

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Simulação Transiente das Equações de Águas Rasas pelo Método
dos Volumes Finitos.**

**Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para
a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.**

Hélio Carlos Bortolon

Florianópolis, agosto de 1997

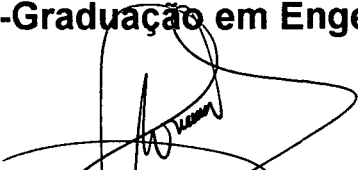
**Simulação Transiente das Equações de Águas Rasas pelo Método
dos Volumes Finitos.**

Hélio Carlos Bortolon

Esta dissertação foi julgada para obtenção do título de

Mestre em Engenharia

**Especialidade Engenharia Mecânica e aprovada em sua forma final
pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.**




Prof. Clovis R. Maliska, Ph. D., Orientador




Prof. Abelardo Alves de Queiroz, Ph. D., Coordenador

Banca Examinadora



Prof. Antônio F. C. Silva, Dr. Eng. Mec, Presidente



Prof. Eloi Melo Filho, Ph. D.



Prof. Marcelo Kranjc Alves, Ph. D.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo exemplo de perseverança que sempre foram.

Ao Prof. Clovis R. Maliska, pela sua orientação ao longo do trabalho.

Aos meus colegas de trabalho pela ajuda nas horas mais conturbadas e pelos momentos agradáveis de convivência. Agradeço, em especial, aos colegas Luciano A. dos Santos, Luiz A. Pretti de Menezes e Francisco Marcondes.

À CAPES, que me confiou uma bolsa do programa PICD através da Universidade Federal do Espírito Santo e aos professores desta, pelo apoio e incentivo durante a realização desta dissertação.

“A ciência é a arte de ignorar a vaca e ir ordenhar a pedra”

H. C. Bortolon

RESUMO

BORTOLON, Hélio Carlos. *Simulação Transiente das Equações de Águas-Rasas pelo Método dos Volumes Finitos*. Florianópolis, 1997, 83p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.

Defesa: 28/08/1997

Este trabalho apresenta uma metodologia em Volumes Finitos para a solução de problemas envolvendo escoamentos em corpos de águas rasas. Foram usados dois esquemas de interpolação, WUDS para os problemas unidimensionais e QUICK para os bidimensionais, mas nenhuma comparação é feita entre eles. O procedimento usado baseou-se no algoritmo para qualquer velocidade (“All-Speed”), usado na solução de escoamentos compressíveis, que consiste basicamente numa linearização da equação da conservação da massa para que se possa considerar simultaneamente os efeitos da pressão sobre a densidade e campo de velocidades. Os resultados comprovam a eficiência da proposta na reprodução de vários escoamentos usados como teste (unidimensionais e bidimensionais, permanentes e transientes). Também fica evidente a necessidade de tratar com mais cuidado as condições de contorno, especialmente nos escoamentos onde o tráfego de ondas é livre em qualquer direção e sentido.

Palavras-chave: [Equações de Águas-Rasas], [Método dos Volumes Finitos], [All-Speed Flows].

ABSTRACT

This work presents a Finite Volume methodology for the solution of Shallow Water flows. It was used two interpolation schemes, WUDS for the one-dimensional problems and QUICK for the two-dimensional ones, but no comparisons are made between them. The procedure was based in the All-Speed Flow algorithm, wich is used in the solution of compressible flows, and consists basically in a linearization of the mass conservation equation to take into account the efect of the pressure over the density and the velocities simultaneously. The results confirms the ability of the proposed method in reproducing various test flows (one- and two-dimensional, transient and steady-state). It is also evident the need for a more careful treatment of the boundary conditions, specially in flows in wich the waves can travel in all directions.

SIMBOLOGIA

Arábicos

A, B	Matriz de coeficientes e vetor independente.
C	Coefficiente de Chézy ($m^{1/2}/s$).
D	Espessura da lâmina d'água (m).
Fr	Número de Froude.
L_r	Comprimento de religamento (m).
M	Número de Mach.
P	Termo de pressão.
R	Constante universal dos gases perfeitos (J/kgK).
S	Termo fonte / Função sinal.
T	Temperatura (K).
U	Velocidade.
c	Celeridade de uma onda (m/s).
d	Relação entre velocidades e gradientes de pressão/elevação.
e	Entalpia.
g	Aceleração da gravidade (m/s^2).
h	Profundidade do fundo do canal (m).
i	Energia interna.
k	Constante iso-entrópica.
p	Pressão (N/m^2).
p_a	Pressão atmosférica (N/m^2).
t	Tempo (s).
u_i	I-ésima componente do vetor velocidade (m/s).
w	Velocidade de propagação de uma onda (m/s).
x_i	I-ésima componente do vetor posição (m).

Gregos

ε_M	Erro de massa.
ϕ	Variável qualquer.
μ	Viscosidade (kg/ms).
ρ	Massa específica (kg/m ³).
τ_{ij}	Componente ij do tensor tensão viscosa (N/m ²).
ζ	Elevação da superfície livre (m).

Subscritos

P	Ponto central.
NB	Ponto vizinho qualquer (N,S,E,W).
i	I-ésima direção do sistema de coordenadas.
P ϕ	Variável avaliada no ponto de armazenamento da variável ϕ .
n, s, e, w	Faces norte, sul, leste e oeste do volume de controle.
x, y	Direções x e y.
n, t	Direções normal e tangencial à fronteira.
in	Entra no domínio de cálculo.
out	Sai do domínio de cálculo.

Superscritos

o	Valor avaliado no instante anterior.
*	Valor disponível.
`	Correção sobre o valor.
ϕ	Relativo a ϕ .

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	<i>Motivação</i>	1
1.2.	<i>Revisão Bibliográfica</i>	2
2.	OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS	5
2.1.	<i>Conservação da Massa</i>	6
2.2.	<i>Quantidade de Movimento</i>	7
3.	ANALOGIA ÁGUAS RASAS X COMPRESSÍVEL	12
3.1.	<i>Deslocamento de Ondas em Canais Abertos</i>	12
3.2.	<i>Deslocamento de Ondas em Fluidos Compressíveis</i>	14
3.3.	<i>Semelhanças Entre escoamentos em Águas Rasas e Compressível</i>	16
4.	DISCRETIZAÇÃO E CONDIÇÕES DE CONTORNO: EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS	21
4.1.	<i>Quantidade de Movimento</i>	22
4.1.1.	WUDS	24
4.1.2.	QUICK	29
4.2.	<i>Conservação da Massa (Obtenção de uma Equação para D)</i>	30
4.2.1.	Relação entre (u',v') e ζ'	32
4.2.2.	Forma Final da Equação para ζ'	34
4.3.	<i>Condições de Contorno</i>	36
4.3.1.	Condições de Contorno para as Velocidades	36
4.3.2.	Condições de Contorno para a Conservação da Massa	37
4.4.	<i>Ciclo Iterativo</i>	41
5.	TRATAMENTO DOS ACOPLAMENTOS NOS ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS	43

6.	RESULTADOS E DISCUSSÕES	47
6.1.	<i>Escoamentos Unidimensionais Permanentes</i>	49
6.1.1.	Escoamento Permanente Supercrítico	49
6.1.2.	Escoamento Permanente Subcrítico	50
6.2.	<i>Escoamentos Unidimensionais Transientes</i>	50
6.2.1.	Propagação de $\frac{1}{4}$ de onda	51
6.2.2.	Propagação de $\frac{1}{2}$ onda	53
6.3.	<i>Escoamento Bidimensional Permanente</i>	54
6.4.	<i>Escoamentos Bidimensionais Transientes</i>	57
6.4.1.	Escoamento de Entrada num Domínio Quadrado	57
6.4.2.	Escoamento numa Expansão Brusca	65
7.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	72
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74
	APÊNDICE A: EQUAÇÕES FINAIS	78
	<i>Quantidade de Movimento</i>	78
	<i>Conservação da Massa</i>	80
	APÊNDICE B: O MÉTODO DE STELLING E WANG	83

Lista de Figuras

Fig. 1- Coordenadas verticais do problema.	6
Fig. 2- Dados para a determinação da celeridade em águas rasas.	12
Fig. 3 - Situações de propagação de uma onda. Escoamento da esquerda para a direita.	14
Fig. 4 - Dados para a determinação da celeridade em escoamentos compressíveis.	14
Fig. 5 - Escoamento compressível.	19
Fig. 6 - Escoamento em águas rasas.	19
Fig. 7 - (a) Arranjo desencontrado (b) Indexação das variáveis.	21
Fig. 8 - Convenções para o WUDS.	24
Fig. 9 - Convenções para o cálculo da descarga na saída.	40
Fig. 10 - Dados para as equações 1D permanente.	47
Fig. 11 - Geometria do canal.	49
Fig. 12 - Geometria do canal.	51
Fig. 13 - (a) Ponto monitorado (b) Gráfico posição x tempo para $\frac{1}{4}$ de onda.	52
Fig. 14 - (a) Ponto monitorado (b) Gráfico posição x tempo para $\frac{1}{2}$ onda.	53
Fig. 15 – Perfis da onda nos instantes $t = 12.5s, 18.75s, 25s, 31.75s$.	54
Fig. 16 - Disposição para o escoamento em torno de um corpo.	55
Figs. 17 - (a) Iso-elevações para supercrítico, (b) Iso-elevações para sub-crítico.	56
Fig. 18 - Geometria e condições iniciais do problema.	57
Fig. 19 - Região de entrada.	58
Fig. 20 - Perfis de iso-elevação.	59-64
Fig. 21 - Região física da expansão brusca.	65
Figs. 22 - Gráfico $L_r \times t$ para (a) $\alpha = 0.75$ e (b) $\alpha = 0.90$.	67
Figs. 23 - Hodogramas do centro da recirculação principal.	68
Figs. 24 - Iso-elevações para os instantes (a) 15, (b) 35 e (c) 55 s com $\alpha = 0.90$.	70
Figs. 25 - Vetores velocidade para os instantes (a) 15, (b) 35 e (c) 55s com $\alpha = 0.90$.	70-71

1. INTRODUÇÃO

1.1 *Motivação*

O crescimento populacional, principalmente o inchaço urbano, criou um enorme impasse ecológico: como acomodar uma população cada vez maior sem provocar uma gigantesca agressão ao habitat humano?

Nas grandes cidades um dos problemas mais urgentes referem-se à poluição do ar e das águas e ao fornecimento de alimentos em quantidade e qualidade suficientes para atender à demanda. O problema da poluição das águas torna-se mais premente quando as cidades localizam-se no litoral, pois neste caso a poluição afeta uma das fontes prováveis de alimentos.

O planejamento urbano deve, portanto, levar em conta aquilo que ocorrerá no meio-ambiente para decidir-se pela ocupação ou não de uma certa área costeira, uma vez que isso acarreta, sempre, alguma quantidade de lançamento de dejetos ao mar, ou aos rios, no caso de uma região interior. Para planejar corretamente a forma de se lidar com estes lançamentos (estado, pontos e quantidades de lançamento, etc), é preciso ter conhecimento prévio de como o meio irá reagir a estas ações. A dispersão de um agente no mar é dependente do campo de velocidades presentes nele, logo, para que se possam definir os locais, volumes e, talvez, os momentos mais oportunos de lançamento para que se gere o mínimo de acúmulo deste agente numa certa região, faz-se necessário conhecer, de antemão, o campo de velocidades presente na área de interesse. As formas existentes de levantar este campo são a realização de experimentos em escala reduzida e a simulação numérica das equações que descrevem o fenômeno, sendo a última a escolhida para o presente trabalho.

Este trabalho destina-se a dar o primeiro passo, neste grupo de pesquisa, na direção do desenvolvimento de metodologias numéricas, utilizando uma discretização conservativa e uma marcha implícita, para o estudo da dispersão de poluentes no mar. O enfoque numérico aqui adotado é inovador e não é de conhecimento do autor a existência de trabalhos nesta linha.

Devido às semelhanças matemáticas e fenomenológicas que existem entre os escoamentos compressíveis e os em águas rasas, que é o tipo encontrado em águas costeiras, e à

experiência acumulada deste grupo na simulação de escoamentos compressíveis, abordou-se o problema neste trabalho através de metodologias idênticas às empregadas para escoamentos compressíveis.

1.2 Revisão Bibliográfica

Todos os métodos apresentados nas referências a seguir utilizam marchas explícita, ou explícita-implícita, em direções alternadas, com a discretização sendo feita via diferenças finitas ou elementos finitos. A marcha explícita-implícita faz o avanço no tempo em dois passos: no primeiro resolve-se, por exemplo, a velocidade u implicitamente e v explicitamente, e, no segundo, as marchas invertem-se.

Uma parcela muito pequena das demais referências faz uso do modelo completo, ou seja, as equações usando todos os termos difusivos e advectivos. Uma grande parte, ao estudar movimentos marinhos, opta por abordar a equação linearizada, ou seja, considera-se que o termo de capacidade convectiva (ρu , por exemplo) seja constante, eliminando o caráter não-linear altamente complicador deste termo.

Häuser *et alii* (1986) resolveram a equação linearizada para a baía de Hamburgo usando uma marcha no tempo implícita-explicita. Eles detectaram que, embora os resultados ficassem dentro do esperado por um certo período, a solução se instabilizava após um certo número de iterações. Segundo os autores estas instabilidades, que não foram eliminadas com filtros espaciais, devem-se ao tipo de malha desconstruída utilizada, que estocava as velocidades num mesmo vértice da área de elevação, que é a variável deslocada.

Li e Zhan (1993) utilizaram uma técnica de divisão da coordenada vertical em camadas, sendo que apenas a primeira e a última tem espessura variável. O objetivo era possibilitar o tratamento de regiões estratificadas aplicando, por camada, pro-médiações semelhantes às que dão origem às Equações de Águas Rasas. Os resultados obtidos com o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) e marcha implícita no tempo concordaram muito bem com os resultados analíticos.

Kawahara e Umetsu (1986) resolveram o problema da inundação de um canal partindo de uma formulação baseada em variáveis conservativas (elevações e descargas), ao contrário do que ocorreu até aqui, em que se usaram variáveis não-conservativas (velocidades e elevações).

Isto simplificou bastante o tratamento das não-linearidades na equação da continuidade. As velocidades, necessárias ao cálculo dos coeficientes, são avaliadas dividindo-se as descargas pelas profundidades. Usou-se o MEF, com o avanço no tempo sendo dado em dois passos explícitos. É interessante notar o processo para se determinar quais os pontos do domínio que estão “molhados”, i.e., abaixo d’água. Não foram feitas comparações com resultados analíticos ou experimentais, mas o que foi apresentado demonstra uma boa concordância com o comportamento físico esperado.

Fennema e Chaudry (1990) fizeram um apanhado geral dos métodos totalmente explícitos para escoamentos transientes, e a comparação dos resultados para o caso da ruptura parcial de uma barragem revelou que os vários métodos são aproximadamente equivalentes nas suas previsões.

Haeuser *et alii* (1985) resolveram as equações linearizadas num canal circular definido por dois anéis concêntricos, e concluíram que, para simulações de fenômenos transientes, os métodos conservativos dão origem a erros cíclicos de grande amplitude quando comparados com os métodos não-conservativos. Segundo os autores, estes erros são inerentes à forma de discretização empregada pelos métodos conservativos quando estes são aplicados ao modelo estudado. Entretanto, os autores não fizeram uso da mesma forma de discretização apresentada no presente trabalho.

Borthwick e Barber (1992) transformaram as Equações de Águas Rasas para um sistema de coordenadas generalizadas, com aproximação por diferenças finitas e marcha implícita-explicita em direções alternadas. Foram apresentadas alternativas para tratar as instabilidades oriundas dos termos advectivos cruzados, novos meios para avaliar as elevações nas fronteiras sólidas e um filtro digital de oscilações na elevação, cujo objetivo era eliminar as oscilações de alta frequência que provocaram as instabilidades notadas por Häuser *et alii* (1986). Também foram apresentados resultados para canais circulares e rios. O filtro digital referido anteriormente consistiu no cálculo da elevação num certo ponto através de uma média ponderada das elevações em dois instantes anteriores e no próprio instante.

Katopodes e Strelkoff (1978) apresentaram um procedimento, baseado na teoria das características, para prever a inundação após uma quebra de barragem. O escoamento foi tratado como bidimensional, transiente e com fronteira móvel.

Uma solução do problema da propagação de uma perturbação num canal com expansão abrupta pode ser encontrada em Stelling e Wang (1984). Neste trabalho utilizam-se diferenças finitas de segunda ordem à montante para a discretização dos termos advectivos, e a marcha no tempo é implícita-explicita em direções alternadas. Esta referência é bastante interessante devido ao fornecimento de dados experimentais, que dão origem às condições de contorno utilizadas na simulação numérica. Foram testadas diferentes combinações de viscosidade turbulenta, mantida constante no espaço e no tempo, e de condições de contorno nas paredes sólidas, que variaram segundo uma combinação das condições de deslizamento e não-deslizamento. Os resultados numéricos apresentados coincidiram razoavelmente bem com os resultados experimentais. É importante frisar que as condições de contorno usadas na entrada e na saída, nesta referência, foram obtidas a partir do tratamento dos dados colhidos no experimento com uma decomposição em séries de Fourier.

Perez (1987), usando o método dos volumes finitos, simulou a descarga de um fluido aquecido num lago utilizando uma aproximação de leito rígido, ou seja, considerando que a superfície do fluido fica estática e plana. O modelo foi aplicado à descarga térmica no Lago Ontário, Canadá, e concordou bem com os dados de campo disponíveis.

Várias referências podem ser citadas a respeito da forma de tratamento dos escoamentos compressíveis, que será aplicada à solução das equações das águas rasas, dentre elas figuram Marchi e Maliska (1994), Marchi *et alii* (1992) e Silva e Maliska (1992).

Marchi *et alii* (1992) apresentaram uma solução para o problema do bocal convergente divergente num escoamento compressível usando um modelo conservativo, implícito e colocalizado. Foram apresentadas discussões sobre as condições de contorno a serem usadas para cada situação de entrada e saída (subsônica, transônica e supersônica). Os detalhes da formulação podem ser encontrados em Maliska (1995).

A contribuição do presente trabalho é a implementação de uma metodologia em volumes finitos, com marcha totalmente implícita, para a simulação do escoamento em águas rasas usando a analogia entre os escoamentos compressíveis e os incompressíveis com superfície livre. Apesar de neste trabalho apenas serem tratados escoamentos sub-críticos, a metodologia a ser empregada é válida para escoamentos super-críticos, como o encontrado em vertedouros de barragens, e os resultados aqui obtidos poderão auxiliar em futuros trabalhos.

2. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

As equações de águas rasas podem ser obtidas a partir das equações de transporte tridimensionais (quantidade de movimento em x, y, z e conservação da massa), que podem ser colocadas na seguinte forma, para um escoamento incompressível:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}) - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1b)$$

O modelo de águas rasas considera que a distribuição de pressão na vertical seja puramente hidrostática. Aplicar-se-á uma pro-mediação às equações como colocada pela equação abaixo:

$$\overline{\phi(x, y)} = \frac{1}{D} \int_{-h}^{\zeta} \phi(x, y, z) dz \quad (2)$$

Fazendo uma integração na vertical das equações (1a) e (1b), com os limites como indicados na Fig. 1, vamos obter a equação pro-mediada na vertical, que permitirá a análise de escoamentos em corpos de águas rasas sob uma ótica bidimensional. Esta simplificação permite que um grande número de problemas práticos ambientais possam ser tratados com relativa facilidade.

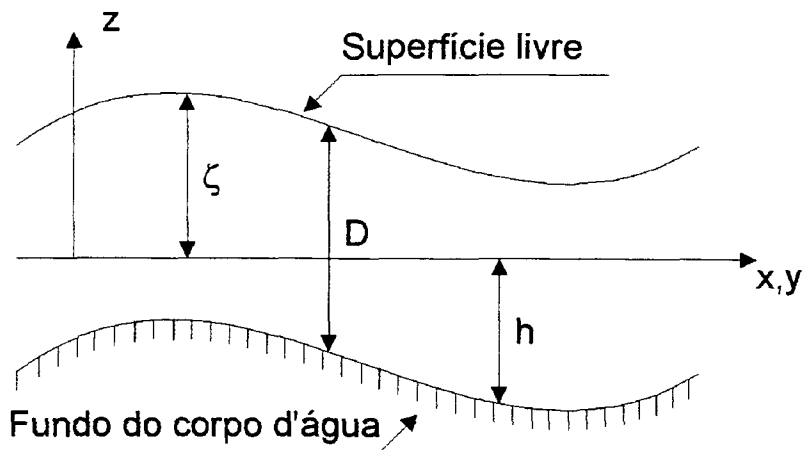


Fig. 1 - Coordenadas verticais do problema

2.1 Conservação da Massa

Integrando a Eq. (1b), encontra-se

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (3)$$

onde $i = 1$ e 2 , uma vez que a direção $i = 3$ (z) já está explicitada.

Pela regra de Liebnitz, o primeiro termo da equação pode ser colocado na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz + u_i(z=\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - u_i(z=-h) \frac{\partial(-h)}{\partial x_i}$$

Uma vez que $u(-h) = 0$, tem-se

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz - u(z=\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$$

Substituindo esta expressão na Eq. (3), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz - u_i(z=\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + w(z=\zeta) - w(z=-h) = 0$$

Sabendo-se que, pelas condições de contorno,

$$w(z = -h) = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = w(\zeta) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_i(z = \zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \quad (4b)$$

tem-se

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz = 0$$

A Eq. (4a) refere-se apenas a uma condição de contorno para a velocidade vertical. Quanto à Eq. (4b), ela é conhecida como condição cinemática da superfície.

Usando a Eq. (2), chega-se a equação da continuidade pro-mediada na vertical, dada por

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (D \bar{u}_i) = 0 \quad (5)$$

2.2 Quantidade de Movimento

Primeiramente, aplica-se a integração à Eq. (1a), resultando em

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) dz \\ & + \rho u_i(z = \zeta) w(z = \zeta) - \rho u_i(z = -h) w(z = -h) = \\ & \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \tau_{iz}}{\partial z} dz - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial p}{\partial x_i} dz \end{aligned} \quad (6)$$

Será considerado, daqui em diante, que a massa específica seja constante ao longo da coordenada z , de forma que se possa extraí-la da maioria das integrais durante as manipulações que se seguirão.

