tornam-se excessivamente grandes (na ordem de 1 GB), dificultando o emprego do método, uma vez que na maior parte das análises realizadas o computador disponível possuía apenas 1.08 GB de capacidade de armazenamento no disco rígido. O método reduzido não é indicado em casos onde a distribuição de massa não é uniforme[17]. Neste tipo de estruturas o método de seleção automática dos graus “masters” fica limitado, pois, o critério utilizado nessa seleção é o de pontos de maior concentração de



massa, o que mascara os resultados, já que nesse tipo de estrutura, os pontos de maior concentração de massa são justamente as vigas de reforço que são as regiões de menor flexibilidade. Como a seleção automática fica limitada, estes graus “masters” devem ser selecionados manualmente, o que torna o método extremamente trabalhoso, uma vez que nos casos analisados, seria necessário selecionar acima de 1000 graus “masters” para conseguir uma precisão razoável.

Ao utilizar o método da superposição modal, é necessário fornecer, como dado de entrada, os autovalores da estrutura a ser analisada, o que é conseguido realizando-se inicialmente uma análise modal da estrutura, na qual são calculados os autovetores e os autovalores. Para resolver o problema de análise modal, o ANSYS dispõe de quatro métodos, que são: o método reduzido (emprega matrizes de ordem reduzida ao número de graus de liberdade “masters” selecionados da mesma forma que o método de análise harmônica já citado); o método dos subespaços (utiliza matrizes completas e simétricas); o método assimétrico (trabalha com matrizes assimétricas) e o amortecido (considera também a matriz de amortecimento).

Como o problema da placa plana é dinamicamente bem comportado, isto é, matrizes simétricas e o amortecimento na análise modal pode ser desprezado, somente dois métodos são passíveis de serem utilizados, o reduzido e o dos subespaços. Neste caso, devido a melhor precisão, e como os problemas citados acima para a análise harmônica são também comuns a esse método reduzido, foi escolhido o método dos subespaços, apesar de implicar em um maior tempo computacional.

Para avaliar a sensibilidade do modelo às dimensões do elemento empregado, foi conduzida uma análise em que se obteve a resposta em frequência com três tamanhos diferentes de elementos, com isso, pode-se avaliar a precisão da resposta, comparada à analítica e obter uma noção do tempo computacional com cada tamanho. Os tamanhos de elementos utilizados foram 24 mm, 16 mm e 9,6 mm. O número de modos calculado pelo ANSYS foi de 30 modos, o que garante a frequência do 30º modo (2652 Hz) estar acima de 2 kHz, o final da faixa de interesse. Os manuais do ANSYS recomendam, como regra geral,

que a faixa de frequência de análise se estenda preferencialmente até à metade da frequência do último modo calculado.

A força de amplitude constante com a variação da frequência foi aplicada em ponto cuja localização foi mantida, tanto quanto possível, nas mesmas coordenadas ( $x_0 = 80$  mm e  $y_0 = 80$  mm); porém, devido aos diferentes tamanhos das malhas, houve pequenas variações que foram compensadas no modelo analítico, Equação 3.2, aplicando a força nas coordenadas exatas do nó onde a força foi aplicada no modelo numérico.

Os resultados analíticos de resposta em frequência foram obtidos através da Equação 3.1, usando o *software* MATHCAD, versão 6.0. O número de modos utilizados para os somatórios foi 10, tanto para  $n$  como para  $m$ , o que garante uma boa precisão até o final da faixa de frequência de interesse, pois a última frequência natural ( $\omega_{10,10}$ ) calculada está na ordem dos 12 kHz, muito acima do final da faixa de interesse.

### 3.2.2 - Resultados e Conclusões

As Figuras 3.1 a 3.6 mostram os espectros de mobilidade e fase para os três tamanhos de elementos usados. As Figuras 3.1 e 3.2 mostram os resultados da análise realizada com elementos de 9,6mm. Nelas, pode-se notar a ótima concordância da curva analítica com a numérica até frequências de 1 kHz. Acima desta frequência, apesar de o erro aumentar, pode-se ainda observar uma boa concordância tanto em termos de frequência, como em amplitude. Neste caso, a placa foi discretizada em 950 elementos, o que resultou em um tempo de processamento de 711 segundos. (Todos os tempos de processamento referem-se a um computador Pentium 100 MHz com 32 Mbytes de memória RAM, disco rígido com velocidade de troca de dados de 2.3 Mbytes/s). As Figuras 3.3 e 3.4 mostram os resultados da análise feita com elementos de 16 mm. Neste caso, a ótima concordância entre as curvas restringe-se à frequências inferiores a 800 Hz, a partir da qual o erro cresce, contudo, ainda apresenta uma concordância razoável até 2 kHz.

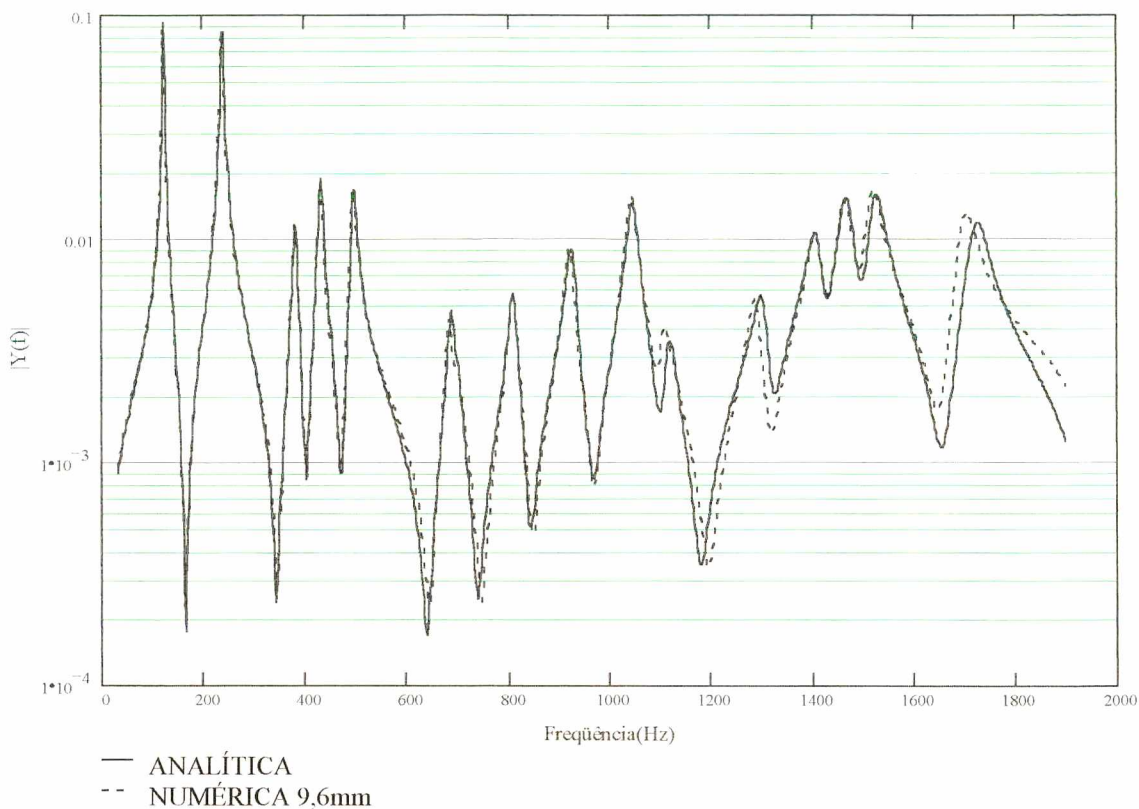


Fig. 3.1 - Módulo da mobilidade pontual para discretização com elementos de 9,6 mm.

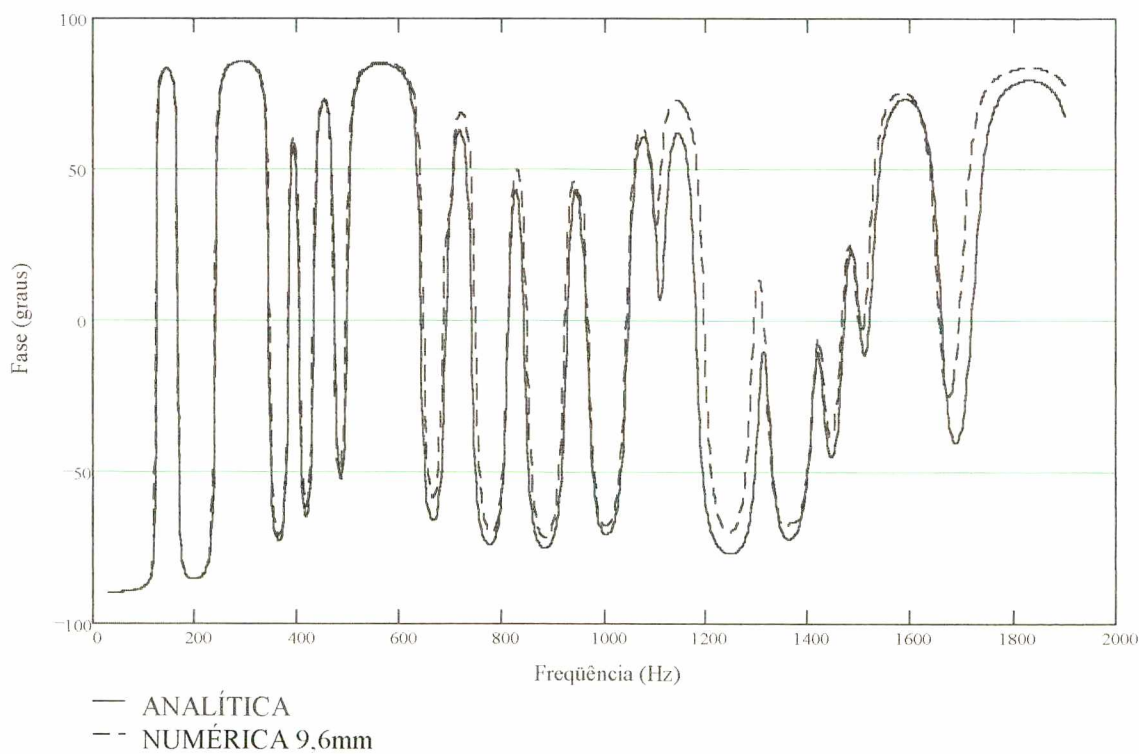


Fig. 3.2 - Curvas de fase da mobilidade pontual para discretização com elementos de 9,6mm.

Esta discretização resultou em 345 elementos e tempo de processamento, em 248 segundos.

As Figuras 3.5 e 3.6 mostram os espectros obtidos com os elementos de 24 mm. Neste caso, a concordância ótima dos resultados chega até 600 Hz, acima da qual obtém-se uma concordância razoável, aproximadamente até 1200 Hz. A partir desta frequência, os resultados são relativamente pobres, mostrando que este tamanho de elemento é grande demais para ser utilizado em análises até 2 kHz. Esse tamanho de elementos resultou em uma discretização de 150 elementos e um tempo de processamento de 120 segundos.

Os resultados obtidos levam a concluir que o tamanho do elemento indicado para esse tipo de estrutura, dentro da faixa de frequência considerada, é o de 16 mm, pois apresentou bons resultados até os 2 kHz e o tempo computacional é aproximadamente duas vezes e meio menor do que o com 9,6mm.

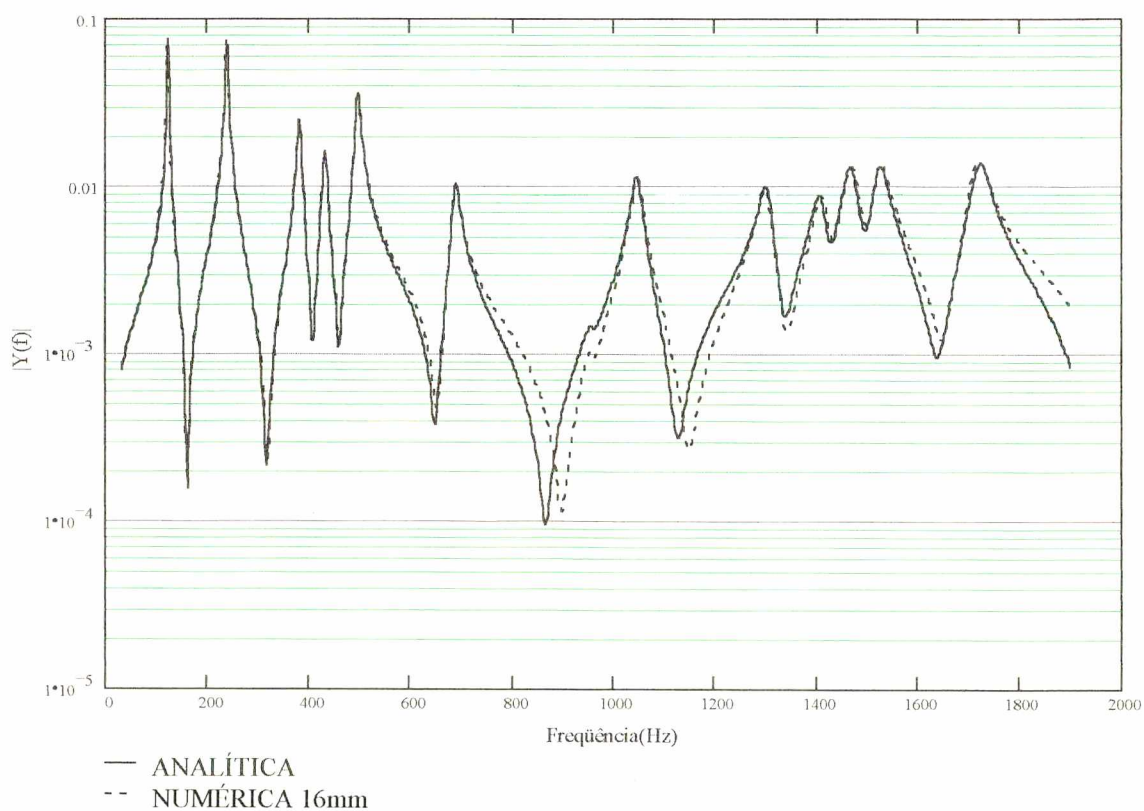


Fig. 3.3- Curvas do módulo da mobilidade pontual para discretização com elementos de 16mm.

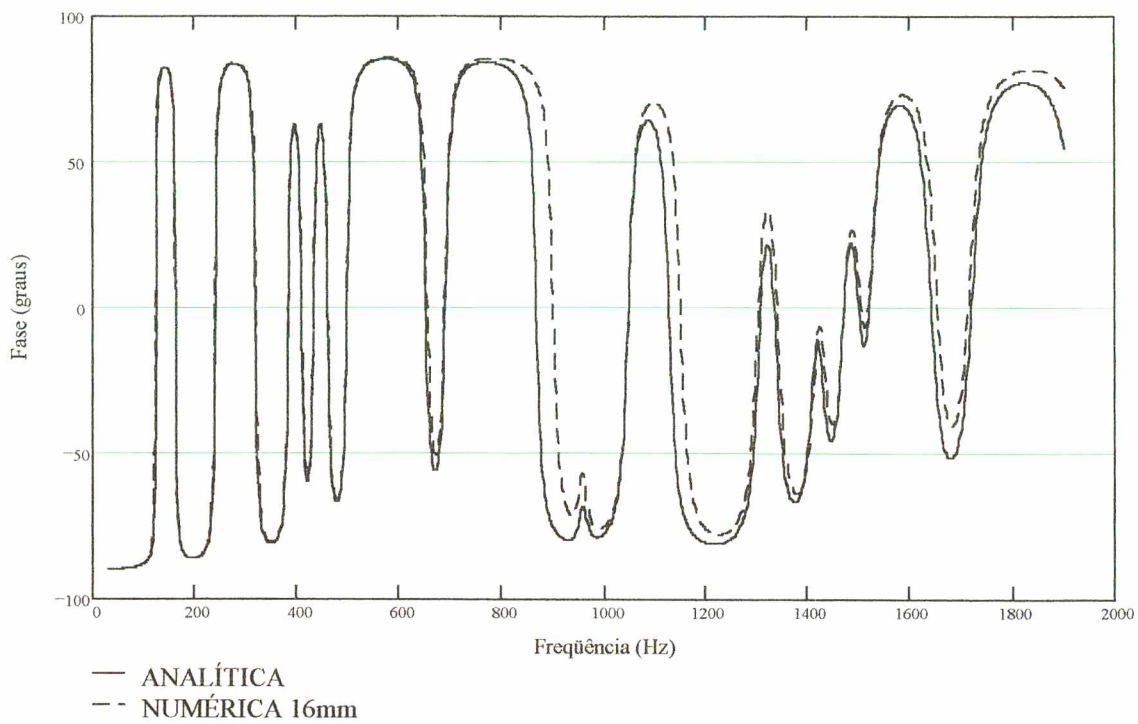


Fig. 3.4 - Curvas de fase da mobilidade pontual para discretização com elementos de 16mm.

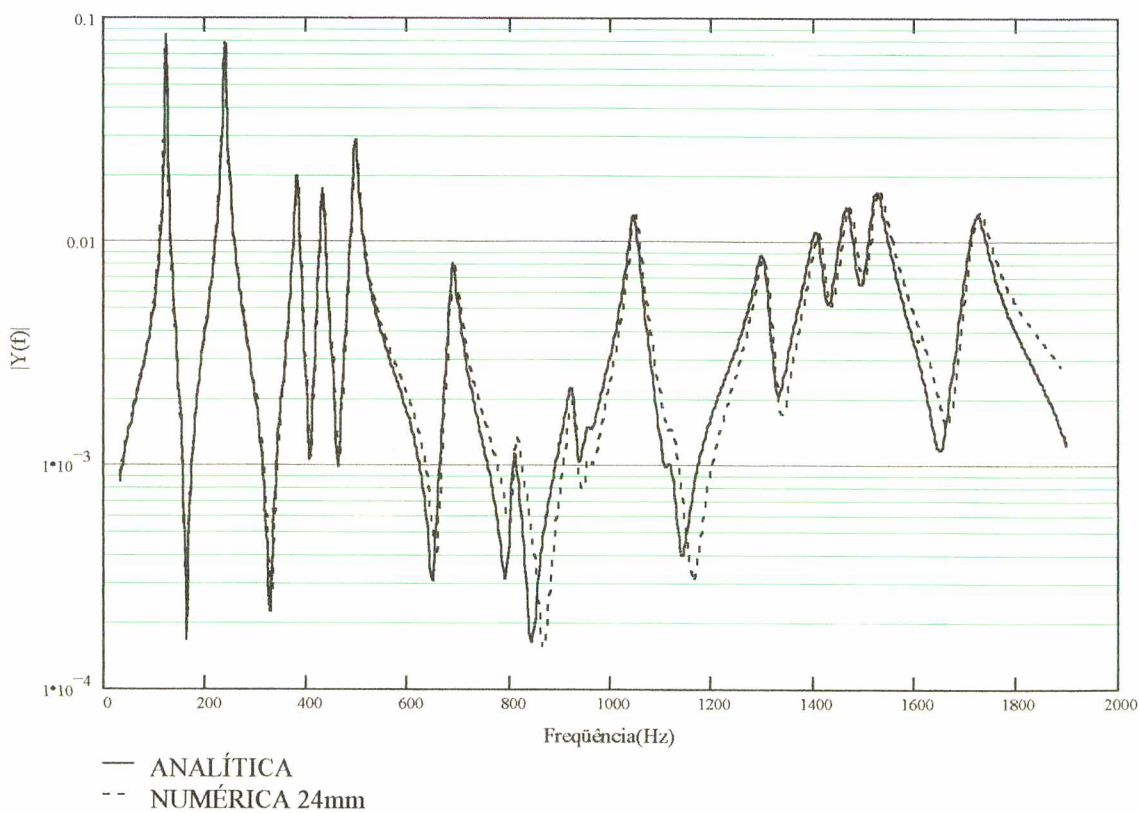


Fig. 3.5 - Curvas do módulo da mobilidade pontual para discretização com elementos de 24mm.



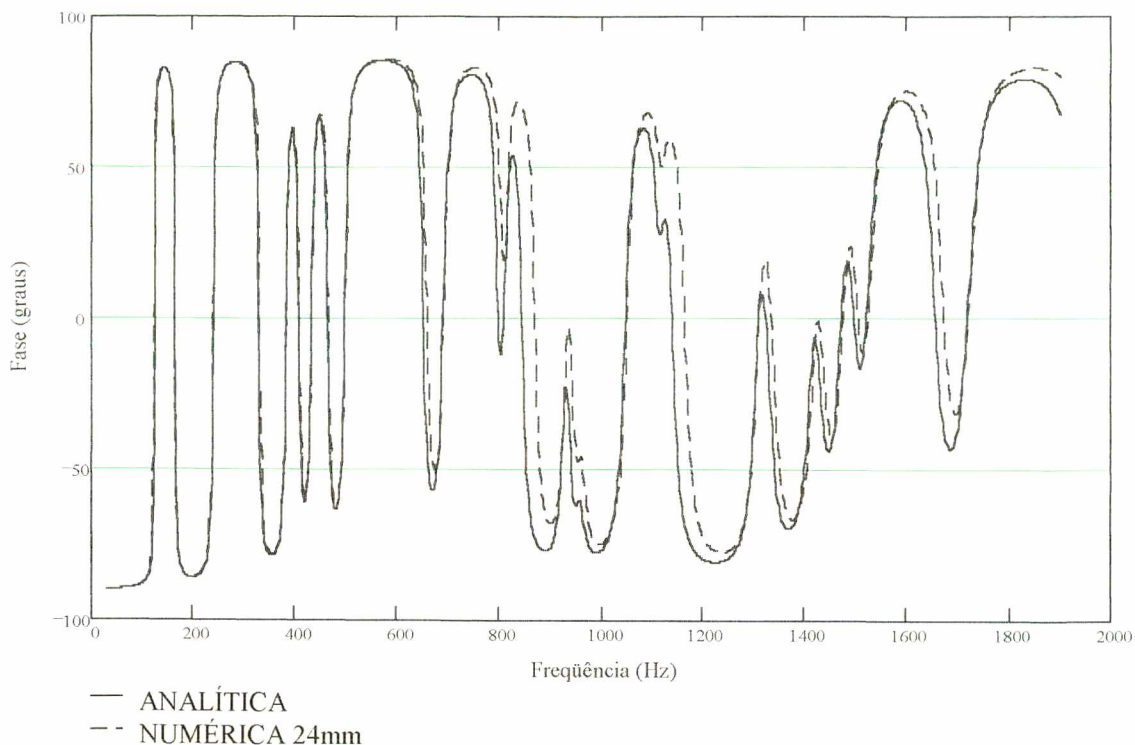


Fig. 3.6- Curvas de fase da mobilidade pontual para discretização com elementos de 24mm.

Na Figura 3.7, são mostradas as curvas de mobilidade para uma placa plana de aço ABNT 1020 de 1.0m x 0.8m, obtidas analítica e numericamente através do método da superposição modal, utilizando-se 160 modos e discretizada com elementos com dimensão de 16mm. Os gráficos da Figura 3.8 mostram também os resultados obtidos com o mesmo modelo, porém com a utilização de 117 modos no cálculo, pois o 117<sup>o</sup> modo possui frequência de 1030 Hz e, portanto, está no limite superior da faixa de frequências em análise.

