

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

FERNANDO CÉSAR FERREIRA

MODELOS DE ANÁLISE ECONÔMICA EM CONDIÇÕES DE  
INFORMAÇÕES DIFUSAS

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção  
do Grau de Mestre em Engenharia



0.245.026-7

UFSC-BU

Florianópolis  
Agosto de 1995

# MODELOS DE ANÁLISE ECONÔMICA EM CONDIÇÕES DE INFORMAÇÕES DIFUSAS



**FERNANDO CÉSAR FERREIRA**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de **Mestre em Engenharia**

Especialidade em Engenharia de Produção e aprovada em sua forma final pelo  
Programa de Pós-Graduação.

Handwritten signature of Prof. Osmar Possamai in black ink, written over a horizontal line.

Prof. Osmar Possamai PhD  
Coordenador do Curso

Handwritten signature of Prof. Leonardo Ensslin in black ink, written over a horizontal line.

Prof. Leonardo Ensslin, PhD.  
Orientador

Handwritten signature of Prof. Edgar Augusto Lanzer in black ink, written over a horizontal line.

Prof. Edgar Augusto Lanzer PhD

Handwritten signature of Prof. Bruno Harmut Kopittke in black ink, written over a horizontal line.

Prof. Bruno Harmut Kopittke Dr.

Handwritten signature of Prof. Robert W. Samohy in black ink, written over a horizontal line.

Prof. Robert W. Samohy PhD

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas aquelas pessoas que participaram da elaboração deste trabalho, direta ou indiretamente.

À minha mulher Rose, pela paciência no período em que tive de me dedicar exclusivamente ao trabalho.

À CAPES, por ter tornado possível este trabalho, dando-me suporte financeiro.

Ao meu orientador, Prof. Leonardo Ensslin, pela dedicação, e paciência em todas as vezes que se fizeram necessárias, e não foram poucas.

Ao Prof. João Randolpho Pontes, pelo incentivo ao meu ingresso no Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Santa Catarina.

Aos eminentes integrantes da Banca Examinadora, pelos valiosos comentários e sugestões apresentados ao presente trabalho.

Ao Prof. Neri dos Santos, então coordenador do curso, o qual esteve empenhado em tornar possível o meu ingresso no Programa de Pós-Graduação.

Ao Prof. Lanzer pela colaboração, principalmente, no primeiro ano no Programa.

Ao colega Carlos Henrique, pelo empréstimo do equipamento para elaboração do presente trabalho.

Aos professores, funcionários e colegas do Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina (EPS/UFSC), pelo apoio conferido durante todo o período do Curso.

*Lembre-se de que a tempestade  
é uma boa oportunidade para o  
pinheiro e o cipreste mostrarem  
sua força e sua estabilidade*

Ho Chi Min

*À minha mãe, sem a qual  
nada seria possível.*

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS E TABELAS</b>	viii
<b>RESUMO</b>	x
<b>ABSTRACT</b>	xi

### CAPÍTULO 1

<b>INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 Identificação do Problema	1
1.2 Propósitos do Trabalho	2
1.3 Limitações do Trabalho	2
1.4 Organização do Trabalho	3

### CAPÍTULO 2

#### **A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA ANÁLISE DE INVESTIMENTOS**

2.1 INTRODUÇÃO	4
2.1.1 Adaptação Estratégica da Engenharia Econômica	8
2.2 Modelos de Análise de Investimentos	9
2.2.1 Introdução	9
2.2.2 Os Modelos Determinísticos	10
2.2.3 Processos de Otimização	11
2.2.3.1 Programação Linear (PL)	11
2.2.3.2 Programação por Objetivos (PO)	12
2.2.3.3 Programação por Penalidades (PPP)	13
2.2.3.4 Otimização da Utilidade	14
2.2.3.5 Modelos de Análise Multi-critérios	14
2.2.4 Modelos Probabilísticos (Sob Risco)	15
2.2.4.1 Teorema de Bayes	16
2.2.5 Modelos Possibilísticos (Difusos)	20
2.3 Localização Teórica do Modelo	21
2.3.1 Intervalos Aritméticos	22
2.3.2 Distribuições de Possibilidades	23
2.3.3 Distribuições de Probabilidades	23

## **CAPÍTULO 3**

<b>SUPORTE TEÓRICO AO MODELO PROPOSTO</b>	24
3.1 INTRODUÇÃO	24
3.2 Intervalos Aritméticos	24
3.2.1 Operações com Intervalos Aritméticos	25
3.2.2 Intervalos Variáveis e Funções	27
3.2.3 Método Vertex	28
3.2.4 Melhoramento na Precisão dos Intervalos	29
3.2.5 Análise Variacional	32
3.3 Conjuntos Difusos	33
3.3.1 Representação dos Números Difusos	36
3.3.2 Operações com Números Difusos	37
3.4 Distribuição de Possibilidades	39
3.5 Ordenação de Quantidades Difusas (Conjuntos e Números)	41
3.5.1 Ordenação de Subconjuntos Difusos em Um Intervalo Unitário	41
3.5.2 Generalização do Método de Yager	42
3.5.3 Relação de Indiferença e Dominância	43
3.5.4 Outros Métodos para Hierarquização	44
3.6 Teoria da Utilidade	46
3.6.1 Notação Básica	46
3.6.2 Axiomas	46
3.6.3 Propriedades de $u(x)$	47
3.6.4 Determinação da Função Utilidade	47
3.6.5 Coeficiente de Aversão ao Risco	48
3.6.6 Expectância-variância	48
3.8 Estimativa com Base em Três Pontos	50
3.8.1 Distribuição Aproximada da Distribuição Beta (PERT)	50
3.8.2 Distribuição Beta	51
3.8.2 Distribuição Triangular	52
3.8.3 Distribuição AEX	53

## **CAPÍTULO 4**

<b>DESCRIÇÃO DO MODELO PROPOSTO</b>	55
4.1 INTRODUÇÃO	55

4.2 Primeira Etapa (Método Vertex)	57
4.2.1 Intervalos de Entrada	57
4.2.2 Cálculo do Valor Presente	58
4.2.3 Discretização do Intervalo de Possíveis Resultados para <i>VP</i>	61
4.2.4 Incorporação da Distribuição de Probabilidades	62
4.2.5 Intervalo de Dominância	63
4.2.6 Coeficiente de Aversão ao Risco ( <i>A</i> )	64
4.2.6.1 Análise Detalhada da Figura 4.6 (Função Expectância-variância)	65
4.2.7 Hierarquização das Alternativas	67
4.3 Segunda Etapa (Análise Variacional)	71
4.3.1 Introdução	71
4.3.2 Intervalos de Entrada	71
4.3.3 Cálculo do Valor Presente	72
4.3.4 Discretização do Intervalo de Possibilidades para <i>VP</i>	73
4.3.5 Intervalo de Dominância	73
4.3.5.1 Análise dos Intervalos de Dominância	74
4.3.6 Hierarquização das Alternativas	77
4.3.7 Comparação dos Métodos Vertex e Análise Variacional	80
4.4 Terceira Etapa (Abordagem Possibilística)	82
4.4.1 Introdução	82
4.4.2 Intervalos de Entrada	82
4.4.3 Cálculo do Valor Presente	82
4.4.4 Discretização do Intervalo de Possibilidades para <i>VP</i>	83
4.4.5 Distribuição de Possibilidades	84
4.4.6 Intervalo de Dominância	84
4.4.7 Aversão ao Risco	84
4.4.8 Hierarquização Difusa dos Projetos	85
4.4.8.1 Hierarquização ao Nível $\alpha$ igual a um	85
4.4.9 Comparação dos Métodos de Hierarquização de Quantidades Difusas	86

## **CAPÍTULO 5**

5.1 CONCLUSÕES	88
5.2 RECOMENDAÇÕES	89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	90
ANEXO 1	93
ANEXO 2	98

## LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 2.1	Restrições x Objetivos	12
Figura 2.2	Intersecção Restrições x Objetivos	13
Figura 2.3	Fluxograma dos Modelos Multicritérios	14
Figura 2.4	Diagrama de Venn	16
Figura 2.5	Incerteza x Informação	22
Figura 3.1	Função Monotonicamente Crescente	27
Figura 3.2	Região Retangular Tridimensional	28
Figura 3.3	Mapa de X para Y	29
Figura 3.4	Aumento da Precisão do Intervalo	30
Figura 3.5	Transformação das Informações	34
Figura 3.6	Número Difuso à Esquerda (L) e a Direita (R)	37
Figura 3.7	Adição e Multiplicação de Números Difusos	39
Figura 3.9	Distribuição de Possibilidades para a proposição "Jovem"	40
Figura 3.10	Valor Presente para Alternativas Diferentes	44
Figura 3.11	Cruzamento de Áreas de Ordenação	44
Figura 3.12	Função Utilidade	47
Figura 3.13	Função Utilidade em Intervalos	48
Figura 3.14	Expectância-variância x Aversão ao Risco	49
Figura 3.15	Função Beta no Intervalo [0 , 1]	52
Figura 4.1	Algoritmo do Modelo de Análise Proposto	56
Figura 4.2	Algoritmo para Calcular o <i>VP</i> dos projetos	59
Figura 4.3	Intervalo de Vairação <i>VP</i> (Vertex)	60
Figura 4.4	Discretização do Intervalo de Possibilidades	61
Figura 4.5	Discretização do Intervalo de Dominância	63
Figura 4.6	Função Expectância-variância	64
Figura 4.7	Dominância em n=8	65
Figura 4.8	Dominância em n=10	66
Figura 4.9	Dominância em n=14	66
Figura 4.10	Dominância em n=16	67
Figura 4.11	Dominância em n=23	67
Figura 4.12	Hierarquização $A=0,00$	68
Figura 4.13	Hierarquização $A=0,20$	69
Figura 4.14	Hierarquização $A=0,50$	69
Figura 4.15	Hierarquização $A=1,0$	70

Figura 4.16 Intervalo de Variação de $VP$	73
Figura 4.17 Discretização do Intervalo de Dominância	74
Figura 4.18 Dominância em $n= 8$ (Análise Variacional)	75
Figura 4.19 Dominância em $n= 10$ (Análise Variacional)	75
Figura 4.20 Dominância em $n= 14$ (Análise Variacional)	75
Figura 4.21 Dominância em $n= 16$ (Análise Variacional)	76
Figura 4.22 Dominância em $n= 23$ (Análise Variacional)	76
Figura 4.23 Hierarquização $A = 0$	78
Figura 4.24 Hierarquização $A =0,32$	78
Figura 4.25 Hierarquização $A =0,80$	79
Figura 4.26 Hierarquização $A =1,61$	79
Figura 4.27 Dominância $n=8$ (AN x VT)	80
Figura 4.28 Dominância $n=10$ (AN x VT)	80
Figura 4.29 Dominância $n=14$ (AN x VT)	81
Figura 4.30 Dominância $n=16$ (AN x VT)	81
Figura 4.31 Dominância $n=23$ (AN x VT)	82
Figura 4.32 Distribuição de Possibilidades de $VP$	83
Figura 4.33 Discretização do Intervalo de Dominância (difuso)	84
Figura 4.34 Hierarquização Difusa a Diferentes Níveis de alfa-cortes	85
Figura 4.35 Hierarquização Difusa	86
Tabela 2.1 Probabilidades Condicionadas	17
Tabela 3.1 Combinação de Intervalos, União e Interseção	26
Tabela 4.1 Valoração da Variáveis de Entrada - Anexo 2	01
Tabela 4.2 Combinação das Variáveis de Entrada - Anexo 2	02
Tabela 4.3 Intervalo de $VP$ (mínimo, máximo e m. provável) - Anexo 2	03
Tabela 4.4 Valores de $E(VP)$ e $\sigma(VP)$ no intervalo $n = [1 ; 23]$ - Anexo 2	
Tabela 4.5 Ranking dos Projetos P1, P2 e P3, em função de $E(VP)$ e $\sigma(VP)$ VT	70
Tabela 4.5a Valores comparativos da Distrib. Beta, Pert e AEX (Anexo 2)	03
Tabela 4.6 Ranking dos Projetos P1, P2 e P3, em função de $E(VP)$ e $\sigma(VP)$ AN	79
Tabela 4.7 Valores da Expectância-variância, para $A=( 0,0; 0,2;0,5;1,0)$ - Anexo 2	05
Tabela 4.8 Valores de VP's (Método da Análise Variacional) - Anexo 2	05
Tabela 4.8a Valores de $E(VP)$ e $\sigma(VP)$ (Análise Variacional) - Anexo 2	06
Tabela 4.9 Valores da Expectância-variância, ( Análise Variacional) - Anexo 2	06
Tabela 4.10 Valores da Hierarquização $A= (0,0;0,32;0,80;1,61)$ - Anexo 2	07
Tabela 4.11 Hierarquização para Condição de Indifer. Risco Difusa - Anexo 2	07
Tabela 4.12 Comparação entre Métodos Difusos (a),(b),(c) e (d), item 4.38	87

## **RESUMO**

Quando as variáveis envolvidas em um projeto de investimentos, tais como, fluxo de caixa, duração (vida) dos projetos, custos e taxas de juros possuem um comportamento desconhecido, ou as informações a respeito destas, são vagas e mal definidas (difusas), faz-se necessário utilizar-se ferramentas específicas, tais como modelos baseados em intervalos aritméticos. Os intervalos aritméticos são de fácil tratamento matemático, porém estes têm a desvantagem de serem pobres no que se refere a informações de ordem qualitativa sobre o comportamento estatístico das variáveis envolvidas. Este trabalho, busca incorporar informações qualitativas, visando reduzir a incerteza e melhorar o processo de decisão. Adicionalmente, apresenta-se mais de uma alternativa para se analisar os intervalos de dominância. Este procedimento direciona a análise para aquelas informações mais relevantes, limitando-se às variáveis mais importantes, encurtando o intervalo de pesquisa e enriquecendo desta forma o processo de decisão

## ABSTRACT

When the variables involving the budgeting capital problems, such as, cash flow, project lives, salvage value and interest rate have a behavior unknown, or the information are vagueness and imprecises (fuzzy), its required the use of some more especific tools, rather than the tradicional engineering economic models, a model based on arithmetic interval is one of this possibilities. The arithmetics intervals is a easy tool and may be used, however doesn't take a advantage of the use of the statistical knowledge, becoming a poor estimator of the behavior of the function. This job try to incorporate more informations, particularly the qualitative one, in order to reduz the vagnesses of the variables and by so doing, improve the decision process. Additionally this paper try to present more than one method of analyzes in order to search for eventual interval of dominances. These procedure have the advantage of guide the decision maker to search of more relevant information of only the most important variables, limiting the job and improving the decision process.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - Identificação do Problema

Na metade dos anos 20, a Análise de Investimentos já era um instrumento utilizado pelas grandes empresas, na seleção e alocação de recursos financeiros. A principal característica do sistema produtivo então vigente, baseava-se em linhas de produção rígidas, atendendo a um mercado crescente e relativamente estável. Nessa época, não havia ainda a necessidade de que os métodos de análise fossem muito precisos. De fato, os ciclos de longa duração dos produtos facilitavam sobremaneira a compilação de dados confiáveis, os quais serviam de base a modelos de análise de natureza determinística. E foi nesse ambiente, razoavelmente equilibrado, que surgiu a grande maioria dos modelos de análise de investimentos.

A utilização dos modelos determinísticos continuou sem sofrer grandes modificações, até o final da década de 70, a partir do momento em que sucessivas crises e transformações econômicas atingiram as grandes potências. Buscou-se, então, incorporar novas técnicas aos modelos de análise de investimentos, procurando manter a variável risco sob controle.

À medida em que o sistema produtivo evoluiu no sentido de reduzir o ciclo de vida dos produtos, via substituição dos modelos baseados em produtividade, pelos modelos onde o objetivo era a competitividade, tentou-se ajustar os métodos de análise à nova realidade, incorporando-se aleatoriedade aos mesmos. Os problemas dos modelos probabilísticos tornaram-se evidentes, quando modelos relativamente sofisticados não foram capazes de produzir, na prática, resultados compatíveis com os planejados. Esta diferença entre o planejado e o alcançado com os modelos de análise de investimentos probabilísticos, em grande parte, deve-se ao fato de que o meio ambiente sofre transformações, as quais nem sempre podem ser classificadas como de natureza aleatória. Pode-se citar, como exemplo, o advento da produção de novas tecnologias e produtos de ciclo de vida muito curto, que dificultam sobremaneira a observação e formatação de dados que sejam estatisticamente confiáveis. O resultado da falta de dados que permitissem construir-se uma distribuição de probabilidades clássica (*f.d.p*) foi alternativamente substituído pela aplicação de modelos baseados em probabilidades subjetivas.

## 1.2 - Propósitos do Trabalho

Com base no exposto anteriormente, o presente trabalho busca fornecer alternativas que auxiliem na análise de investimentos, em situações de notada complexidade, como são as atualmente encontradas no mundo econômico, uma vez que os Intervalos Aritméticos, base do modelo proposto, podem representar com maior realidade, situações envolvendo incerteza e imprecisão.

Entende-se que a visão de longo prazo, na qual baseavam-se os primeiros métodos de análise de investimentos, está superada. Por tal entendimento, sugere-se como principal instrumento de análise a técnica de discretização dos Intervalos de Possibilidades. Este processo permite avaliar-se cada projeto, a cada intervalo de tempo, tão breve quanto necessário for, uma vez que os projetos possuem características próprias. Sabe-se que alguns tipos de projetos de investimentos caracterizam-se pela grande velocidade de obsolescência.

Além disto, associa-se uma distribuição de possibilidades à técnica da discretização, melhorando sensivelmente o processo de tomada de decisão sob condições de incerteza.

O trabalho propõe-se, ainda, a descrever e ilustrar três métodos alternativos, os quais serão utilizados em conformidade com a necessidade estratégica do decisor, uma vez que são métodos complementares, e se utilizados em conjunto, formam uma metodologia simples e eficiente no tratamento de situações de incerteza.