Tomando somente o termo transiente e aplicando a regra de Liebnitz, já considerando que $u(z=-h) = 0$, encontra-se

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} u_i dz - u_i(z=\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (7)$$

Para o termo convectivo, da mesma forma,

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) dz = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} u_j u_i dz - (u_j u_i)(z=\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \quad (8)$$

Para os termos de tensão viscosa, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \tau_{iz}}{\partial z} dz &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \tau_{ij} dz - \tau_{ij}(z=\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \\ &+ \tau_{ij}(z=-h) \frac{\partial (-h)}{\partial x_j} + \tau_{iz}(z=\zeta) - \tau_{iz}(z=-h) \end{aligned} \quad (9)$$

Num dado elemento da superfície, o vetor normal pode ser representado por $\bar{n} = \bar{N} / |\bar{N}|$, onde $\bar{N} = (-\partial \zeta / \partial x, -\partial \zeta / \partial y, 1)$. Assim, podemos obter o vetor de tensão na interface fluido-ar projetando o tensor tensão sobre a normal da superfície superior. Logo,

$$\tau_{ij} n_j + \tau_{iz} n_z = \tau_i^s$$

e

$$-\tau_{ix}(z=\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \tau_{iy}(z=\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \tau_{iz}(z=\zeta) = \tau_i^s \quad (10)$$

Analogamente, para o fundo, pode-se definir o vetor normal, sobre o qual o tensor tensão será projetado, por $\bar{n} = \bar{N} / |\bar{N}|$, sendo $\bar{N} = (\partial h / \partial x, \partial h / \partial y, 1)$. Desta forma, o vetor tensão no fundo fica,

$$\tau_{ix}(z = -h) \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_{iy}(z = -h) \frac{\partial h}{\partial y} + \tau_{iz}(z = -h) = \tau_i^B \quad (11)$$

Introduzindo as Eq. (10) e (11) na Eq. (9), temos a expressão final para os termos viscosos, dada por

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \tau_{iz}}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\zeta} \tau_{ij} dz + \tau_i^S - \tau_i^B \quad (12)$$

Uma vez que o modelo considera uma distribuição hidrostática para a pressão, num ponto qualquer ela será calculada por

$$p(z) = p_a + \rho g (\zeta - z)$$

onde p_a é a pressão atmosférica. Logo, tem-se para os gradientes de pressão

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$$

Considerando que as regiões a serem estudadas pelo modelo de águas rasas não serão de dimensão tal que torne eventuais diferenças de pressão atmosférica significativas, pode-se desprezar o termo correspondente, resultando em

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}$$

Substituindo esta expressão na integral do termo de pressão da Eq. (6), tem-se

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial p}{\partial x_i} dz = \int_{-h}^{\zeta} \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} dz = \rho g D \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \quad (13)$$

Utilizando-se a condição cinemática na superfície livre, o conceito da Eq. (2), juntamente com as Eqs. (7, 8, 12 e 13), na Eq. (6) resulta a equação pro-mediada da quantidade de movimento, dada por

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i D)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j \bar{u}_i D) = \frac{\partial}{\partial x_j}(D \bar{\tau}_{ij}) - \rho g D \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \tau_i^S - \tau_i^B \quad (14)$$

Na Eq. (14) fez-se a consideração adicional de que a média do produto é igual ao produto das médias. Isto foi necessário para que se pudesse explicitar o valor da variável u_i e é uma hipótese razoável se os perfis na vertical não apresentarem gradientes significativos.

De agora em diante far-se-á $\bar{u}_i = u_i$, para efeito de simplicidade, indicando apenas quando isto não for usado.

Várias formas foram usadas para os termos viscosos nos trabalhos levantados na revisão bibliográfica. Kawahara e Umetsu (1986) trabalharam com as descargas por unidade de largura, $M_i = Du_i$, colocando os termos de tensão viscosa como

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} M_i + \frac{\partial}{\partial x_i} M_j \right) \quad (15)$$

ao passo que Borthwick e Barber (1992) usaram uma transformação de coordenadas sobre a Eq. (14), mantendo os termos viscosos como apresentados aqui, sendo calculados usando um modelo newtoniano de tensão cizalhante. Eles, entretanto, não informam como conseguiram avaliar as tensões implicitamente no processo iterativo.

Neste trabalho opta-se por usar os termos viscosos na seguinte forma

$$\frac{\partial(D \bar{\tau}_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \quad (16)$$

Esta é a forma que foi utilizada por Stelling e Wang (1984) e é a apropriada para a utilização dos esquemas de interpolação conservativos que serão usados neste trabalho. Tem-se, portanto, as equações finais do sistema pro-mediado.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (D u_i) = 0 \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i D)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i D) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ -\rho g D \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \tau_i^S - \tau_i^B & \end{aligned} \quad (17b)$$

$$D = \zeta + h \quad (17c)$$

A Eq. (17c) surge para gerar uma relação para D , de modo a igualar o número de incógnitas ao de equações, uma vez que já se dispunha de equações para u_i (Eq. 17b) e ζ (Eq. 17a). Portanto, ela equivale a uma “equação de estado”.

3. ANALOGIA ÁGUAS RASAS X COMPRESSÍVEL

Há razões de ordem matemática, como os acoplamentos, e, logicamente, de ordem física, para explicar as analogias entre as equações de águas rasas e aquelas dos escoamentos compressíveis. Antes, porém, de percorrer estas questões, os parâmetros que servem para a caracterização dos escoamentos compressível e em águas rasas devem ser recordados.

3.1 Deslocamento de Ondas em Canais Abertos

Se, num escoamento num canal aberto, uma onda propagar-se, como indicado pela Fig. 2, ela terá uma velocidade w em relação a um referencial fixo.

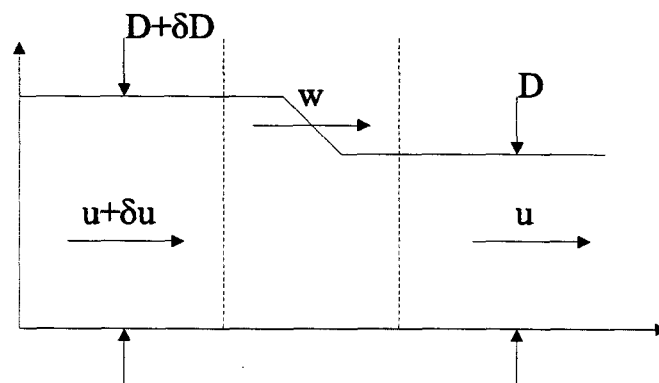


Fig. 2- Dados para a determinação da celeridade em águas rasas

Passando para um referencial que caminhe junto com a onda teremos, para a equação da continuidade,

$$(w - u) D = (w - u - \delta u) (D + \delta D)$$

Simplificando e desprezando os termos de segunda ordem, encontra-se

$$\frac{\delta u}{\delta D} = \frac{w - u}{D} \quad (18)$$

Aplicando a equação da conservação da quantidade de movimento entre pontos antes e depois da onda, encontra-se

$$D (w - u)^2 + g \frac{D^2}{2} = (D + \delta D) (w - u - \delta u)^2 + g \frac{(D + \delta D)^2}{2}$$

Após uma nova série de manipulações algébricas, desprezando os produtos de diferenciais e aplicando a Eq. (18), tem-se

$$w = u \pm \sqrt{g D} \quad (19)$$

Onde o sinal é positivo para ondas deslocando-se a favor da corrente e negativo caso contrário. Quando o fluido no canal está em repouso, a velocidade w é chamada de celeridade da onda, e é dada por

$$c = \sqrt{g D} \quad (20)$$

Percebe-se que, se a velocidade u for maior que c , não há possibilidade de uma onda trafegar contra o escoamento. A caracterização de um escoamento num canal aberto é feita, com base neste comportamento, através do número de Froude, definido por

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g D}} \quad (21)$$

Se o fluido num canal estiver escoando com velocidades maiores que a da onda, ou seja, se Fr for maior que a unidade, perturbações infinitesimais que ocorram a jusante não serão sentidas no escoamento a montante e as duas regiões não estarão em comunicação hidráulica. Estes escoamentos são classificados como supercríticos. Se o número de Froude for menor que a unidade estas perturbações poderão trafegar em sentido contrário ao escoamento, fazendo com que as regiões a montante e a jusante estejam em comunicação hidráulica, sendo o escoamento, então, classificado como subcrítico. Um bom exemplo é a propagação das ondas formadas quando uma pedra bate na superfície de um corpo d'água. Quando o fluido está em repouso, a perturbação trafega em todas as direções igualmente (Fig. 3a, $Fr = 0$). Para uma velocidade $u > 0$, a perturbação propaga-se com maior dificuldade contra a corrente (Fig. 3b, 0

$< Fr < 1$) até não mais consegui-lo (Fig. 3c, $Fr = 1$). Na Fig. 3 as linhas representam a perturbação em dois instantes de tempo diferentes.

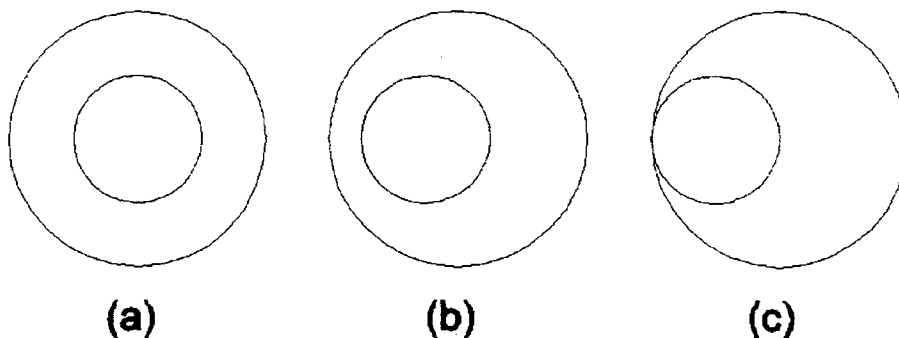


Fig. 3 - Situações de propagação de uma onda. Escoamento da esquerda para a direita.

Nota-se que a celeridade depende da espessura da lâmina no local, logo, deve variar ao longo de uma onda quando as elevações forem finitas. Espera-se, naturalmente, que as ondas formadas sejam pequenas, de modo que as deformações que ocorram na onda ao longo do deslocamento desta sejam também pequenas, para evitar a ocorrência de quebras de ondas, que são fenômenos físicos bem mais difíceis de tratar matematicamente.

Ao se encarar uma onda como uma frente de propagação de uma informação, nota-se que a Eq. (19) fornece a velocidade de propagação da informação que a nova velocidade é $u + \delta u$ e a nova espessura da lâmina é $D + \delta D$.

3.2 Deslocamento de Ondas em Fluidos Compressíveis

Considere-se agora, semelhantemente ao caso anterior, uma onda propagando-se num gás em movimento com velocidade w em relação a um referencial fixo, como mostrado na Fig. 4.

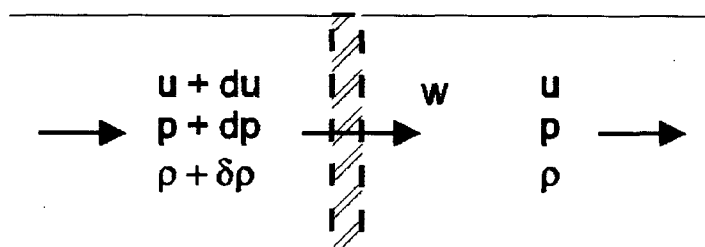


Fig. 4 - Dados para a determinação da celeridade em escoamentos compressíveis

Como a onda tem uma espessura desprezível, as trocas com o meio podem ser desconsideradas e, uma vez que as variações são infinitesimais, o processo pode ser considerado como isoentrópico, logo, a relação de processo entre pressão e densidade é dada por

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{cte}$$

Passando o referencial para a onda e fazendo-se um balanço de massa entre as faces tracejadas, tem-se

$$\rho (w - u) = (\rho + \delta\rho) (w - u - \delta u)$$

Trabalhando-se esta equação chega-se a

$$\frac{\delta u}{\delta\rho} = \frac{w - u}{\rho} \quad (22)$$

Fazendo um balanço da quantidade de movimento, nas mesmas condições, encontra-se

$$\rho (w - u)^2 + p = (\rho + \delta\rho) (w - u - \delta u)^2 + p + \delta p$$

Após manipulações algébricas e aplicando-se a Eq. (22) chega-se a:

$$(w - u)^2 = \frac{\delta p}{\delta\rho}$$

Uma vez que o processo é isoentrópico, a razão das variações de pressão e densidade pode ser calculada, desde que o gás seja perfeito, por

$$\frac{\delta p}{\delta\rho} = k R T$$

Logo,

$$w = u \pm \sqrt{k R T} \quad (23)$$

onde o sinal comporta-se como colocado no caso das águas rasas.

Novamente, uma onda não vai conseguir propagar-se contra o escoamento no qual u seja menor que a celeridade de uma onda no gás ($c = (kRT)^{1/2}$). A caracterização de um escoamento compressível é feita também com base neste comportamento, pelo uso do número de Mach,

$$M = \frac{u}{\sqrt{k R T}} \quad (24)$$

Se M for maior que um, o escoamento é dito supersônico, e nenhuma onda poderá trafegar contra o escoamento. Caso seja menor, as ondas poderão deslocar-se livremente em qualquer direção e o escoamento será dito subsônico.

Ao se encarar, novamente, a onda como uma frente de propagação de informação, nota-se que a Eq. (23) cumpre o mesmo papel da Eq. (19), informando a velocidade de propagação da informação de que as novas velocidade, pressão e densidade são $u + \delta u$, $p + \delta p$, $\rho + \delta \rho$.

3.3 *Semelhanças Entre Escoamentos em Águas Rasas e Compressível*

Conforme comentado anteriormente, as equações de águas rasas serão tratadas por uma ótica semelhante àquela usada atualmente para resolver problemas envolvendo escoamentos compressíveis. Neste capítulo apresentam-se as razões pelas quais se acredita que isto é possível.

Apresenta-se, agora, o sistema de equações que descreve o escoamento em águas rasas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Du_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(Du_j u_i) = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v D \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g D \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{(\tau_i^S - \tau_i^B)}{\rho} \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (D u_i) = 0 \quad (25b)$$

$$D = \zeta + h \quad (25c)$$

O sistema de equações que descreve o escoamento compressível é

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} + G(u_i) \quad (26a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (26b)$$

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (26c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_p u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \Phi \quad (26d)$$

Os termos $G(u_i)$ e Φ são descritos em Marchi e Maliska (1994) e o leitor é reportado a este texto para descrições mais detalhadas, que não serão dadas aqui pelo fato de não influenciar os argumentos que serão apresentados a seguir.

Ao se comparar os dois sistemas, percebe-se que há uma semelhança na presença do fator ρu_i nas equações compressíveis e do fator $D u_i$ nas equações de águas rasas. De fato, com ζ assumindo o papel matemático de p , vê-se que o produto $D u_i$ é não-linear, uma vez que D e u_i dependem de ζ . Esta dependência é análoga à de ρu_i com p , exceto que, na equação de estado dos escoamentos compressíveis não há nenhum termo aditivo, como o valor de h na equação correspondente ($D = D(\zeta)$) no sistema de águas rasas.

Comparando-se as Eqs. (25c) e (26c) observa-se que a semelhança entre ζ e p na equação de estado é total (a menos de uma constante multiplicativa) quando $h = 0$, ou seja, para corpos d'água de profundidade constante. É nesta situação que se usa a bem conhecida mesa

d'água para simular escoamentos compressíveis utilizando o escoamento de superfície livre de uma lâmina d'água de espessura constante.

Esta não linearidade gerará a necessidade de um tratamento no acoplamento $\zeta \times u_i$ análogo ao que é aplicado no caso de escoamentos compressíveis. Esta é a razão de natureza matemática, enfocando os sistemas e os acoplamentos existentes. Listam-se a seguir algumas razões de natureza mais intuitiva e física, originadas da comparação do comportamento dos dois escoamentos.

No estudo de escoamentos em águas rasas verifica-se o surgimento de fenômenos semelhantes a alguns que ocorrem em escoamentos compressíveis. Os mais notáveis são a formação de ondas e os saltos hidráulicos.

As ondas surgem quando o escoamento passa por alguma variação, como o fechamento brusco de uma comporta num canal, e são caracteristicamente transientes. Também nos escoamentos compressíveis ocorrem formações de ondas, associadas a fatos semelhantes aos apresentados aqui, como a ruptura de membranas em tubos de choque. As ondas, nestes casos, tem o papel físico de transmitir as informações das ocorrências ao longo do escoamento.

Os saltos são mudanças na espessura da lâmina que ocorrem numa intensidade considerável em relação às mesmas e às áreas cobertas pelo escoamento. De fato, os saltos podem ser vistos como ondas estacionárias. Outra causa de um salto é a fricção. Num canal reto, a lâmina vai perdendo altura para vencer a resistência do atrito (equilibrar os gradientes de elevação e os termos de tensão de fundo), mas a velocidade vai aumentando para que se conserve massa, o que aumenta a taxa de perda de energia por atrito (maiores velocidades médias em lâminas menores). Chega-se a um ponto no qual, para evitar o estabelecimento de taxas exorbitantes de perda de energia, o escoamento passa por um salto, que irá aumentar a espessura de sua lâmina e reduzir a velocidade média, provocando uma queda substancial na taxa de perda de energia por atrito. Um mecanismo semelhante é o responsável pelo surgimento de um choque num escoamento compressível num tubo de seção constante.

Num escoamento compressível em torno de um corpo qualquer, haverá a formação de um gradiente mais acentuado de pressão logo à frente do corpo, podendo ser tênue, no caso do escoamento livre estar na faixa compressível subsônica ($1.0 > M > 0.3$), ou brusco (linha de

choque), no caso do escoamento livre estar com $M > 1.0$, como indicado na Fig. 5. A formação tênue vem do fato de que a informação da presença do corpo pode trafegar contra o escoamento no caso dele ser subsônico, o que não ocorre no caso supersônico.

Analogamente, se pusermos um prisma de seção qualquer num escoamento em um canal aberto, como mostrado na Fig. 6, verificar-se-á a formação de um aumento de espessura na lâmina d'água à medida que se aproxima do corpo, o que caracteriza um salto hidráulico. O salto, assim como o choque, surge para provocar uma curvatura no escoamento em torno do corpo.

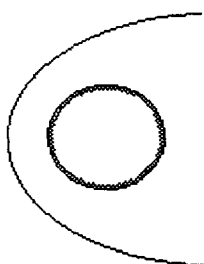


Fig. 5 - Escoamento compressível.

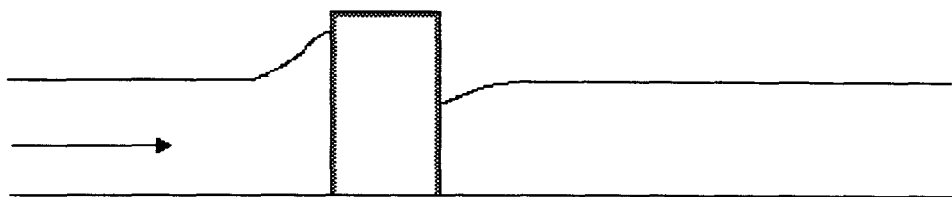


Fig. 6 - Escoamento em águas rasas.

A todos estes fenômenos estão associadas variações da espessura da lâmina (D), que equivalem a variações na densidade nos escoamentos compressíveis. Em vista destas semelhanças, partir-se-á, no capítulo 4, para a aplicação às águas rasas de um método de tratamento do acoplamento $\zeta \times u$, semelhante ao aplicado para o acoplamento pressão \times velocidade nos escoamentos compressíveis.

As diferenças principais ficam por conta da não-linearidade do termo de “pressão”, que contém o produto da espessura da lâmina d'água pelo gradiente de elevação, não havendo

produto da densidade pelo gradiente de pressão no modelo de escoamentos compressíveis, da forma funcional da “equação de estado” dos escoamentos em águas rasas, que tem um termo aditivo não encontrado nos escoamentos compressíveis de, por exemplo, ar (este termo desaparece para corpos d’água com batimetria constante). Também são diferentes a presença de um fenômeno térmico associado aos escoamentos compressíveis e a presença das tensões de fundo e vento nas equações de águas rasas.

4. DISCRETIZAÇÃO E CONDIÇÕES DE CONTORNO: EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

Para que se discretize uma equação diferencial, primeiro deve-se definir o espaço no qual isso será feito. Como o arranjo utilizado é o desencontrado (Patankar, 1980), os volumes nos quais se farão as integrações das equações da quantidade de movimento em x e y e da conservação da massa não serão os mesmos, como mostra a Fig. 7a. Fez-se a opção de usar um arranjo desencontrado para evitar que eventuais problemas de aplicabilidade do método de tratamento das dependências cruzadas entre as velocidades e a elevação a ser usado aqui somem-se às particularidades do uso de um arranjo co-localizado.

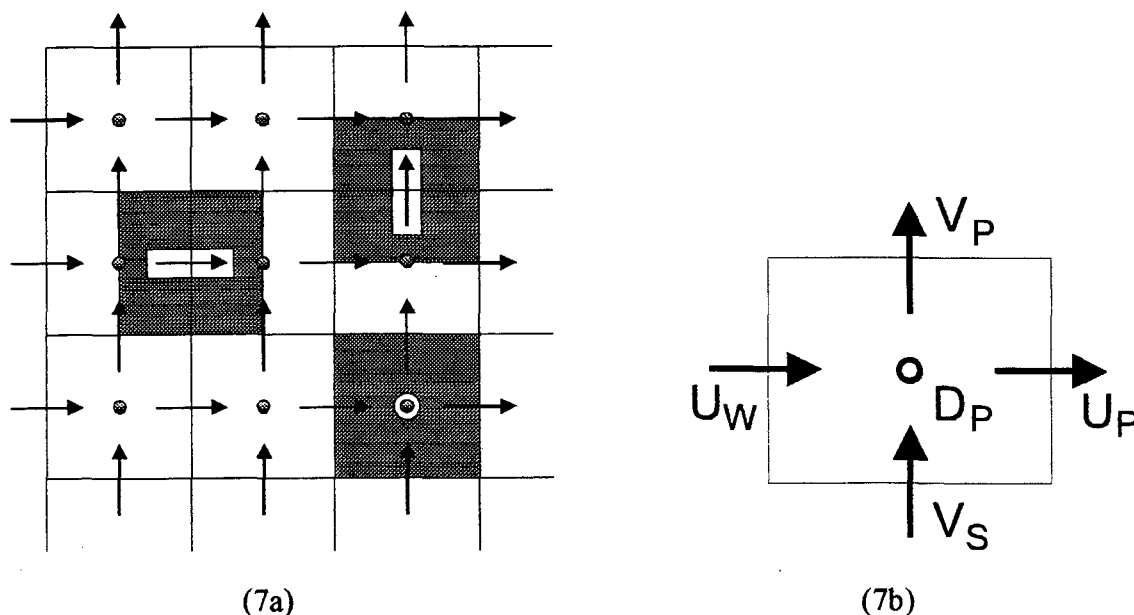


Fig. 7 - (a) Arranjo desencontrado (b) Indexação das variáveis.

Os círculos representam os locais de armazenagem da elevação ζ e da espessura da lâmina d'água, D . As setas horizontais e verticais representam onde u e v serão calculados, respectivamente. Exemplos dos volumes nos quais se farão as integrações das variáveis aparecem em destaque.

Uma vez definidos os volumes, passamos às hipóteses simplificadoras:

1. Marcha implícita no tempo, ou seja, as variáveis ao longo de um intervalo serão bem representados pelos seus valores ao final deste.
2. As variáveis são constantes ou tem distribuição linear ao longo da interface de um volume de controle qualquer.
3. O valor de uma variável no centro de seu volume de controle prevalece, para efeito da integração dos termos transientes e fontes, ao longo de todo o volume.

Uma vez definidos os volumes e as simplificações, prossegue-se o processo de integração das equações.

4.1 Quantidade de Movimento

A integração da equação pro-mediada na vertical é feita no espaço (x,y). O procedimento considera uma variável genérica, ϕ , sendo delineadas, mais tarde, as particularidades para u e v.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_x \int_y \int \frac{\partial(\rho D \phi)}{\partial t} dt dx dy}_1 \\
 & + \underbrace{\int_x \int_y \int \frac{\partial(\rho D u \phi)}{\partial x} dt dx dy}_2 + \underbrace{\int_x \int_y \int \frac{\partial(\rho D v \phi)}{\partial y} dt dx dy}_3 = \\
 & \underbrace{\int_x \int_y \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt dx dy}_4 + \underbrace{\int_x \int_y \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dt dx dy}_5 \\
 & + \underbrace{\int_x \int_y \int S dt dx dy}_6 - \underbrace{\int_x \int_y \int P dt dx dy}_7
 \end{aligned} \tag{27}$$

onde S corresponde a $\tau_i^S - \tau_i^B$ e P corresponde ao termo de pressão.