A Figura 3.7 mostra uma maior divergência das curvas a partir de 1kHz, mas a Figura 3.8 mostra que mesmo na faixa de análise, estendendo-se até próximo à frequência do último modo utilizado no cálculo, a precisão continua bastante razoável. Em cálculos cujo resultados são apresentados na Figura 3.9, verificou-se que mesmo aumentando-se a discretização, diminuindo as dimensões

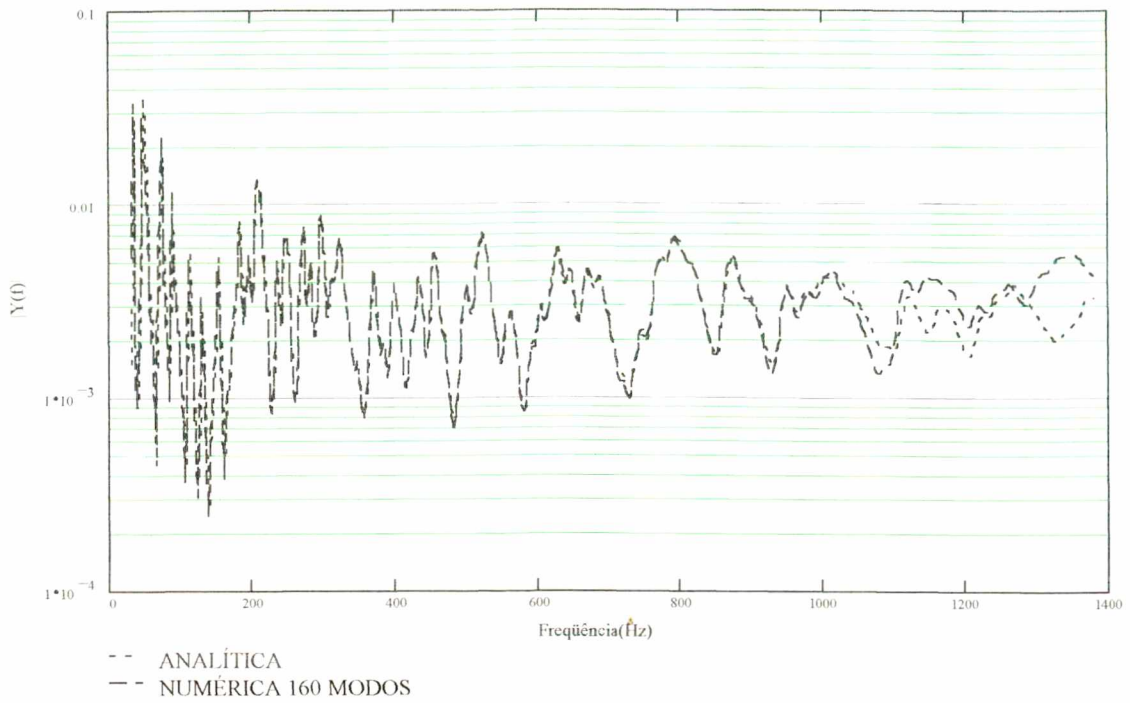


Fig. 3.7 - Gráficos comparativos entre curvas de módulo da mobilidade pontual analítica e numérica calculada com 160 modos.

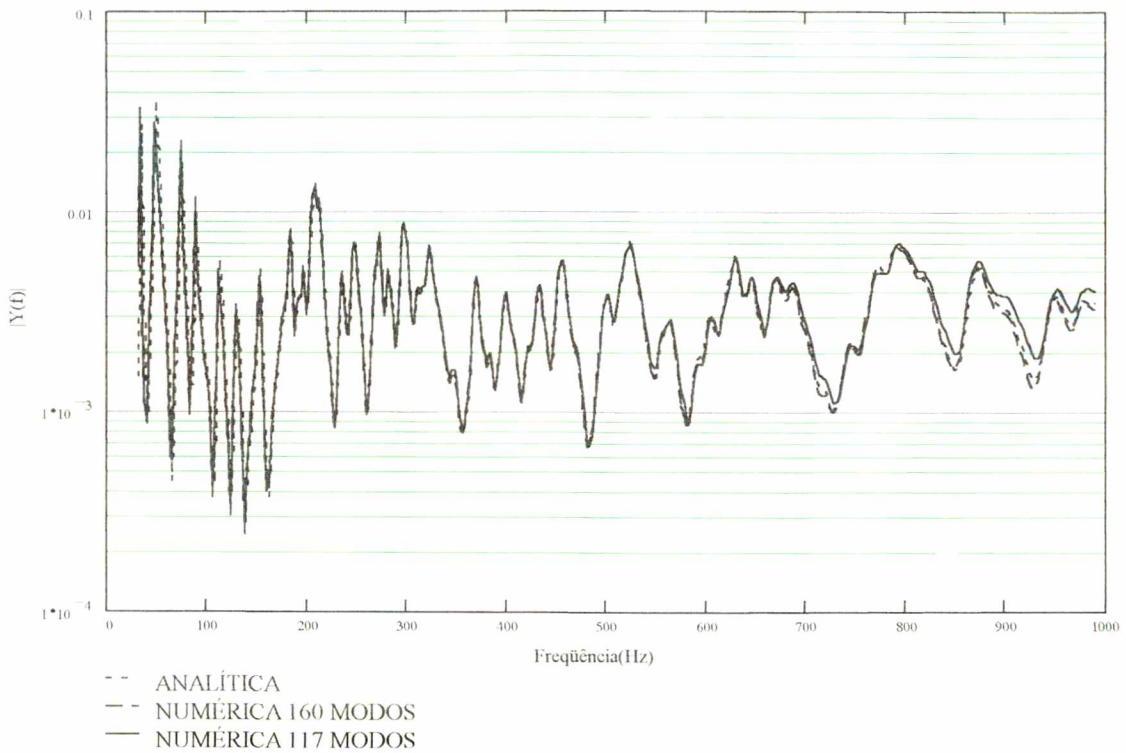


Fig. 3.8 - Gráficos comparativos entre curvas de módulo da mobilidade pontual analítica e numéricas calculadas com 117 e 160 modos.

dos elementos de 16 mm para 12 mm, os resultados em frequências acima de 1100Hz não sofreram modificações significativas e continuam com concordância apenas razoável em relação ao analítico. Esses resultados podem indicar que esse é o limite superior em frequência da aplicação do método para esse tipo de estrutura, pois, todas as tentativas de calcular um número maior que 160 modos a solução das matrizes divergia.

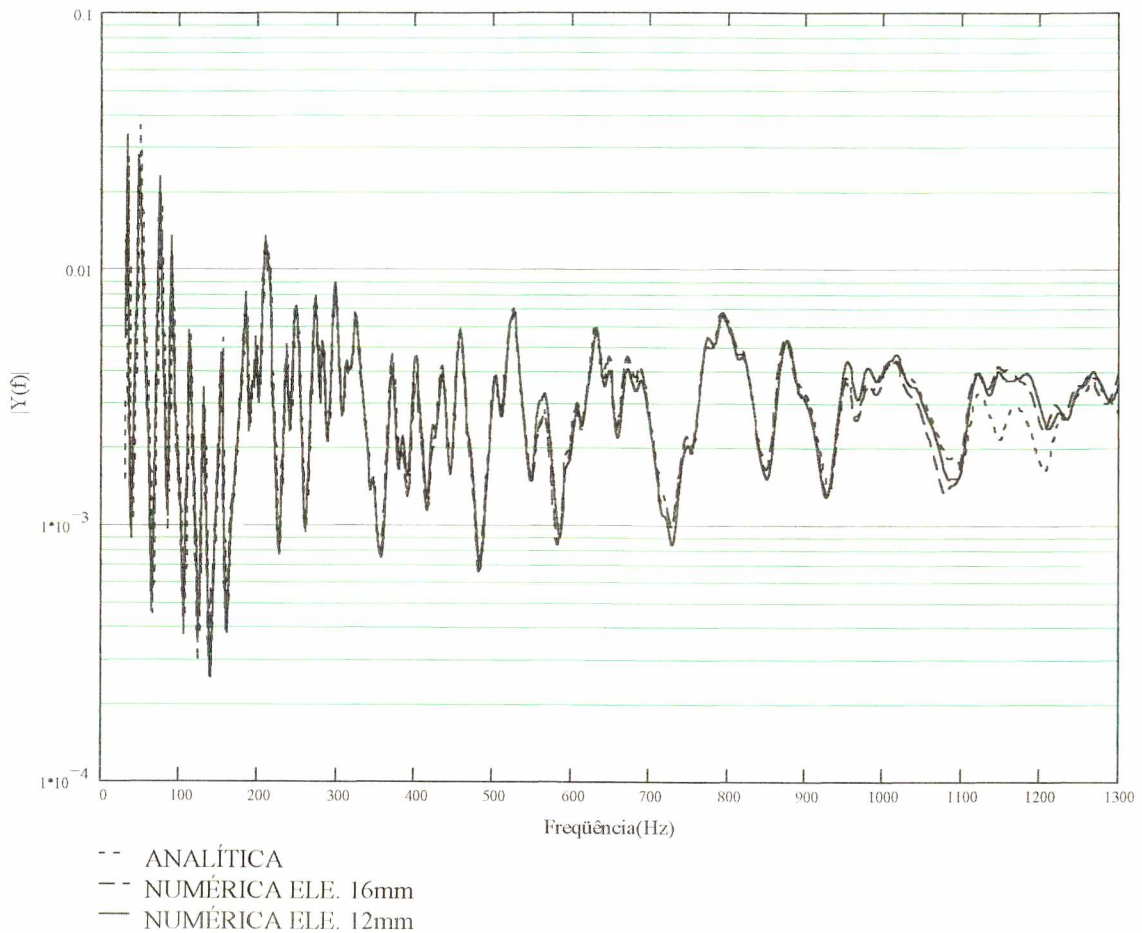


Fig. 3.9 - Gráficos comparativos entre curvas de módulo da mobilidade pontual analítica e numérica calculadas com elementos de 16 mm e 12 mm.

Dessa forma, a principal conclusão extraída desta análise preliminar refere-se à confiabilidade dos resultados obtidos pelo *software* ANSYS até frequências de aproximadamente 1100 Hz, mesmo quando a última frequência de análise está próxima a do último modo calculado. Todavia, quando a frequência de análise aproxima-se do 160º modo, os resultados perdem precisão.



## **CAPÍTULO 4**

### **ANÁLISES EM PLACAS REFORÇADAS POR VIGAS**

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos numéricos e experimentais empregados no cálculo da densidade modal, dos fatores de acoplamento e da energia vibratória.

Os métodos experimentais aplicados são os descritos e empregados por Clarkson e Pope [6] e por Bonilha [9].

#### **4.1 - PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO DA DENSIDADE MODAL**

O procedimento de cálculo da densidade modal através da parte real da mobilidade foi desenvolvido baseando-se fundamentalmente em aplicações relacionadas às placas planas sem vigas de reforço. Dessa forma, tem-se dificuldade de obtenção de bons resultados para placas reforçadas por vigas. Este fato decorre da grande diferença existente entre as respostas vibratórias, em diferentes pontos da estrutura, isto é, quando obtém-se a resposta em frequência da estrutura, em um ponto localizado no centro de um vão de uma placa, por exemplo, essa será totalmente diferente da resposta em frequência obtida sobre uma viga de reforço desta mesma estrutura.

No trabalho de Clarkson[6], são apresentados resultados de densidade modal obtidos através de três pontos diferentes de uma estrutura tipo cilindro reforçado por vigas. Estas densidades modais, assim calculadas, apresentam erros intoleráveis entre si. Assim, a conclusão apresentada nesse trabalho é que são necessários outros estudos para propor um método mais confiável de determinação. Porém, estes resultados foram obtidos calculando-se a densidade modal através de apenas um ponto de resposta o que certamente contribuiu para a pouca precisão dos resultados obtidos.

O trabalho apresentado por Bonilha[9] recomenda, para a obtenção de resultados confiáveis, no mínimo 3 pontos de leitura da resposta, isto para o caso de placas não reforçadas.

Neste trabalho, teve que ser usado um número maior de pontos para a obtenção de uma média espacial da mobilidade mais consistente, de forma a representar com maior precisão o comportamento dinâmico de placas reforçadas. Por outro lado, procurou-se otimizar esse número de pontos, pois, tanto a obtenção numérica, quanto a experimental demandam muito tempo para serem realizadas. Portanto, os resultados aqui obtidos, através do método da parte real da mobilidade, representam valores de compromisso entre a precisão e o tempo dispendido na sua obtenção.

#### **4.1.1 - Procedimentos Numéricos**

Para calcular a densidade modal, é necessário obter diversas curvas de mobilidade pontual em locais diferentes da placa, isto implica na mudança do ponto de aplicação da força harmônica de excitação. No ANSYS, para cada ponto de aplicação da força obriga a realização de uma análise harmônica completa. Estas análises foram realizadas pelo método da superposição modal, sendo que a análise modal que é exigida na aplicação desse método foi realizada pelo método dos subespaços. O valor da força harmônica utilizada em todas as análises foi de 1 Newton, de forma a facilitar o cálculo das mobilidades. Os dados obtidos em banda estreita, com discretização em frequência em intervalos de 2 Hz, foram introduzidos em rotinas de cálculo no *software* MathCad, para a conversão em bandas de 1/3 oitava, cálculo das médias espaciais e, finalmente, cálculo das densidades modais. Os gráficos de apresentação dos dados finais foram gerados pelo *software* Word 6.0.

#### 4.1.2 - Procedimento Experimental

Conforme já foi mostrado no Capítulo 2, através das Equações 2.2 e 2.17, há basicamente dois métodos para a obtenção da densidade modal. Nos casos mostrados no presente trabalho, a forma dada pela Equação 2.2 não é aplicável, devido à faixa de frequência em análise estender-se a valores onde, pela curva de resposta em frequência, não é possível identificar todos os modos de vibração presentes em uma banda de frequência, pois, a alta densidade modal faz com que o espaçamento entre os modos seja muito pequeno. Com isso, devido ao amortecimento, os picos maiores no espectro de resposta acabam escondendo muitos modos de menor amplitude.

Portanto, optou-se pelo método apresentado pela Equação 2.17, que é baseado na relação teórica entre a densidade modal e a média espacial da parte real da mobilidade. O método experimental aqui empregado baseia-se na Equação 2.20 apresentada no Capítulo 2, que relaciona a densidade modal com a parte imaginária da inertância. Como os transdutores mais comuns de vibração lêem valores de aceleração, optou-se por medir a inertância que aumenta a razão sinal/ruído, por evitar integração analógica ou digital.

A determinação experimental da inertância foi feita através da aplicação de um espectro de força com densidade de energia constante com a frequência (ruído branco), fornecido pelo gerador de sinais existente no próprio analisador de sinais que foi transmitido ao excitador eletrodinâmico. Sinais de carga elétrica proporcionais à força e à aceleração, medidos a partir de uma cabeça de impedância, foram introduzidos diretamente no analisador de sinais, que possui os pré-amplificadores necessários para conversão dos sinais em tensão. Através da função FRF do analisador, o sinal de força foi dividido pelo sinal de aceleração, sendo obtida, assim, a resposta em frequência na forma de massa dinâmica que, posteriormente, através de uma operação matemática de inversão, é obtida a inertância. Este procedimento foi adotado para possibilitar a compensação da massa dinâmica que é acrescentada pela cabeça de impedância, pelo parafuso e pela porca utilizada para a fixação

à placa. Esta compensação foi feita medindo-se previamente o espectro da massa dinâmica do conjunto cabeça de impedância, porca e parafuso, e subtraindo-se esse espectro dos espectros medidos com a placa acoplada. Este procedimento é recomendado por Norton e Ronowski[18], pois, a impedância acrescentada ao ponto de fixação do transdutor pela massa adicionada por este último pode alterar significativamente os resultados da medição, principalmente em altas frequências.

Esses procedimentos matemáticos de inversão da FRF e da subtração do espectro de massa dinâmica acrescentada foram realizados diretamente pelo analisador de sinais, através de rotinas internas de cálculo.

Na Figura 4.1, é mostrado o esquema de fixação da cabeça de impedância ao excitador e à placa. Utilizou-se, para a conexão do excitador eletrodinâmico e a cabeça de impedância, um arame fino de aço para garantir que a força fosse aplicada somente em uma direção e para assegurar a integridade física do transdutor, atuando como um fusível mecânico.

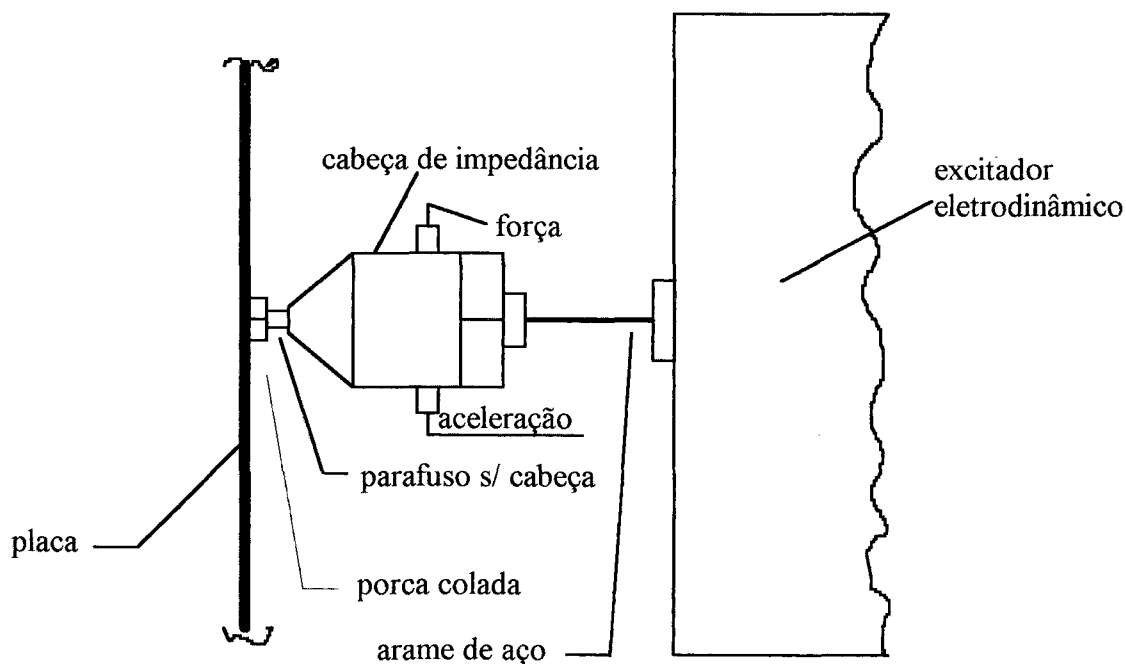


Fig.4.1 - Esquema da montagem da cabeça de impedância e do excitador eletrodinâmico à placa.

A estrutura foi simplesmente apoiada ao chão e o excitador foi suspenso por fios finos de aço fixos ao teto da sala, de forma a não aplicar força estática ao modelo. O procedimento acima descrito foi repetido em 15 pontos diferentes no caso da placa com vigas de reforço e em 10 pontos para a placa sem as vigas. A Figura 4.2 mostra o diagrama de blocos da cadeia de medição utilizada.

Para garantir a acuracidade dos valores medidos, a cadeia de medição foi calibrada através da comparação da curva de resposta obtida, quando somente a cabeça de impedância está conectada ao excitador eletrodinâmico e o valor de massa dinâmica fornecida pela carta de calibração da cabeça de impedância.

Os espectros foram medidos na faixa compreendida entre 0 e 1600 Hz, com uma resolução de 2 Hz.

Os cálculos das médias espaciais, em faixas de 1/3 oitava e da densidade modal através da Equação 2.20, foram realizados em rotinas do *software* MathCad 6.0 Plus.

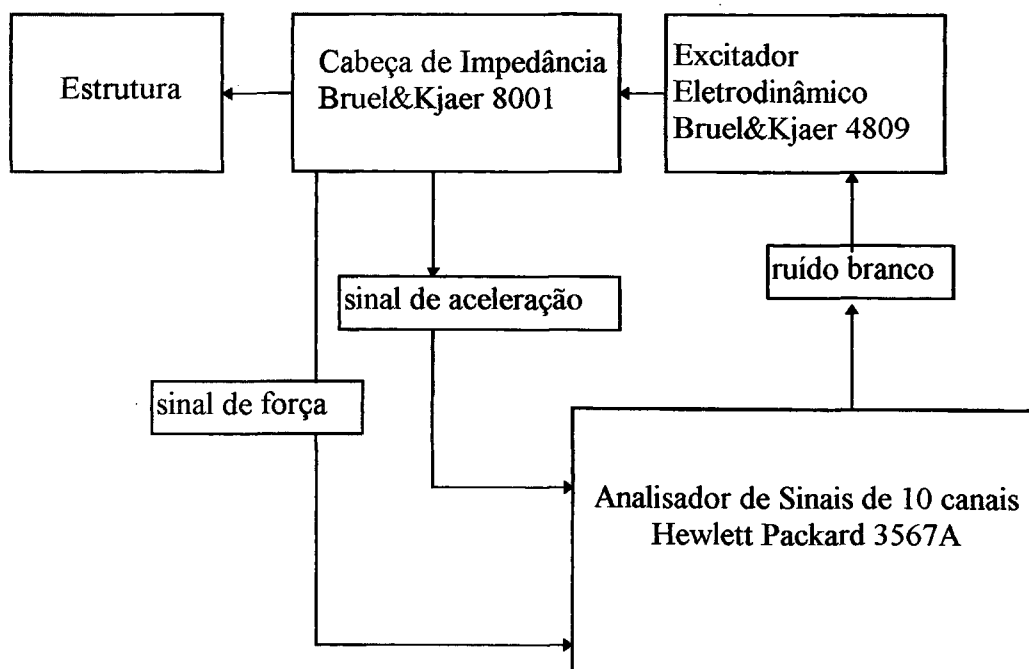


Fig. 4.2 - Diagrama de blocos da cadeia de medição.

## **4.2 - PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO DOS FATORES DE ACOPLAMENTO E DA ENERGIA VIBRATÓRIA**

O método proposto por Clarkson[6] para a obtenção dos fatores de acoplamento foi desenvolvido para estruturas não reforçadas e é sensível aos mesmos problemas mostrados para a densidade modal de não homogeneidade de respostas vibratória obtidas sobre placas ou sobre vigas.

Para contornar este problema, optou-se mais uma vez pelo aumento do número de pontos de aplicação da força de excitação e dos pontos de leitura dos espectros de velocidade, para melhorar a qualidade da média espacial e torná-la mais representativa do comportamento da estrutura como um todo. Como para cada ponto de aplicação de força considerado para a média, o tempo computacional aumenta significativamente (cerca de 12 horas de CPU), optou-se mais uma vez por uma solução de compromisso entre tempo dispendido e precisão dos resultados. Muito provavelmente, os resultados apresentados neste trabalho poderão ser melhorados com a utilização de computadores mais velozes e com maior capacidade de armazenamento de dados.

Por outro lado, a parte experimental também sofre com o aumento destes pontos de excitação, pois, torna-se longa e tediosa a obtenção de dezenas de espectros de velocidade.