## 1.3 - Limitações do Trabalho

Alguns pressupostos básicos devem ser observados na utilização do modelo proposto, uma vez que são absolutamente necessárias abstrações para construção do modelo. Porém, entende-se que estas limitações impostas não prejudicam a idéia básica pretendida, tendo em vista que o relaxamento de algumas condições tem o objetivo único de facilitar a aplicação prática do modelo, para tal supõe-se que:

- os intervalos devem conter, no mínimo, os valores limites (mínimo e máximo);
- os projetos sejam independentes estatisticamente;

- que o coeficiente de aversão ao risco ( $A$ ), representa a aversão de um decisor cuja função utilidade é côncava e monotonicamente crescente;
- as variáveis podem ser representadas por uma distribuição de possibilidades triangular, ou Beta aproximada;
- a taxa de juros ( $i$ ) tem um comportamento uniforme ao longo do intervalo de possibilidades, isto é, que não sofra variações em função do tempo de duração dos projetos.

#### **1.4 - Organização do Trabalho**

Com exceção do primeiro capítulo, onde apresenta-se a introdução do trabalho, que constitui-se de outros cinco capítulos que distribuem-se da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresenta-se um histórico da evolução da análise de investimentos, onde aponta-se, sem preocupação cronológica precisa, as diversas etapas do desenvolvimento e transformação das formas de produção e suas implicações na evolução dos métodos de análise. Procura-se identificar as mudanças mais importantes e que motivaram o estudo e adequação das técnicas e métodos de análise de investimentos. Neste capítulo, cita-se também, os autores que mais contribuíram para o desenvolvimento e reconhecimento da análise de investimentos como ferramenta científica de tomada de decisão.

O Capítulo 3 serve de referencial teórico ao modelo proposto, uma vez que nele estão contidas as principais ferramentas para construção prática do modelo proposto. São relacionadas tanto técnicas de amplo conhecimento e utilização, como técnicas novas e não tão bem conhecidas, mas de grande potencial, e que acredita-se, em pouco tempo serão de uso rotineiro, como é particularmente o caso dos conjuntos difusos. Além disso, sugere-se algumas técnicas que visam melhorar a precisão dos Intervalos Aritméticos.

Tem-se o propósito de obedecer a uma seqüência lógica, levando de uma condição inicial de grande incerteza, até um ponto em que seja possível selecionar dentre um conjunto de projetos, aquele que apresenta a maior possibilidade de sucesso. Isto é feito no Capítulo 4, onde é possível constatar que em situações de incerteza, pode-se melhorar sensivelmente a análise através da utilização de técnicas complementares, conferindo-se maior precisão e segurança ao decisor.

No último capítulo, o de número 5, apresentam-se as conclusões e recomendações a respeito do trabalho, indicando-se algumas áreas de intersecção com o modelo proposto, que não foram tratadas, mas que são de relevância, embora não sejam indispensáveis dentro daquilo que o modelo propõe-se a realizar.

## CAPÍTULO 2

### EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

#### 2.1 Introdução

A atividade dos Engenheiros de Produção, remonta a quase um século, segundo Gantt [42], "É uma lei da Economia, de que os grandes lucros só podem ser mantidos permanentemente por operação eficiente... A suprema importância da eficiência como fator econômico foi primeiro compreendido pelos alemães, e foi este fato que os capacitou avançar sua condição industrial, que a vinte anos era uma pilhéria ... é que eles reconheceram o valor do Engenheiro cientificamente preparado como um fator econômico."

O que Gantt estava percebendo naquele momento, foi identificado mais tarde como sendo a "revolução técnico-científica", que deu-se no momento em que as empresas perceberam que a ciência aliada aos abundantes recursos naturais, poderia impulsionar de forma muito rápida e segura o crescimento da produção.

Segundo Braverman H. [1], "A primeira organização de pesquisas fundada com o propósito específico de invenção sistemática foi inaugurada por Thomas Edson em Menlo Park, Nova Jersey, em 1876, e os primeiros laboratórios governamentais foram instalados pelo Departamento de Agricultura pela lei Hatch de 1887. Arthur D. Little começou seu laboratório independente de pesquisas em 1886. Estes foram os precursores das organizações de pesquisas nas empresas: Eastman Kodak (1893), B.F. Goodrich (1893) e o mais importante, General Electric (1900)".

Tal qual as atividades de um Engenheiro Eletricista foram determinadas e condicionadas pelas leis da física, a função do Engenheiro Economista foi forjada pelas condicionantes quantitativas, a nível matemático, e qualitativas, à nível social, as quais são resultantes das decisões individuais dos agentes envolvidos.

Para Kaplan [2], "Durante a metade dos anos 20 , medidas como payback e retorno sobre investimentos, dominavam os processos de avaliação de investimentos ..." Na década de 50, sofisticadas técnicas de análise de investimentos foram incorporadas aos fluxos de caixa e estudo do dinheiro no tempo. Mesmo que estas técnicas fossem aplicadas com "... o objetivo de guiar a tomada de decisão sobre investimentos, as empresas americanas, por exemplo,

continuaram até a década de 80, com um desempenho muito pobre, se comparadas com as empresas asiáticas e européias", segundo Sullivan [3].

Neste período, o objetivo principal das empresas era a acumulação de capital, tendo como características principais o controle e a redução dos custos, visando alcançar o máximo de produtividade.

Dean [4], foi um dos autores responsáveis pela divulgação e aceitação dos métodos matemático-financeiros já desenvolvidos. Através de sua obra contribuiu para que os empresários passassem a se interessar pelo trabalho dos Engenheiros Economistas, a exemplo do que acontecera com os demais Engenheiros de Produção algumas décadas atrás na Alemanha.

O ingresso de Engenheiros Economistas deu-se primitivamente nas áreas de análise e alocação de recursos das grandes corporações. Estas áreas foram privilegiadas com inúmeros trabalhos, através da produção de estudos relativos a equivalência dos métodos mais utilizados, como por exemplo o Valor Presente e a Taxa Interna de Retorno, os quais tornaram-se alvo de interesse da grande maioria dos estudiosos da área de Análise Econômica.

Até o fim da década de 70, poucas foram as transformações sofridas nos processos de análise de investimentos. A partir dos anos 80 começa-se a implementação de modelos mais sofisticados, baseados em análises estatísticas. Estes métodos passam a incorporar o parâmetro risco, que fora ignorado até então.

Em Ensslin [5], percebe-se a extensão da utilização dos métodos anteriormente mencionados, quando este cita o trabalho de pesquisa desenvolvido por Fensterseifer [6], revelando que 63,7 % (sessenta e três vírgula sete por cento) das empresas brasileiras analisadas no período de 1985-1990, utilizaram os critérios de fluxo de caixa descontado em suas alocações de recursos. E continua, "... na realidade, eram utilizadas duas medidas para definir a forma de utilização da taxa crítica de pré-seleção " de projetos, uma vez que foi identificada uma fase de seleção primária, baseada na taxa de desconto crítica, ou mínima.

Ainda, segundo Fensterseifer [6], no Brasil as pesquisas apontam para uma proporção de 63% (sessenta e três por cento) de empresas que consideram o risco em suas análises, detectando também, a maneira com que este risco é incorporado ao processo de análise. Isto é, na forma de acréscimos a taxa de mínima atratividade, variando na proporção do risco do



projeto, de um mínimo de 2% (dois por cento) até um máximo de 30% (trinta por cento) ao ano.

No trabalho de Fensterseifer[6], ficou evidente também, o alto índice de discrepâncias entre o que foi projetado e os valores realmente alcançados nos projetos. Ensslin [5] reforça que trabalhos semelhantes efetuados nos Estados Unidos na década de 80 mostraram os mesmos problemas, justamente na época em que esse país começa a perder competitividade no mercado internacional.

A persistente distância entre o projetado nas análises e os resultados alcançados tiveram como consequência um aumento da descrença no trabalho dos Engenheiros Economistas. Isto porque, a despeito do conhecimento de suas técnicas sofisticadas, as empresas prosperaram quando os recursos naturais eram abundantes e a economia gozava de um certo equilíbrio. Porém, quando as condições mudaram e os modelos de produção existentes deixaram de ser capazes de responder satisfatoriamente, os Engenheiros Economistas não foram capazes de criar alternativas que revertissem a situação, caindo com isto em desgraça junto aos empresários.

De acordo com Kaplan [2], "Grandes mudanças no gerenciamento das indústrias e serviços vêm ocorrendo a partir da década de 80. Os sistemas de controle e gerenciamento ficaram antiquados diante da necessidade de maior flexibilidade e mudança de estratégias que se fizeram necessárias".

Fensterseifer [6] dá sua contribuição para que se identifique uma mudança importante nos objetivos das organizações. Entrevistando empresários brasileiros, estes elegeram em primeiro lugar a preocupação com os objetivos estratégicos, seguindo uma tendência que se verifica a nível mundial.

Segundo Hays H. e Pisano P.G. [7] , " Durante os anos 80, as empresas americanas redescobriram o poder que torna as empresas superiores dando início a uma série de atividades visando melhorar suas competitividades ".

Estas empresas adotaram uma série de programas, tais como: TQM (Total Quality Management), JIT (Just In Time) e DFM (Design for Manufacturability), dentre outros, com o objetivo de sobrepor-se a grande expansão e domínio do mercado pelos concorrentes asiáticos. Algumas destas empresas lograram sucesso, porém a grande maioria fracassou.

Em consequência da disputa deste mercado segundo Ensslin [5] "...inicia-se então, um processo de vida ou morte para recuperar o terreno perdido ".E continua, apontando que um dos motivos do fracasso está em que, "...Como a ferramenta utilizada era a produtividade, foi nela que os empresários se agarraram e investiram maciçamente. Os resultados foram frustrantes, pior, os resultados foram paradoxalmente opostos .."

Ensslin [5] continua questionando, de quem é a responsabilidade pela aplicação dos métodos incorretos? "...grande parte da responsabilidade deste paradoxo é devido aos Engenheiros de Produção, particularmente aqueles com atuação na área de seleção e alocação de recursos, os da área de Engenharia Econômica".

Se por um lado, procede a alegação de que os Engenheiros de Produção tiveram sua formação em um ambiente sujeito as regras do taylorismo a 50 anos atrás, portanto totalmente alheios às reais necessidades das empresas modernas. Por outro lado, também é procedente a observação de que os Engenheiros de Produção, enquanto trabalhadores, foram vítimas das condições impostas por um sistema impiedoso e obstinado na busca da produtividade, o que fica evidente na seguinte colocação, de Braverman H. [1] que diz :

"...O trabalho mental consiste de sinais no papel. O trabalho mental é feito no cérebro, mas uma vez que assume a forma de produto externo - símbolos linguísticos, números e outras formas de representação, implica em operações manuais tais como escrever, desenhar, operar máquinas etc..., para fins de criar o produto. É portanto possível separar as funções de concepção e execução. Tudo o que se exige é que a escala de trabalho seja suficientemente grande para tornar esta divisão econômica para a empresa."

De fato, de acordo com Braverman H. [1], esta observação fora experimentalmente afirmada muito antes por Babbage C. [1830] "...a divisão do trabalho pode ser aplicada com igual êxito tanto às operações mentais como às mecânicas, e que ela garante em ambos a mesma economia do tempo". Isto foi demonstrado, quando na revolução francesa adotou-se o sistema decimal, tornando necessário a adaptação de diversas tabelas ao novo sistema. Com a ajuda de colaboradores Babbage demonstrou a aplicabilidade do modelo de divisão do trabalho proposto por Adam Smith [8], tão somente substituindo os alfinetes por logaritmos e funções trigonométricas. Portanto, sob este ponto de vista, é compreensível que o Engenheiro de Produção enquanto analista sujeito as técnicas de gerenciamento que visavam controlar e explorar ao máximo a capacidade de produzir, fosse tolhido de sua capacidade de criar.

Sabe-se que este controle sistemático da produção, aconteceu primeiro a nível de chão de fábrica, estendendo-se posteriormente à administração e à organização como um todo, abrangendo na prática a todas as classes de trabalhadores sob gerenciamento científico.

Possivelmente, os atuais Engenheiros de Produção sejam questionados num futuro muito próximo, uma vez que o tipo atual de sistema de produção, por certo não é definitivo, e as estratégias adotadas hoje, podem não serem válidas amanhã, inviabilizando muitas premissas tidas como verdadeiras na área de Análise de Investimentos, haja visto que alguns indicadores relativos à economia japonesa, berço dos modelos em cópia pelo resto do mundo, já indicam que o sistema dá seus primeiros sinais de fadiga.

### **2.1.1 Adaptação Estratégica da Engenharia Econômica**

Para Porter [9], "O objetivo da estratégia competitiva para uma empresa em uma indústria é encontrar uma posição ( na indústria) onde a empresa possa se defender da melhor maneira possível contra as forças competitivas, ou para influenciá-las a seu favor".

As metas das empresas são perseguidas através de estratégias. Com o planejamento assumindo características adaptativas, o modelo que perseguia produtividade foi substituído por um modelo que enfatiza a competitividade. Todas estas mudanças ocorreram na última década, quando as empresas norte americanas precisaram enfrentar os países asiáticos, numa luta desesperadora para recuperar as posições perdidas.

Estudos produzidos por Sullivan [3], Canada[10], Skinner [11] e outros, mostram que os engenheiros economistas estão distribuídos segundo as áreas de maior importância, como se os modelos de produção ainda priorizassem a produtividade. E se fossem representados por uma forma piramidal, seria necessário inverter a base da pirâmide, colocando-a de cabeça para baixo. Isto é, invertendo as áreas de concentração das atividades dos Engenheiros Economistas, para que suas atividades fiquem coerentes com as estratégias adotadas em modelos de produção baseados em competitividade.

Os pontos básicos propostos por Sullivan [3], para que o Engenheiro Economista volte a ter importância e seja um profissional de "seu tempo" são os seguintes:

- os investimentos devem estar vinculados à política estratégica da organização;
- todas as limitações da organização devem ser consideradas;

- precisam ser desenvolvidos procedimentos para avaliar o risco do investimento;
- precisam ser desenvolvidos procedimentos para quantificar e avaliar todos os benefícios, inclusive os não financeiros;
- deve-se providenciar um acurado sistema de informações, particularmente de custos;
- precisam ser muito bem conhecidas as repercussões do impacto dos projetos;
- os processos decisórios devem dar maior atenção às políticas de identificação de riscos e seu gerenciamento; e
- a compreensão, suporte e participação do gerente geral na definição dos critérios e políticas de identificação, análise e seleção de alternativas de investimentos é fundamental.

Pode-se acrescentar a necessidade de tratar-se cada situação de análise e tomada de decisão, como uma situação única ou exclusiva, isto é, com todas as peculiaridades inerentes a um processo de avaliação que um ambiente complexo exige.

Em resumo, diante de um ambiente complexo, faz-se necessário que a análise e tomada de decisão seja flexível o suficiente para encaminhar uma solução rápida e eficiente para cada caso analisado.

## **2.2 Os Modelos de Análise de Investimentos**

### **2.2.1 Introdução**

Os modelos de análise de investimentos vêm sendo aperfeiçoados e incorporados com novas técnicas, principalmente a partir do fim da década de 70. Estes dividem-se em três grandes grupos (determinísticos, estocásticos, multi critérios), os quais são utilizados em conformidade com a necessidade que se apresenta. Uma quarta opção, os Modelos Possibilísticos, está sendo desenvolvida em trabalhos recentes, e será objeto de pesquisa do presente trabalho.

Estes modelos podem ser utilizados em conjunto, quando possível, o que em algumas oportunidades melhora sensivelmente a qualidade das informações para a tomada de decisão.

Dentre os modelos de análise de investimentos, alguns são muito recentes e pouco conhecidos pela empresas, portanto são modelos que têm um grande potencial a ser explorado, podendo estes virem a ser, num futuro próximo, excelentes alternativas como ferramenta de análise de tomada de decisão em condições de complexidade e incerteza.

Descreve-se a seguir os modelos mais utilizados, e os modelos não tão conhecidos como os clássicos, mas em desenvolvimento e com boas perspectivas de substituírem em pouco tempo aqueles que não são mais capazes de garantir uma boa proximidade dos resultados desejados, com os resultados alcançados.

## 2.2.2 Os Modelos Determinísticos

Os modelos determinísticos, são aqueles que pressupõem a ocorrência de um único estado para as variáveis, isto é, as variáveis envolvidas nestes modelos podem assumir apenas um único valor, e este valor é perfeitamente conhecido.

Mack [12], define certeza (conhecimento perfeito), como sendo "...uma situação na qual apenas um estado da natureza é possível - isto é, o evento  $Y$  tem probabilidade 1 (um), e todos os demais tem probabilidades 0 (zero)".

Com base nesta afirmação, os modelos determinísticos, podem ser tratados como um *caso particular* dos modelos probabilísticos, quando vistos sob a ótica da probabilidade de ocorrência dos eventos (variáveis), uma vez que quando a probabilidade  $P(X)$  é igual a 1 (um), significa dizer que existe 100% de probabilidade de ocorrência do evento, isto implica no perfeito conhecimento do valor deste evento.

É evidente que estas condições, na verdade, não passam de um pressuposto teórico, dado que as condições do meio não estão sujeitas às leis e ao controle dos analistas, portanto com frequência, os resultados alcançados não são compatíveis com a realidade. Porém, este fato não implica na inutilidade dos modelos determinísticos. Em certas circunstâncias estes são relativamente eficientes, principalmente quando não se requer uma grande precisão dos resultados, ou nos casos em que as variações são relativamente pequenas.

Em análise econômica sob condições determinísticas, dois tipos de critérios básicos são considerados, os critérios econômicos (rentabilidade do investimento) e os critérios financeiros (disponibilidade dos recursos), e os dois métodos mais importantes são, o método

do Valor Presente e o método da Taxa de Retorno. Outros métodos como Anuidades, Valor Futuro e TMA, são variações dos dois anteriormente mencionados.

