

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELO DINÂMICO DA LUBRIFICAÇÃO DO PISTÃO
EM COMPRESSORES ALTERNATIVOS

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

JÚLIO ROMERO SANTOS FERNANDES

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 1996

MODELO DINÂMICO DA LUBRIFICAÇÃO DO PISTÃO
EM COMPRESSORES ALTERNATIVOS

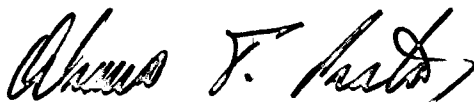
JÚLIO ROMERO SANTOS FERNANDES

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

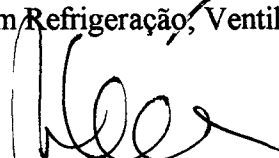
Especialidade Engenharia Mecânica, área de concentração Engenharia e Ciências Térmicas, e
aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador:



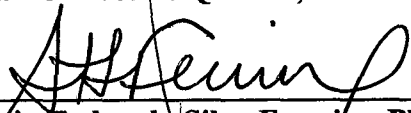
Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph. D.
Núcleo de Pesquisa em Refrigeração, Ventilação e Condicionamento de
Ar, UFSC

Coordenador
do curso:

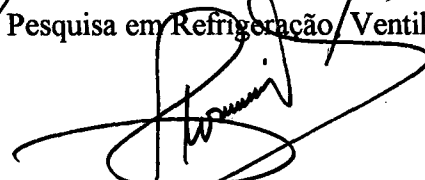


Prof. Abelardo Alves de Queiroz, Ph. D.

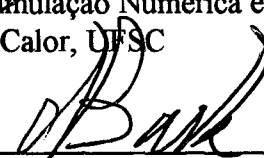
Banca
Examinadora:



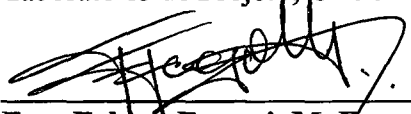
Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph. D. - Presidente
Núcleo de Pesquisa em Refrigeração, Ventilação e Condicionamento de
Ar, UFSC



Prof. Clóvis Raimundo Maliska, Ph. D.
Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e
Transferência de Calor, UFSC



Prof. Nelson Back, Ph. D.
Laboratório de Projeto, UFSC



Eng. Fabian Fagotti, M. Eng.
Empresa Brasileira de Compressores - EMBRACO

Ao "Sô" Miguel e à Dona Nazareth,
meus queridos pais, e ao André e à Ana
Cristina, meus irmãos, pelo amor, pelo
apoio e pela dedicação incondicional...



**...à Páti,
meu amor,
pela presença constante**



AGRADECIMENTOS

Ao povo brasileiro, por financiar este trabalho através do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq

Ao Prof. Alvaro Toubes Prata, pelo entusiasmo constante nas discussões sobre o trabalho e pela objetividade e eficiência na orientação

Aos amigos, engenheiros Luciano Aires Teixeira e Evandro de Souza Santos, pela valiosa contribuição no início do trabalho

Aos engenheiros Fabian Fagotti e Adilson Manke, pela disponibilidade e boa-vontade sempre presentes

Aos professores Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Clóvis Raimundo Maliska e Nelson Back, pela boa-vontade em comporem a Banca Examinadora

Ao "Sô" Proner, à Dona Dalgisa, ao Fábi e à Píti, por me acolherem como a um filho e irmão

Aos colegas, e amigos, engenheiros Adalberto Romalino da Cunha, Alessandro Gil Catto, Antônio Carlos Ferreira, Carlos Boabaid Neto, Carlos Gonzalo Larossa Rodriguez, José Luís Cashe, Kátia Cordeiro Mendonça, Luís Antônio Scola, Maurício Nath Lopes, Moacyr Marangone Mezavila, e a todos os colegas do Curso de Pós-Graduação, pelos indispensáveis momentos de descontração e pelas dicas valiosas na solução de problemas relativos ao trabalho

Aos amigos da "república do pão-de-queijo", os engenheiros Dárcio de Freitas Rezende, Eurípedes Barsanulpho Luz Jr., Fabiano Luís Zermiani e Victor Muniz Rosa, pela convivência e pela ajuda nos momentos difíceis

À nossa secretária, Sra. Elizabete Vieira de Andrade, a Bete, pela eterna boa-vontade e eficiência na execução do seu trabalho

A todos os colegas e professores do NRVA que tenham contribuído na realização deste trabalho

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS | ix |
| LISTA DE FIGURAS E TABELAS..... | xiv |
| RESUMO | xix |
| ABSTRACT | xx |
| 1 INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Generalidades | 1 |
| 1.2 Descrição do problema e sua importância no contexto da engenharia | 3 |
| 1.3 Revisão bibliográfica..... | 6 |
| 1.4 Objetivos da dissertação..... | 9 |
| 1.5 Descrição dos capítulos..... | 9 |
| 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA | 10 |
| 2.1 Introdução | 10 |
| 2.2 Modelo físico | 10 |
| 2.3 Aproximações e simplificações utilizadas..... | 12 |
| 2.4 Equações governantes..... | 13 |
| 2.4.1 Equação de Reynolds | 13 |
| 2.4.2 Equações da dinâmica..... | 20 |
| 2.4.2.1 Cálculo do ângulo de inclinação da biela..... | 22 |
| 2.4.2.2 Cálculo das acelerações do pistão..... | 22 |
| 2.4.2.3 Cálculo das forças e momentos | 24 |
| 2.4.3 Cálculo da vazão de óleo através da folga radial | 26 |
| 2.4.4 Cálculo da potência consumida por atrito viscoso na folga | 27 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.4.5 | Cálculo do torque e da potência no eixo da manivela | 27 |
| 2.4.6 | Cálculo da diagrama indicado | 28 |
| 2.5 | Equações do modelo numérico | 29 |
| 3 | METODOLOGIA DE SOLUÇÃO | 32 |
| 3.1 | Introdução | 32 |
| 3.2 | Obtenção do campo de pressão | 33 |
| 3.2.1 | Método dos volumes finitos | 33 |
| 3.2.2 | Cavitação do filme de óleo | 36 |
| 3.3 | Cálculo das forças e momentos | 36 |
| 3.3.1 | Força hidrodinâmica | 36 |
| 3.3.2 | Momento hidrodinâmico | 37 |
| 3.3.3 | Força de atrito viscoso | 37 |
| 3.3.4 | Momento de atrito | 38 |
| 3.4 | Cálculo da vazão de óleo | 38 |
| 3.5 | Procedimento para solução das equações da dinâmica do pistão | 39 |
| 3.6 | Cálculo das médias da vazão através da folga e da potência consumida por atrito viscoso em um ciclo | 45 |
| 3.7 | Informações computacionais | 45 |
| 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 49 |
| 4.1 | Introdução | 49 |
| 4.2 | Estudo de malha | 51 |
| 4.3 | Características dos compressores estudados | 51 |
| 4.4 | Etapas usadas no desenvolvimento do programa | 52 |
| 4.4.1 | Pistão sem movimento na direção radial | 52 |
| 4.4.1.1 | Eixo do pistão coincidente com o eixo do cilindro (Etapa 1) | 52 |

| | |
|--|-----------|
| 4 .4.1.2 Eixo do pistão paralelo ao eixo do cilindro (Etapa 2)..... | 54 |
| 4 .4.1.3 Eixo do pistão inclinado em relação ao eixo do cilindro (Etapa 3) | 56 |
| 4 .4.2 Pistão com movimento de rotação em torno do pino..... | 58 |
| 4 .4.2.1 Pino e centro de massa coincidentes e no meio do pistão (Etapa 4)..... | 58 |
| 4 .4.2.2 Pino e centro de massa coincidentes, mas não no meio do pistão (Etapa 5)..... | 60 |
| 4 .4.3 Pistão com movimento de translação na direção radial e sem rotação | 61 |
| 4 .4.3.1 Força exercida pela biela paralela ao seu eixo principal (Etapa 6)..... | 61 |
| 4 .4.3.2 Força exercida pela biela não-paralela ao seu eixo principal (Etapa 7)..... | 63 |
| 4 .4.4 Pistão com movimentos livres de rotação e translação | 64 |
| 4 .5 Variação de parâmetros de projeto..... | 72 |
| 4 .5.1 Variação da posição do pino (classe 1) | 73 |
| 4 .5.2 Variação da folga radial (classe 2) | 78 |
| 4 .5.3 Variação da viscosidade do óleo (classe 3)..... | 81 |
| 4 .6 Potência total consumida em um ciclo | 84 |
| 4 .6.1 Potência média cedida ao gás em um ciclo | 84 |
| 4 .6.2 Potência média no eixo da manivela | 85 |
| 4 .6.3 Comparação entre a potência obtida através do diagrama indicado e através do torque no eixo..... | 86 |
| 5 CONCLUSÕES | 87 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 90 |
| APÊNDICE A Cálculo da posição, velocidade e aceleração do pistão na direção axial | 93 |
| APÊNDICE B Cálculo das acelerações do centro de massa da biela nas direções radial e axial..... | 98 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

| | |
|---------------------------|---|
| a | limite de integração usado na apresentação da regra de Leibnitz para diferenciação de integrais |
| a_p, a_n, a_s, a_e, a_w | coeficientes usados no método dos volumes finitos |
| A | área transversal do topo do pistão |
| A_{Bx} | aceleração do CM da biela na direção X |
| A_{Bz} | aceleração do CM da biela na direção Z |
| A_p | aceleração do pistão na direção radial |
| b | limite de integração usado na apresentação da regra de Leibnitz para diferenciação de integrais |
| c | folga radial |
| c_1, c_2, c_3, c_4 | coeficientes usados na integração das equações de Navier-Stokes |
| C_{BP} | distância entre o pino do pistão e o CM da biela |
| C_{MB} | comprimento da biela |
| C_{ME} | comprimento da manivela |
| C_{PMS} | distância do PMS ao eixo da manivela |
| d | distância entre o eixo da manivela e o eixo do cilindro |
| e_{CM} | excentricidade do CM do pistão |
| e_t | excentricidade do topo do pistão |
| e_b | excentricidade da base do pistão |
| e_z | excentricidade do ponto que se localiza a uma distância z do topo do pistão |
| F_f | força de atrito viscoso |
| F_g | força exercida pelo gás em compressão |
| F_h | força hidrodinâmica |
| F_i | força de inércia |
| F_M | força exercida pela manivela |
| F_r | força de reação exercida pela biela |

| | |
|------------|--|
| F_t | força tangencial atuando na manivela |
| h | espessura local do filme de óleo |
| h_{\min} | menor distância entre o pistão e o cilindro, atingida durante um giro completo da manivela |
| h_z | diferença entre a espessura local do filme de óleo e a folga radial |
| I_B | momento de inércia da biela em relação ao seu CM |
| I_P | momento de inércia do pistão em relação ao pino |
| L | comprimento do pistão |
| m | massa do pistão |
| m_b | massa da biela |
| M_f | momento devido à força de atrito, em relação ao pino do pistão |
| M_h | momento hidrodinâmico em relação ao pino do pistão |
| M_i | momento devido à inércia do pistão |
| n | número de pontos nodais na discretização do domínio de solução da equação de Reynolds |
| n_i | número de pontos nodais na direção θ , usados na discretização do domínio de solução da equação de Reynolds |
| n_j | número de pontos nodais na direção ξ , usados na discretização do domínio de solução da equação de Reynolds |
| O | origem do sistema polar de coordenadas $r\theta z$ |
| O' | origem do sistema de coordenadas retangulares XYZ |
| p | pressão |
| P | potência consumida por atrito viscoso na folga |
| \bar{P} | potência média consumida por atrito viscoso na folga |
| P_e | potência no eixo da manivela |
| P_i | potência cedida ao gás em compressão |
| q_z | vazão de óleo através da folga radial por unidade de θ |
| Q | vazão de óleo através da folga radial |
| \bar{Q} | vazão média de óleo através da folga radial |
| r | eixo polar do sistema de coordenadas $r\theta z$ |
| R | raio do pistão |

| | |
|--------------------|---|
| R_1, R_2 | resíduos usados no método de Newton-Raphson na solução das equações da dinâmica |
| S | termo-fonte usado no método dos volumes finitos |
| t | tempo |
| T | torque no eixo da manivela |
| u | velocidade do escoamento de óleo na direção r |
| u_0 | velocidade da parede do cilindro na direção r ($u_0 = 0$) |
| u_h | velocidade do pistão na direção r ($u_h = \partial h / \partial t$) |
| v | velocidade do escoamento de óleo na direção θ ; volume no interior do cilindro |
| V_{morto} | volume morto do compressor |
| V_P | velocidade do pistão na direção axial |
| w | velocidade do escoamento de óleo na direção ξ |
| W | trabalho exercido pelo compressor sobre o gás |
| X | coordenada do sistema XYZ |
| Y | coordenada do sistema XYZ |
| z | coordenada do sistema polar $r\theta z$ |
| z_{CM} | distância entre o topo do pistão e o seu CM |
| z_P | distância entre o topo do pistão e o pino |
| Z | coordenada do sistema XYZ |

SÍMBOLOS GREGOS

| | |
|-----------------|---|
| α, β | variáveis independentes usadas na apresentação da regra de Leibnitz para diferenciação de integrais |
| δ | variação (ou incremento) |
| Δ | variação (ou incremento) |
| ϵ | excentricidade adimensional, relação de excentricidade, ou simplesmente excentricidade |
| ϕ | ângulo entre o eixo longitudinal da biela e o eixo do cilindro |
| γ | inclinação do pistão em relação ao eixo do cilindro |

| | |
|--------------|--|
| μ | viscosidade do óleo lubrificante |
| θ | coordenada angular do sistema polar $r\theta z$ |
| τ | ângulo de manivela |
| τ_{pis} | tensão de cisalhamento na interface entre o pistão e o filme de óleo |
| ω | velocidade angular da manivela ($\omega = d\tau / dt$) |
| ξ | quantidade adimensional relativa à direção z ($\xi = z / R$) |

ÍNDICES INFERIORES

| | |
|-------|---|
| cil | cilindro |
| e | face à direita do ponto P no volume de controle; eixo da manivela |
| E | próximo ponto nodal à direita do volume de controle |
| M | manivela |
| n | face acima do ponto P no volume de controle |
| novo | valor atual no método de Newton-Raphson |
| N | próximo ponto nodal acima do volume de controle |
| P, p | ponto nodal no centro do volume de controle; pino do pistão |
| s | face abaixo do ponto P no volume de controle |
| suc | sucção |
| S | próximo ponto nodal abaixo do volume de controle |
| velho | valor da iteração anterior no método de Newton-Raphson |
| w | face à esquerda do ponto P no volume de controle |
| W | próximo ponto nodal à esquerda do volume de controle |
| x | direção X |
| z | direção Z |

ÍNDICES SUPERIORES

| | |
|---------------------|--|
| τ | ângulo de manivela atual |
| $\tau + \Delta\tau$ | ângulo de manivela com avanço $\Delta\tau$ |

ABREVIACÕES

| | |
|-----|---|
| CM | centro de massa |
| pv | pressão/volume, relativo ao diagrama indicado |
| PMI | ponto morto inferior |
| PMS | ponto morto superior |

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

FIGURAS

| Figura | Título | página |
|---------------|---|---------------|
| 1.1 | Representação esquemática de um sistema de compressão de vapor com seus quatro componentes principais | 2 |
| 1.2 | Representação esquemática de um típico par pistão/cilindro | 4 |
| 1.3 | Forças que agem sobre o pistão | 5 |
| 1.4 | Influência da posição do pino no campo de pressão devido ao "efeito cunha" | 6 |
| 2.1 | Dimensões principais do mecanismo | 11 |
| 2.2 | Variação da pressão no cilindro | 11 |
| 2.3 | Orientação do pistão no interior do cilindro | 12 |
| 2.4 | Sistemas de coordenadas usados na solução do problema | 12 |
| 2.5 | Geometria utilizada na dedução da equação de Reynolds | 14 |
| 2.6 | Domínio de solução da equação de Reynolds | 17 |
| 2.7 | Plano xz , para dedução da espessura do filme de óleo | 18 |
| 2.8 | Plano xy , para dedução da espessura do filme de óleo | 19 |
| 2.9 | Diagrama de corpo livre do pistão | 20 |
| 2.10 | Diagrama de corpo livre da biela | 22 |
| 2.11 | Geometria utilizada para a dedução de \ddot{e}_t e \ddot{e}_p | 23 |
| 3.1 | Discretização do domínio de solução | 33 |
| 3.2 | Volume de controle típico | 34 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.1 | Eixo do pistão coincidente com o eixo do cilindro | 53 |
| 4.2 | Velocidade do pistão na direção axial em função do ângulo de manivela | 53 |
| 4.3 | Vazão de óleo através da folga e potência consumida por atrito viscoso em função do ângulo de manivela | 54 |
| 4.4 | Eixo do pistão paralelo ao eixo do cilindro | 55 |
| 4.5 | Comparação entre as potências obtidas na Etapa 1 e na Etapa 2 | 55 |
| 4.6 | Variação da vazão na direção axial por unidade de comprimento na direção circunferencial para alguns valores de τ | 56 |
| 4.7 | Eixo do pistão inclinado em relação ao eixo do cilindro | 56 |
| 4.8 | Perfis de pressão na direção axial na posição $\theta = 0^\circ$ para várias excentricidades do topo e da base em $\tau = 0^\circ$ | 57 |
| 4.9 | Comparação entre as forças hidrodinâmicas para várias excentricidades do topo e da base | 58 |
| 4.10 | Pino e centro de massa coincidentes e no meio do pistão | 58 |
| 4.11 | Variação de ϵ_t com o ângulo de manivela, numa situação onde $\epsilon_t = -\epsilon_b$ | 59 |
| 4.12 | Variação dos momentos hidrodinâmico e de atrito com o ângulo de manivela, numa situação onde $\epsilon_t = -\epsilon_b$ | 59 |
| 4.13 | Pino e centro de massa coincidentes, mas não no meio do pistão | 60 |
| 4.14 | Variação de ϵ_t com o ângulo de manivela para duas posições do pino | 60 |
| 4.15 | Variação do momento hidrodinâmico com o ângulo de manivela para duas posições do pino | 61 |
| 4.16 | Força exercida pela biela paralela ao seu eixo principal | 61 |
| 4.17 | Variação da excentricidade do pistão com o ângulo de manivela para três posições de partida diferentes | 62 |
| 4.18 | Influência do sentido de giro da manivela na posição de estabilização do pistão | 63 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.19 | Força exercida pela biela não-paralela ao seu eixo principal | 63 |
| 4.20 | Comparação entre as Etapas 6 e 7 | 64 |
| 4.21 | Forças atuantes no pistão na direção X | 65 |
| 4.22 | Forças atuantes no pistão na direção Z | 65 |
| 4.23 | Momentos atuantes no pistão em relação ao pino | 66 |
| 4.24 | Comparação entre a força de atrito obtida na Etapa 1 e a obtida na Etapa 10..... | 67 |
| 4.25 | Comparação entre a potência consumida por atrito obtida na Etapa 1 e a obtida na Etapa 10 | 67 |
| 4.26 | Comparação entre a vazão através da folga obtida na Etapa 1 e a obtida na Etapa 10..... | 68 |
| 4.27 | Variações das excentricidades do topo e da base do pistão em função do ângulo de manivela | 68 |
| 4.28 | Variação da espessura do filme de óleo na folga radial para seis valores diferentes de τ | 69 |
| 4.29 | Variações das velocidades radiais do topo e da base do pistão em função do ângulo de manivela | 70 |
| 4.30 | Campos de pressão na folga para seis valores diferentes de τ | 71 |
| 4.31 | Variação da espessura mínima do filme de óleo em função da posição do pino..... | 74 |
| 4.32 | Variações da vazão média através da folga e da potência média consumida por atrito viscoso em função da posição do pino..... | 74 |
| 4.33 | Variação do momento hidrodinâmico com o ângulo de manivela para quatro posições do pino diferentes..... | 76 |
| 4.34 | Variações das excentricidades do topo e da base para quatro posições do pino diferentes..... | 77 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.35 | Variações das excentricidades do topo e da base para $z_P/L = 0,500$, no meio do pistão | 78 |
| 4.36 | Variação da espessura mínima do filme de óleo em função da folga radial..... | 79 |
| 4.37 | Variações da vazão média através da folga, e da potência média consumida por atrito viscoso em função da variação da folga radial | 79 |
| 4.38 | Variação das excentricidades ϵ_t e ϵ_b máximas atingidas em um ciclo, em função da folga radial | 80 |
| 4.39 | Variação da espessura mínima do filme de óleo em função da viscosidade | 81 |
| 4.40 | Variações da vazão média através da folga e da potência média consumida por atrito viscoso em função da viscosidade do óleo..... | 82 |
| 4.41 | Variações das excentricidades do topo e da base para três viscosidades diferentes | 84 |
| 4.42 | Diagrama p_v para o compressor 2..... | 85 |
| 4.43 | Variação do torque no eixo da manivela em função de τ | 85 |
| A.1 | Sistemas de coordenadas usados no cálculo de V_P e A_P | 93 |
| B.1 | Sistemas de coordenadas usados no cálculo de A_{Bx} e A_{Bz} | 98 |

TABELAS

| Tabela | Título | página |
|---------------|--|---------------|
| 3.1 | Valores típicos das variáveis usados no programa computacional..... | 48 |
| 3.2 | Alguns valores de tempos computacionais obtidos com as diferentes plataformas computacionais, em alguns casos típicos..... | 48 |
| 4.1 | Diferenças entre os resultados obtidos com malha 15 por 15 e com malha 25 por 25 | 51 |

| | | |
|-----|--|----|
| 4.2 | Características geométricas, dinâmicas e operacionais dos compressores estudados | 52 |
| 4.3 | Valores de h_{\min} , Q e P para alguns valores de z_p | 76 |
| 4.4 | Valores de h_{\min} , Q e P para alguns valores de c | 81 |
| 4.5 | Valores de h_{\min} , Q e P para alguns valores de μ | 83 |
| 4.6 | Comparação entre a potência cedida ao gás e a potência no eixo da manivela | 86 |

RESUMO

Este trabalho trata da modelação do movimento do pistão dentro do cilindro em um compressor alternativo de refrigeração. Em um compressor alternativo em funcionamento, o pistão se movimenta tanto axialmente quanto radialmente, dentro da folga radial. Na formulação do problema, leva-se em consideração: a força hidrodinâmica exercida pelo óleo lubrificante que preenche a folga, a força de atrito viscoso também exercida pelo óleo, a força exercida pela biela, a força exercida pelo gás refrigerante em compressão e, ainda, os momentos associados a estas forças. Faz-se um balanço de tais forças e momentos, e resolvem-se as equações da dinâmica para a obtenção da trajetória completa do pistão. A força hidrodinâmica é calculada a partir da integração do campo de pressão na folga, que é obtido através da solução da equação de Reynolds da lubrificação, a qual é resolvida pelo método dos volumes finitos. Para a solução das equações da dinâmica, faz-se uso do método de Newton-Raphson. De posse da variação da posição radial do pistão em um giro completo da manivela e, conseqüentemente, da variação da folga radial, calcula-se a potência consumida por atrito viscoso na folga e também a vazão de óleo lubrificante através desta. Tais informações são importantes na obtenção do consumo de energia do sistema e do vazamento do gás refrigerante em compressão, uma vez que o gás vaza através da folga radial dissolvido no lubrificante. A verificação da influência da posição do pino no pistão, do tamanho da folga radial e da viscosidade do óleo lubrificante sobre a oscilação do pistão, foram os principais casos estudados. Dos resultados, pode-se concluir que estes três parâmetros influenciam consideravelmente a estabilidade do pistão e, conseqüentemente, a potência consumida e o vazamento do gás refrigerante através da folga.

ABSTRACT

A numerical simulation of the piston movement inside the cylinder of a reciprocating compressor is performed. The compressor considered here is a small hermetic compressor employed in domestic refrigerators. For the problem formulation both the axial and the radial piston motion is considered. In operation, the piston moves up and down along the axis of the cylinder, but the radial oscillatory motion in the cylinder bore, despite being usually small, plays a very important role on the compressor performance and reliability. The compromise between sealing of the gas leakage through the piston-cylinder clearance and the friction losses requires a detail analysis of the oscillatory motion for a good design. The forces acting on the piston are the hydrodynamic force due to the pressure build up in the oil film (lubrication effects), the force due to the connecting rod, the viscous force associated with the relative motion between the piston and oil, and the force exerted by the gas on the top of the piston. All corresponding moments are also included in the problem formulation of the piston dynamics, in order to determine the piston trajectory, velocity and acceleration at each time step. The hydrodynamic force is obtained from the integration of the pressure distribution on the piston skirt, which, in turn, is determined from a finite volume solution of the time dependent Reynolds equation. A Newton-Raphson time-marching procedure was employed in solving the equations of the piston dynamics. The results explored the effects of several design parameters and operating conditions on the stability of the piston, its sealing performance and friction losses. Emphasis was placed on investigating the influence of the pin location, radial clearance and oil viscosity on the piston dynamics. The complexity of the piston movement in reciprocating compressors was demonstrated and the detailed model presented can be employed as an useful tool for engineering design.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O uso da refrigeração e do condicionamento de ar é cada vez mais difundido na sociedade moderna. Milhares de unidades, tais como geladeiras domésticas, aparelhos de condicionamento de ar de janela, bebedouros e outros, são fabricados no mundo a cada dia. Além destas, outras aplicações tais como condicionamento de ar industrial e automotivo; refrigeração para armazenamento, distribuição e processamento de alimentos; indústrias químicas e outras mais são cada vez mais comuns.

Dentre os vários processos para se produzir frio, os sistemas de compressão mecânica de vapor são atualmente os mais usados. Tais sistemas, como pode-se ver na Fig. 1.1, são constituídos basicamente por quatro componentes: evaporador, compressor, condensador e dispositivo de expansão. No evaporador um fluido volátil, o refrigerante, evapora a uma temperatura menor que a temperatura do ambiente a ser refrigerado. Em seguida, o vapor é comprimido, no compressor, tendo assim sua pressão aumentada, de forma que o refrigerante possa se condensar a uma temperatura alta o suficiente para perder calor para outro ambiente, que pode ser água ou ar, por exemplo. Essa perda de calor ocorre no condensador. Em seguida, o líquido passa por um dispositivo de expansão, que mantém a diferença de pressão entre o condensador e o evaporador. Durante a passagem pelo dispositivo de expansão, a pressão cai, e uma parte do líquido se vaporiza. A parte restante de líquido se vaporiza no evaporador, retirando calor do ambiente a ser refrigerado (Gosney, 1982).

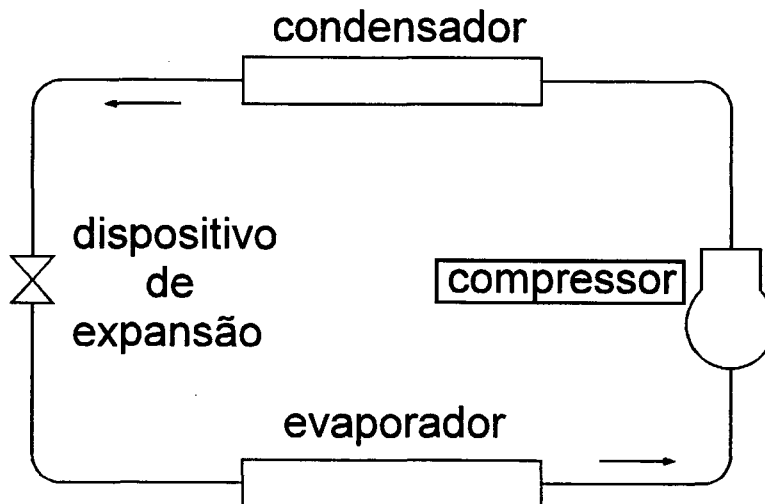


Fig. 1.1 - Representação esquemática de um sistema de compressão de vapor com seus quatro componentes principais

Cada componente de um sistema de compressão mecânica de vapor – evaporador, compressor, condensador e dispositivo de expansão – apresenta um comportamento característico, sendo, ao mesmo tempo, influenciado pelas condições impostas pelos outros componentes (Stoecker, 1985).

O compressor é o coração do sistema, já que é responsável pelo movimento do fluido através dos componentes. Os principais tipos de compressores para refrigeração são: alternativo, de pistão rolante, de parafuso, centrífugo e de palhetas. O compressor alternativo consiste de um pistão movendo-se alternadamente no interior de um cilindro, com as válvulas de sucção e de descarga dispostas convenientemente para permitir a compressão. Durante o tempo de sucção do pistão, gás refrigerante é aspirado pela válvula de sucção. Durante o tempo de compressão o pistão comprime o refrigerante e, posteriormente, durante o período de descarga, o empurra para fora através da válvula de descarga.

Uma característica importante relativa ao desempenho de um compressor alternativo é a sua eficiência volumétrica, que é definida como a razão entre a vazão volumétrica de refrigerante que entra no compressor – medida na entrada do compressor, numa posição pré-definida – e a sua taxa de deslocamento – que é o volume varrido pelo pistão em seu curso, do PMS ao PMI, dividido pelo tempo gasto. Outro parâmetro importante é o trabalho no eixo-motor do compressor, que tem influência no coeficiente de desempenho do sistema,

definido como sendo a razão entre a capacidade de refrigeração do sistema e o trabalho no eixo-motor do compressor. Fatores tais como perda de carga, vazamento através das válvulas de sucção e descarga, e vazamentos entre o pistão e a parede do cilindro, afetam a eficiência volumétrica. Dentre os fatores que afetam o coeficiente de desempenho, estão o atrito entre as superfícies em movimento – notadamente a interface entre o pistão e o cilindro – e também a perda de carga através das válvulas.

1.2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E SUA IMPORTÂNCIA NO CONTEXTO DA ENGENHARIA

O movimento na direção axial é o principal deslocamento realizado pelo pistão. As forças que atuam na direção axial são, basicamente, a força exercida pelo gás refrigerante em compressão, a força de atrito viscoso, a força de inércia e a força exercida pela biela. A força de atrito é viscosa porque a interface entre o pistão e o cilindro, a folga radial, é preenchida com óleo lubrificante. Na Fig. 1.2 mostra-se um esquema de um par pistão/cilindro, com suas partes principais. A folga radial é ilustrada em escala ampliada para maior entendimento.

Apesar de o movimento na direção axial ser o mais importante, este não é o único realizado pelo pistão. Existem forças atuando também na direção radial – e conseqüentemente momentos associados a estas forças – que, devido à existência da folga, promovem deslocamentos do pistão também nesta direção. Tais deslocamentos, ou oscilações radiais, são muito pequenos, mas muito importantes no desempenho e na confiabilidade de um compressor alternativo. Se as amplitudes desses deslocamentos chegarem a valores críticos, podem ocorrer choques entre o pistão e a parede do cilindro, ocasionando assim desgaste e ruído durante o funcionamento. Além disso, o vazamento do gás em compressão através da folga e a potência consumida por atrito viscoso – que podem influenciar diretamente a eficiência volumétrica e o coeficiente de desempenho do sistema – são também influenciados por este movimento radial, visto que estes dois fenômenos dependem fortemente do tamanho da folga. Esta dependência é de fácil entendimento quando se pensa em uma folga excessivamente grande ou excessivamente pequena. Se a folga é muito grande o atrito viscoso é pequeno, devido aos baixos gradientes de velocidade ao longo da folga, mas o vazamento do gás em compressão é grande. Em contrapartida, se a folga é muito pequena há um vazamento pequeno, mas a potência consumida por atrito se torna maior, devido aos altos gradientes de velocidade. Este

acoplamento entre os efeitos sugere a existência de uma folga ótima em relação à potência consumida por atrito viscoso e ao vazamento do gás refrigerante através da folga radial.

Para uma descrição da trajetória do pistão e da influência dos diversos parâmetros de projeto, deve-se fazer um balanço de todas as forças e momentos que agem no pistão.

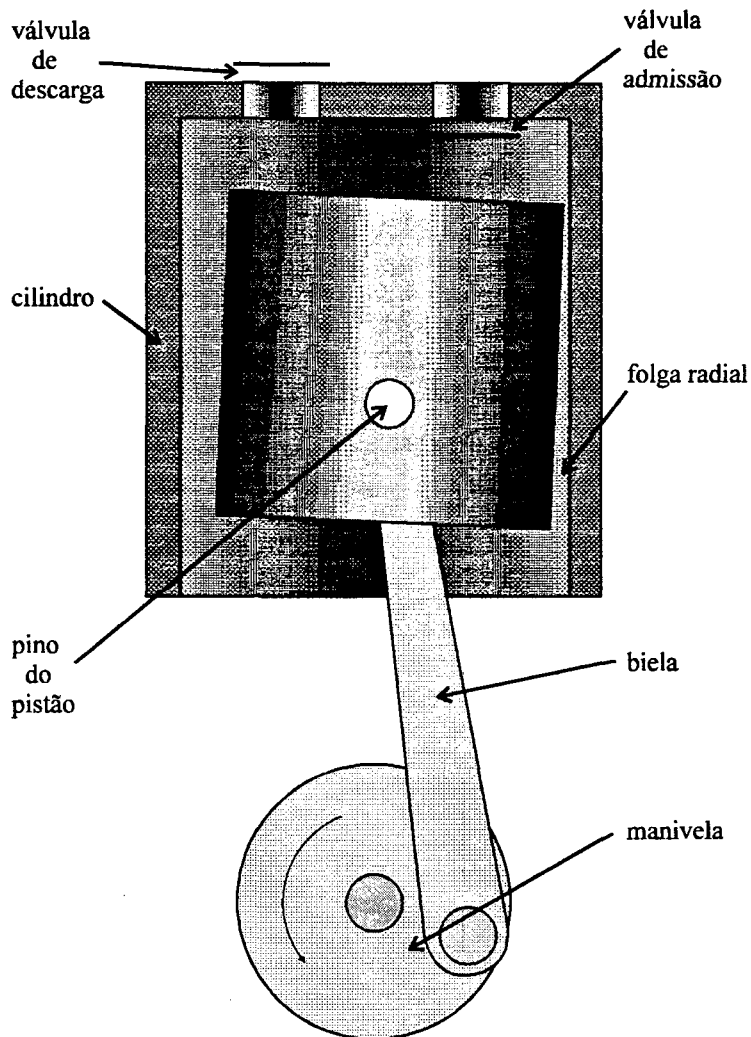


Fig. 1.2 - Representação esquemática de um típico par pistão/cilindro

Representados na Fig. 1.3, tais forças e momentos são: a força e o momento hidrodinâmico, exercidos pelo filme de óleo; a força e o momento de atrito, também exercidos pelo filme de óleo; a força exercida pelo gás em compressão; a força exercida pela biela e a força de inércia, devida à aceleração do pistão. Na Fig. 1.3 apresenta-se somente a aceleração na direção axial, porque a aceleração radial é muito pequena. Deve-se portanto obter uma solução simultânea

da equação de Reynolds – que determina o campo de pressão na folga e assim a força e o momento hidrodinâmico – e das equações da dinâmica do pistão para se determinar a sua trajetória dentro da folga.