### **4.2.1 - Procedimento Numérico**

O procedimento numérico utilizado para gerar as curvas de resposta em frequência empregada na determinação dos fatores de acoplamento é bastante semelhante ao empregado na determinação da densidade modal. Esse procedimento utiliza os mesmos métodos de solução, mesma discretização na frequência e mesmos tamanhos de elementos. Contudo, conforme apresentado na Equação 2.36, é necessário conhecer-se as energias vibratórias de cada uma das placas, quando somente uma recebe energia externa, ou seja, quando a força de excitação é, por exemplo, aplicada na placa 1 (ver Figura 4.3) deve-se

obter a velocidade média quadrada das placas 1 e 2 para chegar-se à determinação dos fatores de acoplamentos.

Para garantir que todos os modos de vibração presentes nas placas recebam energia de forma homogênea, Bonilha [9] recomenda para placas planas e sem reforços um número mínimo de 3 pontos diferentes de aplicação da força de excitação. Para cada ponto de excitação, extraíram-se dados de velocidade em 24 pontos na placa 1 e 18 pontos na placa 2, a fim de obterem-se dados da média espacial da velocidade quadrada o mais confiáveis possíveis. Este procedimento foi repetido para 8 pontos de excitação.

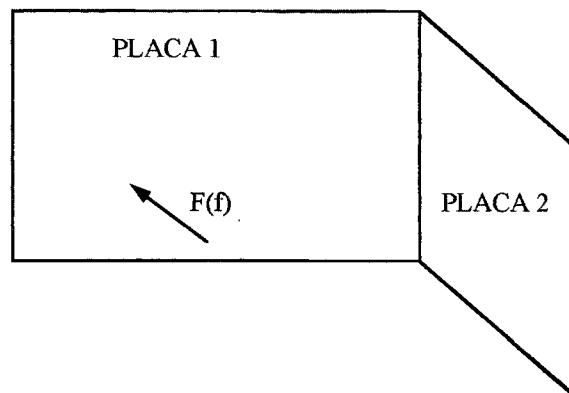


Fig. 4.3 - Indicação da nomenclatura das placas e da forma de medição.

#### 4.2.2 Procedimentos Experimentais

Para a determinação experimental dos fatores de acoplamento, utilizou-se a cadeia de medição mostrada na Figura 4.4. Nesta cadeia, a estrutura é excitada através do excitador eletrodinâmico com sinal de ruído branco, gerado pelo analisador de sinais; a aceleração da estrutura é lida através de um acelerômetro e convertida em espectros de velocidade no analisador de sinais. Esses valores foram lidos em 24 pontos diferentes para a placa número 1 e em 18 pontos diferentes para a placa 2 (a nomenclatura das placas é mostrada na Figura 4.3), todos distribuídos ao longo das placas. Este procedimento foi repetido para 8 pontos de excitação diferentes.

Os dados de velocidade obtidos foram tratados no *software* MathCad para o cálculo energia vibratória, através da Equação 2.1 e, também, para o cálculo dos fatores de acoplamento, através das equações 2.36 e 2.37.

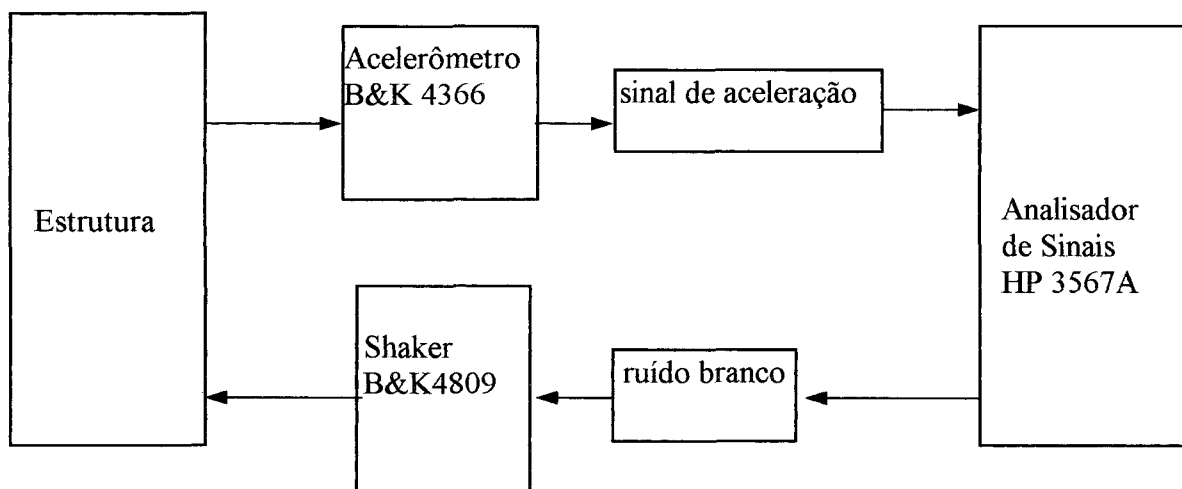


Fig. 4.4 - Diagrama de blocos da cadeia de medição de fatores de acoplamento.

## 4.3 - OS MODELOS

### 4.3.1 - Geração dos Modelos Numéricos

Devido às condições computacionais disponíveis e às limitações da versão universitária do *software* ANSYS em termos de capacidade de solução, optou-se por analisar modelos de pequenas dimensões que possibilitam o uso de elementos de dimensão razoavelmente pequenas, favorecendo a precisão das análises.

Como todas as geometrias utilizadas nas análises não são extremamente complexas, foram geradas diretamente dentro do ANSYS, através de operações de união de entidades primitivas como áreas retangulares. Na discretização de todos os modelos, foram utilizados apenas dois tipos de elementos, um de casca e um de viga, sendo aquele utilizado para a



discretização das placas e este para os reforços e as vigas utilizadas como moldura nos modelos. Dentro da biblioteca de elementos disponíveis no ANSYS, foram selecionados dois tipos específicos denominados “SHELL 63” e “BEAM 04”, sendo o primeiro de casca e o segundo de viga, conforme já descritos anteriormente no item 3.1.

As condições de contorno utilizadas foram de simples apoio, representada pela restrição dos três graus de liberdade de deslocamento, mantendo-se livre os graus de rotação de cada nó, onde a condição foi aplicada.

#### **4.3.2 - Construção dos Modelos Experimentais**

Para definir as dimensões principais dos modelos experimentais e, posteriormente, os numéricos, optou-se por dimensões que permitissem chegar a frequências relativamente altas mas, que, por outro lado, não extrapolassem as limitações da versão universitária do ANSYS, em termos de número de graus de liberdade disponíveis. Também, levou-se em consideração que o tempo de computação não fosse excessivamente longo, tendo em vista a capacidade computacional disponível.

O material empregado em todos os modelos construídos foi o aço ABNT 1020, em forma de chapas e de vigas perfis L e T.

A espessura da placa utilizada em todos os modelos foi de 2 mm. A escolha desta espessura resultou de um compromisso entre a frequência mais alta que se desejava analisar e as dimensões necessárias do elemento para a correta discretização do modelo numérico. Se a placa fosse muito fina, o tamanho do modelo seria reduzido demais e traria mais dificuldades em encontrar vigas disponíveis comercialmente com dimensões proporcionais às da placa, além de necessitar trabalhar com transdutores de menor tamanho, para não prejudicar as medições devido à massa acrescentada pontualmente.

Nos modelos empregados na determinação dos fatores de acoplamento, utilizou-se uma chapa dobrada em L, como forma de garantir a perfeita união entre as duas chapas, na linha de união.

Também, como forma de obter continuidade nas junções, entre chapas e vigas, optou-se por fazer estas uniões através de adesivo estrutural de base epóxi, que proporciona elevada aderência e rigidez nas uniões.

As outras formas de união possíveis de serem empregadas ( parafusos, rebites, solda ponto e soldagem com deposição de material) foram descartadas, pois, nos casos de uniões por parafusos, rebites ou solda-ponto, a união não é contínua e introduz grande amortecimento estrutural provocado pelo atrito relativo entre as duas partes unidas. Por outro lado, a forma de posicionamento de certas vigas no modelo não permite esses tipos de união. No caso de união tipo soldagem, com deposição de material (elétrodo revestido, MIG e MAG), foi descartada, já que a espessura da chapa empregada não permite esse tipo de solda sem que ocorra empenamento severo e por não dispor de infraestrutura adequada para tal.

Para garantir uma adesão perfeita às superfícies a serem unidas, estas foram cuidadosamente lixadas de forma a eliminar completamente a carepa de laminação e posteriormente foram limpas com solvente mineral, para garantir a completa ausência de oleosidade e poeira que poderiam afetar a aderência. Durante o processo de cura do adesivo, que dura 24 horas, as superfícies foram mantidas unidas através da utilização de grampos tipo C (sargentos).

As molduras que utilizaram vigas de perfil L com 6 mm de espessura foram construídas pelo processo de soldagem, utilizando-se cordões de solda contínuos aplicados nos dois lados da união de forma a garantir a união perfeita e conseqüente continuidade e grande rigidez estrutural.

Os tipos de vigas empregados nos modelos e a forma de posicionamento, em relação aos momentos de inércia, foram escolhidos de forma a representar o mais próximo possível estruturas típicas encontradas na prática em navios e plataformas de prospecção de petróleo.

#### 4.4 - FATOR DE PERDA ESTRUTURAL

Para a determinação dos fatores de acoplamento através das Equações 2.36 ou 2.37 apresentadas no Capítulo 2, é necessário que seja conhecido o fator de perda estrutural de cada um dos subsistemas em estudo.

O fator de perda estrutural representa o quociente entre a energia média dissipada, por radiano de vibração, e a energia total de vibração da estrutura, ou seja[9]

$$\eta = \frac{E^d}{2\pi f_c M \langle \bar{V}^2 \rangle} \quad (4.1)$$

em que  $E^d$  representa a energia média dissipada em uma dada banda de frequência centrada em  $f_c$ ,  $M$  a massa da estrutura e  $\langle \bar{V}^2 \rangle$  a média temporal e espacial da velocidade quadrada.

Porém, a definição apresentada acima somente é aplicável aos casos de estruturas que não sejam altamente amortecidas, onde a energia de vibração não varia muito dentro de um mesmo ciclo. Há dois mecanismos principais de dissipação de energia em estruturas do tipo placa reforçada por vigas: a perda interna no material e as uniões entre as placas e as vigas. Os valores típicos encontrados nesses tipos de estruturas são suficientemente grandes para invalidar a aplicação da expressão apresentada acima.

Devido às características intrínsecas do mecanismo de dissipação de energia vibratória, ainda não existem formas analíticas ou numéricas de estimá-lo com boa precisão. Por outro lado, há diversos métodos de medi-lo, entre os quais podem ser citados o da potência de entrada e o do decaimento.

No presente trabalho, optou-se por utilizar o método do decaimento, por ser de fácil implementação, em medições no campo, e apresentar resultados razoavelmente precisos, apesar de, às vezes, subestimar ligeiramente os valores medidos em relação ao método da potência de entrada.

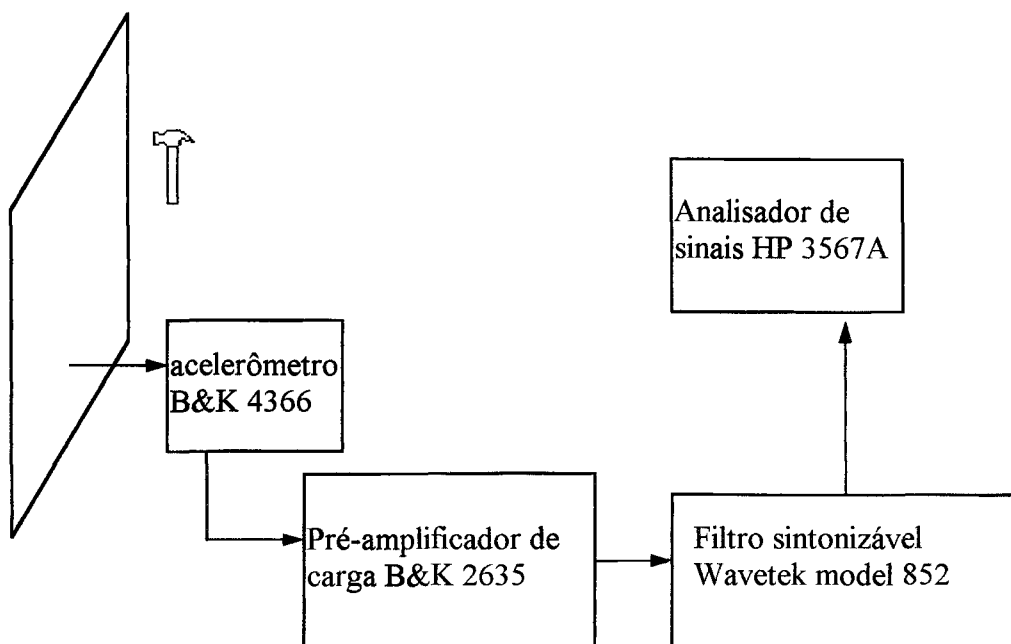


Fig. 4.5 - Diagrama da cadeia de medição do fator de perda estrutural.

O método do decaimento consiste em aplicar uma excitação transiente à estrutura, de forma a excitar todos os modos de interesse dentro de uma banda de análise e registrar o sinal do decaimento, filtrando-o dentro desta banda de frequências. Neste método, o amortecimento estrutural é medido através do tempo de reverberação da estrutura,  $T$ , que é definido como o tempo necessário para a energia vibratória decair 60 dB do seu valor inicial, quando a excitação é interrompida. Desta forma, o fator de perda,  $\eta$ , é calculado através da seguinte relação:

$$\eta = \frac{2.2}{f_c T} \quad (4.2)$$

em que  $f_c$  denota a frequência central da banda de interesse.

O procedimento experimental utilizado, neste trabalho, consiste em excitar a estrutura através de impactos produzidos com um martelo. A resposta da estrutura é monitorada com um acelerômetro de baixa massa, cujo sinal gerado, previamente tratado em um pré-amplificador de carga, foi filtrado por um filtro passa-banda em bandas de 1/3oitava

e, finalmente, introduzindo-o em um analisador de sinais para obter decaimento do sinal, em dB, contra o tempo.

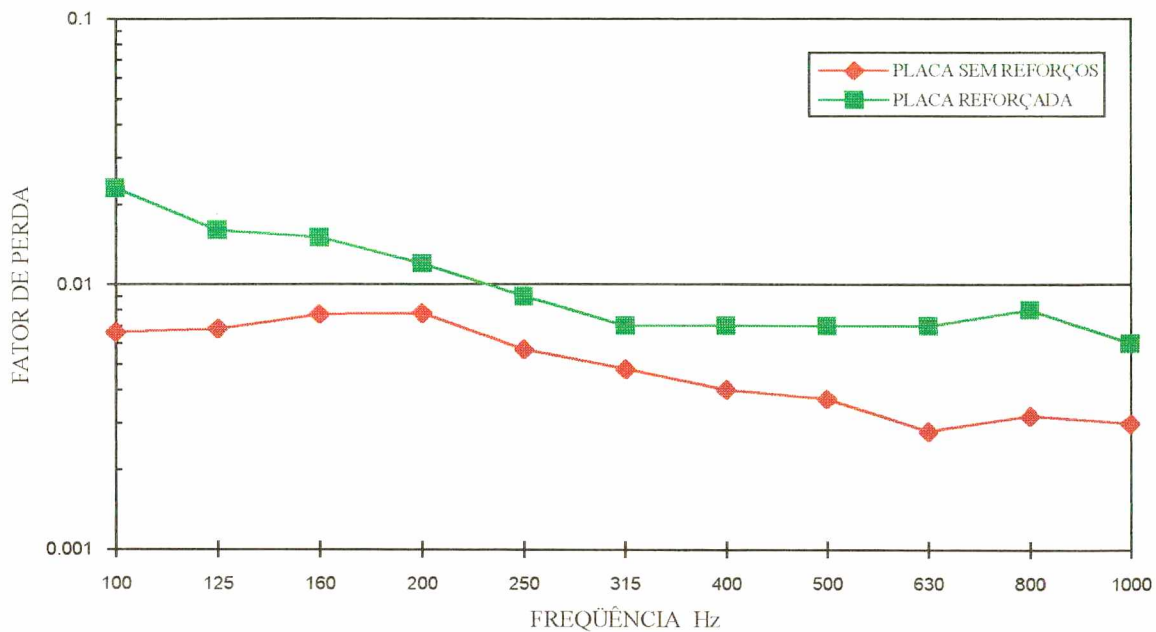


Fig.4.6 - Fator de perda estrutural  $\eta$  para placas com e sem reforços.

Os resultados das medições do fator de perda estrutural para placas com e sem reforços são mostrados na Figura 4.6. Como era esperado, a placa com reforços possui maior amortecimento devido às vigas de reforços que foram fixadas com adesivo epóxi.

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos para Fatores de Acoplamento entre placas unidas em forma de L e de Densidade Modal de placas planas. Para os fatores de acoplamento são mostrados resultados obtidos para vários posicionamentos diferentes das vigas de reforço.

São comparadas predições analíticas (SEA) com as obtidas de forma numérica e experimental, objetivando verificar as influências das vigas de reforço sobre os parâmetros envolvidos em SEA, assim como os erros neles introduzidos quando tais sistemas são modelados por placas sem reforços.

#### 5.1 - FATORES DE ACOPLAMENTO

Os casos analisados são listados abaixo, seus respectivos desenhos esquemáticos com detalhes construtivos e os resultados obtidos estão apresentados nas figuras de 5.2 a 5.13. Na Figura 5.1, são mostrados esquemas sucintos indicando a nomenclatura empregada para cada configuração.

Caso 1 - Duas placas unidas em forma de L sem vigas de reforço (Figura 5.2).

Caso 2 - Duas placas unidas em forma de L com vigas de reforço alinhadas (Figura 5.6).

Caso 3 - Duas placas unidas em forma de L com vigas de reforço paralelas (Figura 5.9).

Caso 4 - Duas placas unidas em forma de L com vigas de reforço perpendiculares (Figura 5.12).

Na Figura 5.2, é mostrado o sistema formado por duas placas unidas em forma de L sem vigas de reforço centrais (Caso1) e seus detalhes construtivos. Ao longo da borda foram

introduzidas vigas de perfil L com o objetivo de aumentar a rigidez para manter todos os casos analisados dentro de uma mesma faixa de frequência de análise, uma vez que somente foi possível analisar numericamente os primeiros 160 modos vibracionais de cada estrutura.

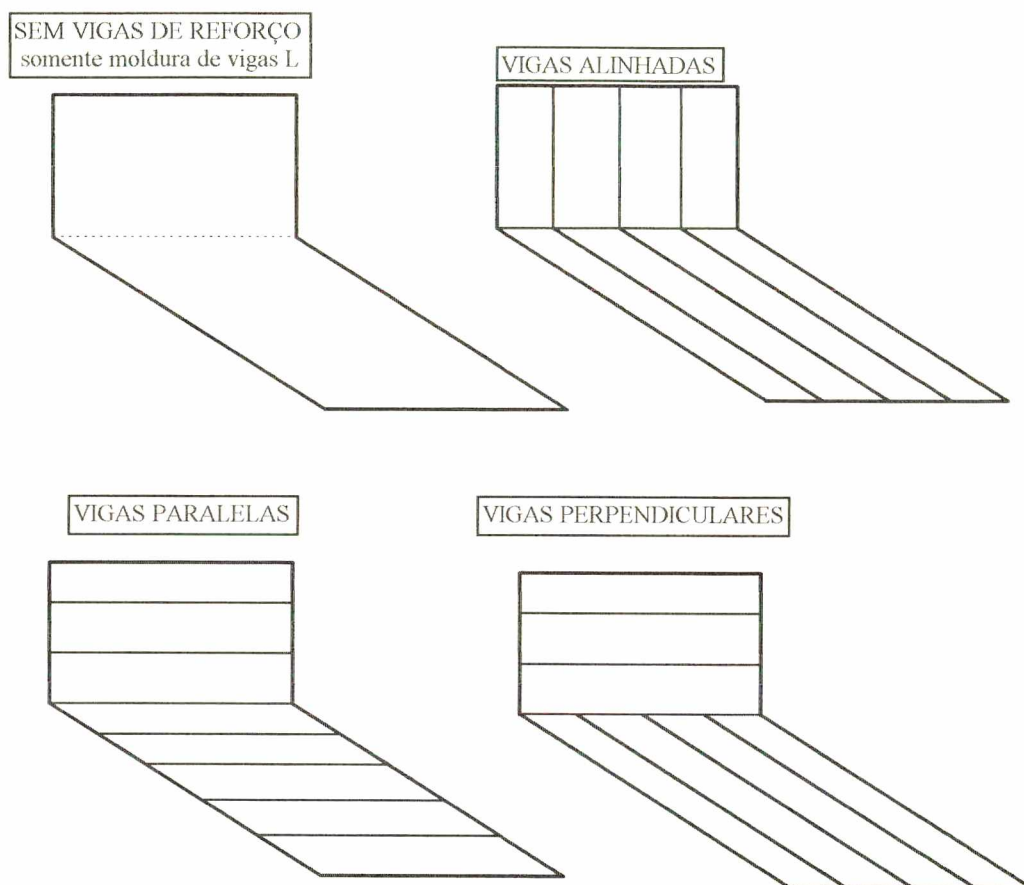


Fig. 5.1 - Esquemas e nomenclatura dos sistemas de duas placas utilizados nas análises.

Nas Figuras 5.3 e 5.4, são apresentados os resultados para os fatores de acoplamento  $\eta_{12}$  e  $\eta_{21}$ , respectivamente, obtidos de forma analítica, numérica e experimental.

Dessas figuras pode-se observar a concordância razoavelmente boa entre os resultados numéricos, analíticos (para placas sem reforços) e experimentais. Os resultados numéricos apresentam boa concordância com experimentais a partir de 250 Hz. Isto deve-se, basicamente, à dificuldade em reproduzir as condições de contorno no modelo experimental, que se acredita possam influenciar mais severamente os resultados, nas baixas frequências. Uma vez que na predição numérica foram restringidos os três graus de liberdade de translação em cada nó da borda do modelo e, apesar das vigas introduzidas nas laterais, o

fato do modelo experimental ter sido apoiado ao piso, certamente, estas condições de contorno do modelo experimental estão longe de representar as restrições impostas ao modelo numérico. Desta forma, a densidade modal do modelo numérico é menor que a do experimental, principalmente em baixas frequências, sendo inferior ao limite estipulado para SEA, ou seja, pelo menos 5 modos por faixa de frequência trocando energia em cada subsistema.