Os métodos do Valor Presente e da Taxa de Retorno devem ser equivalentes, e para que isto ocorra, deve-se tomar medidas preventivas, isto é, pode ocorrer discrepância entre os métodos e "... esta discrepância é o resultado de suposições referentes a taxa a que os fundos liberados pelo projeto são reinvestidos ... a discrepância entre os dois métodos, desaparece portanto, se utilizarmos para ambos a mesma taxa de reinvestimento". Ensslin [13].

### 2.2.3 Processos de Otimização

#### 2.2.3.1 Programação Linear (PL)

Para Kahne S. [14], "Os métodos quantitativos, tais como os de Programação Linear, se utilizados apropriadamente podem ser ferramentas de grande valia nas mãos de executivos competentes".

Segundo Lanzer E.A. [15], "A Programação Linear é hoje o instrumento de Pesquisa Operacional mais comumente empregado na resolução prática de problemas decisórios objetivos e de certa complexidade. Isto se explica, por um lado, pela versatilidade do instrumento e, por outro, pelo nível relativamente pouco sofisticado dos seus fundamentos matemáticos."

Na área de Análise de Investimentos, os modelos com base em Programação Linear têm sido utilizados quando ocorre uma situação na qual existem muitas alternativas competindo entre si, e os recursos destinados a estas, são limitados.

Os métodos de Programação Linear têm características que facilitam sobremaneira o exercício de análise de sensibilidade dos dados, fornecendo informações importantes sobre quais variáveis podem interferir, e com que intensidade, no resultado final. Este fato é relevante na medida em que fornece subsídios adicionais ao decisor.

Basicamente, os modelos de Programação Linear podem ser representados da seguinte forma:

Otimizar  $Z = c'x$

$$\text{Sujeito a; } \quad Ax = b \\ x \geq 0$$

Onde:

$Z$  = função a otimizar (maximizar ou minimizar)

$A$  = matriz de coeficientes técnicos;

$x$  = variáveis de decisão;

$b$  = requerimentos;

$c$  = coeficiente da função objetivo

Uma das dificuldades da aplicação de modelos com base em Programação Linear em análise de investimentos, é que este tipo de modelo não representa adequadamente a complexidade do mundo real. "... Um dos motivos desta dificuldade deve-se a unidimensionalidade da função objetivo, a qual requer informações de custos e benefícios que quase sempre são impossíveis de obter-se". (Lee [16])

### 2.2.3.2 Programação por Objetivos (PPO)

Charnes e Cooper [17] desenvolveram o conceito de programação por objetivos, o qual deriva da necessidade de corrigir os problemas enfrentados, quando da utilização de PL em problemas com múltiplos objetivos, seja o exemplo seguinte:

$$\text{Maximizar } Z = \$ x_1 + \$ 1/2 x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$5x_1 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$-x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Esquemáticamente, pode-se representar através da figura 2.1. Nota-se que as áreas de decisão não se interceptam, impossibilitando a resolução por intermédio de PL.

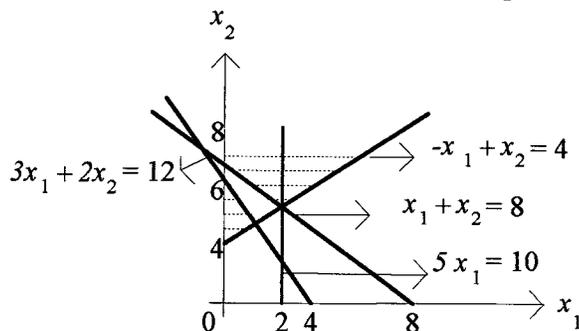


Figura 2.1 Restrições e Áreas de Possíveis Soluções  
Fonte: Lee, S.M. *Programming for Decision Analysis* Pg. 17

Assumindo que as duas primeiras restrições representem os recursos disponíveis, em capacidade de máquinas, e a terceira e quarta restrições representem os objetivos a serem atendidos. Então, a função objetivo pode ser mudada, de maximização dos lucros para atendimento dos objetivos da seguinte maneira:

$$\text{Min } Z = |x_1 + x_2 - 8| + |-x_1 + x_2 - 4|$$

Esta função representa a idéia básica de programação por objetivos.

A característica principal dos modelos de Programação por Objetivos, é priorizar os objetivos mais importantes e resolver o problema até onde os recursos permitam fazê-lo.

### 2.2.3.3 Programação por Penalidades (PPP)

No caso de programação por penalidades, os critérios estão submetidos a um determinado conjunto de restrições, figura 2.2.

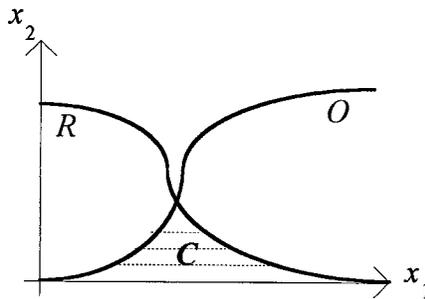


Figura 2.2 Interseção Restrições x Objetivos

A figura 2.2 sugere que existe um conjunto de objetivos sujeitos a um conjunto de restrições. O decisor deve analisar quais objetivos podem ser alcançados, dentro do conjunto interseção  $C = R \cap O$ . Nesta condição, os objetivos devem obedecer uma ordem de prioridade, a qual deve ser definida através da atribuição de pesos conforme julgamento do decisor. ( Ijiri [18] )

### 2.2.3.4 Otimização da Utilidade

Segundo Lee[16], "...Para superar a unidimensionalidade da função objetivo requerida na programação linear, têm sido feito muitos esforços para converter vários objetivos, custos ou medidas de valor, em um único critério, chamado utilidade".

Logo, para Lee[16], a transformação de uma função de valor em uma função de utilidade reduziria as limitações encontradas em modelos de programação linear, quando aplicados a situações complexas. Porém, este reconhece que não é tarefa simples definir-se funções de utilidade, tanto a nível individual, quanto a nível de grupos.

A escolha baseada na função utilidade, a despeito das dificuldades anteriormente mencionadas, tem tido grande utilização em análise de investimentos. Sob este tipo de função, o decisor atribui pesos aos critérios conforme sua curva de utilidade, a qual é construída com base em sua aversão ao risco.

Considerando-se que a incerteza está presente na grande maioria das situações de decisão, os valores atribuídos à função utilidade, são valores subjetivos, os quais têm fundamentação na expectativa do decisor. Desta forma o decisor tende a atribuir pesos maiores aqueles critérios que julga serem mais prováveis de ocorrer.

### 2.2.3.5 Modelos de Análise Multicritérios

A principal característica dos modelos multicritérios é englobar num mesmo problema, valores qualitativos e quantitativos. O resultado final destes métodos é obtido em forma hierarquizada das alternativas em análise.

A estrutura geral dos modelos multicritérios tem como base o grafo exemplificado na figura 2.3.

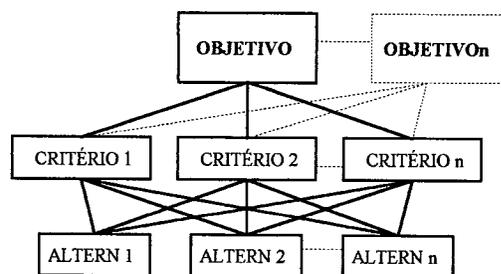


Figura 2.3 Fluxograma dos Modelos Multicritérios

As alternativas são relacionadas com os critérios, e os critérios com os objetivos, através de pesos, os quais são definidos segundo uma escala de importância relativa atribuída pelo decisor.

As duas famílias de métodos multi critérios mais utilizadas são:

- os métodos Analítico-hierárquicos - O mais popular é o método AHP (Analytic Hierarquic Process) desenvolvido por Saaty[46], um dos precursores no desenvolvimento de métodos analíticos multi critérios, baseando-se para elaboração destes modelos, na teoria aditiva do valor. Para a conexão entre as alternativas e os critérios, Saaty [46] propôs uma escala de preferências baseada em um intervalo entre 1 e 9. Através de uma matriz de auto vetores, este método permite corrigir-se problemas de inconsistência entre os pesos atribuídos;

- os métodos "outranking" - São métodos que diferenciam-se dos primeiros, basicamente por serem métodos nos quais as piores alternativas são eliminadas e os critérios são definidos com base em funções de preferência. O resultado final destes métodos é obtido em forma hierarquizada. Os principais mais utilizados são os das famílias ELLECTRE , e PROMETHEE.

O método AHP tem sofrido muitas críticas nos últimos anos, porém a grande maioria dos problemas apresentados pelo método, foram corrigidas recentemente. Também é notável o grande número de situações de decisão em que foi testado o método, e os resultados mostraram-se bastante convincentes.(Bana e Costa, C.A [45] )

Por fim cabe lembrar que os métodos "outranking", anteriormente citados, têm sua maior fragilidade na instabilidade dos resultados.

#### **2.2.4 Situação Probabilística (Sob Risco)**

Relaxando-se o pressuposto no item 2.2.2 , ou seja, a condição de certeza admitida nos modelos determinísticos, obtém-se uma situação mais aproximada da realidade. Por experiência, sabe-se que podem existir diversos cenários ou situações possíveis para um determinado processo de decisão.

Uma vez reconhecida a aleatoriedade destes cenários, é possível substituir os modelos determinísticos por modelos probabilísticos. Este fato provoca a mudança do valor da variável de decisão, que ao invés de um valor exato, passa a ter um valor provável, isto é, um Valor Esperado com uma dada probabilidade.

O Valor Esperado é função da relação entre as variáveis aleatórias (com probabilidades definidas ) e as variáveis não aleatórias, que podem variar de forma contínua, como por exemplo a variável tempo. A situação de risco surge quando torna-se impossível a

identificação (a priori) do cenário que ocorrerá, devido a incerteza presente no processo decisório.

Segundo Ensslin [13], "Nas decisões sob condições de risco, conhece-se apenas algumas informações parciais a respeito dos possíveis estados da natureza que possam ocorrer. Especificamente, existem dois, três, quatro ou mais possíveis resultados como decorrência de cada alternativa que venhamos a escolher. Nestas condições nós não conhecemos qual o resultado que irá ocorrer, mas conhecemos a distribuição de probabilidades das possíveis ocorrências."

### 2.2.4.1 Teorema de Bayes (Probabilidade Total)

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , eventos mutuamente exclusivos e  $B$  um evento qualquer de  $S$ . Pode-se representar pelo diagrama de Venn, figura 2.4, a área de cada evento, as quais correspondem a probabilidade da ocorrência destes.

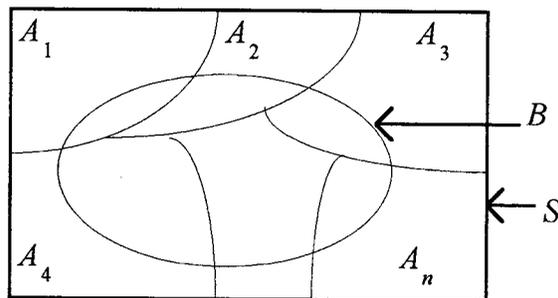


Figura 2.4 Diagrama de Venn

A coleção de eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  define uma distribuição de probabilidades, e somente um destes eventos ocorrerá com probabilidades  $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ , sendo a soma destas igual a 1(um).

Com base na figura 2.4 pode-se representar a lei da probabilidade total pelas seguintes expressões:

$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

$$P(B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B/A_i) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

Se  $n=2$  tem-se que  $A_1 = A$ ,  $A_2 = 1 - A = \bar{A}$ , logo:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) \quad (2.3)$$

E o teorema de Bayes pode ser representado pela seguinte expressão:

$$P(A_k | B) = \{ [P(A_k) \cdot P(B/A_k)] / \sum_i [P(A_i) \cdot P(B/A_i)] \} \quad (2.4)$$

Onde

$P(A_i)$  = probabilidade a priori (prévia);

$P(A_i | B)$  = probabilidade a posteriori (posterior);

Conforme Beckman [19], "...a importância do Teorema de Bayes se revela quando consideramos as probabilidades  $P(A_i)$  como sendo representativas de certo estado inicial da informação, que se modifica tão logo chegue ao nosso conhecimento a ocorrência do evento  $B$ . Essa informação altera nosso conhecimento a respeito das probabilidades de ocorrência dos eventos  $A_k$ , resultando os valores  $P(A_k | B)$  calculados de acordo com a expressão (2.4)".

Pode-se representar as distribuições na tabela 2.1.

$P(A_k   B)$	$B$	$\bar{B}$	Total
$A_1$	$P(A_1 \cap B)$	$P(A_1 \cap \bar{B})$	$P(A_1)$
$A_2$	$P(A_2 \cap B)$	$P(A_2 \cap \bar{B})$	$P(A_2)$
$A_n$	$P(A_n \cap B)$	$P(A_n \cap \bar{B})$	$P(A_n)$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Tabela 2.1 Probabilidades condicionadas.

Uma outra forma de representar as probabilidades condicionadas é através da *árvore de decisão*, a qual é utilizada nos modelos de análise baseados na Teoria das Redes.

Cabe ainda lembrar que na utilização de modelos probabilísticos, é importante conhecer-se o grau de inter-relacionamento das variáveis, isto é, se são mutuamente exclusivas ou não, e se são variáveis independentes ou correlacionadas. O reconhecimento destes pressupostos, evita que sejam feridas as bases axiomáticas da Teoria das Probabilidades.

Sendo que o comportamento das variáveis é aleatório, e que obedece a uma determinada função densidade de probabilidade (*f.d.p*) tem-se duas possíveis maneiras de atribuir-se probabilidades aos eventos, quais sejam:

### 2.2.4.2 Probabilidades objetivas (Distribuição Clássica).

As probabilidades objetivas são facilmente compreendidas a partir de jogos de escolha, e podem ser fixadas para inúmeras situações, e servem principalmente para ajudar na tomada de decisão, quando risco e incerteza se fazem presentes.

De acordo com a teoria Clássica, a probabilidade de um evento pode ser definida por:

$$P(X) = \frac{nX}{N}$$

onde:

$P(X)$  = probabilidade de  $X$  ocorrer;

$nX$  = número de vezes que o evento  $X$  pode ocorrer;

$N$  = número total de resultados igualmente possíveis.

Pela abordagem clássica, pode-se fazer afirmações sobre o comportamento dos eventos, baseado na fundamentação axiomática desenvolvida a partir de experimentos empíricos.

Uma das características naturais deste tipo de probabilidade, é que pode-se obter os parâmetros estimados a partir de dados amostrais.

Dois momentos estatísticos são particularmente importantes na utilização de modelos probabilísticos, estes são a média (ou Valor Esperado), e a variância, seja qual for o tipo de distribuição adotado.

-Média (Valor Esperado);

A média (ou Valor Esperado), é uma medida de tendência central, e está ligada a expectativa de ocorrência de um determinado valor. Pode ser representada como:

para condição discreta;

$$\bar{X} = E[X] = \sum X \times P(X)$$

onde;

$\bar{X}$  = média de  $X$

$E[X]$  = Valor Esperado de X

X = valores que a variável pode assumir.

para a condição contínua tem-se:

$$\bar{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

onde:

X = Possíveis valores de X

$f(x)$  = a função densidade probabilidade de X

-Variância;

A variância é uma medida de dispersão, e na literatura econômica está associada a risco, isto é, quanto maior a variância, maior é o risco de um determinado investimento. Simplificando pode-se dizer que é aproximadamente a "distância geométrica" que um determinado Valor Esperado encontra-se das expectativas do decisor. Define-se a variância como sendo:

para a Condição discreta;

tem-se:

$$\sigma^2 = V(\bar{X}) = \sum (x - \bar{X})^2 P(x)$$

onde:

$\sigma$  = desvio padrão de  $\bar{X}$

$V(\bar{X})$  = variância de  $\bar{X}$

para a condição contínua, tem-se;

$$\sigma^2 = V[\bar{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx$$

### 2.2.4.3 - Probabilidades Subjetivas

A Probabilidade Subjetiva tem relação direta com o nível de crença do decisor quanto à ocorrência de um determinado evento, com base em alguma evidência que a ele esteja disponível.

Segundo French [20] "As escolas de Probabilidades Subjetivas ou Personalísticas, são conhecidas como tais porque suas probabilidades são associadas, não com o sistema sob observação, mas com o observador deste sistema."

Se  $P(X)$  representa o grau de crença do decisor, e este pode variar no universo  $[0, 1]$ , pode-se dizer que  $P(X)$  próximo de 1 representa um alto grau de crença do decisor. Porém, não se deve interpretar como uma alta probabilidade de ocorrência do evento.

É importante lembrar que cada decisor, atribuirá um índice próprio, de Probabilidade Subjetiva a um mesmo evento, isto ocorre porque seus graus de conhecimento sobre a ocorrência do evento são diferentes.

Admitir-se aleatoriedade às variáveis que compõem um determinado fluxo de caixa, leva ao pressuposto de que o somatório dos valores esperados desta, descontados a uma determinada taxa, compõem o Valor Esperado do Valor Presente. Isto implica em dizer-se que o Valor Presente obedece a uma função densidade de probabilidade (*f.d.p*) qualquer. As operações matemáticas efetuadas com variáveis aleatórias, têm como resultado um valor aleatório.

### 2.2.5 Modelos Possibilísticos ou Difusos

Os modelos derivados da teoria dos Conjuntos Difusos ou Distribuições de Possibilidades, ao contrário dos modelos estocásticos, caracterizam-se por serem representados por intervalos, os quais encerram imprecisões e incertezas, tornando-se desta forma modelos mais próximos da realidade. Nestes modelos não é admitida a possibilidade de ter-se como solução valores pontuais, mas sim uma faixa de possíveis valores, o que parece ser mais coerente, dado que o ambiente econômico é impreciso e complexo.

Os modelos baseados em conjuntos difusos têm sido extensamente utilizados, principalmente na área de sistemas inteligentes e automação. Este fato deve-se a

característica mais importante destes modelos, que é a capacidade de transformar termos linguísticos em variáveis matemáticas.