Primeiramente, trabalha-se o termo transiente (1), usando a hipótese 3, resultando

$$(1) = \left((\rho D\phi)_p - (\rho D\phi)_p^o \right) \Delta x \Delta y \quad (28a)$$

O termo (2) resulta, após usar a hipótese 2,

$$(2) = \left((\rho D u)_e \Delta y \phi_e - (\rho D u)_w \Delta y \phi_w \right) \Delta t \quad (28b)$$

Igualmente, para os termos (3), (4) e (5):

$$(3) = \left((\rho D v)_n \Delta x \phi_n - (\rho D v)_s \Delta x \phi_s \right) \Delta t \quad (28c)$$

$$(4) = \left(\left(\mu D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \Delta y - \left(\mu D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \Delta y \right) \Delta t \quad (28d)$$

$$(5) = \left(\left(\mu D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n \Delta x - \left(\mu D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \Delta x \right) \Delta t \quad (28e)$$

O termo fonte, (6), é dividido em duas partes, uma constante e outra proporcional a ϕ , sendo a constante avaliada com os valores disponíveis e a proporcional implicitamente, assim

$$(6) = \left(S_c \Delta x \Delta y + S_p \Delta x \Delta y \phi_p \right) \Delta t \quad (28f)$$

O termo de pressão depende de qual variável está sendo representada por ϕ . Uma vez que a velocidade v indexada com o subíndice genérico P está na face norte, e a u na leste, do volume para a elevação com subíndice P , conforme indicado na Fig. 7b, os gradientes de pressão podem ser avaliados, por diferenças centrais, da seguinte maneira:

$$P_P^u = -\rho g D_{Pu} \frac{\zeta_E - \zeta_P}{\Delta x}$$

$$P_P^v = -\rho g D_{Pv} \frac{\zeta_N - \zeta_P}{\Delta y}$$

onde D_{Pv} e D_{Pu} significam as espessuras da lâmina d'água nas faces norte e leste do volume de ζ , respectivamente.

A integração destas equações nos volumes indicados para u e v resultam.

$$\int_y \int_x \int P^u dt dx dy = -(\rho g D_{Pu} \Delta y (\zeta_E - \zeta_P)) \Delta t \quad (29a)$$

$$\int_y \int_x \int P^v dt dx dy = -(\rho g D_{Pv} \Delta x (\zeta_N - \zeta_P)) \Delta t \quad (29b)$$

Deve-se, agora, adotar uma maneira de calcular os valores da propriedade ϕ e de seus gradientes nas faces do volume de controle. Para que se chegue a uma boa ponderação entre os efeitos advectivos e difusivos, foram adotados o WUDS (Raithby e Torrance, 1974) para os casos unidimensionais e o QUICK (Leonard, 1979) para os bidimensionais.

4.1.1 WUDS

O WUDS deduz expressões para os valores e derivadas de uma variável numa interface de volume de controle, como mostrada na Fig. 8, da seguinte forma

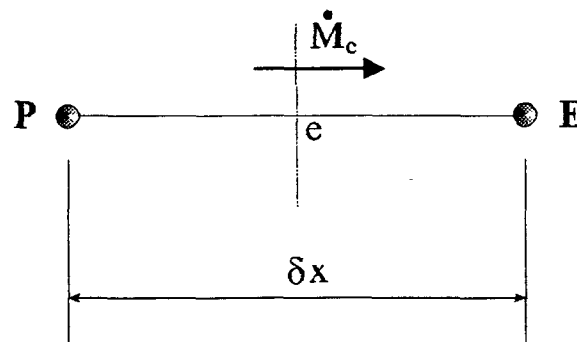


Fig. 8 - Convenções para o WUDS

$$\phi_e = \left(\frac{1}{2} + \alpha_e \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) \phi_E \quad (30a)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \beta_e \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta x} \quad (30b)$$

Onde $|\alpha_e|$ e β_e são calculados por:

$$|\alpha_e| \cong \frac{Pe_e^2}{10 + 2Pe_e^2}$$

$$\beta_e \cong \frac{1 + 0.005Pe_e^2}{1 + 0.05Pe_e^2}$$

$$Pe_e = \frac{\dot{M}_e \delta x}{\mu D_e \Delta y}$$

$$\dot{M}_e = (\rho D u)_e \Delta y$$

O fator α terá o mesmo sinal da velocidade na interface onde estiver atuando.

Substituindo expressões similares para as faces oeste, norte e sul nas Eqs. (28), e estas na integração da equação de conservação, Eq. (27), juntamente com as Eqs. (29), tem-se, após dividir tudo por Δt ,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\rho D_{P\phi} \Delta x \Delta y}{\Delta t} - S_P \Delta x \Delta y \right. \\
& + \dot{M}_e \left(\frac{1}{2} + \alpha_e \right) - \dot{M}_w \left(\frac{1}{2} - \alpha_w \right) + \dot{M}_n \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) - \dot{M}_s \left(\frac{1}{2} - \alpha_s \right) \\
& + \beta_e \left(\frac{\mu D}{\Delta x} \Delta y \right)_e + \beta_w \left(\frac{\mu D}{\Delta x} \Delta y \right)_w \\
& + \beta_n \left(\frac{\mu D}{\Delta y} \Delta x \right)_n + \beta_s \left(\frac{\mu D}{\Delta y} \Delta x \right)_s \left. \right] \phi_P = \\
& \left[-\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) + \beta_e \left(\frac{\mu D}{\Delta x} \Delta y \right)_e \right] \phi_E + \\
& \left[\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) + \beta_w \left(\frac{\mu D}{\Delta x} \Delta y \right)_w \right] \phi_W + \\
& \left[-\dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) + \beta_n \left(\frac{\mu D}{\Delta y} \Delta x \right)_n \right] \phi_N + \\
& \left[\dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \alpha_s \right) + \beta_s \left(\frac{\mu D}{\Delta y} \Delta x \right)_s \right] \phi_S + \\
& S_c \Delta x \Delta y + L[P] + \frac{\rho \Delta x \Delta y}{\Delta t} D_{P\phi}^o \phi_P^o
\end{aligned} \tag{31}$$

Onde as vazões são calculadas nas faces dos volumes de controle para ϕ , $D_{P\phi}$ representa D_{Pu} ou D_{Pv} e $L[P]$ representa uma das Eqs. (29).

Como não se dispõe simultaneamente dos valores da espessura da lâmina d'água no instante anterior e no presente, deve-se eliminar o valor presente da expressão que multiplica o valor da variável no volume de controle em foco. Isto se faz através de uma aplicação da equação da conservação da massa, que, integrada no volume em questão, resulta em

$$\frac{\rho D_{P\phi} - \rho D_{P\phi}^o}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0$$

onde, uma vez isolado o valor presente, ter-se-á

$$\rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} D_{P\phi} = \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} D_{P\phi}^o + \dot{M}_w - \dot{M}_e + \dot{M}_s - \dot{M}_n$$

Substituindo esta igualdade na expressão entre colchetes que multiplica ϕ_P na Eq. (31) tem-se, para esta expressão,

$$\begin{aligned} & [\rho D_{P\phi}^o \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} S_P \Delta x \Delta y \\ & - \dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) + \dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) - \dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) + \dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \alpha_s \right) \\ & \beta_e \left(\frac{\mu D}{\Delta x} \Delta y \right)_e + \beta_w \left(\frac{\mu D}{\Delta x} \Delta y \right)_w + \beta_n \left(\frac{\mu D}{\Delta y} \Delta x \right)_n + \beta_s \left(\frac{\mu D}{\Delta y} \Delta x \right)_s] \end{aligned}$$

Percebe-se que esta expressão contém a soma das expressões que multiplicam ϕ_{NB} (NB = N, S, E, W), assim sendo, pode-se montar um sistema de equações algébricas com a seguinte estrutura:

$$A_P^\phi \phi_P = \sum_{NB} A_{NB}^\phi \phi_{NB} + B_P^\phi \quad (32)$$

Os coeficientes da Eq. (32) são dados por

$$A_N^\phi = -\dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) + \beta_n \left(\frac{\mu D}{\Delta y} \Delta x \right)_n \quad (33a)$$

$$A_S^\phi = +\dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \alpha_s \right) + \beta_s \left(\frac{\mu D}{\Delta y} \Delta x \right)_s \quad (33b)$$

$$A_E^\phi = -\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) + \beta_e \left(\frac{\mu D}{\Delta x} \Delta y \right)_e \quad (33c)$$

$$A_W^\phi = +\dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) + \beta_w \left(\frac{\mu D}{\Delta x} \Delta y \right)_w \quad (33d)$$

$$A_P^\phi = \sum_{NB} A_{NB}^\phi - S_p \Delta x \Delta y + \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} D_{P\phi}^o \quad (33e)$$

$$B_P^\phi = S_c \Delta x \Delta y + \rho \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} D_{P\phi}^o \phi_P^o + L[P] \quad (33f)$$

Para u e v , o termo $L[P]$ deve ser substituído pelas Eqs. (29a) e (29b), respectivamente, já divididas por Δt . Os termos fonte vem das tensões de topo e fundo da lâmina, sendo que suas expressões determinam S_c e S_p . Nas tensões de topo, por exemplo, a expressão pode envolver a velocidade dos ventos presentes na área e a do próprio escoamento. Já as de fundo envolverão apenas a velocidade do escoamento.

Assumindo que não existam ventos nas situações estudadas, $\tau_{u,v}^s = \mathbf{0}$. Quanto às tensões de fundo, adota-se, aqui, a mesma expressão usada por Borthwick e Barber (1992):

$$\tau_i^B = \frac{\rho g}{C^2} \sqrt{u^2 + v^2} u_i$$

Com isto, faz-se o cálculo de S_p e S_c com as equações seguintes, que são as mesmas para u e v :

$$S_p = -\frac{\rho g}{C^2} \sqrt{u^2 + v^2}; \quad S_c = 0$$

onde C é o coeficiente de Chézy, que representa as propriedades de fricção, e seu cálculo pode ser encontrado em livros sobre projeto de canais abertos (Chow, 1973.).

4.1.2 QUICK

Uma vez que serão simulados casos bidimensionais é recomendável usar um esquema de interpolação de alta ordem para reduzir os erros devido à difusão numérica (Maliska, 1995; Patankar, 1980). Um esquema de interpolação bastante simples de ser implementado é o QUICK (Leonard, 1979). Nele as avaliações de ϕ nas faces são feitas com o uso de parábolas ajustadas com dois pontos à montante e um à jusante. Assim, teríamos para ϕ_e , por exemplo:

$$\begin{aligned} \phi_e = & \left(\frac{1}{2} + S_e\right) \frac{1}{8} (-\phi_W + 6\phi_P + 3\phi_E) \\ & + \left(\frac{1}{2} - S_e\right) \frac{1}{8} (-\phi_{EE} + 6\phi_P + 3\phi_W) \end{aligned} \quad (34)$$

onde,

$$S_e = \begin{cases} \frac{1}{2}, u_e^* \geq 0 \\ -\frac{1}{2}, u_e^* < 0 \end{cases}$$

Substituindo esta expressão, e suas similares para as outras faces, nas equações de conservação, dá origem a um sistema com quatro vizinhos (NN, SS, EE, WW) além dos imediatos (N, S, E, W), o que cria a necessidade de um esquema específico para a solução da matriz. Um modo de contornar esta dificuldade é implementar o QUICK como sendo um esquema de baixa ordem implícito, envolvendo apenas os vizinhos imediatos, acrescido de uma correção explícita, que levará o conjunto para um esquema de alta ordem.

A implementação do QUICK como um esquema de diferenças centrais mais uma correção explícita a natureza desta correção, um ajuste de curvatura, mas a matriz passa a ter coeficientes negativos, o que prejudica enormemente a convergência. Para contornar esta dificuldade, procedeu-se a implementação do QUICK como uma simples avaliação à montante implícita mais uma correção com os valores disponíveis que levará ao esquema de alta ordem (Menezes, 1996). Assim, temos para a face leste:

$$\begin{aligned} \phi_e &= \left(\frac{1}{2} + S_e\right)\phi_P + \left(\frac{1}{2} - S_e\right)\phi_E \\ &+ \frac{1}{8} \left[\left(\frac{1}{2} + S_e\right)(-\phi_W^* - 2\phi_P^* + 3\phi_E^*) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} - S_e\right)(-\phi_{EE}^* - 2\phi_E^* + 3\phi_P^*) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Quando uma face coincide com alguma fronteira, não se faz a inclusão da correção correspondente, ficando a avaliação feita à montante. As derivadas envolvidas nos cálculos dos termos difusivos são avaliadas com diferenças centrais puras (ou seja, sem o fator β do WUDS). Os demais termos são avaliados como já foi mostrado.

Assim fecham-se os cálculos para os coeficientes dos sistemas para u e v , que serão resolvidos usando o método MSI (Schneider e Zedan, 1981).

4.2 Conservação da Massa (Obtenção de uma Equação para D)

A equação da conservação da massa é integrada nos volumes para ζ , com as mesmas considerações usadas na integração das equações da quantidade de movimento, resultando:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_y \int_x \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \zeta) dt dx dy}_1 + \underbrace{\int_y \int_x \int \frac{\partial}{\partial x} (\rho D u) dt dx dy}_2 \\ &+ \underbrace{\int_y \int_x \int \frac{\partial}{\partial y} (\rho D v) dt dx dy}_3 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Tem-se, para cada termo assinalado, já consideradas as hipóteses sobre as integrações e sabendo-se que a densidade é constante no tempo e no espaço:

$$(1) = (\zeta_P - \zeta_P^o) \Delta x \Delta y \quad (37a)$$

$$(2) = ((D u \Delta y)_e - (D u \Delta y)_w) \Delta t \quad (37b)$$

$$(3) = ((D v \Delta x)_n - (D v \Delta x)_s) \Delta t \quad (37c)$$

Substituindo as Eqs. (37) na Eq. (36) temos a equação da conservação da massa discretizada

$$\begin{aligned} & (\zeta_p - \zeta_p^o) \Delta x \Delta y + \\ & \left((D u \Delta y)_e - (D u \Delta y)_w \right) \Delta t + \\ & \left((D v \Delta x)_n - (D v \Delta x)_s \right) \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Nos métodos segregados, ou seja, naqueles nos quais as equações da quantidade de movimento e da conservação da massa são resolvidas sequencialmente, esta última é usada para calcular campos de correções de elevação, ζ' (ou p' no caso dos demais escoamentos), e de velocidade. Tais correções são relacionadas às soluções das equações da quantidade de movimento e às elevações estimadas por

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^* + \mathbf{u}'_i \quad (39a)$$

$$\zeta = \zeta^* + \zeta' \quad (39b)$$

onde \mathbf{u}_i , ζ são os campos corrigidos. Substituindo a Eq. (39b) na Eq. (17c), tem-se

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^* + \zeta' \quad (39c)$$

Como pode ser notado, a Eq. (38) é não linear com respeito a ζ nas derivadas espaciais e linear na derivada no tempo, tornando insolúvel qualquer sistema discretizado resultante por envolver termos lineares e não lineares simultaneamente. Corrigem-se as velocidades e a espessura pois fazê-lo apenas para as primeiras exigiria correções de elevação muito altas, que seriam utilizadas mais à frente para recalculas as espessuras da lâmina, podendo provocar a divergência da solução (razões similares serão dadas no Cap. 5 para os escoamentos compressíveis). Faz-se necessária uma linearização dos termos de fluxo (Du e Dv) para alcançar uma equação linear, o que é conseguido com uma expansão em série de Taylor. Assim, por exemplo, para Du

$$(\mathbf{D} \mathbf{u}) = (\mathbf{D} \mathbf{u})^* + \frac{\partial(\mathbf{D} \mathbf{u})^*}{\partial \mathbf{u}^*} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \frac{\partial(\mathbf{D} \mathbf{u})^*}{\partial \mathbf{D}^*} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^*)$$

$$(\mathbf{D} \mathbf{u}) = (\mathbf{D} \mathbf{u})^* + \mathbf{u}^* \zeta' + \mathbf{D}^* \mathbf{u}' \quad (40a)$$

Similarmente, para Dv

$$(\mathbf{D} \mathbf{v}) = (\mathbf{D} \mathbf{v})^* + \mathbf{v}^* \zeta' + \mathbf{D}^* \mathbf{v}' \quad (40b)$$

4.2.1 Relação entre $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$ e ζ'

A substituição das avaliações da Eq. (40) nas faces do volume de controle para a conservação da massa na Eq. (38) gera um sistema linear, mas que envolve correções de elevação e velocidade. Uma vez que as velocidades dependem da elevação, pode-se buscar uma relação de dependência entre suas correções, de forma a deixar a equação discretizada apenas em função da correção de elevação.

A forma adotada aqui para alcançar tal objetivo foi o SIMPLEC (Van Doormaal e Raithby, 1984), que foi primeiro descrito para escoamentos com o acoplamento baseado na pressão. Os passos descritos a seguir são baseados naquela descrição, alterando-se apenas o termos de pressão.

As equações da quantidade de movimento para um campo estimado de ζ^* são

$$\mathbf{A}_p^u \mathbf{u}_P^* = \sum_{\text{NB}} \mathbf{A}_{\text{NB}}^u \mathbf{u}_{\text{NB}}^* + \mathbf{B}_P^u + \rho g D_{\text{Pu}} \Delta x (\zeta_P^* - \zeta_E^*) \quad (41a)$$

$$\mathbf{A}_p^v \mathbf{v}_P^* = \sum_{\text{NB}} \mathbf{A}_{\text{NB}}^v \mathbf{v}_{\text{NB}}^* + \mathbf{B}_P^v + \rho g D_{\text{Pv}} \Delta y (\zeta_P^* - \zeta_N^*) \quad (41b)$$

Tais equações com os campos de u , v e ζ que satisfazem a conservação da massa são

$$\mathbf{A}_p^u \mathbf{u}_P = \sum_{\text{NB}} \mathbf{A}_{\text{NB}}^u \mathbf{u}_{\text{NB}} + \mathbf{B}_P^u + \rho g D_{\text{Pu}} \Delta x (\zeta_P - \zeta_E) \quad (42a)$$

$$\mathbf{A}_P^v \mathbf{v}_P = \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^v \mathbf{v}_{NB} + \mathbf{B}_P^v + \rho g \mathbf{D}_{Pv} \Delta y (\zeta_P - \zeta_N) \quad (42b)$$

Subtraindo as Eqs. (41) das Eqs. (42), temos as equações que relacionam os campos das correções de u , v e ζ (u' , v' e ζ' , respectivamente)

$$\mathbf{A}_P^u \mathbf{u}'_P = \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^u \mathbf{u}'_{NB} + \rho g \mathbf{D}_{Pu} \Delta x (\zeta'_P - \zeta'_E) \quad (43a)$$

$$\mathbf{A}_P^v \mathbf{v}'_P = \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^v \mathbf{v}'_{NB} + \rho g \mathbf{D}_{Pv} \Delta y (\zeta'_P - \zeta'_N) \quad (43b)$$

A substituição das expressões de u' e v' dadas pelas Eqs. (43) nas Eqs. (40a,b), e destas na Eq. (38) geram um sistema com correções de elevação e velocidades na vizinhança. Deve-se eliminar as correções das velocidades nas vizinhanças que estão nas Eqs. (43) para contornar este problema. A simples desconsideração das correções na vizinhança nas Eqs. (43) dá origem ao método SIMPLE (Patankar, 1980). No SIMPLER subtrai-se a correção da velocidade no ponto central das correções nos pontos vizinhos, resultando às Eqs. (43)

$$\left(\mathbf{A}_P^u - \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^u \right) \mathbf{u}'_P = \frac{\sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^u (\mathbf{u}'_{NB} - \mathbf{u}'_P)}{\quad} + \rho g \mathbf{D}_{Pu} \Delta x (\zeta'_P - \zeta'_E) \quad (44a)$$

$$\left(\mathbf{A}_P^v - \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^v \right) \mathbf{v}'_P = \frac{\sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^v (\mathbf{v}'_{NB} - \mathbf{v}'_P)}{\quad} + \rho g \mathbf{D}_{Pv} \Delta y (\zeta'_P - \zeta'_N) \quad (44b)$$

Os termos assinalados podem ser desprezados, pois envolvem diferenças de correção, resultando, para as relações procuradas entre as correções de velocidade e a correção de elevação

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_P^* + \mathbf{d}_P^u (\zeta'_P - \zeta'_E) \quad (45a)$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{d}_P^v (\zeta'_P - \zeta'_N) \quad (45b)$$

onde

$$d_P^u = \frac{\rho g D_{Pu} \Delta y}{A_P^u - \sum_{NB} A_{NB}^u} \quad (45c)$$

$$d_P^v = \frac{\rho g D_{Pv} \Delta x}{A_P^v - \sum_{NB} A_{NB}^v} \quad (45d)$$

4.2.2 Forma Final da Equação para ζ'

Substituindo as Eqs. (45a,b) nas Eqs. (40), temos a dependência do termo de vazão (Du) na face leste com ζ' , e, analogamente, a de (Dv) na face norte:

$$(Du)_e = (Du)_e^* + u_P^* \zeta'_e - D_{Pu}^* d_P^u (\zeta'_E - \zeta'_P) \quad (46a)$$

$$(Dv)_n = (Dv)_n^* + v_P^* \zeta'_n - D_{Pv}^* d_P^v (\zeta'_N - \zeta'_P) \quad (46b)$$

A avaliação das Eqs. (46) nas faces dos volumes de controle exige os valores de D^* e ζ' nessas localidades, o que é alcançado com avaliações à montante. Assim, quando se buscar a vazão na face leste, tem-se

$$(Du \Delta y)_e = (Du \Delta y)_e^* + u_P^* \Delta y \left(\left(\frac{1}{2} + S_e \right) \zeta'_E + \left(\frac{1}{2} - S_e \right) \zeta'_E \right) - \left(\left(\frac{1}{2} + S_e \right) D_P^* + \left(\frac{1}{2} - S_e \right) D_E^* \right) \Delta y d_P^u (\zeta'_E - \zeta'_P) \quad (47)$$

onde

$$S_e = \begin{cases} \frac{1}{2}, u_e^* \geq 0 \\ -\frac{1}{2}, u_e^* < 0 \end{cases}$$

Para a vazão na face oeste, a linearização resulta em

$$\begin{aligned} (D u \Delta y)_w &= (D u \Delta y)_w^* + u_w^* \Delta y \left(\left(\frac{1}{2} + S_w \right) \zeta'_w + \left(\frac{1}{2} - S_w \right) \zeta'_p \right) \\ &\quad - \left(\left(\frac{1}{2} + S_w \right) D_w^* + \left(\frac{1}{2} - S_w \right) D_p^* \right) \Delta y d_w^u (\zeta'_p - \zeta'_w) \end{aligned} \quad (48)$$

Para as faces norte e sul, basta trocar u, y, 'E', 'e', 'W' e 'w' nas Eqs. (47) e (48) por v, x, 'N', 'n', 'S' e 's', respectivamente.