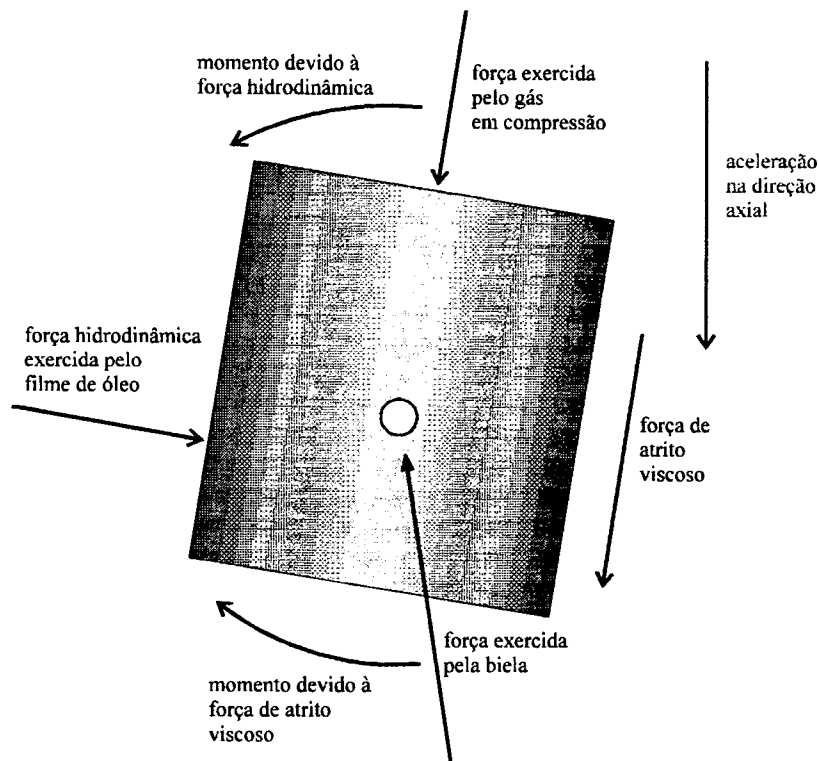


Fig. 1.3 - Forças que agem sobre o pistão

Um dos principais parâmetros que determinam a amplitude do movimento radial é a posição do pino no eixo do pistão (Fig. 1.2). Tal posição tem influência na magnitude e no sentido dos momentos agindo no pistão. Isto porque, como pode-se ver na Fig. 1.4 – onde V_P é a velocidade do pistão na direção axial – o “efeito cunha” (inclinação entre duas superfícies que se movem uma em relação à outra) no filme de óleo gera um perfil de pressão assimétrico sobre o pistão (Cameron, 1976; Pinkus, 1961), e a força resultante deste campo de pressão pode ter sua linha de ação acima, sobre ou abaixo do pino, dependendo da posição deste. Outros parâmetros importantes são o tamanho da folga radial e a viscosidade do óleo lubrificante, que serão também estudados neste trabalho. Aqui, novamente, pode-se pensar em otimização, tanto da posição do pino quanto da folga radial ou da viscosidade, objetivando menores amplitudes dos movimentos radiais e, conseqüentemente, menor ruído e maior confiabilidade.

Um bom projeto deve, portanto, conduzir a movimentos suaves do pistão e garantir-lhe

o máximo de estabilidade, mantendo sempre um mínimo filme de óleo separando-o da parede do cilindro.

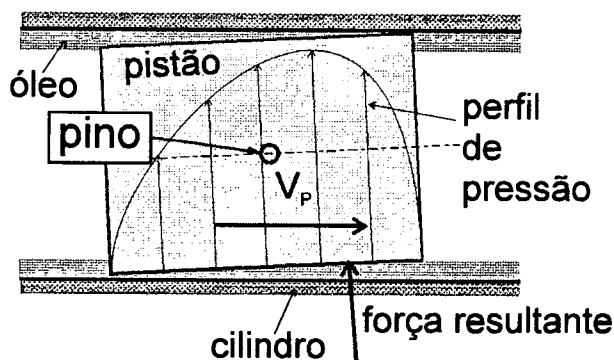


Fig. 1.4 - Influência da posição do pino no campo de pressão devido ao "efeito cunha"

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os movimentos radiais do pistão, também chamados de movimentos secundários, têm sido estudados analiticamente e experimentalmente durante as últimas duas décadas, objetivando aperfeiçoamento no que se refere a fatores tais como atrito, ruído, vibração, cavitação, consumo de óleo e outros. Todos os fatores citados são fortemente afetados pela interação entre o óleo e o pistão. Alguns dos fenômenos presentes nesta interação são a lubrificação hidrodinâmica e as deformações elásticas e de origem térmica. A seguir serão revisados os trabalhos mais importantes realizados sobre o movimento do pistão no cilindro em máquinas alternativas.

Dentre alguns dos trabalhos já realizados, Shaw e Nussdorfer (1945) e Greene (1969) mostraram a existência de um filme de óleo entre o pistão e o cilindro, estudando cilindros transparentes. Fielding e Sckorecki (1964, 1969-70) mostraram que a injeção do lubrificante na folga sob pressão pode reduzir substancialmente o ruído de um motor diesel. Knoll e Peeken (1980) apresentaram alguns resultados analíticos sobre a capacidade de suportar carga do pistão. No seu trabalho, a força hidrodinâmica resultante devida ao filme de óleo para uma posição e velocidade do pistão prescritas foi calculada, mas não a trajetória contínua do pistão.

Todas as referências acima são citadas por Li et al. (1983) que, em seu trabalho, incorporaram um modelo de lubrificação hidrodinâmica do pistão e calcularam a trajetória e o atrito no pistão para uma máquina alternativa. Seus resultados mostraram que a oscilação radial pode influenciar o comportamento do atrito entre o pistão e o cilindro. Um destes resultados mostra que o contato entre o pistão e o cilindro pode gerar um atrito duas vezes maior que o atrito viscoso com o filme de óleo. Tal contato é consequência de choques entre o pistão e o cilindro, e pode acontecer quando o pino do pistão é colocado numa posição muito próxima do topo ou da base do pistão. Analisando a influência da folga radial, detectaram também que, com uma folga muito pequena, o movimento radial do pistão é amortecido devido a uma fina camada de óleo nas superfícies. Por outro lado, este movimento é mais acentuado se a folga é maior, isto principalmente, devido a uma menor rigidez do filme de óleo. A influência da viscosidade do óleo foi também verificada, e foi constatado que quando a viscosidade é baixa, há maiores amplitudes de oscilação do pistão, devido a uma menor capacidade do filme de óleo em suportar carga.

Um estudo numérico sobre o choque entre o pistão e o cilindro foi empreendido por Suzuki et al. (1987), citados por Zhu et al. (1992), discutindo os efeitos de superfícies arbitrarias do pistão e de excentricidade do pino no movimento do cilindro. Zhu et al. (1992) também confirmaram a importância da folga radial e da viscosidade do óleo lubrificante no movimento radial do pistão e na potência consumida por atrito para um máquina alternativa. Concluíram que uma diminuição da folga radial e um aumento da viscosidade do óleo lubrificante, levam a menores amplitudes de oscilação, e vice-versa. Além destes parâmetros, mostraram também a influência da velocidade de rotação do eixo, da força de combustão e da temperatura de trabalho na dinâmica do pistão. Na segunda parte do seu trabalho (Zhu et al., 1993), levaram em conta os efeitos de irregularidade superficial, perfil do pistão, deformação elástica e distorções de origem térmica tanto do pistão quanto do cilindro para cálculo da trajetória do pistão. Concluíram que estes efeitos são importantes, excetuando-se a deformação devida à força do gás e à distorção térmica do cilindro.

Em dois trabalhos, Gomed e Etsion (1993, 1994) apresentaram um modelo para análise dinâmica de pistões sem anéis, lubrificadas a gás. Este modelo leva em conta as equações da dinâmica tanto do pistão quanto da biela juntamente com a equação de Reynolds

e a equação da energia. A inclusão das equações da dinâmica da biela é destacada como sendo de grande relevância nos resultados, e não era feita até então pela maior parte dos pesquisadores. Através de um estudo paramétrico do problema, confirmaram também a importância da posição do pino, da folga radial e da viscosidade do óleo lubrificante na estabilidade do pistão e na vazão do lubrificante através da folga radial.

Entre outros trabalhos, pode-se citar o artigo de Yamaguchi (1994), no qual foram obtidos resultados teóricos e experimentais para a força de atrito entre o pistão e o cilindro em baixas velocidades de rotação. Foram estudados dois tipos de pistão: um pistão comum, com lubrificação hidrodinâmica, e outro com injeção de óleo na folga, chamado de pistão hidrostático. Alguns resultados mostram que, se a folga radial do pistão hidrostático é reduzida, o vazamento de óleo através da folga pode ser tão pequeno quanto o que se tem no caso hidrodinâmico, e ainda com uma redução no atrito. Este resultado confirma mais uma vez a importância da folga radial.

Lee (1994), estudando um motor de combustão interna, propõe um sistema que usa a força de combustão a favor da estabilidade do pistão, já que este sofre continuamente uma força assimétrica exercida pela biela, o que faz com que o pistão trabalhe deslocado do eixo do cilindro. Para tanto, uma das sugestões dadas é o uso de um pistão cujo topo não é horizontal, e sim num plano inclinado, em combinação com um deslocamento do pino do pistão na direção radial, de tal forma que o pino fique sobre a linha de ação da força do gás em compressão.

Um modelo que inclui a lubrificação elastohidrodinâmica – formulação que leva em consideração a deformação elástica das superfícies – foi usado por Dursunkaya et al. (1994). Neste trabalho, estudaram-se os movimentos secundários do pistão para um motor diesel. A dinâmica dos movimentos secundários, a lubrificação hidrodinâmica e a deformação elástica são resolvidas simultaneamente. Os resultados mostraram que a consideração da deformação elástica afeta significativamente os movimentos e o atrito no pistão.

Quanto a compressores alternativos, pode-se citar o trabalho de Ferreira et al. (1992), onde é feita uma modelagem do escoamento do gás refrigerante através da folga radial, sem no entanto se fazer a consideração de movimento radial do pistão. A continuação do trabalho, em Teixeira et al. (1995), leva em consideração o movimento radial do pistão no cômputo da

vazão de óleo através da folga radial e da potência consumida por atrito viscoso. Estes dois trabalhos foram o ponto de partida para o presente trabalho.

1.4 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar, pela primeira vez, uma descrição completa da trajetória do pistão à medida em que este se movimenta no interior de um cilindro de um compressor alternativo de refrigeração.

Estudando-se a variação desta trajetória em função de parâmetros tais como viscosidade do óleo lubrificante, posição do pino no pistão e dimensão da folga radial, tem-se uma ferramenta adicional para ser usada no projeto de compressores alternativos com pistões sem anéis, o que possibilitará ações para minimizar o ruído, o desgaste por atrito, a potência consumida e o vazamento do gás através da folga radial durante a compressão.

1.5 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

Este trabalho é dividido em cinco capítulos, sendo que no Capítulo 1 faz-se uma introdução ao assunto, e uma revisão dos trabalhos mais relevantes já publicados. No Capítulo 2 apresenta-se uma modelação do problema, mostrando-se os modelos físico e matemático juntamente com as equações governantes. Mostram-se ainda as simplificações e aproximações usadas e a dedução da equação de Reynolds para a lubrificação. A metodologia de solução das equações é apresentada no Capítulo 3, com uma descrição do uso do método dos volumes finitos no cálculo do campo de pressão na folga, e do método de Newton-Raphson na solução das equações da dinâmica. No Capítulo 4 mostram-se os resultados obtidos com as devidas discussões e interpretações. Os resultados são divididos em três categorias: resultados obtidos nas etapas de desenvolvimento do programa computacional, resultados em função da variação de parâmetros de projeto, e resultados do cálculo da potência consumida em um ciclo. Finalmente, no Capítulo 5, expõem-se as conclusões do trabalho e as perspectivas futuras no estudo do problema.

Capítulo 2

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo trata das formulações física e matemática do problema, mostrando as simplificações usadas e as equações governantes. Apesar das simplificações, algumas das equações aqui apresentadas estão em sua forma básica, e serão modificadas e adaptadas à Metodologia de Solução discutida no capítulo seguinte.

2.2 MODELO FÍSICO

Na Fig. 2.1 apresenta-se um típico sistema com pistão e cilindro. O pistão, com raio R e comprimento L , é acionado em seu movimento alternativo pela biela, que por sua vez é acionada pela manivela. O ciclo começa em $\tau = 0^\circ$, e termina no mesmo ponto, em $\tau = 360^\circ$, após um giro completo da manivela, que tem uma velocidade angular ω . A inclinação da biela em relação ao eixo do cilindro é dada pelo ângulo ϕ . O eixo em torno do qual gira a manivela, o eixo-motor, localiza-se a uma distância d do eixo do cilindro.

As pressões p_{cil} e p_{suc} , acima e abaixo do pistão respectivamente, são conhecidas sendo que p_{cil} é função do ângulo de manivela e p_{suc} é constante. A variação de p_{cil} com τ apresentada na Fig. 2.2 foi obtida experimentalmente, em outro trabalho, e é um dentre os dois tipos de distribuição de pressão p_{cil} que são usados no presente trabalho.

A orientação do pistão no interior do cilindro é mostrada na Fig. 2.3. Sob a ação da força exercida pela biela, F_r , e do campo de pressão ao seu redor, o pistão assume uma

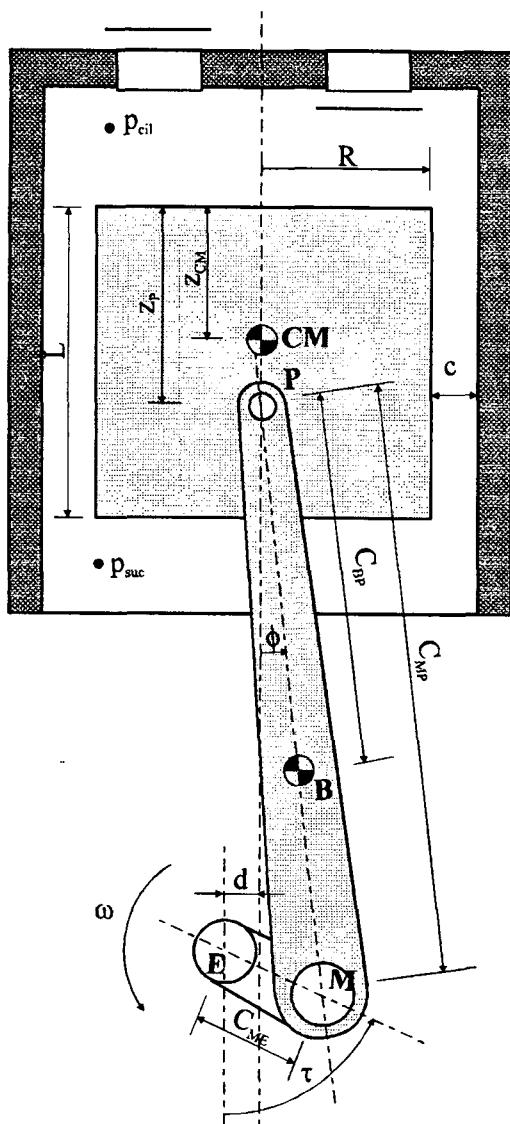


Fig. 2.1 - Dimensões principais do mecanismo

aceleração do CM do pistão na direção axial são dadas por V_p e A_p . Assume-se que qualquer movimento do pistão só é possível num plano perpendicular ao eixo da manivela.

Dois sistemas de coordenadas, representados na Fig. 2.4, são usados na solução do problema. O sistema XYZ tem sua origem, O' , fixa no topo do cilindro, e a direção Z coincide com o seu eixo, orientada para baixo. O eixo X se localiza no plano onde o pistão pode se movimentar. Este sistema é usado na formulação das equações da dinâmica do pistão. O outro sistema de coordenadas é um sistema de coordenadas cilíndricas $r\theta z$, cuja origem O é solidária ao topo do pistão, movendo-se axialmente com uma velocidade V_p . Seu plano polar se localiza no plano XY do sistema XYZ. Este sistema é usado no cálculo do campo de pressão na folga,

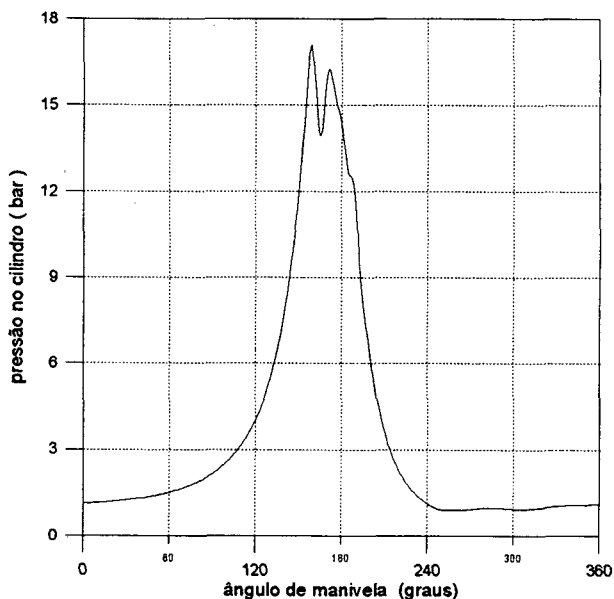


Fig. 2.2 - Variação da pressão no cilindro

posição descrita pelas excentricidades do topo, e_t , e da base, e_b , em relação ao eixo do cilindro. As velocidades do topo e da base do pistão na direção radial são dadas por \dot{e}_t e \dot{e}_b , e suas acelerações por \ddot{e}_t e \ddot{e}_b . O uso das excentricidades e_t e e_b equivale ao uso da excentricidade do centro de massa (CM) do pistão, e_{CM} , e da sua inclinação em relação ao eixo do cilindro, γ . A velocidade e a

através da equação de Reynolds.

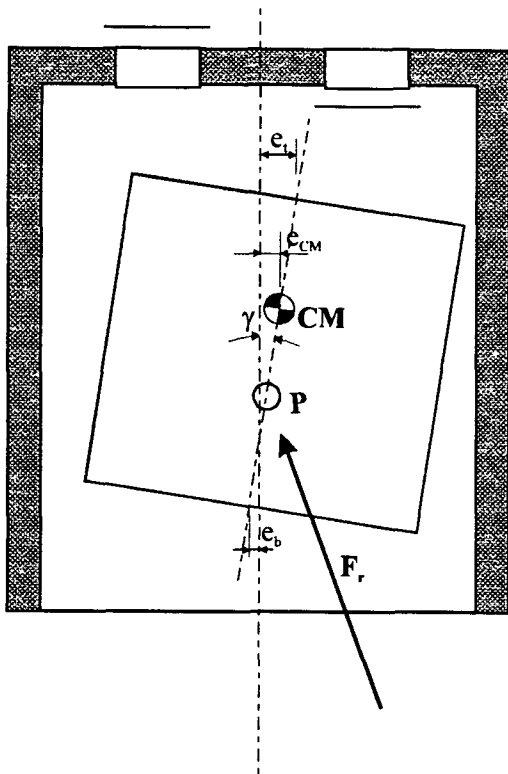


Fig. 2.3 - Orientação do pistão no interior do cilindro

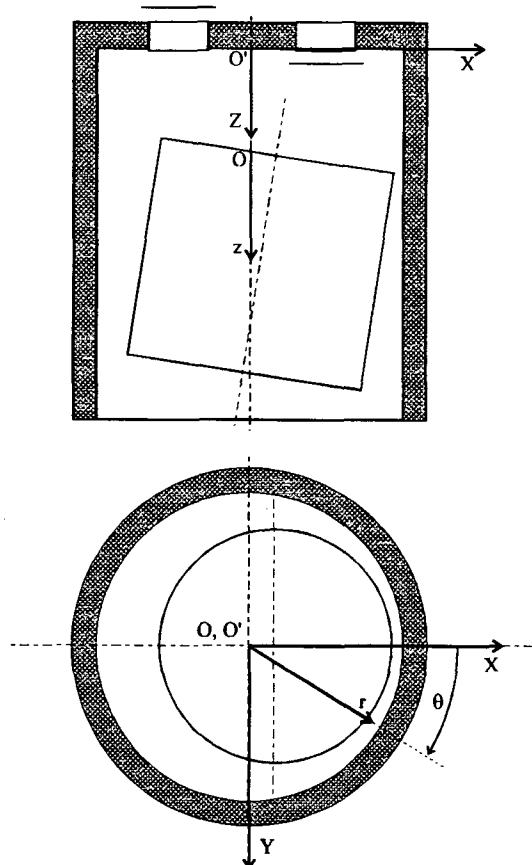


Fig. 2.4 - Sistemas de coordenadas usados na solução do problema

2.3 APROXIMAÇÕES E SIMPLIFICAÇÕES UTILIZADAS

As simplificações e aproximações usadas serão descritas no texto conforme a conveniência, contudo as principais são relatadas a seguir:

1. A folga radial c , mostrada em escala ampliada na Fig. 2.1, é muito pequena em relação ao curso axial do pistão. Desta forma, translações, velocidades e acelerações na direção radial são bem menores que aquelas na direção axial. Assim pode-se considerar que, para quaisquer pontos do pistão, as velocidades e acelerações na direção axial são as mesmas.
2. Todos os movimentos possíveis do pistão são no plano XZ do sistema XYZ . Esta aproximação é usada porque considera-se que os mancais que fazem a conexão da manivela com a biela, da biela com o pino e do pino com o pistão, não permitem desalinhamentos.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3. O pistão e o cilindro são rígidos, não sofrendo deformações de origem térmica ou de qualquer espécie.
4. A variação da pressão na direção radial é desconsiderada, porque a folga radial é muito pequena.
5. Em virtude de a folga radial ser muito pequena, o escoamento do óleo é laminar e os efeitos de borda são desconsiderados. Considera-se ainda que a distribuição do óleo lubrificante é feita de forma que toda a folga radial seja preenchida com este óleo.
6. O gás refrigerante e o óleo lubrificante são imiscíveis. Se a miscibilidade fosse considerada, teriam-se variações espaciais na viscosidade da mistura, porque a proporção de gás dissolvido no óleo – que tem influência na viscosidade da mistura – depende da pressão, que varia ao longo da folga radial.

2.4 EQUAÇÕES GOVERNANTES

2.4.1 Equação de Reynolds

Para obtenção da equação da lubrificação hidrodinâmica, ou equação de Reynolds, assumem-se as seguintes hipóteses simplificativas (Cameron, 1976; Pinkus e Sternlicht, 1961),

1. Escoamento laminar.
2. O óleo lubrificante é um fluido newtoniano e é incompressível.
3. As forças de inércia, no óleo, são pequenas se comparadas às forças viscosas e podem ser desprezadas.
4. A pressão é considerada constante na direção radial.
5. A viscosidade do óleo é constante.

Vale ressaltar que as hipóteses anteriores são bem realistas e, exceto pela última, que é a mais restritiva, se aplicam em grande parte dos problemas de lubrificação hidrodinâmica.

Como a folga radial c é muito pequena se comparada com R (no presente trabalho c/R é da ordem de 10^{-4}), pode-se ignorar os efeitos de curvatura e usar a coordenada θ , do sistema $r\theta z$, como se esta fosse uma coordenada linear, e não angular. Desta forma, trabalha-se como se toda a folga radial estivesse em um plano, o plano θz . A geometria apresentada na Fig. 2.5 representa uma parte da folga “planificada” entre o pistão e o cilindro, e é usada na dedução da equação de Reynolds. Por conveniência, trabalha-se com o eixo polar r conforme mostrado na Fig. 2.5, ou seja, com sua origem na superfície inferior, que representa o pistão; a superfície superior representa o cilindro. Como o sistema $r\theta z$ está fixo no pistão, o cilindro tem uma velocidade V_p em relação a este sistema, conforme indicado na referida figura.

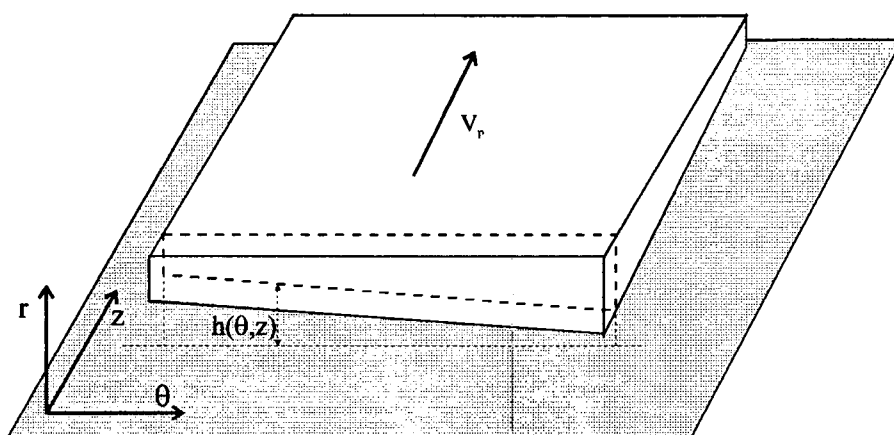


Fig. 2.5 - Geometria utilizada na dedução da equação de Reynolds

Utilizando-se as hipóteses simplificativas nas equações de Navier-Stokes para as direções θ e z , tem-se

$$\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (2.1)$$

onde

p - pressão no filme de óleo

μ - viscosidade do óleo

v, w - velocidades do escoamento de óleo nas direções θ e z , respectivamente.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Integrando-se as equações (2.1) na direção r ao longo da espessura do filme de óleo, ou seja, de 0 a $h(\theta, z)$, tem-se

$$v = \frac{1}{\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{r^2}{2} + c_1 r + c_2 \quad \text{e} \quad w = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{2} + c_3 r + c_4 \quad (2.2).$$

Como a superfície inferior está parada em relação ao sistema $r\theta z$, e a superior se move a uma velocidade V_p na direção z , tem-se como condições de contorno,

$$r = 0 \rightarrow v = w = 0 \quad \text{e} \quad r = h \rightarrow v = 0 \quad \text{e} \quad w = V_p \quad (2.3)$$

onde h é a espessura local do filme de óleo, conforme mostrado na Fig. 2.5. A velocidade V_p é obtida da cinemática do mecanismo biela-manivela, e sua expressão, dada pela equação (2.4), é obtida da forma apresentada no Apêndice A.

$$V_p = \omega \cdot C_{ME} \left\{ \cos \tau \cdot (C_{ME} \text{sen} \tau - d) [C_{MP}^2 - (C_{ME} \text{sen} \tau - d)^2]^{-1/2} - \text{sen} \tau \right\} \quad (2.4)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se

$$c_1 = -\frac{1}{\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{h}{2}; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = \frac{V_p}{h} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{h}{2} \quad \text{e} \quad c_4 = 0 \quad (2.5).$$

Substituindo os coeficientes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 das equações (2.5) nas equações (2.2), resulta em

$$v = \frac{1}{2\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} (r^2 - hr) \quad \text{e} \quad w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (r^2 - hr) + \frac{V_p}{h} r \quad (2.6).$$

A conservação da massa para um fluido incompressível requer que,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.7).$$

Integrando a equação anterior de 0 a h na direção r , resulta em

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{1}{R} \int_0^h \frac{\partial v}{\partial \theta} dr + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dr = 0 \quad (2.8).$$

Para o primeiro termo da equação (2.8), tem-se

$$\int_0^h \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} dr = \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0 \quad (2.9)$$

onde \mathbf{u}_0 é a velocidade na direção r junto à superfície inferior e \mathbf{u}_h junto à superior. Assim, baseando-se nas condições de contorno,

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_h = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$$

onde t é o tempo. Então, \mathbf{u}_h representa a velocidade com que a superfície superior se aproxima ou se afasta da inferior.

Como h é limite de integração e é função de θ e z , faz-se uso, na solução das integrais do segundo e do terceiro termo da equação (2.8), da Regra de Leibnitz para diferenciação de integrais (Sokolnikoff e Redheffer, 1966),

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} F(\alpha, \beta) d\beta = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{dF}{d\alpha} d\beta + F(\alpha, b) \frac{db}{d\alpha} - F(\alpha, a) \frac{da}{d\alpha}$$

Aplicando a regra anterior no caso em questão, tem-se, para o segundo termo da equação (2.8),

$$\frac{1}{R} \int_0^h \frac{\partial v}{\partial \theta} dr = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^h v dr \quad (2.10)$$

e, para o terceiro termo da mesma equação,

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dr = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dr - V_p \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.11).$$

Substituindo as equações (2.6) de v e w nas equações (2.10) e (2.11), levando as integrais resultantes juntamente com a equação (2.9) para a equação (2.8) e rearranjando alguns termos, obtém-se,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \int_0^h (r^2 - hr) dr \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \int_0^h (r^2 - hr) dr + \int_0^h \frac{V_p}{h} r dr \right] - V_p \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \quad (2.12).$$

Resolvendo as integrais e novamente rearranjando alguns termos, chega-se a

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -12\mu \left(\frac{V_p}{2} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (2.13)$$

que é uma forma geral da equação de Reynolds.

Fazendo agora, por simplicidade, $\xi = z/R$ e remanejando R^2 , tem-se

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = -12\mu R^2 \left(\frac{V_p}{2R} \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial t} \right)} \quad (2.14).$$

Tem-se assim, a equação de Reynolds para a folga entre o pistão e o cilindro, cujo domínio de solução, conforme mostrado na Fig. 2.6, se localiza no plano $\theta\xi$.

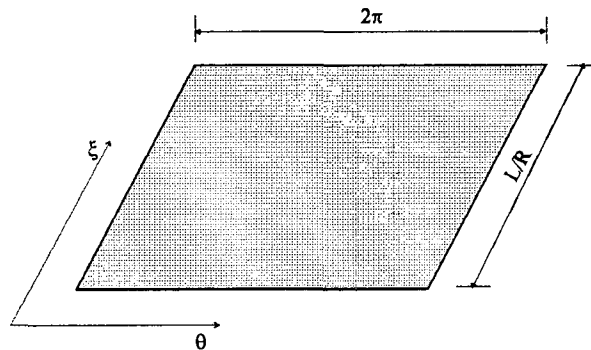


Fig. 2.6 - Domínio de solução da equação de Reynolds

As condições de contorno para solução da equação de Reynolds são baseadas nas pressões p_{cil} e p_{suc} nas extremidades superior e inferior do pistão, respectivamente. Tem-se, então, que para

$$\xi = 0 \rightarrow p = p_{cil}$$

e, para

$$\xi = \frac{L}{R} \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{suc}} .$$

Quanto à direção θ , nesta direção as condições de contorno são obtidas a partir da consideração de simetria em relação ao plano XZ , simetria que aparece neste caso em particular. Contudo, como esta simetria pode não acontecer em outras situações, optou-se por não se usar tal condição, e usou-se a condição $\mathbf{p}(\theta) = \mathbf{p}(\theta+2\pi)$.