Uma outra característica, não menos importante, destes tipos de modelos, é que são apropriados para tratar-se com condições de informações vagas, imprecisas ou incertas.

No Capítulo 3, maiores detalhes e argumentos são fornecidos a respeito de métodos de análise em condições de informações difusas, uma vez que estes métodos serão objeto de investigação do presente trabalho.

### 2.3 Localização Teórica do Modelo

Em problemas de Análise de Investimentos e tomada de decisão, na maioria das vezes é impossível fixar-se probabilidades "a priori". Primeiro, porque alguns eventos ocorrem uma única vez, ou não se repetem de maneira que seja possível construir uma distribuição de frequências representativa do evento. Segundo, o comportamento dos agentes econômicos não se dá de forma aleatória propriamente dita, mas de forma imprecisa e difusa.

Estas duas considerações já são suficientes para inviabilizar a utilização de modelos de análise estocásticos em um grande número de situações, uma vez que os resultados alcançados freqüentemente levam a erros grosseiros e representações muito pobres da realidade.

Quanto a alternativa de utilizar-se modelos que incorporam probabilidades subjetivas, é o mais indicado em muitos casos, não fosse o inconveniente de ser esta opção uma escolha pessoal e intimamente relacionada com a função utilidade de cada decisor. Isto implica em diferentes graus de probabilidades, o que pode levar a diferentes soluções para um mesmo problema, além de não ser garantido que uma destas soluções seja correta.

Diversas alternativas têm sido estudadas para amenizar as situações de incerteza, seja pela incerteza com relação ao meio, seja pela incerteza com relação a ferramenta que se deva utilizar. Por tais problemas, deve-se considerar o grau e a capacidade de interpretar as informações, como sendo a chave para a escolha do modelo mais adequado a cada situação.

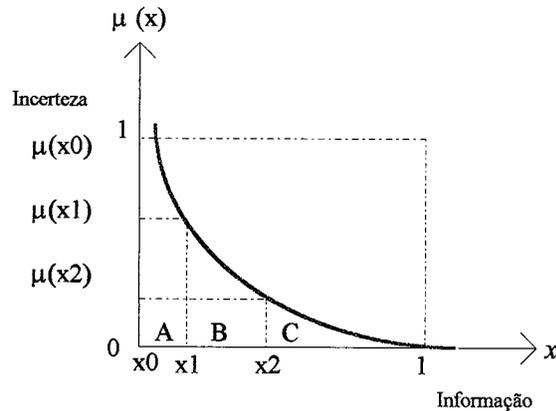


Figura 2.5 Incerteza x Informação

A Figura 2.5, representa a incerteza em função da informação, as quais são inversamente proporcionais, nesta figura convencionou-se que:

$$x \in (0,1)$$

$$\mu(x) \in [0,1]$$

Onde:

$x_i$  representa o grau de informação disponível, sendo que se  $x_i=0$  a desinformação é total, se  $x=1$ , tem-se informação perfeita, ou total.

$\mu(x_i)$  significa o grau de incerteza, se  $\mu(x_i) = 1$  (para a função normalizada), tem-se a desinformação máxima, para  $\mu(x_i) = 0$  a informação é perfeita.

A situação acima descrita representa que, à medida em que  $x_i$  (informação) tende para 1 (um),  $\mu(x_i)$  (incerteza) tende a 0 (zero).

Os valores de  $x$  definem intervalos aritméticos de informações variáveis, os quais não tem limites definidos fisicamente, são dimensionados conforme a quantidade, forma, qualidade e tipo de informações, sendo que a amplitude do intervalo é diretamente proporcional a  $x$ .

### 2.3.1 Intervalos Aritméticos (A)

O intervalo aritmético está representado na figura 2.5 pela letra **A**, que compreende o espaço teórico  $[x_0, x_1]$ .

$$\mu(x_0) > \mu(x_1) \text{ para } 1 \geq x_1 > x_0 \geq 0$$

O que caracteriza que quando o volume de informação cresce,  $x_0$  tende a  $x_1$  e o grau de incerteza de  $\mu(x)$  decresce.

Quando  $x_0$  tende a zero, a desinformação é total, logo, seu intervalo de variação tende ao infinito, via de consequência  $\mu(x_0) \rightarrow \infty$ , enquanto que, quando o nível de informação aumenta  $x_0$  tende a  $x_1$  que tende a 1, quando então a informação é perfeita e o intervalo aritmético tende a zero, e portanto a incerteza  $\mu(x_0 \rightarrow 1) \rightarrow 0$ .

Como se observa os intervalos aritméticos são adequados à análise, quando o nível de informação é reduzido  $0 < x_0 \leq x_1$ .

### 2.3.2) Distribuições de Possibilidades (B)

*É NÃO PROBABILIDADE*

A distribuição de possibilidades está representada na figura 2.5 por **B**, que compreende o espaço teórico  $[x_1, x_2]$ .

$$\mu(x_1) > \mu(x_2) \text{ para } x_1 < x \leq x_2$$

Quando o número de informações cresce de  $x_1$  para  $x_2$ , os modelos mais apropriados para a análise de projetos em condições de incerteza são aqueles baseados em conjuntos difusos, os quais permitem a transformação de informações imprecisas e vagas em modelos matemáticos, ou seja, distribuições de possibilidades.

É importante perceber que estes modelos são propícios para tratar-se com informações baseadas na experiência, que geralmente são agregadas em forma de variáveis lingüísticas, sejam qualitativas ou quantitativas. Outro fator que permite um decréscimo da incerteza no processo de análise, reduzindo o intervalo matemático, é o fato de que a passagem do impossível para o possível, e vice versa, dá-se de forma suave, com a implementação de níveis- $\alpha$ , que são os diferentes graus de possibilidades de uma determinada distribuição (figura 3.6 do Capítulo 3).

### 2.3.3) Distribuições de Probabilidades (C)

A distribuição de probabilidades é representada na figura 2.5 através de **C**, que compreende o espaço teórico  $[x_2, 1]$ .

$\mu(x_2) > \mu(x_0)$  para  $x_2 < x \leq 1$ ;

Quando a informação cresce tal que,  $x \in [x_2, 1]$ , pode-se dizer que os modelos mais apropriados para amparar a análise e tomada de decisão, são os modelos probabilísticos. Porém, para que se obtenha bons resultados com estes modelos, é necessário que se conheça o comportamento das variáveis.

Logo, este intervalo (C) requer um nível de informação muito mais elevado do que os intervalos anteriores (A e B). Se o modelo for baseado em distribuições de probabilidades clássicas, é imprescindível a identificação da função densidade de probabilidade (*f.d.p.*) da variável de decisão. Na prática, torna-se difícil a utilização deste tipo de modelo, uma vez que os eventos normalmente não se repetem nas mesmas condições. Nestes casos, é comum utilizar-se modelos baseados em Probabilidades Subjetivas. Para tal, o nível e a qualidade das informações subjetivas deve ser elevado.

Por fim, analisando-se o caso em que  $x = 1$ , nota-se que esta é uma situação de perfeita informação, por consequência  $\mu(1) = 0$ , isto é, a incerteza é eliminada, e os problemas devem ser tratados à luz de modelos determinísticos. Na prática, esta situação é pouco provável.

## CAPÍTULO 3

### SUPORTE TEÓRICO AO MODELO PROPOSTO

#### 3.1 Introdução

O Engenheiro Economista trabalha com ferramentas pertencentes às mais diversas áreas do conhecimento científico. Porém, é na matemática e na estatística que estão fundamentados a grande maioria dos modelos de Análise Econômica.

O grande desafio ao Engenheiro Economista é identificar dentre os muitos métodos existentes, aqueles que consigam representar com maior precisão uma determinada situação de análise, bem como conhecer os pontos em comum entre os diversos métodos. Para que possa, desta forma, maximizar os pontos positivos e minimizar as desvantagens através da incorporação de novas técnicas de análise.

Neste capítulo apresenta-se algumas das ferramentas básicas, as quais fundamentam o modelo de análise proposto. Pretende-se, também, descrever alguns conceitos básicos, propriedades, limitações dos métodos, bem como as considerações e adaptações feitas aos mesmos, visando o melhoramento do modelo proposto.

Para isto, começa-se apresentando os Intervalos Aritméticos e as técnicas de melhoramento da precisão destes. A seguir são feitas considerações sobre Conjuntos Difusos, onde são apresentadas suas propriedades e características básicas, bem como alternativas para hierarquização de quantidades difusas. Por fim encerra-se este Capítulo 3 com a apresentação das distribuições mais utilizadas em análise de investimentos para estimar quantidades desconhecidas.

#### 3.2- Intervalos Aritméticos

Os Intervalos Aritméticos têm suas primeiras aplicações práticas, como método de Análise, dentro do Setor Elétrico na década de 70, segundo Shaalan, Broadwater e Fabrycky [21]. E mais recentemente, este método tem sido utilizado para estudos de Análise de

Sensibilidade, uma vez que pode representar com maior realismo o comportamento de sistemas complexos, onde muitos parâmetros variam simultaneamente. Um exemplo é a complexidade do sistema econômico, quando taxas de juros variam afetando simultaneamente outros conjuntos de fatores.

É aconselhável utilizar-se Intervalos Aritméticos como ferramenta auxiliar à análise em situações de incerteza, mais precisamente, quando o número de informações a respeito da variáveis em análise é muito reduzido, ou nos casos em que conhece-se apenas os limites mínimos e máximos que as variáveis podem assumir.

Os Intervalos permitem que, a partir das variáveis de entrada, efetue-se operações matemáticas com relativa simplicidade, e que a partir destas obtenha-se um intervalo de saída resultante de todas as possíveis combinações das variáveis. Porém o comportamento estatístico destas não é transparente ao decisor.

Com o objetivo de melhorar os resultados obtidos a partir de Intervalos Aritméticos, propõe-se incorporar ao método a técnica de discretização do Valor Esperado ( $E(x)$ ) da variável de decisão. Esta técnica será mostrada em detalhes no Capítulo 5 deste trabalho.

A definição matemática de um intervalo aritmético é basicamente representada por um limite inferior e um superior  $a$  e  $b$ , podendo ser definido pela representação de um conjunto  $A = \{ x \mid x \in [ a , b ] \}$  e a possibilidade de  $x$  ocorrer no intervalo  $[ a , b ]$ , segundo Choobineh, F., Behrens [31], é a seguinte:

$$X(A), (x) = 1 \text{ se } x \in A$$

$$X(A), (x) = 0 \text{ se } x \notin A$$

Isto é, a função característica indica apenas se  $x$  está ou não no intervalo, sem no entanto indicar o grau de pertinência, nem a frequência com que  $x$  ocorre ( Lógica Clássica ).

### 3.2.1 Operações com Intervalos Aritméticos

As operações com intervalos são uma extensão das operações com números reais.

Tomando-se  $X, Y, Z$ , como sendo três intervalos variáveis, tal que:

$X = [a, b]$ ,  $Y = [c, d]$  e  $Z = [e, f]$ , tem-se:

adição;

$$X + Y = [a + c, b + d]$$

diferença;

$$X - Y = [a - d, b - c];$$

multiplicação;

$$X \times Y = \{\min[a \cdot c, a \cdot d, b \cdot c, b \cdot d]; \max[a \cdot c, a \cdot d, b \cdot c, b \cdot d]\};$$

$$X \times 0 = 0;$$

divisão;

$$\frac{X}{Y} = [a, b] \cdot \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right], \text{ para } d \text{ e } c \neq 0$$

Para as operações de União ( $\cup$ ) e Intersecção ( $\cap$ ), existem seis combinações possíveis. Dong e Shah [22], as definem de acordo com a tabela 3.1:

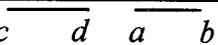
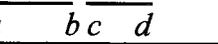
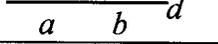
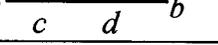
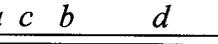
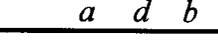
	União	Intersecção	Gráfico
1. $a > d$	$[c, d] \cup [a, b]$	$\emptyset$	
2. $c > b$	$[a, b] \cup [c, d]$	$\emptyset$	
3. $a > c, b < d$	$[c, d]$	$[a, b]$	
4. $c > a, d < b$	$[a, b]$	$[c, d]$	
5. $a < c < b < d$	$[a, d]$	$[c, b]$	
6. $c < a < d < b$	$[c, b]$	$[a, d]$	

Tabela 3.1 Combinação de Intervalos, União e Intersecção.

As principais propriedades dos Intervalos Aritméticos são:

associativa; e

$$I + (J + K) = (I + J) + K$$

$$I \cdot (J \cdot K) = (I \cdot J) \cdot K$$

comutativa;

$$I + J = J + I$$

$$I \cdot J = J \cdot I$$

Entretanto a Distributividade nem sempre é conseguida, ao calcular-se  $Y_1 = X_1 [ X_2 - X_3 ]$  :

pode-se ter duas situações distintas, que são;

$$Y_1 = X_1 [ X_2 - X_3 ]; \text{ e}$$

$$Y_2 = X_1 X_2 - X_1 X_3 ;$$

onde, aplicando-se as operações elementares de adição e multiplicação, chega-se a um resultado ambíguo, ou seja  $Y_1 < Y_2$ , o que representa que um intervalo está contido no outro, ( $Y_1 \subset Y_2$ ), quando o correto seria que fossem iguais. Este fato foi representado numericamente por Dong e Shah [22], e faz parte do exemplo 3.1 do Anexo 1.

Ocorre que houve um "alargamento" do intervalo original, esta anormalidade pode ser corrigida através da utilização do método Vertex, o qual será visto no item 3.3 deste trabalho.

### 3.2.2 Intervalos Variáveis e Funções

Todas as operações utilizadas para intervalos compostos por números, podem ser aplicadas a intervalos variáveis, segundo Dong e Shah [22]. Logo, uma função de um intervalo variável pode ser definida como:

$$Y = \{ \min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b)) \};$$

Na figura 3.1 pode-se visualizar um tipo de função monotonicamente crescente, na qual estão representados os valores de  $f(a)$  e  $f(b)$ . O exemplo numérico deste tipo de função pode ser visto no exemplo 3.2. do anexo 1.

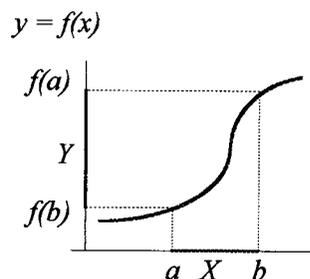


Figura 3.2. Função Monotonicamente Crescente

Dong e Shah [22] através da figura 3.2, demonstram um caso mais complexo, onde uma função envolve múltiplos intervalos, formando um sólido  $n$ -dimensional, neste caso particular, um tridimensional ( $2^3$ ):

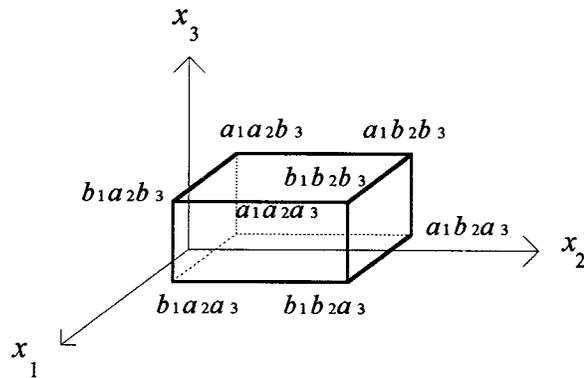


Figura 3.2 Região Retangular Tridimensional

### 3.2.3 - Método Vertex

O método Vertex foi desenvolvido por Dong e Shah [22], devido a necessidade de ter-se um método computacional simples e eficiente para manusear as operações com intervalos, uma vez que existe a necessidade de resolver-se o problema de sub-distributividade (alargamento), que ocorre quando tem-se a multiplicação de um dado intervalo, pela diferença de outros dois ( $Y = X_1 [X_2 - X_3]$ ).

Se  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é contínua em uma região retangular  $n$ -dimensional, e também existem pontos extremos (incluindo os limites) o valor da função no intervalo é:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ = \{ \min_j [f(c_j)], \max_j [f(c_j)] \}, \text{ para } j = 1, \dots, N;$$

onde;

$c_j$  é a ordenada do  $j$ -ésimo vértice;

o número de combinações possíveis é  $(2^n)$ ;

onde;

$n$  = número de intervalos de  $f(X)$ ;

$X_i = [a_i b_i]$  para  $i = (1, 2, \dots, n)$

Que resulta na seguinte combinação :

$c_j = [a_i b_i]$  para  $j = (1, 2, \dots, 2^n)$

$$Y = \{ \min_j [f(c_j)], \max_j [f(c_j)] \}, \text{ para } j = 1, \dots, N;$$

Pode-se constatar através do exemplo 3.3 do anexo 1, que o resultado obtido pelo método Vertex, elimina a distorção anteriormente verificada na solução do exemplo 3.1, anexo 1.

Entretanto o Vertex pode ser considerado um bom método, quando as condições de continuidade são satisfeitas. Porém quando existem pontos extremos de uma função do tipo;  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  não linear, em uma região  $n$ -dimensional  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , o método pode *esconder* certas partes do intervalo. Como pode ser visualizado na figura 3.2 do anexo 1.

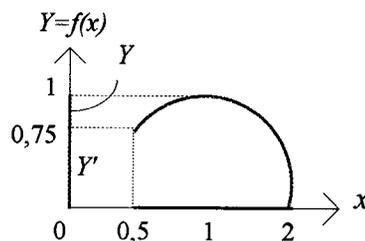


Figura 3.3 Mapeamento de X para Y

Para evitar este tipo de distorção, deve-se acrescentar pontos extremos aos vértices, da seguinte forma:

Supondo-se que existam  $m$  pontos extremos,  $E_k$  [ $k = 1 \dots m$ ], pode-se alterar  $Y = f(x)$  para:

$$Y = \{ \min [ (f(c_j)) , (f(E_k)) ] , \max [ (f(c_j)) , (f(E_k)) ] \};$$

sendo a condição de continuidade obtida através da derivada parcial de  $f(x)$ ;

$$\frac{d f(x)}{d x} = 0$$

Substituindo o ponto  $E_k$  na função  $Y$ , obtém-se o resultado correto. A correção desta deficiência, é apresentada numericamente no exemplo 3.3 do anexo 1.