Pode-se definir uma série de fatores intermediários, que facilitarão a apresentação das expressões para os coeficientes, que são:

$$m_e^u = D_e^* \Delta y = \Delta y \left(\left(\frac{1}{2} + S_e \right) D_p^* + \left(\frac{1}{2} - S_e \right) D_e^* \right) \quad (49a)$$

$$m_E^D = u_p^* \Delta y \left(\frac{1}{2} - S_e \right) \quad (49b)$$

$$m_w^u = D_w^* \Delta y = \Delta y \left(\left(\frac{1}{2} + S_w \right) D_w^* + \left(\frac{1}{2} - S_w \right) D_p^* \right) \quad (49c)$$

$$m_W^D = u_w^* \Delta y \left(\frac{1}{2} + S_w \right) \quad (49d)$$

$$\begin{aligned} m_p^D &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + u_p^* \Delta y \left(\frac{1}{2} + S_e \right) - u_w^* \Delta y \left(\frac{1}{2} - S_w \right) \\ &\quad v_p^* \Delta x \left(\frac{1}{2} + S_n \right) - v_s^* \Delta x \left(\frac{1}{2} - S_s \right) \end{aligned} \quad (49e)$$

Os fatores 'm' relativos às faces norte e sul seguem o mesmo formato. Quando estes fatores se referirem a faces coincidentes com fronteiras, usa-se, para a espessura da lâmina em tal face, o valor do volume real ao qual ela pertence, ou seja, assumem-se derivadas normais nulas para D, a não ser quando o valor no contorno for especificado.

Substituindo as Eqs. (47) e (48) na Eq. (38), e então levando em conta as Eqs. (49), juntamente com seus correspondentes na direção y, a equação integrada da conservação da massa fica, após agrupar os termos e dividir por Δt :

$$A_p^{\zeta'} \zeta'_p = \sum_{NB} A_{NB}^{\zeta'} \zeta'_{NB} + B_p^{\zeta'} \quad (50)$$

Onde os coeficientes são dados por:

$$A_P^\zeta = m_P^D + m_e^u d_P^u + m_w^u d_w^u + m_n^v d_P^v + m_s^v d_S^v \quad (51a)$$

$$A_N^\zeta = -m_N^D + m_n^v d_P^v \quad (51b)$$

$$A_S^\zeta = m_S^D + m_s^v d_S^v \quad (51c)$$

$$A_E^\zeta = -m_E^D + m_e^u d_P^u \quad (51d)$$

$$A_W^\zeta = m_W^D + m_w^u d_w^u \quad (51e)$$

$$B_P^\zeta = - \left[\begin{array}{c} (\zeta_P^* - \zeta_P^o) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} \\ + m_e^u u_P^* - m_w^u u_w^* + m_n^v v_P^* - m_s^v v_S^* \end{array} \right] \quad (51f)$$

No Cap. 5 será mostrado como se faz o tratamento do acoplamento p-ρ-(u,v) nos escoamentos compressíveis, mostrando a origem da necessidade da linearização. Ficará evidente, então, a analogia entre os métodos usados.

4.3 Condições de Contorno

Ao se analisar os coeficientes da equação discretizada da quantidade de movimento, nota-se que os valores de β tendem a zero quando os números de Reynolds da malha são muito altos (ordens de grandeza maiores que 10). Este será, exatamente, o caso das situações estudadas neste trabalho. Portanto, no que diz respeito ao balanço entre advecção e difusão, os escoamentos são parabólicos.

Entretanto, como foi colocado no capítulo 2, se o escoamento se der com um número de Froude, Fr , menor que a unidade, uma perturbação que ocorra no final de um canal, por exemplo, poderá deslocar-se contra o escoamento, o que é um comportamento elíptico. Assim sendo, as condições de contorno devem ser definidas de maneira a considerar estes dois padrões de comportamento.

4.3.1 Condições de Contorno para as Velocidades

Uma vez que nos escoamentos subcríticos há a possibilidade de uma perturbação deslocar-se contra a corrente, deve-se adotar condições, nas entradas, que possam absorver estas perturbações. Para isto, pelo menos uma variável deve estar livre. Escolheu-se a velocidade, de forma que, nas fronteiras com entrada de massa, a condição é que a derivada normal da velocidade normal é nula. Nos escoamentos supercríticos, a adoção desta condição não gera erros, uma vez que a velocidade estipulada na primeira iteração não será alterada por perturbações, pois estas não conseguirão propagar-se contra o escoamento.

Nas paredes adotou-se a condição de escorregamento para a velocidade tangencial, para os problemas unidimensionais, e de não-escorregamento para os casos bidimensionais. As velocidades normais são nulas, uma vez que as paredes são impermeáveis.

Na saída, devido ao balanço entre advecção e difusão anular a última, adota-se a condição de derivada nula. Esta condição não gera erros no campo de velocidades pois a última velocidade interior não terá nenhuma ligação com a que estiver sobre uma fronteira de saída (A_E desprezível em relação aos demais coeficientes).

O conjunto de condições para as velocidades fica, portanto:

$$\text{Entradas:} \quad \frac{\partial u_n}{\partial \hat{n}} = 0, u_t = 0$$

$$\text{Saídas:} \quad \frac{\partial u_n}{\partial \hat{n}} = 0, u_t = 0$$

$$\text{Paredes:} \quad \frac{\partial u_t}{\partial \hat{n}} = 0, u_n = 0$$

As velocidades u_t e u_n são as velocidades tangencial e normal a uma fronteira qualquer, e podem representar u ou v , conforme esta fronteira for vertical ou horizontal.

4.3.2 Condições de Contorno para a Conservação da Massa

Como, nas entradas, a velocidade é calculada admitindo uma derivada normal nula, deve-se prever a elevação ζ , de modo a haver alguma variável fixa para que a solução do problema possa ser determinada.

Nas paredes, como a derivada normal da velocidade tangencial é nula, não se faz necessário nenhum valor de D para o cálculo dos coeficientes da equação da quantidade de movimento relativos às faces coincidentes com estas fronteiras.

A integração da equação da conservação da massa deve ser particularizada nos volumes adjacentes às fronteiras. Disto resulta a anulação de todos os termos, no cálculo dos coeficientes, relativos às faces dos volumes que coincidam com alguma fronteira, exceto os do termo independente.

Desta forma, para os volumes adjacentes a uma fronteira oeste com entrada de massa, tem-se, para a equação integrada da conservação da massa,

$$\frac{\zeta_P - \zeta_P^o}{\Delta t} \Delta x \Delta y + (D u \Delta y)_e - \dot{M}_{in} + (D v \Delta x)_n + (D v \Delta x)_s = 0$$

Basta, agora, seguir passos semelhantes aos já apresentados anteriormente, mantendo-se \dot{M}_{in} fixo, pois o mesmo é conhecido, chegando-se aos coeficientes que serão alterados.

$$\begin{aligned} m_P^D &= \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + u_P^* \Delta y \left(\frac{1}{2} + S_e \right) \\ &\quad + v_P^* \Delta x \left(\frac{1}{2} + S_n \right) - v_S^* \Delta x \left(\frac{1}{2} - S_s \right) \end{aligned}$$

$$A_P^\zeta = m_P^D + m_n^v d_P^v + m_s^v d_S^v + m_e^u d_P^u$$

$$A_w^\zeta = 0$$

$$B_P^\zeta = - \left[\left(\zeta_P^* - \zeta_P^o \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + m_e^u u_P^* - \dot{M}_{in} + m_n^v v_P^* - m_s^v v_S^* \right]$$

Os demais coeficientes e fatores permanecem idênticos aos apresentados nas Eqs. (51).

Para a entrada, o valor da descarga é dado por:

$$\dot{M}_{in} = u_w^* D_{in} \Delta y$$

Sendo D_{in} a espessura da lâmina prescrita na entrada e u_w a velocidade ali determinada pela condição de derivada normal nula.

Para um volume adjacente a uma fronteira leste com saída de massa tem-se, analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_P - \zeta_P^o}{\Delta t} \Delta x \Delta y + \dot{M}_{out} - (D u \Delta y)_w \\ + (D v \Delta x)_n + (D v \Delta x)_s = 0 \end{aligned}$$

Passando pelos mesmos procedimentos descritos anteriormente, chega-se a

$$\begin{aligned} m_P^D = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} - u_w^* \Delta y \left(\frac{1}{2} - S_w \right) \\ + v_P^* \Delta x \left(\frac{1}{2} + S_n \right) - v_S^* \Delta x \left(\frac{1}{2} - S_s \right) \end{aligned}$$

$$A_P^\zeta = m_P^D + m_n^v d_P^v + m_s^v d_S^v + m_w^u d_w^u$$

$$A_E^\zeta = 0$$

$$B_P^\zeta = - \left[\left(\zeta_P^* - \zeta_P^o \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \dot{M}_{out} - m_w^u u_w^* + m_n^v v_P^* - m_s^v v_S^* \right]$$

O restante fica, novamente, como nas Eqs. (51).

Dado que, para escoamentos subcríticos, uma perturbação pode deslocar-se contra a corrente, deve-se tomar alguns cuidados quanto ao cálculo da descarga \dot{M}_{out} , para evitar que uma má avaliação gere ondas (aumentos ou diminuições da elevação) que, ao atingir as entradas, alterarão a velocidade ali existentes, estabelecendo um novo nível para a solução que

irá, então, propagar-se para as saídas, onde gerarão novas ondas e assim por diante. Este trânsito de informação degenera enormemente a convergência, para o caso de se buscar a solução permanente, ou gera falsos comportamentos transientes.

Deve-se prever M_{out} a partir das características de propagação de informações do próprio escoamento. Cada ponto do escoamento terá uma velocidade de propagação de informação, calculada de acordo com Eq. (19).

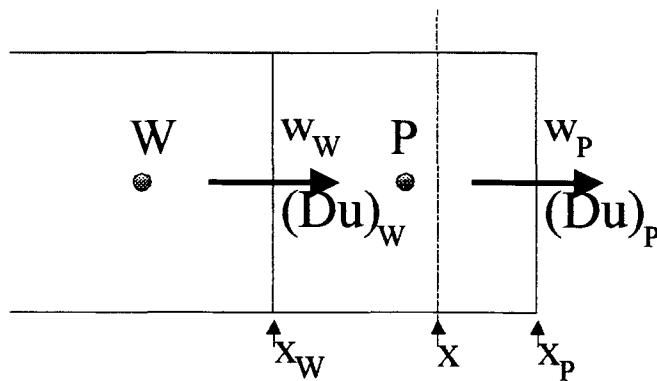


Fig. 9 - Convenções para o cálculo da descarga na saída

A Fig. 9 apresenta a região onde estão armazenados os fatores a serem usados no cálculo de M_{out} . Nela a face leste do volume P é a fronteira de saída. Deve-se buscar, entre as faces do volume P, o ponto que, num intervalo Δt , desloca-se de sua posição atual, x , até a face leste de P. A perturbação em x , portanto, deve obedecer à seguinte relação

$$x_P - x = w \Delta t \quad (52)$$

As velocidades das perturbações nas faces são calculadas com

$$w_P = u_P + \sqrt{g \frac{m_e^u}{\Delta y}}_P$$

$$w_W = u_W + \sqrt{g \frac{m_e^u}{\Delta y}}_W$$

Os fatores das Eqs. (49) para os volumes P e W foram usados para manter coerência com a forma de calcular D nas faces para a equação discretizada da conservação da massa.

A velocidade w na Eq. (52) é calculada com uma interpolação linear entre w_P e w_W , que, substituída na Eq. (52) resulta:

$$x_P - x = \frac{\Delta t}{\Delta X} (w_P (x - x_W) + w_W (x_P - x))$$

Trabalhando esta expressão, teremos, para x :

$$x = \frac{x_P + \frac{\Delta t}{\Delta X} (w_P x_W - w_W x_P)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta X} (w_P - w_W)}$$

A descarga na saída é calculada com uma interpolação linear entre os valores assinalados, na Fig. 9, como P e W.

$$\dot{M}_{out} = \frac{((Du)_P (x - x_W) + (Du)_W (x_P - x))}{(x_P - x_W)} \quad (53)$$

Este será o valor prescrito no início de um ciclo no tempo e mantido constante durante este. Nos volumes que tiverem faces coincidentes com as fronteiras sólidas, procede-se de maneira análoga às descritas acima, mas com as vazões nestas faces sendo nulas.

Observa-se que d^u é nulo para as velocidades u nas fronteiras leste e oeste, e d^v é nulo para as velocidades v nas fronteiras norte e sul.

4.4 *Ciclo Iterativo*

Pelo fato das equações serem não-lineares e acopladas, não se pode considerar que uma solução obtida pelos sistemas para u , v e ζ' seja correta. Faz-se necessário um processo iterativo para atualizar os valores disponíveis com que se calculam os coeficientes, de modo a levar em consideração as não-linearidades e os acoplamentos.

1. Definir as condições iniciais ($u, v, \zeta, D, u^o, v^o, \zeta^o, D^o$).
2. Resolver os sistemas lineares para u e v , obtendo u^* e v^* .
3. Resolver o sistema linear para ζ' .
4. Corrigir u, v, D e ζ (Eqs. (45a,b) e (39b,c))
5. Voltar ao passo 2.
6. Atualizar os valores de u^o, v^o, D^o, ζ^o .
7. Calcular M_{out} .
8. Voltar ao passo 2.

O número de vezes que se vai fazer o ciclo 2-5-2 deve ser suficiente para reduzir o resíduo de massa a níveis desprezíveis. Duas formas de se definir o critério para esta quantia de repetições são o erro total absoluto de massa e o erro relativo de massa.

O erro absoluto é definido por

$$\varepsilon_M = \sum_P |B_P^\zeta|$$

Onde B é o termo de fonte de massa para um determinado volume P .

O erro relativo pode ser definido como:

$$\varepsilon_M^r = \frac{\sum_P |B_P^\zeta|}{M_{in}}$$

Onde M_{in} é a quantidade de massa que entra no domínio de cálculo. Os limites máximos de erro usados foram de 10^{-5} e 10^{-8} . O erro relativo é um parâmetro mais adequado pois o erro absoluto pode ser pequeno quando as vazões mássicas envolvidas forem pequenas.

5. TRATAMENTO DOS ACOPLAMENTOS NOS ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS

A discretização das equações da quantidade de movimento compressíveis nas direções x e y , por métodos análogos aos apresentados no Cap. 4, dá origem aos sistemas de equações lineares para u e v , que, resolvidos, fornecem os campos de u^* e v^* , aliados a um campo estimado de pressões p^* , que são as soluções dos sistemas com a seguinte forma (as velocidades u e v e a pressão p estão dispostos de maneira similar à mostrada na Fig. 7b):

$$\mathbf{A}_P^u \mathbf{u}_P^* = \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^u \mathbf{u}_{NB}^* + \mathbf{B}_P^u - \Delta y (p_E^* - p_P^*) \quad (54a)$$

$$\mathbf{A}_P^v \mathbf{v}_P^* = \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^v \mathbf{v}_{NB}^* + \mathbf{B}_P^v - \Delta x (p_N^* - p_P^*) \quad (54b)$$

Estes campos, entretanto, não conservam massa. É preciso aplicar correções aos campos de u^* , v^* e p^* de forma a fazer com que os campos continuem obedecendo às equações da quantidade de movimento e também conservem massa. Estes campos, chamados de u , v e p , são colocados nas equações discretizadas da quantidade de movimento, ficando:

$$\mathbf{A}_P^u \mathbf{u}_P = \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^u \mathbf{u}_{NB} + \mathbf{B}_P^u - \Delta y (p_E - p_P) \quad (55a)$$

$$\mathbf{A}_P^v \mathbf{v}_P = \sum_{NB} \mathbf{A}_{NB}^v \mathbf{v}_{NB} + \mathbf{B}_P^v - \Delta x (p_N - p_P) \quad (55b)$$

Definindo

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_P^* + \mathbf{u}'_P \quad (56a)$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P^* + \mathbf{v}'_P \quad (56b)$$

$$p_P = p_P^* + p'_P \quad (56c)$$

e passando estas equações por procedimentos análogos aos apresentados no Cap. 4, teremos

$$u_P = u_P^* - d_P^u (p'_E - p'_P) \quad (57a)$$

$$v_P = v_P^* - d_P^v (p'_N - p'_P) \quad (57b)$$

onde

$$d_P^u = \frac{\Delta y}{A_P^u - \sum_{NB} A_{NB}^u} \quad (58a)$$

$$d_P^v = \frac{\Delta x}{A_P^v - \sum_{NB} A_{NB}^v} \quad (58b)$$

A equação da conservação da massa integrada para escoamentos compressíveis fica

$$\begin{aligned} & (\rho_P - \rho_P^o) \Delta x \Delta y \\ & + ((\rho u)_e - (\rho u)_w) \Delta y + ((\rho v)_n - (\rho v)_s) \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

A simples substituição das Eqs. (57) na Eq.(59) resulta numa equação algébrica para a correção de pressão, cujo sistema, uma vez resolvido, possibilita a atualização dos campos de u e v através das Eqs. (57).

Para o caso de escoamentos compressíveis fazer apenas isto pode levar ao cálculo de campos de correção de pressão muito altos, podendo inclusive fazer a solução divergir, devido à desconsideração, na discretização da equação da continuidade, da dependência da densidade com a correção de pressão. Para conservar a massa, toda a correção é feita sobre as velocidades, o que pode exigir que se formem diferenças muito grandes de correção de pressão ao longo do campo, e, dependendo do nível em que estas se estabelecerem, podem gerar modificações muito altas na densidade quando esta for recalculada, provocando a divergência da solução.

Para corrigir a densidade aplica-se a equação de correção da pressão na equação de estado. Isso resulta, por exemplo, para um gás perfeito,

$$\rho = \frac{(p^* + p')}{R T^*} = \frac{p^*}{R T^*} + \frac{p'}{R T^*}$$

$$\rho = \rho^* + C^p p' \quad (60)$$

A substituição da Eq.(60) na Eq.(59), juntamente com as Eqs. (57), gera um sistema com termos lineares e quadráticos em p' , que não pode ser resolvido. Faz-se necessário, então, linearizar o termo de vazão, o que é conseguido com uma expansão em série de Taylor em relação ao tempo (iteração). Por exemplo, para (ρu) :

$$(\rho u) = (\rho u)^* + \frac{\partial (\rho u)^*}{\partial \rho^*} (\rho - \rho^*) + \frac{\partial (\rho u)^*}{\partial u^*} (u - u^*)$$

Sabendo-se que:

$$\frac{\partial (\rho u)^*}{\partial \rho^*} = u^*$$

$$\frac{\partial (\rho u)^*}{\partial u^*} = \rho^*$$

$$(\rho - \rho^*) = \rho' = C^p p'$$

$$(u - u^*) = u' = -d^u \Delta_x p$$

Substituindo as relações acima na série de Taylor para ρu , temos a dependência deste termo com p' :

$$(\rho u) = (\rho u)^* + u^* C^p p' - \rho^* d^u \Delta_x p'$$

Nota-se que, agora, a expressão é linear, podendo ser substituída na integração da equação da continuidade para obter uma equação para p' .

Como é preciso dispor dos valores da densidade e da correção de densidade ($C^p p'$) nas faces, e estes valores são armazenados nos centros dos volumes para a conservação da massa,

usa-se uma avaliação à montante entre os pontos que ladeiam a face em questão. Assim, quando se buscar, por exemplo, a descarga na face leste, tem-se

$$\begin{aligned} (\rho u)_e &= (\rho u)_e^* + u_e^* \left(\left(\frac{1}{2} + S_e \right) C_P^\rho p'_P + \left(\frac{1}{2} - S_e \right) C_E^\rho p'_E \right) \\ &\quad - \left(\left(\frac{1}{2} + S_e \right) \rho_P^* + \left(\frac{1}{2} - S_e \right) \rho_E^* \right) d_e^u (p'_E - p'_P) \end{aligned} \quad (61)$$

Onde

$$S_e = \begin{cases} \frac{1}{2}, & u_e \geq 0 \\ -\frac{1}{2}, & u_e < 0 \end{cases}$$

Havendo expressões semelhantes para as descargas nas demais faces (oeste, norte e sul). A substituição da Eq. (61), e de suas similares para as outras faces, na equação da conservação da massa integrada, Eq. (59), resulta, após uma série de manipulações algébricas, numa equação da seguinte forma:

$$A_P p'_P = \sum_{nb} A_{nb} p'_{nb} + B_P$$

O agrupamento das equações para todos os pontos dará origem a um sistema de equações que, resolvido, resultará no campo de correções de pressão a ser usado sobre as velocidades e densidades.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para testar a aplicabilidade do método aqui apresentado foram realizados testes unidimensionais em situações variadas, permanentes e transientes. Estes problemas possuem solução analítica simples e por isso são adequados para avaliar o modelo desenvolvido. Em seguida, problemas bidimensionais também foram resolvidos.

Antes de apresentar os problemas, são feitas algumas considerações sobre escoamentos em canais abertos.

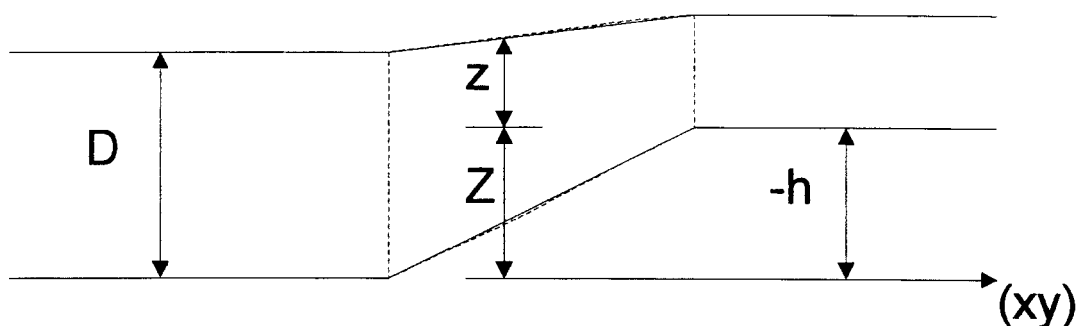


Fig. 10 - Dados para as equações 1D permanente

Aplicando-se a primeira lei da termodinâmica ao volume indicado pelas linhas tracejadas na Fig. 10, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(i + \frac{U^2}{2} + gZ \right) \delta m + \int_S \left(e + \frac{U^2}{2} + gZ \right) \delta \dot{m} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (62)$$

Ao considerar o escoamento adiabático, permanente e sem trabalho, com $e = i + p/\rho$, chega-se a

$$\int_S \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gZ \right) \delta \dot{m} = 0 \quad (63)$$

Uma vez que,

$$\frac{p}{\rho} = gz = g(D + h - Z)$$

tem-se, pela Eq. (63):

$$\int_s \left(g(D + h) + \frac{U^2}{2} \right) \delta \dot{m} = 0 \quad (64)$$

Como não há escoamento nas faces inferior e superior do volume, as vazões são iguais nas faces direita e esquerda. Uma vez que a Eq. (64), integrada, estabelece que o produto do integrando pela vazão deve ser constante, chega-se a

$$g(D + h) + \frac{U^2}{2} = \text{cte}$$

ou, numa outra forma,

$$d(gD) + d(gh) + d\left(\frac{U^2}{2}\right) = 0 \quad (65)$$

Sabendo-se que a velocidade U pode ser expressa como

$$U = \frac{Q}{bD}$$

onde b é a largura do canal, tem-se, na Eq. (65), após uma série de manipulações algébricas, a dependência da variação na espessura da lâmina de um escoamento com as variações do perfil do fundo do canal e de sua largura, dada por

$$dD = \frac{1}{Fr^2 - 1} \left(dh - Fr^2 \frac{D}{b} db \right) \quad (66)$$

Os resultados que serão obtidos nos exemplos que seguem devem obedecer a Eq. (66) para escoamentos invíscidos sem tensão de fundo.

6.1 Escoamentos Unidimensionais Permanentes

Foram testadas situações unidimensionais, invíscidas e sem tensão de fundo para conferir se o método reproduz os resultados das teorias mais básicas sobre o escoamento em canais abertos. Os casos referiram-se a escoamentos subcríticos e supercríticos em canais com o fundo apresentando elevações.