A espessura do filme de óleo, h , é função de θ e ξ e pode ser obtida com boa aproximação através de relações trigonométricas. Observando a Fig. 2.7, tem-se que

$$h|_{\theta=0} = c + h_z|_{\theta=0} \quad (2.15)$$

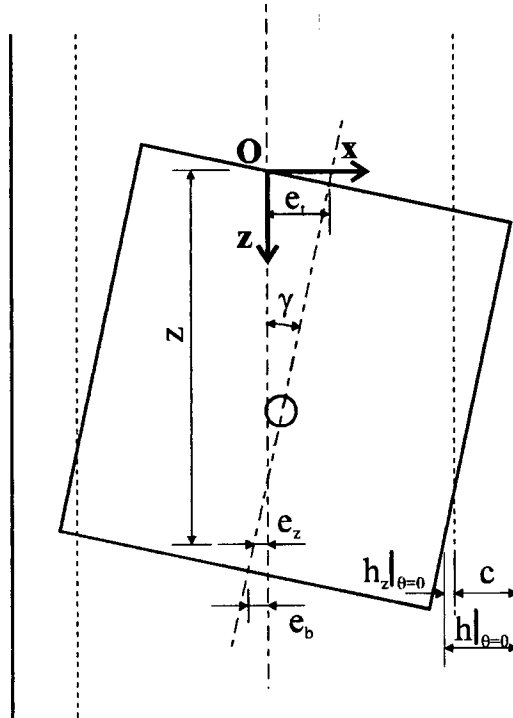


Fig. 2.7 - Plano xz , para dedução da espessura do filme de óleo

onde h_z é a diferença entre a espessura h e a folga c . Ainda,

$$\text{sen} \gamma = \frac{e_t - e_b}{L} = \frac{e_t - e_z}{z} \quad (2.16),$$

onde e_z é a excentricidade do ponto que se localiza a uma distância z do topo do pistão. Como

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

a inclinação dada por γ é muito pequena, pode-se considerar que $\mathbf{h}_z|_{\theta=0}$ e \mathbf{e}_z são iguais em módulo, mas com sinal invertido, porque quando \mathbf{e}_z é negativo, $\mathbf{h}_z|_{\theta=0}$ é positivo. Assim, usando a aproximação descrita, e explicitando \mathbf{e}_z da equação (2.16), resulta

$$\mathbf{h}_z|_{\theta=0} = -\mathbf{e}_z = (\mathbf{e}_t - \mathbf{e}_b) \frac{z}{L} - \mathbf{e}_t \quad (2.17).$$

O uso da equação (2.17) juntamente com a equação (2.15), fornece \mathbf{h} em função de z para a posição $\theta = 0$. Observando a Fig. 2.8, que representa um plano qualquer perpendicular ao eixo Z , nota-se que se pode fazer a seguinte aproximação, também adotada por Gommed e Etsion (1992),

$$\mathbf{h}_z = \mathbf{h}_z|_{\theta=0} \cos \theta \quad (2.18).$$

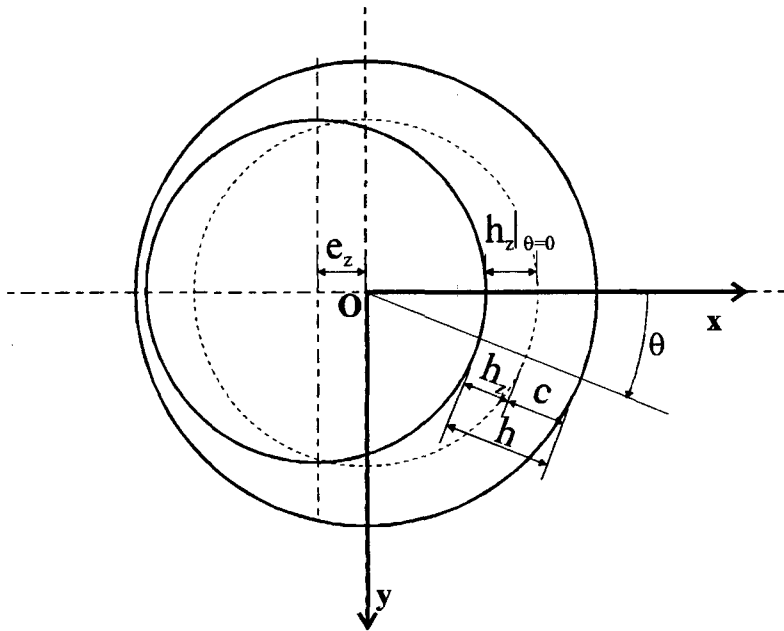


Fig 2.8 - Plano xy , para dedução da espessura do filme de óleo

Desta forma, sabendo que $\mathbf{h} = \mathbf{c} + \mathbf{h}_z$ e usando \mathbf{h}_z da equação (2.18), tem-se

$$\mathbf{h} = \mathbf{c} + \mathbf{h}_z|_{\theta=0} \cos \theta \quad (2.19)$$

que, com $\mathbf{h}_z|_{\theta=0}$ da equação (2.17) e um rearranjo nos termos, torna-se

$$h = c - \left[e_t - \frac{\xi R}{L} (e_t - e_b) \right] \cos \theta \quad (2.20)$$

lembrando que $\xi = z / R$. Esta expressão fornece a espessura do filme de óleo para qualquer posição, dados θ e ξ .

2.4.2 Equações da dinâmica

O diagrama de corpo livre do pistão é mostrado na Fig. 2.9, onde F_g é a força exercida pelo gás em compressão, F_{rx} e F_{rz} são as componentes da força de reação da biela, F_h é a força hidrodinâmica exercida pelo filme de óleo e F_f é a força de atrito viscoso também devida ao filme de óleo. Os momentos em relação ao pino, M_h e M_f , se originam respectivamente de F_h e F_f , e são denominados momento hidrodinâmico e momento de atrito.

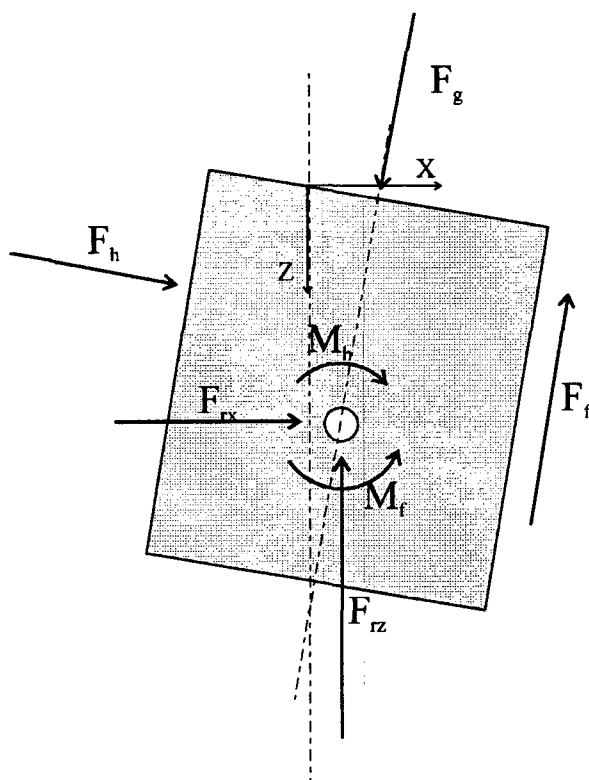


Fig. 2.9 - Diagrama de corpo livre do pistão

Considerando a aproximação 2, do item 2.3, que determina que todos os movimentos se dão no plano XZ , as equações que descrevem o movimento do pistão são,

$$\sum F_x = F_h + F_{rx} = m\ddot{e}_{CM} \quad (2.21)$$

$$\sum \mathbf{F}_Z = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_{rz} = \mathbf{m}\mathbf{A}_P \quad (2.22)$$

$$\sum \mathbf{M}_P = \mathbf{M}_h + \mathbf{M}_f = \mathbf{I}_P \ddot{\gamma} \quad (2.23)$$

onde

$\Sigma \mathbf{F}_X$ - somatório das forças na direção X

$\Sigma \mathbf{F}_Z$ - somatório das forças na direção Z

$\Sigma \mathbf{M}_P$ - somatório dos momentos em relação ao pino

\mathbf{m} - massa do pistão

\mathbf{I}_P - momento de inércia do pistão em relação ao pino

$\ddot{\mathbf{e}}_{CM}$ - aceleração do centro de massa do pistão

$\ddot{\gamma}$ - aceleração angular do pistão

\mathbf{A}_P - aceleração do pistão na direção Z.

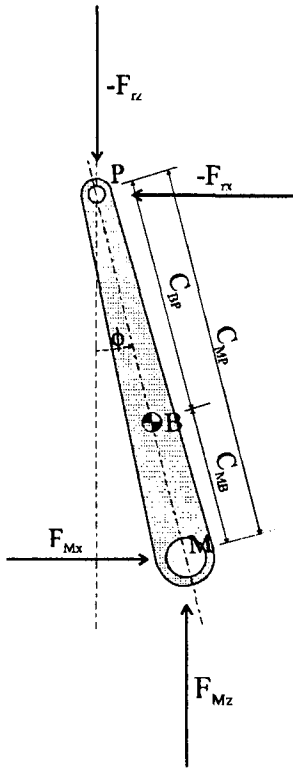
Considera-se que as forças \mathbf{F}_f e \mathbf{F}_g agem somente na direção Z, e a força \mathbf{F}_h somente na direção X, baseando-se no fato de que a inclinação γ é muito pequena. A força \mathbf{F}_g não causa momento em torno do pino, porque este está localizado no eixo do pistão. Para cálculo das componentes da força de reação da biela, \mathbf{F}_{rx} e \mathbf{F}_{rz} , deve-se fazer um diagrama de corpo livre também da biela, que é mostrado na Fig. 2.10. Assim procedendo, tem-se as seguintes equações para a dinâmica da biela,

$$\sum \mathbf{F}_X = \mathbf{F}_{Mx} - \mathbf{F}_{rx} = \mathbf{m}_b \mathbf{A}_{Bx} \quad (2.24)$$

$$\sum \mathbf{F}_Z = \mathbf{F}_{Mz} - \mathbf{F}_{rz} = \mathbf{m}_b \mathbf{A}_{Bz} \quad (2.25)$$

$$\sum \mathbf{M}_B = (\mathbf{F}_{rz} \mathbf{C}_{BP} + \mathbf{F}_{Mz} \mathbf{C}_{MB}) \text{sen} \phi - (\mathbf{F}_{Mx} \mathbf{C}_{MB} + \mathbf{F}_{rx} \mathbf{C}_{BP}) \text{cos} \phi = \mathbf{I}_B \ddot{\phi} \quad (2.26)$$

onde



F_{Mx} e F_{Mz} - componentes da força exercida pela manivela

m_b - massa da biela

A_{Bx} e A_{Bz} - componentes da aceleração do centro de massa (**B**) da biela

C_{BP} - distância entre **B** e o olhal menor

C_{MB} - distância entre **B** e o olhal maior

ϕ - ângulo de inclinação da biela em relação ao eixo **Z**

I_B - momento de inércia da biela em relação a **B**.

Fig. 2.10 - Diagrama de corpo livre da biela

2.4.2.1 Cálculo do ângulo de inclinação da biela

Observando a Fig. 2.1, tem-se que

$$\phi = \arcsen\left(\frac{C_{ME} \text{sen} \tau - d}{C_{MP}}\right) \quad (2.27).$$

Derivando a expressão acima duas vezes em relação ao tempo, e sabendo que $\tau = \omega t$, tem-se a seguinte expressão para a aceleração angular da biela,

$$\ddot{\phi} = -\frac{C_{ME}}{C_{MP} \cos \phi} \omega^2 \text{sen} \tau + \text{tg} \phi \cdot \dot{\phi}^2 \quad (2.28).$$

2.4.2.2 Cálculo das acelerações do pistão

A aceleração A_P do pistão na direção **Z**, e as componentes da aceleração do centro de massa da biela, A_{Bx} e A_{Bz} , são calculadas usando as equações da cinemática do mecanismo

biela-manivela. A expressão para cálculo de A_P , dada pela equação (2.29), é obtida da forma apresentada no Apêndice A, e as expressões de A_{Bx} e A_{Bz} , dadas pelas equações (2.30) e (2.31) respectivamente, são obtidas segundo apresentado no Apêndice B.

$$A_P = \omega^2 \cdot [C_{MP}^2 - (C_{ME} \text{sen} \tau - d)^2]^{-3/2} \cdot (C_{MB} \text{sen} \tau - d)^2 (C_{ME} \cos \tau)^2 + \\ + \omega^2 \cdot [C_{MP}^2 - (C_{ME} \text{sen} \tau - d)^2]^{-1/2} \cdot \\ \cdot [(C_{ME} \cos \tau)^2 - (C_{ME} \text{sen} \tau - d) \cdot C_{ME} \text{sen} \tau] - \omega^2 \cdot C_{MB} \cos \tau \quad (2.29)$$

$$A_{Bx} = -\omega^2 C_{ME} \text{sen} \tau - \ddot{\phi} \cdot C_{MB} \cos \phi + \dot{\phi}^2 C_{MB} \text{sen} \phi \quad (2.30)$$

$$A_{Bz} = -\omega^2 C_{ME} \cos \tau + \ddot{\phi} \cdot C_{MB} \text{sen} \phi + \dot{\phi}^2 C_{MB} \cos \phi \quad (2.31)$$

Quanto às acelerações radiais, por opção trabalha-se com aquelas do topo e da base do pistão, \ddot{e}_t e \ddot{e}_b , respectivamente, ao invés de se trabalhar com \ddot{e}_{CM} e $\ddot{\gamma}$. Para tanto, deve-se obter expressões para \ddot{e}_{CM} e $\ddot{\gamma}$ em função de \ddot{e}_t e \ddot{e}_b . Assim, observando a Fig. 2.11, tem-se

$$\text{sen} \gamma = \frac{e_t - e_b}{L} \quad (2.32)$$

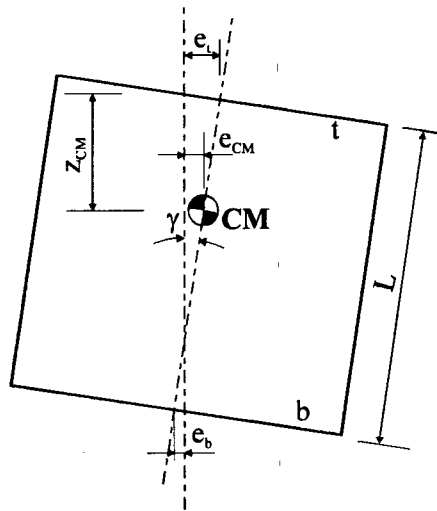


Fig. 2.11 - Geometria utilizada para a dedução de \ddot{e}_t e \ddot{e}_b .

Como γ é muito pequeno, adota-se a aproximação $\text{sen} \gamma = \gamma$. Assim, a equação (2.32) torna-se

$$\gamma = \frac{e_t - e_b}{L} \quad (2.33)$$

Derivando (2.33) duas vezes, tem-se

$$\ddot{\gamma} = \frac{\ddot{e}_t - \ddot{e}_b}{L} \quad (2.34)$$

Da mesma forma que na equação (2.33), tem-se que

$$\gamma = \frac{e_t - e_{CM}}{z_{CM}} \quad (2.35)$$

derivando (2.35) duas vezes e rearranjando os termos, resulta

$$\ddot{e}_{CM} = \ddot{e}_t - z_{CM} \ddot{\gamma} \quad (2.36)$$

obtem-se assim, das equações (2.34) e (2.36), as expressões de \ddot{e}_{CM} e $\ddot{\gamma}$ em função de \ddot{e}_t e \ddot{e}_b .

2.4.2.3 Cálculo das forças e momentos

A força hidrodinâmica, F_h , é exercida pelo filme de óleo. Seu cálculo é feito através da integração de todo o campo de pressão ao longo da folga radial, ou seja

$$F_h = - \int_0^L \int_0^{2\pi} p(\theta, z) R \cos \theta d\theta dz \quad (2.37)$$

onde $p(\theta, z)$ é a pressão no filme de óleo, que varia com a posição, e é obtida através da solução da equação de Reynolds. O sinal negativo aparece porque o cosseno é negativo para ângulos maiores que 90° , e é necessário para haver compatibilidade com o sistema de referência. O termo $\cos \theta$ aparece devido à aproximação 2 do item 2.3 – que diz que só há movimento no plano XZ – e faz a projeção de F_h sobre este plano.

O momento hidrodinâmico, M_h , é positivo se seu sentido for o horário. Assim, seu valor é obtido por,

$$M_h = - \int_0^L \int_0^{2\pi} [p(\theta, z) R \cos \theta] (z_p - z) d\theta dz \quad (2.38),$$

onde z_p é a posição do pino a partir do topo do pistão.

A força exercida pelo gás em compressão, F_g , é dada pela integração do campo de pressão no topo do pistão, considerando que este campo é uniforme em todo o topo. Portanto, a força F_g resultante tem sua linha de ação no eixo do pistão. Assim,

$$F_g = \pi R^2 (p_{cil} - p_{suc}) \quad (2.39).$$

Para a determinação da força de atrito viscoso, F_r , deve-se calcular a tensão de cisalhamento τ_{pis} na interface entre o pistão e o óleo. A tensão τ_{pis} age na direção axial, e as tensões de cisalhamento na direção circunferencial não são consideradas devido, novamente, à aproximação 2, do item 2.3. Assim, observando novamente a Fig. 2.5, tem-se

$$\tau_{pis} = \mu \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=h} \quad (2.40).$$

Derivando w , das equações (2.6), em $x = h$,

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=h} = \frac{h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{V_p}{h} \quad (2.41).$$

Usando as equações (2.40) e (2.41), chega-se a

$$\tau_{pis} = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{V_p}{h} \quad (2.42).$$

A equação anterior, quando integrada em toda a área da folga entre o pistão e o cilindro, resulta na expressão da força de atrito viscoso,

$$F_r = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{V_p}{h} \right) R d\theta dz \quad (2.43).$$

Aqui tem-se novamente um sinal negativo, porque a força de atrito tem seu sentido contrário à

velocidade V_p e ao gradiente de pressão $\partial p / \partial z$.

Quanto ao momento devido à força de atrito, deve-se levar em conta mais uma vez que os movimentos se dão no plano XZ . Assim, o braço da alavanca é obtido multiplicando o raio R por $\cos\theta$ para cada ângulo θ , obtendo-se

$$M_r = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{V_p}{h} \right) R \cos\theta \cdot R d\theta dz \quad (2.44).$$

Tem-se assim, expressões para os cálculos das forças F_h , F_f e F_g e dos momentos M_h e M_f . Restam agora, como incógnitas, as forças F_{rx} , F_{rz} , F_{Mx} e F_{Mz} , e as acelerações \ddot{e}_{CM} e $\ddot{\gamma}$. Estas incógnitas são determinadas usando as equações da dinâmica do pistão e da biela, equações (2.21)-(2.26). Este procedimento será descrito no próximo capítulo.

2.4.3 Cálculo da vazão de óleo através da folga radial

A vazão de óleo na direção Z por unidade de comprimento na direção circunferencial, q_z , na seção transversal localizada em $\xi = L/R$, pode ser obtida da integral do primeiro termo do lado direito da equação (2.11),

$$q_z = \int_0^h w dr$$

que, usando w das equações (2.6), e lembrando que $\xi = z/R$, torna-se

$$q_z = \frac{-h^3}{12\mu R} \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L/R} + V_p \frac{h}{2}$$

A vazão total Q é dada pela integração de q_z em toda a circunferência, da seguinte forma,

$$Q = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-h^3}{12\mu R} \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L/R} + V_p \frac{h}{2} \right) R d\theta \quad (2.45).$$

Esta é a vazão instantânea, já que V_p é função de τ . A vazão média em um ciclo, \bar{Q} , é dada

por uma integração desta equação em um ciclo completo, conforme a expressão abaixo,

$$\bar{Q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q \cdot d\tau \quad (2.46).$$

2.4.4 Cálculo da potência consumida por atrito viscoso na folga

A potência P é dada pelo produto entre a força de atrito viscoso, F_r , e a velocidade axial do pistão, V_P . Assim,

$$P = F_r \cdot V_P \quad (2.47)$$

onde F_r é dada pela equação (2.43). Da mesma forma que na vazão, a potência média consumida por atrito viscoso em um ciclo, \bar{P} , é calculada através da equação,

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P \cdot d\tau \quad (2.48).$$

2.4.5 Cálculo do torque e da potência no eixo da manivela

A solução das equações da dinâmica do pistão e da biela possibilita também o cálculo da força que a biela exerce na manivela. De posse desta força, pode-se calcular o torque e a potência no eixo da manivela. Deve-se lembrar que esta potência não é aquela fornecida pelo motor, porque este deve vencer ainda, por exemplo, o atrito nos mancais, que não são considerados neste trabalho.

A força que a manivela faz sobre a biela, F_M , pode ser decomposta nas direções X e Z . As componentes nestas direções são obtidas das equações (2.24) e (2.25),

$$F_{Mx} = m_b A_{Bx} + F_{rx} \quad (2.49)$$

$$F_{Mz} = m_b A_{Bz} + F_{rz} \quad (2.50).$$

Fazendo a decomposição destas duas forças numa direção tangente à trajetória da manivela,

tem-se a força tangencial F_t que age sobre a manivela,

$$F_t = F_{Mz} \operatorname{sen} \tau - F_{Mx} \operatorname{cos} \tau \quad (2.51),$$

em que a força positiva é aquela que gera um momento em torno do eixo da manivela no sentido horário. Assim, de posse da força tangencial, tem-se que o torque T é dado por,

$$T = F_t \cdot C_{ME} \quad (2.52)$$

e a potência no eixo, P_e , dada por

$$P_e = T \cdot \omega \quad (2.53).$$

Os valores médios de T e P_e podem ser obtidos de forma similar àquela usada na equação (2.46) para a vazão de óleo, e equação (2.48), para a potência consumida por atrito viscoso.

2.4.6 Cálculo do diagrama indicado

De posse do diagrama de pressão no cilindro (Fig. 2.2) e da variação do seu volume em função de τ , pode-se calcular o diagrama indicado, ou diagrama pv , onde v é o volume no interior do cilindro. O volume do cilindro em função de τ pode ser obtido multiplicando-se a posição do pistão em relação ao topo do cilindro pela área da seção transversal do pistão. A posição Z em função de τ é deduzida no Apêndice A, e dada pela equação (A.12). Assim, multiplicando Z da equação (A.12) pela área do pistão, tem-se

$$v = A \cdot C_{PMS} - A \left\{ \left[C_{MP}^2 - (C_{ME} \operatorname{sen} \tau - d)^2 \right]^{1/2} - C_{ME} \operatorname{cos} \tau \right\} + v_{\text{morto}} \quad (2.54)$$

onde

C_{PMS} - distância do ponto morto superior ao eixo da manivela

A - área do topo do pistão

v - volume do cilindro

V_{morto} - volume morto do compressor.

O trabalho do compressor sobre o gás, W , pode ser calculado através de uma integração do diagrama $p v$. Assim,

$$W = \oint p dv \quad (2.55).$$

A potência cedida ao gás em um ciclo, P_i , ou potência indicada, pode ser calculada então através da expressão,

$$P_i = \frac{W}{\Delta t} \quad (2.56)$$

onde Δt é o tempo gasto para a realização de um ciclo completo, e é dado por $2\pi/\omega$.

2.5 EQUAÇÕES DO MODELO NUMÉRICO

As equações da dinâmica do pistão e da biela, equações (2.21)-(2.26), podem ser reduzidas a apenas duas equações. Da equação (2.22), pode-se explicitar F_{rz} , e aplicar a expressão obtida na equação (2.25), chegando-se a

$$F_{Mz} = m_b A_{Bz} + mA_p - F_g - F_f \quad (2.57).$$

Escrevendo a equação (2.26) de outra forma, tem-se

$$F_{Mx} C_{MB} + F_{rx} C_{BP} = (F_{rz} C_{BP} + F_{Mz} C_{MB}) \cdot \operatorname{tg} \phi - \frac{I_B \ddot{\phi}}{\cos \phi} \quad (2.58).$$

Multiplicando a equação (2.24) por $(-C_{MB})$ e somando a expressão resultante com a equação (2.58) resulta, explicitando F_{rx} , em

$$F_{rx} = \frac{F_{rz} C_{BP} + F_{Mz} C_{MB}}{C_{MB} + C_{BP}} \operatorname{tg} \phi - \frac{C_{MB}}{C_{MB} + C_{BP}} m_b A_{Bx} - \frac{I_B \ddot{\phi}}{(C_{MB} + C_{BP}) \cos \phi} \quad (2.59).$$

onde F_{rz} é obtida da equação (2.22) e F_{Mz} da equação (2.57). O ângulo entre a biela e o eixo do cilindro, ϕ , e a aceleração angular $\ddot{\phi}$, são dados pelas equações (2.27) e (2.28),

respectivamente.

Das equações (2.34) e (2.36), tem-se $\ddot{\mathbf{e}}_{CM}$ e $\ddot{\gamma}$ em função de $\ddot{\mathbf{e}}_t$ e $\ddot{\mathbf{e}}_b$. Fazendo uso destas expressões nas equações (2.21) e (2.23), chega-se a

$$\mathbf{F}_h + \mathbf{F}_{rx} = m \left(\ddot{\mathbf{e}}_t - z_{CM} \frac{\ddot{\mathbf{e}}_t - \ddot{\mathbf{e}}_b}{L} \right) \quad (2.60)$$

$$\mathbf{M}_h + \mathbf{M}_r = I_P \frac{\ddot{\mathbf{e}}_t - \ddot{\mathbf{e}}_b}{L} \quad (2.61)$$

Por simplicidade, faz-se $\varepsilon_t = \mathbf{e}_t/c$ e $\varepsilon_b = \mathbf{e}_b/c$, e obtém-se as relações de excentricidade ε_t e ε_b que, por comodidade, serão chamadas simplesmente de excentricidades do topo e da base. Também por simplicidade, as velocidades e acelerações $\dot{\varepsilon}_i$ e $\ddot{\varepsilon}_i$ – onde i pode ser t ou b – são obtidas de derivadas em relação a τ , e não em relação a t , sendo que $d\tau = \omega dt$. Assim,

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{d\varepsilon_i}{d\tau} \quad e \quad \ddot{\varepsilon}_i = \frac{d^2\varepsilon_i}{d\tau^2} \quad (2.62)$$

Baseando-se na segunda das equações (2.62), tem-se que as acelerações que aparecem nas equações (2.60) e (2.61) são dadas por

$$\ddot{\mathbf{e}}_t = c\omega^2 \ddot{\varepsilon}_t \quad e \quad \ddot{\mathbf{e}}_b = c\omega^2 \ddot{\varepsilon}_b \quad (2.63)$$

Desta forma, usando as simplificações acima nas equações (2.60) e (2.61) através das equações (2.63), tem-se, após se rearranjar alguns termos,

$$\boxed{\mathbf{F}_h + \mathbf{F}_{rx} = mc\omega^2 \left(\ddot{\varepsilon}_t - z_{CM} \frac{\ddot{\varepsilon}_t - \ddot{\varepsilon}_b}{L} \right)} \quad (2.64)$$

$$\boxed{\mathbf{M}_h + \mathbf{M}_r = I_P c\omega^2 \frac{\ddot{\varepsilon}_t - \ddot{\varepsilon}_b}{L}} \quad (2.65)$$

Tem-se assim as equações da dinâmica do pistão reduzidas a duas equações diferenciais, em que as forças e momentos \mathbf{F}_h , \mathbf{F}_{rx} , \mathbf{M}_h e \mathbf{M}_r são dados pelas equações (2.37),

(2.59), (2.38) e (2.44), respectivamente.

A solução do problema consiste, de uma forma geral, em se resolver as equações (2.64) e (2.65), encontrando a posição e a velocidade do pistão em função do ângulo de manivela. Como tais equações não têm solução analítica, adota-se uma solução numérica via método de Newton-Raphson, cujo procedimento será descrito no capítulo seguinte.

Capítulo 3

METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO

As equações do modelo numérico, equações (2.64) e (2.65), juntamente com as equações das forças e dos momentos, constituem um problema de valor inicial para equações diferenciais não-lineares de segunda ordem em ϵ_t e ϵ_b . Basicamente, o que se faz em cada passo de tempo, através de um programa computacional, é usar os valores de ϵ_t , ϵ_b , $\dot{\epsilon}_t$ e $\dot{\epsilon}_b$ do ângulo τ anterior (tempo anterior) como valores iniciais no tempo corrente, utilizando-se então uma formulação implícita na solução do problema.

O uso de uma formulação explícita, mais simples, e com menor tempo computacional, foi tentado mas não se obteve sucesso. A idéia consistia em se calcular as acelerações $\ddot{\epsilon}_t$ e $\ddot{\epsilon}_b$ utilizando as equações (2.64)-(2.65) e, com um avanço do ângulo de manivela $\Delta\tau$, calculava-se numericamente $\dot{\epsilon}_t$ e $\dot{\epsilon}_b$ e, em seguida, ϵ_t e ϵ_b . Contudo, não se obteve convergência devido à alta instabilidade do pistão e à magnitude das acelerações $\ddot{\epsilon}_t$ e $\ddot{\epsilon}_b$, o que requereria passos de ângulo $\Delta\tau$ muito pequenos. A convergência foi conseguida, então, com o uso de uma formulação implícita, cujo procedimento será descrito nas seções seguintes.

Tendo em vista que o PMI fica muito próximo do ângulo $\tau = 0^\circ$ (ou $\tau = 360^\circ$), com o objetivo de simplificar a explanação da Metodologia de Solução, entenda-se $\tau = 0^\circ$ onde se diz PMI.

3.2 OBTENÇÃO DO CAMPO DE PRESSÃO

3.2.1 Método dos volumes finitos

Para que se possa calcular as forças e momentos hidrodinâmicos e de atrito em cada posição do ângulo de manivela, deve-se primeiramente calcular o campo de pressão devido ao filme de óleo, que age em torno do cilindro para esta posição. Tal campo de pressão é obtido pela solução da equação de Reynolds, equação (2.14), através do método dos volumes finitos (Prata, 1992). Basicamente, o que se faz é uma discretização do domínio de solução – a folga “planificada” que é mostrada na Fig. 2.6 – dividindo-o em pequenos volumes de controle. Assim, a configuração do domínio de solução discretizado fica como mostrado na Fig. 3.1,

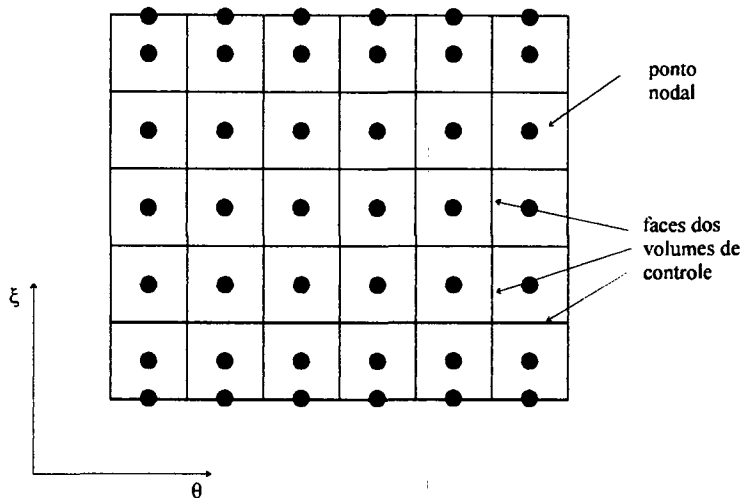


Fig. 3.1 - Discretização do domínio de solução

com pontos nodais nos extremos inferior e superior do pistão, que facilitam a utilização das condições de contorno, que são $p = p_{cil}$ em $\xi = 0$, e $p = p_{suc}$ em $\xi = L/R$.

Considera-se agora um volume de controle genérico no domínio, conforme mostrado na Fig. 3.2. Integrando a equação (2.14) ao longo do volume de controle da Fig. 3.2, tem-se

$$\int_s^e \int_w^c \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta d\xi + \int_s^e \int_w^c \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) d\theta d\xi = - \int_s^e \int_w^c 12\mu R^2 \left(\frac{V_p}{2R} \frac{\partial h}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial t} \right) d\theta d\xi \quad (3.1),$$

onde os limites n , s , e e w representam as faces do volume de controle. A partir da equação (2.20), usando ε_t e ε_b ao invés de e_t e e_b , pode-se escrever,

$$h = c \left\{ 1 - \left[\varepsilon_t - (\varepsilon_t - \varepsilon_b) \xi \frac{R}{L} \right] \cos \theta \right\} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = c(\varepsilon_t - \varepsilon_b) \frac{R}{L} \cos \theta \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c\omega \left[(\dot{\varepsilon}_t - \dot{\varepsilon}_b) \frac{R}{L} \xi - \dot{\varepsilon}_t \right] \cos \theta \quad (3.4)$$

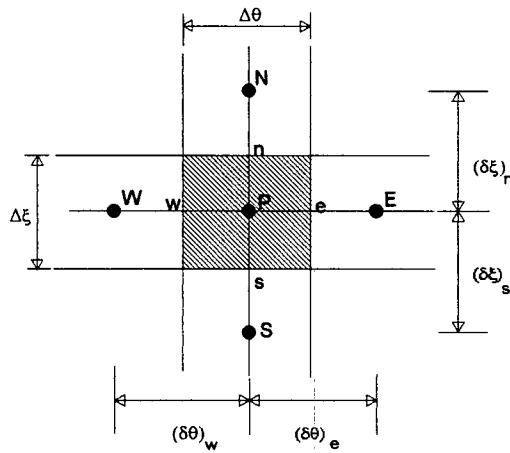


Fig. 3.2 - Volume de controle típico

Voltando à equação (3.1) e usando a expressão obtida da equação (3.3), resulta, após integrar-se os três termos,

$$\left[\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_e - \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_w \right] \Delta \xi + \left[\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_n - \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_s \right] \Delta \theta = \quad (3.5)$$

$$- 12\mu R^2 \left[\frac{-V_p}{2} \frac{c(\varepsilon_b - \varepsilon_t)}{L} (\sin \theta_e - \sin \theta_w) \Delta \xi - \frac{\partial h}{\partial t} \Delta \theta \Delta \xi \right]$$

As derivadas nas faces são aproximadas linearmente da seguinte forma,

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_e = \frac{p_E - p_P}{(\delta \theta)_e}, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_w = \frac{p_P - p_W}{(\delta \theta)_w} \quad (3.6a), (3.6b),$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_n = \frac{p_N - p_P}{(\delta \xi)_n} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_s = \frac{p_P - p_S}{(\delta \xi)_s} \quad (3.6c), (3.6d).$$

Substituindo as expressões dadas pelas equações (3.6) na equação (3.5) resulta, após alguns arranjos, em

$$a_p p_P = a_n p_N + a_s p_S + a_e p_E + a_w p_W + S \quad (3.7)$$

onde

$$a_n = h_n^3 \frac{\Delta \theta}{(\delta \xi)_n}, \quad a_s = h_s^3 \frac{\Delta \theta}{(\delta \xi)_s} \quad (3.8a), (3.8b),$$

$$a_e = h_e^3 \frac{\Delta \xi}{(\delta \theta)_e}, \quad a_w = h_w^3 \frac{\Delta \xi}{(\delta \theta)_w} \quad (3.8c), (3.8d),$$

$$a_p = a_n + a_s + a_e + a_w \quad (3.8e),$$

$$S = -12\mu R^2 \left[\frac{V_p}{2} \frac{c(\epsilon_b - \epsilon_t)}{L} (\text{sen}\theta_e - \text{sen}\theta_w) \Delta \xi + \frac{\partial h}{\partial t} \Delta \theta \Delta \xi \right] \quad (3.8f).$$

Os h_i das faces – onde i pode ser e , w , n ou s – são calculados da equação (3.2), usando θ e ξ das faces correspondentes. A velocidade $\partial h / \partial t$ é calculada através da equação (3.4).