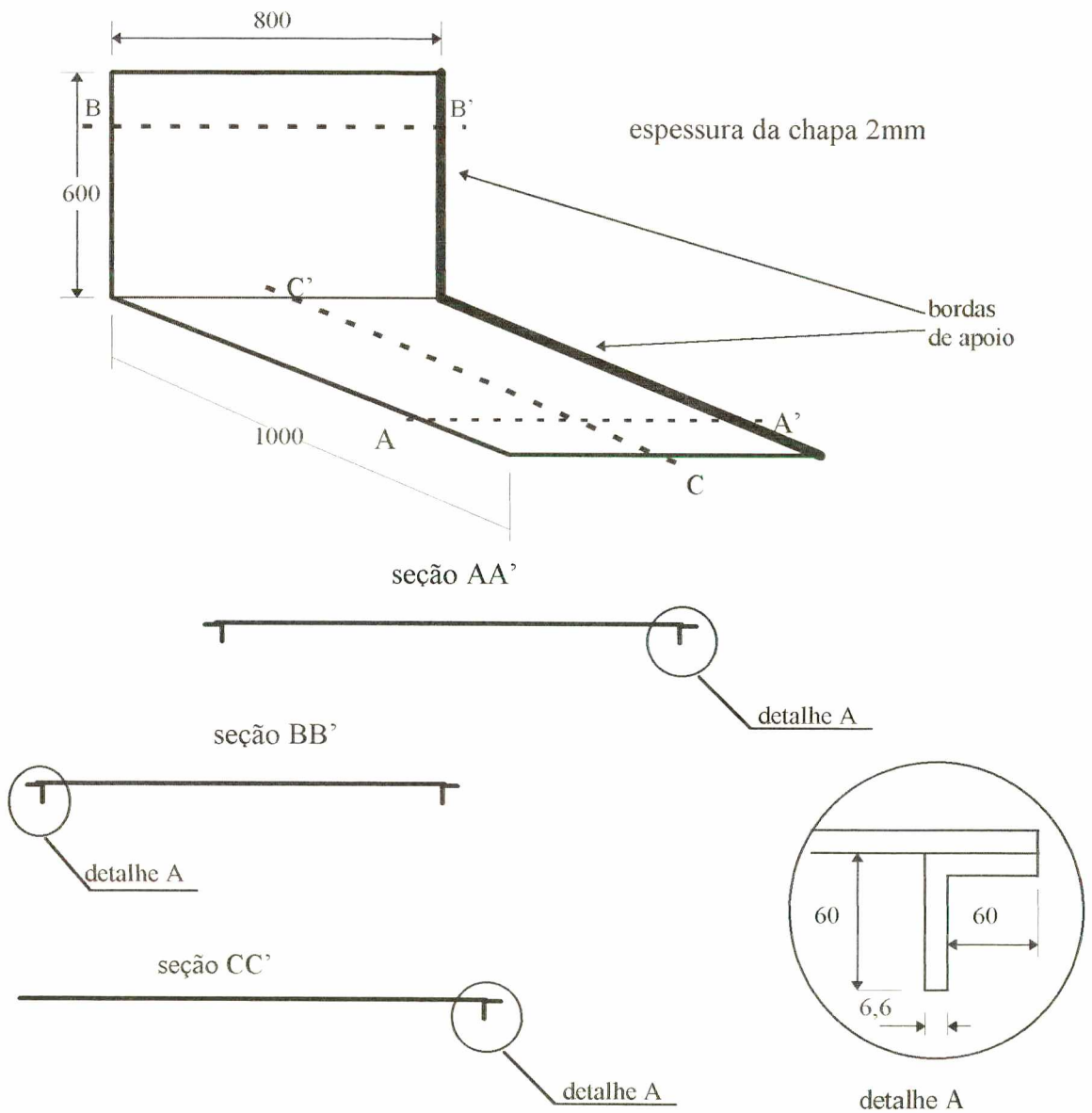


Fig. 5.2 - Desenho esquemático das placas sem reforços unidas em forma de L (Caso 1) (dimensões em mm).



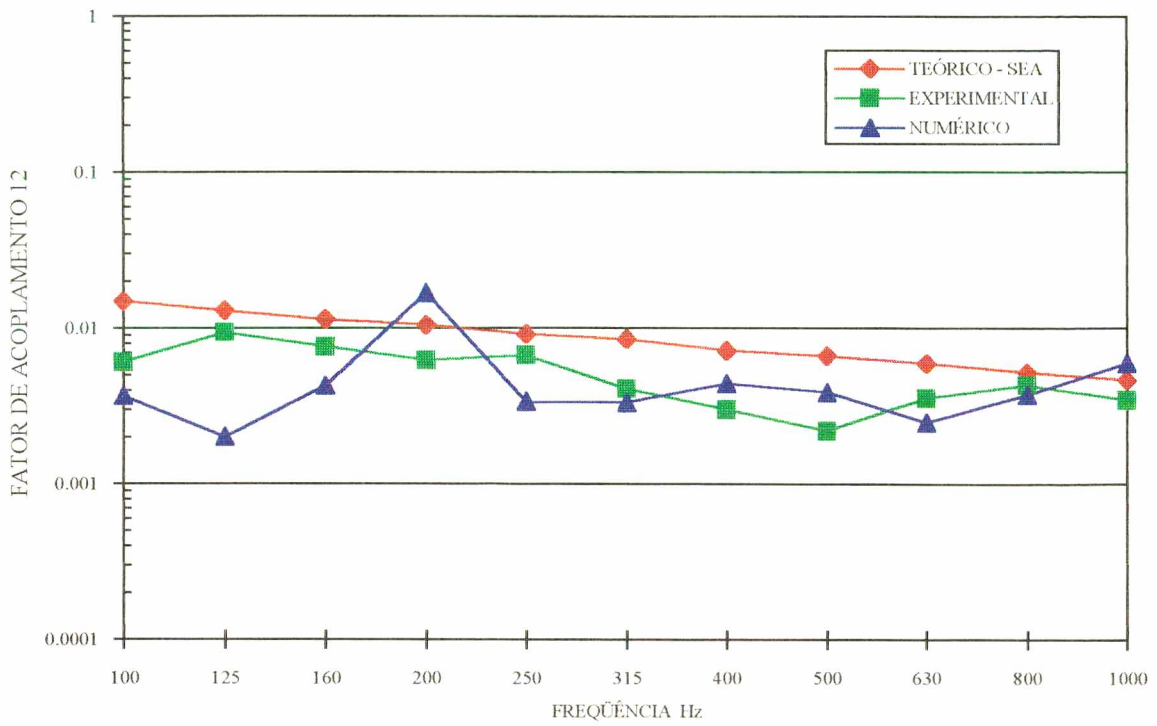


Fig. 5.3 - Fatores de acoplamento  $\eta_{12}$  para placas sem vigas de reforço.

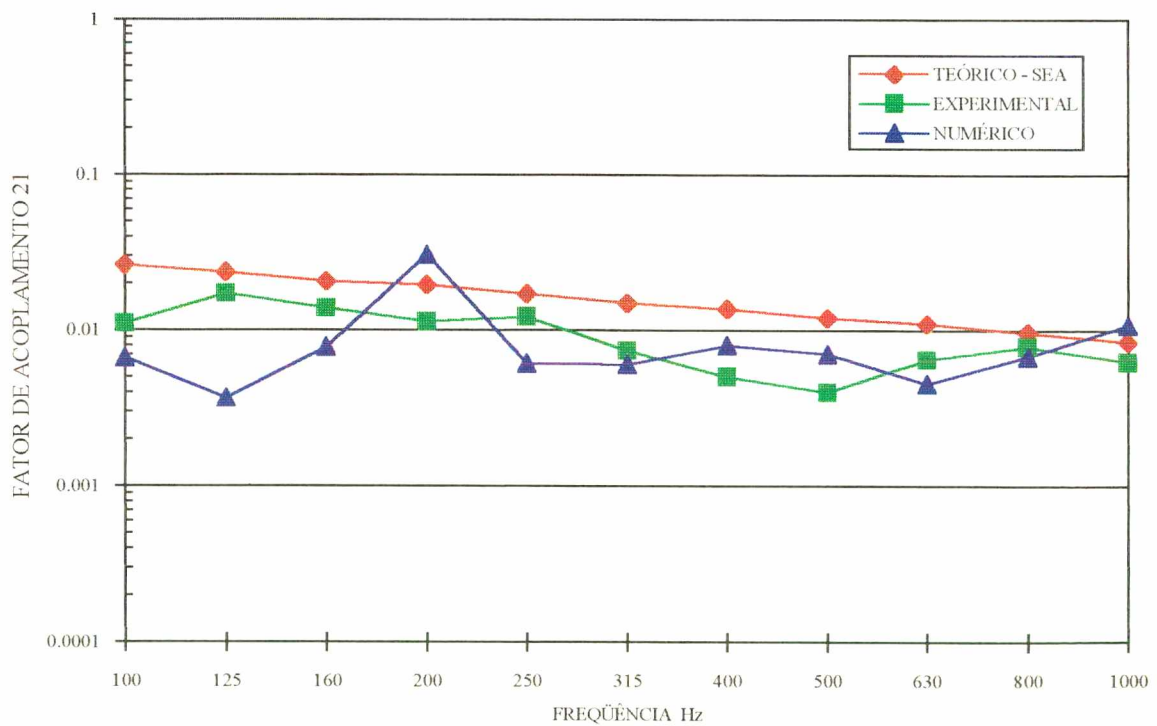


Fig. 5.4- Fatores de acoplamento  $\eta_{21}$  para placas sem vigas de reforço.

Em análise modal realizada no ANSYS, para placas de 0,8 x 1,0 m e 0,8 x 0,6 m com 2mm de espessura, utilizadas no modelo com condições de contorno de apoio simples e totalmente livre, mostrou que, quando são acopladas estas placas livres, o limite de 5 modos por subsistema por banda de frequência é obtida nas bandas de 125/160 Hz, enquanto que para as placas com apoio simples, esse limite está em 200/250 Hz, conforme mostrado na Tabela 5.4. Isto também pode ser observado quando é comparada a mobilidade predita numericamente com a obtida experimentalmente, conforme Figura 5.5.

Tabela 5.1 - Tabela comparativa entre número de modos por bandas 1/3 oitava, predição numérica. As áreas sombreadas indicam a região de aplicação de SEA.

FREQ.	NÚMERO DE MODOS			
	APOIO SIMPLES		TOTALMENTE LIVRE	
	0,6 x 0,8 m	1,0 x 0,8 m	0,6 x 0,8 m	1,0 x 0,8 m
100	2	2	3	6
125	3	3	4	4
160	2	4	6	8
200	6	6	3	6
250	3	7	8	10
315	8	8	8	10

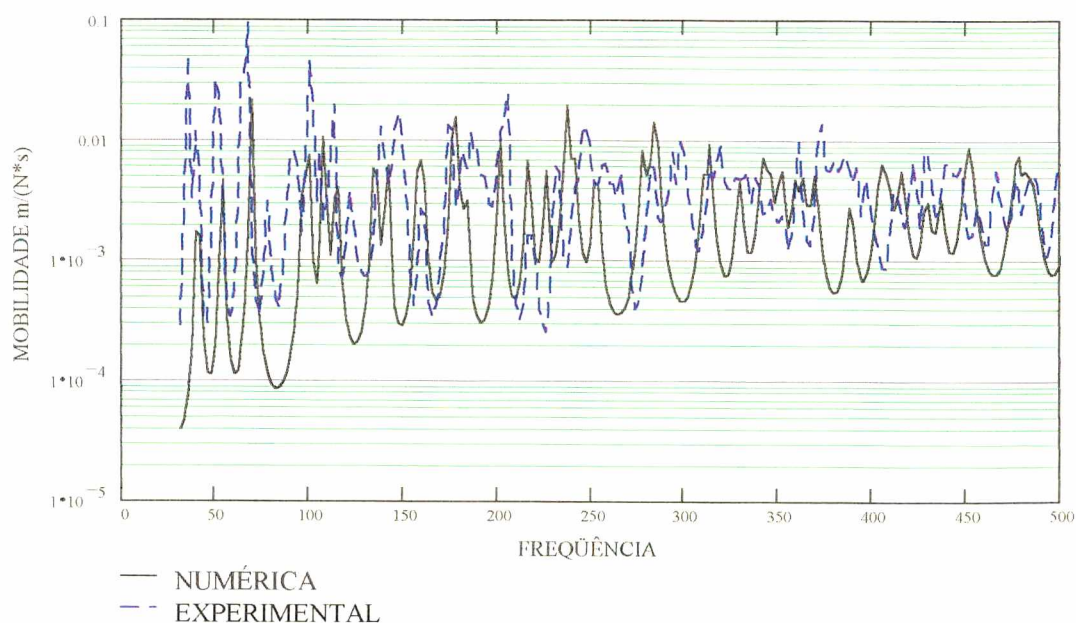


Fig. 5.5 - Curvas de mobilidade média para placa sem reforços de 1,0x0,8 m.

Além disso, a determinação dos fatores de acoplamento está diretamente ligada à determinação da energia vibratória de cada subsistema. No caso experimental, devido à forma pela qual foram aplicadas as condições de contorno, a determinação da energia vibratória pode ter sido influenciada pelo contato das vigas posicionadas nas bordas com o piso, favorecendo a fuga de energia do sistema para o meio. As condições de contorno ideais para esse tipo de experimento deveriam ser a suspensão do modelo através de fios muito finos de forma a minimizar a fuga de energia para o meio externo. Contudo, devido ao peso deste tipo de estrutura, desejava-se, também, conhecer a influência sobre os resultados quando estas placas são apoiadas diretamente no piso.

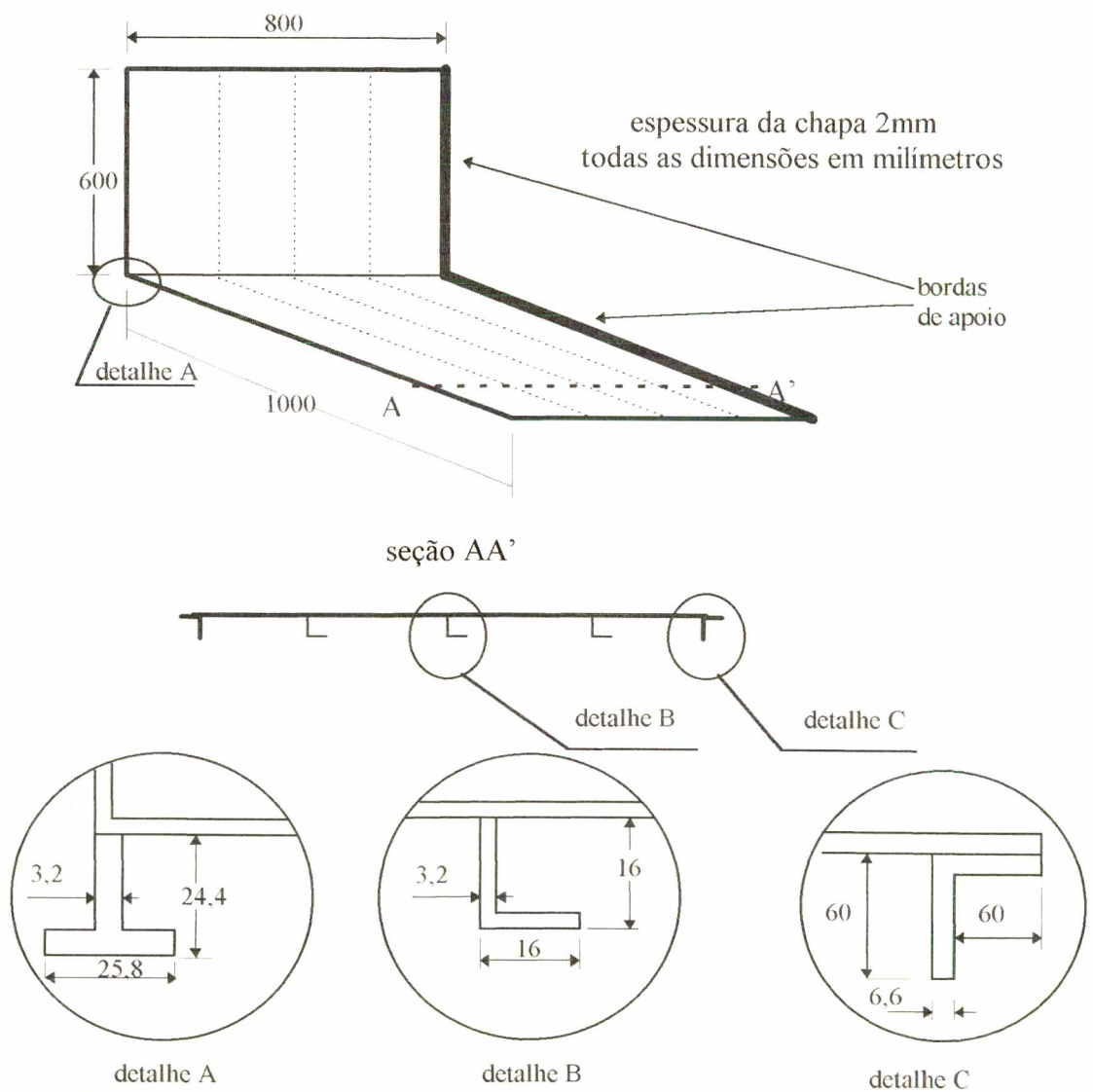


Fig. 5.6 - Desenho esquemático das placas com vigas alinhadas.

Por outro lado, os resultados numéricos não consideram fugas de energia, pois as condições de contorno impostas são ideais e, portanto, não dissipam energia.

Todos esses fatores somados possuem grande influência sobre os resultados das energias vibratórias totais de cada subsistema que é o parâmetro fundamental para a determinação dos fatores de acoplamento, como mostram as Equações 2.36 e 2.37 apresentadas no Capítulo 2.

As Figuras 5.7 e 5.8 apresentam os resultados dos fatores de acoplamento para o sistema formado por duas placas acopladas com as vigas de reforço alinhadas (caso 2), conforme esquema mostrado na Figura 5.6.

As vigas alinhadas ou perpendiculares à linha de união entre as placas tendem a aumentar a rigidez dos modos que se acomodam nesta direção, aumentando a frequência de ressonância desses modos. Por outro lado, diminuem a frequência de ressonância dos modos que se acomodam na transversal, devido ao efeito de massa. Estes dois efeitos somados agrupam os modos criando regiões no espectro de alta densidade modal separadas por outras de baixo número de modos.

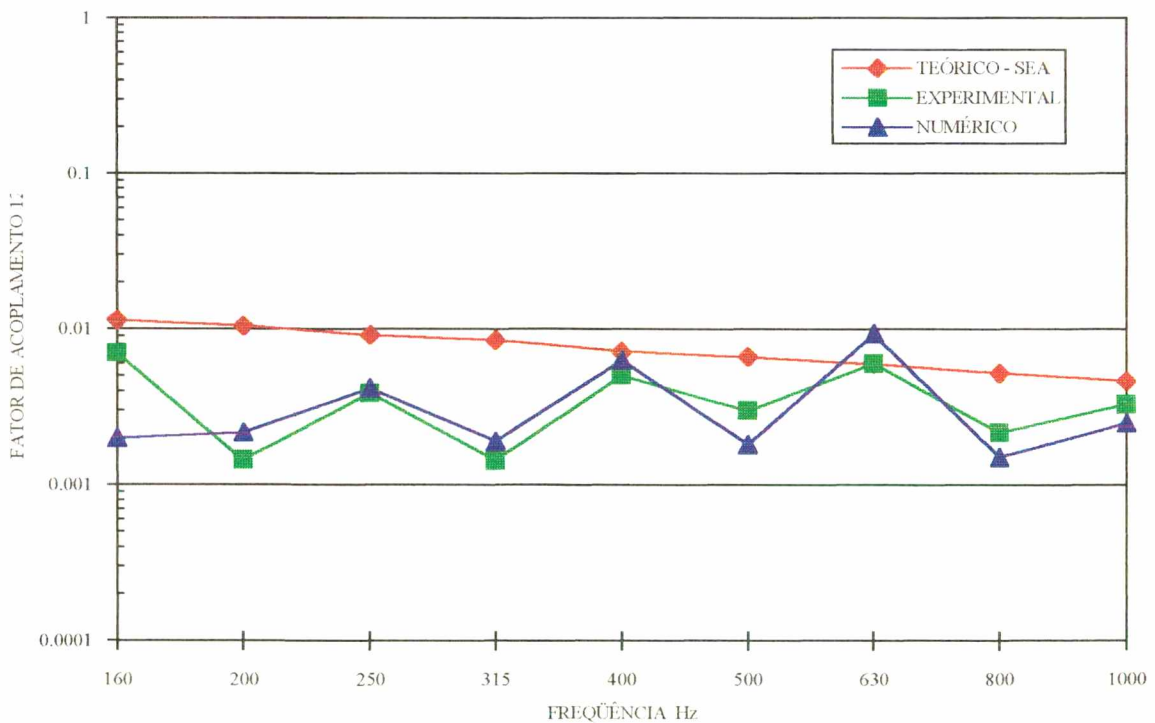


Fig. 5.7- Fatores de acoplamento  $\eta_{12}$  para placas com vigas alinhadas.

Esse efeito provoca os picos que são observados tanto nos resultados obtidos numericamente, como nos experimentais. Isso porque as regiões com maior densidade



modal de cada subsistema trocam energia com mais facilidade em relação às de densidade modal menor.

Outro fato importante a observar é que os fatores de acoplamento preditos analiticamente decrescem com a frequência, enquanto que para placas reforçadas não é mais válido, indicando uma tendência de resultados constantes com a frequência.

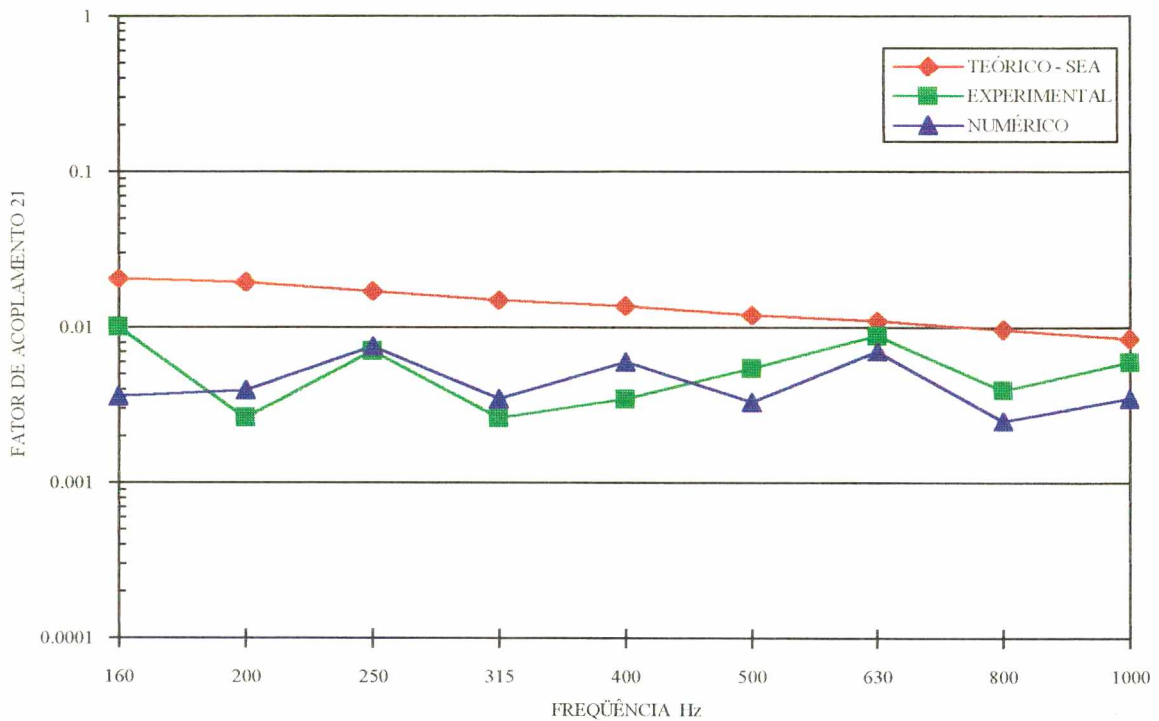


Fig. 5.8 - Fatores de acoplamento  $\eta_{21}$  para placas com vigas alinhadas.