Como não se buscam, aqui, os aspectos transientes do fenômeno, o critério de convergência para o resíduo de massa foi estipulado em 10^{-6} . Também não se usou o cálculo da vazão na saída como apresentado anteriormente, usando-se a condição de contorno parabólica para todas as variáveis envolvidas no cálculo.

6.1.1 Escoamento Permanente Supercrítico

O caso testado foi o escoamento num canal de 1,0m de largura apresentando dois fundos retos, com diferentes profundidades, e um trecho linear de transição entre eles, conforme a visão lateral na Fig. 11. A região foi discretizada com 40 volumes reais na direção x e 1 na direção y. As condições de contorno são de deslizamento nas paredes, a saída é parabólica e não há tensão de fundo. As condições iniciais são de ζ constante (superfície livre plana, situação (a) na Fig. 11) e u constante (igual ao valor na entrada).

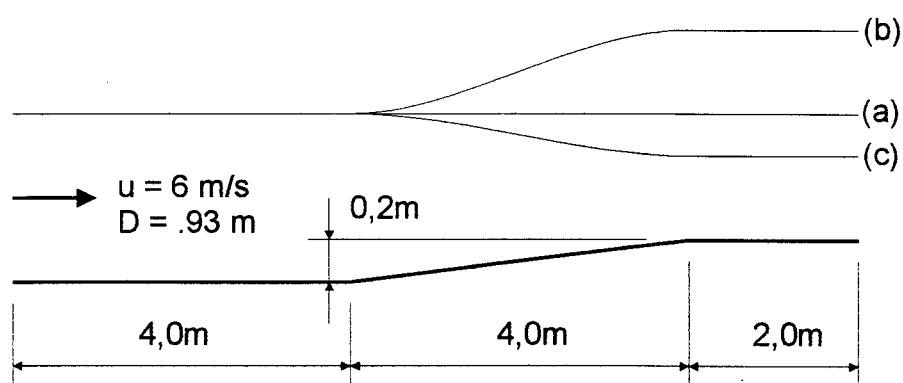


Fig. 11 - Geometria do canal.

A espessura calculada para a lâmina na saída do domínio foi 1.0107m, uma boa concordância com o valor calculado com a Eq. (66), usando o número de Froude na entrada, que foi de 1.0104m (situação (b) na Fig. 11).

6.1.2 Escoamento Permanente Subcrítico

Os dados relativos ao canal são os mesmos, mas a velocidade na entrada é de 1 m/s, que resulta num número de Froude de .3311, aproximadamente, no início da resolução do problema.

Um fato chama bastante a atenção no caso subcrítico: a situação final depende do passo de tempo adotado. Isto se deve ao fato de que, para cada passo de tempo, haverá uma formação de onda na rampa com uma magnitude diferente, devido ao fato de as condições iniciais serem constantes ao longo da área de estudo. Como esta onda tem condições de trafegar contra a corrente, ela irá atingir a entrada e alterar a velocidade ali, sendo que esta alteração dependerá da magnitude da onda, e, portanto, do passo de tempo.

Assim, para passos de tempo de 0.1s, a entrada estabeleceu-se em $Fr = 0.225$, com a saída em $Fr = 0.335$ e $D = 0.713\text{m}$ (teoricamente os resultados seriam $Fr = 0.331$ e $D = 0.719\text{m}$). Para passos de 0.15s, o número de Froude na entrada ficou em 0.234, resultando, na saída, em $Fr = 0.349$ e $D = .712\text{m}$ (teoricamente, seriam $Fr = 0.344$ e $D = .718\text{m}$). Estes resultados, conforme visto, concordam razoavelmente bem com a teoria (situação (c) na Fig. 11).

Outro aspecto a ressaltar é que, ao contrário dos escoamentos incompressíveis em dutos fechados, velocidades maiores não correspondem, diretamente, a convergências mais lentas. De fato, a do caso subcrítico foi bem mais lenta que a do supercrítico. Isto deveu-se à formação de ondas no ressalto que, ao atingirem a entrada, estabelecem novos níveis de velocidade, prejudicando a convergência. Este fato vem a ser uma evidência a favor da abordagem pela analogia com os escoamentos compressíveis, pois neles, igualmente, problemas supersônicos convergem melhor do que os subsônicos.

6.2 Escoamentos Unidimensionais Transientes

Para verificar a resposta do método à fenômenos transientes foram testadas situações unidimensionais invíscidas, também sem tensão de fundo. Nestas simulações utilizou-se o critério de convergência como dado no Cap. 4 (limite de 10^{-8}), e a descarga na saída foi calculada com o método apresentado naquele capítulo. Nesta secção analisam-se problemas de propagação de ondas.

Durante o desenvolvimento das soluções transientes notou-se que as condições não se estabilizavam após transcorrido o tempo teórico para que as ondas geradas na entrada cruzassem todo o domínio de solução. Uma análise direta dos perfis de elevação revelou que as ondas, ao chegarem à saída, refletiam, gerando ondas que retornavam em direção à entrada.

Apesar das condições na saída serem as habitualmente usadas para aquelas situações (condições parabólicas), havia um efeito de parede gerando um acúmulo de massa no último volume, com conseqüente elevação da superfície, o que provocava a formação das ondas de retorno.

Uma vez que o problema estava relacionado ao acúmulo de massa, tentaram-se novas condições de contorno para a conservação da massa. A primeira foi uma simples extrapolação parabólica do valor da descarga na face do volume de controle coincidente com a fronteira de saída, o que reduziu bastante a formação da onda, mas não chegou a eliminá-la.

A segunda, que foi a adotada, usou uma projeção da descarga baseada na propagação das ondas existentes no interior do domínio, conforme colocado no capítulo 4. Apesar de se usar um polinômio, nessa caso, apenas de grau um, a reflexão de ondas foi praticamente eliminada, o que evidencia a ascendência física do tratamento.

O parâmetro a ser verificado é a velocidade de propagação de uma perturbação, sendo que, para avaliá-la, monitorou-se a posição de um ponto específico da onda ao longo do tempo.

6.2.1 Propagação de $\frac{1}{4}$ de Onda

Inicia-se por um canal de fundo reto e largura constante, tendo uma velocidade e uma espessura iniciais como dadas na Fig. 12. A região foi discretizada com uma malha de 200×1 volumes reais.

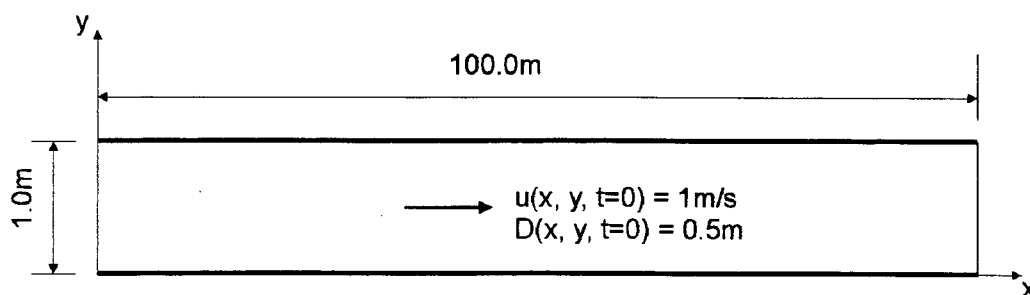


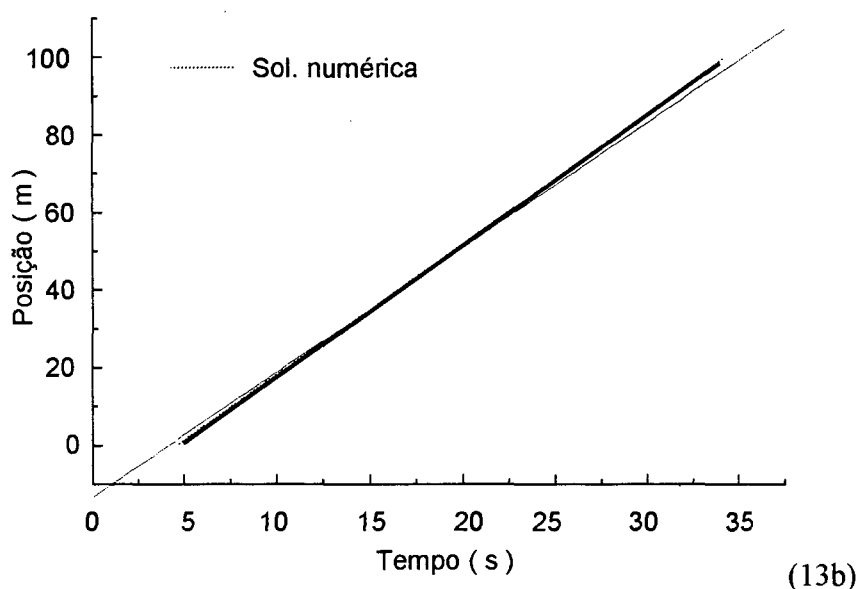
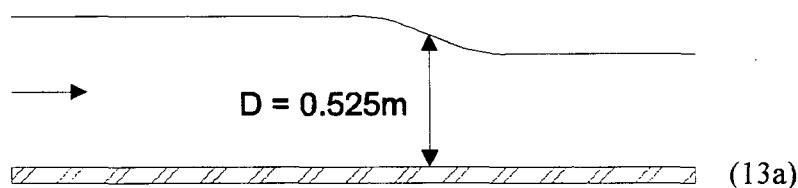
Fig. 12 - Geometria do canal.

Aplica-se uma perturbação na espessura da lâmina de .05m com um período de 50s, de modo que a espessura na entrada é calculada por

$$D(t) = .5 + .05 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{50}t\right)$$

Apenas a quarta parte do período é aplicado, de forma que a espessura final será de .55m.

O ponto escolhido para ser a referência da posição da frente foi o de espessura igual a .525m, como mostra a Fig. 13a. A velocidade de propagação pode ser calculada com a Eq. (19) e uma comparação entre as posições teórica e numérica é colocada na Fig. 13b.



Figs. 13 - (a) Ponto monitorado (b) Gráfico posição x tempo para $\frac{1}{4}$ de onda. A linha fina representa a previsão teórica usando a velocidade de propagação baseada na velocidade local e celeridade da lâmina não perturbada.

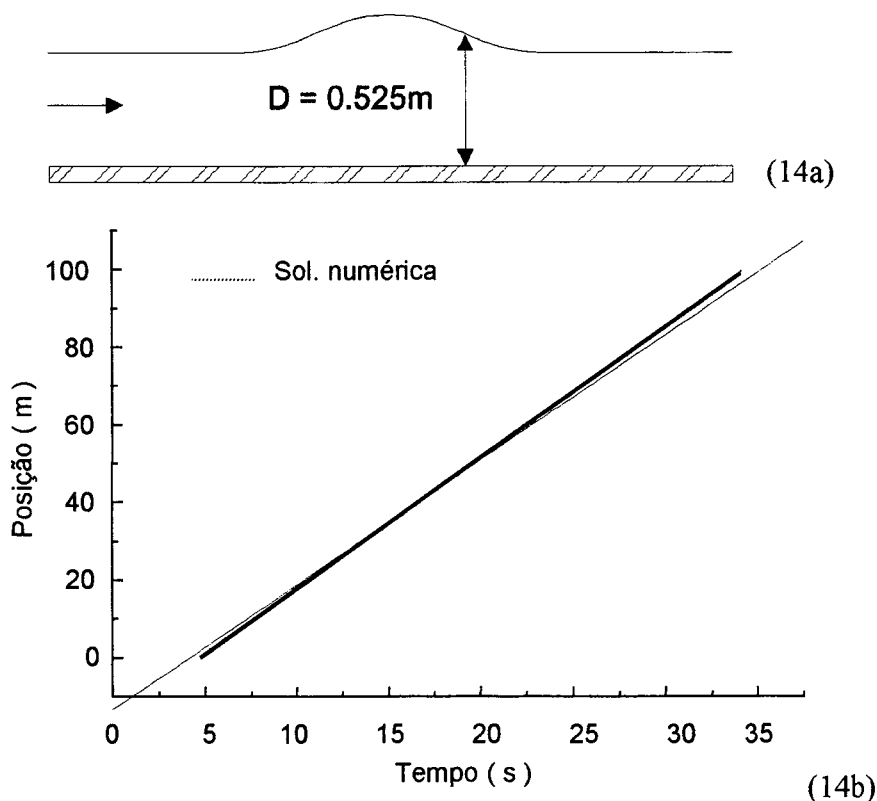
A concordância é muito boa, o que demonstra a boa resposta dos procedimentos de solução aplicados aqui à simulação transiente das equações de águas rasas. Na realidade, uma vez que os corpos d'água simulados em aplicações práticas estarão sob efeito de marés, o comportamento transiente é o mais importante.

6.2.2 Propagação de $\frac{1}{2}$ Onda

Os dados referentes ao item 7.2.1 são repetidos, à exceção de que, agora, permite-se a formação de metade da onda, ou seja, a perturbação terá a forma de um pulso.

Como a perturbação manifesta-se na fronteira de entrada apenas num certo intervalo, a velocidade na entrada, ao final da passagem da perturbação deve ser idêntica à que havia antes da passagem da perturbação.

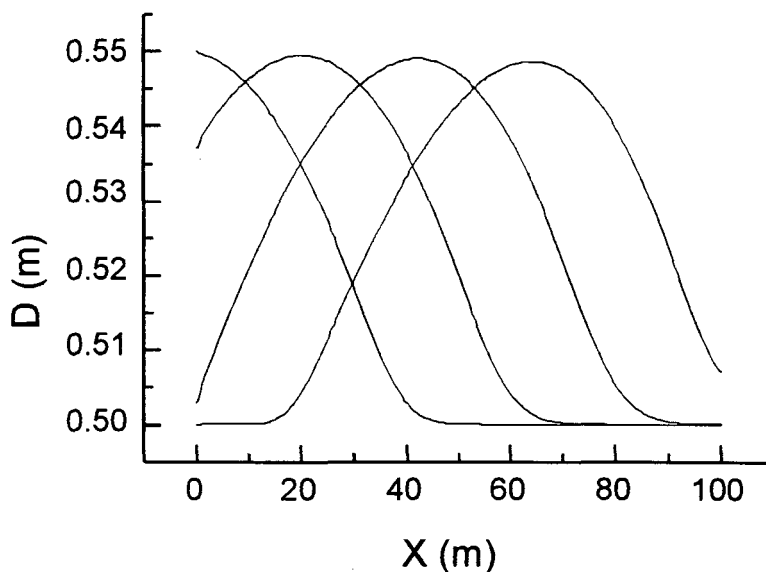
A referência, agora, passa a ser o ponto de espessura $.525\text{m}$ na parte frontal da onda (Fig. 14a). A velocidade de propagação é calculada, novamente, com a Eq. (19) e a comparação entre as posições teórica e numérica está na Fig. 14b.



Figs. 14 - (a) Ponto monitorado (b) Gráfico posição x tempo para $\frac{1}{2}$ onda. A linha fina representa a previsão teórica usando a velocidade de propagação baseada na velocidade local e celeridade da lâmina não perturbada.

A concordância é, novamente, muito boa. A velocidade na entrada após a passagem da perturbação ficou em 1.0005 m/s , o que representa um resíduo desprezível. A dependência velocidade de propagação de uma perturbação com a espessura local da lâmina não representou

um problema muito grande, pois, como pode ser visto na Fig 15, a onda manteve a integridade da sua forma.



Figs. 15 – Perfis da onda nos instantes $t = 12.5s, 18.75s, 25s$ e $31.25s$.

6.3 *Escoamento Bidimensional Permanente*

Para observar a semelhança entre os escoamentos compressíveis e os de águas rasas, foram feitos testes com o escoamento em torno de um obstáculo, com números de Froude acima e bem abaixo do crítico (1.5 e .05, respectivamente).

A escolha de um número de Froude bem afastado da faixa de 0.3 a 1.0 foi motivada pela necessidade de contornar a problemática da formação de ondas devido às condições de contorno, que, especialmente na saída, mostram-se ineficazes para permitir o tráfego livre das ondas. Esta limitação já foi notada em trabalhos realizados com escoamentos compressíveis quando os números de Mach ficam na faixa citada (escoamento transônico).

Essa limitação não deve representar, no futuro, um empecilho ao uso da metodologia apresentada neste trabalho, uma vez que as simulações de grandes corpos d'água fazem uso da prescrição de valores em todas as fronteiras abertas.

A região física constou de um quadrado de 50.0m de lado, discretizado com uma malha uniforme de 50x50 volumes, com um corpo sólido de 1.0 x 2.0 m centralizado na fronteira sul. As condições de contorno foram, de acordo com a disposição mostrada na Fig. 16, de simetria

na fronteira sul, parede impermeável na fronteira norte, velocidade e espessura de lâmina prescritas na fronteira oeste e contorno parabólico na fronteira leste. A profundidade, que foi mantida fixa na entrada, foi de 1.6135m. As velocidades prescritas na entrada foram, respectivamente, de 6.0 m/s e 0.2 m/s, com densidade de 1000.0 kg/m³ e viscosidade cinemática de 0.01 m²/s, para dissipar com maior rapidez as ondas formadas numericamente. Os passos de tempo utilizados foram de 1.0s (Fr= 0.05) e 0.1s (Fr= 1.5).

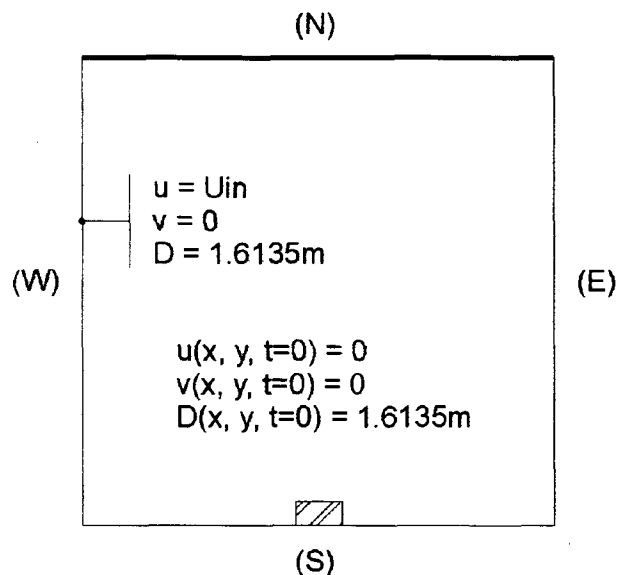
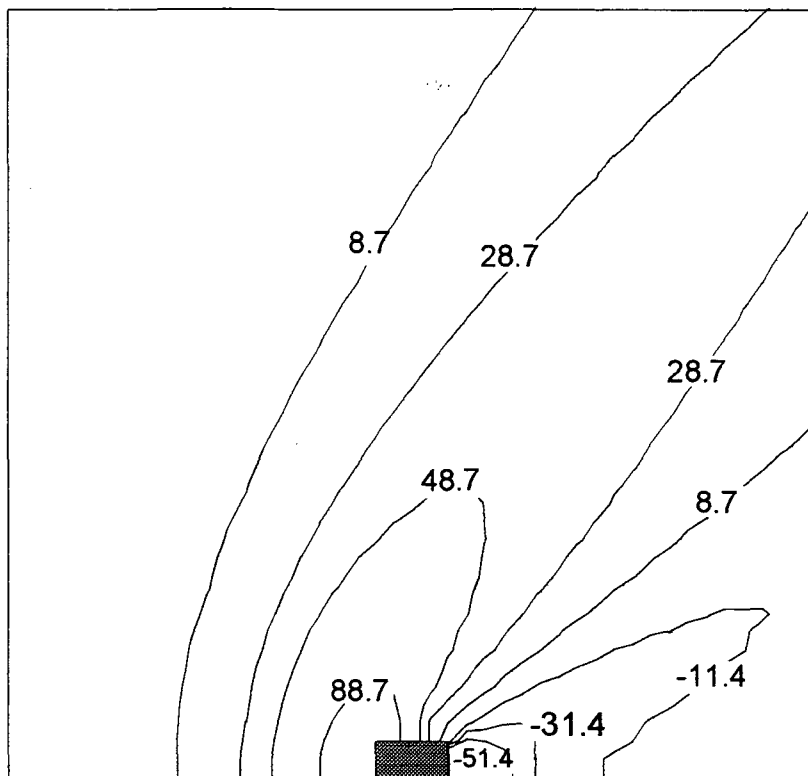
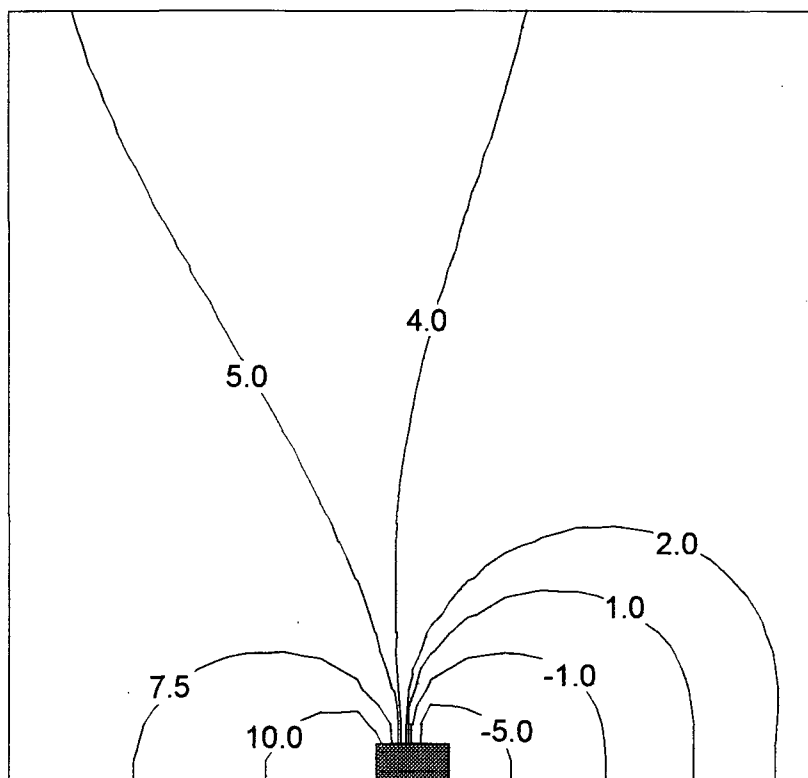


Fig. 16 - Disposição para o escoamento em torno de um corpo.

O critério de convergência foi modificado para um erro de massa relativo, como definido no Cap. 4, de 5×10^{-5} . As Figs. (17a,b) apresentam, respectivamente, as curvas iso-espessura da lâmina para o escoamento super-crítico e de iso-elevação para o escoamento sub-crítico para um destaque de dez volumes à direita e à esquerda e vinte volumes acima do corpo sólido. Percebe-se a capacidade da informação sobre a presença do bloco trafegar contra o escoamento no caso sub-crítico e o caráter absolutamente hiperbólico do escoamento super-crítico. No caso do escoamento super-crítico, a linha da primeira perturbação ficou à frente do corpo devido às alterações que este provocou no campo de velocidades, formando uma região de escoamento sub-crítico no local.



(17a)



(17b)

Figs. 17 – Iso-elevações para: (a) escoamento supercrítico, valores em 10^{-2} m; (b) escoamento subcrítico, valores em 10^{-4} m.

6.4 Escoamentos Bidimensionais Transientes

Conforme já foi comentado anteriormente, o esquema de interpolação usado daqui para frente foi o QUICK (Leonard, 1979). A escolha deveu-se à necessidade de contornar problemas de difusão numérica que podem ocorrer em escoamentos bidimensionais.