### 3.2.4 Melhoramentos na Precisão dos Intervalos

Partindo-se do pressuposto de que quanto maior o tamanho do intervalo, maior é o grau de incerteza que este encerra, deve-se utilizar técnicas que permitam uma diminuição do intervalo, visando desta maneira aumentar a precisão das estimativas.

Shaalán, Broadwater e Fabrycky [21], propõem uma alternativa para obter-se uma maior precisão nos limites dos intervalos aritméticos, através de um rearranjo algébrico de algumas funções econômicas, reduzindo o número de ocorrências de determinadas variáveis, como por exemplo, o valor presente de uma anuidade  $(P/A, i, n)$ . Sendo a função original:

$$(P/A, i, n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \quad (3.1)$$

simplificando-se o lado direito da equação, obtém-se;

$$(P/A, i, n) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad (3.2)$$

onde;

$i$  = taxa de juros;

$n$  = número de períodos .

O exemplo numérico da aplicação desta simplificação está no Anexo 1, exemplo 3.5, cujos resultados produziram o gráfico da figura 3.4, onde é possível observar-se uma grande diferença entre os valores obtidos com a expressão (3.1) e a expressão (3.2). Neste caso, o resultado da diminuição do intervalo aritmético, obtido com a expressão (3.2), representa um ganho de precisão na estimativa.

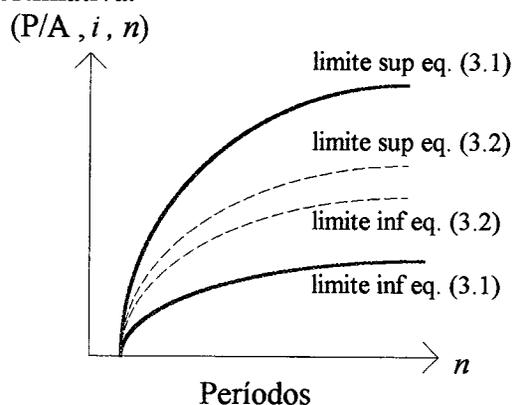
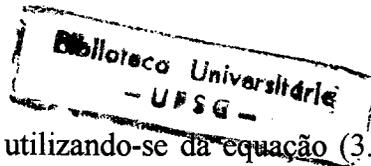


Figura 3.4. Aumento da Precisão do Intervalo de I



Shalan, Broadwater e Fabrycky [21], utilizando-se da equação (3.2), demonstraram que é possível reduzir-se sensivelmente o tamanho dos intervalos. Os passos para resolver o exemplo 3.5, são os seguintes:

- primeiro passo, transporte de todos os fluxos de caixa para o valor presente (data zero), através de uma única operação, envolvendo a equação (8). Desta forma, obteve-se como resultado o intervalo [1570, 1844];

- segundo passo, transportar cada fluxo, período a período, para o valor presente (data zero), com a mesma equação (3.2). Este procedimento resultou no intervalo [1690, 1713].

Isto equivale dizer que o segundo procedimento adotado produziu um resultado mais preciso para os limites dos intervalos, segundo Shalan, Broadwater e Fabrycky [21], o resultado [1690, 1713], é o resultado exato para os intervalos.

A explicação para a diferença encontrada no exemplo anterior, segundo Shalan, Broadwater e Fabrycky [21], é a forma com que as variáveis independentes são tratadas. Além de ter-se evitado a repetição de um mesmo intervalo, na mesma equação.

Exemplo:

sendo  $A$  um intervalo variável, então:

$$A^2 = A \times A;$$

onde, a primeira ocorrência de  $A$  pode ser um limite inferior, enquanto que a segunda ocorrência pode ser um limite superior.

Como melhoramento adicional, é possível associar-se uma distribuição de probabilidades às variáveis, desde que as variáveis possam ser classificadas como tendo comportamento aleatório.

Shalan, Broadwater e Fabrycky [21], "... Os intervalos aritméticos fornecem uma ferramenta prática para implementação e extensão de valores desconhecidos. Se deseja-se associar uma distribuição de probabilidades para algum parâmetro econômico, isto é possível. Se todas as probabilidades forem consideradas como igualmente prováveis, pode-se assumir uma distribuição do tipo uniforme".

### 3.2.5 Análise Variacional

Ensslin e Ensslin [39] desenvolveram o método da Análise Variacional, que entre outras aplicações, serve para melhorar a precisão dos Intervalos Aritméticos. O método da Análise Variacional baseia-se no método de propagação de erros, aplicados à análise financeira, mais precisamente, às análises envolvendo fluxos de caixa.

Seja:

$$P = f(E_1, E_2, \dots, E_r);$$

onde;

P = medida desejada;

$E_i$  = medidas obtidas no processo;

$i = 1, 2, \dots, r$ .

A análise, tem como sustentação a aplicação de derivadas parciais;

$$\frac{\delta f}{\delta E_i}$$

Adaptando-se para análise de fluxos financeiros, onde a variável de decisão é o Valor Presente  $VP$ , e os fluxos são independentes, segundo Ensslin e Ensslin [39], para medir a repercussão da variação de cada variável na função P, deve-se considerar a seguinte equação:

$$(\nabla VP)^2 = \sum_{i=1}^r \left( \frac{\delta f}{\delta E_i} \nabla x_i \right)^2 \quad (3.3)$$

onde;

$VP(P, CA, CR, i, n)$ ; e

$\nabla x_i$  = intervalo de variação dos fluxos, taxa de juros e períodos.

Além de diminuir-se a dispersão dos intervalos, quando utiliza-se o método da Análise Variacional, segundo Ensslin e Ensslin [39], "... a Análise Variacional irá indicar quem são os eventos que mais contribuem para esta dispersão e, portanto, onde se deverá concentrar esforços para reduzir ainda mais o intervalo de dispersão de VP, caso isto seja necessário".

Para determinar a dispersão total, faz-se o somatório da correção para VP, de todos os intervalos de variações envolvidos, através da seguinte fórmula, proposta por Ensslin e Ensslin[39]:

$$(\nabla VP)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 \quad (3.4)$$

Onde:

$$A = \frac{\delta VP}{\delta P} \nabla P \quad (3.5)$$

$$B = \frac{\delta VP}{\delta CA} \nabla CA \quad (3.6)$$

$$C = \frac{\delta VP}{\delta RA} \nabla RA \quad (3.7)$$

$$D = \frac{\delta VP}{\delta i} \nabla i \quad (3.8)$$

$$E = \frac{\delta VP}{\delta n} \nabla n \quad (3.9)$$

### 3.3 Conjuntos Difusos

Basicamente a teoria dos conjuntos difusos, permite o tratamento de problemas que encerram informações vagas e imprecisas, isto é quando as variáveis são mal definidas e não sejam classificáveis como aleatórias.

A figura 3.5 é uma adaptação do original de Chiu e Park [25], e representa de forma esquemática a ligação entre as informações de carácter difuso, e a transformação destas informações em variáveis quantitativas através da utilização da teoria de conjuntos difusos.

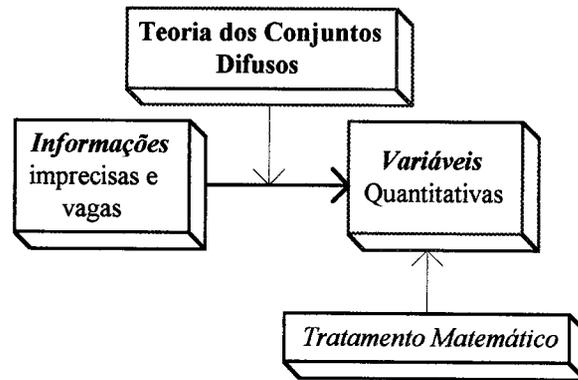


Figura 3.5 Transformação das Informações

A Teoria dos Conjuntos Difusos foi desenvolvida por Zadeh [26], em contraposição à Teoria Clássica dos Conjuntos, que admite apenas dois estados, ou um determinado elemento pertence a um dado conjunto, ou não pertence, tendo sua função de pertinência representada por 1(um) e 0(zero) respectivamente. Na teoria dos conjuntos difusos admite-se a existência de graus intermediários de pertinência no intervalo  $[0, 1]$ .

Esta premissa baseia-se na idéia de que um elemento pode pertencer com maior intensidade a um determinado conjunto do que outro, e que as informações a respeito de uma determinada variável, via de regra, encerram algum tipo de incerteza e imprecisão, quando tratamos de estados da natureza.

Zimmerman [23] cita duas situações favoráveis à utilização de modelos baseados em conjuntos difusos, em detrimento dos modelos de conjuntos clássicos, que são:

- primeiro, as situações práticas, muito raramente são exatas ou determinísticas, portanto, não são passíveis de uma descrição precisa;

- segundo, a descrição de uma situação real normalmente requer uma grande quantidade de informações e detalhes a respeito dos dados envolvidos, muitas vezes devido a esta grande quantidade de particularidades, o observador nem sempre é capaz de reter todas as informações.

Isto leva a acreditar que as situações reais, quando descritas linguisticamente, sofrem uma perda de informações a respeito dos eventos, uma vez que, em não se conseguindo depreender completamente as características da situação, o resultado é um conjunto de informações generalistas do processo, portador de incertezas e imprecisão.

Por fim, a grande vantagem dos modelos baseados na teoria dos conjuntos difusos, é sem dúvida, a facilidade que estes oferecem na transformação de variáveis linguísticas em variáveis quantitativas. Este é um dos fatores responsáveis pelo crescente interesse no estudo e aplicação de modelos possibilísticos em condições de incerteza.

Dubois e Prade [24], seja  $X$  um conjunto clássico de objetos, chamado de Universo, com elementos genéricos  $x$  ( $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) e  $\tilde{A}$  um subconjunto difuso de  $X$ , tal que:

$$\tilde{A} = \{ x, \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X \}; \text{ou}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$$

onde;

$\mu_{\tilde{A}}(x)$  é o grau de pertinência de  $x$  em  $\tilde{A}$  ;

no caso contínuo tem-se:

$$\tilde{A} = \int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$$

dois conjuntos difusos,  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  são iguais, se e somente se:

$$\forall x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x_i)$$

conjunto Normalizado;

se o supremo de  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ , e se  $\tilde{A}$  é um conjunto difuso não vazio pode ser sempre normalizado pela divisão;

$$\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{\text{Sup } \tilde{A}(x)}$$

Segundo Zimmerman [23] , assim como um conjunto difuso é uma generalização de um conjunto clássico, a função de pertinência  $\mu(x)$ , também é uma generalização da função característica.

O suporte de um conjunto difuso  $\tilde{A}$ ,  $S(\tilde{A})$  é um conjunto fração para todo  $x \in X$ , tal que;

$$\mu_{\tilde{A}}(x) > 0;$$

cortes alfa (níveis  $\alpha$ ) são definidos por Zimmerman [23] como sendo o conjunto de elementos do conjunto difuso  $\tilde{A}$ , cujo mínimo grau de pertinência é  $\alpha$  .

Tendo-se:

$$\tilde{A}_\alpha = \{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \}$$

$\tilde{A}'_\alpha = \{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha \}$ , é classificado como um corte- $\alpha$  robusto;

Um conjunto difuso  $\tilde{A}$  é convexo se:

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2) \}, \quad [(x_1), (x_2) \in X], \lambda \in [0, 1];$$

A cardinalidade de um conjunto difuso  $|\tilde{A}|$  define-se como:

$$|\tilde{A}| = \sum \mu_{\tilde{A}}(x), \quad x \in X;$$

e a cardinalidade relativa;

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|};$$

Que pode ser interpretada como a fração de elementos de  $X$  existentes em  $\tilde{A}$ .

Para  $X$  infinito a cardinalidade é:

$$|\tilde{A}| = \int_x \mu_{\tilde{A}}(x) dx$$

Interseção de dois conjuntos difusos,  $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \}, \quad x \in X$$

União de dois conjuntos difusos,  $\tilde{D} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \max \{ \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x) \}, \quad x \in X$$

Complemento do conjunto difuso,  $\tilde{A}$ ,  $\mu_{\tilde{A}^c}(x)$

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \quad x \in X$$

### 3.3.1 Representação dos Números Difusos

Os números difusos podem ser representados de várias formas, porém as mais utilizadas são aquelas que têm como representação a forma triangular, devido a este fato, a representação e operações destes números serão feitas com base neste tipo de distribuição, figura 3.6.

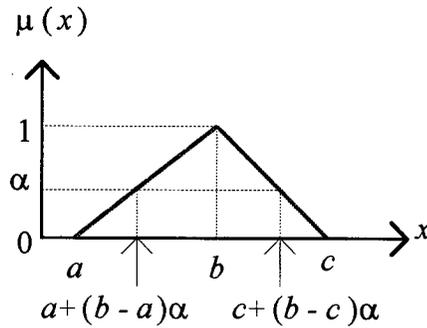


Figura 3.6 Número Difuso à Esquerda(L) e à Direita(R)

Introduzindo-se a idéia de  $\alpha$ -cortes, pode-se determinar os valores de  $x$  para diferentes níveis de pertinência:

$$\mu(x) \begin{cases} \frac{(x-a)}{(b-a)}, & a \leq x \leq b; \\ \frac{(c-x)}{(c-b)}, & b \leq x \leq c; \\ 0, & x \leq a; \end{cases}$$

### 3.3.2 Operações com Números Difusos

As operações com números difusos resultam em intervalos, com valores mínimos e máximos, que são os números difusos à esquerda e à direita, respectivamente. As operações básicas dos intervalos aritméticos também são válidas para números difusos.

Chiu e Park [25], propõem a seguinte representação:

$$P = [P^{l(\alpha)}, P^{r(\alpha)}]; \quad (3.10)$$

onde:

$P^{l(\alpha)}$  = número à esquerda ( $\tilde{L}$ );

$P^{r(\alpha)}$  = número à direita ( $\tilde{R}$ ).

Segundo Zhao e Govind [27],  $P^{l(\alpha)} - P^{r(\alpha)}$ , mede o grau de incerteza de um número (conjunto) difuso, e quanto maior for este resultado maior é o intervalo de incerteza.

Tendo-se;

$\alpha = 0 \Rightarrow P^{l(\alpha)} = \text{mínimo e } P^{r(\alpha)} = \text{máximo}$

$\alpha = 1 \Rightarrow P^{l(\alpha)} = P^{r(\alpha)} \text{ normalizado}$

Sendo;

$P$  e  $Q$ , dois números difusos triangulares iguais a:

$$\begin{aligned} P &= [P^l(\alpha), P^r(\alpha)]; \text{ e} \\ Q &= [Q^l(\alpha), Q^r(\alpha)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tem-se a operação de Adição ( $\oplus$ ), como segue;

$$P \oplus Q = [P^l(\alpha) + Q^l(\alpha), P^r(\alpha) + Q^r(\alpha)] \quad (3.12)$$

Para  $\alpha = 0$ ;

$$P \oplus Q = [{}^l(\alpha) \text{ valor mínimo}, {}^r(\alpha) \text{ valor máximo}]$$

Para  $\alpha = 1$ ;

$$P \oplus Q = \text{valor médio (ou mais provável)}$$

Obtém-se a Multiplicação ( $\otimes$ ), da seguinte forma:

se  $P$  e  $Q$  são positivos;

$$P \otimes Q = [P^l(\alpha) \cdot Q^l(\alpha), P^r(\alpha) \cdot Q^r(\alpha)] \quad (3.13)$$

a divisão ( $\oslash$ ) de dois números difusos divide-se em dois casos:

a) se  $P$  e  $Q$  são positivos, tem-se que o resultado é um número difuso positivo

$$P \oslash Q = [P^l(\alpha) / Q^r(\alpha), P^r(\alpha) / Q^l(\alpha)] \quad (3.14)$$

b) se  $P$  é negativo e  $Q$  é positivo, tem-se que o resultado é um número difuso negativo.

$$P \oslash Q = [P^l(\alpha) / Q^l(\alpha), P^r(\alpha) / Q^r(\alpha)] \quad (3.15)$$

A figura 3.7 é resultante do exemplo 3.5 do anexo 1, e permite comprovar-se visualmente que enquanto a soma de dois números difusos lineares retangulares resulta em uma representação linear, a multiplicação destes tem como resultado uma função não linear.

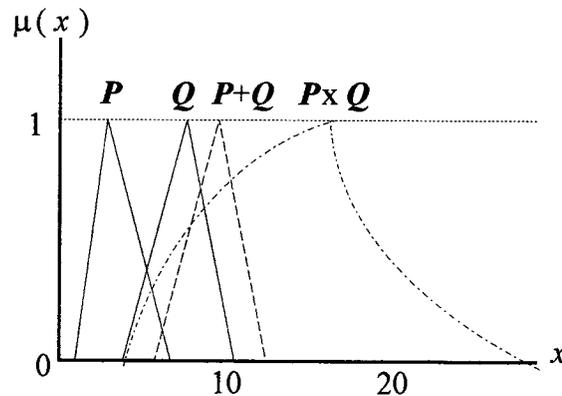


Figura 3.7 Adição e Multiplicação de Números Difusos

Uma outra importante representação de números (conjuntos) difusos, à esquerda ( $\tilde{L}$ ) e a direita ( $\tilde{R}$ ), é dada por Dubois e Prade [24]. Trata-se do número difuso  $\tilde{M}$ .