A Figura 5.9 mostra o desenho esquemático detalhado do sistema composto por placas reforçadas com vigas colocadas paralelamente à linha de união entre as placas (caso 3).

Com esse posicionamento das vigas de reforço é introduzida rigidez aos modos que se acomodam na direção paralela à união. Como os principais movimentos de esforços que fazem a transmissão de energia são a rotação e o momento flexor, na direção da união, são criadas barreiras à propagação da onda.

O maior efeito é a adição de massa que diminuem as frequências de ressonância. Este efeito é caracterizado nos fatores de acoplamento mostrados nas Figuras 5.10 e 5.11, quando comparados aos fatores  $\eta_{12}$  e  $\eta_{21}$  obtidos para placas sem reforços, mostrados nas

Figuras 5.3 e 5.4, os quais podem ser observado o aumento dos fatores de acoplamento principalmente nas baixas frequências.

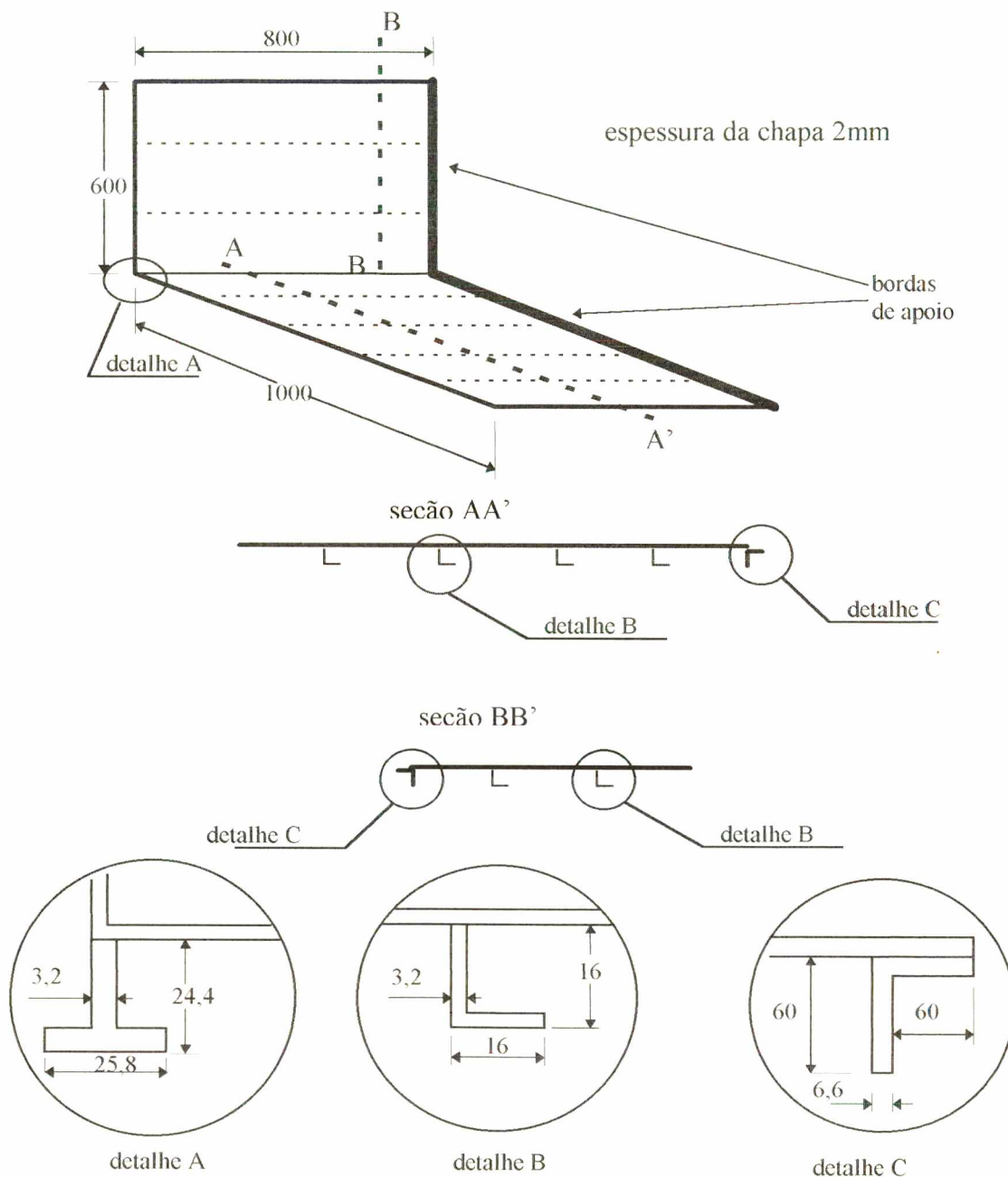


Fig. 5.9 - Desenho esquemático das placas com vigas paralelas(dimensões em mm).

Os menores valores apresentados nas altas frequências podem ser atribuídos ao efeito de massa e aumento da rigidez devido às vigas de reforço que formam uma espécie de barreira que tendem a dificultar a propagação de ondas de pequeno comprimento.

Novamente, é importante observar as diferenças entre os valores preditos analiticamente para placas sem reforços e os resultados numéricos e experimentais obtidos

para placas com reforços.

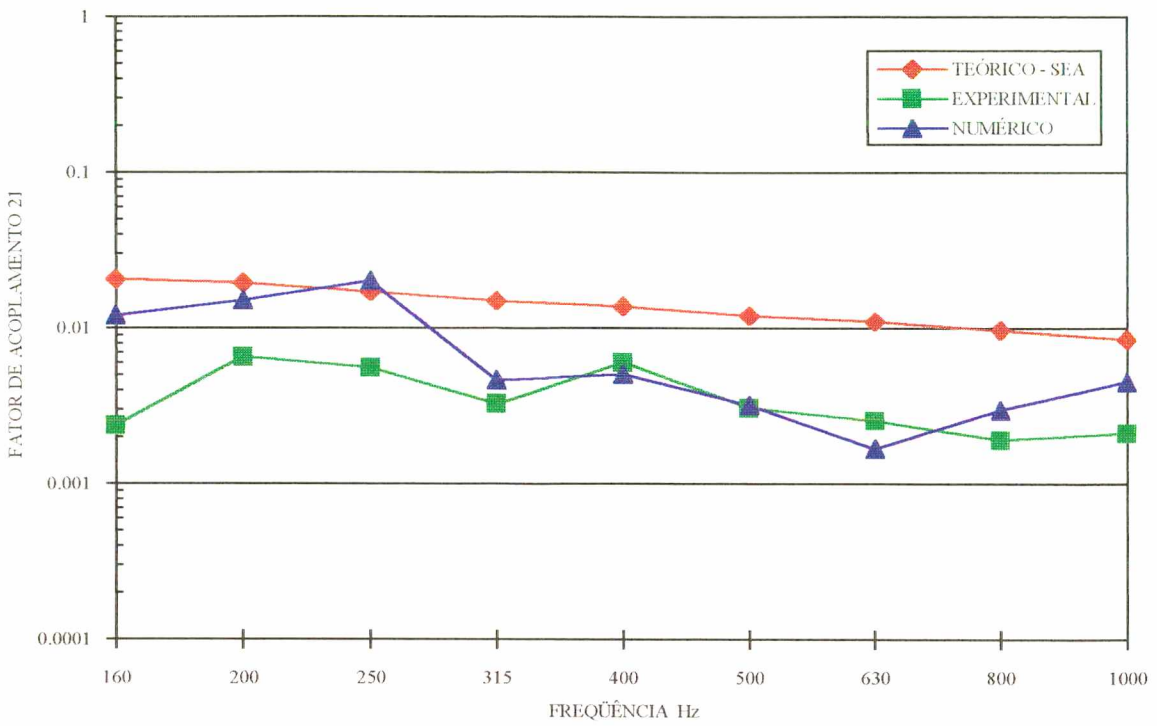


Fig. 5.10- Fatores de acoplamento  $\eta_{21}$  para placas com vigas paralelas.

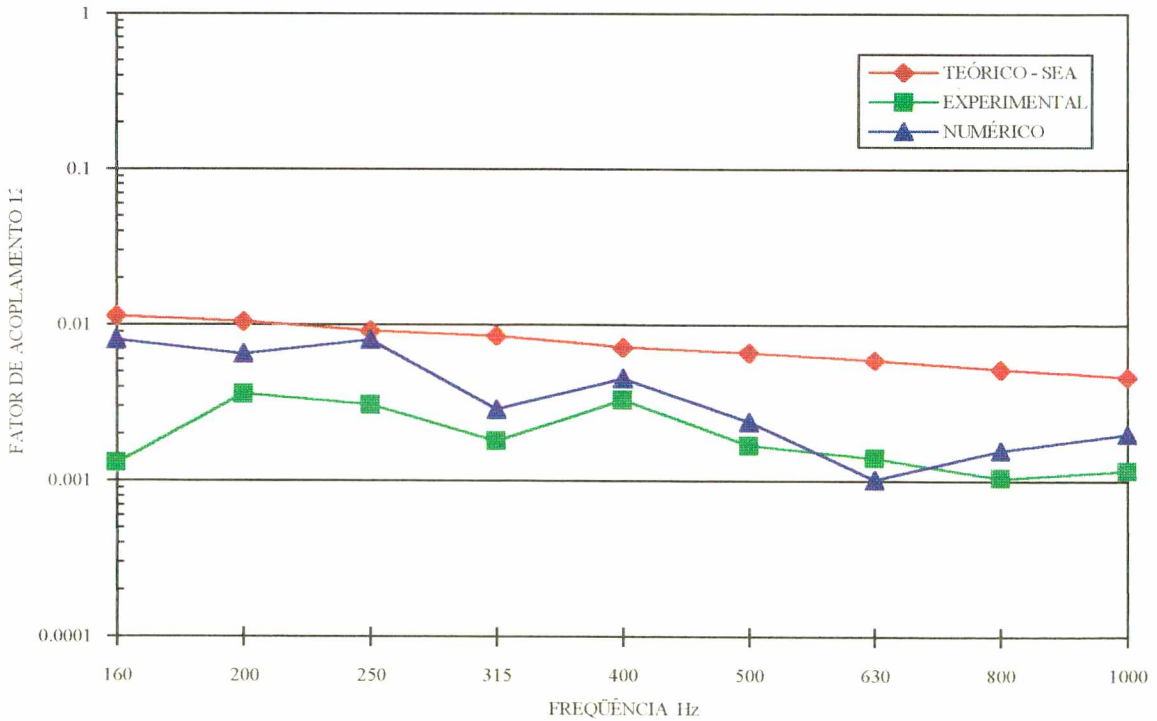


Fig. 5.11 - Fatores de acoplamento  $\eta_{12}$  para placas com vigas paralelas.

As diferenças entre os resultados numéricos e os experimentais nas bandas de 160 a 250 Hz podem ser atribuídos às diferenças de condições de contorno numéricas e às empregadas nos experimentos, além do atrito com o piso e fugas de energia para o meio externo.

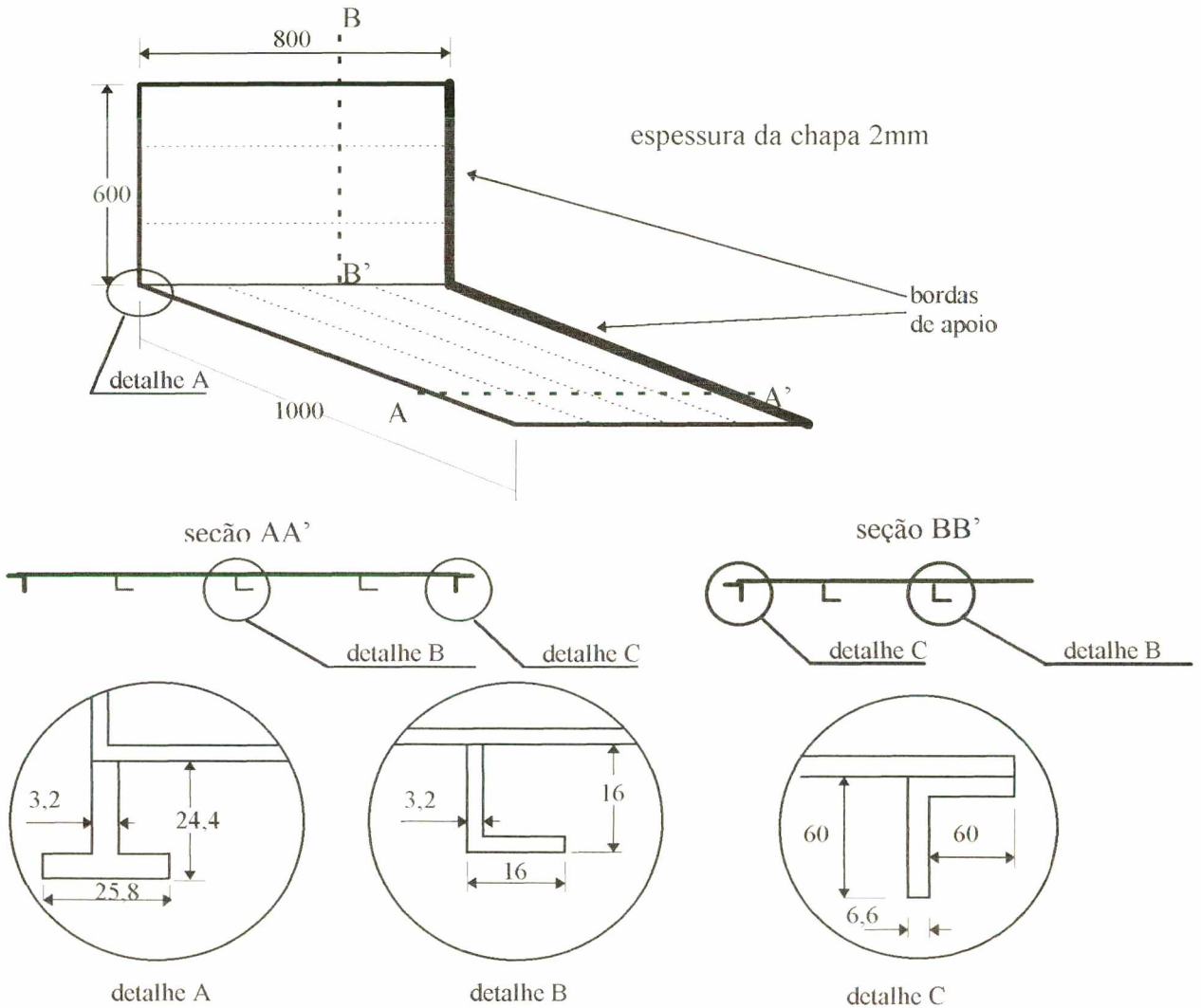


Fig. 5.12 - Desenho esquemático das placas com vigas perpendiculares (dimensões em mm).

Outro sistema muito importante analisado neste trabalho é o formado por duas placas, com vigas de reforço de uma das placas posicionadas perpendicularmente em relação às vigas da outra placa (caso 4).

Nesse tipo de posicionamento de vigas, adiciona-se muita rigidez ao sentido de propagação de onda na placa 1 e, principalmente, massa na placa 2.



Essa combinação facilita a propagação de energia do subsistema 1 para o 2, visto que o último apresenta maior flexibilidade; já o caminho inverso é bastante dificultado, como é mostrado pelos fatores de acoplamento  $\eta_{12}$  e  $\eta_{21}$ , nas Figuras 5.13 e 5.14, respectivamente.

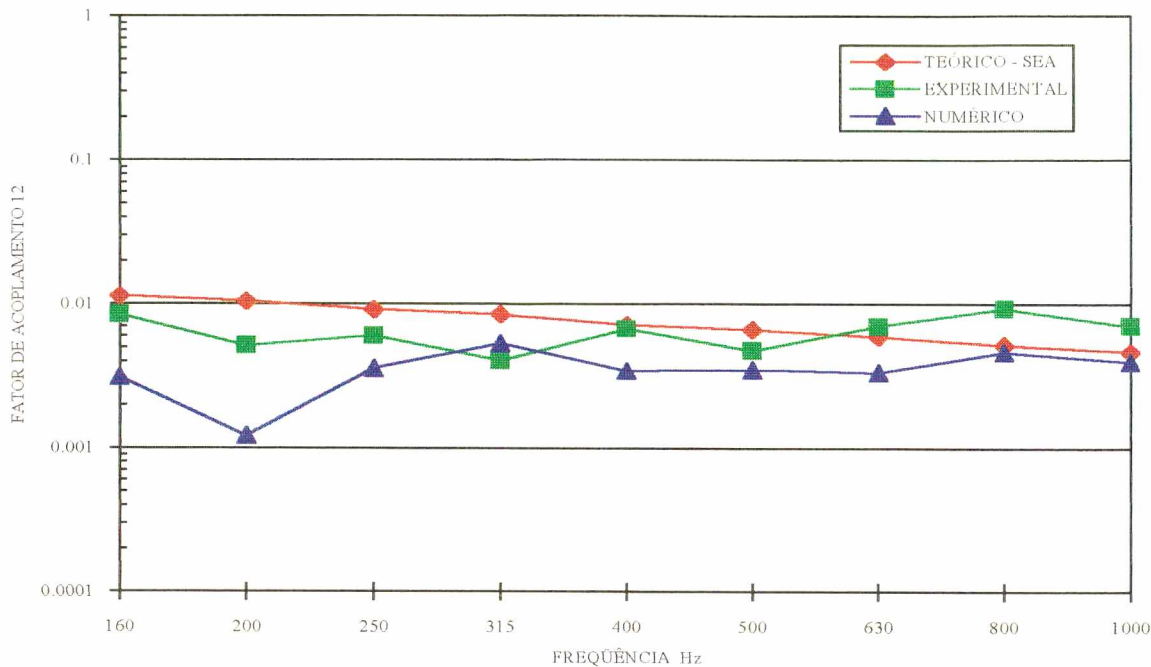


Fig. 5.13- Fatores de acoplamento  $\eta_{12}$  para placas com vigas perpendiculares.

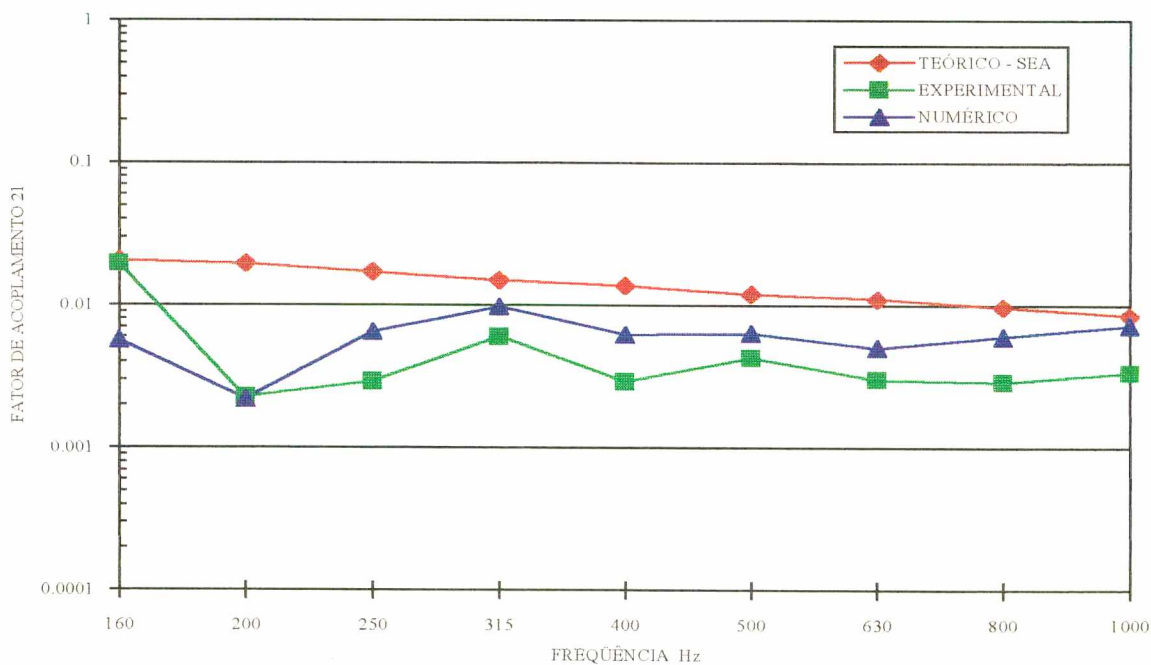


Fig. 5.14- Fatores de acoplamento  $\eta_{21}$  para placas com vigas perpendiculares.

Comparando-se os quatro casos analisados, observa-se que os resultados para fatores de acoplamento são distintos entre si, indicando que a aproximação ou a simplificação de placas reforçadas por vigas através de resultados de placas sem reforços introduzirão grandes erros nas predições de fatores de acoplamento e, por conseqüência, nas energias vibratórias preditas por SEA. Constatou-se que as diferenças não são constantes no espectro e variam caso a caso, não respeitando a mesma tendência de placas sem reforços.

Apesar do número de modos por banda dos componentes dos casos analisados serem próximos (ver Figura 5.15), as diferenças na forma de propagação da energia refletem-se nos resultados dos fatores de acoplamento. Isto ocorre porque as placas respondem de forma mais localizada, nas regiões entre as vigas de reforço.

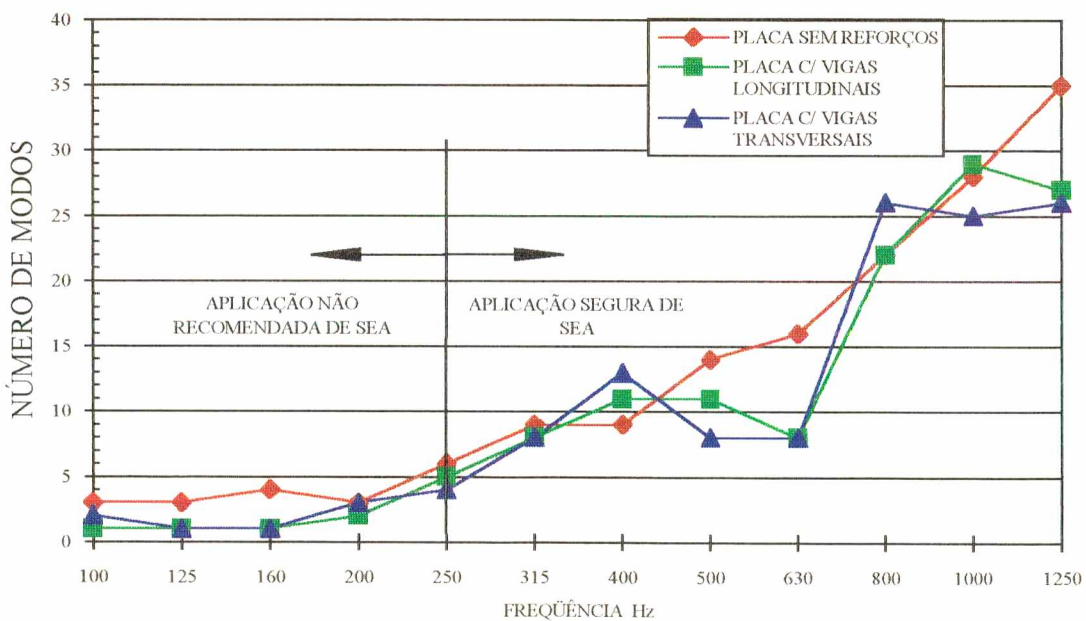


Fig. 5.15 - Gráfico de número de modos por banda 1/3 oitava.