6.4.1 Escoamento de Entrada num Domínio Quadrado

Para verificar a resposta do método à simulação de situações como a interação mar/lago concebeu-se um problema com escalas de tempo e dimensão reduzidas. Trata-se de uma região quadrada com 30.0m de lado discretizada com uma malha uniforme de 75x75 volumes. As condições iniciais e a geometria são mostradas na Fig. 18:

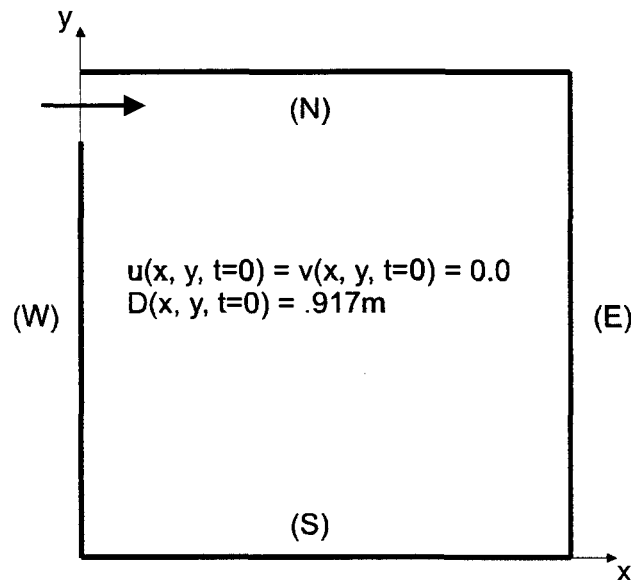


Fig. 18 - Geometria e condições iniciais do problema.

$$t \neq 0 \begin{cases} D_{io} = 0.917 (1. + .5 \text{sen}(\omega t)) \\ u_{io} = 1. \text{sen}(\omega t), v_{io} = 0.0, \omega = 2\pi/10. \end{cases}$$

onde u_{io} e D_{io} são a velocidade e a espessura da lâmina nas faces oeste dos dois primeiros volumes na fronteira oeste da região, como mostrado na Fig. 19.

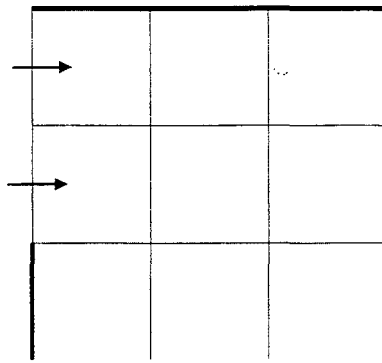


Fig. 19 - Região de entrada.

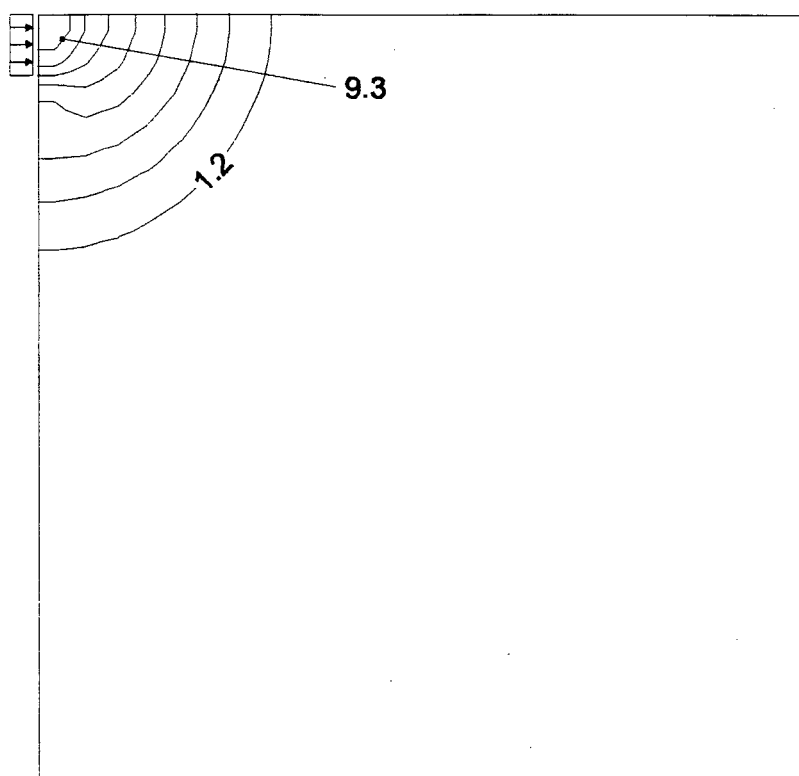
Nas demais fronteiras usaram-se paredes impermeáveis.

As propriedades do fluido foram mantidas em 1000.0 kg/m^3 para a densidade e $0.001 \text{ m}^2/\text{s}$ para a viscosidade cinemática. O passo de tempo foi de 0.05s e não se considerou a existência de tensão de fundo. As Figs. 20 apresentam perfis de iso-elevação, em centímetros, para instantes de 1.0s a 10.0s num detalhamento de 25×25 volumes a partir do canto da fronteira aberta. A aparente falha devido às iso-linhas com valores diferentes do prescrito na área de entrada poderem alcançá-la deve-se à forma de cálculo do programa de traçagem destas curvas.

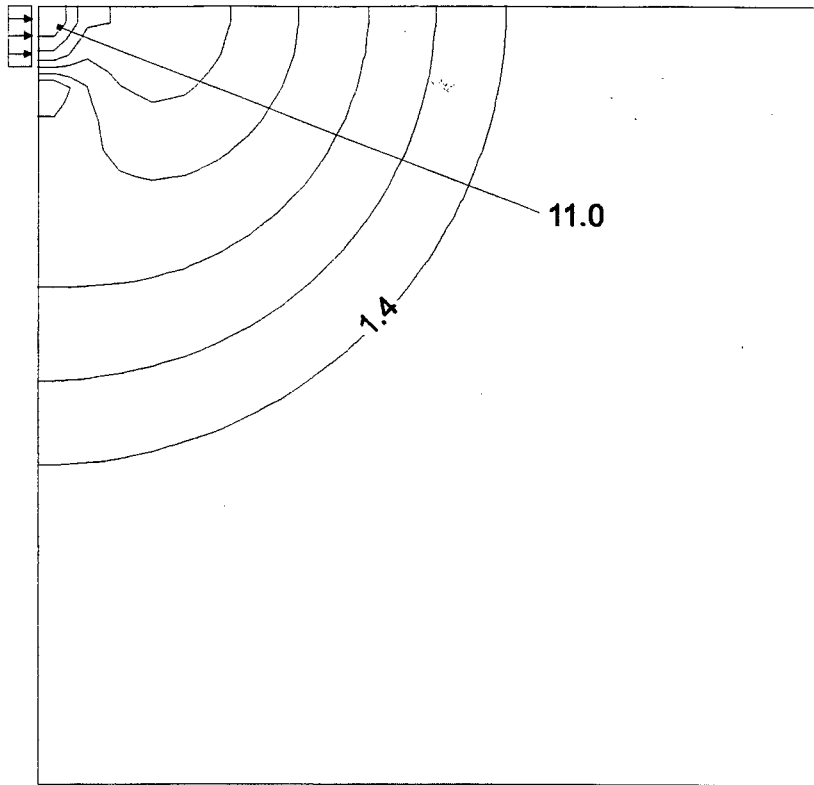
Na Fig. 20a está o perfil de elevações no instante $t = 1\text{s}$. As velocidades na entrada são, ainda, pequenas, o que faz com que não se formem grandes distorções no campo das elevações. O padrão é quase o de círculos concêntricos. A Fig. 20b ($t = 2\text{s}$) apresenta um início de distorções maiores no padrão, visto que a velocidade na entrada, assim como a espessura da lâmina, aproximam-se de seu máximo ($t = 2.5\text{s}$). A formação de um mínimo logo abaixo da entrada evidencia a acomodação do perfil de elevação para impulsionar o fluido do jato da entrada para baixo.

Sobre a Fig. 20c ($t = 3\text{s}$) deve-se lembrar que é o padrão logo após o máximo. A característica que mais a diferencia da situação anterior é a formação de uma espécie de separação na onda. Isso ocorreu devido à redução na velocidade ocorrida logo após o ponto máximo, pois havia uma onda trafegando com alta velocidade (e sobre fluido já impulsionado pelas fases anteriores da injeção) quando a redução ocorreu. O efeito disto foi o mesmo que o do fechamento de uma comporta sobre o escoamento a jusante, ou seja, formou-se uma depressão no perfil de elevações. O fato de haver um máximo junto à entrada deve-se à elevação cair com uma taxa menor que a velocidade.

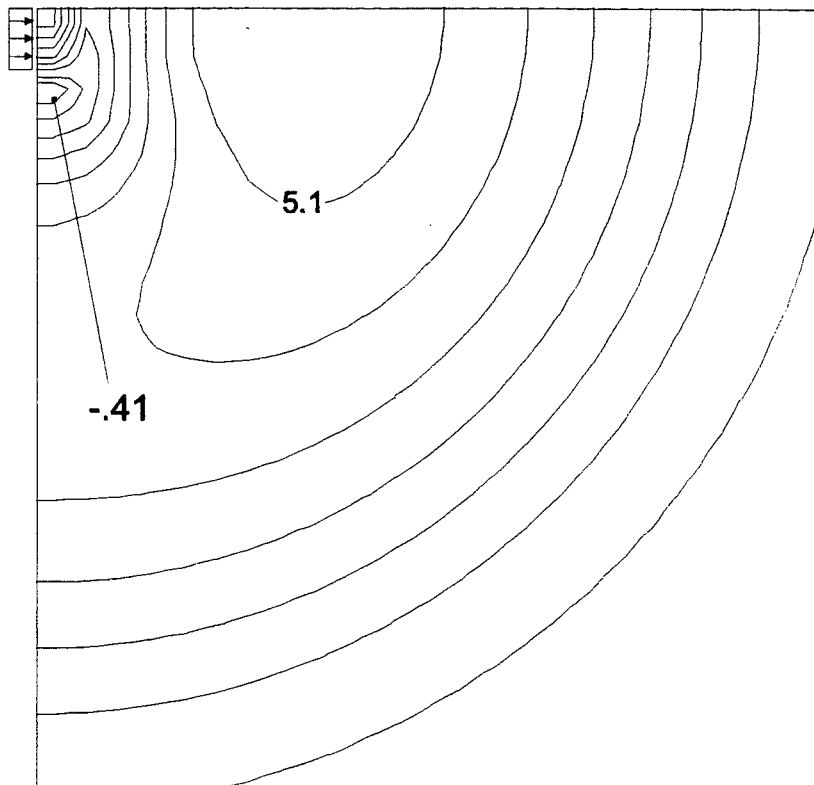
Nas Figs. 20d,e ($t = 4s$ e $5s$) a velocidade na entrada aproxima-se de zero, o que confere a estes perfis o padrão, novamente, quase igual a círculos concêntricos. Já nas Figs. 20f,g ($t = 6s$ e $7s$) pode-se notar o início da fase de sucção através das perturbações no campo de elevações nas proximidades da área de entrada. Aos $7s$ as perturbações são mais acentuadas dado que a velocidade no contorno vai atingir o seu mínimo ($t = 7.5s$). Dos $8s$ aos $10s$ (Figs. 20h-j) o padrão tende a formar um máximo na fronteira devido ao efeito de fechamento de comporta provocado pela redução na vazão da fase de sucção a zero em $t = 10s$.



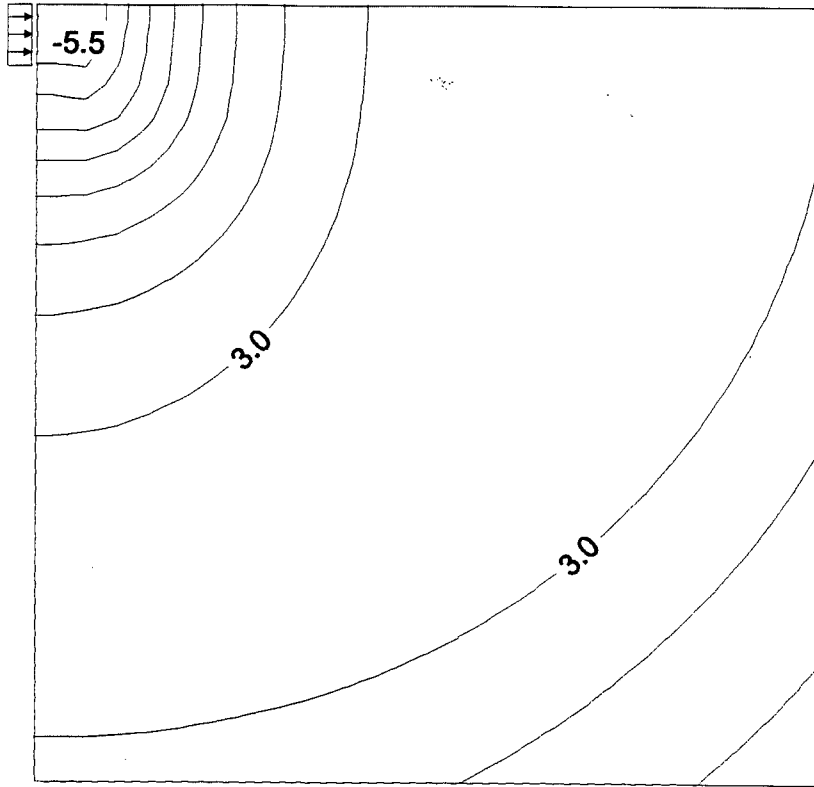
(20a)



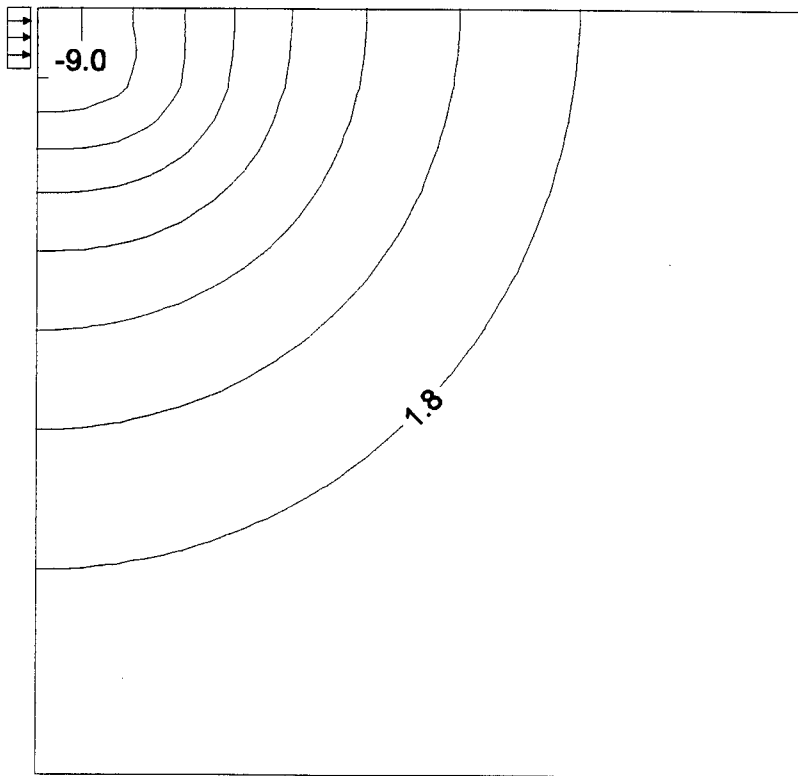
(20b)



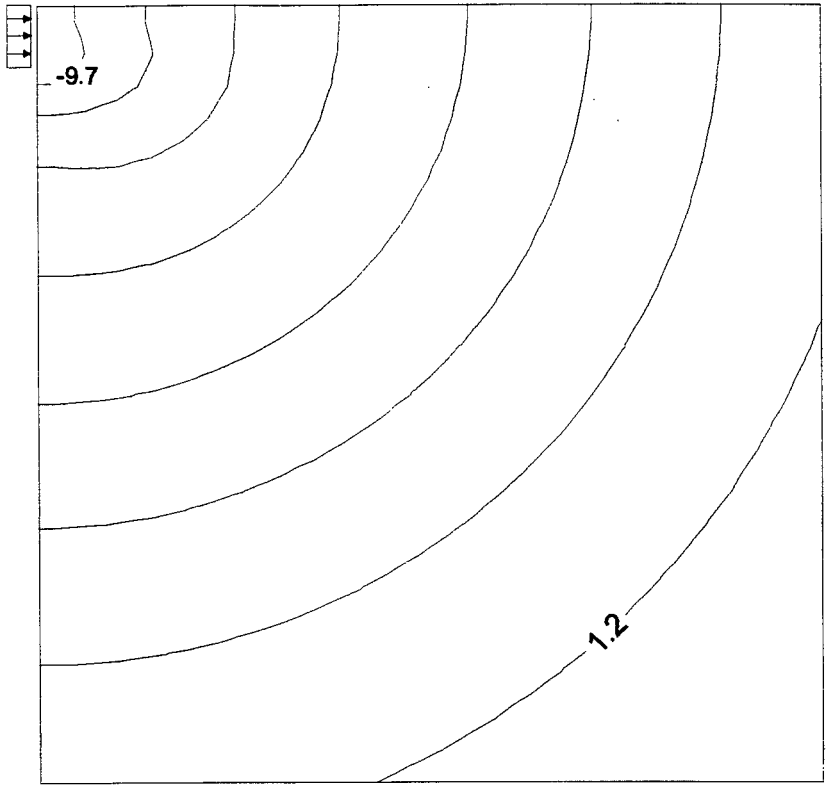
(20c)



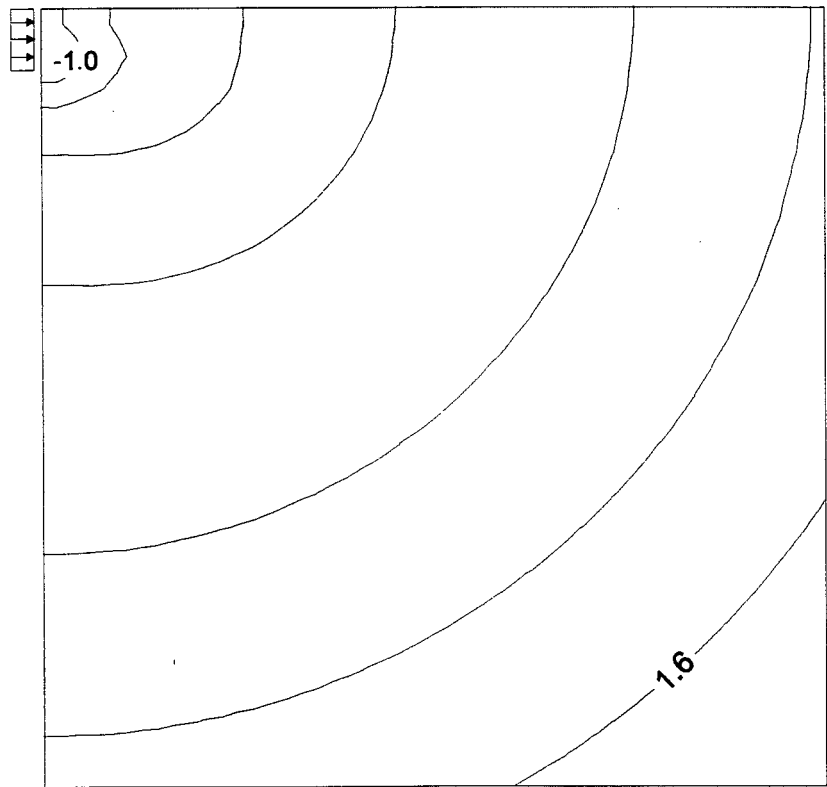
(20d)



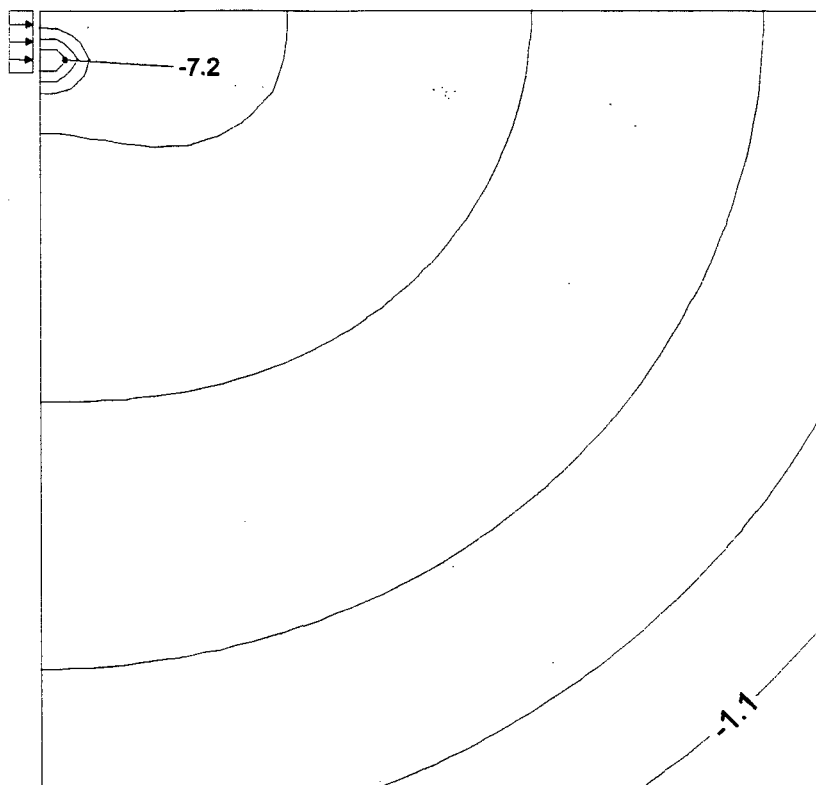
(20e)



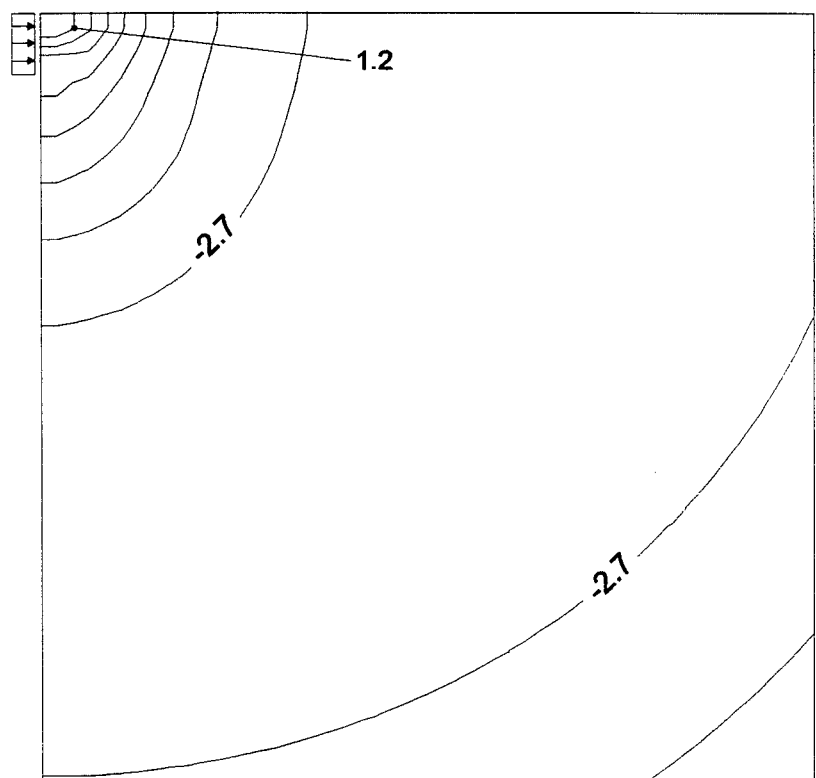
(20f)



(20g)



(20h)



(20i)

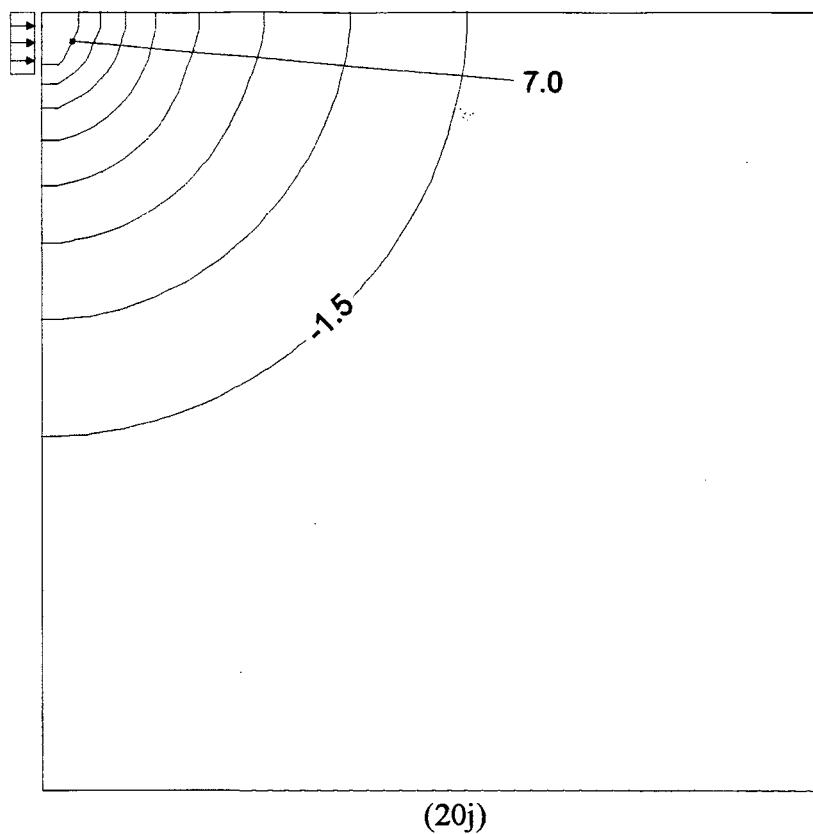


Fig. 20 – Perfis de iso-elevação, em centímetros, para os instantes de (a) $t = 1s$ a (j) $t = 10s$. Intervalo de 1s entre cada figura.