A equação (3.7) é uma forma padrão de se escrever a equação discretizada. A pressão no ponto nodal P da Fig. 3.2 é escrita em função das pressões nos pontos nodais vizinhos. Cada ponto nodal tem uma equação como esta, e obtém-se assim um sistema de n equações e n incógnitas, onde n é o número de pontos nodais. Este sistema deve ser resolvido para que o campo de pressão na folga radial seja determinado.

Dentre os diversos algoritmos para solução de sistemas lineares, optou-se pelo algoritmo TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) para a direção axial, e CTDMA, ou TDMA circular, para a direção circunferencial. Para maiores detalhes sobre o uso destes métodos, ver Patankar (1980) para uma descrição do TDMA, e Patankar et al. (1977) para o CTDMA.

3.2.2 Cavitação do filme de óleo

Em algumas situações, sobretudo quando a parede do pistão e a parede do cilindro formam uma cunha divergente, a solução da equação de Reynolds descrita acima leva a valores de pressão extremamente baixos, podendo chegar a valores negativos.

Contudo, sabe-se que na realidade o óleo não suporta pressões negativas, passando então a escoar em estrias. As estrias aparecem porque o gás em compressão entra na folga e equilibra a pressão com a pressão externa. Baseando-se nesta consideração, pode-se dizer que a pressão do óleo não pode ser menor que a pressão do gás em qualquer ponto da folga, se esta fosse preenchida pelo gás. Esta pressão do gás na folga é dada por uma variação linear da pressão p_{cil} no topo do pistão à pressão p_{suc} na sua base.

Computacionalmente, calcula-se a variação linear da pressão na folga, de p_{cil} a p_{suc} , e denomina-se tal campo de pressão de **campo de pressão de cavitação**. Após a solução da equação de Reynolds, se a pressão em algum ponto for menor que a pressão de cavitação correspondente, assume-se que a pressão neste ponto é igual à pressão de cavitação.

Esta forma de tratamento para a cavitação do filme de óleo é uma simplificação que evita o uso de formulações mais complexas. Para maiores informações a respeito da cavitação, ver Santos (1995).

3.3 CÁLCULO DAS FORÇAS E MOMENTOS

De posse do campo de pressão discretizado, para uma dada posição do ângulo de manivela, pode-se calcular as forças e momentos hidrodinâmicos e de atrito, e as demais forças que aparecem nas equações (2.64) e (2.65).

3.3.1 Força hidrodinâmica

Analiticamente, F_h é dada pela equação (2.37). Computacionalmente, faz-se uma integração numérica através de somatórios. Assim,

$$F_h = - \sum_{j=2}^{n_j-1} \left(\sum_{i=1}^{n_i} p_{i,j} R^2 \cos \theta_i \Delta \theta \right) \Delta \xi \quad (3.9)$$

onde

n_i - número de pontos nodais na direção θ , definido na discretização do domínio de solução mostrado na Fig. 3.1;

n_j - número de pontos nodais na direção ξ ;

$p_{i,j}$ - matriz que representa o campo de pressão.

Observe-se que, na direção ξ , o contador j varia de 2 a $n_j - 1$. Isto ocorre porque, como se mostra na Fig. 3.1, na discretização da direção ξ os pontos de fronteira não têm seu volume de controle correspondente, sendo usados apenas para aplicação das condições de contorno.

3.3.2 Momento hidrodinâmico

De forma similar à do item anterior, a partir da equação (2.38), M_h pode ser calculado pela seguinte expressão,

$$M_h = - \sum_{j=2}^{n_j-1} \left[\sum_{i=1}^{n_i} p_{i,j} R^2 \cos \theta_i (z_p - z) \Delta \theta \right] \Delta \xi \quad (3.10)$$

3.3.3 Força de atrito viscoso

Deve-se calcular primeiramente a espessura do filme de óleo. Pela equação (3.2), tem-se

$$h_{i,j} = c \left\{ 1 - \left[\epsilon_t - (\epsilon_t - \epsilon_b) \xi_j \frac{R}{L} \right] \cos \theta_i \right\} \quad (3.11)$$

onde $h_{i,j}$ é o valor de h no ponto nodal i,j . Para o cálculo de F_r parte-se da equação (2.43), onde aparece o gradiente $\partial p / \partial z$. Como $\xi = z/R$, pode-se escrever,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \xi} \quad (3.12).$$

Usando o campo de pressão discretizado, calcula-se a derivada $\partial p/\partial \xi$ através de uma derivação numérica ascendente,

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{i,j} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\xi_{j+1} - \xi_j} \quad (3.13)$$

onde $\left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{i,j}$ é o gradiente no ponto nodal i,j .

Então, usando as equações (3.11) e (3.13), pode-se escrever a expressão para cálculo de F_r numericamente,

$$F_r = - \sum_{j=2}^{n_j-1} \left[\sum_{i=1}^{n_i} \left(\frac{h_{i,j}}{2R} \left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{i,j} + \mu \frac{V_p}{h_{i,j}} \right) R^2 \Delta \theta \right] \Delta \xi \quad (3.14).$$

3.3.4 Momento de atrito

Utilizando as equações (3.11) e (3.13) e a equação (2.44), tem-se

$$M_r = - \sum_{j=2}^{n_j-1} \left[\sum_{i=1}^{n_i} \left(\frac{h_{i,j}}{2R} \left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{i,j} + \mu \frac{V_p}{h_{i,j}} \right) R \cos \theta_i \cdot R^2 \Delta \theta \right] \Delta \xi \quad (3.15).$$

3.4 CÁLCULO DA VAZÃO DE ÓLEO

O cálculo da vazão de óleo através da folga – na seção transversal localizada em $\xi = L/R$ – para uma dada posição τ é feito, analiticamente, através da equação (2.45). Numericamente, usa-se a seguinte expressão,

$$Q = \sum_{i=1}^{n_i} \left(\frac{-h_{i,j}^3}{12\mu R} \left. \frac{\partial p}{\partial \xi} \right|_{i,j} + V_p \frac{h_{i,j}}{2} \right) R \Delta \theta \quad (3.16)$$

3.5 PROCEDIMENTO PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA DINÂMICA DO PISTÃO

A solução do problema da dinâmica do pistão consiste, basicamente, em se resolver as equações diferenciais (2.64) e (2.65), encontrando a posição e a velocidade do pistão em função do ângulo de manivela.

Dentre os métodos que podem ser usados para solução de tais equações diferenciais, optou-se pelo método de Newton-Raphson, por ter sido utilizado com sucesso em alguns trabalhos anteriores, como por exemplo por Li et al. (1983) e Zhu et al. (1992, 1993). Outro método que poderia ser usado, dentre outros, é o método de Runge-Kutta (Prata, 1992).

A solução começa com a escolha de valores iniciais para as variáveis ε_t , ε_b , $\dot{\varepsilon}_t$ e $\dot{\varepsilon}_b$. A solução final convergida da trajetória do pistão é periódica e independe das condições iniciais. Por simplicidade, entretanto, inicia-se no ponto morto inferior, em $\tau = 0$, com $\varepsilon_t = \varepsilon_b = \dot{\varepsilon}_t = \dot{\varepsilon}_b = 0$ e um campo de pressão axissimétrico cujo perfil é uma variação linear da pressão de p_{cil} a p_{suc} .

Após a escolha dos valores iniciais, como a formulação utilizada é implícita, avança-se o ângulo de manivela de um valor $\Delta\tau$. A magnitude de $\Delta\tau$ utilizada varia, neste trabalho, de 5° ou 10° de giro do ângulo de manivela. Nada impede que se usem avanços menores, contudo obtiveram-se bons resultados aliados a tempos computacionais satisfatórios usando estes valores de $\Delta\tau$. Já o uso de avanços maiores do que 10° causa problemas de convergência em alguns casos.

Com o avanço $\Delta\tau$, calcula-se a velocidade e a aceleração do pistão na direção Z , através das equações (2.4) e (2.29), e as acelerações da biela, através das equações (2.30) e (2.31). Atualiza-se também o campo de pressão de cavitação para a posição $\tau + \Delta\tau$ e, ainda, o valor de p_{cil} , que varia com τ conforme a curva típica mostrada na Fig. 2.2.

Desta forma, já se tem algumas informações sobre o pistão no ângulo (ou tempo) $\tau + \Delta\tau$, contudo a posição e a velocidade na direção radial não foram ainda determinadas. Para tanto, inicia-se um processo iterativo que faz uso dos valores das variáveis ε_t , ε_b , $\dot{\varepsilon}_t$ e $\dot{\varepsilon}_b$ obtidos do tempo anterior. Assim, para se iniciar o cálculo da posição e da velocidade no

ângulo τ , faz-se

$$\varepsilon_i^{\tau+\Delta\tau} = \varepsilon_i^\tau \quad \text{e} \quad \dot{\varepsilon}_i^{\tau+\Delta\tau} = \dot{\varepsilon}_i^\tau,$$

onde o sobrescrito τ indica tempo corrente, e $\tau + \Delta\tau$ o tempo após o avanço do ângulo de manivela. O subscrito i pode ser t ou b .

O próximo passo na solução é calcular as forças e momentos que aparecem nas equações (2.64) e (2.65), usando os valores mais recentes das acelerações e velocidades calculadas das equações da cinemática, e os valores de $\varepsilon_t^{\tau+\Delta\tau}$, $\varepsilon_b^{\tau+\Delta\tau}$, $\dot{\varepsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\varepsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}$, estimados como sendo iguais àqueles do tempo anterior.

Para o cálculo da força hidrodinâmica, F_h , resolve-se primeiro a equação de Reynolds da forma mostrada no item 3.2 e obtém-se assim o campo de pressão. Tal campo não é ainda o correto, pois usa-se na equação de Reynolds os valores de $\varepsilon_i^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\varepsilon}_i^{\tau+\Delta\tau}$ estimados. Com o campo de pressão, calcula-se $F_h^{\tau+\Delta\tau}$ através da equação (3.9).

A força de reação da biela na direção X , F_{rx} , é calculada então a partir da equação (2.59). No cálculo desta força aparecem a força de atrito F_f , e a força exercida pelo gás em compressão, F_g . A força F_f usa o campo de pressão obtido acima, e F_g usa a pressão p_{cil} . Deve-se notar que F_g já tem seu valor correto, uma vez que esta depende apenas do ângulo de manivela. Desta forma, tem-se uma primeira estimativa para $F_{rx}^{\tau+\Delta\tau}$.

O momento hidrodinâmico M_h , é calculado com a equação (3.10), de forma similar àquela usada no cálculo de F_h . O momento de atrito M_f , assim como F_f , usa o campo de pressão e é obtido da equação (3.15).

Sabendo que as forças e momentos são funções de $\dot{\varepsilon}_t$ e $\dot{\varepsilon}_b$ e, conseqüentemente, de ε_t e ε_b , pode-se reescrever as equações (2.64) e (2.65) para o tempo $\tau + \Delta\tau$ da seguinte forma,

$$\mathbf{R}_1(\dot{\varepsilon}_t, \dot{\varepsilon}_b) = \mathbf{F}_h(\dot{\varepsilon}_t, \dot{\varepsilon}_b)^{\tau+\Delta\tau} + \mathbf{F}_{rx}(\dot{\varepsilon}_t, \dot{\varepsilon}_b)^{\tau+\Delta\tau} - m\omega^2 \left(\ddot{\varepsilon}_t^{\tau+\Delta\tau} - z_{CM} \frac{\ddot{\varepsilon}_t^{\tau+\Delta\tau} - \ddot{\varepsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}}{L} \right) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{R}_2(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b) = \mathbf{M}_h(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b)^{\tau+\Delta\tau} + \mathbf{M}_r(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b)^{\tau+\Delta\tau} - \mathbf{I}_p c \omega^2 \frac{\ddot{\epsilon}_t^{\tau+\Delta\tau} - \ddot{\epsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}}{L} \quad (3.18)$$

onde \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 são os **resíduos**, que deverão ser zerados para se obter a solução convergida das equações. As acelerações $\ddot{\epsilon}_i^{\tau+\Delta\tau}$ podem ser calculadas numericamente da seguinte forma,

$$\ddot{\epsilon}_t^{\tau+\Delta\tau} = \frac{\dot{\epsilon}_t^{\tau+\Delta\tau} - \dot{\epsilon}_t^{\tau}}{\Delta\tau} \quad (3.19)$$

$$\ddot{\epsilon}_b^{\tau+\Delta\tau} = \frac{\dot{\epsilon}_b^{\tau+\Delta\tau} - \dot{\epsilon}_b^{\tau}}{\Delta\tau} \quad (3.20)$$

Associando as equações (3.17) e (3.18) com (3.19) e (3.20), tem-se um sistema de duas equações – equações (3.17) e (3.18) – e duas incógnitas – $\dot{\epsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\epsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}$. A solução deste sistema consiste em se encontrar os valores de $\dot{\epsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\epsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}$ que, usados no cálculo das forças e momentos, produzam \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 nulos. Isto é feito através do método de Newton-Raphson conforme discutido na próxima seção.

Método de Newton-Raphson

Para uso do método de Newton-Raphson (Stoecker, 1989), as correções $\Delta\dot{\epsilon}_t$ e $\Delta\dot{\epsilon}_b$ são calculadas a partir da seguinte equação,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \dot{\epsilon}_t} & \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \dot{\epsilon}_b} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \dot{\epsilon}_t} & \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \dot{\epsilon}_b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\dot{\epsilon}_t \\ \Delta\dot{\epsilon}_b \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

onde \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 , que se quer fazer iguais a zero, são obtidos das equações (3.17) e (3.18). As derivadas parciais que aparecem na equação (3.21), são calculadas através de uma derivação numérica, dando-se um acréscimo $\delta\dot{\epsilon}_i$ – onde i pode ser t ou b – à variável independente, ou seja,

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \dot{\epsilon}_t} = \frac{\mathbf{R}_1(\dot{\epsilon}_t + \delta\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b) - \mathbf{R}_1(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b)}{\delta\dot{\epsilon}_t} \quad (3.22a)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{\epsilon}_b} = \frac{R_1(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b + \delta \dot{\epsilon}_b) - R_1(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b)}{\delta \dot{\epsilon}_b} \quad (3.22b)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\epsilon}_t} = \frac{R_2(\dot{\epsilon}_t + \delta \dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b) - R_2(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b)}{\delta \dot{\epsilon}_t} \quad (3.22c)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\epsilon}_b} = \frac{R_2(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b + \delta \dot{\epsilon}_b) - R_2(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b)}{\delta \dot{\epsilon}_b} \quad (3.22d)$$

Para se calcular os resíduos $R_1(\dot{\epsilon}_t + \delta \dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b)$, $R_1(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b + \delta \dot{\epsilon}_b)$, $R_2(\dot{\epsilon}_t + \delta \dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b)$ e $R_2(\dot{\epsilon}_t, \dot{\epsilon}_b + \delta \dot{\epsilon}_b)$, deve-se fazer o acréscimo $\delta \dot{\epsilon}_i$ em $\dot{\epsilon}_t$ ou $\dot{\epsilon}_b$ (conforme o caso), calcular novamente o campo de pressão, e, em seguida, as forças e momentos para cada um dos quatro resíduos. Com as forças e momentos em função do acréscimo, usam-se as equações (3.17) e (3.18) para o cálculo dos resíduos.

A magnitude do acréscimo $\delta \dot{\epsilon}_i$ varia com τ durante o processo iterativo. Neste trabalho, após várias tentativas, encontrou-se um valor fixo para $\delta \dot{\epsilon}_i$ para ser usado quando o pistão não está nem no ponto morto inferior (PMI) nem no ponto morto superior (PMS). Para estes dois pontos críticos o programa computacional faz uma procura do valor ideal de $\delta \dot{\epsilon}_i$, partindo do seu último valor disponível, até conseguir a convergência da forma que será descrita a seguir. Este procedimento se faz necessário porque, usando acréscimos $\delta \dot{\epsilon}_i$ muito pequenos, não há mudanças sensíveis nos resíduos em função destes acréscimos; e usando valores de $\delta \dot{\epsilon}_i$ elevados, perde-se em precisão e o problema pode não convergir. Alguns valores típicos para $\delta \dot{\epsilon}_i$ serão mostrados posteriormente.

De posse das derivadas e dos resíduos, resolve-se o sistema linear dado por (3.21) encontrando-se $\Delta \dot{\epsilon}_t$ e $\Delta \dot{\epsilon}_b$. A seguir, faz-se a correção de $\dot{\epsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\epsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}$ através das equações abaixo,

$$\left(\dot{\epsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}\right)_{\text{novo}} = \left(\dot{\epsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}\right)_{\text{velho}} - \Delta \dot{\epsilon}_t \quad (3.23a)$$

$$\left(\dot{\epsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}\right)_{\text{novo}} = \left(\dot{\epsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}\right)_{\text{velho}} - \Delta \dot{\epsilon}_b \quad (3.23b),$$

onde os subscritos “novo” e “velho” não estão relacionados nem com o tempo e nem com o ângulo de manivela, e sim com o passo iterativo no método de Newton-Raphson para a posição do ângulo de manivela que estiver sendo resolvida.

Assim, tem-se novos valores para $\dot{\varepsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\varepsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}$. Pode-se agora calcular $\varepsilon_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\varepsilon_b^{\tau+\Delta\tau}$, através das expressões abaixo,

$$\varepsilon_t^{\tau+\Delta\tau} = \varepsilon_t^{\tau} + \dot{\varepsilon}_t^{\tau+\Delta\tau} \cdot \Delta\tau \quad (3.24a)$$

$$\varepsilon_b^{\tau+\Delta\tau} = \varepsilon_b^{\tau} + \dot{\varepsilon}_b^{\tau+\Delta\tau} \cdot \Delta\tau \quad (3.24b)$$

Com os novos valores de $\varepsilon_t^{\tau+\Delta\tau}$, $\varepsilon_b^{\tau+\Delta\tau}$, $\dot{\varepsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\varepsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}$ calcula-se novamente o campo de pressão, as forças e os momentos, conforme descrito anteriormente, e usam-se tais valores nas equações (3.17) e (3.18). Se os resíduos \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 não forem suficientemente pequenos, parte-se novamente para o cálculo das derivadas parciais e mais um passo iterativo no método de Newton-Raphson. Caso contrário – se a convergência já foi atingida – avança-se novamente o ângulo de manivela e começa-se um novo processo iterativo, para o novo valor de τ .

Sumarizando, o procedimento computacional parte de valores iniciais para a posição e a velocidade radial do pistão. Em seguida, avança-se o ângulo de manivela, e usando a posição e a velocidade radial disponível calcula-se o campo de pressão, as forças e os momentos. Estas forças e momentos são usados nas equações (3.17) e (3.18) para cálculo dos resíduos e estes nas equações (3.22) para cálculo das derivadas. De posse das derivadas, resolve-se o sistema linear dado por (3.21) e obtém-se as correções $\Delta\dot{\varepsilon}_t$ e $\Delta\dot{\varepsilon}_b$. Faz-se a correção de $\dot{\varepsilon}_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\varepsilon}_b^{\tau+\Delta\tau}$ usando as equações (3.23), e de $\varepsilon_t^{\tau+\Delta\tau}$ e $\varepsilon_b^{\tau+\Delta\tau}$ usando as equações (3.24). Com estes novos valores da posição e da velocidade, calcula-se novamente o campo de pressão, as forças e momentos, e em seguida os resíduos. Caso estes não sejam suficientemente pequenos, parte-se para o cálculo das derivadas das equações (3.22) e faz-se nova correção até que os resíduos sejam menores que uma tolerância prescrita, cujos valores mais típicos serão mostrados adiante. Tendo atingido esta tolerância, faz-se um novo avanço

no ângulo de manivela.

Este procedimento é repetido até que a posição e a velocidade radial do pistão no PMI não mudem mais, atingindo-se assim a convergência periódica de todo o ciclo.

Algoritmo de solução

Nesta parte apresenta-se um algoritmo que resume os passos para solução do problema descritos anteriormente.

1. Atribuir valores iniciais às variáveis $\varepsilon_t^\tau, \varepsilon_b^\tau, \dot{\varepsilon}_t^\tau$ e $\dot{\varepsilon}_b^\tau$, em $\tau = 0$.
 2. Avançar o ângulo de manivela com um acréscimo $\Delta\tau$, e calcular:
 - a velocidade e a aceleração do pistão na direção **Z** (equações (2.4) e (2.29));
 - as acelerações da biela (equações (2.30) e (2.31));
 - o valor de p_{cil} , função de τ ;
 - o campo de pressão de cavitação (seção 3.2.2);
 - a força exercida pelo gás em compressão (equação (2.39)).
 3. Fazer $\varepsilon_i^{\tau+\Delta\tau} = \varepsilon_i^\tau$ e $\dot{\varepsilon}_i^{\tau+\Delta\tau} = \dot{\varepsilon}_i^\tau$, para se iniciar o processo iterativo.
 4. Com $\varepsilon_i^{\tau+\Delta\tau}$ e $\dot{\varepsilon}_i^{\tau+\Delta\tau}$, calcular:
 - o campo de pressão, que no caso de em algum ponto a pressão ser menor que a pressão de cavitação, é corrigido usando o campo de pressão de cavitação (seção 3.2);
 - a força hidrodinâmica (equação (3.9));
 - o momento hidrodinâmico (equação (3.10));
 - o momento de atrito (equação (3.15));
 - a força da biela na direção **X** (equação (2.59)).
 5. De posse das forças e momentos, calcular os resíduos através das equações (3.17) e (3.18). Utilizando o acréscimo $\delta\varepsilon_i$ – onde i pode ser **t** ou **b** – calcular as derivadas parciais usando as equações (3.22). Resolver o sistema linear dado por (3.21) e obter $\Delta\dot{\varepsilon}_t$
-

e $\Delta\epsilon_b$, corrigindo em seguida ϵ_t e ϵ_b através das equações (3.23).

6. Verificar os resíduos, e se ainda não forem suficientemente pequenos, voltar ao passo 4.
7. Se τ está no **PMI** (τ múltiplo de 360°), verificar se a posição – dada por ϵ_t e ϵ_b – mudou em relação àquela que o pistão ocupava no **PMI** do ciclo anterior. Se mudou mais que o permitido pela tolerância, voltar ao passo 2, e proceder desta forma até que ϵ_t e ϵ_b no **PMI** não variem mais de um ciclo para o outro.

3.6 CÁLCULO DAS MÉDIAS DA VAZÃO ATRAVÉS DA FOLGA E DA POTÊNCIA CONSUMIDA POR ATRITO VISCOSO EM UM CICLO

Após atingida a convergência pode-se calcular a vazão média e a potência média em um ciclo.

A vazão média pode ser calculada analiticamente através da equação (2.46). Para um cálculo computacional, usa-se a equação abaixo,

$$\bar{Q} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{nt} Q_i \Delta\tau \quad (3.25),$$

em que $nt = 2\pi/\Delta\tau$.

Para a potência média consumida por atrito viscoso – que pode ser calculada analiticamente através da equação (2.48) –, usa-se a expressão abaixo,

$$\bar{P} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{nt} P_i \Delta\tau \quad (3.26).$$

3.7 INFORMAÇÕES COMPUTACIONAIS

Na maior parte das vezes, consegue-se a convergência do algoritmo de Newton-Raphson para cada avanço $\Delta\tau$ em, no máximo, 10 iterações. Contudo, geralmente nos chamados ângulos críticos – 180° e 360° – chega-se a 80 iterações em alguns casos. Uma vez

atingido este valor de 80 iterações sem se chegar à convergência, o programa volta aos valores iniciais para a posição τ que está sendo resolvida, e usa um novo valor para o acréscimo $\delta\epsilon_i$, que é obtido do último ângulo crítico correspondente resolvido com sucesso. A seguir realiza novamente as iterações. Se estas chegam ao limite de 80 novamente, faz-se nova correção no acréscimo $\delta\epsilon_i$, aumentando-o em 10%, e prossegue-se novamente com as iterações. Caso estas cheguem a 80 mais uma vez, faz-se um novo aumento de 10% em $\delta\epsilon_i$, e assim sucessivamente, até que a convergência para esta posição τ seja atingida. Caso a convergência ainda não seja conseguida, e $\delta\epsilon_i$ – após sucessivos aumentos de 10% – chegue a um valor muito alto, este é diminuído para um valor bem pequeno para tentar de novo a convergência. Se mesmo assim a convergência não é alcançada, após um limite de 120 tentativas similares a esta, o programa “desiste” desta posição τ , e avança novamente o ângulo τ , usando como valores iniciais os últimos valores corretos, ou seja, os valores de ϵ_i e $\dot{\epsilon}_i$ da posição $\tau - 2\Delta\tau$. Contudo, este problema não apareceu nos casos estudados neste trabalho, e este recurso só foi feito como forma de prevenção.

Com este procedimento conseguiu-se a convergência periódica em todos os casos estudados. Em alguns deles, precisou-se do uso de um coeficiente de relaxação de 0,7 nas correções $\Delta\epsilon_i$ e $\Delta\dot{\epsilon}_i$ das equações (3.23).

Com relação à malha utilizada na solução da equação de Reynolds, utilizou-se uma de 15 por 15 pontos nodais. Fez-se um estudo de malha, verificando as excentricidades do topo e da base do pistão, as forças, os momentos e a vazão através da folga radial, para um caso típico. Os resultados deste estudo serão discutidos no Capítulo 4, que trata da parte de resultados.

Quanto às tolerâncias utilizadas, considera-se que a convergência é alcançada em cada ângulo τ , pelo método de Newton-Raphson, quando os resíduos R_1 e R_2 das equações (3.17) e (3.18) forem menores que 0,1% da maior força dentre F_{rx} e F_h , para o caso da equação (3.17); e menores que 0,1% do maior momento, dentre M_h e M_r , para a equação (3.18).

A convergência periódica – que determina o fim do processo quando é atingida –, é obtida quando a posição do pistão no PMI não se alterar mais, de um ciclo para o outro

seguinte. Ou seja, deve-se ter

$$\varepsilon_t(\tau) = \varepsilon_t(\tau + k \cdot 360^\circ)$$

$$\varepsilon_b(\tau) = \varepsilon_b(\tau + k \cdot 360^\circ)$$

onde k é um número inteiro diferente de zero. No programa computacional, calcula-se a diferença entre as excentricidades ε_t e ε_b no PMI atual em relação ao PMI anterior. A maior diferença dentre as duas é considerada o maior erro. Este erro deve ser menor que 0,01% da unidade, que é a excentricidade máxima que pode ser alcançada. A convergência periódica é atingida quando a tolerância descrita é satisfeita. Contudo, para se verificar se de fato houve a convergência, adota-se um limite mínimo para o número de ciclos. Ou seja, mesmo que a convergência periódica seja atingida, o processo continua até que seja ultrapassado o limite mínimo, cujo valor mais usado é de 300 ciclos.

Em trabalhos anteriores, como por exemplo Gommed e Etsion (1993, 1994), o número de ciclos requeridos para a convergência é muito menor. O número elevado de ciclos necessários para a convergência no presente trabalho deve-se, provavelmente, tanto à característica do problema físico quanto à metodologia de solução adotada, e um estudo mais detalhado visando um menor tempo computacional deve ser implementado em trabalhos posteriores.

Alguns valores típicos das variáveis usados no programa computacional são mostrados na Tabela 3.1.

O tempo computacional requerido variou muito de caso para caso. Nos casos mais críticos, utilizando um computador *CONVEX C210*, chegou-se a até 26 h de tempo computacional. Todavia, em outros casos o programa precisou de apenas 1 h para convergir. Além do *CONVEX C210*, utilizaram-se as estações de trabalho *SUN SPARC STATION LX*, *IPX* e *20*. Na Tabela 3.2, mostram-se alguns exemplos de valores de tempo computacional requeridos para convergência nas diferentes plataformas computacionais para um caso típico. Estes exemplos servem apenas para que se possa ter uma idéia da ordem de grandeza dos tempos requeridos.

Tabela 3.1 - Valores típicos das variáveis usados no programa computacional

| Variáveis | Valores típicos |
|---|---|
| $\delta\epsilon_i, \delta\epsilon_b$ | 10^{-3} para $\tau \neq 180^\circ$ e 360° 10^{-2} para $\tau = 180^\circ$ e 360° |
| $n_i \times n_j$ (malha) | 15 x 15 |
| tolerância usada no processo de Newton-Raphson | 0,1% da maior força e do maior momento |
| tolerância usada para verificação da convergência periódica | 0,01% da unidade |
| limite mínimo/máximo do número de ciclos | 300 / 900 |
| coeficiente de relaxação em $\Delta\epsilon_i$ e $\Delta\epsilon_b$ | 0,7 |
| $\Delta\tau$ | 5° do ângulo de manivela |

Tabela 3.2 - Alguns valores de tempos computacionais obtidos com as diferentes plataformas computacionais, em alguns casos típicos

| Plataforma computacional | Tempo computacional requerido para finalização dos cálculos com o programa computacional |
|------------------------------|--|
| <i>CONVEX C210</i> | 1 h 57 min |
| <i>SUN SPARC STATION 20</i> | 1 h 17 min |
| <i>SUN SPARC STATION IPX</i> | 3 h 53 min |

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se os diversos resultados obtidos e discussões sobre estes. Os resultados são divididos em três categorias: resultados obtidos nas etapas de desenvolvimento do programa computacional, resultados em função da variação de parâmetros de projeto e cálculo da potência total consumida em um ciclo.

O desenvolvimento do programa computacional foi feito em várias etapas para maior compreensão dos fenômenos envolvidos. Estas etapas baseiam-se em restrições ao movimento do pistão e, conforme estas restrições, consegue-se uma redução do número de variáveis a serem analisadas, facilitando-se assim o desenvolvimento do programa.

Nas três primeiras etapas o pistão não tem movimento na direção radial. Na primeira delas o eixo do pistão coincide com o eixo do cilindro, e faz-se o cálculo da vazão de óleo pela folga radial e da potência consumida por atrito viscoso na folga. Na segunda etapa os eixos do pistão e do cilindro são paralelos, mas não coincidentes, e calcula-se ainda a vazão de óleo e a potência. Na terceira etapa há uma inclinação do pistão, e calcula-se – além de vazão e potência –, a força e o momento hidrodinâmico, que aparecem com a inclinação, devido ao efeito cunha. O cálculo da vazão através da folga é muito importante, porque o óleo tem um papel de vedação na folga – para evitar a fuga do gás em compressão – e contém gás refrigerante dissolvido em sua composição. Portanto, uma vazão exagerada significa vazamento de gás através da folga e, conseqüentemente, perda na eficiência do compressor.

Nas duas etapas seguintes admite-se um movimento de rotação do pistão em torno do pino, com este coincidindo com o centro de massa e solidário ao eixo do cilindro. A diferença entre estas etapas é que em uma delas o pino se localiza no meio do pistão e na outra não. Aqui calcula-se a vazão de óleo, a potência consumida por atrito viscoso e os momentos em relação ao pino, além das variações das excentricidades do topo e da base do pistão em função do ângulo de manivela, já que existe movimento radial.

Em seguida, em duas etapas, admite-se que o pistão tenha somente movimentos de translação na direção radial, sem rotação. A diferença entre estas duas etapas é que em uma delas não se faz um balanço de forças na biela, considerando-se que a força exercida por ela sobre o pistão é paralela ao seu eixo longitudinal; e na outra faz-se o balanço porque a inércia da biela influencia na força que esta exerce sobre o pistão.

Finalmente, nas três últimas etapas, tem-se o problema completo, ou seja, há liberdade total de movimento para o pistão no plano **XZ**. Em uma delas a massa e o momento de inércia do pistão são desconsiderados e em outra não. Na etapa restante o momento de inércia é desconsiderado e a massa só o é quando se trata do somatório das forças na direção **X**, equação (2.21), não sendo desconsiderada no somatório na direção **Z** – equação (2.22) – porque, como as acelerações são bem maiores nesta direção, a inércia tem maior importância. A validade desta aproximação é comprovada em alguns resultados apresentados neste capítulo, e esta versão do programa computacional é utilizada para a obtenção de alguns dos resultados que serão mostrados posteriormente.

Com a versão final do programa são exploradas as influências da variação da posição do pino, z_p , da folga radial c , e da viscosidade μ . As dimensões c e z_p são mostradas na Fig. 2.1. Para estes casos estudou-se a variação da menor distância atingida entre o pistão e o cilindro em qualquer ponto da folga durante um ciclo completo, chamada de h_{\min} . Quanto maior o h_{\min} , mais estável é o pistão, porque ele se mantém mais afastado da parede do cilindro. Além de h_{\min} , estudou-se também a potência média consumida por atrito viscoso e a vazão média de óleo através da folga para um ciclo completo, em função de z_p , c e μ .

Nas seções seguintes, além do estudo da malha, descreve-se cada uma das etapas utilizadas e discutem-se seus resultados, além dos outros casos estudados e mencionados

anteriormente.

4.2 ESTUDO DE MALHA

Os resultados obtidos no estudo do refino da malha para um caso típico, são mostrados na Tabela 4.1. Verificou-se que a diferença máxima entre as excentricidades, forças, momentos e vazão, entre as malhas 15 por 15 e 25 por 25, é muito pequena. Baseando-se neste fato, optou-se pelo uso da malha 15 por 15 na versão final do programa, porque a diferença entre os tempos computacionais é muito grande, ou seja, o uso da malha 25 por 25 torna a execução do programa muito mais lenta que o uso de 15 por 15 pontos nodais. Os erros percentuais apresentados são em relação aos resultados obtidos com a malha 25 por 25.