Um número difuso  $\tilde{M}$  é do tipo  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{R}$ , se existe uma função de referência  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{R}$  e admite os escalares  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , logo, pode-se representar sua função de pertinência da seguinte maneira:

$$\mu(x) \begin{cases} \tilde{L} \left( \frac{m-x}{\alpha} \right), x \leq m \\ \tilde{R} \left( \frac{x-m}{\beta} \right), x \geq m \end{cases}$$

Onde  $m$  = o valor médio, ou moda;

$\alpha$  e  $\beta$  = são os parâmetros da curva, à esquerda e à direita respectivamente;

$\tilde{M}$  pode ser representado por  $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{\tilde{L} \tilde{R}}$ .

A representação gráfica deste número está na figura 3.8, do exemplo 3.6 do anexo 1. Nesta figura nota-se a grande semelhança com a curva que representa a função distribuição de probabilidades do tipo Beta.

### 3.4 Distribuição de Possibilidades

A Teoria dos Conjuntos Difusos fornece uma base natural para a Teoria das Possibilidades, uma vez que nesta estão contidos todos os pressupostos necessários.

Zadeh [44] define uma distribuição de possibilidades por intermédio de uma função de restrição difusa. Sendo  $X$  uma variável que assume valores em um universo de discurso  $U$ , com os elementos genéricos representados por  $u$ ;

$X = u$ , significa que  $X$  é representado por  $u$ ,  $u \in U$ .

Fazendo-se  $F$  ser um subconjunto difuso de  $U$ , representado pela função de pertinência  $\mu_F$ , então pode-se dizer que  $F$  é uma restrição difusa em  $X$  (ou associada com  $X$ ). Logo, se  $F$  age como uma restrição difusa elástica nos valores que podem ser representados por  $X$ , tem-se:

$$X = u : \mu_F(u)$$

Onde  $\mu_F(u)$  é o grau cuja restrição representada por  $F$  é satisfeita quando  $u$  é determinado por  $X$

Se  $R(X)$  é uma restrição difusa associada com  $X$ ,

então  $R(X) = F$  é chamada de *equação relacional representativa*, a qual determina o conjunto difuso  $F$  para a restrição  $R(X)$ .

Segundo Zimmerman [23], tomando-se  $A(X)$  como um atributo ampliado para a variável  $X$ , pode-se definir, por exemplo que  $A(X) =$  idade de João, e  $F$  é o conjunto difuso "jovem". A proposição "João é Jovem", pode ser expressa por  $R(A(X)) = F$ , exemplificada a seguir:

A proposição João é jovem, cujo universo de discurso  $U = [0, 100]$ ;

$$\mu_{\text{jovem}}(u) = [10/1.0, 20/0.9, 28/0.7, 30/0.5, 35/0.2, 45/0.1]$$

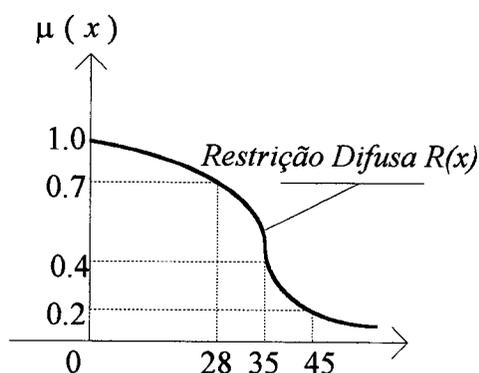


Figura 3.9 Distribuição de Possibilidades para a proposição "Jovem"

Pode-se dizer que 0.7 é o grau de compatibilidade com que 28 anos pode ser interpretado como "jovem", este exemplo esta representado na figura 3.9.

### 3.5 Ordenação de Quantidades Difusas (Conjuntos e Números)

Na literatura encontram-se vários trabalhos a respeito da ordenação e hierarquização de conjuntos difusos, pode-se citar aqui alguns dos mais conhecidos, Yager [29], Dubois e Prade [30], Bass e Kwakernaak [40], Gonzales e Vila [35], Kaufman e Gupta [25] e Choobineh e Li [34], dentre outros.

A despeito da grande quantidade de métodos desenvolvidos pelos autores citados, alguns são de difícil implementação, uma vez que requerem o cumprimento de muitos pressupostos, dificultando a aplicação prática em análise de investimentos.

Com base neste fato, procurou-se elaborar um método para ordenação de números difusos baseado no método proposto por Yager [29], o qual será apresentado de forma sintetizada, onde procura-se evidenciar os pontos pertinentes ao trabalho ora desenvolvido.

As principais vantagens do método [29], são a comparação entre números fracionados, subconjuntos difusos discretos e subconjuntos difusos contínuos. Além disto, o método não requer condição de convexidade e nem a normalização do conjuntos comparados.

#### 3.5.1 Ordenação de Subconjuntos Difusos em um Intervalo Unitário

Definindo-se a função  $F$ , para o intervalo unitário  $I$ , a qual serve como um função de ordem natural para os subconjuntos de  $I$ ,

então:

$$F: I^I \rightarrow I$$

onde;

$I^I$  é um conjunto para todos subconjuntos do intervalo unitário.

E, assumindo-se  $A$  como sendo um subconjunto de  $I$ , o conjunto nível (corte  $\alpha$ ) de  $A$ ,  $A_\alpha$  é definido como sendo:

$$A_\alpha = \{x \mid x \in I, A(x) \geq \alpha\};$$

onde os  $(\alpha - \text{cortes})$  são conjuntos níveis de  $A$  e subconjuntos ordinários de  $I$ . Admitindo-se que  $V$  é um subconjunto ordinário de  $I$ , pode-se definir  $M(V)$ , como sendo o valor médio dos elementos de  $V$ , relacionados com:

$$V = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

Logo;

$$M(V) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i + b_i}{2} \cdot a_i + b_i}{\sum_{i=1}^n a_i + b_i} \quad (3.16)$$

Se  $V = \{ a \leq x \leq b \}$ , tem-se:

$$M(V) = \frac{a+b}{2} \quad (3.17)$$

Se  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n \leq 1$ ; e

$$V = \cup \{ a_i \leq x \leq b_i \};$$

Então:

pode-se desta forma definir a função de ordem  $F$ . Admitindo-se que  $A$  é um subconjunto difuso de  $I$ , com grau de pertinência máximo  $\alpha_{\max}$ , encontrando-se a  $F(A)$  de seguinte maneira:

$$F(A) = \int_0^{\alpha_{\max}} M(A) dx \quad (3.18)$$

### 3.5.2 Generalização do Método de Yager

Fazendo-se uma analogia com o item 3.4.2 do capítulo 3, onde Chiu e Park [25], propõe-se a seguinte representação:

seja  $P$  um número difuso representado à esquerda ( $l$ ) e à direita ( $r$ );

$$P = [Pl(\alpha), Pr(\alpha)] = [a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha]; \quad (3.10)$$

E comparando-se com Yager [9], onde;

$$A_\alpha = \{ x \mid x \in I, A(x) \geq \alpha \}$$

$$= [a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha];$$

$$M_\alpha = \frac{1 - (b - a)\alpha + (b - c)\alpha + a}{2}; \quad (3.19)$$

onde  $c = 1$ .

Desta forma, pode-se generalizar para intervalos não unitários, como segue:

$$M_\alpha = a + c + \frac{(b - a)\alpha + (b - c)\alpha}{2} \quad (3.20)$$

o que representa que  $f(A) : \text{para } A \in \tilde{\mathbb{R}}^n$

Resumindo-se, a hierarquização é dada pelo cálculo do valor médio das áreas a esquerda e a direita do ponto de pertinência máxima, ou valor modal, com base no corte  $\alpha$  escolhido.

### 3.5.3 Relação de Indiferença e Dominância

Gonzales e Vila [35], "...A indiferença entre dois elementos de  $\tilde{\mathbb{R}}$ , é equivalente a igualdade dos seus pontos médios para cada corte  $\alpha$ ".

Na literatura, de uma maneira geral, tem-se classificado a relação de dominância com base nos corte  $\alpha$ , uma vez que Zadeh [26] definiu que a igualdade entre dois conjuntos difusos  $A$  e  $B$  existe, se e somente se,  $\mu_A = \mu_B$  para  $\alpha \in [0, 1]$ .

Isto equivale dizer que, se para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , a função;

$$M_{\alpha A} = M_{\alpha B} \Rightarrow A \text{ é indiferente a } B$$

$$M_{\alpha A} > M_{\alpha B} \Rightarrow \text{existe estrita dominância de } A \text{ em relação a } B$$

$$M_{\alpha A} \geq M_{\alpha B} \Rightarrow \text{fraca dominância de } A \text{ em relação a } B.$$

A figura 3.10 representa uma situação em que tem-se quatro projetos, nos quais não se pode afirmar existir dominância pela simples visualização gráfica.

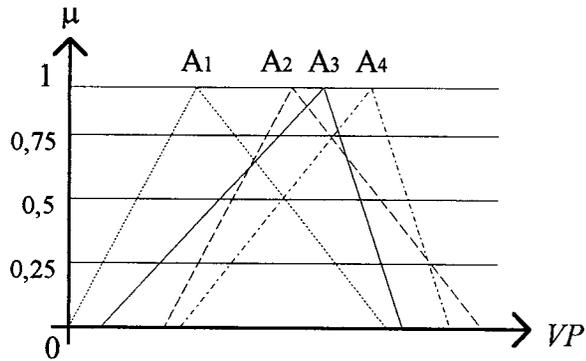


Figura 3.10 Valor Presente para Alternativas Diferentes

### 3.5.4 Outros Métodos para Hierarquização

Chiu e Park [25], apresentam quatro métodos para hierarquização de quantidades difusas, as quais serão descritas a seguir:

#### a) Método Choobineh e Li [25]

Este método caracteriza-se pela ponderação das áreas de possibilidades, à esquerda e à direita, representadas pela função  $K$ ;

$$K = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - (RA - LA)}{(R - L)} \right] \quad (3.21)$$

a qual é representada a seguir na figura 3.11;

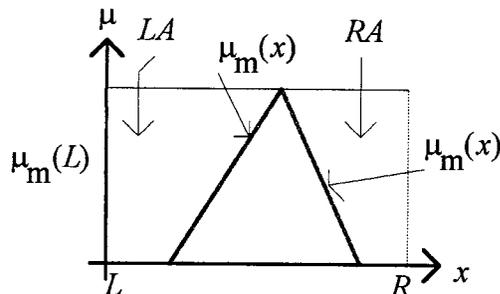


Figura 3.11 Cruzamento de Áreas de Ordenação

A seleção da melhor alternativa é em função do maior valor de  $K$ .

### b) Método de Chang [25]

Este método define a esperança matemática de um número difuso triangular  $(a \ b \ c)$  como sendo:

$$\frac{(c - a) \cdot (a + b + c)}{6} \quad (3.22)$$

A preferência é dada ao maior número calculado.

### c) Método de Kaufmann e Gupta [25]

Os autores sugerem três critérios para definir um "ranking" de números difusos triangulares com os parâmetros  $(a \ b \ c)$ . A sequência de dominância é determinada de acordo com as seguintes prioridades:

1) comparação dos números ordinários;

$$\frac{(a + 2b + c)}{4} \quad (3.23)$$

2) comparação da moda, (valor mais provável),  $b$  de cada número difuso triangular;

3) comparação da faixa,  $c - a$ , de cada número difuso triangular.

Neste método, a preferência é determinada pela soma destes números ordinários.

### d) Método dos Pesos, Chiu e Park [25]

Este método está baseado em três valores estimados, mínimo, máximo e valor mais provável  $(a, b \text{ e } c)$  respectivamente. O objetivo é atribuir-se pesos aos valores mais prováveis dos projetos, da seguinte maneira:

$$w_1 \left( \frac{a + b + c}{3} \right) + w_2 b \quad (3.24)$$

Igualando-se os  $w$ , pode-se resumir para:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + w b \quad (3.25)$$

Os valores de  $w$  devem ser de acordo com a natureza e a magnitude do valor mais provável. Se a magnitude do valor mais provável for um número grande, usa-se  $w = 0,3$ , se for um valor pequeno, recomenda-se  $w = 0,1$ .

O projeto escolhido deve ser aquele que apresentar o maior valor para a equação (3.25).

### 3.6 Teoria da Utilidade

Von Neumann e Morgenstern [32] desenvolveram a moderna Teoria da Utilidade, a qual esta fundamentada axiomáticamente em função do comportamento racional do decisor, o qual pode atribuir uma ordem de preferências entre alternativas que lhe sejam apresentadas.

Esta teoria baseia-se no princípio de atribuição de valores a utilidade adequados a cada evento, tornando-se assim possível calcular o Valor Esperado de cada alternativa. Será considerada como mais vantajosa a alternativa que apresentar maior valor esperado para a utilidade.

#### 3.6.1 Notação Básica

$A \succ B$  :  $A$  é preferível a  $B$

$A \approx B$  :  $A$  é indiferente a  $B$

$A \prec B$  :  $B$  é preferível a  $A$ ; e

$[A, p, B, 1-p]$ , representa uma loteria com prêmio  $A$  e probabilidade  $p$ , e prêmio  $B$  com probabilidade  $1-p$ :

#### 3.6.2 Axiomas

Von Neumann e Morgenstern[32], fundamentaram seis axiomas que sustentam a teoria da utilidade, os quais são:

1) ordenabilidade - dados os prêmios  $A$  e  $B$  deve-se ter  $A \succ B$ ,  $A \approx B$  ou  $A \prec B$ ;

- 2) transitividade - Se  $A \succ B$  e  $B \succ C$  então  $A \succ C$ ;
- 3) continuidade - Se  $A \succ B \succ C$ , então existe  $p$ ,  $0 < p < 1$ , tal que,  $B \approx [A, p, C, 1-p]$ ;
- 4) substitubilidade - Se  $A \approx B$ , então  $[A, p, C, 1-p] \approx [B, p, C, 1-p]$ ;
- 5) redutibilidade -  $[A, p, B, 1-p], [A, q, B, 1-q] \approx [A, pq, C, 1-pq]$ ;
- 6) monotonicidade - Se  $A \succ B$ , então  $[A, p, B, 1-p] \succ [A, q, B, 1-q]$  se e somente se  $p > q$ .

Com base nestes axiomas pode-se definir a função utilidade  $u(x)$  para um determinado decisor, onde  $x$  é o prêmio.

### 3.6.3 Propriedades de $u(x)$ .

- a)  $A \succ B \Leftrightarrow u(A) > u(B)$ ;
- b)  $A \approx B \Leftrightarrow u(A) = u(B)$ ;
- c)  $A \prec B \Leftrightarrow u(A) < u(B)$ ;
- d)  $u([A, p, B, 1-p]) = p u(A) + (1-p) u(B)$

### 3.6.4 Determinação da Função Utilidade

A construção de uma Função Utilidade, é na verdade, um exercício de aproximação das reais preferências do decisor, uma vez que na prática o decisor não obedece logicamente a todos os axiomas básicos. Estudos empíricos têm mostrado que as preferências do decisor, assim como sua aversão ao risco, podem mudar em função do valor monetário, e que a variável tempo pode ser um outro fator de influência sobre as preferências do decisor.

Porém pode-se chegar a uma representação através de alguns poucos pontos básicos, como no exemplo 3.9, anexo 1, formulado por Beckman [19]:

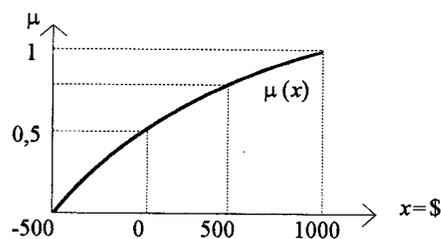


Figura 3.12 Função Utilidade

A figura 3.12, representa uma função utilidade côncava, isto é, um tipo de curva atribuída a um decisor tipicamente averso ao risco, no caso em que a curva é convexa, deve-se interpretar o comportamento do decisor como sendo propenso ao risco, quando a função tem uma forma linear, diz-se que este é indiferente ao risco.

No que se refere a curvatura da Função Utilidade, Beckman [34] diz que "... as pessoas têm uma tendência de se mostrar mais tolerantes em relação ao risco quando se deparam com uma situação hipotética, que quando se vêem obrigadas a tomar uma decisão concreta. Consequentemente, as funções de utilidade obtidas por intermédio de entrevistas tendem a ser menos curvas (indicando menor aversão ao risco) que na realidade o são. "

Outro ponto a se considerar como importante, apontado por Beckman [34], é que quando o decisor escolhe entre uma loteria e um equivalente certo, geralmente este pensa em uma faixa de valores que o satisfariam, não apenas em um valor exato. Este fato sugere que represente-se as curvas de função de utilidade, em termos de intervalos, com limites inferiores e superiores como pode ser visto na figura 3.13, ao invés de uma função unívoca.

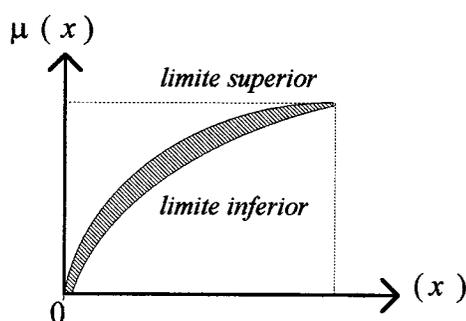


Figura 3.13 Função Utilidade em Intervalos

### 3.6.5 Coeficiente de Aversão ao Risco (Aversão Local)

O coeficiente de aversão ao risco, é um fator variável com o comportamento de a cada decisor. Este por sua vez tem uma grande aplicação prática em modelos de tomada de decisão.

Por definição, o coeficiente de aversão ao risco ( $A$ ), é a metade da derivada segunda da função no ponto considerado ou seja;

$$A = - \frac{d^2 u''(x)}{2} \quad (3.26)$$

### 3.6.6 Expectância-variância

Uma vez conhecendo-se o coeficiente de aversão ao risco do decisor, é possível determinar a função expectância variância, a qual auxiliará na tomada de decisão em situação de risco.

$$ev = E(VP) - A \sigma \quad (3.27)$$

onde:

$ev$  = expectância-variância (valor da variável de decisão);

$E(VP)$  = valor esperado do Valor Presente;

$A$  = coeficiente de aversão ao risco;

$\sigma$  = desvio padrão da distribuição da Variável de Decisão.