6.4.2 Escoamento numa Expansão Brusca

A situação testada aqui é idêntica à apresentada no relatório de Stelling e Wang (1984). Esta referência foi selecionada devido ao fornecimento de resultados experimentais, que permitirão uma boa comparação (de tendências, no mínimo). A Fig. 21 mostra a configuração da região analisada, e é seguida de uma lista das condições de contorno por eles adotadas.

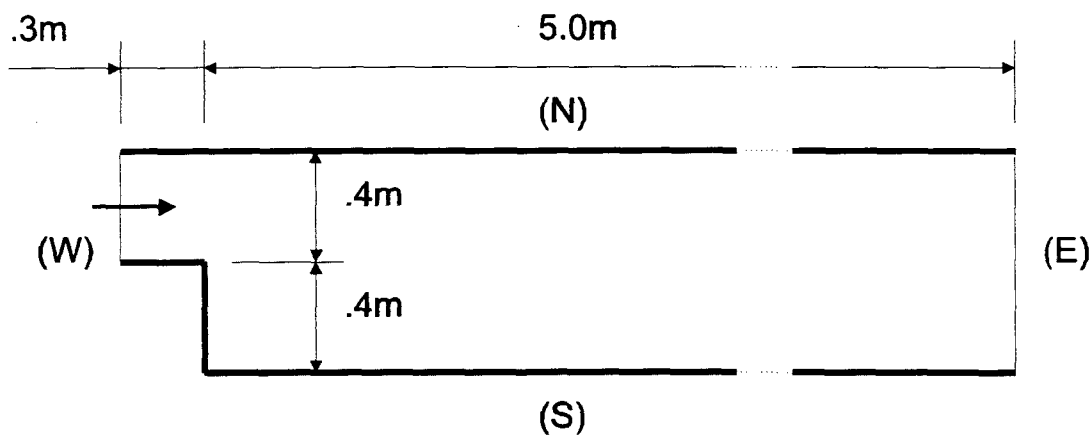


Fig. 21 - Região física da expansão brusca.

Condições de contorno:

$$\begin{cases}
 (W) \left\{ \begin{array}{l}
 v(t) = 0.0, u(t) = \sum_{i=1}^3 u_i \text{sen}(\omega_i t) (\text{m/s}) \\
 \omega_i = \frac{2\pi i}{150.}, u_1 = .375, u_2 = .05, u_3 = .01 \\
 Q(t) = .016 \text{sen}(\frac{2\pi t}{150.}) (\text{m}^3/\text{s})
 \end{array} \right. \\
 \\
 (E) \left\{ \begin{array}{l}
 \zeta(t) = 0.0, 0 \leq t \leq 5\text{s} \\
 \zeta(t) = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \text{sen}(\omega_i (t - 5)) (\text{m}), t > 5\text{s} \\
 \zeta_1 = .021, \zeta_2 = .001, \zeta_3 = .0005
 \end{array} \right.
 \end{cases}$$

Estas condições foram obtidas através do tratamento dos dados colhidos num experimento que reproduziu a situação colocada acima. As condições de contorno aplicadas às

paredes foram de paredes impermeáveis, ou seja, velocidades normais nulas, e um parâmetro, α , para ajustar o grau de escorregamento das velocidades tangenciais, de forma a testar situações entre o escorregamento e o não-escorregamento. A forma é exemplificada para as velocidade u nas fronteiras norte e sul.

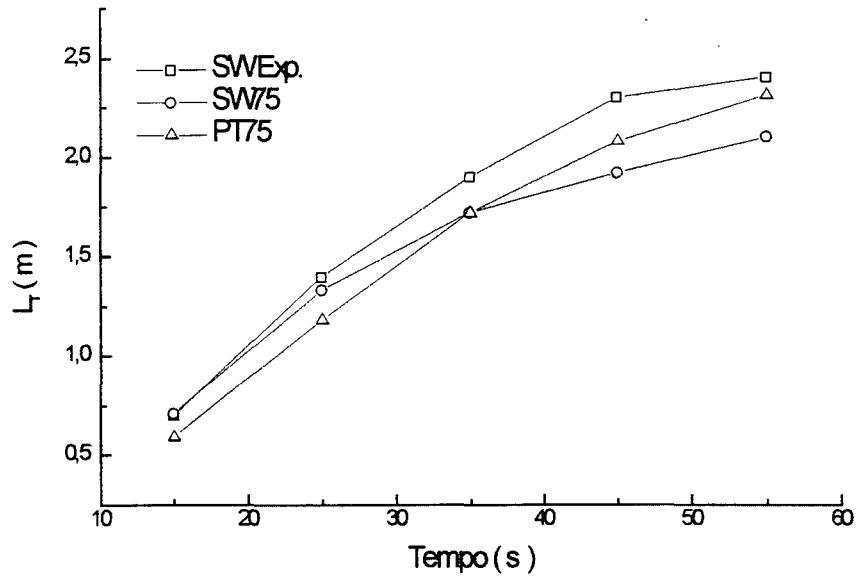
$$u_{\text{fronteira}} = \alpha u_{\text{interno-adjacente}}$$

Quanto mais próximo α estiver de zero, maior será o efeito viscoso das paredes. O uso deste fator de escorregamento foi motivado, provavelmente, pela necessidade de reproduzir a existência de uma sub-camada laminar, uma vez que o escoamento real foi turbulento.

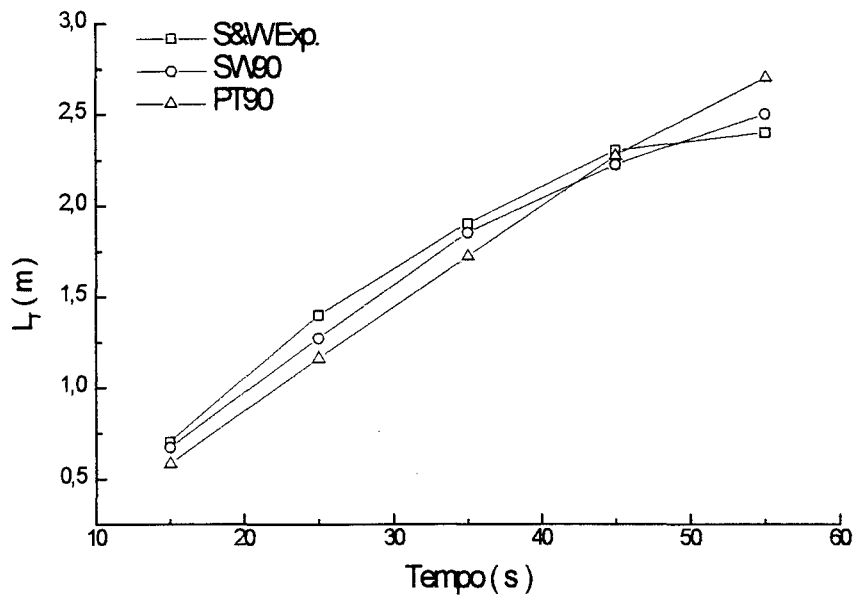
As condições iniciais são de velocidades nulas e espessura da lâmina de 0.1m. O coeficiente de Chézy foi de 62.64 m^{1/2}/s e o passo de tempo adotado foi de 0.125s. Utilizou-se uma malha constante de 0.025m nas direções x e y .

A configuração usada no presente trabalho é a mesma, exceto pela condição de contorno na saída, onde foi adotada a derivada nula para todas as variáveis, pela distância entre a face da expansão e a saída, que foi aumentada para 9m e pelo passo de tempo, que foi de .025s. O passo de tempo foi tão menor devido às vantagens da marcha usada por Stelling e Wang em termos de estabilidade. As tentativas de usar um passo idêntico com a marcha colocada aqui resultaram em divergência. Como no trabalho de Stelling e Wang (que serão referenciados a partir de agora como S&W), a viscosidade cinemática foi de 0.00024 m²/s, a densidade 1000 kg/m³ e a aceleração da gravidade 9.81 m/s². O critério de convergência usado foi o de erro de massa relativo, que foi adotado em 5×10^{-5} .

Assim como na referência citada comparam-se os valores observados do comprimento de religamento, L_R , que é o espaço ocupado, na fronteira norte, pela recirculação formada após a expansão brusca e as posições dos centros das recirculações ao longo do tempo (recirculações principais). As Figs. 22 e 23 apresentam comparações com os resultados de S&W. Os números nas identificações referem-se ao fator de escorregamento usado na simulação, por exemplo, SW75 e PT75 referem-se à simulação de S&W e ao presente trabalho, respectivamente, com $\alpha = 0.75$.

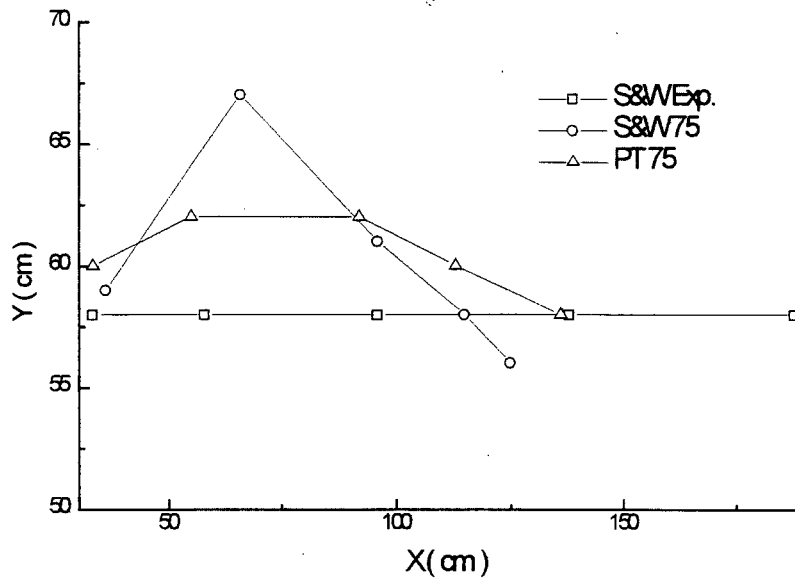


(22a)

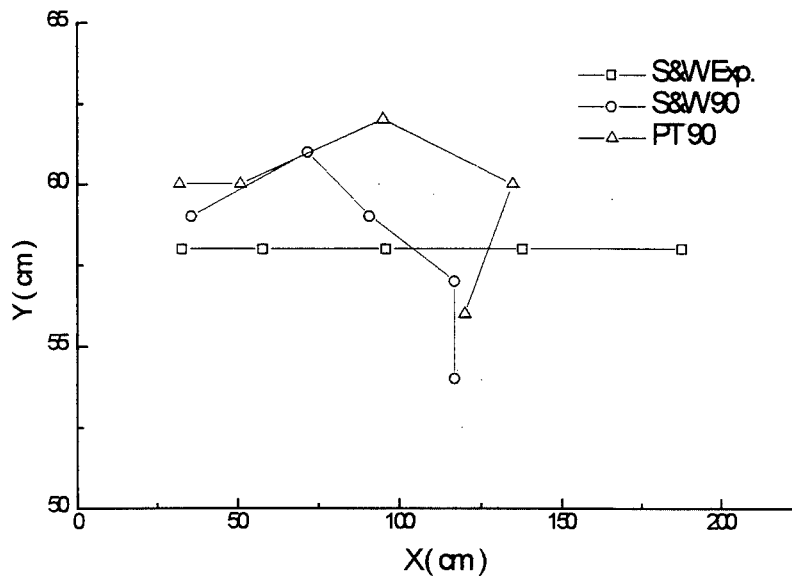


(22b)

Figs. 22 - Gráfico L_T x t para (a) $\alpha = 0.75$ e (b) $\alpha = 0.90$.



(23a)



(23b)

Figs. 23 - Hodogramas do centro da recirculação principal. Posições assinaladas de 15s a 55s.
(a) $\alpha = .75$, (b) $\alpha = .90$.

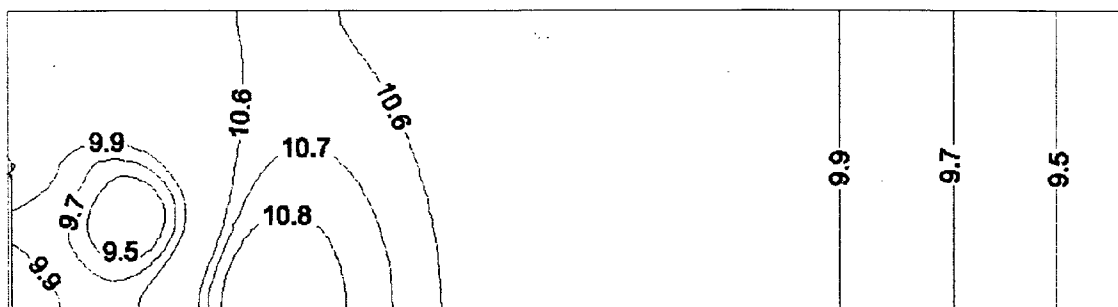
Testes realizados com uma malha constante de 0.0125m nas direções x e y, com o passo de tempo mantido em 0.025s, e com um passo de tempo de 0.0125s, com a malha mantida em 0.025m, promoveram mudanças de, no máximo, 2% nos valores apresentados aqui, o que comprova a independência destes em relação à malha e ao passo de tempo.

A reprodução dos resultados numéricos obtidos por Stelling e Wang ficou a nível das tendências para o fator de escorregamento de 0.90, mas superou, na média, os de 0.75 a reprodução dos resultados experimentais, com boa vantagem no caso do centro da recirculação principal. Nota-se uma tendência de exagerar o comportamento do centro da recirculação principal para $\alpha = 0.90$ e uma atenuação para $\alpha = 0.75$.

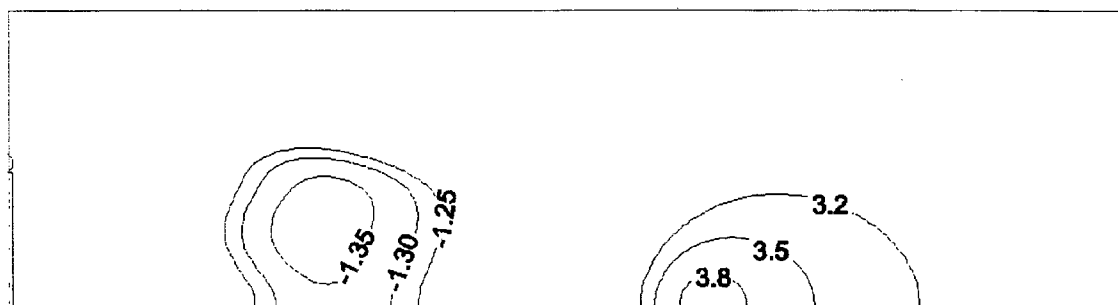
No caso de $\alpha = 0.90$ o comprimento de religamento apresenta um comportamento quase linear até os 45s, fazendo uma pequena redução na taxa de avanço até os 55s, reproduzindo apenas a tendência de atenuação mostrada nos resultados numéricos e experimentais dados por S&W. Para o caso de $\alpha = 0.75$, uma avaliação da área entre as curvas mostra que o erro dado pelo presente trabalho em relação aos resultados experimentais de S&W são menores que os dados pelos numéricos deles. Nessa situação, especificamente, os comportamentos podem ser explicados pela melhor marcha no tempo de S&W (vantagem de seus resultados no início, quando as variações no tempo são mais altas) e pela melhor discretização no espaço do presente trabalho (vantagem no final, quando as velocidades são maiores).

Para as recirculações secundárias as qualidades dos resultados ficaram paritárias, com uma pequena vantagem para o presente trabalho no caso em que $\alpha = 0.9$, pois este previu, ao menos, a existência de uma recirculação secundária aos 45s na posição $(x, y) = (10\text{cm}, 70\text{cm})$, que também é vista na Fig. 24c, com a previsão experimental de $(x, y) = (53\text{cm}, 50\text{cm})$ e sem previsão nos resultados numéricos de S&W (eles também chegaram a uma recirculação secundária, mas apenas aos 55s). No caso simulado com $\alpha = 0.75$, notou-se a formação de um número maior de recirculações secundárias. Este fato não é de todo surpreendente. A tendência já estava demonstrada nos resultados para $\alpha = 0.90$, onde, como já foi dito, previu-se uma recirculação secundária a mais, estando de acordo com os resultados experimentais. Nos resultados numéricos dados por S&W percebe-se que o padrão do campo de velocidades para $\alpha = 0.75$ é bem mais caótico que o para $\alpha = 0.90$, tendência que, ao ser exacerbada num esquema com difusão numérica reduzida, originou a multiplicidade de recirculações secundárias.

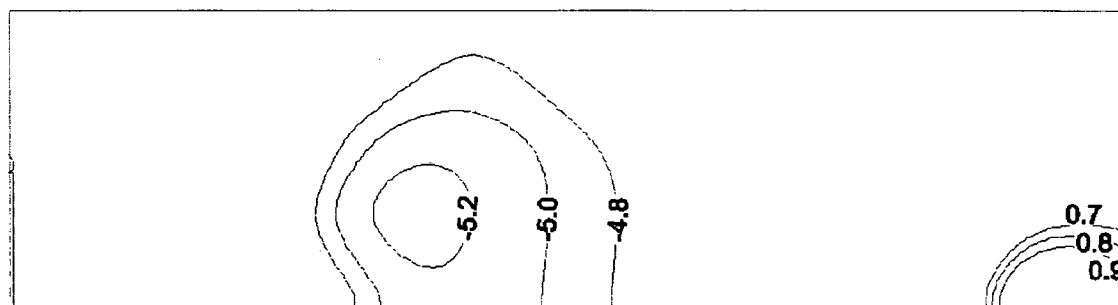
As Figs. 24 e 25 apresentam alguns perfis de elevação e vetores velocidade obtidos com o método apresentado neste trabalho.



(24a)

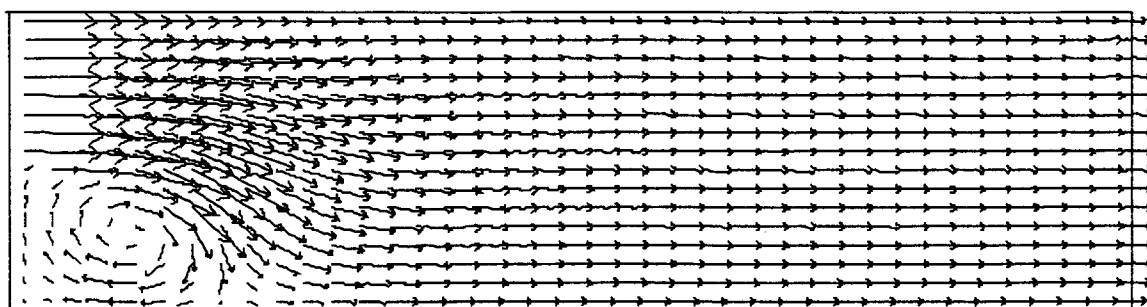


(24b)

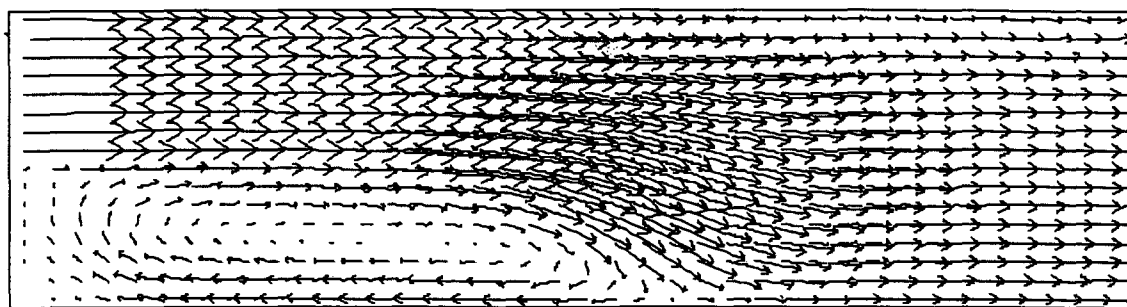


(24c)

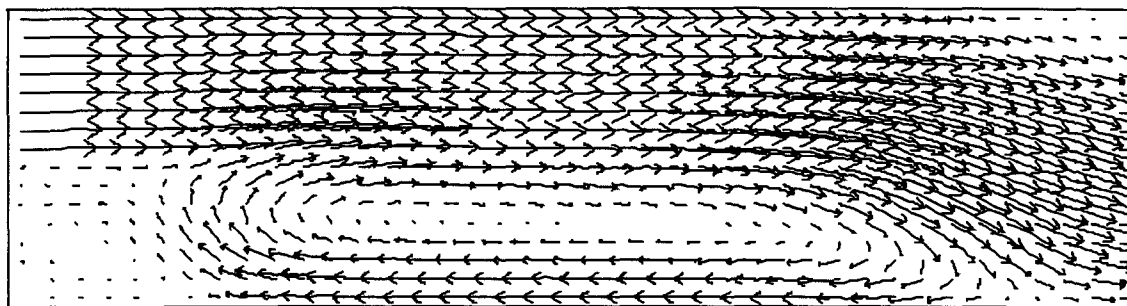
Figs. 24 - Iso-elevações para os instantes (a) 15, (b) 35 e (c) 55 s com $\alpha = 0.90$, valores em mm. Detalhando 3.0m a partir da expansão com toda a largura.