## 5.2 - DENSIDADE MODAL

A seguir, são mostrados os resultados obtidos para a densidade modal, utilizando os métodos descritos no Capítulo 2 para várias configurações de placas.

Como já comentado, foram utilizados ao longo deste trabalho basicamente dois métodos para a obtenção da densidade modal:

1) Método da Contagem, que consiste em contar o número de modos contidos em uma determinada faixa de frequência e dividir pela largura da faixa de frequência. Este método é restrito às faixas de frequência em que os modos se apresentam suficientemente afastados, de forma que possam ser claramente identificados em curvas de resposta em frequência. Apresenta como vantagem a aplicação em métodos de análise modal que forneçam como dados de saída os autovalores.

2) Método da Mobilidade, no qual a densidade modal é obtida a partir da parte real da mobilidade. Este método é empregado principalmente em determinações experimentais onde não é possível utilizar o método da contagem.

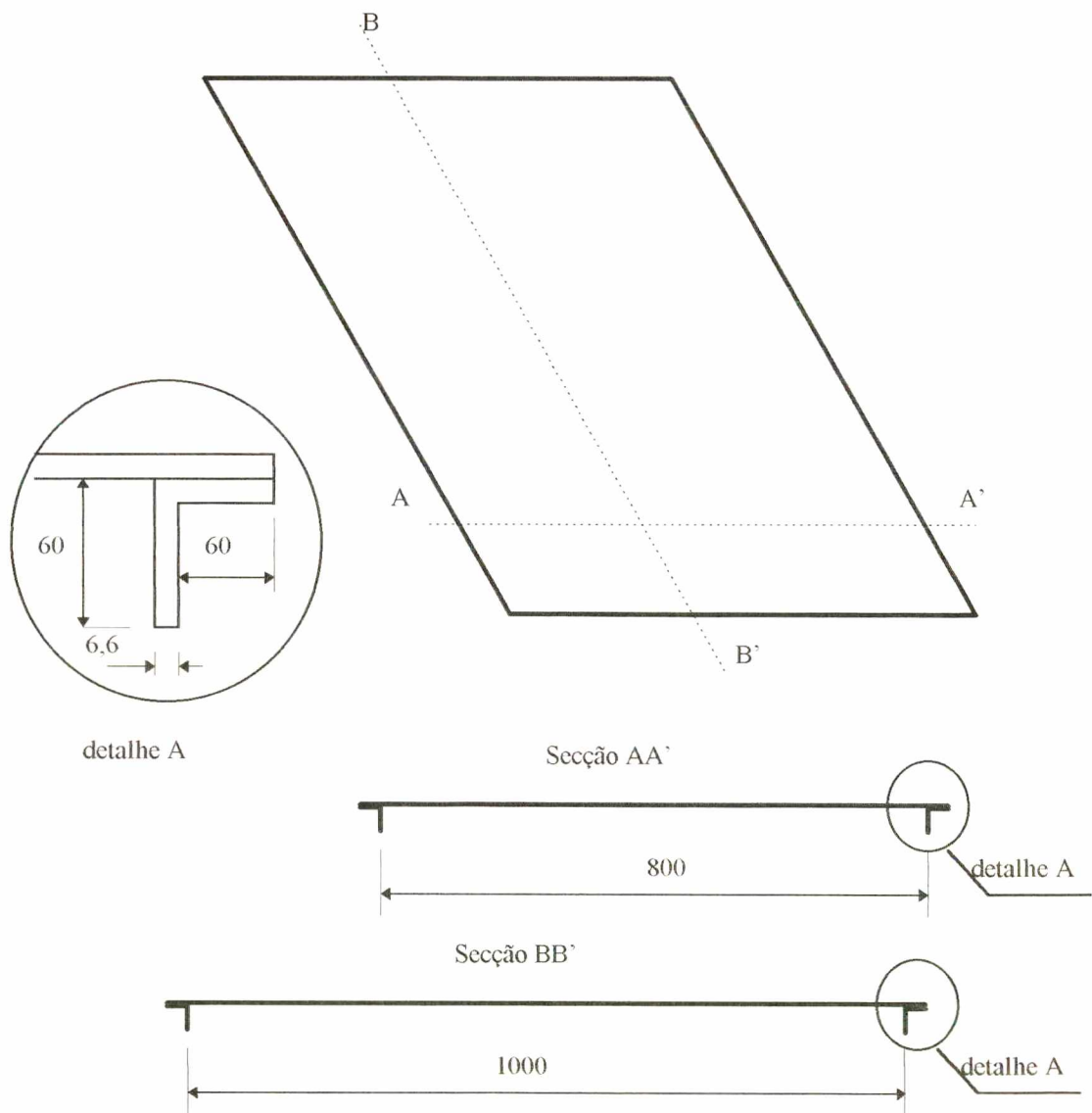


Fig. 5.16 - Esquema construtivo da placa sem reforços (dimensões em milímetros).

### 5.2.1 - Placas Sem Vigas de Reforços

A Figura 5.16 mostra um esquema da placa com vigas localizadas somente nas bordas. Os resultados de densidade modal preditos analítica (Equação 2.3) e numericamente, pelo método da contagem, através dos autovalores fornecidos pelo MEF, são mostrados nas Figuras 5.17 e 5.18.

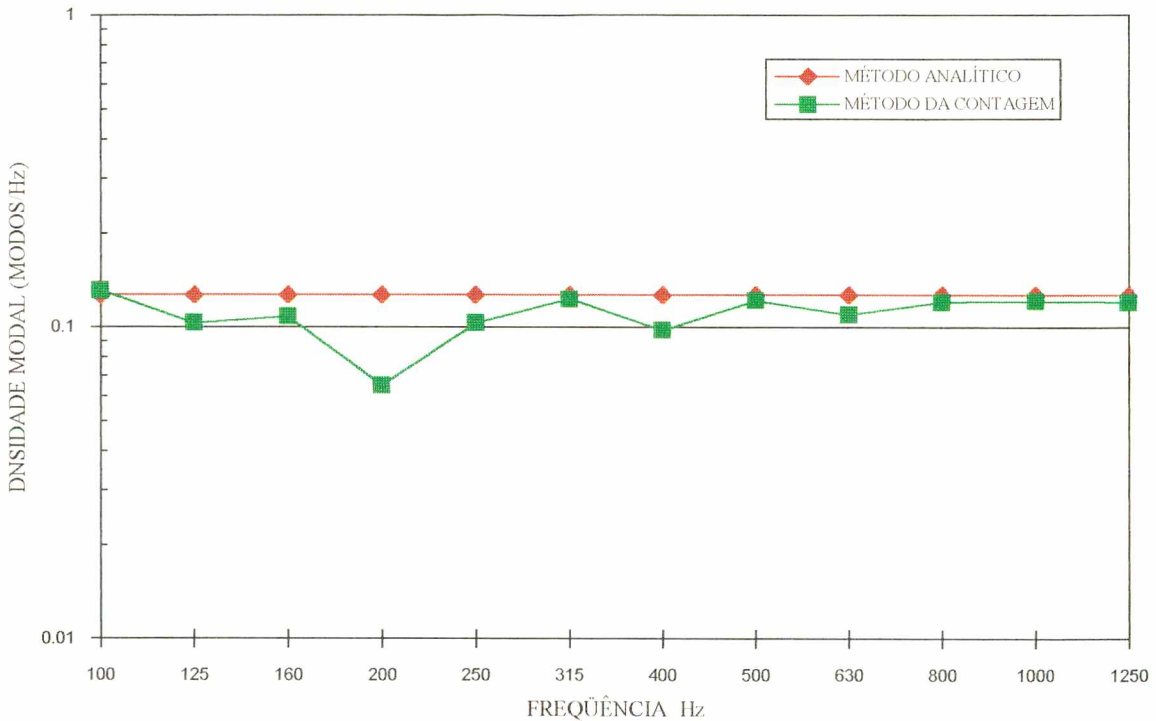


Fig. 5.17 - Gráfico comparativo entre densidades modais calculadas pelos métodos analítico, e da contagem de modos para placa plana sem reforços.

Apesar da existência das vigas nas bordas da placa, os resultados numéricos são bastante próximos dos resultados analíticos, que consideram uma placa pura e uniforme. A única exceção é observada na banda de 200 Hz, na qual a predição numérica é inferior. Entretanto, este resultado não pode ser considerado como um erro do procedimento numérico, tendo em vista as diferenças entre as placas analisadas.

Na Figura 5.18, é apresentada uma comparação entre os valores da densidade modal fornecidos pelo método da mobilidade, obtida de forma numérica, experimental e os valores analíticos.



Até a banda de 500 Hz observa-se significativa superestimação dos valores obtidos experimentalmente. Isto deve-se às diferenças entre as condições de contorno.

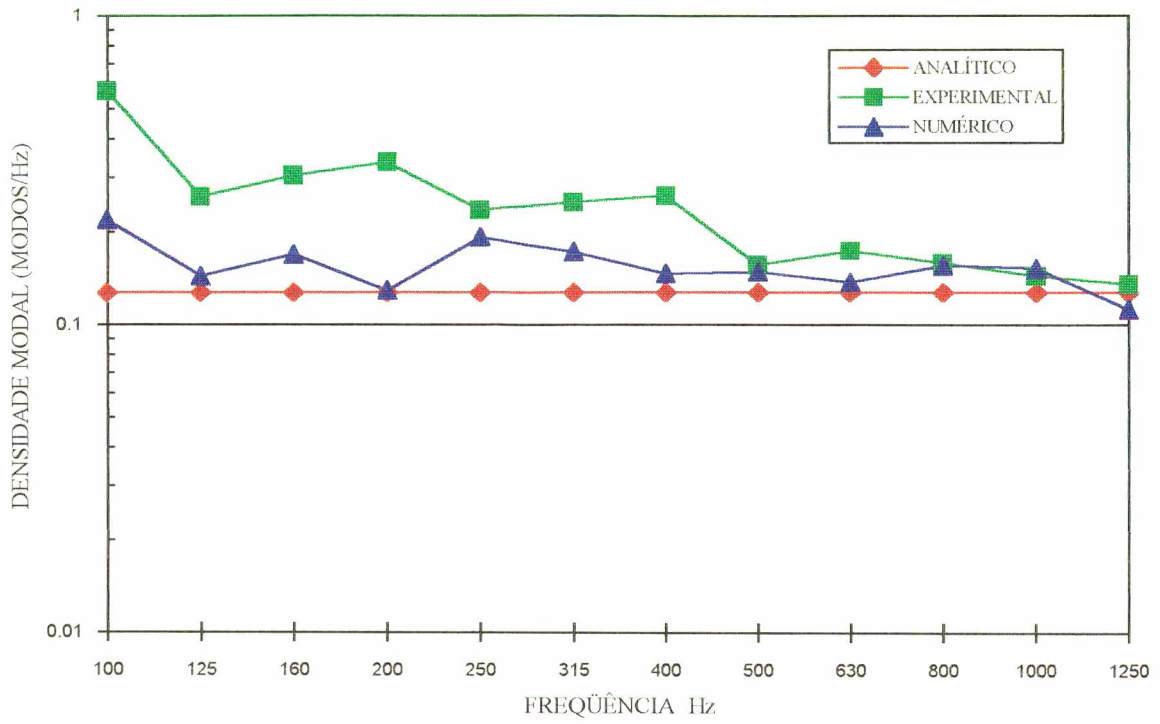


Fig. 5.18 - Gráficos de densidade modal obtidos pelo método da parte real da mobilidade para uma placa sem reforços.

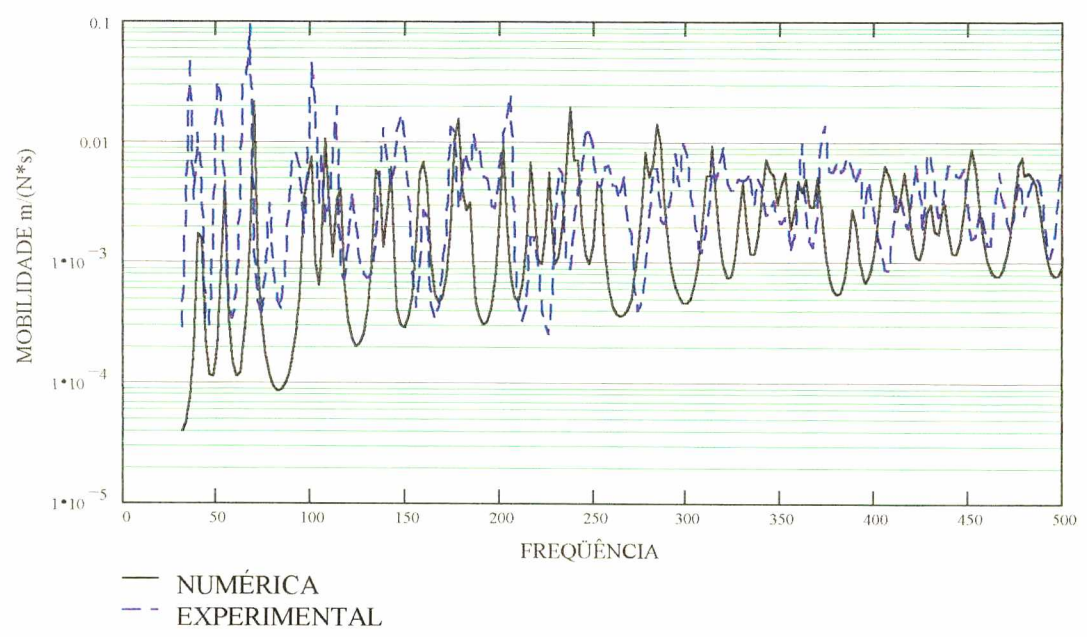


Fig. 5.19 - Curvas de mobilidade média para placa sem reforços de 1,0x0,8 m.

Como a restrição obtida numericamente é perfeita, isto é, restringe completamente os três graus de liberdade de translação, os resultados numéricos seguem mais fielmente os analíticos. Por outro lado, como a restrição obtida experimentalmente não é perfeita, permite certa movimentação que se reflete no aumento da mobilidade da placa, principalmente em baixas frequências (ver Figura 5.19). Contudo, com o aumento da frequência, a influência das condições de contorno no comportamento geral da placa é minimizado e assim os resultados experimentais convergem para os analíticos e numéricos.

Essas divergências de resultados explicam as diferenças observadas nas predições dos fatores de acoplamento apresentadas no item 5.1.

A Figura 5.20 mostra o espectro comparativo entre valores obtidos pelos métodos da mobilidade, da contagem (ambos numéricos) e analítico.

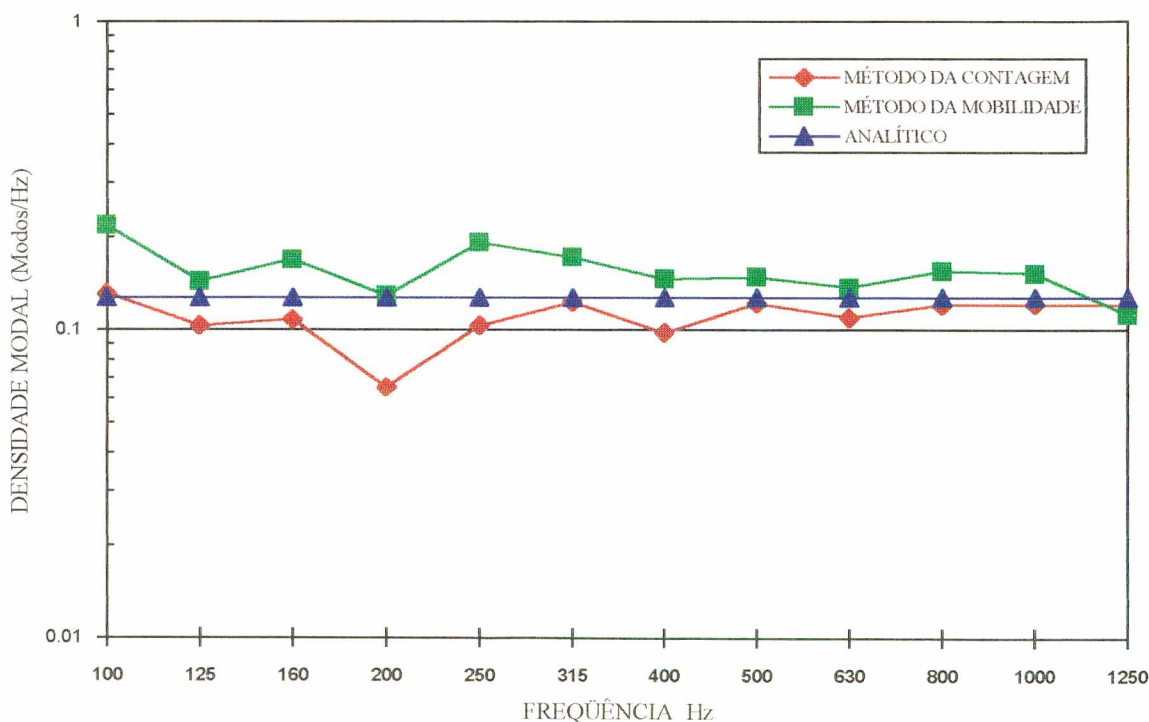


Fig. 5.20 - Gráfico de densidade modal para placas sem reforços obtidas pelo método da contagem de modos e da parte real da mobilidade.

Novamente, percebe-se uma concordância razoavelmente boa entre os resultados numéricos e os analíticos. Entretanto, comparando o método da mobilidade com o método da contagem de modos, observa-se que aquele tende a superestimar os valores analíticos.

A superestimação da densidade modal em baixas frequências pelo método da mobilidade ocorre devido aos modos de ordem menores possuírem elevada mobilidade. Assim, quando é feita a média dentro de uma banda que possui, às vezes, apenas um modo de grande amplitude, esta indicará grande densidade modal, o que é totalmente equivocado.

Dessa maneira, a partir da banda de 315 Hz (ver Figura 5.15), quando o número de modos por faixa de frequência chega próximo a 9, os valores aproximam-se dos obtidos pelo método da contagem.

### 5.2.2 - Placas Reforçadas

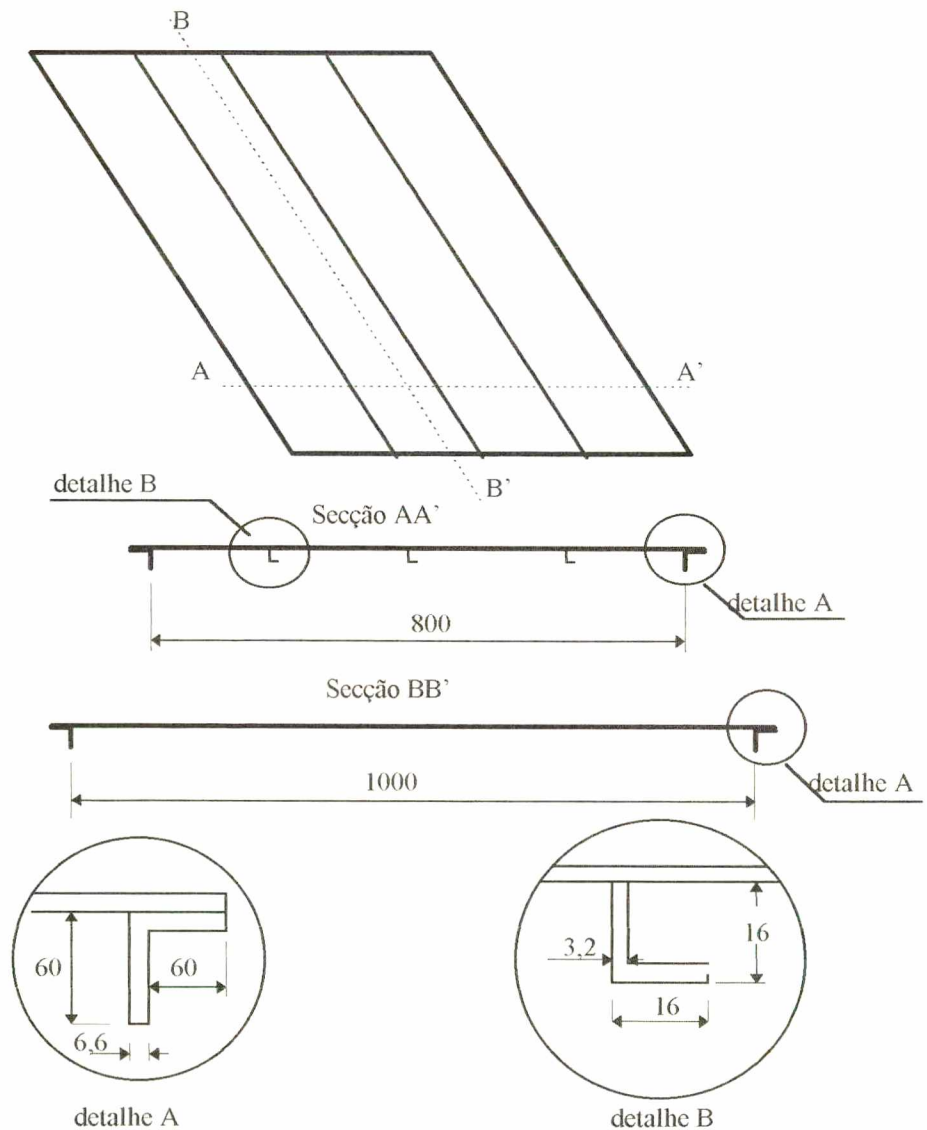


Fig. 5.21 - Esquema construtivo da placa com reforços (dimensões em milímetros).

Na Figura 5.21, é mostrado o esquema construtivo da placa e seus reforços. Tais reforços aumentam significativamente a rigidez, principalmente nos modos de ordem mais baixa. Nos modos de ordem elevada isso é menos perceptível, pois os reforços provocam alterações localizadas, que tendem a mudar apenas a forma dos modos sem, contudo, alterar significativamente sua frequência.

Esse comportamento provoca uma redução da densidade modal em baixas frequências, conforme é mostrado na Figura 5.22.

Este fato também pode ser observado, analisando-se as frequências do primeiro e do 160º modos de ambas as placas que são respectivamente: 23 Hz e 1441 Hz para placa sem reforços, 55 Hz e 1654 Hz para a reforçada. Significa um acréscimo de 59% para a frequência do primeiro modo e 13% para o último modo.