A figura 3.14 ilustra a relação inversamente proporcional entre a expectância variância e o coeficiente de aversão ao risco.

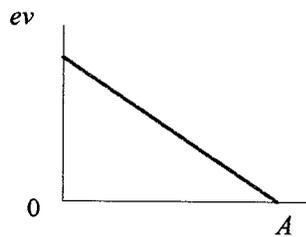


Figura 3.14 Expectância-variância x Aversão ao Risco

Igualando-se a equação (3.27), a zero;

Tem-se o limite máximo para  $A$ , isto é, para  $A \geq E(VP) / \sigma$  o projeto é rejeitado, caso contrário é aceito.

Examinando-se a situação inversa, isto é, quando o decisor é totalmente indiferente ao risco, tem-se que a expectância-variância é máxima;

$$A = 0$$

Tomando-se cada um dos períodos, tem-se o limite dado por  $A$ , a partir do qual a utilidade passa a se decrescente.

Mesmo sendo o decisor averso ao risco, sempre existirá um  $A$  máximo, determinado pelas características do projeto, o qual deverá ser respeitado.

$$A_{i \max} = \frac{\max [E (VP )_i]}{\sigma_i} \quad (3.28)$$

Sendo,  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ;

Examinando-se a situação inversa, isto é, quando o decisor é indiferente ao risco;

$$A = 0$$

Tem-se que:

$$ev_{i \max} = E(VP)_{i \max}, \quad i = \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.29)$$

### 3.7 Estimativa com Base em Três Pontos (mínimo, mais provável e máximo)

Em muitos processos que envolvem análise e tomada de decisão, a distribuição de probabilidades das variáveis envolvidas é parcial ou totalmente desconhecida. Este fato cria a necessidade de adotar-se uma distribuição que represente adequadamente o comportamento das variáveis.

Na literatura, encontram-se diversas sugestões a respeito da melhor distribuição a ser utilizada, Shaalan, Broadwater e Rahman [21] sugerem a distribuição uniforme, desde que as probabilidades associadas às variáveis sejam igualmente prováveis.

#### 3.7.1 Distribuição Aproximada da Distribuição Beta (PERT)

Park [36] aconselha a distribuição triangular, ou uma aproximação derivada do sistema PERT. Esta última tem sido bastante utilizada, porém este tipo de distribuição é apenas uma aproximação linear da função Beta, com sérias deficiências no que se refere a precisão obtida, principalmente nas situações em que os dados apresentam uma forte assimetria. Os erros cometidos na adoção da aproximação PERT são destacados em Keefer e Bodily [37], os quais podem ser minorados utilizando-se uma aproximação exponencial desenvolvida no trabalho de Ferreira [38].

A distribuição linear aproximada da função Beta é a seguinte:

$$E(x) = \frac{a + 4c + b}{6} \quad (3.30)$$

$$\sigma(x) = \frac{b - a}{6} \quad (3.31)$$

Onde:

$E(x)$  = média , ou valor esperado;

$\sigma(x)$  = desvio padrão;

$a$  = valor mínimo estimado;

$b$  = valor máximo estimado;

$c$  = valor mais provável (modal).

### 3.7.2 Distribuição Beta

Este tipo de distribuição tem sido muito utilizada para estimativas baseadas em três pontos, uma vez que tem como característica principal sua grande flexibilidade de ajustamento, isto é, a curva ajusta-se perfeitamente a dados que apresentam assimetria elevada, além de ter a forma que vai desde uma quase-retangular ( $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$ ), a uma curva perfeitamente simétrica ou normal.

Os parâmetros básicos da distribuição Beta, são os seguintes:

$$f(x) = \frac{(\alpha + \beta)!}{(\alpha)! (\beta)!} x^{(\alpha - 1)} (1-x)^\beta \quad (3.32)$$

$$\alpha = \frac{(\mu_x - a)^2 \cdot (b - \mu_x) - \sigma_x^2 (\mu_x - a)}{\sigma_x^2 (b - a)} \quad (3.33)$$

$$\beta = \frac{(\mu_x - a) (b - \mu_x)^2 - \sigma_x^2 (b - \mu_x)}{\sigma_x^2 (b - a)} \quad (3.34)$$

$$\text{Moda} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \quad (3.35)$$

$$\text{Média} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + \beta + 1)} \quad (3.36)$$

$$\text{Variância} = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2 (\alpha + \beta + 3)} \quad (3.37)$$

Onde:

$a \geq x \geq b$

$\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros da curva,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$

$\mu_x$  = média ou valor esperado;

$a$  = valor mínimo (na distribuição Beta padrão = 0);

$b$  = valor máximo (na distribuição Beta padrão = 1).

#### CURVAS DE BETA EM FUNÇÃO DOS PARÂMETROS

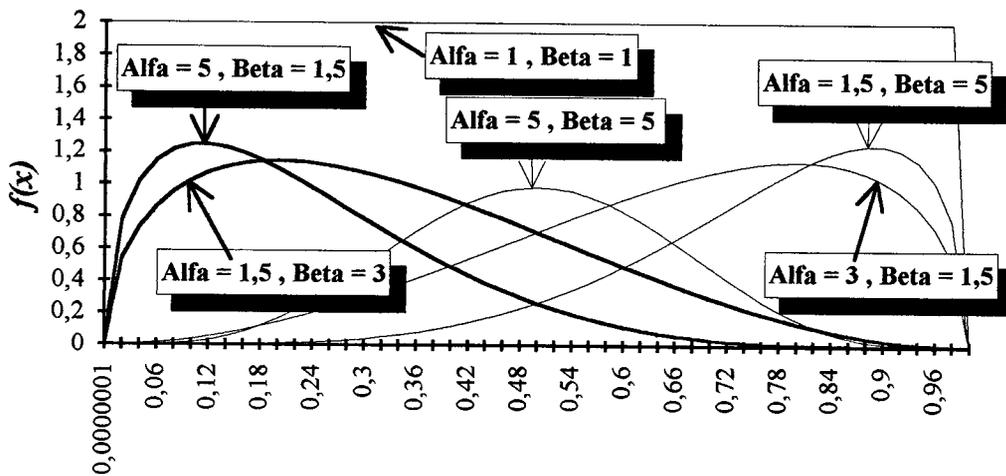


Figura 3.15 Função Beta no Intervalo [ 0 , 1 ]

No figura 3.15 pode-se observar as diferentes configurações da distribuição Beta em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 3.7.3 Distribuição Triangular

A distribuição triangular é possivelmente a distribuição mais utilizada em situação de incerteza, uma vez que são necessários apenas três pontos (mínimo, mais provável e máximo), para que seja possível representar a distribuição dos dados.

$$f(x) \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)}, & a \leq x \leq b ; \\ \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)}, & b \leq x \leq c ; \end{cases}$$

Os dois principais momentos da distribuição triangular (média e desvio padrão).

$$E(x) = \frac{a + b + c}{3} \quad (3.38)$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{18} (a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ba)} \quad (3.39)$$

Onde:

$E(x)$  = valor esperado de  $x$ ;

$\sigma(x)$  = desvio padrão de  $x$ ,

$a$  = valor mínimo estimado;

$b$  = valor mais provável (modal);

$c$  = valor máximo estimado.

### 3.7.4 - Distribuição Aproximada Beta Exponencial (AEX),( Ferreira [38])

$$AEX_e = \{ a + (m-a) \cdot e^{(1,83 \cdot r - 1,59)} \}, \text{ para } r < 0,5 \quad (3.40a)$$

$$AEX_d = \{ c + (m-c) \cdot e^{(0,257 - 0,484/(1-r))} \}, \text{ para } r > 0,5 \quad (3.40b)$$

Sendo:

$$r = \frac{m - a}{b - a} \quad (3.41)$$

Onde:

$a$  = valor mínimo da faixa;

$b$  = valor máximo da faixa;

$m$  = valor da moda (mais provável).

Substituindo-se para  $E(VP)$ , tem-se:

$$E(VP)_e = VPmin + (VP - VPmin) \cdot e^{(1,83 \cdot r - 1,59)} \quad , \text{ para } r < 0,5 \quad (3.33a)$$

$$E(VP)_d = VPmax + (VP - VPmax) \cdot e^{(0,257 - 0,484/(1-r))} \quad , \text{ para } r > 0,5 \quad (3.33b)$$

Sendo:

$VP$  = o valor calculado para a moda dos intervalos de entrada.

$$r = \frac{VP - VPmin}{VPmax - VPmin} \quad (3.43)$$

O Desvio Padrão calcula-se segundo a seguinte fórmula:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{(a - E(x))^2 + (b - E(x))^2}{6}} \quad (3.44)$$

Para Cálculo do Desvio Padrão de  $VP$ , tem-se:

$$\sigma(VP) = \sqrt{\frac{(VPmin - E(VP))^2 + (VPmax - E(VP))^2}{6}} \quad (3.45)$$

## CAPÍTULO 4

### DESCRIÇÃO DO MODELO PROPOSTO

#### 4.1 Introdução

Neste Capítulo, apresenta-se o modelo propriamente dito, com o desenvolvimento de um problema típico de análise de investimentos, o qual visa facilitar o entendimento do modelo proposto.

O objetivo do modelo é buscar soluções alternativas para o tratamento de variáveis mal definidas, as quais possam ser modeladas em forma de intervalos aritméticos. Basicamente, três abordagens diferentes são testadas e comparadas para um conjunto de projetos de investimentos mutuamente exclusivos.

Na primeira etapa, utiliza-se o método Vertex [22], incorporando-se a este uma modificação na função do fator  $(P/A, I, n)$ , com o objetivo de diminuir o intervalo de incerteza da variável de decisão  $VP$ , e assim torná-lo mais competitivo. A seguir, efetua-se a hierarquização dos projetos em função do coeficiente de aversão ao risco  $A$ , através da aplicação da função expectativa-variância (3.19). Concluindo-se esta primeira etapa do modelo, analisa-se a ordem de dominância do conjunto de projetos, a três níveis de aversão, arbitrados conforme o conceito de Indiferença, Fraca e Forte aversão ao risco, dentro dos limites admissíveis para os projetos.

Na segunda etapa de desenvolvimento do modelo, introduz-se o método da Análise Variacional [39], adotando-se os mesmos procedimentos utilizados na utilização do método Vertex [22]. O objetivo é obter-se um melhoramento na precisão dos Intervalos de incerteza. Para comprovar-se esta hipótese, efetua-se uma análise comparativa entre os métodos.

Finalizando o modelo, propõe-se como alternativa uma terceira abordagem, a qual é de natureza possibilística ou difusa. A abordagem difusa deve ser empregada quando existir dificuldade de utilizar-se a abordagem estocástica.

No algoritmo 4.1 representa-se de forma compacta os principais passos a serem seguidos

para implementação do modelo usando-se o método Vertex [22], que são:

- 1) entra-se com os dados em forma de intervalos, onde os limites mínimos e máximos devem necessariamente ser informados;
- 2) calcula-se o Valor Presente de cada projeto, começando-se com  $n = 1$ , até que todos os VP's de todos os projetos sejam maior ou igual a zero;
- 3) discretiza-se os Subintervalos (período a período), pelo processo de enumeração;
- 4) adota-se uma Distribuição de Probabilidades para representar o comportamento das variáveis. No modelo, sugere-se a Aproximação Exponencial (AEX) [38], para a Distribuição Beta Padrão;
- 5) identifica-se o intervalo de Interesse, no qual os projetos apresentam a possibilidade de lucro;
- 6) determina-se o Coeficiente de Aversão ao Risco máximo admissível para cada projeto, e o coeficiente de aversão máximo para o conjunto de projetos;
- 7) ordena-se os projetos em função do Coeficiente de Aversão ao Risco do decisor, respeitando-se os limites aceitáveis para o coeficiente de aversão máximo admitido pelo projeto;

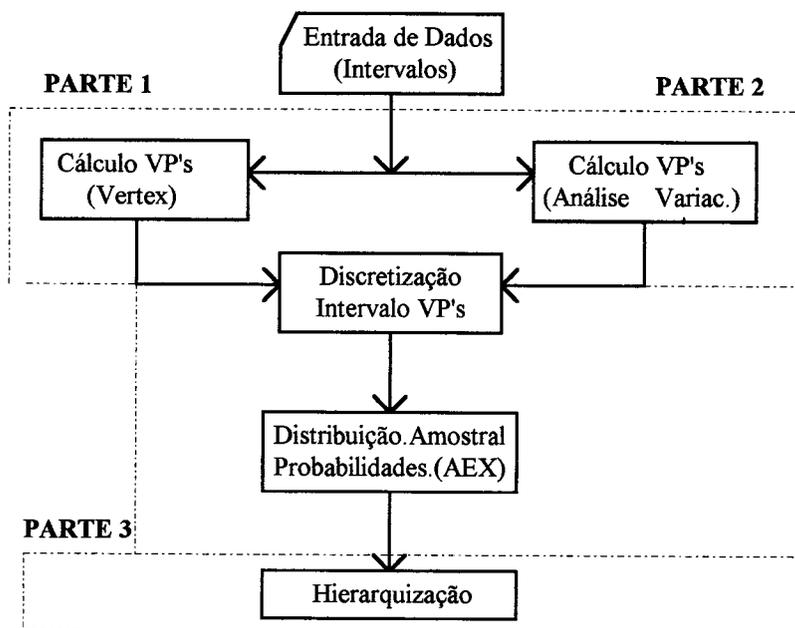


Figura 4.1 Algoritmo do Modelo de Análise Proposto

## 4.2 Primeira Etapa (Método Vertex)

### 4.2.1 Intervalos de Entrada

No modelo proposto, pressupõe-se a existência de um Fluxo de Caixa composto por, Receitas, Custos e Taxa de Juros, sendo o período de duração dos projetos uma variável desconhecida. Convencionou-se também, que as variáveis (fluxos de entradas e saídas) são estatisticamente independentes entre si.

Admitindo-se a situação em que a necessidade seja ordenar economicamente um conjunto de projetos, para uma determinada alternativa de investimentos, onde os dados de entrada sejam em forma de intervalos, pode-se representar como tendo a seguinte estrutura:

$$CO = [co_{j,\min} , co_{j,m} , co_{j,\max} ]$$

$$CI = [ci_{j,\min} , ci_{j,m} , ci_{j,\max} ]$$

$$RA = [ra_{j,\min} , ra_{j,m} , ra_{j,\max} ]$$

$$I = [i_{\min} , i_m , i_{\max} ]$$

$$n = [n_{\min} , n_m , n_{\max} ]$$

Onde:

$CO$  = custo operacional dos projetos

$CI$  = custo inicial dos projetos

$RA$  = receita anual do projetos

$I$  = taxa de juros considerada

$n$  = intervalo de tempo de duração dos projetos

$j = 1,2,\dots,k$ ;

$m$  = valor mais provável (modal)

Onde:

$k$  é o número dos projetos analisados

Na Memória de Cálculo 4.1 do anexo 2, mostra-se a organização dos dados de entrada, através do tabela 4.1 e 4.2, onde constam todas as possíveis combinações para os intervalos de entrada. Estes valores serão utilizados para o desenvolvimento do modelo proposto.

#### 4.2.2 Cálculo do Valor Presente (VP)

O critério de avaliação, sob o ponto de vista econômico-financeiro, baseia-se no Valor Presente, embora nada impeça de utilizar-se outros métodos como TIR (Taxa Interna de Retorno) e Valor Anual Uniforme Equivalente, dentre outros.

O motivo da escolha do método do Valor Presente, deve-se ao fato de que este método tem sido amplamente utilizado. Com comprovada eficiência e simplicidade, a fórmula básica é a seguinte:

$$fVP(CO, CI, RA, i, n) = (RA - CO) \cdot (P/A, i, n) - CI \quad (4.1)$$

Substituindo-se as variáveis e entrada nos intervalos, tem-se:

$$fVP^r = [ra_{j,\min}, ra_{j,m}, ra_{j,\max}] - [co_{j,\min}, co_{j,m}, co_{j,\max}] \cdot [P/A, i, n] - [ci_{j,\min}, ci_{j,m}, ci_{j,\max}] \quad (4.1a)$$

onde;

$$[P/A, i, n] = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad (3.2)$$

Que sob a forma de intervalos, tem-se:

$$[P/A, i, n] = \frac{1 - \{1 + [i_{\min}, i_{\max}]\}^{-n}}{[i_{\min}, i_{\max}]} \quad (4.2)$$

$r$  = número de combinações  $2^t$ . (vide tabela 4.2 do anexo2)

$t$  = número de intervalos envolvidos na análise

$i$  = valores estimados para a taxa de juros, (mínimo e máximo)

$n$  = período considerado.

Adotando-se o valor da condição determinística, um valor no intervalo de  $VP_{\min}$  e  $VP_{\max}$ , calcula-se o  $VP$ , ou seja, o valor mais provável ou moda da distribuição, para cada projeto a cada período.