Tabela 4.1 - Diferenças entre os resultados obtidos com malha 15 por 15 e com malha 25 por 25

| Parâmetro | Erro máximo em relação ao resultado obtido com a malha 25 por 25 |
|-----------------|--|
| ε_t | 1,6% |
| ε_b | 1,9% |
| F_h | 0,066% |
| M_h | 1,7% |
| M_f | 1,8% |
| Q | 0,0094% |

4.3 CARACTERÍSTICAS DOS COMPRESSORES ESTUDADOS

Nos diversos casos estudados neste trabalho usaram-se dois modelos de compressores diferentes. As características geométricas, dinâmicas e operacionais de tais compressores são apresentadas na Tabela 4.2. Vale ressaltar que estas características são básicas em cada compressor, podendo, no entanto, variar em alguns casos, como de fato acontece na verificação da influência de z_p , c e μ . Deve-se observar ainda que o momento de inércia do pistão, I_P , é em relação ao pino **P**; e o da biela, I_B , em relação ao centro de massa da biela, **B**.

Nos resultados apresentados nas seções seguintes, o compressor 1 é usado nas seções 4.4.1, 4.4.2 e 4.4.3. Nas seções restantes utilizou-se o compressor 2.

Tabela 4.2 - Características geométricas, dinâmicas e operacionais dos compressores estudados

| | compressor 1 | compressor 2 |
|--|-------------------------|-------------------------|
| L/R | 1,867 | 2,000 |
| c/R | $0,445 \times 10^{-3}$ | $0,476 \times 10^{-3}$ |
| z_p/L | 0,667 | 0,575 |
| z_{CM}/L | 0,468 | 0,527 |
| C_{BP}/C_{MP} | 0,701 | 0,700 |
| C_{ME}/C_{MP} | 0,247 | 0,197 |
| d/R | 0,00 | 0,19 |
| V_{morto} (mm³) | - | 97 |
| ω (rd/s) | 365,7 | 368,6 |
| | (3492 rpm) | (3520 rpm) |
| μ (cP) | 3,8305 | 2,4000 |
| p_{suc} (bar)^(*) | 1,325 | 1,156 |
| m (g) | 36,3 | 34,1 |
| I_p (kg.m²) | $0,3029 \times 10^{-5}$ | $0,2270 \times 10^{-5}$ |
| m_b (g) | 12,15 | 23,60 |
| I_B (kg.m²) | 10^{-5} | $0,5950 \times 10^{-5}$ |

(*) pressão absoluta

4.4 ETAPAS USADAS NO DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

4.4.1 Pistão sem movimento na direção radial

4.4.1.1 Eixo do pistão coincidente com o eixo do cilindro (Etapa 1)

A situação é ilustrada na Fig. 4.1. Como o pistão não apresenta inclinação e nem tampouco movimento na direção radial, não existe efeito cunha e nem efeito de filme de óleo espremido, assim o termo-fonte S dado pela equação (3.8f) é nulo, e o campo de pressão na folga varia linearmente da pressão no cilindro à pressão de sucção. A espessura do filme de óleo é constante em toda a folga, e igual à folga radial c.

Na Fig. 4.2 pode-se ver a variação da velocidade do pistão na direção axial com o ângulo de manivela, obtida analiticamente através da equação (2.4). A velocidade se anula nos dois pontos extremos do curso do pistão, o ponto morto inferior (PMI) e o ponto morto

superior (PMS).

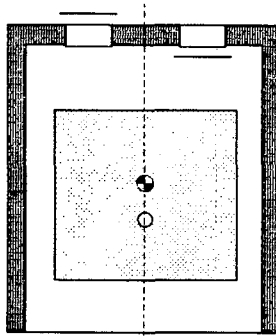


Fig. 4.1 - Eixo do pistão coincidente com o eixo do cilindro

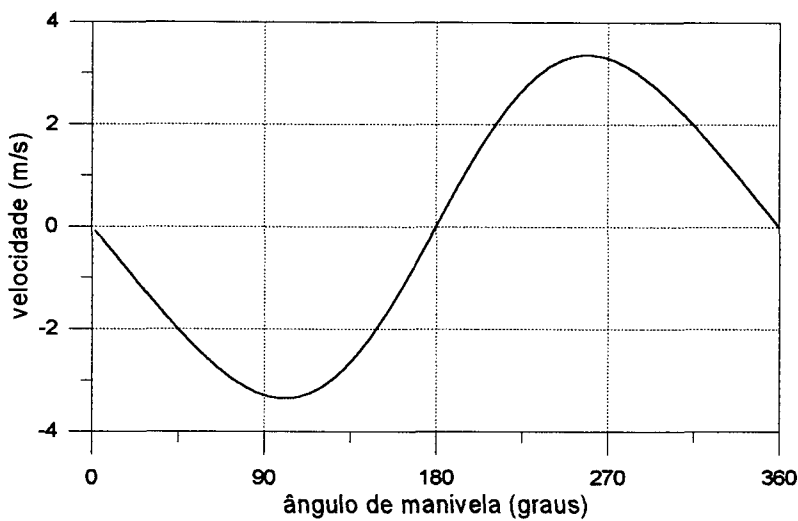


Fig. 4.2 - Velocidade do pistão na direção axial em função do ângulo de manivela

Nesta etapa, como não há deslocamento radial do pistão e, conseqüentemente, a espessura do filme de óleo h permanece constante, o termo do lado direito da equação (2.14) e o gradiente $\partial p / \partial \theta$ da mesma equação são nulos, e assim a equação passa a ter solução analítica. Uma vez desenvolvida tal solução analítica, obtém-se a seguinte expressão para a vazão através da folga, Q ,

$$Q = \pi R c \left[V_p - \frac{c^2}{6\mu} \frac{P_{suc} - P_{cil}}{L} \right] \quad (4.1)$$

e, para a potência consumida por atrito viscoso, P , tem-se,

$$P = \pi R \left[c(p_{suc} - p_{cil}) + 2\mu V_P \frac{L}{c} \right] \cdot V_P \quad (4.2)$$

A vazão Q e a potência P dadas pelas equações (4.1) e (4.2), valem para uma posição τ , porque a velocidade V_P , dada pela equação (2.4), é função deste ângulo τ .

Na Fig. 4.3 apresentam-se comparações entre a vazão através da folga e a potência consumida por atrito viscoso, obtidas através do programa computacional e analiticamente, por meio das equações (4.1) e (4.2). Pode-se ver que há uma ótima concordância entre os resultados, o que atesta a consistência da equação discretizada.

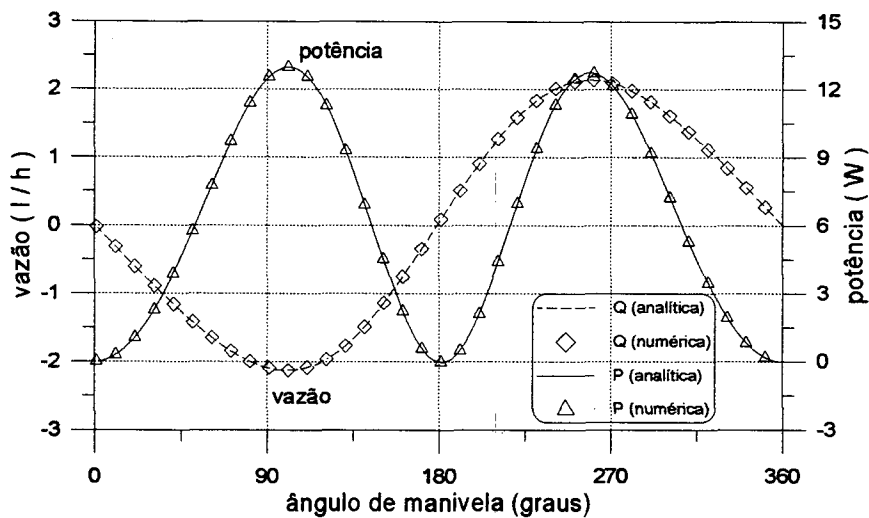


Fig. 4.3 - Vazão de óleo através da folga e potência consumida por atrito viscoso em função do ângulo de manivela

Pode-se observar que a vazão é bastante influenciada pelo arraste que o pistão exerce sobre o fluido, visto que o gráfico é bastante parecido com o gráfico que dá a variação de V_P com τ mostrado na Fig. 4.2. Isto mostra que a vazão de óleo é muito mais afetada pela velocidade axial do pistão do que pelo gradiente de pressão, apesar de ser este gradiente também responsável por uma parcela desta vazão. O mesmo se pode dizer em relação à potência, que é também predominantemente afetada pela velocidade V_P . Nota-se, pela Fig. 4.3, que os pontos de potência máxima coincidem com os pontos em que o módulo da velocidade V_P – e também da vazão – é máximo. Ainda, a potência é praticamente nula nos pontos onde a velocidade V_P é zero.

4.4.1.2 Eixo do pistão paralelo ao eixo do cilindro (Etapa 2)

Pode-se ver uma ilustração desta situação na Fig. 4.4, em que o pistão permanece com

uma excentricidade fixa, igual a 0,5, em relação ao eixo do cilindro.

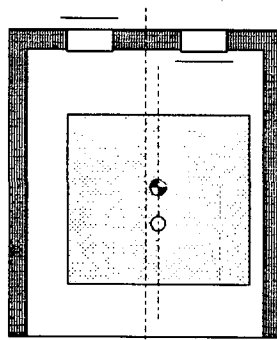


Fig. 4.4 - Eixo do pistão paralelo ao eixo do cilindro

Na Fig. 4.5, observa-se que a potência consumida por atrito na situação descrita nesta etapa é consideravelmente maior que aquela obtida na etapa anterior. Isto ocorre porque nesta etapa existem pontos em que a espessura h é muito pequena. Como a potência é bastante influenciada pelo termo $\mu(V_P/h)$ – portanto inversamente proporcional a h –, valores pequenos de h levam a grandes valores para a potência, e este efeito não é compensado nos trechos onde h é grande.

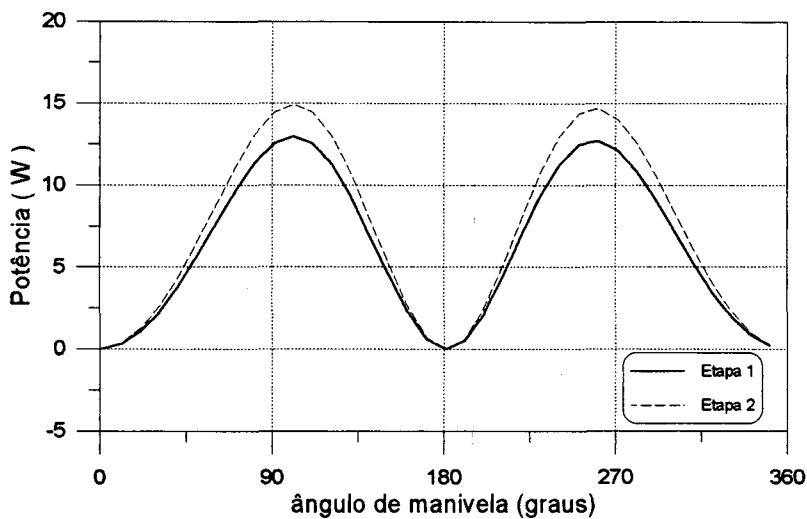


Fig. 4.5 - Comparação entre as potências obtidas na Etapa 1 e na Etapa 2

Na Fig. 4.6 apresenta-se a vazão axial por unidade de comprimento circunferencial para alguns valores de τ . Observa-se novamente a forte influência da velocidade V_P sobre a vazão, pois quando τ é igual a 0° ou 180° – onde V_P é nula – a vazão é praticamente zero em

qualquer posição circunferencial. Pode-se ver ainda que, em $\tau = 180^\circ$, a vazão é um pouco maior do que quando $\tau = 0^\circ$. Esta pequena diferença aparece porque, em $\tau = 180^\circ$, a pressão p_{cil} é consideravelmente maior que p_{cil} em $\tau = 0^\circ$ (Fig. 2.2). Em $\tau = 180^\circ$ a diferença entre p_{cil} e p_{suc} conduz a uma vazão diferente de zero, principalmente em $\theta = 180^\circ$, onde a espessura do filme de óleo é maior.

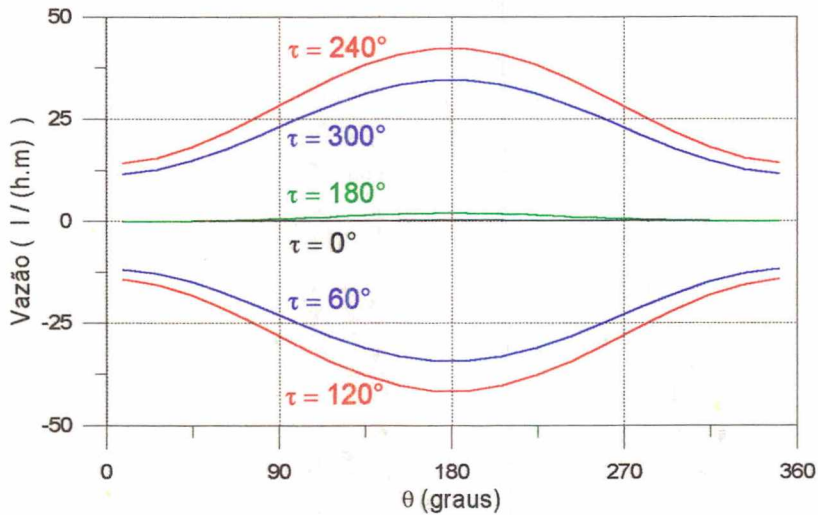


Fig. 4.6 - Variação da vazão na direção axial por unidade de comprimento na direção circunferencial para alguns valores de τ

4.4.1.3 Eixo do pistão inclinado em relação ao eixo do cilindro (Etapa 3)

Tal situação é ilustrada na Fig. 4.7. Nesta etapa aparece o efeito cunha devido à inclinação do pistão, e com isto aparece um campo de pressão diferente daquele das etapas anteriores, e que leva a uma força hidrodinâmica diferente de zero.

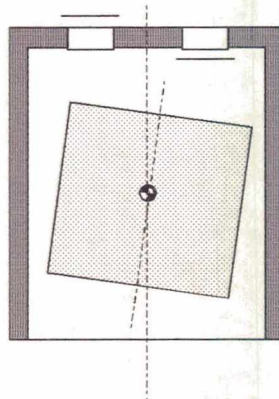


Fig. 4.7 - Eixo do pistão inclinado em relação ao eixo do cilindro

Na Fig. 4.8 apresentam-se vários perfis de pressão hidrodinâmica na direção axial na

posição circunferencial $\theta = 0^\circ$ (ver Fig. 2.4), para várias excentricidades fixas do topo e da base em $\tau = 270^\circ$. A ilustração ao lado do gráfico representa o pistão descendo, já que o ângulo de manivela se encontra em $\tau = 270^\circ$. Observa-se que quando $\epsilon_t = \epsilon_b = 0,9$, não há pressão hidrodinâmica induzida porque o pistão não tem inclinação. Para os outros três casos explorados na Fig. 4.8, a inclinação do pistão é a mesma, variando apenas sua posição radial. Mesmo com uma inclinação igual, a pressão é maior quando o pistão está mais próximo da parede do cilindro, como pode-se ver na última curva da Fig. 4.8, para $\epsilon_t = 0,75$ e $\epsilon_b = 0,25$.

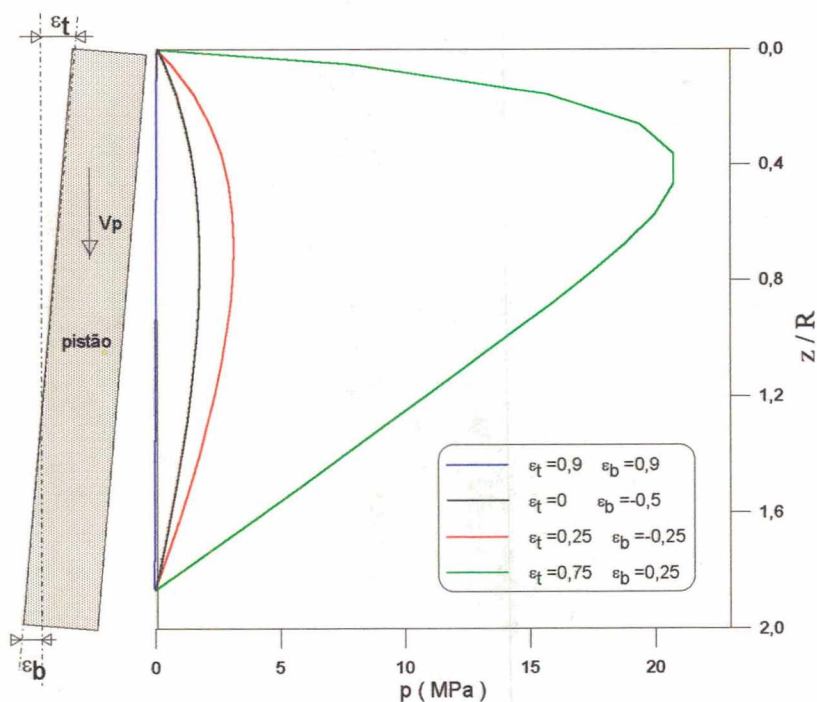


Fig. 4.8 - Perfis de pressão hidrodinâmica na direção axial na posição $\theta = 0^\circ$ para várias excentricidades do topo e da base em $\tau = 270^\circ$

Uma comparação entre as forças hidrodinâmicas para várias excentricidades do topo e da base é mostrada no gráfico da Fig. 4.9. Observa-se novamente a importância da inclinação do pistão, agora determinando o sentido da força hidrodinâmica.

Nota-se também, novamente, a influência da proximidade entre o pistão e a parede do cilindro na magnitude da pressão, e conseqüentemente na força hidrodinâmica. Nas curvas onde ϵ_t e ϵ_b têm módulos iguais e sinais opostos, a força hidrodinâmica tem módulos da mesma ordem de grandeza na subida e na descida do pistão, como por exemplo quando $\epsilon_t = 0,5$ e $\epsilon_b = -0,5$. Já nas curvas onde ϵ_t e ϵ_b têm módulos diferentes – e portanto com o pistão se

encontrando mais próximo da parede do cilindro em um dos lados –, o módulo da força hidrodinâmica é maior quando a cunha convergente está no lado em que o pistão está mais próximo da parede, como acontece quando $\varepsilon_t = 0$ e $\varepsilon_b = 0,5$, na subida do pistão, com τ entre 0° e 180° .

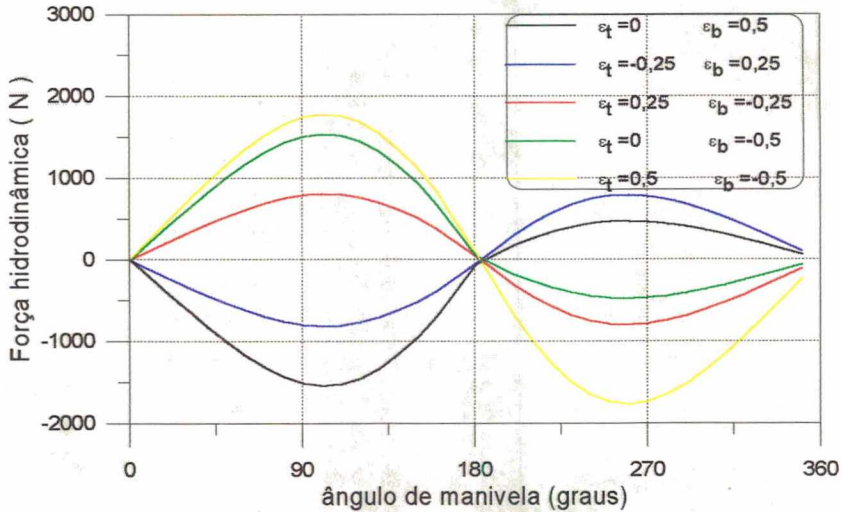


Fig. 4.9 - Comparação entre as forças hidrodinâmicas para várias excentricidades do topo e da base

4.4.2 Pistão com movimento de rotação em torno do pino

4.4.2.1 Pino e centro de massa coincidentes e no meio do pistão (Etapa 4)

Em tal situação, que é mostrada na Fig. 4.10, o pino do pistão não se movimenta na direção radial, e neste caso utiliza-se somente o somatório dos momentos em relação ao pino. É como se as extremidades do pino se encaixassem e deslizassem em rasgos feitos no cilindro na direção axial.

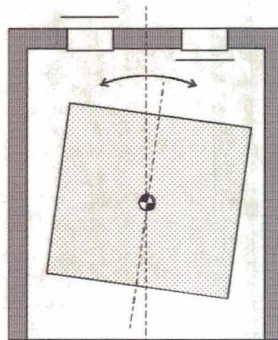


Fig. 4.10 - Pino e centro de massa coincidentes e no meio do pistão

Para a obtenção dos resultados desta etapa, parte-se de uma posição inicial para o pistão, por exemplo $\varepsilon_t = 0,50$. Como o pino está no centro do pistão e sobre o eixo do cilindro, $\varepsilon_b = -0,50$.

Na Fig. 4.11 apresenta-se a variação de ε_t com o ângulo de manivela, partindo-se de $\varepsilon_t = 0,50$. Observa-se que, após 18 ciclos ($\tau = 6480^\circ$), há uma tendência de o pistão se estabilizar com $\varepsilon_t = \varepsilon_b = 0$, situação em que não há nem momento hidrodinâmico nem momento de atrito.

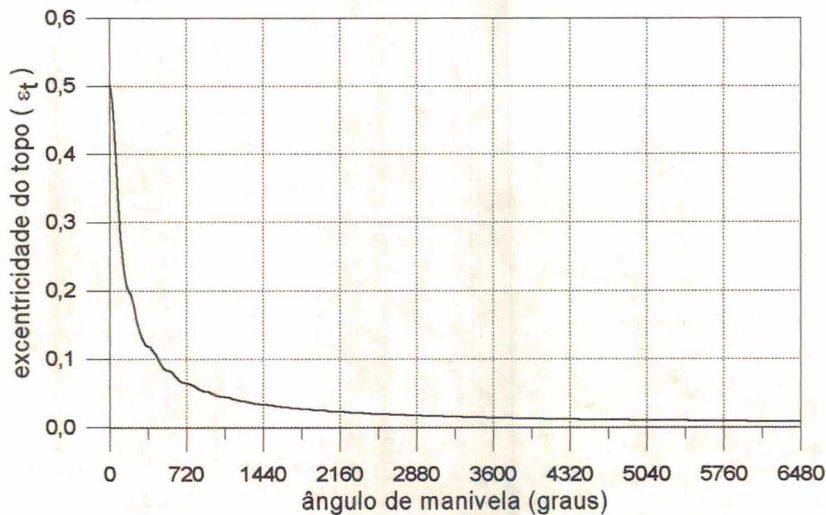


Fig. 4.11 - Variação de ε_t com o ângulo de manivela, numa situação onde $\varepsilon_t = -\varepsilon_b$

A Fig. 4.12 mostra ambos os momentos, o momento de atrito M_f e o momento hidrodinâmico M_h , e pode-se verificar que com o passar do tempo os dois tendem a zero. Esta

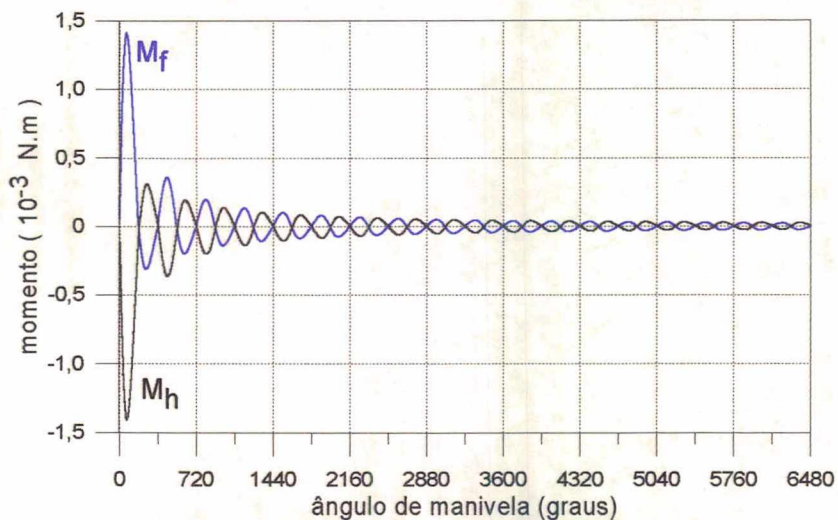


Fig. 4.12 - Variação dos momentos hidrodinâmico e de atrito com o ângulo de manivela, numa situação onde $\varepsilon_t = -\varepsilon_b$

tendência ocorre porque a força geradora de instabilidade, que é a força exercida pela biela, é impedida de atuar devido à consideração de não haver movimento do pino na direção radial.

4.4.2.2 Pino e centro de massa coincidentes, mas não no meio do pistão (Etapa 5)

Uma ilustração da situação é mostrada na Fig. 4.13, onde pino e centro de massa são colocados numa posição qualquer do eixo do pistão.

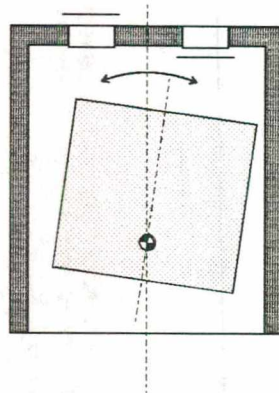


Fig. 4.13 - Pino e centro de massa coincidentes, mas não no meio do pistão

A variação de ϵ_t em função do ângulo de manivela para duas posições do pino é mostrada na Fig. 4.14. Observa-se que na posição $z_p/L = 1/2$ o pistão é mais estável, o que se pode ver também na Fig. 4.15, que mostra a variação do momento hidrodinâmico com o ângulo de manivela para as duas posições do pino usadas na Fig. 4.14. Quando o pino está no

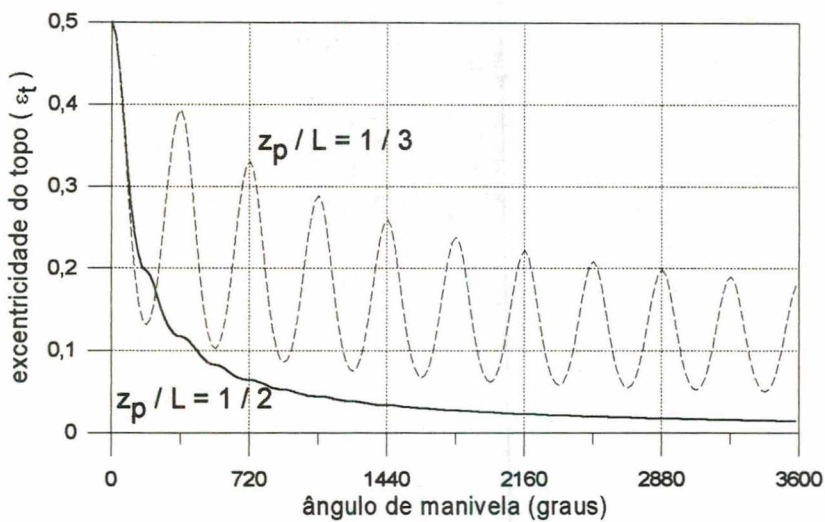


Fig. 4.14 - Variação de ϵ_t com o ângulo de manivela para duas posições do pino

meio do pistão, os braços de alavanca são menores, gerando por isso momentos hidrodinâmicos também de menor magnitude. Com a evolução dos ciclos, os momentos tendem a zero.

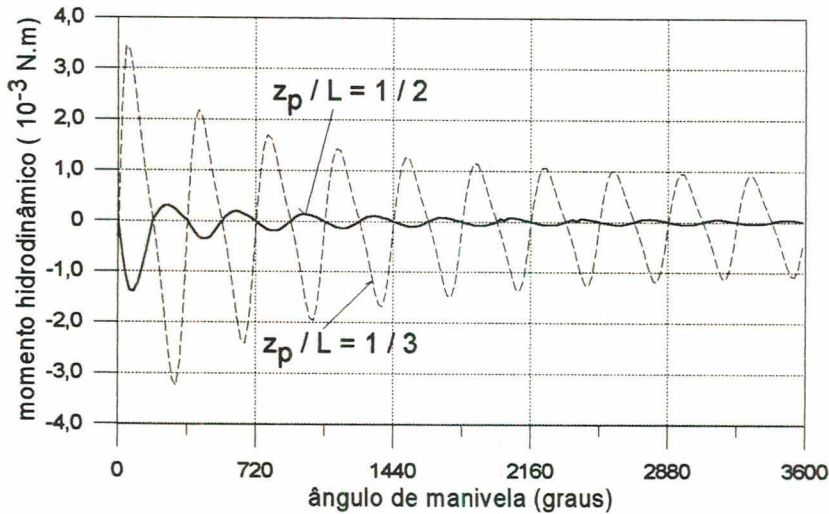


Fig. 4.15 - Variação do momento hidrodinâmico com o ângulo de manivela para duas posições do pino

4.4.3 Pistão com movimento de translação na direção radial e sem rotação

4.4.3.1 Força exercida pela biela paralela ao seu eixo principal (Etapa 6)

A ilustração da situação explorada nesta seção está na Fig. 4.16, onde se destaca que a

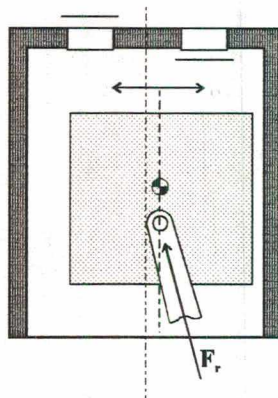


Fig. 4.16 - Força exercida pela biela paralela ao seu eixo principal

força exercida pela biela é paralela ao seu eixo, o que é uma aproximação. A posição do pino

não importa nesta etapa, visto que não há rotação do pistão.

A variação da excentricidade do pistão com o ângulo de manivela para este caso é mostrada na Fig. 4.17. Nota-se que há uma tendência de estabilização do pistão com uma

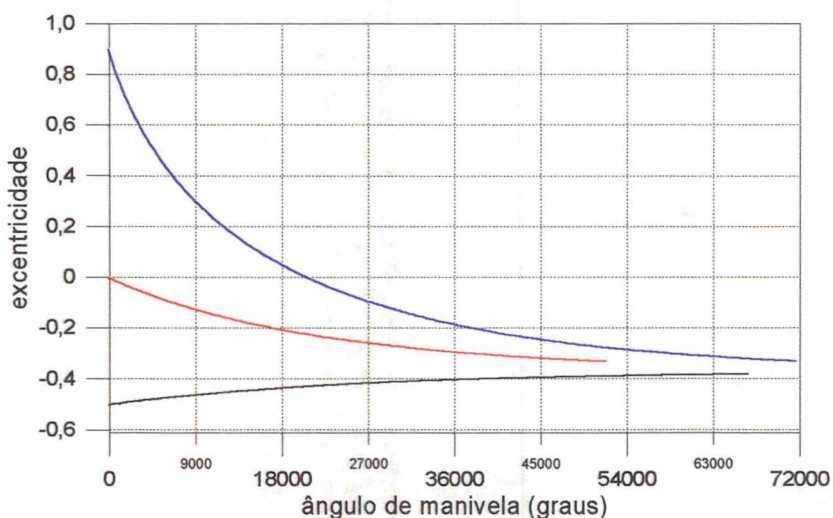


Fig. 4.17 - Variação da excentricidade do pistão com o ângulo de manivela para três posições de partida diferentes

excentricidade em torno de $-0,4$, qualquer que seja o ponto de partida. Neste exemplo, os pontos de partida explorados foram $0,9$, 0 e $-0,5$. Esta estabilização em uma excentricidade diferente de zero ocorre porque a força da biela na direção X , F_{rx} , que interage com a força hidrodinâmica, é maior em um sentido, sendo que este depende do sentido de giro da manivela. Na Fig. 4.18 pode-se verificar tal dependência, com duas situações partindo de $\epsilon_t = 0,9$ e outras duas partindo de $\epsilon_t = -0,5$; mas com sentidos de rotação da manivela contrários. Nota-se que há uma tendência de estabilização – para o caso em que a manivela gira no sentido anti-horário – em $\epsilon_t = -0,4$ aproximadamente. Já no caso em que a manivela gira no sentido horário, a tendência de estabilização acontece aproximadamente em $\epsilon_t = 0,4$. Este resultado serve para mostrar a assimetria da força exercida pela biela, que depende do sentido de giro da manivela.

Nas Figs. 4.17 e 4.18, devido à escala das figuras, não aparecem as pequenas oscilações as quais sofre o pistão. Na Fig. 4.20, como a escala é menor, estas oscilações aparecem de forma clara.

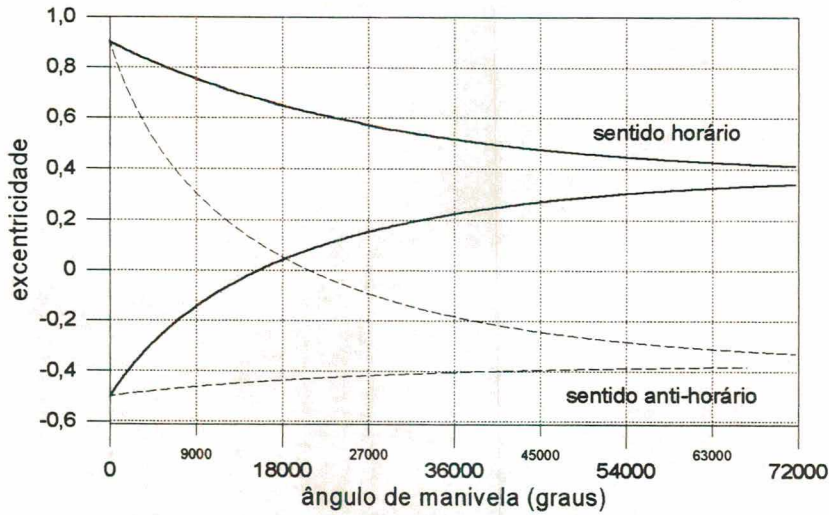


Fig. 4.18 - Influência do sentido de giro da manivela na posição de estabilização do pistão

4.4.3.2 Força exercida pela biela não-paralela ao seu eixo principal (Etapa 7)

Pode-se ver uma ilustração da situação na Fig. 4.19, onde se destaca que, devido a sua inércia, a força exercida pela biela não é paralela ao seu eixo.