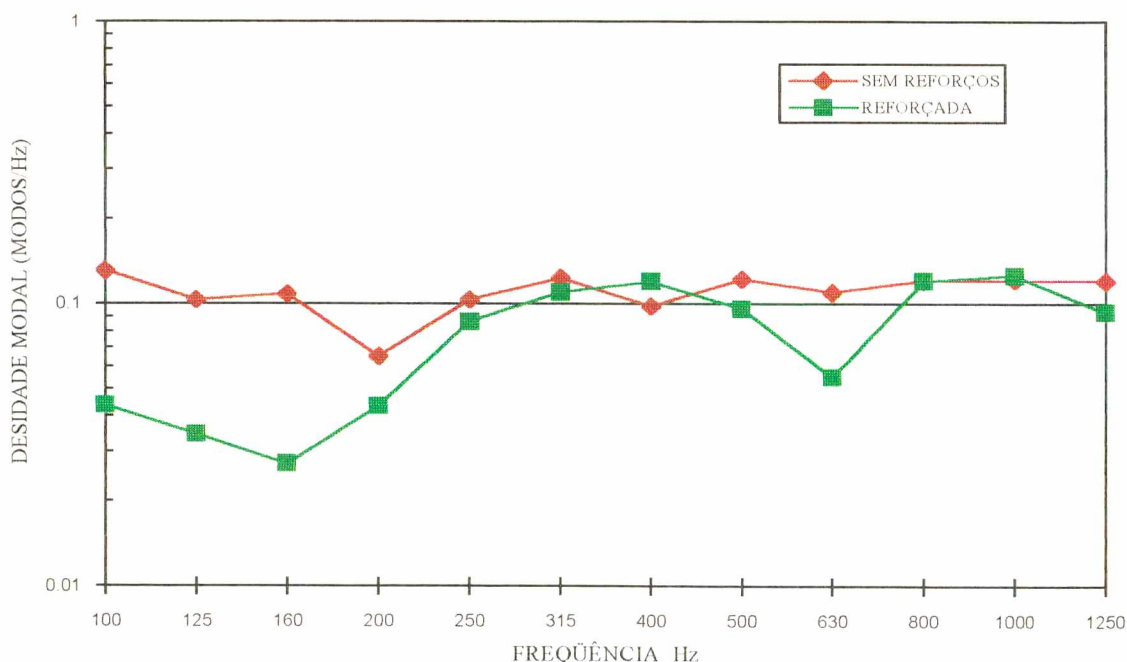


Fig. 5.22 - Gráfico de densidade modal para placas com e sem reforços obtidas pelo método da contagem de modos.

A diminuição da densidade modal da placa reforçada na banda de 630 Hz deve-se ao fato, já comentado no Item 5.1, de que o acréscimo de massa e rigidez em regiões localizadas, pela adição das vigas, provoca o aumento da frequência dos modos que se acomodam no sentido das vigas, devido ao acréscimo da rigidez, e a diminuição da frequência dos modos que se acomodam perpendicularmente às vigas, devido ao acréscimo



localizado da massa. Dessa forma, a placa reforçada responde como um sistema formado por várias placas periodicamente acopladas. Isto provoca o agrupamento dos modos, gerando no espectro regiões de alta densidade modal separadas por regiões de baixa densidade. Cushieri, na referência [19], comenta comportamento semelhante para vigas periodicamente acopladas.

A Figura 5.23 mostra os resultados obtidos pelos métodos da mobilidade e analítico para placas reforçadas. De forma análoga ao apresentado para a placa sem reforços, observa-se a superestimação pelo método da mobilidade, em relação ao da contagem de modos, tanto para mobilidades obtidas de forma analítica, quanto numericamente.

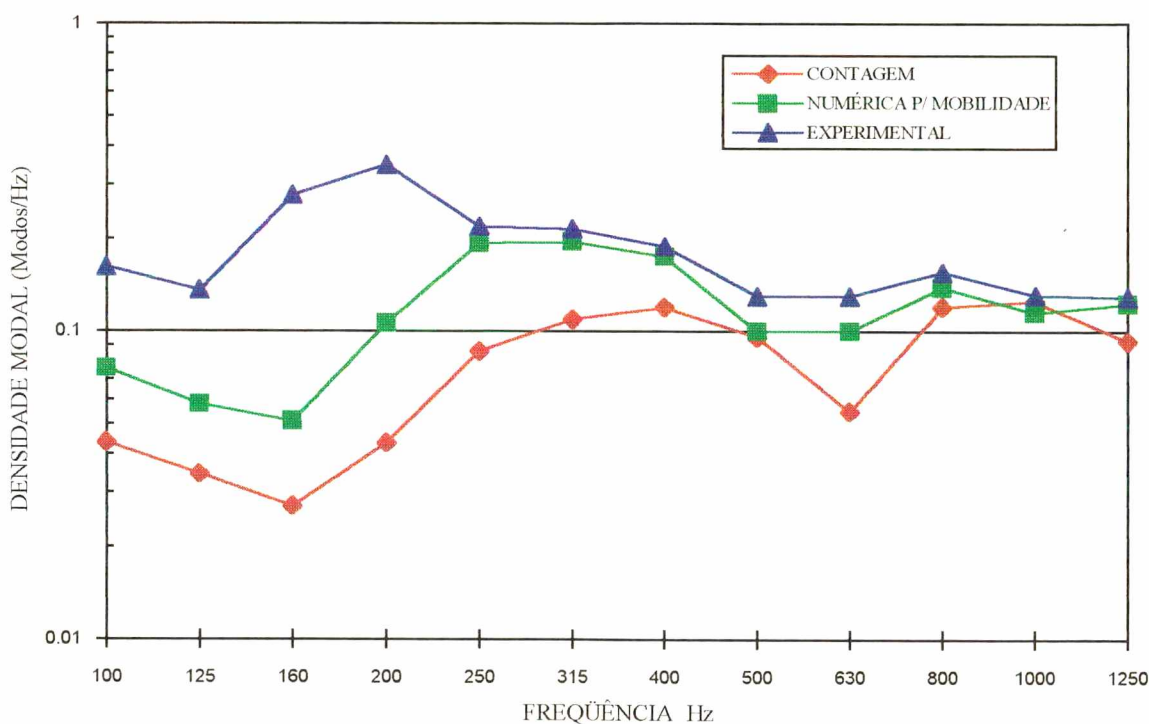


Fig. 5.23 - Gráfico de densidade modal para placas com reforços obtidos pelos métodos da contagem de modos, numérico pela parte real da mobilidade e experimental.

As diferenças apresentadas em baixas frequências entre o resultado numérico e o experimental, conforme já comentado nos itens 5.1 e 5.2.1, devem-se às diferenças de condições de contorno entre a forma numérica e a experimental.

A determinação da densidade modal é um parâmetro muito importante em SEA, principalmente se considerada do ponto de vista de propagação dos erros.

Assim, é aconselhável, mesmo na determinação experimental da densidade modal, utilizar os dois métodos, ou seja, na região onde os modos são espaçados, utilizar o método

da contagem e, em frequências superiores, empregar o método da mobilidade. Visto que, para os casos analisados, as diferenças a partir da banda de 500 Hz são aceitáveis.

Conforme já comentado no Capítulo 2, o método de determinação da densidade modal através da parte real da mobilidade exige que as mobilidades sejam determinadas para vários pontos de excitação e efetuando, então, a média espacial destas. Para otimizar o tempo computacional, sem perder precisão, realizou-se uma análise de sensibilidade de convergência versus número de pontos de excitação. Os resultados apresentados foram obtidos numericamente e são mostrados nas Figuras 5.24 e 5.25, para placas com e sem reforços, respectivamente.

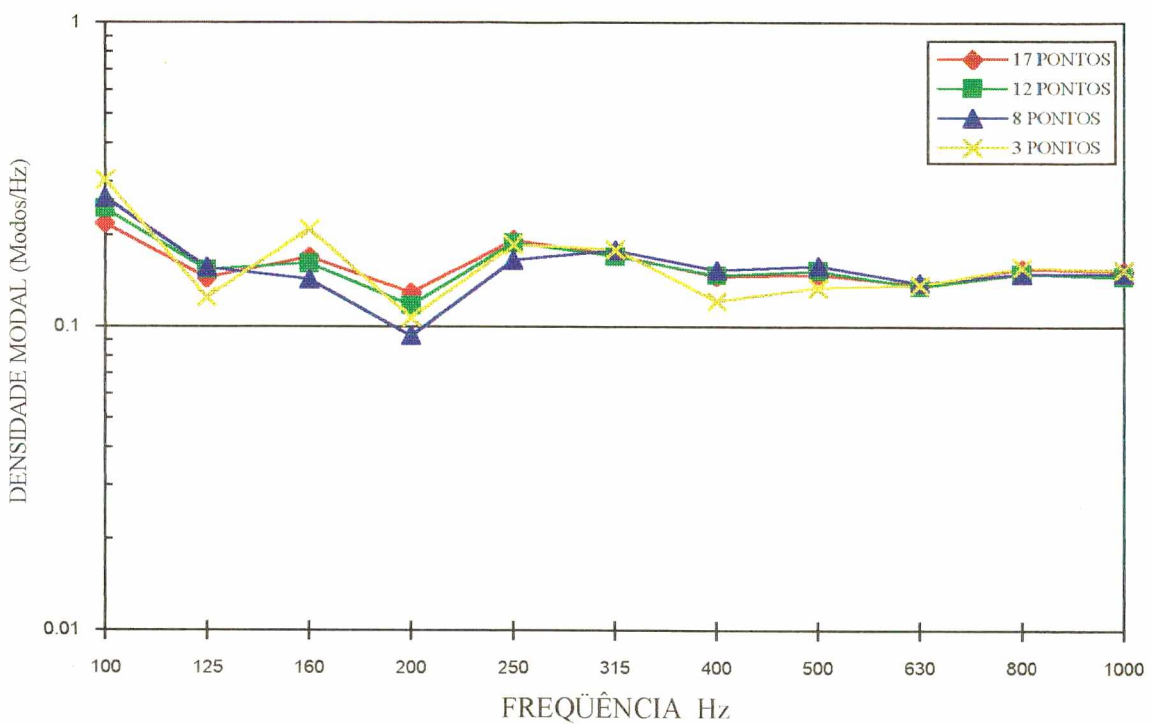


Fig. 5.24 - Variação da densidade modal com o número de pontos de leitura das curvas de mobilidade para o caso de uma placa sem reforços.

Confirmando os resultados apresentado por Clarkson e por Bonilha, para o caso da placa sem reforços, a Figura 5.24 mostra que, com apenas 3 pontos de resposta, já são obtidos resultados bastante precisos, não sofrendo melhoria significativa com o aumento dos pontos de obtenção das curvas de resposta.

Por outro lado, conforme apresentado na Figura 5.25, a convergência dos resultados obtidos para placas reforçadas é relativamente mais difícil, devido às diferenças das respostas obtidas sobre vigas e sobre placas, como também já mencionado anteriormente.

Observa-se que a partir de dez pontos de resposta, os valores obtidos sofrem apenas pequenas variações. Desta feita, pode-se afirmar que o número mínimo de pontos a serem utilizados em experimentos ou em análises numéricas utilizando o método da parte real da mobilidade é de dez pontos, no caso de placas reforçadas por vigas.

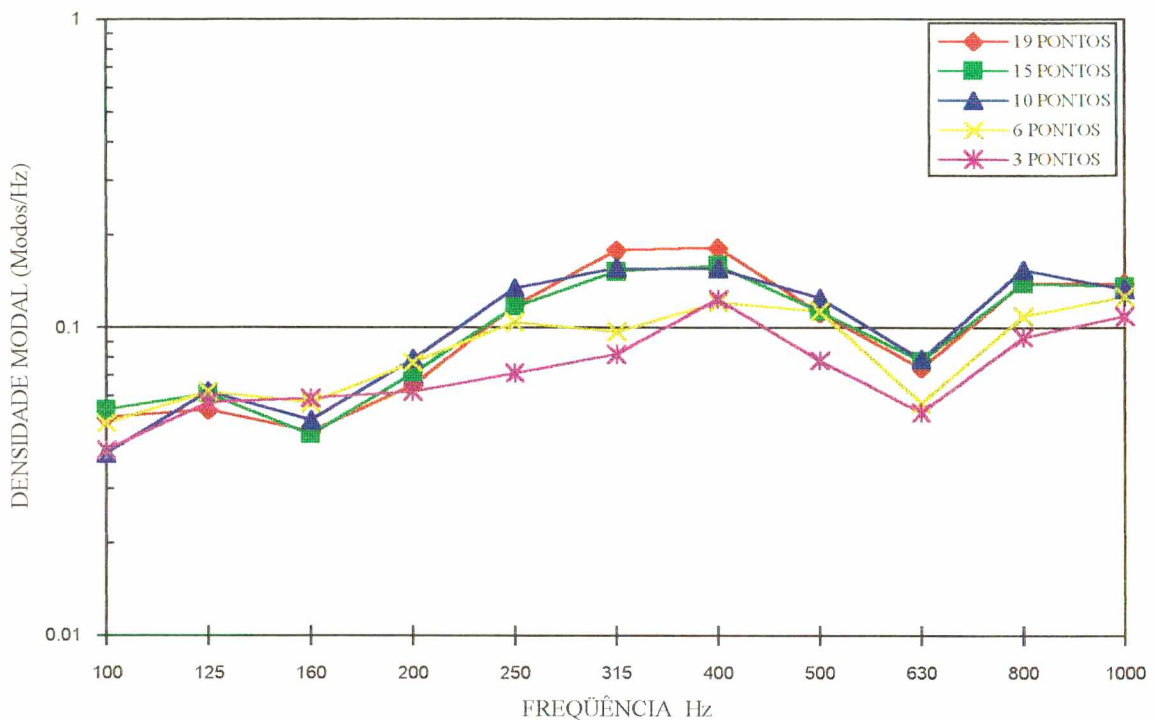


Fig. 5.25 - Variação da densidade modal com o número de pontos de leitura das curvas de mobilidade para o caso de uma placa com reforços.

Os resultados obtidos com placas reforçadas através do método da mobilidade mostram que, apesar deste método ser derivado a partir do equacionamento de placas não reforçadas, é possível conseguir ótimos resultados experimentais e numéricos, desde que o número de pontos dos quais são obtidas as curvas de mobilidade pontual, empregadas no cálculo da média espacial, seja suficientemente grande, isto é, na ordem de 10 pontos, pelo menos.

Por outro lado, a Figura 5.22 mostra a tendência de que em frequências mais altas, a densidade modal de uma placa com reforços converge para os valores obtidos para placas sem reforços. Este é um dado muito importante pois, uma vez confirmado, permitiria eliminar a necessidade de experimentos (práticos ou numéricos) que demandam muito tempo, substituindo-os por cálculos analíticos simples, já amplamente conhecidos.



A divergência maior ocorre na faixa de 630 Hz, na qual a densidade modal da placa reforçada é significativamente menor em relação à de uma placa sem reforços. Sabe-se da literatura, que estruturas periódicas ou quase periódicas possuem frequências de ressonâncias agrupadas em determinadas regiões do espectro, deixando lacunas em outras regiões. Por isto, não chega ser surpresa a constatação de que a densidade modal ser bastante menor na região de 630 Hz.

### **5.3 - ANÁLISE DE UMA ESTRUTURA DE GRANDE PORTE**

Nestas análises, busca-se reproduzir numericamente estudos de densidade modal e de energia vibratória em uma estrutura tipicamente encontrada em plataformas de prospecção de petróleo, de forma a identificar as dificuldades e limitações do método numérico quando aplicado a estruturas de grande porte.

Outro objetivo é identificar qual a banda de frequência central mais baixa, cuja densidade modal é suficiente para a aplicação de SEA.

Todos os procedimentos numéricos utilizados nestas análises são idênticos aos aplicados nos capítulos anteriores. Contudo, apesar dos procedimentos serem idênticos, a dimensão dos elementos utilizados foi alterada para possibilitar trabalhar com esse modelo, sem sobrecarregar o sistema computacional disponível. Assim, através de algumas análises preliminares, similares as apresentadas no Capítulo 2, definiu-se a dimensão dos elementos empregados em 200 mm.

A estrutura analisada é mostrada em detalhes na Figura 5.26.

A densidade modal foi obtida numericamente através do método da contagem de modos. Sendo assim, utilizou-se para sua obtenção apenas uma análise modal. Os resultados para o número de modos e densidade modal por banda de 1/3 oitava são apresentados nas Figuras 5.27 e 5.28, respectivamente.

Destes resultados, observa-se que a partir da banda de 50 Hz, o número de modos(9 modos) é suficiente para a aplicação de SEA, com razoável confiabilidade. Este limite inferior tende a diminuir com o aumento das dimensões dos componentes em análise, atribuída à diminuição da rigidez dinâmica. Contudo, placas com vigas de reforço distribuídas periodicamente tendem a concentrar os modos em certas regiões do espectro, que são intercaladas com outras de menor densidade, conforme já comentado no item 5.2.2.

Esse efeito pode diminuir a densidade modal mesmo em uma banda de frequência mais alta, reduzindo, assim, a precisão do método de SEA. Isto pode ser observado na Figura 5.27 na banda de 100 Hz, onde o número de modos aumenta até a banda de 63 Hz e diminui nas bandas seguintes, até chegar a 9 modos na banda de 100 Hz, quando volta a aumentar.

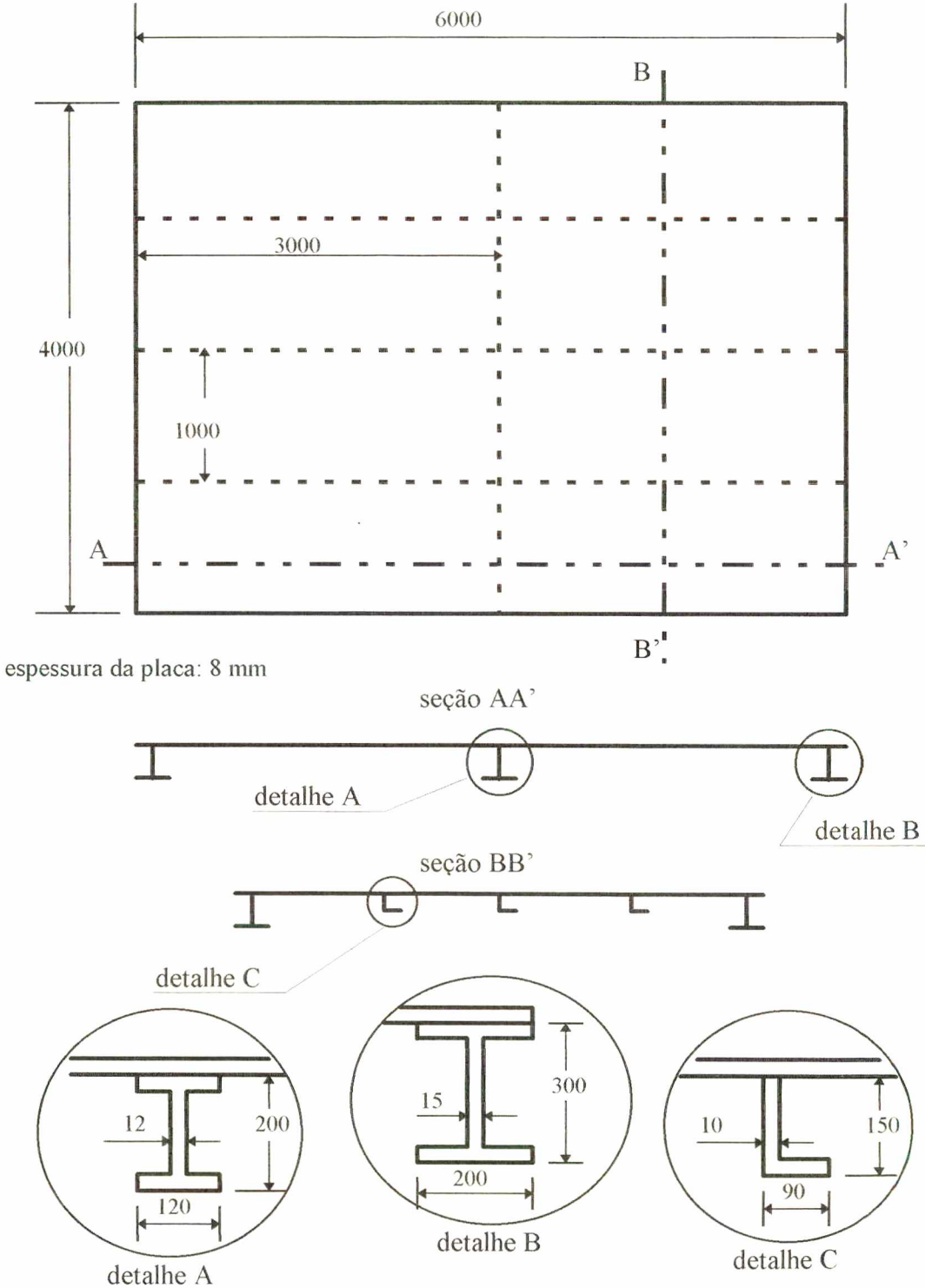


Fig. 5.26 - Esquema da placa reforçada (dimensões em milímetros)

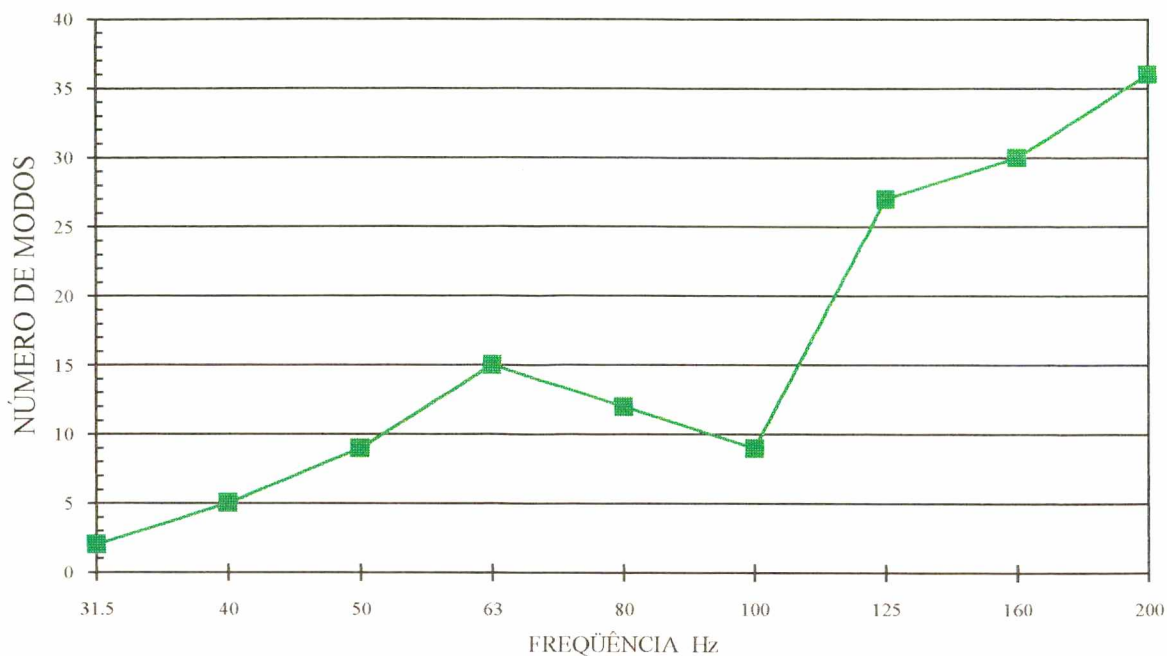


Fig. 5.27 - Gráfico de número de modos por banda de 1/3 oitava.