(25a)



(25b)



(25c)

Figs. 24 - Vetores velocidade para os instantes (a) 15, (b) 35 e (c) 55s com $\alpha = 0.90$.
 Detalhando 3.0m a partir da expansão com toda a largura.

Analisando-se as Figs. 24 e 25 percebe-se uma boa concordância entre os padrões dos campos de elevação e o de vetores velocidade, pois as formações dos máximos ocorrem bem próximos aos pontos de religamento, e os mínimos ficaram bem próximos aos centros das recirculações. As posições não coincidiram exatamente porque há um elemento transiente envolvido.

Deve-se colocar que a influência das condições de contorno na saída pode ter um peso considerável no estabelecimento das soluções, uma vez que, como pode ser inferido pela análise das condições de velocidade na entrada, o número de Froude fica na faixa 0.3 - 1.0 e há, portanto, a possibilidade de tráfego livre de perturbações geradas pelas condições na saída. O uso da condição de contorno na saída como colocada para os escoamentos unidimensionais transientes (avaliação da vazão usando as características de propagação de ondas) degenerou bastante os resultados do comprimento de religamento e a tentativa de usar a mesma condição colocada por Stelling e Wang levou a um comportamento incondicionalmente divergente.

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Conclui-se que o Método dos Volumes Finitos, ao menos no modo apresentado aqui, é aplicável a simulação transiente das equações de águas-rasas. O uso de uma analogia entre os escoamentos compressíveis e os de águas-rasas revelou-se satisfatório.

Sugere-se, para o futuro, o uso de um modelo de turbulência apropriado, uma vez que não se encontrarão, na natureza, escoamentos laminares em corpos de águas-rasas. A adoção de uma marcha no tempo que permita o uso de passos maiores também será de grande valia. Deve ser verificado se há alguma vantagem em linearizar o termo de elevação nas equações do movimento.

Um outro problema crucial são as condições de contorno na saída. O trabalho de Johnsen e Lynch (1994), utilizando o Método dos Elementos Finitos, apresenta um tratamento das condições numa fronteira aberta que, no caso estudado naquele trabalho, mostrou-se bastante satisfatório. Não se conseguiu implementar nada semelhante devido as dificuldades de conceber uma aproximação do tratamento para o Método dos Volumes Finitos, mas o referido trabalho faz alusão a uma série de outros que apresentam, também, técnicas para a reprodução numérica de uma fronteira aberta. Em todo caso, o uso da derivada normal nula não deve ser uma fonte de erros muito grande para os escoamentos encontrados, por exemplo, na interação de baías com o mar aberto. Isto deve-se ao fato de que as variações da elevação motivadas pelas marés são pequenas quando comparadas às dimensões das regiões de interesse (cerca de 1m em relação a alguns quilômetros) e os períodos são bastante longos (cerca de 6h), o que não permite a formação de gradientes elevados, que seriam a maior causa de erros no uso de avaliações a montante para o cálculo das vazões.

O QUICK tem, reconhecidamente, uma boa relação simplicidade/precisão (Leonard, 1979; Leonard, 1988; Phillips e Schmidt, 1985; Gaskell e Lau, 1988). Entretanto, vale lembrar que algo que se espera de um esquema de interpolação é que ele tenda a um *upwind* puro quando o número de Péclet da malha for muito alto. O QUICK mantém fixas as proporções com que cada ponto será considerado, o que lhe nega a desejada característica assintótica. Este

é um aspecto comum a todos os esquemas polinomiais. O WUDS, por sua vez, tem a característica assintótica, mas é um esquema de baixa ordem, não tratando com eficiência a presença de termos fonte (termos transiente, de pressão, de empuxo, de Coriolis, etc) ou de escoamentos cruzados, especialmente quando os números de Péclet da malha são altos. O esquema ideal deve possuir esse comportamento assintótico sendo também de alta ordem, sugerindo-se o uso de funções de interpolação mais completas.

Outro aspecto que deve ser bastante melhorado é a marcha no tempo. Um esquema como o usado por Stelling e Wang é de aplicação quase impraticável ao Método dos Volumes Finitos, mas o fato dele fazer meio passo implícito e meio passo explícito sugere que o uso de uma marcha como a de Crank-Nicolson possa melhorar substancialmente o passo de tempo máximo permitido.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P., "A High-Resolution Godunov-Type Scheme in Finite Volumes for the 2D Shallow-Water Equations", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 16, 489-505, 1993.
- Bermudez, A., Vazquez, M. E., "Upwind Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms", *Computers & Fluids*, vol. 23(8), 1049-1071, 1994.
- Borthwick, A. G. L., Barber, R. W., "River and Reservoir Flow Modelling Using the Transformed Shallow Water Equations", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 14, 1193-1217, 1992.
- Chow, V. T., *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- Fennema, R. J., Caudry, M. H., "Explicit Methods for 2-D Transient Free-Surface Flows", *J. of Hydraulic Engineering*, vol. 116, No. 8, 1990.
- Gaskell, P. H., Lau, A. K. C., "Curvature-Compensated Convective Transport: SMART, A New Boundedness-Preserving Transport Algorithm", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*", vol. 8, 617-641, 1988.
- Häuser, J., Paap, H. G., Eppel, D., Sengupta, S., "Boundary Conformed Co-Ordinate Systems for Selected Two-Dimensional Fluid Flow Problems Part I: Generation of BFGs", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 6, 507-527, 1986.
- Häuser, J., Paap, H. G., Eppel, D., Sengupta, S., "Boundary Conformed Co-Ordinate Systems for Selected Two-Dimensional Fluid Flow Problems Part II: Application of the BFG Method", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 6, 529-539, 1986.
- Haeuser, J., Paap, H.-G., Eppel, D., Mueller, A., "Solution of Shallow Water Equations for Complex Flow Domains via Boundary-Fitted Co-Ordinates", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 5, 727-744, 1985.

- Johnsen, M., Lynch, D. R., "A Second-Order Radiation Boundary Condition for the Shallow Water Wave Equations on Two-Dimensional Unstructured Finite Element Grids", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 18, 575-604, 1994.
- Katopodes, N., Strelkoff, T., "Computing Two-Dimensional Dam-Break Flood Waves", *J. of The Hydraulics Division*, vol. 9, 1269-1288, 1978.
- Kawahara, M., Umetsu, T., "Finite Element Method for Moving Boundary Problems in River Flow", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 6, 365-386, 1986.
- Kobayashi, M. H., Pereira, J. C. F., Sousa, J. M. M., "Comparison of Several Open Boundary Numerical Treatments for Laminar Recirculating Flows", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 16, 403-419, 1993.
- Leonard, B. P., "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", *Computer Meth. in App. Mech. and Eng.*, vol. 19, 59-98, 1979.
- Leonard, B. P., "Simple High-Accuracy Resolution Program for Convective Modelling of Discontinuities", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 8, 1291-1318, 1988.
- Li, Y. S., Zhan, J. M., "An Efficient Three-Dimensional Semi-Implicit Finite Element Scheme for Simulation of Free Surface Flows", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, vol. 16, 187-198, 1993.
- Maliska, C. R., *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional - Fundamentos e Coordenadas Generalizadas*, LTC Editora, Rio de Janeiro, 1995.
- Marchi, C. H., Silva, A. F. C., Maliska, C. R., "Solução Numérica de escoamentos invíscidos em tuberias com velocidade supersônica na saída", *Anais do 4º ENCIT*, 1992, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Marchi, C. H., Maliska, C. R., "A Non-Orthogonal Finite Volume Method for the Solution of All-Speed Flows Using Co-Located Variables", *Numerical Heat Transfer B*, vol. 26, 293-311, 1994.

- Menezes, L. A. P. de, "Estudo de Esquemas de Alta Resolução em Algoritmos Simultâneos e Sequenciais", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996.
- Patankar, S. V., Spalding, D. B., "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 15, 1787, 1972.
- Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Co., Washington, DC, 1980.
- Perez, J. O., "Simulação Numérica de Descargas em Corpos de Águas Rasos de Geometria e Profundidade Variáveis", Dissertação de Mestrado, 1987, UFSC, Santa Catarina, Brasil.
- Phillips, R. E., Schmidt, F. W., "Multigrid Techniques for the Solution of the Passive Scalar Advection-Diffusion Equation", *Numerical Heat Transfer*, vol. 8, 25-43, 1985.
- Raithby, G. D., Torrance, K. E., "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Applications to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Computers & Fluids*, vol. 2, 191-296, 1974.
- Schneider, G. E., Zedan, M., "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", *Numerical Heat Transfer*, vol. 4, 1-19, 1981.
- Silva, A. F. C., Maliska, C. R., "Uma Formulação Segregada em Volumes Finitos para Escoamentos Compressíveis ou Incompressíveis em Coordenadas Generalizadas", *Anais do 2º ENCIT*, 1990, Águas de Lindóia, SP, Brasil.
- Silva, A. F. C., "Um Procedimento em Volumes Finitos para a Solução de Escoamentos de Qualquer Velocidade", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1991.
- Stelling, G. S., Wang, L.-X., "Experiments and Computations on Unsteady Separating Flows in An Expanding Flume", relatório N.º. 2, 1984, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.

Van Doormaal, J. P., Raithby, G. D., "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow", Numerical Heat Transfer, vol. 7, 147-163, 1984.

Apêndice A - Equações Finais

Quantidade de Movimento

Para ϕ assumindo o papel de u ou v , a equação da quantidade de movimento discretizada é dada por

$$A_P^\phi \phi_P = A_N^\phi \phi_N + A_S^\phi \phi_S + A_E^\phi \phi_E + A_W^\phi \phi_W + B_P^\phi$$

onde

$$A_P^\phi = A_N^\phi + A_S^\phi + A_E^\phi + A_W^\phi - \frac{\rho g \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2} \Delta x \Delta y + \rho \frac{D_P^\circ \Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

Para o WUDS,

$$A_N^\phi = -\dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) + \beta_n \mu D_n \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$A_S^\phi = +\dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \alpha_s \right) + \beta_s \mu D_s \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$A_E^\phi = -\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) + \beta_e \mu D_e \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$A_W^\phi = +\dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) + \beta_w \mu D_w \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$B_P^\phi = L[P^\phi] + \rho \frac{D_P^\circ \Delta x \Delta y}{\Delta t} \phi_P^\circ$$

As expressões de α e β são, de uma forma geral,

$$\alpha_f = \frac{P_f^2}{10 - 2P_f^2}$$

$$\beta_f = \frac{1 + 0.005P_f^2}{1 + 0.05P_f^2}$$

onde P_f é o número de Péclet da face f .

Quando for usado o QUICK, as expressões dos coeficientes serão dadas por

$$A_N^\phi = -\dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - S_n \right) + \mu D_n \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$A_S^\phi = +\dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + S_s \right) + \mu D_s \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$A_E^\phi = -\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - S_e \right) + \mu D_e \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$A_W^\phi = +\dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + S_w \right) + \mu D_w \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$B_P^\phi = L[P^\phi] + \rho \frac{D_P^\circ \Delta x \Delta y}{\Delta t} \phi_P^\circ - \dot{M}_e \Delta \phi_e + \dot{M}_w \Delta \phi_w - \dot{M}_n \Delta \phi_n + \dot{M}_s \Delta \phi_s$$

$$\Delta \phi_e = \left(\frac{1}{2} + S_e \right) \frac{1}{8} \left(-\phi_w^* - 2\phi_P^* + 3\phi_E^* \right) + \left(\frac{1}{2} - S_e \right) \frac{1}{8} \left(-\phi_{EE}^* - 2\phi_E^* + 3\phi_P^* \right)$$

$$\Delta\phi_w = \left(\frac{1}{2} + S_w\right) \frac{1}{8} \left(-\phi_{ww}^* - 2\phi_w^* + 3\phi_P^*\right) \\ + \left(\frac{1}{2} - S_w\right) \frac{1}{8} \left(-\phi_E^* - 2\phi_P^* + 3\phi_w^*\right)$$

$$\Delta\phi_n = \left(\frac{1}{2} + S_n\right) \frac{1}{8} \left(-\phi_S^* - 2\phi_P^* + 3\phi_N^*\right) \\ + \left(\frac{1}{2} - S_n\right) \frac{1}{8} \left(-\phi_{NN}^* - 2\phi_N^* + 3\phi_P^*\right)$$

$$\Delta\phi_s = \left(\frac{1}{2} + S_s\right) \frac{1}{8} \left(-\phi_{SS}^* - 2\phi_S^* + 3\phi_P^*\right) \\ + \left(\frac{1}{2} - S_s\right) \frac{1}{8} \left(-\phi_N^* - 2\phi_P^* + 3\phi_S^*\right)$$

Onde S_f é função do sinal da velocidade na face f , como colocado abaixo,

$$S_f = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & u_f \geq 0 \\ -\frac{1}{2}, & u_f < 0 \end{cases}$$

Quando o sinal da velocidade em alguma face fizer necessário algum valor fora do domínio, não se faz a inclusão da correção de alta ordem para aquela face, ficando a função reduzida a uma avaliação a montante.

A expressão de $L[P^q]$ será, de acordo com ϕ assumir o papel de u ou v e levando em consideração a disposição mostrada na Fig. 7b,

$$L[P^u] = \rho g D_{Pu} (\zeta_P - \zeta_E) \Delta y$$

$$L[P^v] = \rho g D_{Pv} (\zeta_P - \zeta_N) \Delta x$$

Conservação da Massa

A equação algébrica é dada por

$$A_P^\zeta \zeta'_P = A_N^\zeta \zeta'_N + A_S^\zeta \zeta'_S + A_E^\zeta \zeta'_E + A_W^\zeta \zeta'_W + B_P^\zeta$$

onde

$$A_P^\zeta = m_n^v d_n^v + m_s^v d_s^v + m_e^u d_e^u + m_w^u d_w^u + m_P^D$$

$$A_N^\zeta = -m_N^D + m_n^v d_n^v$$

$$A_S^\zeta = +m_S^D + m_s^v d_s^v$$

$$A_E^\zeta = -m_E^D + m_e^u d_e^u$$

$$A_W^\zeta = +m_W^D + m_w^u d_w^u$$

$$B_P^\zeta = m_w^u u_w^* - m_e^u u_e^* + m_s^v v_s^* - m_n^v v_n^* + (\zeta_P^\circ - \zeta_P^*) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$$

onde S_r e a função sinal já definida e os demais fatores são:

$$m_n^v = \left[\left(\frac{1}{2} - S_n \right) D_N^* + \left(\frac{1}{2} + S_n \right) D_P^* \right] \Delta x$$

$$m_s^v = \left[\left(\frac{1}{2} - S_s \right) D_P^* + \left(\frac{1}{2} + S_s \right) D_S^* \right] \Delta x$$

$$m_e^u = \left[\left(\frac{1}{2} - S_e \right) D_E^* + \left(\frac{1}{2} + S_e \right) D_P^* \right] \Delta y$$

$$m_w^u = \left[\left(\frac{1}{2} - S_w \right) D_P^* + \left(\frac{1}{2} + S_w \right) D_W^* \right] \Delta y$$

$$m_N^D = v_n^* \Delta x \left(\frac{1}{2} - S_n \right)$$

$$m_S^D = v_s^* \Delta x \left(\frac{1}{2} + S_s \right)$$

$$m_E^D = u_e^* \Delta y \left(\frac{1}{2} - S_e \right)$$

$$m_W^D = u_w^* \Delta y \left(\frac{1}{2} + S_w \right)$$

$$m_p^D = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t} + \left(u_e^* \left(\frac{1}{2} + S_e \right) - u_w^* \left(\frac{1}{2} - S_w \right) \right) \Delta y \\ + \left(v_n^* \left(\frac{1}{2} + S_n \right) - v_s^* \left(\frac{1}{2} - S_s \right) \right) \Delta x$$

$$d_i^u = \frac{\rho g D_i \Delta y}{A_{P,i}^u - \sum_{NB} A_{NB,i}^u}$$

$$d_i^v = \frac{\rho g D_i \Delta x}{A_{P,i}^v - \sum_{NB} A_{NB,i}^v}$$

Quando uma face qualquer do volume de controle para a conservação da massa coincidir com alguma fronteira, todos os fatores relativos àquela face são anulados, exceto os que são usados no cálculo de B_p^c .

Apêndice B - O MÉTODO DE STELLING E WANG

Para dar base às comparações entre os resultados obtidos pelo presente trabalho e os dados pelo trabalho de Stelling e Wang faz-se necessária uma breve descrição do método por eles usado. As equações de águas rasas foram usadas na forma não conservativa (na parte da conservação da quantidade de movimento), como colocadas pelas Eqs. (B), onde 'u_i' representa u e v para 'i' igual a 1 e 2, respectivamente, e possuem a forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_i) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(u_i) + g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{(\tau_i^S - \tau_i^B)}{\rho D} \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D + \frac{\partial}{\partial x_i}(D u_i) = 0 \quad (\text{B.1b})$$

Stelling e Wang discretizaram as Eqs. (B) utilizando diferenças finitas e uma marcha no tempo dividida em dois passos, que são colocados abaixo:

Passo 1-

1.1- Equação de u:

$$\begin{aligned} & \frac{u_P^* - u_P^\circ}{\frac{1}{2} \Delta t} + u_P^* \left(\frac{u_E^\circ - u_W^\circ}{2 \Delta x} \right) + g \frac{\zeta_E^* - \zeta_P^*}{\Delta x} \\ & + \bar{v}_P^\circ \left(\frac{2}{3} \frac{u_N^\circ - u_S^\circ}{2 \Delta y} + \frac{1}{3} \frac{u_{NN}^\circ - u_{SS}^\circ}{4 \Delta y} \right) + C_f^u u_P^\circ \\ & = \nu \left(\frac{u_E^\circ + u_W^\circ - 2u_P^\circ}{\Delta x^2} + \frac{u_N^\circ + u_S^\circ - 2u_P^\circ}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2a})$$

1.2 - Equação de v:

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_P^n - v_P^\circ}{\frac{1}{2}\Delta t} + v_P^\circ \left(\frac{v_N^n - v_S^n}{2\Delta y} \right) + g \frac{\zeta_N^\circ - \zeta_P^\circ}{\Delta y} \\
 & + S_x(\bar{u}_P^\circ, v_P^n, \delta(n+p_u)) + C_f^v v_P^n \\
 & = v \left(\frac{v_N^n + v_S^n - 2v_P^n}{\Delta y^2} + \Delta_x^2 v^{(*)} \right)
 \end{aligned} \tag{B.2b}$$

1.3 - Equação da continuidade:

$$\frac{\zeta_P^* - \zeta_P^\circ}{\frac{1}{2}\Delta t} + \frac{\Delta}{\Delta x} (Du)^* + \frac{\Delta}{\Delta y} (Dv)^\circ = 0 \tag{B.2c}$$

2º passo:

2.1 - Equação de u:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_P^n - u_P^*}{\frac{1}{2}\Delta t} + u_P^* \left(\frac{u_E^n - u_W^n}{2\Delta x} \right) + g \frac{\zeta_E^* - \zeta_P^*}{\Delta x} \\
 & + S_y(\bar{v}_P^*, u_P^n, \delta(n+p_v)) + C_f^u u_P^n \\
 & = u \left(\frac{u_E^n + u_W^n - 2u_P^n}{\Delta x^2} + \Delta_y^2 u^{(*)} \right)
 \end{aligned} \tag{B.3a}$$

2.2 - Equação de v:

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_P - v_P^{(2)}}{\frac{1}{2}\Delta t} + v_P \left(\frac{v_N^{(2)} - v_S^{(2)}}{2\Delta y} \right) + g \frac{\zeta_N - \zeta_P}{\Delta y} \\
 & + \bar{u}_P^{(2)} \left(\frac{2}{3} \frac{v_E^{(2)} - v_W^{(2)}}{2\Delta x} + \frac{1}{3} \frac{v_{EE}^{(2)} - v_{WW}^{(2)}}{4\Delta x} \right) + C_f^v v_P \\
 & = u \left(\frac{v_E^{(2)} + v_W^{(2)} - 2v_P^{(2)}}{\Delta x^2} + \frac{v_N^{(2)} + v_S^{(2)} - 2v_P^{(2)}}{\Delta y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{B.3b}$$

2.3 - Equação da continuidade:

$$\frac{\zeta_P - \zeta_P^*}{\frac{1}{2}\Delta t} + \frac{\Delta}{\Delta x} (Du)^* + \frac{\Delta}{\Delta y} (Dv) = 0 \tag{B.3c}$$

Nas equações acima, 'n' vai de 1 a 2. As variáveis cobertas por uma barra referem-se aos valores médios nos pontos das variáveis que estão sendo calculadas. Os termos S_x e S_y nas equações são calculados como a seguir:

$$\delta(k) = \frac{1}{2} [1 + (-1)^k]$$

$$p_u = \begin{cases} 0, \sum_P u_P > 0 \\ 1, \sum_P u_P \leq 0 \end{cases}$$

$$S_x(\bar{u}_P, v_P^n, \delta) = \frac{\bar{u}_P}{2\Delta x} \begin{cases} (3v_P - 4v_W + v_{WW})^{(n-\delta)}, \bar{u}_P > 0 \\ -(3v_P - 4v_E + v_{EE})^{(n-1+\delta)}, \bar{u}_P \leq 0 \end{cases}$$

O valor de p_v é definido similarmente ao de p_u , assim como S_y em relação a S_x . Os demais termos são:

$$\Delta_y^2 u^{(*)} = \frac{1}{\Delta y^2} [u_N^{(n-1+\delta(n+p_v))} - u_P^n - u_P^{(n-1)} + u_S^{(n-\delta(n+p_v))}]$$

$$\Delta_x^2 V^{(*)} = \frac{1}{\Delta X^2} \left[v_E^{(n-1+\delta(n+p_u))} - v_P^n - v_P^{(n-1)} + v_W^{(n-\delta(n+p_u))} \right]$$

No primeiro passo, resolve-se a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x ponto a ponto, e a da direção y como uma matriz. As formas de solução são invertidas no segundo passo. Percebe-se a enorme complexidade da marcha, com a necessidade de avaliação dos sinais das velocidades não só nos pontos como na totalidade da região. Também é evidente o largo emprego de diferenças centrais para a avaliação das derivadas referentes à advecção.

O tratamento dado aos termos difusivos gera, na solução numérica, o surgimento daquilo que seria, na equação diferencial, de termos extras envolvendo derivadas cruzadas no tempo e no espaço, sendo adicionados ou subtraídos da equação original dependendo da fase da solução e da configuração total do escoamento. O efeito destas adições é a estabilização da marcha da solução. Tomando-se uma das situações do termo difusivo na direção x da equação para a velocidade v pode-se mostrar o surgimento de tais termos adicionais.

$$\Delta X^2 \Delta_x^2 V^{(*)} = (v_E - v_P)^{(n-1)} - (v_P - v_W)^{(n)}$$

Somando e subtraindo $(v_P + v_W)^{(n-1)}$ e fazendo algumas manipulações algébricas:

$$\Delta X^2 \Delta_x^2 V^{(*)} = (v_E + v_W - 2v_P)^{(n-1)} - \left[(v_P - v_W)^{(n)} - (v_P - v_W)^{(n-1)} \right]$$

Percebe-se que a equação acima é a discretização em diferenças finitas do termo a seguir,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} v$$

desde que, naturalmente, as derivadas sejam avaliadas de maneira conveniente.