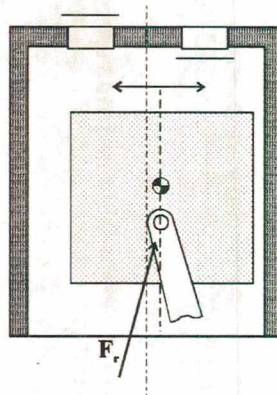


Fig. 4.19 - Força exercida pela biela não-paralela ao seu eixo principal

O caso anterior, onde se considerava a força da biela paralela ao seu eixo principal, é uma aproximação. Devido à inércia da biela, o uso desta aproximação pode conduzir a erros significativos. Este problema é destacado por Gommed e Etsion (1993, 1994). Na Fig. 4.20 mostra-se uma comparação entre as excentricidades do pistão para as duas etapas, onde se confirma que, de fato, a aproximação usada na Etapa 6 pode conduzir a erros. Nota-se ainda, na Fig. 4.20, uma ondulação nas curvas que acontece devido à interação entre a força da biela na direção X, F_{rx} , e a força hidrodinâmica, F_h . Note-se que a força hidrodinâmica neste caso é

originada somente por efeito de filme espremido, não havendo efeito cunha, uma vez que o pistão permanece sem inclinação.

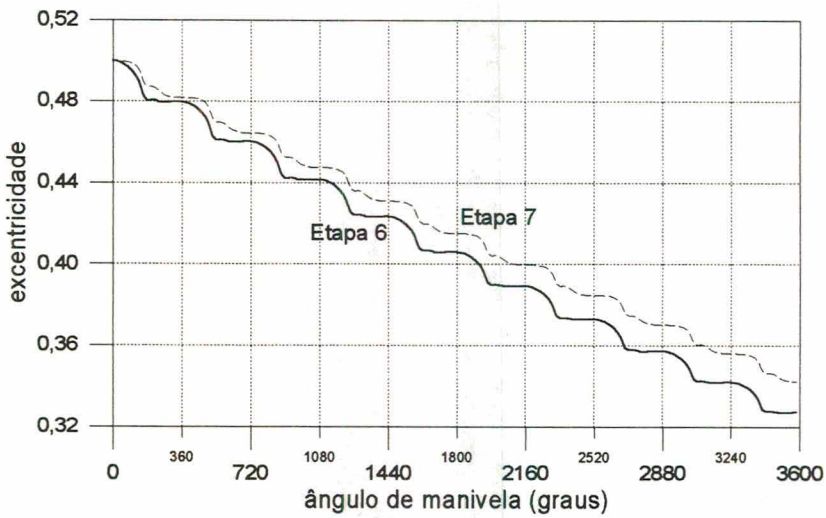


Fig. 4.20 - Comparação entre as Etapas 6 e 7

4.4.4 Pistão com movimentos livres de rotação e translação

Nestas etapas tem-se o problema completo, com liberdade de movimento para o pistão no plano **XZ**. Na obtenção dos resultados usou-se o compressor 2, indicado na Tabela 4.2, mas com $p_{suc} = 1,325 \text{ bar}$. Usou-se um valor de p_{suc} diferente porque na ocasião em que estes resultados foram obtidos, ainda não se dispunha do valor correto de p_{suc} para o compressor 2, o que não traz nenhum prejuízo para a qualidade dos resultados.

Três etapas foram feitas: a Etapa 8, onde a massa e o momento de inércia do pistão são considerados nulos; a Etapa 9, onde o momento de inércia é considerado nulo e a massa só não o é no somatório das forças na direção **Z** e; finalmente, a Etapa 10, onde a massa e o momento de inércia são usados com seus valores reais para o compressor 2. Os resultados apresentados a seguir são referentes à Etapa 10, em que se mostram as forças, momentos, potência, vazão, excentricidades, espessura do filme de óleo, velocidades radiais e campos de pressão para um ciclo convergido do compressor 2.

Na Fig. 4.21 mostram-se as forças que atuam sobre o pistão na direção **X**, onde F_{ix} é a força de inércia, que é igual a $(-m\ddot{e}_{CM})$. Observa-se que F_{ix} é praticamente nula, o que justifica a prática de se desconsiderá-la no somatório das forças na direção **X**. Em consequência da

pequena magnitude de F_{ix} , as forças F_h e F_{rx} são praticamente iguais, com sinais opostos.

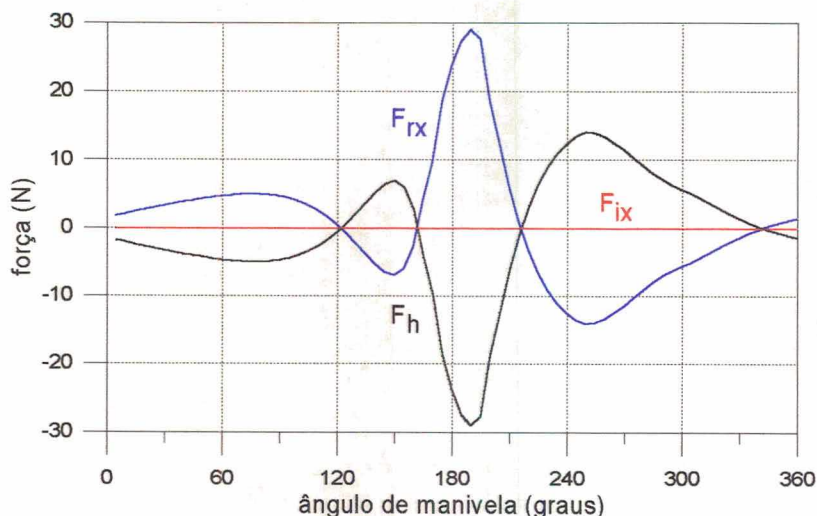


Fig. 4.21 - Forças atuantes no pistão na direção X

As forças atuantes no pistão na direção Z, são apresentadas na Fig. 4.22. Pode-se ver que a reação à força do gás, F_g , é exercida principalmente pela biela, através da força F_{rz} . A força de atrito viscoso F_f , é muito menor do que F_g e F_{rz} . Aqui, nota-se que a força de inércia na direção Z, F_{iz} – igual a $(-m A_P)$ –, ao contrário de F_{ix} , não pode ser desprezada. Esta força é praticamente a diferença entre F_g e F_{rz} , e é importante porque a aceleração axial A_P é bem maior que a aceleração radial \ddot{e}_{CM} , associada a F_{ix} .

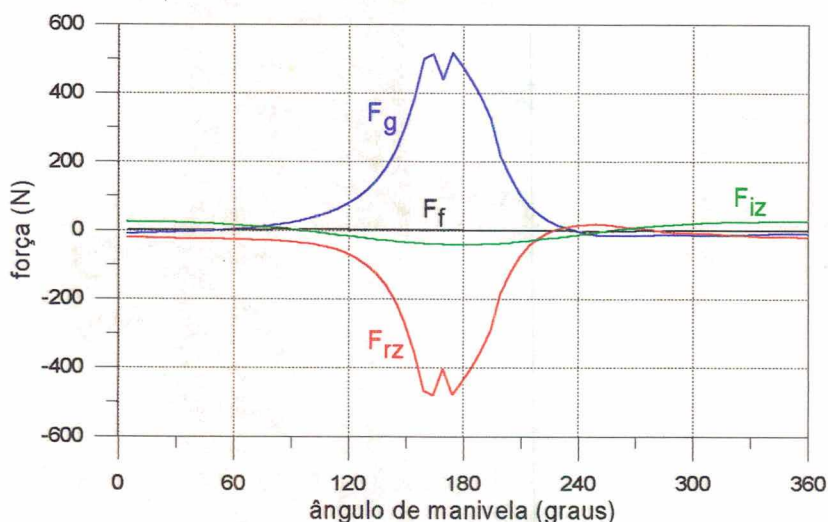


Fig. 4.22 - Forças atuantes no pistão na direção Z

Na Fig. 4.23 apresentam-se os momentos que atuam sobre o pistão em relação ao pino. O momento hidrodinâmico M_h , é igual ao momento de atrito, M_f . Da mesma forma que F_{ix} , o momento devido à força de inércia, M_i – que é igual a $(-I_P \ddot{\gamma})$ – pode ser desprezado, pois é

muito pequeno em relação aos demais.

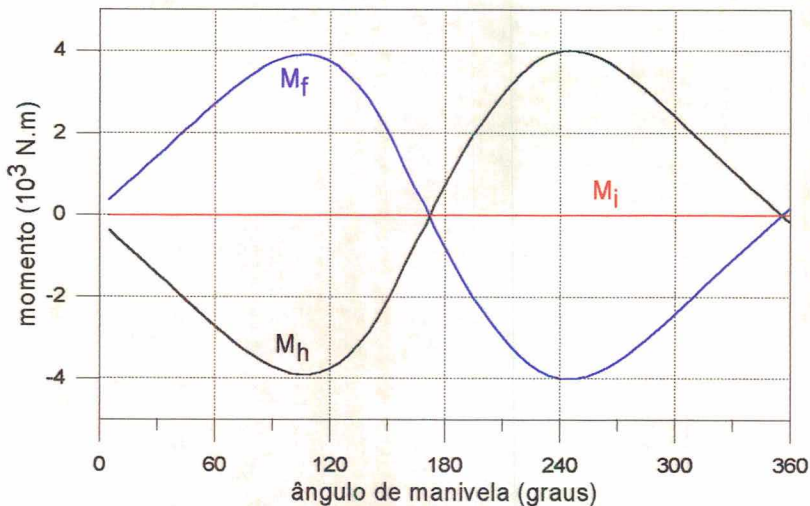


Fig. 4.23 - Momentos atuantes no pistão em relação ao pino

Analisando-se as três últimas figuras apresentadas, Fig. 4.21, Fig. 4.22 e Fig. 4.23, nota-se que a Etapa 9 é uma boa aproximação para a modelação do compressor 2; nesta etapa considera-se a massa do pistão somente na direção Z , e não se considera o seu momento de inércia. A Etapa 8 não é adequada, pois não considera a massa do pistão no somatório das forças na direção Z e, como se pode ver na Fig. 4.22, F_{iz} é significativa. Já a Etapa 10, a mais completa, usa tanto a massa quanto o momento de inércia com seus valores reais. Contudo, como se pôde analisar pelas Figs. 4.21 e 4.23, não é necessária a inclusão nem da massa do pistão no somatório das forças na direção X nem do seu momento de inércia no somatório dos momentos. Pode-se usar portanto o modelo associado à Etapa 9, objetivando-se um menor tempo computacional. Como exemplo desta redução no tempo computacional, pode-se citar um caso em que, com a Etapa 9, o programa levou **7 h 30 min** para execução, contra **9 h 59 min** gastos pelo programa associado à Etapa 10, usando a plataforma computacional *SUN SPARC STATION IPX*.

Uma comparação dos resultados da Etapa 10 com a Etapa 1 é apresentada na Fig. 4.24 e na Fig. 4.25. Recapitulando, a Etapa 1 é aquela em que a espessura do filme de óleo é uniforme em toda a folga, porque não há movimento radial do pistão, e é a formulação mais comumente usada em engenharia de compressores para cálculo da potência consumida por atrito viscoso. Na Fig. 4.24 e na Fig. 4.25 nota-se que esta é uma boa aproximação, pois a diferença é pequena entre os resultados. A potência, representada na Fig. 4.25, apresenta uma diferença máxima, entre o resultado da Etapa 1 e o da Etapa 10, de **-1,05%** em relação ao

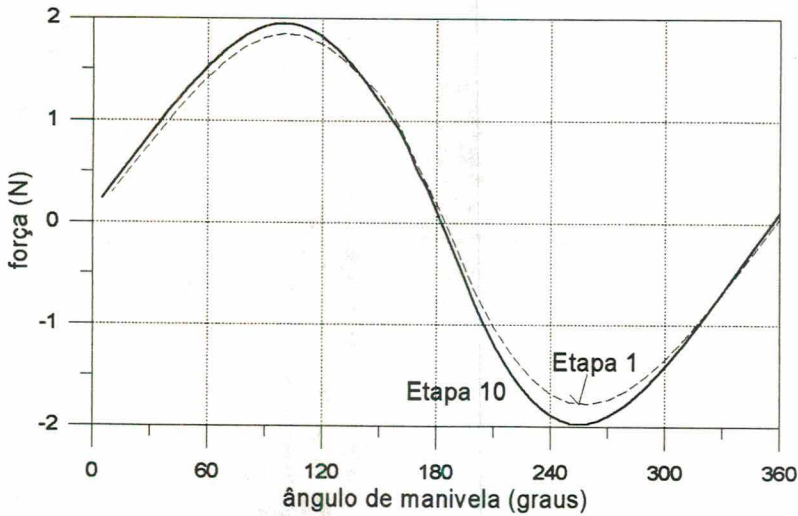


Fig. 4.24 - Comparação entre a força de atrito obtida na Etapa 1 e a obtida na Etapa 10

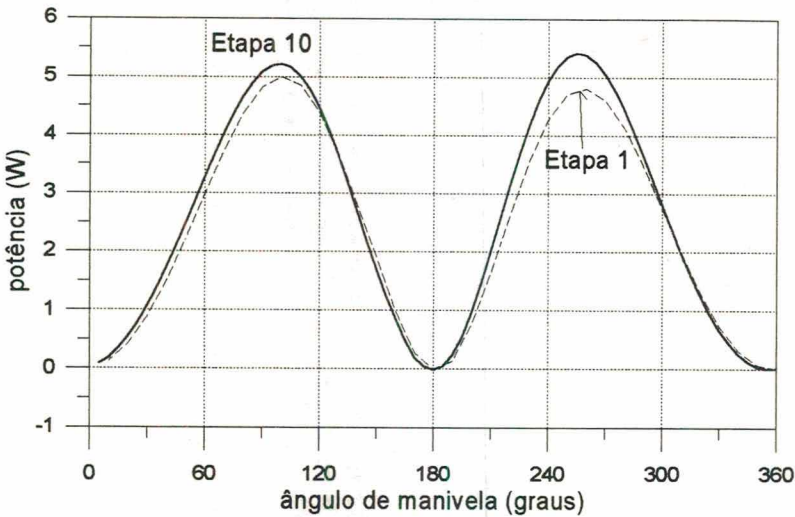


Fig. 4.25 - Comparação entre a potência consumida por atrito obtida na Etapa 1 e a obtida na Etapa 10

resultado da Etapa 10. Na Fig. 4.26 mostra-se a vazão obtida para a Etapa 10 comparada com a Etapa 1. As curvas são praticamente iguais, e conclui-se que a Etapa 1 também é uma boa aproximação para o cálculo da vazão de óleo pela folga radial. A utilização do modelo mais elaborado associado à Etapa 10 se justifica quando a folga radial é muito grande, ou quando se buscam informações mais detalhadas – tais como a espessura mínima do filme de óleo durante um ciclo – e informações locais e instantâneas sobre a força de atrito e o vazamento de lubrificante, ou ainda quando se faz sua aplicação em termos de confiabilidade e cálculo estrutural para o compressor.

As variações das excentricidades do topo e da base do pistão são mostradas na Fig. 4.27. Ambas as excentricidades são sempre positivas, e isto quer dizer que o pistão trabalha

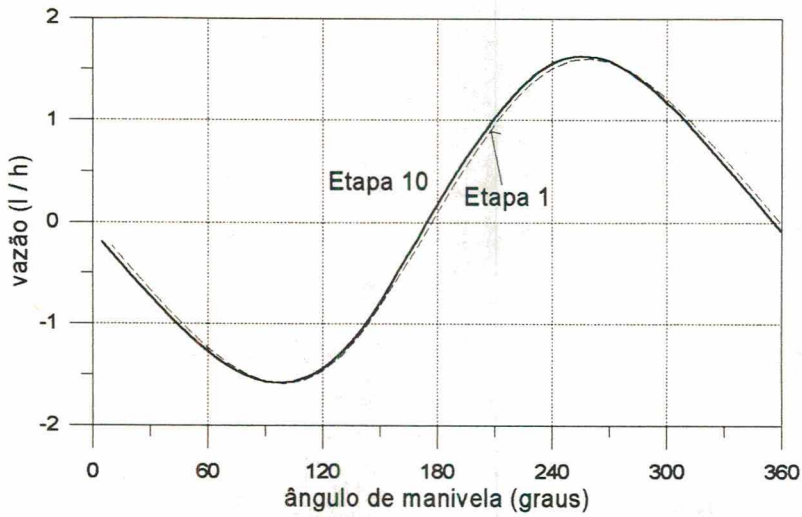


Fig. 4.26 - Comparação entre a vazão através da folga obtida na Etapa 1 e a obtida na Etapa 10

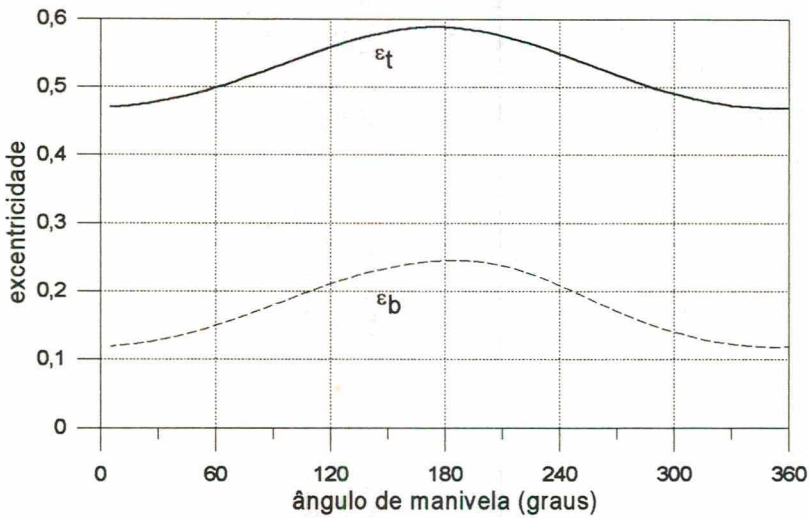


Fig. 4.27 - Variações das excentricidades do topo e da base do pistão em função do ângulo de manivela

sempre deslocado para o lado direito, referindo-se à ilustração da Fig. 2.1. A inclinação permanece praticamente constante, com uma pequena rotação, porque a diferença entre ϵ_t e ϵ_b quase não varia durante o ciclo. Ou seja, o pistão se aproxima e se afasta da parede do cilindro, permanecendo com uma inclinação quase constante, possuindo um movimento de rotação com pequena amplitude.

Como consequência das variações de ϵ_t e ϵ_b , a espessura do filme de óleo, h , varia em toda a extensão da folga radial, como pode-se ver na Fig. 4.28, para seis posições diferentes do ângulo de manivela τ . Na apresentação destes resultados, usa-se a coordenada θ , apresentada na Fig. 2.4, e indicam-se o topo e a base do pistão.

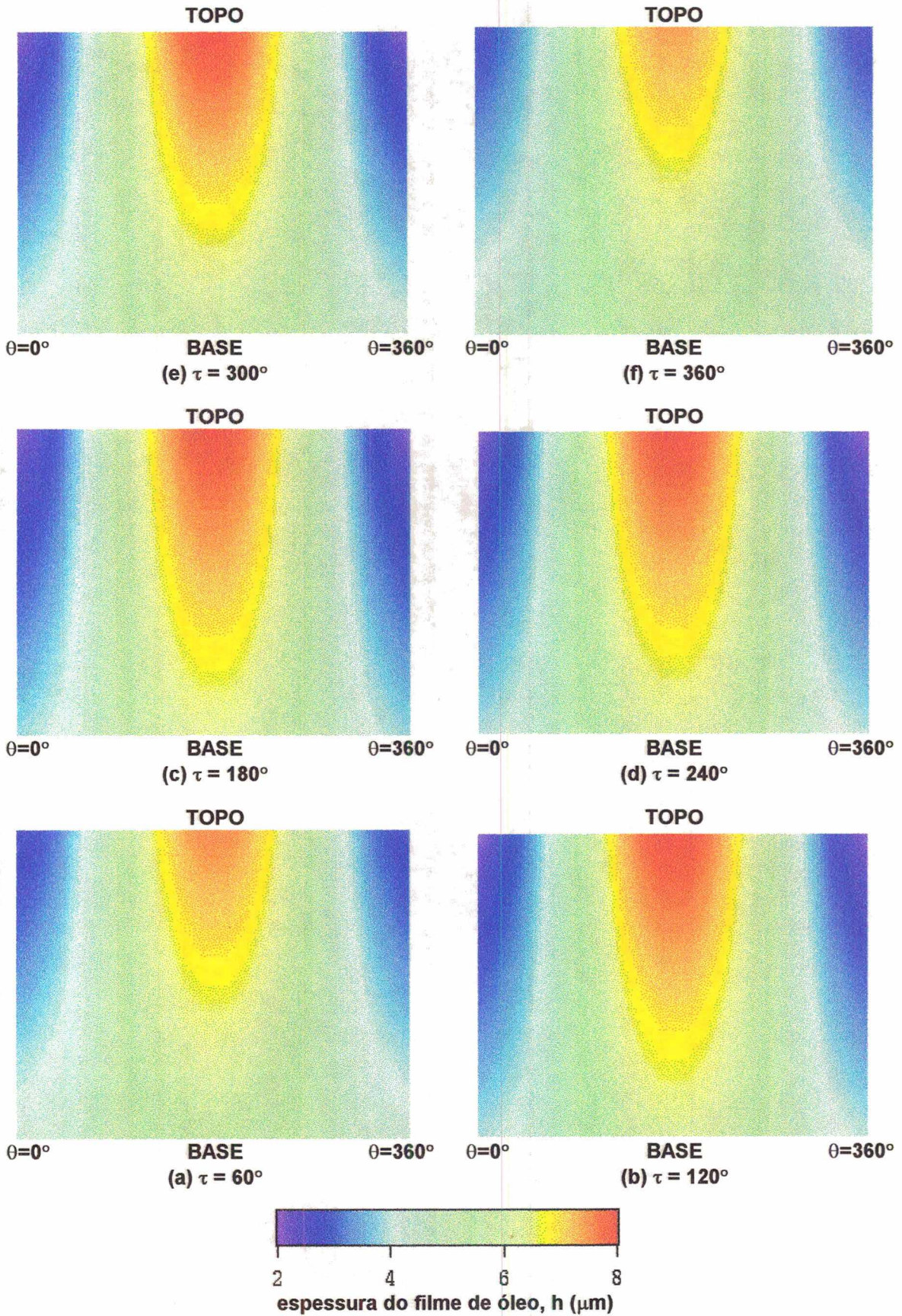


Fig. 4.28 - Variação da espessura do filme de óleo na folga radial para seis valores diferentes de τ

Cada um dos seis quadros da Fig. 4.28, representa o domínio de solução da equação de Reynolds, ou a folga radial “planificada”, como mostrada na Fig. 2.6. Em todos os quadros, pode-se ver que as maiores espessuras – representadas em cor vermelha de acordo com a escala mostrada – aparecem numa região próxima ao topo do pistão em $\theta = 180^\circ$, enquanto que as menores espessuras – em cor roxa – aparecem também no topo, mas numa posição circunferencial oposta, em $\theta = 0^\circ$ (ou 360°), e isto ocorre porque ϵ_t é sempre maior que ϵ_b .

Na Fig. 4.29 apresentam-se as velocidades radiais do topo e da base do pistão. As duas – $\dot{\epsilon}_t$ e $\dot{\epsilon}_b$ – são bastante parecidas, confirmando-se mais uma vez a inclinação quase constante do pistão.

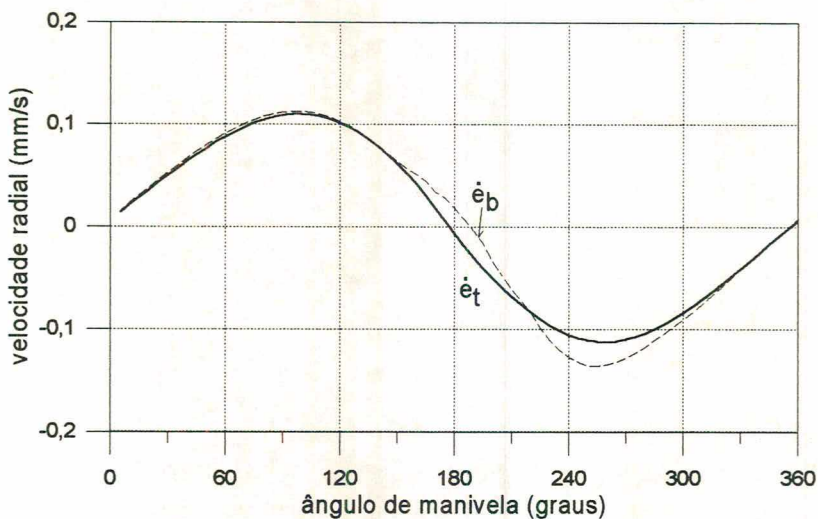


Fig. 4.29 - Variações das velocidades radiais do topo e da base do pistão em função do ângulo de manivela

Os campos de pressão na folga para seis posições diferentes do ângulo de manivela, são mostrados na Fig. 4.30. De forma similar àquela da Fig. 4.28, cada um dos seis quadros representa a folga “planificada”, e em cada um deles indica-se o topo e a base do pistão e a posição do ângulo de manivela correspondente. Deve-se observar que, ao contrário da Fig. 4.28, cada quadro possui uma escala de cores diferente (mostrada abaixo de cada quadro), e portanto a cor vermelha indica, por exemplo, pressões da ordem de **1,6 MPa** no quadro (c), e da ordem de **0,14 MPa** no quadro (f).

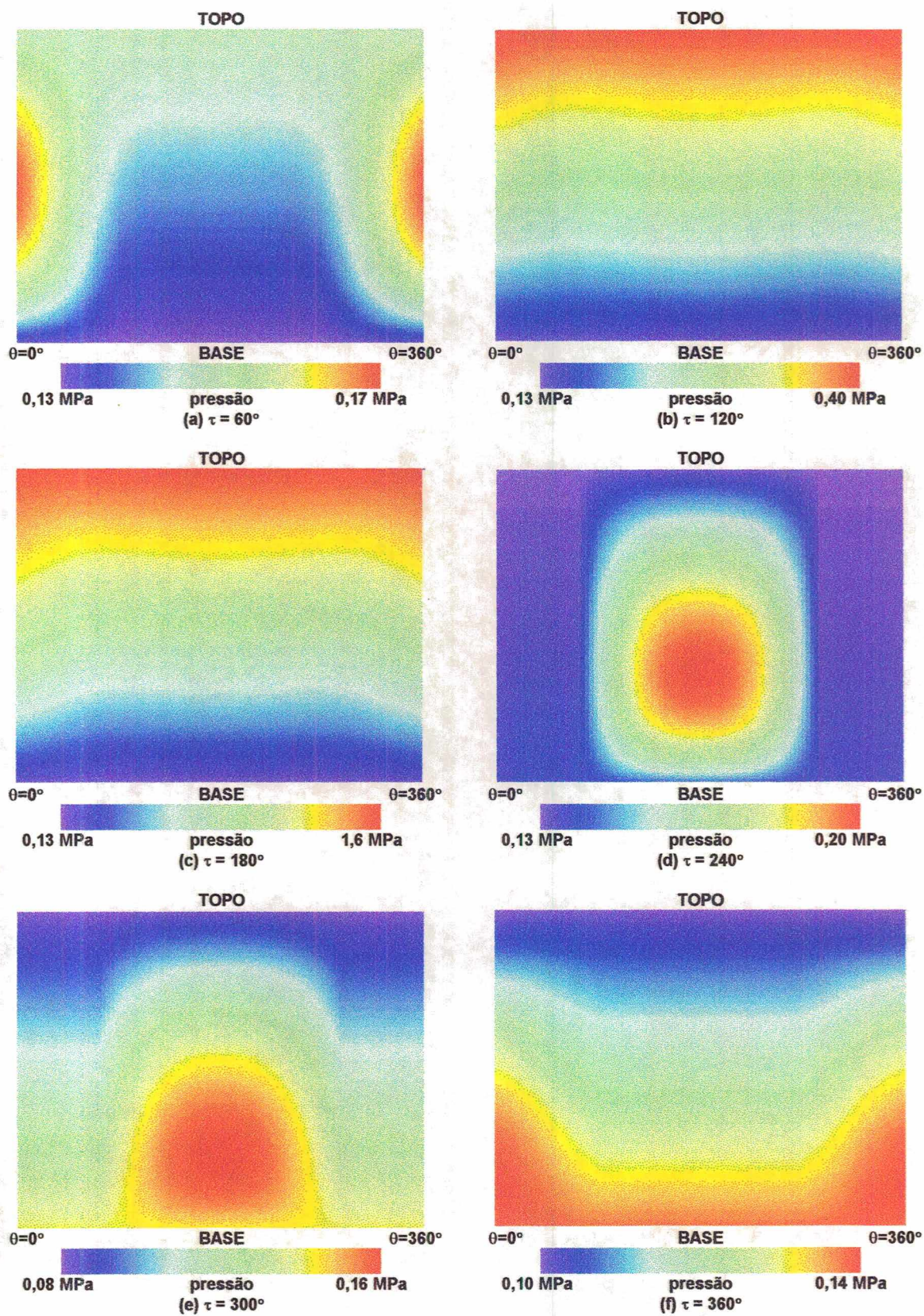


Fig. 4.30 - Campos de pressão na folha para seis valores diferentes de τ

Pela análise do quadro (a) da Fig. 4.30, correspondente a $\tau = 60^\circ$, observa-se que a região de mais alta pressão está em $\theta = 0^\circ$ (ou 360°). Observando-se ainda as excentricidades e as velocidades radiais para esta mesma posição, nas Fig. 4.27 e 4.29, nota-se que esta região de alta pressão aparece como uma reação ao movimento de aproximação do pistão em direção à parede do lado direito do cilindro (correspondente a $\theta = 0^\circ$) – e não devido ao efeito cunha – pois as velocidades radiais \dot{e}_t e \dot{e}_b são ambas positivas.

No quadro (b) e no quadro (c) as regiões de alta pressão aparecem no topo do pistão, devido à pressão do gás em compressão ser muito alta. Pode-se notar também nestes dois quadros, que a região de alta pressão é um pouco maior em $\theta = 0^\circ$, o que já é suficiente para se ter forças hidrodinâmicas negativas, como se pode ver na Fig. 4.21 para $\tau = 180^\circ$.

A região de alta pressão que aparece no quadro (d), em $\tau = 240^\circ$, é causada pelo movimento do pistão (e não pela pressão do gás sendo comprimido), de forma semelhante àquela do quadro (a). Todavia, no quadro (d), a localização da região de alta pressão é em $\theta = 180^\circ$, porque as velocidades radiais são negativas, e portanto em direção ao lado esquerdo do cilindro.

Em $\tau = 300^\circ$, no quadro (e), a pressão de sucção – na base do pistão – é maior que a pressão do gás em compressão, no topo do pistão. Pode-se ver também, neste quadro, o efeito da cavitação do filme de óleo, responsável pela descontinuidade apresentada nas curvas isobáricas. Tal descontinuidade aparece devido ao rompimento do filme de óleo, tornando a pressão igual à pressão de cavitação.

No último quadro, o quadro (f), com $\tau = 360^\circ$, pode-se ver que a região de mais alta pressão aparece em $\theta = 0^\circ$ e próximo à base do pistão, porque nesta posição também a pressão de sucção é maior que a pressão do gás em compressão. Deve-se notar que neste quadro a magnitude das pressões é muito baixa, chegando a, no máximo, **0,14 MPa** e, em consequência, a força hidrodinâmica é baixa, como pode-se ver na Fig. 4.21 para $\tau = 360^\circ$.

4.5 VARIAÇÃO DE PARÂMETROS DE PROJETO

Nesta seção faz-se uma verificação da influência dos parâmetros de projeto z_p , c e μ na trajetória do pistão dentro do cilindro. O estudo é dividido em três classes que são

apresentadas nas seções seguintes.

O compressor usado desta seção em diante é o compressor 2, com os parâmetros geométricos, dinâmicos e operacionais apresentados na Tabela 4.2.

Para obtenção dos resultados apresentados nesta seção usa-se um recurso para uma convergência mais rápida do programa computacional: trabalha-se inicialmente com $\Delta\tau = 10^\circ$ e uma malha grosseira, de 6 por 6 pontos nodais até a convergência, com um limite inferior de 300 ciclos e superior de 800 ciclos do ângulo de manivela. Em seguida, partindo-se dos valores obtidos com o passo de tempo $\Delta\tau$ e a malha grosseiros, passa-se para o uso de $\Delta\tau = 5^\circ$ e malha 15 por 15, que foi escolhida após um estudo de refino de malha, apresentado na seção 4.2. O uso de um limite inferior para o número de ciclos serve para se verificar se, de fato, houve a convergência. O programa utiliza a simplificação correspondente à Etapa 9 da seção 4.4.4, que considera a massa do pistão somente no somatório de forças na direção axial.

Os resultados focalizam a variação de h_{\min} , a vazão média pela folga e a potência média consumida por atrito viscoso em um ciclo. A espessura h_{\min} é a menor distância atingida entre o pistão e o cilindro em um ciclo completo.