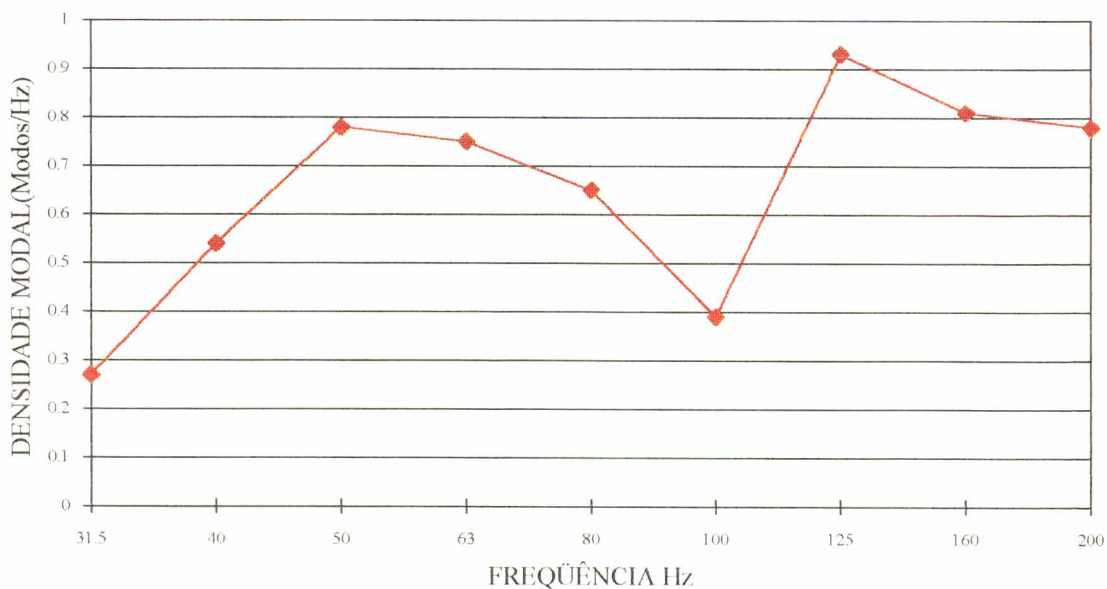


Fig. 5.28 - Densidade modal, método da contagem de modos.

A Figura 5.29 mostra o espectro das energias totais para cada tipo de componente do sistema analisado. A energia vibratória foi obtida através da aplicação de uma força pontual de 1000 N em 12 pontos diferentes, uniformemente distribuídos pela estrutura. Para

cada ponto de excitação, foram obtidos espectros de velocidade em outros 28 pontos, para cálculo da média espacial da velocidade quadrada.

Os gráficos que mostram os espectros de energia vibratória para cada tipo de elemento da estrutura foram obtidos em dB, utilizando-se como referência  $10^{-12}$  Watts.

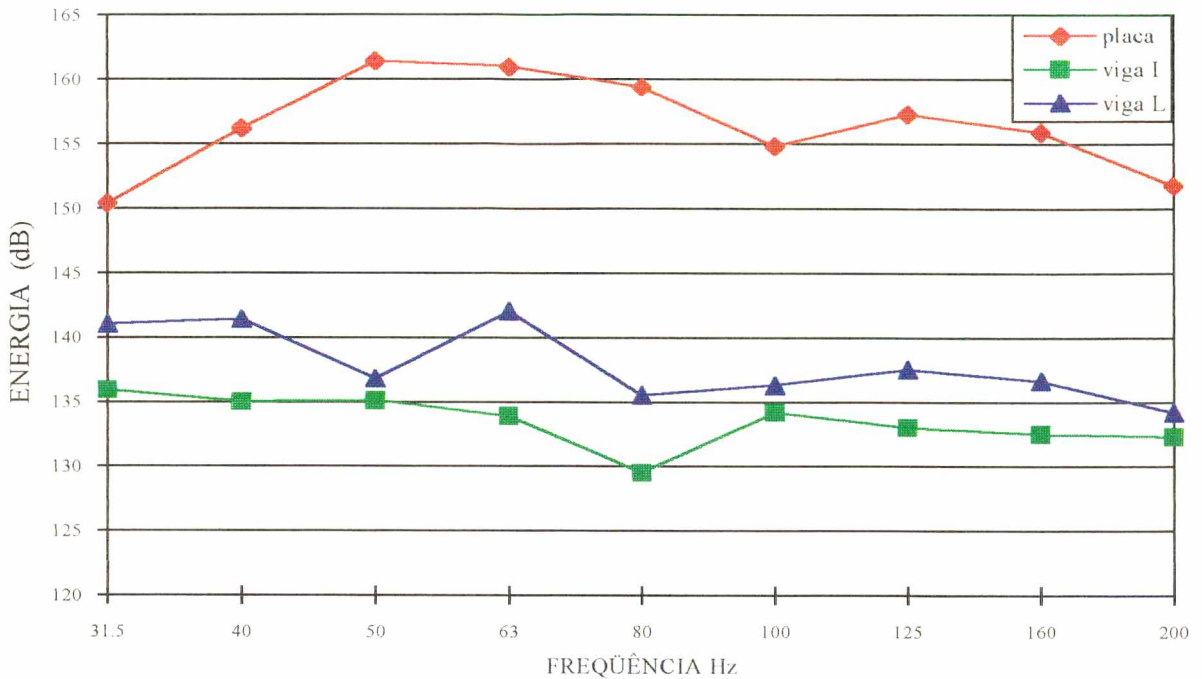


Fig. 5.29 - Espectros de energia total para cada tipo de componente.

Pode-se verificar que a placa possui energia vibratória bastante superior em relação à das vigas, indicando que, independentemente da resposta e dos modos vibracionais da placa, as vigas respondem apenas em seus modos, pois possuem rigidez muito maior. Observa-se que a energia da viga de perfil I é menor que a viga de perfil L, uma vez que aquela apresenta maior rigidez à flexão.

Basicamente, conclui-se que a placa é a grande responsável pela irradiação de ruído nesse tipo de estrutura, pois, além de maior energia vibratória, também apresenta maior área de irradiação.



## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir, são feitos alguns comentários adicionais aos já apresentados ao longo de todo este trabalho.

De forma geral, foram obtidos resultados de boa precisão nas análises realizadas. Isto vem provar que, apesar dos métodos aqui utilizados neste trabalho para o cálculo dos fatores de acoplamento e da densidade modal terem sido desenvolvidos para estruturas homogêneas, isto é, sem qualquer tipo de reforços, a tentativa de aumentar o número de médias utilizadas no cálculo tornou os métodos aplicáveis às estruturas tipo placas reforçadas por vigas.

Os resultados experimentais apresentaram boa concordância com os numéricos, principalmente em altas frequências, indicando que o método de elementos finitos é uma boa ferramenta para a predição dos parâmetros envolvidos em SEA. Isto é muito importante quando SEA é aplicado em estruturas não uniformes, visto que sua precisão está fortemente relacionada à predição desses parâmetros. Contudo, na aplicação de elementos finitos, neste tipo de predição, devem ser tomados alguns cuidados especiais, tais como,

a) a dimensão do elemento a ser utilizado na discretização deve ser definida por análises preliminares como as mostradas no Capítulo 2, pois, a regra geral de utilizar-se no mínimo 6 elementos por comprimento de onda da última frequência de interesse, não é suficiente e pode introduzir erros nos parâmetros calculados em altas frequências.

b) cuidadosa escolha do método de solução a ser empregado. Para não se correr o risco de empregar um método não recomendado para o tipo de estrutura (ex. aplicação do método reduzido com seleção automática de graus de liberdade “masters” ).



O Método de Elementos Finitos também se mostra como uma das poucas opções na estimação dos fatores de acoplamento de estruturas de grande porte, uma vez que esta determinação em campo será muito dificultada por problemas de fuga de energia por estruturas ligadas às de interesse, porém, não estão no escopo da medição. Como exemplo, cita-se o caso de desejar-se medir o fator de acoplamento entre as paredes e o piso de uma determinada sala e por esse piso passar perpendicularmente uma tubulação qualquer ali soldada. Por esta tubulação, existiria considerável fuga de energia, que induziria a valores equivocados dos fatores de acoplamento.

Por outro lado, essas determinações numéricas exigirão computadores com boa velocidade de processamento e grande capacidade de armazenamento de dados. Hoje, as estações de trabalho de médio porte certamente já possuem essas capacidades e se prestarão muito bem a este trabalho.

Os resultados obtidos mostram que os fatores de acoplamento, além de diferirem dos valores analíticos para placas não reforçadas, também, variam conforme o posicionamento relativo das vigas de cada uma das placas. Indicando este parâmetro em tais estruturas, somente podem ser aproximados pelos de placas uniformes após uma criteriosa análise de propagação de erros. Por outro lado, a variação dos fatores de acoplamentos com o posicionamento das vigas, sugere que um caminho a ser trilhado para a minimização da transmissão de energia passa pela otimização do posicionamento relativo dessas vigas. Isto, obviamente, quando a resistência estrutural não for afetada por tal alteração.

Outro resultado que deve ser considerado com atenção, no emprego de SEA em predições em estruturas tipo placas reforçadas por vigas, é talvez a densidade modal deste tipo de estruturas poder ser estimada, com erros relativamente pequenos, pela densidade modal teórica desenvolvida para placas sem reforços. A vantagem de poder-se fazer esta aproximação é muito grande, já que poupam muito tempo de cálculo. Uma vez que, com simples operações, obtêm-se valores que podem ser utilizado em todo o espectro. Contudo, como já comentado, antes de poder afirmar se esta aproximação é realmente válida, deverá

ser conduzida uma profunda análise de propagação de erros para estimar o quanto a predição de ruído por SEA será afetada por essa simplificação.

Por outro lado, quando a precisão exigida na predição for alta, a aplicação do método da contagem, através de análises modais realizadas pelo método de elementos finitos, se presta com bons resultados, com a vantagem de ser mais simples e fácil de implementar que a aplicação do método proposto por Clarkson.

Devido às limitações computacionais e do método de solução empregado, as análises aqui apresentadas restringiram-se a uma faixa relativamente pequena do espectro. Por este motivo, fica a dúvida se realmente, com o aumento da frequência, as tendências observadas nos resultados obtidos mantêm-se ou se sofrem alguma variação relevante. Dessa forma, deixa-se como principal sugestão para trabalhos futuros a tentativa de estender essas análises às frequências mais altas, empregando computadores com maior capacidade de armazenamento e utilizando o método de solução harmônica “full” do ANSYS, ou outro *software* que possua a capacidade de trabalhar com mais de 160 modos.

Outra sugestão para trabalhos futuros é um profundo estudo no equacionamento da propagação de ondas vibratórias nesse tipo de estrutura, com o intuito de buscar adaptar as equações existentes para o cálculo da densidade modal às estruturas reforçadas por vigas.

Para cobrir toda a utilização de SEA, em estruturas de grande porte também é necessário conhecer-se o comportamento dos parâmetros analisados neste trabalho, em estruturas construídas a partir de chapas nervuradas, que são outro tipo de placas amplamente utilizadas em construções navais. Desta forma, deixa-se também como sugestão para trabalhos futuros realizar um estudo semelhante ao presente para o caso de placas nervuradas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LYON, R. H. *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications*, MIT Press, 1975.
- [2] HECKL, M. Wave Propagation on Beam-Plate Systems, *The Journal of The Acoustical Society of America*, 33(5), May 1961.
- [3] WAH, T. Vibration of Stiffened Plates, *The Aeronautical Quarterly*, August 1961.
- [4] RUMERMAN, M. L. Vibration and Wave Propagation in Ribbed Plates, *The Journal of The Acoustical Society of America*, 57(2) May 1975.
- [5] FAHY, F. J., LINDQVIST, E. Wave Propagation in Damped, Stiffened Structures Characteristic of Ship Construction, *Journal of Sound and Vibration*, 45(1) 115-138, 1976.
- [6] CLARKSON, B. L., POPE R. J. Experimental Determination of Vibration Parameters Required in the Statistical Energy Analysis Method, *Journal of Mechanical Design, Transactions of ASME*, Paper No 81-DET-19, September 1981.
- [7] CLARKSON, B. L., RANKY, M. F. On The Measurement Of The Coupling Loss Factor Of Structural Connections, *Journal of Sound and Vibration*, 94(2) 249-261, 1984.

- [8] WILLIAMS, F. W., BANERJEE, J. R., Accurately Computed Modal Densities For Panels and Cilinders, Including Corrugations and Stiffeners, *Journal of Sound and Vibration*, 93(4), 481-488, 1984.
- [9] BONILHA, M. W. *Estudo da Resposta em Altas Freqüências de Uma Estrutura Tipo Caixa a Um Campo Acústico Difuso por Análise Estatística Energética*, Dissertação de Mestrado, UFSC, 1991.
- [10] LENZI, A. *Análise Estatística Energética - Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação*, UFSC, 14, 1991.
- [11] CREMER, L. AND HECKL, M. *Structure-Borne Sound* , Springer-Verlag, Berlin, 1973,.
- [12] CLARKSON, B. L. The Derivation of Modal Densities From Point Impedances, *Journal of Sound and Vibrations*, 77(4), 583-584, 1981
- [13] ELISHAKOFF, I. *Probabilistic Method in Theory of Structures*, New York, John Wiley and Sons, 1983.
- [14] CLARKSON, B. L. *Notes for a Theaching Course on Random Vibration*, Southampton, Institute of Sound and Vibration Research, 1986.
- [15] *ANSYS User's Manual for Revision 5.0*, vol. IV - Theory, Swanson Analysis, Inc. 1992, pp. 14-251 a 14-253.
- [16] *ANSYS User's Manual for Revision 5.0*, vol. III - Elements, Swanson Analysis, Inc. 1992, pp. 4-21.



- [17] *ANSYS User's Manual for Revision 5.0*, vol. I - Procedures, Swanson Analysis, Inc. 1992, pp. 3-31.
- [18] NORTON, M. P. AND RONOWSKI, D. Point Mobility Techniques for the *In Situ* Estimation of Modal Densities of Coupled Cylindrical Shells, *Applied Acoustics*, vol. 129, 383 a 396,1986.
- [19] CUSHIERI, J. M. Vibration Trasmision Trough Periodic Structures Using Mobility Power Flow Approach , *Journal of Sound and Vibration*, 143(1), 65-74, 1990.
- [20] FAHY, F. *Sound And Structural Vibrations*, Radiation And Response, Academic Press, 1985, pp. 247-250.

## APÊNDICES

### A1 - EQUAÇÃO DA ONDA PARA UMA PLACA PLANA

Para derivar esta equação, será considerada uma placa de espessura  $h$  posicionada no plano  $zx$ , portanto, a direção do deslocamento é dada por  $y$ .

A Figura A.1 mostra um elemento infinitesimal da placa plana com os deslocamentos, forças e momentos quando solicitada em flexão[11].

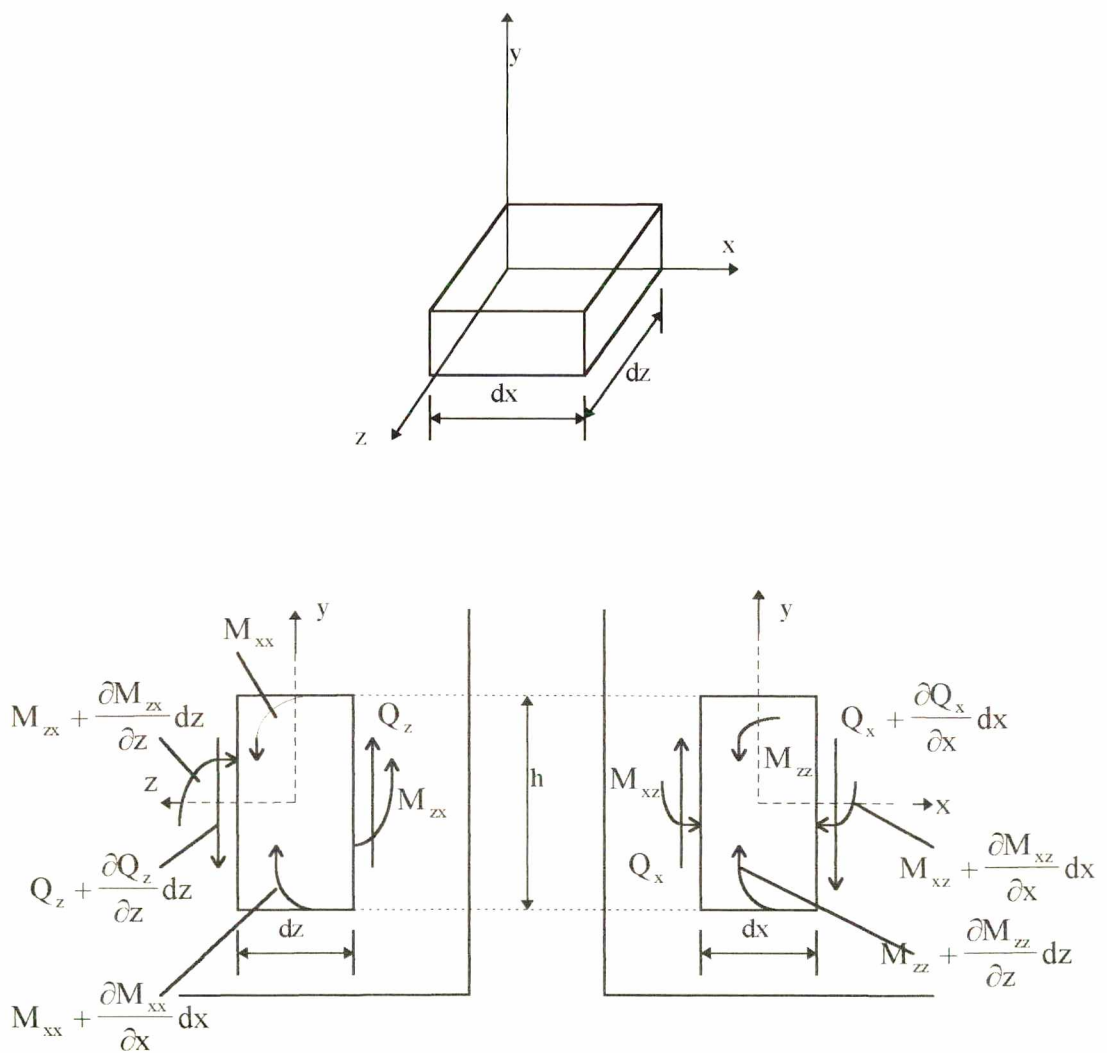


Fig. A.1 - Elemento infinitesimal e os respectivos esforços.

Os momentos flexores por unidade de comprimento  $M_{xz}$  e  $M_{zx}$ , conforme mostrados na Figura A.1, são dados por

$$M_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy \text{ e } M_{zx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z y dy \quad (A1)$$

com

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu\epsilon_z) = -\frac{Ey}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_z + \mu\epsilon_x) = -\frac{Ey}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (A2)$$

em que  $\epsilon_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\epsilon_z = \frac{\partial \xi}{\partial z} = -y \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$  e  $\mu$ , o coeficiente de Poisson do material.

Substituindo (A2) em (A1) e efetuando as integrações, obtém-se

$$\begin{aligned} M_{xz} &= -EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ M_{zx} &= -EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (A3)$$

Atuando sobre o elemento infinitesimal existem também os momentos torçores  $M_{xx}$  e  $M_{zz}$  dados por

$$M_{xx} = -M_{zz} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} y dy \quad (A4)$$

em que

$$\tau_{xz} = G \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \quad (A5)$$

fazendo  $\frac{\partial}{\partial z}(\int \varepsilon_x dx)$  e  $\frac{\partial}{\partial x}(\int \varepsilon_z dz)$ , obtém-se

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \quad (A6)$$

aplicando esta última equação em (A5) e substituindo o resultado encontrado em (A4), tem-se

$$M_{xx} = -M_{zz} = 2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy \quad (A7)$$

em que  $G = \frac{E}{2(1-\mu)}$  (módulo de cisalhamento). A equação (A7) pode ser reescrita como

$$M_{xx} = -M_{zz} = EI(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \quad (A8)$$

As forças de cisalhamento  $Q_x$  e  $Q_z$  que agem no elemento infinitesimal, são dadas por

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial M_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{zz}}{\partial z} \\ Q_z &= -\frac{\partial M_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \end{aligned} \quad (A9)$$

Substituindo as equações (A4) e (A7) na equação (A9), tem-se

$$\begin{aligned} Q_x &= EI \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = EI \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_z &= EI \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = EI \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 w) \end{aligned} \quad (A10)$$

em que  $\nabla$  é o operador de Laplace.



Aplicando-se a segunda lei de Newton, para obter a relação entre forças de cisalhamento e o movimento transversal tem-se

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_z}{\partial z} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{A11})$$

em que  $m$  é a massa da placa.

Por substituição das equações (A10) em (A11), chega-se à equação homogênea da onda para uma placa plana em flexão, ou seja,

$$EI \nabla^4 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A12})$$

em que  $\nabla^4 w = \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial z^2}$

Para obter a equação geral da onda para a placa basta, acrescentar um carregamento externo do tipo  $p(x,z,t)$  ao segundo membro da expressão (A12), assim,

$$EI \nabla^4 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, z, t) \quad (\text{A.13})$$

## A2 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA PARA PLACA PLANA EM FLEXÃO

O método utilizado para resolver a equação da onda para a placa é o mesmo utilizado na solução da equação da viga finita em flexão pura, porém, no caso da placa, o problema é bidimensional. Assim do método de modos assumidos, pode ser escrito que a solução da equação (A13) será do tipo[20]

$$w(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \phi_n(x, z) \quad (A14)$$

em que  $\phi_n(x, z)$  é uma função de forma. Reescrevendo a homogênea da equação (A13) em termos de uma função harmônica, ou seja,  $w(x, z, t) = w(x, z)e^{i\omega t}$ , tem-se

$$EIV^4 w + \omega^2 m w = 0 \rightarrow EIV^4 = -\omega^2 m w \quad (A15)$$

Substituindo (A14) e (A15) em (A12), tem-se

$$-\omega^2 m \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \phi_n(x, z) + m \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{w}_n(t) \phi_n(x, z) = p(x, z, t) \quad (A16)$$

multiplicando a expressão acima por  $\phi_m(x, z)$ , integrando sobre a área A, da placa e, admitindo a ortogonalidade dos modos, chega-se à seguinte equação para o n-ésimo modo:

$$\ddot{w}_n(t) + \omega_n^2 w_n(t) = \frac{\int_A q(x, z) \phi_n(x, z) dA}{\int_A m \phi_n^2(x) dA} \quad (A17)$$

mas, fazendo

$$F_n = \int_A q(x, z) \phi_n(x, z) dA \quad (A18)$$

e

$$m_n = \int_A m \phi_n^2(x) dA \quad (A19)$$

que são força e massa generalizadas, respectivamente. Fazendo, ainda,  $\dot{w}_n(t) = i\omega w_n(t)$ , assim, com  $\ddot{w}_n(t) = -\omega^2 w_n(t)$ , obtém-se

$$w_n(t) = \frac{F_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)m_n} \quad (A.20)$$

dessa forma, como foi admitido anteriormente uma solução harmônica encontra-se a seguinte solução final para a equação da onda para uma placa finita:

$$w(x, z, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \phi_n(x, z) \quad (A.21)$$