4.5.1 Variação da posição do pino (classe 1)

Nesta classe faz-se a variação da posição do pino, z_P , ao longo do comprimento do pistão, L , variando z_P/L de 0 a 1 (do topo à base do pistão).

A variação de h_{\min} com z_P/L é mostrada na Fig. 4.31, e as variações da vazão e da potência, também em função de z_P/L , são apresentadas na Fig. 4.32.

Uma comparação entre a Fig. 4.31 e a Fig. 4.14 mostra uma aparente contradição, porque na Fig. 4.31 nota-se que, quando $z_P/L = 1/3$, o pistão tem boa estabilidade, ao contrário do caso mostrado na Fig. 4.14. Contudo deve-se observar que, no caso da Fig. 4.14, o compressor estudado é o compressor 1, e o compressor 2 é usado na obtenção da Fig. 4.31. Portanto, não se pode dizer que tal contradição existe, porque os resultados não se referem ao mesmo compressor.

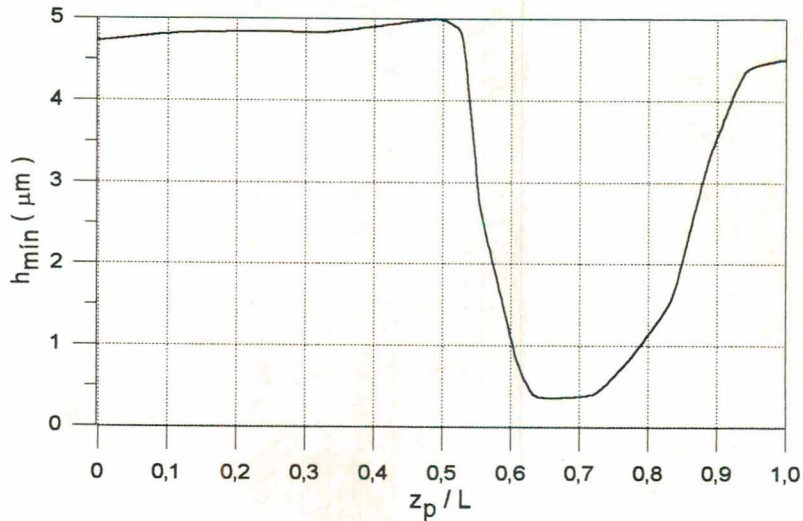


Fig. 4.31 - Variação da espessura mínima do filme de óleo em função da posição do pino

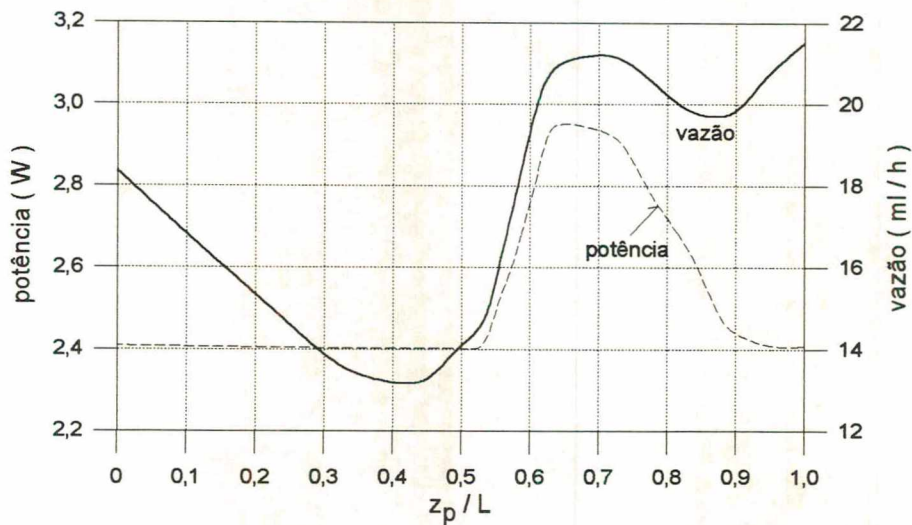


Fig. 4.32 - Variações da vazão média através da folga, e da potência média consumida por atrito viscoso em função da posição do pino

O valor ótimo de z_p , aquele que resulta em um máximo valor de h_{\min} e mínimas vazão e potência, se situa aproximadamente no meio do pistão, entre $z_p/L = 0,400$ e $z_p/L = 0,500$. No ponto $z_p/L = 0,500$ tem-se $h_{\min} = 4,98 \mu\text{m}$, a posição do pino na qual o pistão é mais estável, com a vazão através da folga, $Q = 14,08 \text{ ml/h}$, e a potência consumida por atrito viscoso, $P = 2,40 \text{ W}$. Contudo, no ponto em que $z_p/L = 0,415$, a potência permanece em $P = 2,40 \text{ W}$, a espessura mínima do filme de óleo não é menor que $h_{\min} = 4,80 \mu\text{m}$, e a vazão através da folga radial é a mínima possível, com o valor $Q = 13,10 \text{ ml/h}$. Assim, levando-se em consideração que, para economia de energia, o principal é a minimização da potência consumida e o vazamento através da folga, considera-se o ponto correspondente a $z_p/L = 0,415$ como sendo

o ponto ótimo, porque neste ponto o pistão não chega a ser considerado instável. Partindo-se do ponto $z_p/L = 0,500$ em direção a valores maiores de z_p/L , há uma queda significativa na estabilidade do pistão, com uma diminuição considerável de h_{\min} e um conseqüente aumento na vazão e na potência. Tal queda culmina em $z_p/L = 0,636$, onde o pistão é altamente instável – com h_{\min} bem pequeno, em torno de $0,381 \mu\text{m}$ –, e com vazão e potência consumida em seus valores mais altos, $Q = 20,88 \text{ ml/h}$ e $P = 2,94 \text{ W}$. O valor $h_{\min} = 0,381 \mu\text{m}$ corresponde a apenas 8% do valor de h_{\min} no ponto considerado ótimo, $h_{\min} = 4,80 \mu\text{m}$. A vazão $Q = 20,88 \text{ ml/h}$ é 59% maior do que o valor ótimo da vazão, $Q = 13,10 \text{ ml/h}$, e a potência $P = 2,94 \text{ W}$, é 23% maior do que o valor ótimo para a potência, $P = 2,40 \text{ W}$.

Este resultado, com a posição ótima do pino – em relação à estabilidade do pistão – aproximadamente no meio do pistão, também foi obtido em um problema semelhante por Gommed e Etsion (1993, 1994), que também constataram que a vazão é baixa neste ponto. O aumento da vazão com o aumento da instabilidade do pistão pode ser racionalizado, considerando-se que com a oscilação do pistão há um aumento da espessura h em alguns pontos, e uma diminuição em outros. Ocorre que a vazão aumenta nos pontos onde h é maior, e diminui onde h é menor, sem que este último efeito compense o primeiro, tendo-se assim uma vazão maior no balanço total em toda a extensão da folga. Uma explicação análoga também vale para o aumento da potência com a instabilidade do pistão, como é comentado na seção 4.4.1.2.

Continuando-se em direção a valores de z_p/L acima de $0,636$, há novamente um aumento acentuado nos valores de h_{\min} , que atinge $h_{\min} = 4,50 \mu\text{m}$ quando $z_p/L = 1,000$. Neste intervalo há uma queda considerável na potência, caindo novamente a $P = 2,40 \text{ W}$. Contudo, na vazão há uma queda a $Q = 19,84 \text{ ml/h}$ em $z_p/L = 0,833$, mas novamente um aumento até $Q = 21,51 \text{ ml/h}$ em $z_p/L = 1,000$.

Partindo-se do ponto ótimo, $z_p/L = 0,415$, agora em direção a menores valores de z_p , h_{\min} diminui muito pouco, atingindo $h_{\min} = 4,72 \mu\text{m}$ em $z_p/L = 0$. A potência permanece em $P = 2,40 \text{ W}$, mas a vazão aumenta em 40%; chegando a $Q = 18,3 \text{ ml/h}$ em $z_p/L = 0$.

Os valores de h_{\min} , Q e P para os diversos valores de z_p/L citados acima são mostrados

na Tabela 4.3, onde a linha representada em **negrito** corresponde ao ponto ótimo.

Tabela 4.3 - Valores de h_{\min} , Q e P para alguns valores de z_p/L

| z_p/L | h_{\min} (μm) | desvio do ponto ótimo | Q (ml/h) | desvio do ponto ótimo | P (W) | desvio do ponto ótimo |
|--------------|------------------------------|-----------------------|--------------|-----------------------|-------------|-----------------------|
| 0 | 4,72 | -1,7% | 18,30 | 40% | 2,40 | 0 |
| 0,415 | 4,80 | 0 | 13,10 | 0 | 2,40 | 0 |
| 0,500 | 4,98 | 3,8% | 14,08 | 7,5% | 2,40 | 0 |
| 0,575 | 1,97 | -60% | 17,45 | 33% | 2,61 | 8,8% |
| 0,636 | 0,381 | -92% | 20,88 | 59% | 2,94 | 23% |
| 0,833 | 1,55 | -68% | 19,84 | 51% | 2,63 | 9,6% |
| 1,000 | 4,50 | -6,3% | 21,51 | 64% | 2,40 | 0 |

A posição do pino afeta significativamente a magnitude e o sentido do momento hidrodinâmico. Na Fig. 4.33 pode-se ver a variação do momento hidrodinâmico com o ângulo de manivela para quatro posições do pino diferentes: $z_p/L = 0$, $z_p/L = 0,500$, $z_p/L = 0,636$ e $z_p/L = 1,000$. Nota-se que em $z_p/L = 0,636$, a magnitude do momento hidrodinâmico é bem maior que as demais, resultando em um h_{\min} menor, como se vê na Fig. 4.31. Já em $z_p/L = 0,500$, os momentos são bem menores do que os demais porque, nesta posição, a força resultante sobre o pistão tem sua linha de ação próxima ao pino, tanto na subida quanto na descida do pistão.

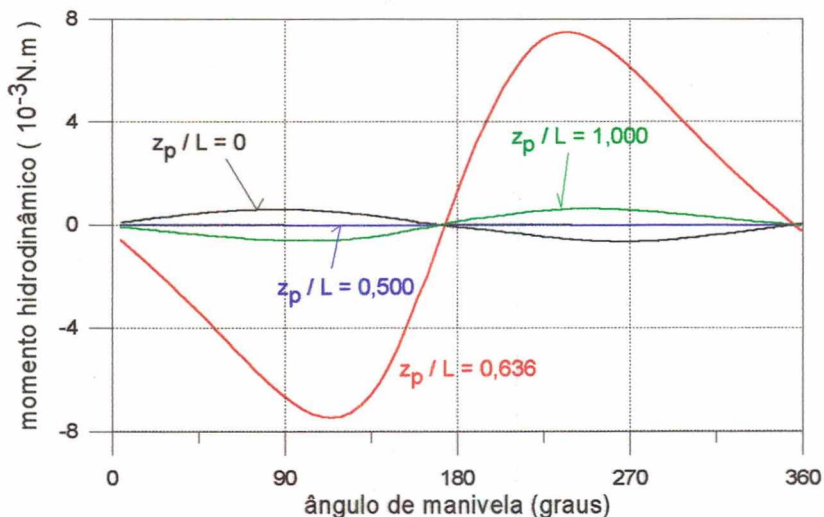


Fig. 4.33 - Variação do momento hidrodinâmico com o ângulo de manivela para quatro posições do pino diferentes

As variações das excentricidades do topo e da base para as quatro posições do pino

citadas anteriormente são mostradas na Fig. 4.34. Confirma-se nesta figura que, realmente, as excentricidades são bem menores quando $z_p/L = 0,500$. Nota-se ainda, na Fig. 4.34, que o comportamento de ϵ_t em $z_p/L = 0$ é similar ao comportamento de ϵ_b em $z_p/L = 1,000$, e vice-versa. Isto mostra que, pelo menos neste caso, a diferença entre p_{cil} e p_{suc} tem pouca influência sobre as excentricidades, uma vez que o comportamento de ϵ_b quando $z_p/L = 0$ na descida do pistão, é bastante parecido com o comportamento de ϵ_t quando $z_p/L = 1,000$ na subida do pistão.

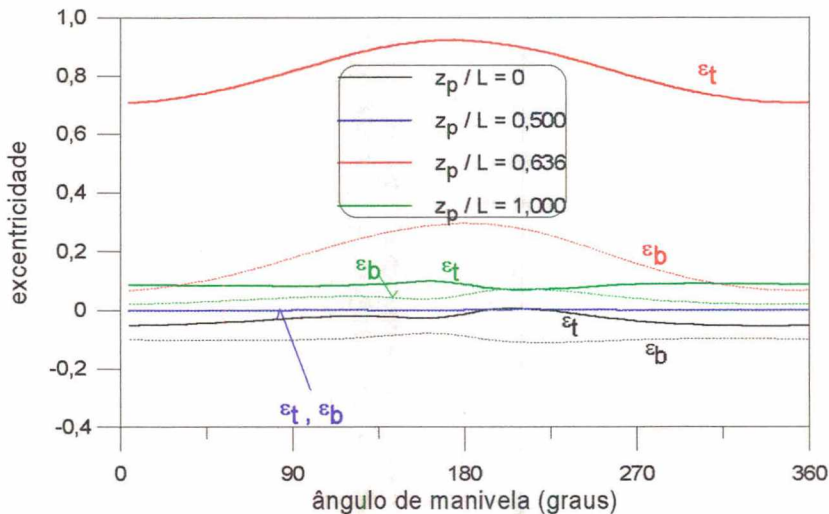


Fig. 4.34 - Variações das excentricidades do topo e da base para quatro posições do pino diferentes

Outra observação feita a partir da Fig. 4.34 é que, em $z_p/L = 0,636$, o pistão permanece com uma diferença entre ϵ_t e ϵ_b praticamente constante – portanto com uma inclinação também praticamente constante – apesar de o pistão se deslocar radialmente. As excentricidades para a posição $z_p/L = 0,500$, que é o meio do pistão, são muito pequenas e aparecem na Fig. 4.34 como uma reta. Na Fig. 4.35 pode-se observar melhor a variação destas excentricidades, onde se nota que ϵ_t e ϵ_b são praticamente iguais. Resultado semelhante também foi obtido por Li et al. (1983), estudando um motor automotivo.

A posição do pino usada no compressor em estudo, o compressor 2 (ver Tabela 4.2), é $z_p/L = 0,575$. Nesta posição, $h_{min} = 1,97 \mu m$, ou um valor correspondente a 40% do valor ótimo. A vazão, $Q = 17,45 \text{ ml/h}$, é 33% maior do que a ótima, e a potência, $P = 2,61 \text{ W}$, 8,8% maior do que a potência ótima.

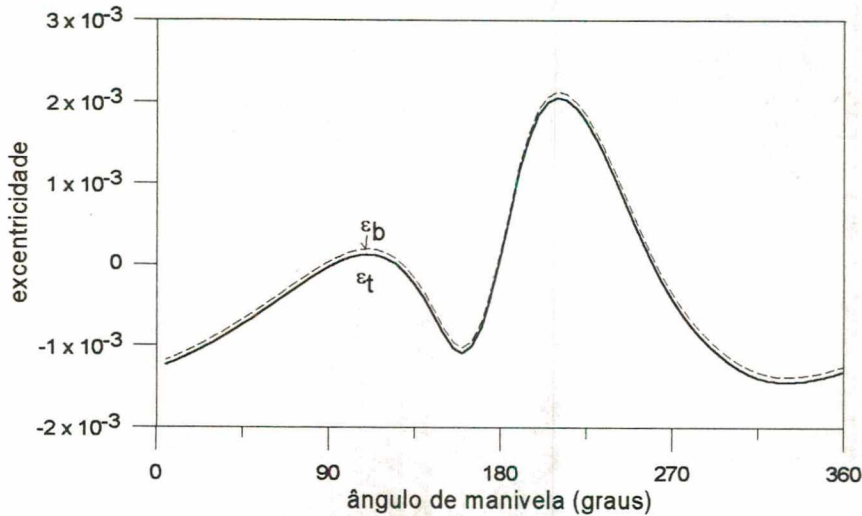


Fig. 4.35 - Variações das excentricidades do topo e da base para $z_p/L = 0,500$, no meio do pistão

4.5.2 Variação da folga radial (classe 2)

Nesta classe é feita a variação da folga radial, c , de $1,5 \mu\text{m}$ a $10 \mu\text{m}$. Não se adotou nenhum critério para a escolha desta faixa de variação, que é limitada por valores aceitáveis em um projeto.

Na Fig. 4.36 pode-se ver a variação de h_{\min} em função da folga radial, e na Fig. 4.37 as variações da vazão e da potência em função da folga radial. Para comparação, mostram-se também, na Fig. 4.37, os resultados analíticos obtidos através das equações (4.1) e (4.2), calculando-se a vazão e a potência média em função da folga radial. Nota-se que, na vazão, a diferença entre as curvas aumenta com o aumento da folga radial, ou seja, para folgas menores, a aproximação na qual se baseia a Etapa 1 – aproximação de que não há movimento radial do pistão – é melhor do que para folgas maiores. Na potência, a diferença entre as duas etapas é bem menor, e permanece praticamente constante em toda a faixa de variação da folga radial. De uma forma geral, referindo-se ainda à Fig. 4.37, pode-se notar que a vazão e a potência calculadas através da Etapa 1, são sempre menores que os valores previstos pelo programa referente à Etapa 9, qualquer que seja a folga radial. Com isto, conclui-se que a simplificação adotada na Etapa 1 pode não ser segura em alguns casos, como por exemplo, quando a folga radial for muito grande.

Voltando à Fig 4.36, tem-se que em $c = 1,5 \mu\text{m}$, $h_{\min} = 0,871 \mu\text{m}$. A vazão em $c = 1,5$

RESULTADOS E DISCUSSÕES

μm , – mostrada na Fig. 4.37 – como era de se esperar, é muito pequena, $Q = 0,427 \text{ ml/h}$. Contudo, também como era de se esperar de uma folga tão pequena, a potência atinge $P = 8,22 \text{ W}$, que é um valor muito alto.

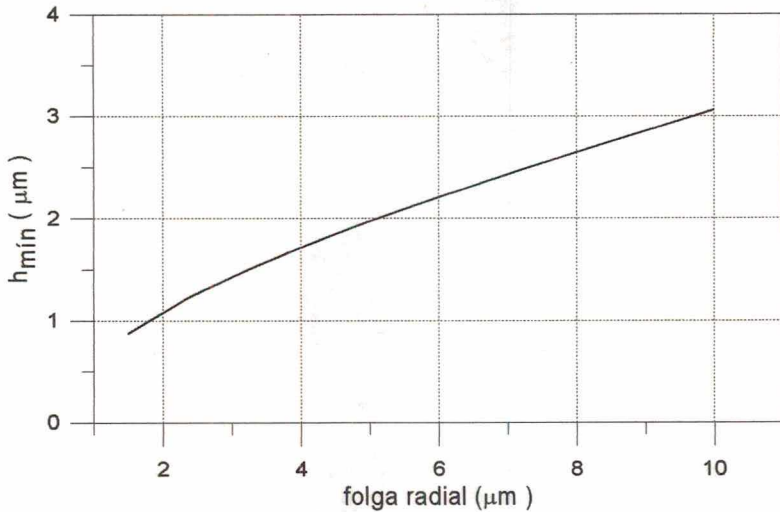


Fig. 4.36 - Variação da espessura mínima do filme de óleo em função da folga radial

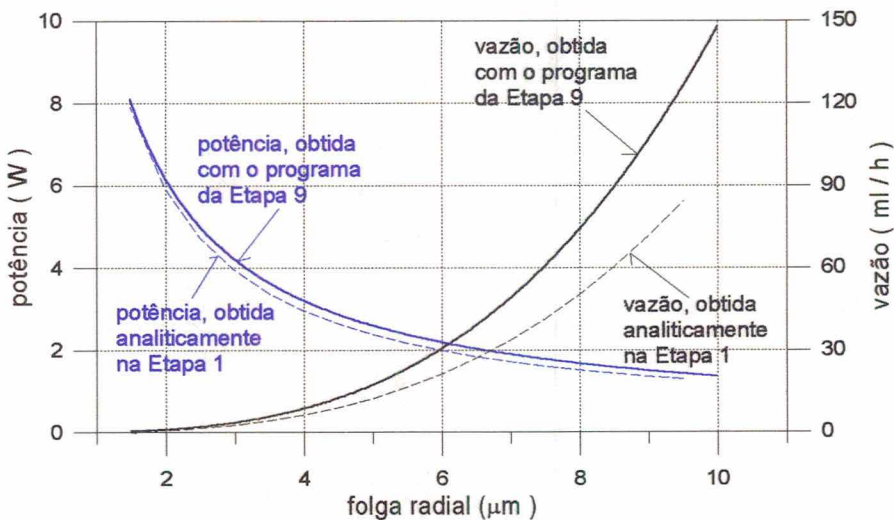


Fig. 4.37 - Variações da vazão média através da folga, e da potência média consumida por atrito viscoso em função da variação da folga radial

À medida em que se aumenta a folga radial, nota-se que há um aumento considerável em h_{min} , que chega a $h_{\text{min}} = 3,06 \mu\text{m}$ em $c = 10 \mu\text{m}$. Com este aumento da folga há uma queda considerável na potência e um aumento também considerável na vazão. A vazão passa de $Q = 0,427 \text{ ml/h}$ em $c = 1,5 \mu\text{m}$ para $Q = 147 \text{ ml/h}$ em $c = 10 \mu\text{m}$; e a potência passa de $P = 8,22 \text{ W}$ para $P = 1,38 \text{ W}$ neste mesmo intervalo. Apesar de haver um aumento de h_{min} com c , não

significa necessariamente que o pistão seja mais estável. A excentricidade adimensional máxima atingida em cada ciclo aumenta com o aumento de c , conforme se mostra na Fig. 4.38. Este resultado comprova que o pistão fica mais instável com o aumento da folga radial, conforme constatado também nos resultados de Li et al. (1983), Zhu et al. (1992) e Gommed e Etsion (1994). Quando a folga é muito pequena, a estabilidade é maior porque, conforme comentado no último parágrafo da seção 4.4.1.3, a força hidrodinâmica é maior quando a espessura do filme de óleo é menor, devido a uma maior rigidez do filme de óleo.

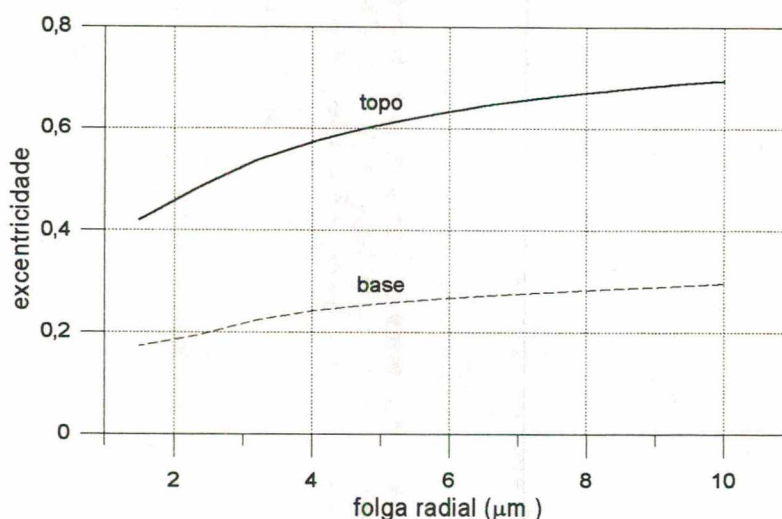


Fig. 4.38 - Variação das excentricidades ϵ_t e ϵ_b máximas atingidas em um ciclo, em função da folga radial

Um valor ótimo para a folga radial, se dependesse apenas da estabilidade do pistão e da vazão de óleo, seria a menor folga possível. Contudo, se isso for feito há um aumento muito grande na potência consumida por atrito viscoso, devido aos altos gradientes de velocidade no filme de óleo. O ponto que pode ser considerado ótimo, onde se tem um bom valor de h_{\min} combinado com vazão e potência mínimas, se localiza aproximadamente em $c = 6 \mu\text{m}$. Neste ponto, $h_{\min} = 2,20 \mu\text{m}$; $Q = 31,08 \text{ ml/h}$ e $P = 2,21 \text{ W}$. Assim, em $c = 1,5 \mu\text{m}$, a vazão é apenas 1,4% da vazão no ponto ótimo, e a potência é 272% maior que a potência naquele ponto. Já em $c = 10 \mu\text{m}$, tem-se uma vazão 374% maior que o valor da vazão no ponto ótimo, mas uma potência menor, que corresponde a apenas 62% da potência naquele ponto.

Os valores de h_{\min} , Q e P para os valores de c citados anteriormente são mostrados na Tabela 4.4, onde a linha representada em negrito corresponde ao ponto ótimo.

Tabela 4.4 Valores de h_{\min} , Q e P para alguns valores de c

| c (μm) | h_{\min} (μm) | desvio do ponto ótimo | Q (ml/h) | desvio do ponto ótimo | P (W) | desvio do ponto ótimo |
|---------------------|------------------------------|-----------------------|----------|-----------------------|-------|-----------------------|
| 1,5 | 0,871 | -60% | 0,427 | -99% | 8,22 | 272% |
| 6 | 2,20 | 0 | 31,08 | 0 | 2,21 | 0 |
| 10 | 3,06 | 39% | 147 | 373% | 1,38 | -38% |

4.5.3 Variação da viscosidade do óleo (classe 3)

Faz-se agora a variação da viscosidade do óleo, μ , de 0,5 cP a 17,15 cP. Esta faixa de variação foi escolhida analisando-se as viscosidades máxima e mínima disponíveis para o óleo lubrificante usado.

A variação de h_{\min} em função de μ é apresentada na Fig. 4.39. Observa-se que quanto maior a viscosidade mais estável é o pistão, conforme esperado. Com uma viscosidade $\mu = 0,5$ cP tem-se $h_{\min} = 1,21 \mu\text{m}$. Já com a viscosidade do outro extremo, $\mu = 17,15$ cP, $h_{\min} = 3,37 \mu\text{m}$.

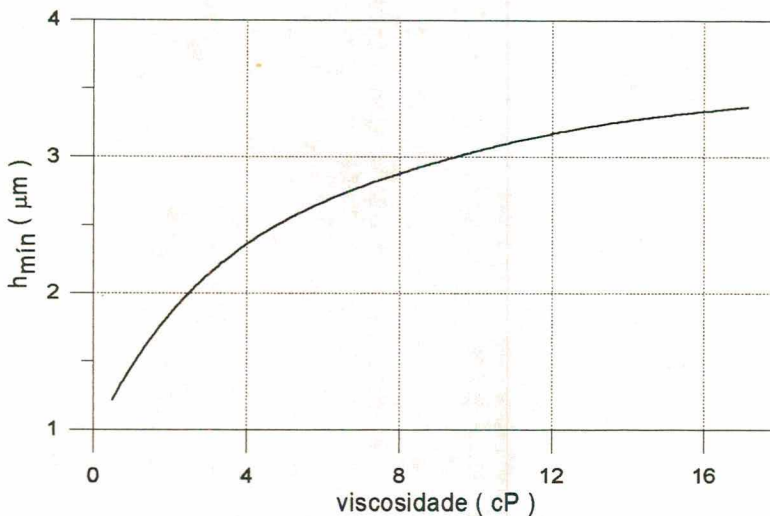


Fig. 4.39 - Variação da espessura mínima do filme de óleo em função da viscosidade

Esta tendência de estabilização com o aumento da viscosidade pode ser explicada analisando-se a equação (2.14), onde se tem duas parcelas responsáveis pela “geração” de pressão na folga: o efeito cunha, dado por $12\mu R(V_F/2) \partial h/\partial \xi$; e o efeito de filme espremido, dado por $-12\mu R^2 \partial h/\partial t$. Nota-se que o aumento da viscosidade promove um aumento em

módulo nas duas parcelas. Um aumento no efeito de filme espremido corresponde a um aumento na rigidez do filme de óleo, ocasionando assim uma maior dificuldade de aproximação entre o pistão e a parede, resultando em uma maior estabilidade do pistão quando se tem viscosidades mais altas.

As variações da vazão através da folga e da potência consumida por atrito viscoso em função de μ são mostradas na Fig. 4.40, onde se apresentam também, para comparação, os resultados analíticos obtidos através das equações (4.1) e (4.2), calculando-se a vazão e a potência média em função viscosidade do óleo. Nota-se mais uma vez que o modelo correspondente à Etapa 1, sempre prevê vazão e potência menores do que os resultados correspondentes calculados com o programa usado nesta seção, associado à Etapa 9.

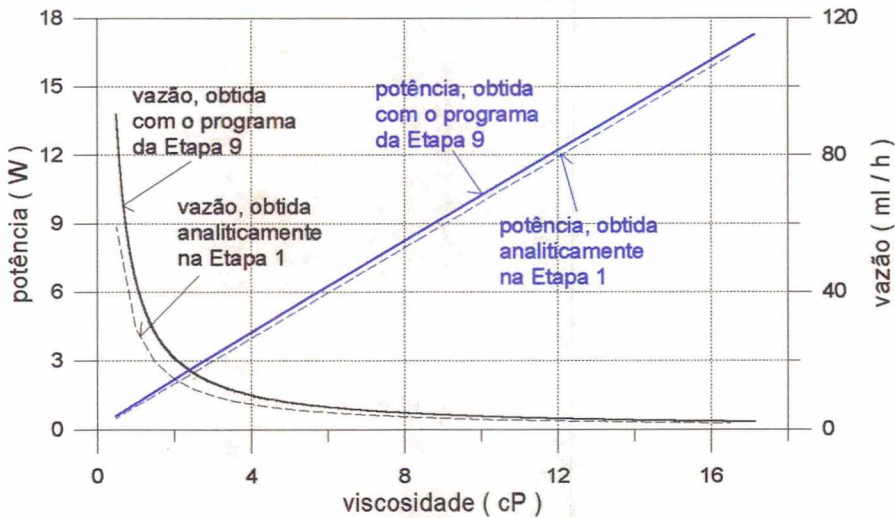


Fig. 4.40 - Variações da vazão média através da folga e da potência média consumida por atrito viscoso em função da viscosidade do óleo

Quanto maior a viscosidade, maior a potência consumida e menor a vazão, e vice-versa. De uma forma geral, a potência tem uma variação linear com a viscosidade, o que não é o caso para a vazão. Observando as equações da vazão, equação (2.45); e a equação da força de atrito, equação (2.43), nota-se que a vazão é inversamente proporcional a μ , e a força de atrito, associada à potência, é diretamente proporcional a μ .

Se o critério para a escolha do ponto ótimo for a estabilidade do pistão, sem dúvida deve-se escolher a viscosidade mais alta possível. Todavia, com uma viscosidade muito alta, a perda de potência por atrito viscoso é muito grande, conforme se vê na Fig. 4.40. A faixa de

operação que alia vazão e potência baixas fica entre **2,0 cP** e **4,0 cP**. A viscosidade do óleo lubrificante do compressor em estudo é $\mu = 2,4 \text{ cP}$. Com esta viscosidade, tem-se $Q = 17,45 \text{ ml/h}$ e $P = 2,61 \text{ W}$. Considerando este como sendo o ponto ótimo, e partindo em direção a viscosidades menores, observa-se um aumento brusco na vazão, que chega a $Q = 91,77 \text{ ml/h}$ para $\mu = 0,5 \text{ cP}$, ou seja, **426%** maior que o valor considerado ótimo. A potência chega a $P = 0,592 \text{ W}$, ou **23%** do valor ótimo.

Partindo agora do ponto ótimo em direção a viscosidades maiores, observa-se uma queda na vazão, que chega a $Q = 2,15 \text{ ml/h}$ para $\mu = 17,15 \text{ cP}$, ou **12%** do valor ótimo. A potência aumenta linearmente, chegando a $P = 17,29 \text{ W}$, que é **562%** maior que o valor ótimo, de $P = 2,61 \text{ W}$. O aumento na vazão com a diminuição da viscosidade, é consequência da diminuição do atrito viscoso, que reduz assim a resistência ao escoamento do óleo através da folga. Essa redução do atrito viscoso, evidentemente, provoca também uma redução na potência consumida.

Na Tabela 4.5 pode-se ver os valores de h_{\min} , Q e P com seus respectivos desvios do valor ótimo para os valores de μ citados anteriormente, onde a linha representada em negrito corresponde ao ponto ótimo.

Tabela 4.5 - Valores de h_{\min} , Q e P para alguns valores de μ

| μ (cP) | h_{\min} (μm) | desvio do ponto ótimo | Q (ml/h) | desvio do ponto ótimo | P (W) | desvio do ponto ótimo |
|------------|------------------------------|-----------------------|--------------|-----------------------|-------------|-----------------------|
| 0,5 | 1,21 | -39% | 91,77 | 426% | 0,592 | -77% |
| 2,4 | 1,97 | 0 | 17,45 | 0 | 2,61 | 0 |
| 17,15 | 3,37 | 71% | 2,15 | -88% | 17,29 | 562% |

Na Fig. 4.41 apresentam-se as variações das excentricidades do topo e da base para os dois casos extremos, $\mu = 0,5 \text{ cP}$ e $\mu = 17,15 \text{ cP}$; e ainda para o ponto ótimo, $\mu = 2,4 \text{ cP}$.

Observa-se que a inclinação do pistão só não permanece constante no caso em que $\mu = 0,5 \text{ cP}$, pois nos outros dois casos a diferença entre ε_t e ε_b permanece praticamente constante para qualquer valor do ângulo de manivela. Conforme já mencionado e evidenciado pela equação (4.41), quanto maior a viscosidade, mais estável é o movimento do pistão.

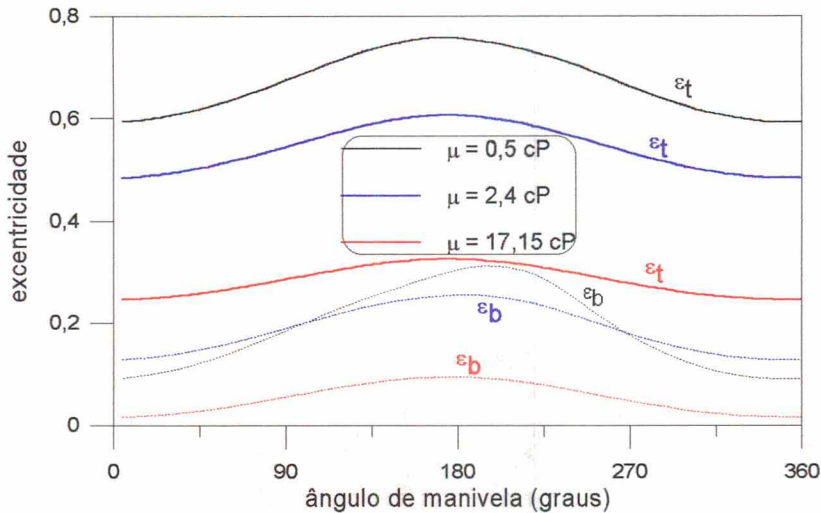


Fig. 4.41 - Variações das excentricidades do topo e da base para três viscosidades diferentes

4.6 POTÊNCIA TOTAL CONSUMIDA EM UM CICLO

Nesta seção faz-se o cálculo da potência no eixo da manivela para o compressor 2 (Tabela 4.2). Para se certificar a exatidão do código computacional, faz-se o cálculo da potência no eixo, P_e , de duas formas diferentes: através do diagrama indicado e através do torque que a biela exerce na manivela.

4.6.1 Potência média cedida ao gás em um ciclo

O diagrama indicado, ou diagrama p_v , é calculado usando-se as variações da pressão e do volume do cilindro em função de τ . A variação da pressão, p_{cil} em função de τ , é obtida de dados experimentais, como por exemplo o perfil mostrado na Fig 2.2. O volume do cilindro em função de τ , é obtido através da equação (2.54).

Na Fig. 4.42 apresenta-se o diagrama p_v obtido para o compressor 2. O trabalho líquido realizado sobre o gás em um ciclo, é dado pela área contornada pela curva, e seu valor, calculado por integração numérica, é $W = 1,022 \text{ J}$. A potência média cedida ao gás em um ciclo, P_i , pode então ser calculada dividindo-se W pelo tempo Δt gasto para a realização de um ciclo. Assim, com Δt calculado e igual a $17,045 \text{ ms}$, tem-se que $P_i = 59,94 \text{ W}$.

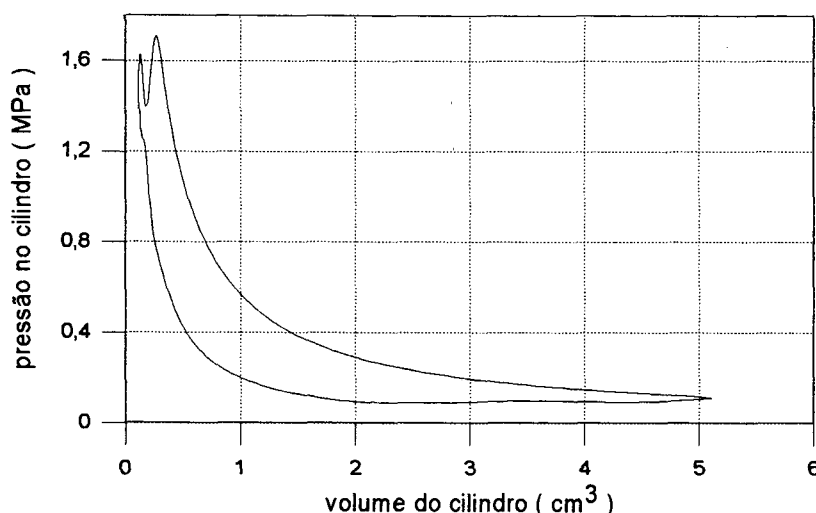


Fig. 4.42 -Diagrama pv para o compressor 2

4.6.2 Potência média no eixo da manivela

Os cálculos para obtenção da potência média no eixo, P_e , são mostrados na seção 2.4.5, onde se usa o torque que a biela exerce sobre a manivela. Na Fig. 4.43, mostra-se o comportamento do torque sobre o eixo da manivela em função de τ . A partir da integração desta curva, obteve-se o torque médio no eixo da manivela, $T = 0,1697 \text{ Nm}$. A potência média no eixo obtida a partir deste torque, simplesmente multiplicando-o por ω – que é considerado constante – foi $P_e = 62,55 \text{ W}$.

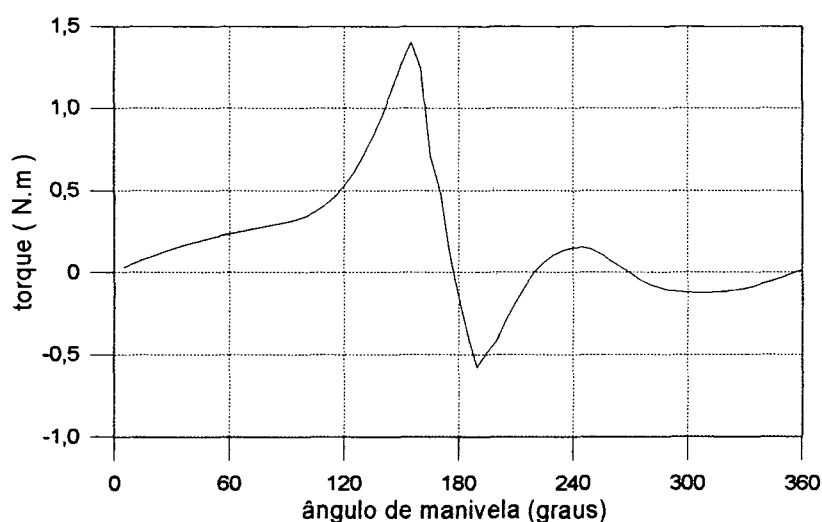


Fig. 4.43 -Variação do torque no eixo da manivela em função de τ

Observando-se a Fig. 4.43, pode-se ver que o torque muda de sinal quando τ está bem

próximo de 180° . Isto acontece porque neste ponto, que está bem próximo ao PMS, acontece uma inversão do braço de alavanca, e desta posição até $\tau = 230^\circ$ aproximadamente, o gás em compressão entrega energia ao motor que aciona a manivela, ao contrário do que acontece na maior parte do ciclo, em que o motor realiza trabalho sobre o gás.

4.6.3 Comparação entre a potência obtida através do diagrama indicado e através do torque no eixo

Como foi mencionado anteriormente, faz-se agora uma comparação entre as potências P_i e P_e . Para tanto, deve-se levar em consideração que P_i é a potência líquida que o gás recebe, e P_e é a potência no eixo da manivela. Desta forma, para que se possa comparar estes dois resultados, deve-se usar a potência média consumida por atrito viscoso na folga, \bar{P} , dada pela equação (2.48). Assim, deve-se somar P_i com \bar{P} , para se obter a potência total média requerida em um ciclo, que deve ser igual à potência no eixo, P_e . Na Tabela 4.6 mostra-se uma comparação entre os resultados obtidos.

Tabela 4.6 - Comparação entre a potência cedida ao gás e a potência no eixo da manivela

| potência cedida ao gás (P_i) | potência média consumida por atrito (\bar{P}) | total |
|--|---|-------|
| 59,94 W | 2,62 W | 62,56 |
| potência no eixo da manivela (P_e) | | 62,55 |
| 62,55 W | | |

Este resultado comprova que o cálculo das forças e momentos – tanto no pistão quanto na biela – e o cálculo do torque e potência estão corretos.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta um modelo dinâmico para a lubrificação do pistão em compressores alternativos de refrigeração. Para isso, faz-se um balanço das forças atuantes no pistão e na biela, sendo que tais forças são a força hidrodinâmica exercida pelo filme de óleo, a força exercida pela biela, a força de atrito viscoso – também devida ao filme de óleo – e a força exercida pelo gás refrigerante em compressão, além dos momentos associados a estas forças. Uma vez modelada a dinâmica do pistão, faz-se o cálculo dos movimentos de translação e rotação do pistão, dentro da folga radial, para várias situações. Alguns dos principais casos estudados são a variação da posição do pino do pistão, da folga radial e da viscosidade do óleo lubrificante, e a influência destas variações na oscilação lateral do pistão.

As principais simplificações e aproximações usadas no presente trabalho foram as seguintes:

- a) A temperatura do óleo lubrificante é constante, e com isso considera-se que a sua viscosidade não se altera e nem tampouco há deformações de origem térmica. Um novo estudo poderia ser feito com a inclusão da equação da energia na solução, por exemplo, trabalhando-se com o caso mais simples (equivalente à Etapa 1). Desta forma, poder-se-ia fazer a comparação das duas formulações em relação ao tempo computacional: o uso da formulação mais completa sem a inclusão da equação da energia, ou a formulação mais simples com a inclusão da equação da energia.
 - b) Todos os sólidos envolvidos no problema são considerados rígidos, e portanto não se leva em consideração a lubrificação elastohidrodinâmica.
-

CONCLUSÕES

- c) As superfícies são consideradas lisas, sem problemas de rugosidade superficial.
- d) O óleo lubrificante é considerado puro, sem gás refrigerante nele dissolvido.
- e) O movimento do pistão é plano, e não são considerados desalinhamentos nos mancais que fazem a conexão entre o pistão e a biela, e entre a biela e a manivela.

As principais conclusões do trabalho, em relação ao compressor estudado, são enumeradas a seguir:

- i) A vazão de óleo lubrificante através da folga radial e a potência consumida por atrito viscoso são afetadas pela oscilação radial do pistão. Isto acontece, porque estas duas grandezas dependem da espessura do filme de óleo, que varia em toda a extensão da folga radial durante um ciclo.
 - ii) A hipótese de que a força exercida pela biela é paralela ao seu eixo, que ainda é bastante usada em outros trabalhos, não é uma boa hipótese, pelo menos para o caso estudado aqui. Deve-se fazer um balanço de forças também sobre a biela, para se calcular a força que esta exerce sobre o pistão.
 - iii) A melhor posição para se colocar o pino no pistão, é em uma posição a aproximadamente $\frac{2}{5}$ do seu comprimento, a partir do topo. Nesta posição tem-se boa estabilidade, menor potência consumida por atrito viscoso e ainda menor vazão de óleo pela folga, o que significa menor perda de gás refrigerante dissolvido no óleo lubrificante.
 - iv) A folga radial utilizada tem bom comportamento em relação à instabilidade, potência e vazão de óleo. Constatou-se que uma folga radial bem pequena proporciona boa estabilidade para o pistão, mas por outro lado leva a um alto consumo de potência.
 - v) A viscosidade do óleo lubrificante, se for alta, proporciona melhor lubrificação, dando maior estabilidade ao pistão. Contudo, também gera grandes perdas de potência por atrito viscoso. A viscosidade utilizada no compressor explorado aqui, leva a um bom comportamento do pistão em relação à vazão e à potência, e é satisfatória em relação à sua estabilidade.
-

Boa parte das conclusões apresentadas já eram conhecidas, mas muitas vezes sem um estudo detalhado dos fenômenos. Outros estudos podem ainda ser feitos, como por exemplo a variação do tamanho do pistão, da sua massa, momento de inércia, posição do centro de massa, etc. Pode-se também verificar se a forma cilíndrica é realmente a mais adequada para o pistão, ou constatar se um desvio lateral na posição do pino seria interessante para se diminuir os momentos atuando sobre o pistão, e ainda se o uso de chanfros no topo ou na base não produziria melhores resultados do ponto de vista da potência consumida e do vazamento de óleo com gás refrigerante dissolvido através da folga.

Como complemento, pode-se incluir efeitos de origem térmica, resolvendo simultaneamente com as equações de Reynolds e do movimento, a equação da energia. Conforme algumas das referências bibliográficas utilizadas, a inclusão de efeitos de deformação elástica e irregularidade superficial também pode ser importante.

Com o objetivo de se obter menores tempos computacionais, pode-se fazer, posteriormente, um estudo da compatibilidade dos modelos numéricos envolvidos. Tais modelos são a solução da equação de Reynolds via método dos volumes finitos, e a solução das equações da dinâmica via método de Newton-Raphson.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cameron, A., 1976, "Basic Lubrication Theory", 2. ed, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Dursunkaya, Z., Keribar, R. and Ganapathy, V., 1994, "A Model of Piston Secondary Motion and Elastohydrodynamic Skirt Lubrication", *Journal of Tribology*, Vol. 116, pp. 777-785.
- Ferreira, R. T. S., Prata, A. T., Fagotti, F. e Manke, A. L., 1992, "Simulação do Escoamento pela Folga Pistão/Cilindro de Compressores Alternativos", Relatório de Pesquisa I, Rel. Pesq. EMBRACO-UFSC, Florianópolis.
- Gommed, K. and Etsion, I., 1993, "Dynamic Analysis of Gas Lubricated Reciprocating Ringless Pistons – Basic Modeling", *Journal of Tribology*, Vol. 115, pp. 207-213.
- _____, 1994, "Parametric Study of the Dynamic Performance of Gas Lubricated Ringless Pistons", *Journal of Tribology*, Vol. 116, pp. 63-69.
- Gosney, W. B., 1982, "Principles of Refrigeration", Cambridge University Press., New York.
- Lee, H., 1994, "High-Performance Internal Combustion Engine With Gas-Cushioned Piston", *JSME International Journal*, Series B, Vol. 37, No. 2, pp. 434-442.
- Li, D. F., Rohde, S. M. and Ezzat, H. A., 1983, "An Automotive Piston Lubrication Model", *ASLE Transactions*, Vol. 26, No. 2, pp. 151-160.

- Mabie, H. H., 1980, "Dinâmica das Máquinas", 2. ed., Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corp., New York.
- Patankar, S. V.; Liu, C. H. and Sparrow, E. M., 1977, "Fully Developed Flow and Heat Transfer in Ducts Having Streamwise-Periodic Variations of Cross Sectional Area", *Transactions of the ASME*, Vol. 99, pp. 180-186.
- Pinkus, O. and Sternlicht, B., 1961, "Theory of Hydrodynamic Lubrication", McGraw-Hill Book Co., New York.
- Prata, A. T., 1992, "Lubrificação Hidrodinâmica de Mancais Radiais", Apostila utilizada no curso de Teoria da Lubrificação, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Santos, E. S., 1995, "Carregamento Dinâmico de Mancais Radiais com Cavitação do Filme de Óleo", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Sokolnikoff, I. S. and Redheffer, R. M., 1966, "Mathematics of Physics and Modern Engineering", 2nd. ed., McGraw-Hill Book Company.
- Stoecker, W. F., 1989, "Design of Thermal Systems", 3rd. ed., McGraw-Hill International Editions.
- Stoecker, W. F. and Jones, J. W., 1985, "Refrigeração e Ar Condicionado", 2. ed., Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo.
- Teixeira, L. A., Prata, A. T., Ferreira, R. T. S., Manke, A. L. e Fagotti, F., 1995, "Modelagem Hidrodinâmica do Escoamento de Óleo/Refrigerante Através da Folga Pistão/Cilindro", Rel. Pesq. EMBRACO-UFSC, Florianópolis.
- Yamaguchi, A., 1994, "Motion of the Piston in Piston Pumps and Motors", *JSME International Journal*, Series B, Vol. 37, No. 1, pp. 83-88.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

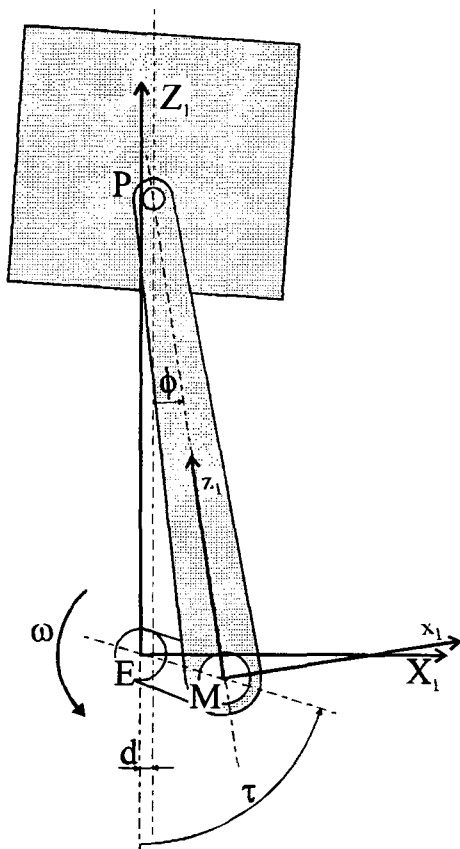
- Zhu, D., Cheng, H. S., Takayuki, A. and Hamai, K., 1992, "A Numerical Analysis for Piston Skirts in Mixed Lubrication – Part I: Basic Modeling", *Journal of Tribology*, Vol. 114, pp. 553-562.
- Zhu, D., Hu, Y., Cheng, H. S., Takayuki, A. and Hamai, K., 1993, "A Numerical Analysis for Piston Skirts in Mixed Lubrication – Part II: Deformation Considerations", *Journal of Tribology*, Vol. 115, pp. 125-133.

APÊNDICE A

Cálculo da posição, velocidade e aceleração do pistão na direção axial

Como os movimentos na direção radial são extremamente pequenos, considera-se nesta análise que o pistão só se movimenta na direção axial.

Define-se, conforme pode-se ver na Fig. A.1, dois sistemas de referência: um fixo no eixo da manivela, o sistema $X_1Y_1Z_1$, e outro móvel, solidário à biela, $x_1y_1z_1$. Os vetores unitários correspondentes às direções $X_1Y_1Z_1$ são os vetores \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , respectivamente. O vetor unitário correspondente à direção Y_1 , \hat{j} , é perpendicular ao plano do papel com o sentido de fora para dentro.



A posição do pistão, \vec{r}_P , é dada por,

$$\vec{r}_P = \vec{r}_M + \vec{r}_{PM} \quad (\text{A.1})$$

onde

\vec{r}_M - vetor posição do ponto M

\vec{r}_{PM} - vetor posição do ponto P em relação a

M.

Fig. A.1 - Sistemas de coordenadas usados no cálculo de V_P e A_P

Fazendo a decomposição dos vetores nas direções X_1 e Z_1 tem-se, para \bar{r}_P ,

$$\bar{r}_P = d\hat{i} + Z_1\hat{k} \quad (A.2)$$

onde Z_1 é a posição do ponto P no eixo Z_1 . Para \bar{r}_M , tem-se

$$\bar{r}_M = C_{ME}(\text{sen}\tau \cdot \hat{i} - \text{cos}\tau \cdot \hat{k}) \quad (A.3)$$

onde C_{ME} é igual à distância \overline{ME} . Quanto a \bar{r}_{PM} , pode-se escrever,

$$\bar{r}_{PM} = -C_{MP}(\text{sen}\phi \cdot \hat{i} - \text{cos}\phi \cdot \hat{k}) \quad (A.4)$$

onde C_{MP} é igual à distância \overline{MP} . Escrevendo novamente a equação (A.1), fazendo uso das equações (A.2), (A.3) e (A.4), tem-se,

$$d\hat{i} + Z_1\hat{k} = C_{ME}(\text{sen}\tau \cdot \hat{i} - \text{cos}\tau \cdot \hat{k}) - C_{MP}(\text{sen}\phi \cdot \hat{i} - \text{cos}\phi \cdot \hat{k}) \quad (A.5)$$

Da equação (A.5), somando separadamente os termos nas direções X_1 e Z_1 , tem-se, para a direção X_1 ,

$$d = C_{ME}\text{sen}\tau - C_{MP}\text{sen}\phi \quad (A.6)$$

e, para a direção Z_1 ,

$$Z_1 = -C_{ME}\text{cos}\tau + C_{MP}\text{cos}\phi \quad (A.7)$$

Da equação (A.6), tem-se que,

$$C_{MP}\text{sen}\phi = C_{ME}\text{sen}\tau - d \quad (A.8)$$

Observando a Fig. A.1, pode-se escrever, usando a equação (A.8),

$$(C_{MP}\text{cos}\phi)^2 = C_{MP}^2 - (C_{ME}\text{sen}\tau - d)^2 \quad (A.9)$$

Assim, usando $C_{MP}\text{cos}\phi$ da equação (A.9) na equação (A.7), chega-se a

$$Z_1 = -C_{ME}\text{cos}\tau + [C_{MP}^2 - (C_{ME}\text{sen}\tau - d)^2]^{1/2} \quad (A.10)$$

A expressão (A.10) foi deduzida para o sistema de coordenadas $X_1Y_1Z_1$. Para se utilizar o sistema XYZ , apresentado na Fig. 2.4, usa-se a seguinte expressão,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{PMS} + \mathbf{C}_{PMS} - \mathbf{Z}_1 \quad (\text{A.11})$$

onde,

\mathbf{Z} - posição do ponto P no sistema XYZ

\mathbf{Z}_{PMS} - distância do ponto morto superior ao topo do cilindro, origem do sistema XYZ

\mathbf{C}_{PMS} - distância do ponto morto superior ao eixo da manivela.

Aplicando a equação (A.10) na equação (A.11), com alguns rearranjos nos termos, tem-se a posição \mathbf{Z} do pistão no sistema XYZ ,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}_{PMS} - \left\{ \left[\mathbf{C}_{MP}^2 - (\mathbf{C}_{ME} \text{sen} \tau - \mathbf{d})^2 \right]^{1/2} - \mathbf{C}_{ME} \text{cos} \tau \right\} + \mathbf{Z}_{PMS} \quad (\text{A.12}).$$

Para o cálculo da velocidade do pistão, inicialmente deriva-se a equação (A.1), e chega-se a,

$$\vec{\mathbf{V}}_P = \vec{\mathbf{V}}_M + \vec{\mathbf{V}}_{PM} \quad (\text{A.13})$$

onde

$\vec{\mathbf{V}}_P$ - vetor velocidade do ponto P

$\vec{\mathbf{V}}_M$ - vetor velocidade do ponto M

$\vec{\mathbf{V}}_{PM}$ - vetor velocidade do ponto P em relação a M .

Como a distância \overline{MP} é fixa, $\vec{\mathbf{V}}_{PM}$ pode ser escrita na seguinte forma,

$$\vec{\mathbf{V}}_{PM} = \vec{\boldsymbol{\phi}} \times \vec{\mathbf{C}}_{MP} \quad (\text{A.14}),$$

onde $\vec{\phi}$ é o vetor velocidade angular da biela e \vec{C}_{MP} , cujo módulo é igual a \overline{MP} , é o vetor posição do ponto **P** no sistema de referência $x_1y_1z_1$. Então, unindo as equações (A.13) e (A.14), tem-se

$$\vec{V}_P = \vec{V}_M + \vec{\phi} \times \vec{C}_{MP} \quad (\text{A.15})$$

Pode-se agora decompor os termos da equação (A.15) em seus componentes nas direções X_1 e Z_1 , usando os vetores unitários \hat{i} e \hat{k} . Assim, tem-se, considerando que o movimento do pistão acontece somente na direção axial,

$$\vec{V}_P = V_P \hat{k} \quad (\text{A.16})$$

onde V_P é o módulo do vetor \vec{V}_P . A velocidade \vec{V}_M é a velocidade tangencial do ponto **M**, e é dada por

$$\vec{V}_M = \omega \cdot C_{ME} (\cos \tau \cdot \hat{i} + \text{sen} \tau \cdot \hat{k}) \quad (\text{A.17})$$

O termo $\vec{\phi} \times \vec{C}_{MP}$, que é a velocidade tangencial do ponto **P** em relação ao ponto **M** devido ao giro da biela, torna-se

$$\vec{\phi} \times \vec{C}_{MP} = \dot{\phi} \cdot C_{MP} (\cos \phi \cdot \hat{i} + \text{sen} \phi \cdot \hat{k}) \quad (\text{A.18})$$

Somando agora os componentes da equação (A.15) dados pelas equações (A.16), (A.17) e (A.18) separadamente em cada direção, tem-se, na direção X_1 ,

$$0 = \omega \cdot C_{ME} \cos \tau + \dot{\phi} \cdot C_{MP} \cos \phi \quad (\text{A.19})$$

e, na direção Z_1 ,

$$V_P = \omega \cdot C_{ME} \text{sen} \tau + \dot{\phi} \cdot C_{MP} \text{sen} \phi \quad (\text{A.20})$$

Usando $\dot{\phi}$ da equação (A.19) na equação (A.20), tem-se, após alguns arranjos,

$$V_P = \omega \cdot C_{ME} (\text{sen} \tau - \cos \tau \cdot \text{tg} \phi) \quad (\text{A.21})$$

Observando a Fig. A.1, nota-se que

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d}{[C_{MP}^2 - (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d)^2]^{1/2}} \quad (\text{A.22})$$

Substituindo $\operatorname{tg}\phi$ da equação (A.22) na equação (A.21), e rearranjando alguns termos, vem

$$V_P = \omega \cdot C_{ME} \left\{ \operatorname{sent}\tau - \cos\tau \cdot (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d) [C_{MP}^2 - (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d)^2]^{-1/2} \right\}$$

Como o sentido do eixo Z do sistema de coordenadas XYZ apresentado na seção 2.2 é contrário ao do eixo Z_1 , coloca-se um sinal negativo na expressão de V_P , que se torna,

$$V_P = \omega \cdot C_{ME} \left\{ \cos\tau \cdot (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d) [C_{MP}^2 - (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d)^2]^{-1/2} - \operatorname{sent}\tau \right\}$$

(A.23).

Derivando a expressão acima e fazendo alguns ajustes, tem-se a aceleração do pistão na direção Z ,

$$A_P = \omega^2 \cdot [C_{MP}^2 - (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d)^2]^{-3/2} \cdot (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d)^2 (C_{ME} \cos\tau)^2 + \\ + \omega^2 \cdot [C_{MP}^2 - (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d)^2]^{-1/2} \cdot \\ \cdot [(C_{ME} \cos\tau)^2 - (C_{ME} \operatorname{sent}\tau - d) \cdot C_{ME} \operatorname{sent}\tau] - \omega^2 \cdot C_{ME} \cos\tau$$

(A.24)

onde $\tau = \omega t$ e, portanto, $\frac{d\tau}{dt} = \omega$.

APÊNDICE B

Cálculo das acelerações do centro de massa da biela nas direções radial e axial

Da mesma forma usada no Apêndice A, nesta análise considera-se que o olhal menor da biela (ponto **P** da Fig. 2.1), só se movimenta na direção axial.

Inicialmente, define-se dois sistemas de coordenadas retangulares: um fixo no eixo da manivela, o sistema $X_2Y_2Z_2$, e outro móvel, solidário ao olhal maior da biela, $x_2y_2z_2$, com z_2 paralelo ao eixo longitudinal da biela. Os eixos Y_2 e y_2 se orientam no sentido do plano do papel para fora. Na Fig. B.1 pode-se ver uma representação esquemática do mecanismo biela-manivela com os sistemas de referência citados, onde **B** representa o centro de massa da biela.

A velocidade do ponto **B**, \vec{V}_B , é dada por (Mabie, 1980),

$$\vec{V}_B = \vec{V}_M + \vec{V}_{BM} \quad (B.1)$$

onde

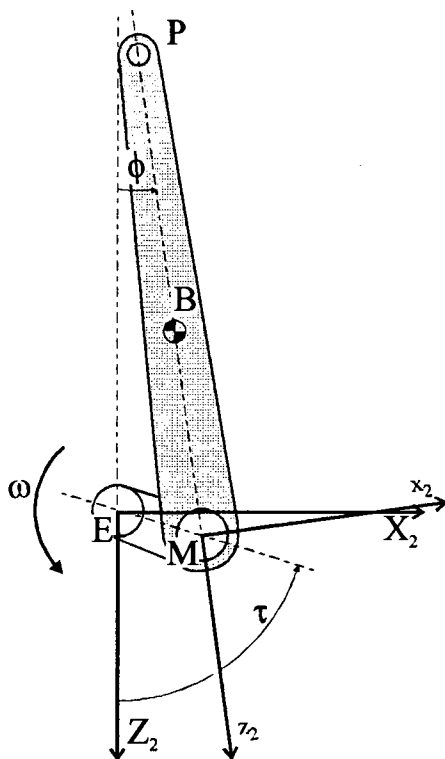


Fig. B.1 - Sistemas de coordenadas usados no cálculo de A_{Bx} e A_{Bz}

\vec{V}_M - vetor velocidade do ponto **M**

\vec{V}_{BM} - vetor velocidade do ponto **B** em relação a **M**.

Como a distância \overline{MP} é fixa, \vec{V}_{BM} pode ser escrita na seguinte forma,

$$\vec{V}_{BM} = \vec{\phi} \times \vec{C}_{MB} \quad (\text{B.2}),$$

onde $\vec{\phi}$ é o vetor velocidade angular da biela e \vec{C}_{MB} , cujo módulo é igual a \overline{MB} , é o vetor posição do ponto **B** no sistema de referência $x_2y_2z_2$. Então, unindo as equações (B.1) e (B.2), pode-se escrever,

$$\vec{V}_B = \vec{V}_M + \vec{\phi} \times \vec{C}_{MB} \quad (\text{B.3}).$$

Como o objetivo desta seção é o cálculo dos componentes da aceleração do ponto **B**, faz-se agora a derivação da equação (B.3) em relação ao tempo,

$$\vec{A}_B = \vec{A}_M + \vec{\dot{\phi}} \times \vec{C}_{MB} + \vec{\phi} \times \vec{\dot{C}}_{MB} \quad (\text{B.4}).$$

onde

\vec{A}_B - vetor aceleração do ponto **B**

\vec{A}_M - vetor aceleração do ponto **M**

$\vec{\dot{\phi}}$ - vetor aceleração angular da biela.

O vetor $\vec{\dot{C}}_{MB}$ é igual ao vetor \vec{V}_{BM} , que é dado pela equação (B.2). Usando esta equação na equação (B.4), tem-se

$$\vec{A}_B = \vec{A}_M + \vec{\dot{\phi}} \times \vec{C}_{MB} + \vec{\phi} \times (\vec{\phi} \times \vec{C}_{MB}) \quad (\text{B.5}).$$

Pode-se agora decompor os termos da equação (B.5) em seus componentes nas direções X_2 , Y_2 e Z_2 . Para tanto definem-se os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , correspondentes aos eixos X_2 ,

Y_2 e Z_2 respectivamente. Assim, tem-se, para o vetor \vec{A}_B ,

$$\vec{A}_B = A_{Bx} \hat{i} + A_{Bz} \hat{k} \quad (B.6)$$

onde A_{Bx} é o módulo do componente de \vec{A}_B na direção X_2 e A_{Bz} na direção Z_2 .

A aceleração \vec{A}_M é a aceleração centrípeta do ponto M e é a única, visto que ω é constante e a manivela é rígida, não aparecendo assim acelerações tangenciais, radiais e de Coriolis. Assim,

$$\vec{A}_M = -\omega^2 C_{ME} (\text{sen} \tau \cdot \hat{i} + \text{cos} \tau \cdot \hat{k}) \quad (B.7)$$

onde C_{ME} é igual à distância \overline{ME} .

Para o termo $\ddot{\phi} \times \vec{C}_{MB}$ da equação (B.5), faz-se primeiro a decomposição de \vec{C}_{MB} nas direções de \hat{i} e \hat{k} , portanto,

$$\vec{C}_{MB} = -C_{MB} (\text{sen} \phi \cdot \hat{i} + \text{cos} \phi \cdot \hat{k}) \quad (B.8)$$

e assim,

$$\ddot{\phi} \times \vec{C}_{MB} = -\ddot{\phi} \cdot C_{MB} (\text{cos} \phi \cdot \hat{i} - \text{sen} \phi \cdot \hat{k}) \quad (B.9)$$

Finalmente, para o termo $\vec{\phi} \times (\vec{\phi} \times \vec{C}_{MB})$, parte-se da equação (A.18) do Apêndice A, com atenção para a diferença entre os sistemas de referência. Para o sistema $X_2 Y_2 Z_2$, tem-se

$$\vec{\phi} \times \vec{C}_{MB} = \dot{\phi} \cdot C_{MB} (-\text{cos} \phi \cdot \hat{i} + \text{sen} \phi \cdot \hat{k}) \quad (B.10)$$

e assim,

$$\vec{\phi} \times (\vec{\phi} \times \vec{C}_{MB}) = \dot{\phi} \cdot \hat{j} \times \dot{\phi} \cdot C_{MB} (-\text{cos} \phi \cdot \hat{i} + \text{sen} \phi \cdot \hat{k})$$

onde $\dot{\phi}$ é o módulo da velocidade angular da biela. Efetuando o produto vetorial e fazendo alguns arranjos, tem-se,

$$\ddot{\phi} \times (\ddot{\phi} \times \vec{C}_{MB}) = \dot{\phi}^2 C_{MB} (\text{sen}\phi \cdot \hat{i} + \text{cos}\phi \cdot \hat{k}) \quad (\text{B.11})$$

Somando agora os componentes da equação (B.5) dados pelas equações (B.6), (B.7), (B.9) e (B.11) separadamente para cada direção, tem-se, para a direção X_2 ,

$$\boxed{A_{Bx} = -\omega^2 C_{ME} \text{sen}\tau - \ddot{\phi} \cdot C_{MB} \text{cos}\phi + \dot{\phi}^2 C_{MB} \text{sen}\phi} \quad (\text{B.12})$$

e, para a direção Z_2 ,

$$\boxed{A_{Bz} = -\omega^2 C_{ME} \text{cos}\tau + \ddot{\phi} \cdot C_{MB} \text{sen}\phi + \dot{\phi}^2 C_{MB} \text{cos}\phi} \quad (\text{B.13})$$

Tem-se assim, nas equações (B.12) e (B.13), as expressões desejadas.