No algoritmo da figura 4.2, resume-se o procedimento para o cálculo do Valor Presente:

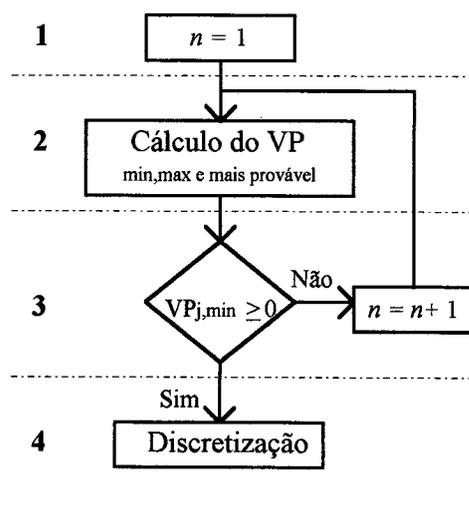


Figura 4.2 Algoritmo para Calcular o VP dos Projetos

Os passos representados no algoritmo da figura 4.1 são os seguintes:

1) adota-se  $n = 1$ ;

2) aplicando-se a técnica do método Vertex [22] à equação (4.1), calcula-se o Valor Presente para cada projeto, obtendo-se como resultado um valor de  $VP$  em forma de intervalo, com valores limites mínimo e máximo e valor mais provável, para cada projeto. Se  $VP_{j,max} \geq 0$ , significa que obteve-se o valor do limite inferior de  $n$ , ou seja o período a partir do qual o projeto passa a ter possibilidade de lucro. Se  $VP_{j,min} \geq 0$ , significa que encontrou-se o limite superior de  $n$ , isto é, o ponto a partir do qual o projeto não apresenta mais possibilidade de prejuízo;

3) se  $VP_{j,min} < 0$  soma-se 1 (um) ao valor de  $n$ , e volta-se ao passo número 2. Se  $VP_{j,min} \geq 0$ , então continua-se no passo seguinte;

4) inicia-se o processo de Discretização.

O cálculo dos  $VP$ 's dos projetos, deve dar como resultado um intervalo de tempo;

$n_j = [n_{j,min}, n_{j,max}]$ , o qual representa-se na figura 4.3.

Onde;

$n_{j,min}$  = indica o período a partir do qual o  $VP_{j,max} \geq 0$  e  $VP_{j,min} \leq 0$

$n_{j,max}$  = indica o período a partir do qual o  $VP_{j,max} \geq 0$  e  $VP_{j,min} \geq 0$

O intervalo  $n_j = [n_{j,\min}, n_{j,\max}]$ , pode ser interpretado como uma medida de incerteza, uma vez que quanto maior for a dispersão dos fluxos do projeto maior será o intervalo de  $n_j$ , por consequência, maior a incerteza a respeito do projeto.

Não é aconselhável que escolha-se um dos projetos como mais vantajoso, com base apenas nos intervalos de  $\Delta VP_j$ , representado na figura 4.3 Isto porque o comportamento estatístico das variáveis ainda não é transparente ao decisor. Uma vez que nesta fase, não é possível observar-se alguma ordem de dominância entre os projetos, podendo haver alternância na hierarquização quando analisados período a período.

A figura 4.3, é derivada da Memória de Cálculo 4.2 do Anexo 2, onde é possível observar-se os intervalos de  $VP$ , mínimo, máximo e mais provável, os quais estão na tabela 4.3 .

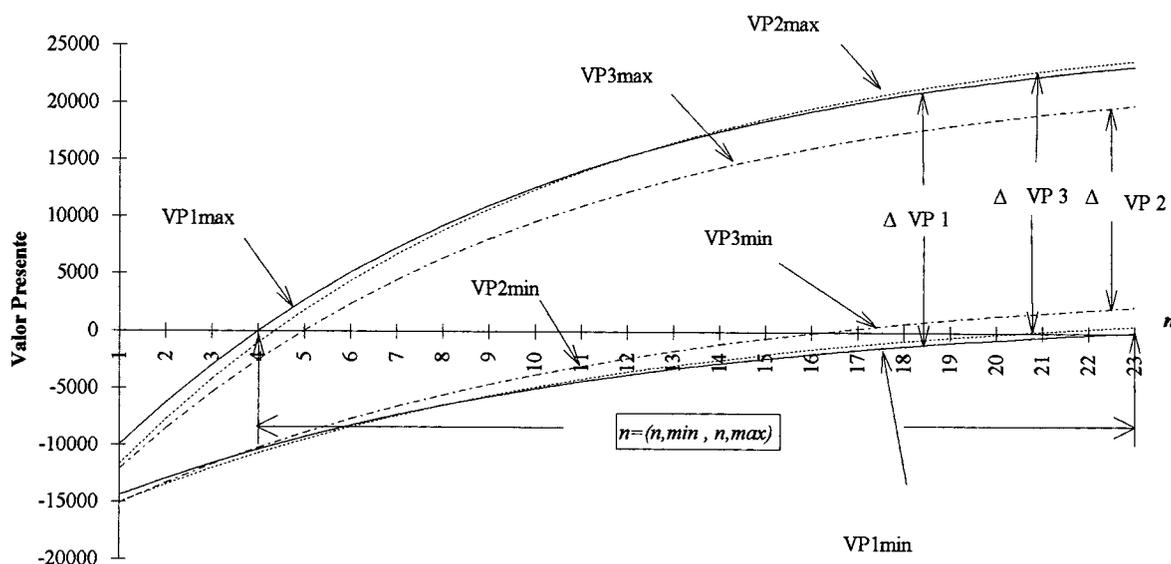


Fig. 4.3 Intervalo de Variação VP (Vertex)

No caso da figura 4.3, os intervalos de possíveis resultados para  $VP$ , são os seguintes:

- projeto 1;
- $n_1 = [4, 23]$ ;
- projeto 2;
- $n_2 = [5, 17]$ ;
- projeto 3;
- $n_3 = [5, 21]$ ;

Nota-se ainda, na figura 4.3, que quando  $n$  cresce, ocorre um aumento do intervalo de variação de  $VP_j$  ( $\Delta VP_j$ ), o que explica-se pelo fato da incerteza ser maior a respeito do futuro do que com relação ao presente.

No caso da Memória de Cálculo 4.2 do Anexo 2, os intervalos de tempo  $n$  estão valorados na tabela 4.2 do mesmo Anexo. Indicam que o Projeto 1, encerra um maior grau de incerteza, se comparado aos demais Projetos. Por outro lado, o Projeto 2 é o que apresenta menor dispersão.

### 4.2.3 Discretização do Intervalo de Possíveis Resultados para $VP$

O processo de Discretização do intervalo de possibilidades deve ser considerado como um dos passos mais importante na utilização do modelo proposto, uma vez que sem este procedimento torna-se muito difícil identificar-se a relação de dominância entre os projetos.

A Discretização é uma técnica que permite seccionar o intervalo de tempo, em tantos subintervalos quantos forem necessários. Este procedimento permite identificar intervalos de dominância. A figura 4.4 representa graficamente o processo de discretização.

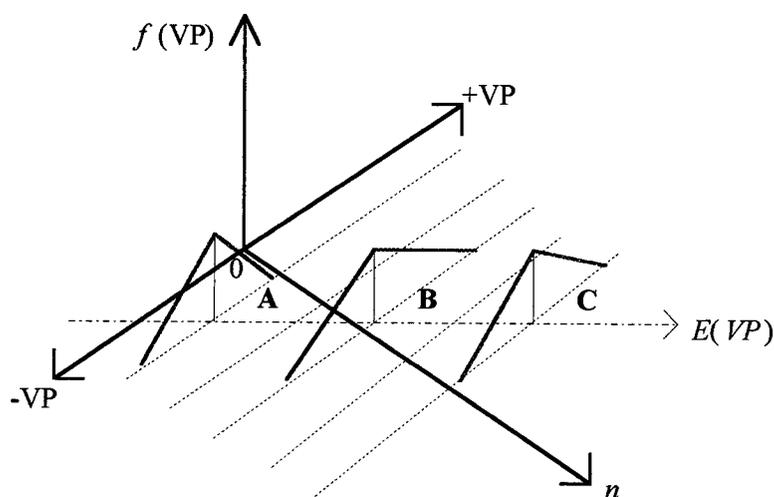


Figura 4.4 Discretização do Intervalo de Possibilidades

Na figura 4.4 estão representadas três possíveis situações A, B e C, onde a situação A deve ser eliminada da análise, pelo fato de o Valor Esperado de  $VP < 0$ .

É possível ainda através do processo de discretização do intervalo  $n_j$  conhecer-se, a cada período de tempo, o Valor Esperado ( $E(VP_j)$ ) e o desvio padrão ( $\sigma_j(VP)$ ) de cada projeto, a partir das  $r$  possíveis combinações;

sendo:

$$r = 2^m$$

onde:

$m$  = número de intervalos considerados.

O Valor Esperado ( $E(VP)$ ), é obtido com a aplicação das fórmulas, (3.33a) e (3.33b), do item 3.7.4 do Capítulo 3.

Para o cálculo do Desvio Padrão de  $VP$ , utiliza-se a equação (3.44) do item 3.7.4 do Capítulo 3.

Os valores obtidos para  $E(VP)$  e  $\sigma(VP)$  constam da Memória de Cálculo 4.4, tabela 4.4 do Anexo 2.

#### 4.2.4 Incorporação da Distribuição de Probabilidades

Na literatura são sugeridos alguns tipos de Funções Densidade de Probabilidade (*f.d.p*), as quais são possíveis de adotar-se na representação do comportamento das variáveis. As mais indicadas são:

- a) distribuição Uniforme - Utilizada quando estima-se que todos os eventos tenham probabilidades iguais;
- b) distribuição Normal - É uma das mais utilizadas para tratamento de problemas envolvendo análise de investimentos de natureza probabilística. Sua aplicação é mais indicada para os casos em que a assimetria dos dados seja não muito acentuada;
- c) distribuição Beta - Estudos mais recentes têm mostrado vantagens de substituir-se a distribuição Normal pela distribuição Beta, principalmente em se tratando de estimativas por intermédio de 3 (três) pontos, bastante comuns em problemas de análise de investimentos;

d) distribuição PERT [36]- Este tipo de distribuição é uma linearização da função Beta, possuindo a vantagem de ser bastante simples de utilizar-se na prática. Originalmente foi empregada nas redes PERT/CPM, porém também pode ser aplicada à análise de investimentos, tão somente substituindo-se os tempos mais cedo, mais tarde e mais provável, pelas variáveis mínimo, máximo e Valor Esperado de  $VP$ ;

e) distribuição AEX [38]- Esta distribuição, a exemplo da distribuição PERT, é uma aproximação da distribuição Beta, com a diferença de ser uma aproximação exponencial, de maior precisão.

Dentre as distribuições citadas, teoricamente a distribuição Beta parece ser a mais indicada, devido as suas características "elásticas", já descritas no Capítulo 3 item 3.7.2. Porém, entre utilizar-se a distribuição Beta, de difícil manuseio, e uma aproximação desta, optou-se pela distribuição AEX [38], pelo fato desta última ser de manuseio mais simples do que a Beta, e mais precisa do que a PERT [36]. Isto pode ser verificado na Memória de Cálculo 4.5, tabela 4.3 do Anexo 2, onde compara-se os erros referentes ao Valor Esperado e o Desvio Padrão, com relação a Distribuição Beta.

#### 4.2.5 Intervalo de Dominância

O intervalo de dominância, para efeito de análise, deve ser considerado aquele em que os projetos apresentam a possibilidade de  $E(VP) \geq 0$ . Este Intervalo está representado na figura 4.5, a qual é resultante da representação gráfica dos valores da tabela 4.32, obtidos a partir do Memória de Cálculo 4.4 do Anexo 2.

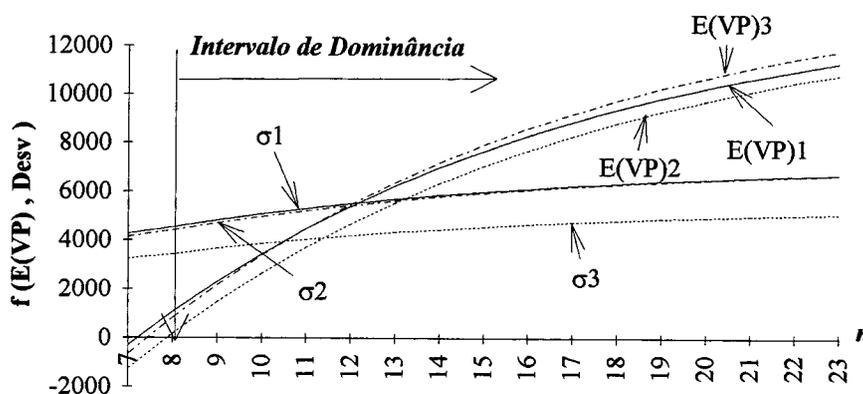


Fig. 4.5 Discretização Intervalo Dominância

Analisando-se a figura 4.5 sob a ótica do Valor Esperado, percebe-se que existe uma alternância no que se refere a ordem de dominância entre os projetos 1 e 3 no período 8 a 12.

Observa-se também, que se por um lado o projeto 2 é dominado sob o ponto de vista do Valor Presente, por outro lado, este projeto é o que apresenta o menor Desvio Padrão. Isto indica que o projeto 2 envolve um menor risco, e sua hierarquização em relação aos projetos 1 e 3 pode ser alterada em função da aversão ao risco do decisor.

#### 4.2.6 Coeficiente de Aversão ao Risco ( $A$ )

Em situações de decisão sob risco, isto é quando tem-se os dois parâmetros básicos, o Valor Esperado e o Desvio Padrão da distribuição de  $VP$ , faz-se necessário a utilização de um terceiro parâmetro, o Coeficiente de Aversão ao Risco ( $A$ ). Este coeficiente permite que proceda-se a análise considerando-se, simultaneamente, o retorno do projeto e o risco do mesmo, através da equação da Expectância-Variância (3.27), apresentada no item 3.6.6 do Capítulo 3.

Para cada projeto existe um  $A$  máximo admissível, independentemente do coeficiente de aversão intrínseco de cada decisor.

No modelo proposto, calcula-se o  $A$  máximo para os projetos, uma vez que a análise é feita com base no conjunto destes. Os valores de  $A$ , estão na Memória de Cálculo 4.6, tabela 4.6, do anexo 2, e estão representados graficamente na figura 4.6, onde é possível visualizar-se que o aumento do coeficiente de aversão ao risco, altera a dominância dos projetos.

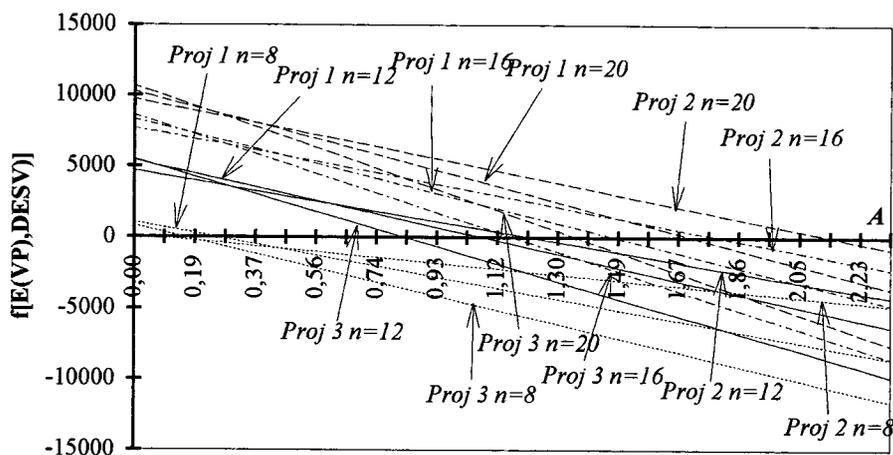


Figura 4.6 Função Expectância-Variância

Analisando-se a figura 4.6, onde estão resumidos os períodos mais importantes, observa-se que os coeficientes de aversão ao risco assumem os seguintes valores máximos:

$n = 8$ ,  $A_{\max} = 0,22$ , e o projeto dominante é o projeto 1.

$n = 12$ , o projeto 1, é dominante até um  $A_{\max} = 0,56$ , passando o projeto 2 dominar a partir deste ponto, até  $A_{\max} = 1,09$ .

$n = 16$ , o projeto 3, é dominante até um  $A_{\max} = 0,30$ , a partir deste ponto, o projeto 2 domina até o limite de  $A_{\max} = 1,63$ .

$n = 20$ , o projeto 1, é dominante até um  $A_{\max} = 0,33$ , passando o projeto 2 dominar a partir deste ponto, até  $A_{\max} = 1,94$

#### 4.2.6.1 Análise Detalhada da Figura 4.6 (Função Expectância-Variância)

A figura 4.6, mesmo representando-se apenas os intervalos mais importantes, torna-se difícil de ser interpretada. Portanto, faz-se necessário um maior detalhamento desta representação gráfica, para isto ilustra-se graficamente os períodos de forma individual, através das figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11, onde o comportamento dos projetos pode ser acompanhado, individualmente.

Na seqüência de figuras a serem apresentadas derivam Memória de Cálculos 46, tabela 4.6 do anexo 2, identifica-se apenas aqueles projetos dominantes, excluindo-se dos gráficos os projetos dominados, mesmo que estes tenham sido analisados.

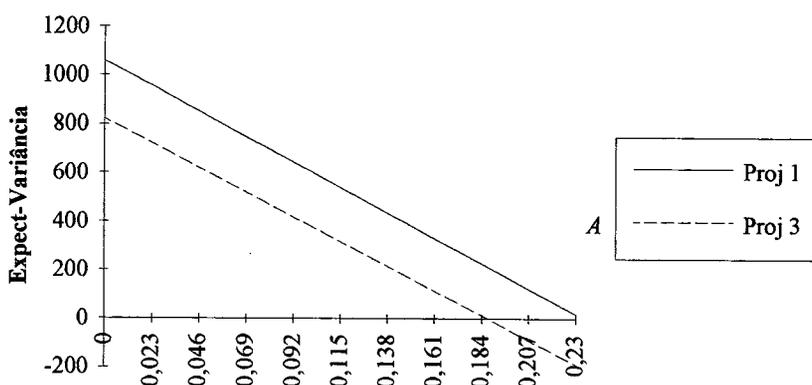


Fig.4.7 Dominância em  $n = 8$

Na figura 4.7, percebe-se com relativa facilidade, que o projeto 1, é estritamente dominante no período 8, uma vez que domina os demais para todo o intervalo de  $A = [0 ; 0,23]$ , o projeto 2, é dominado, e tem o valor da expectância-variância negativo para valores de  $A > 0,46$ .

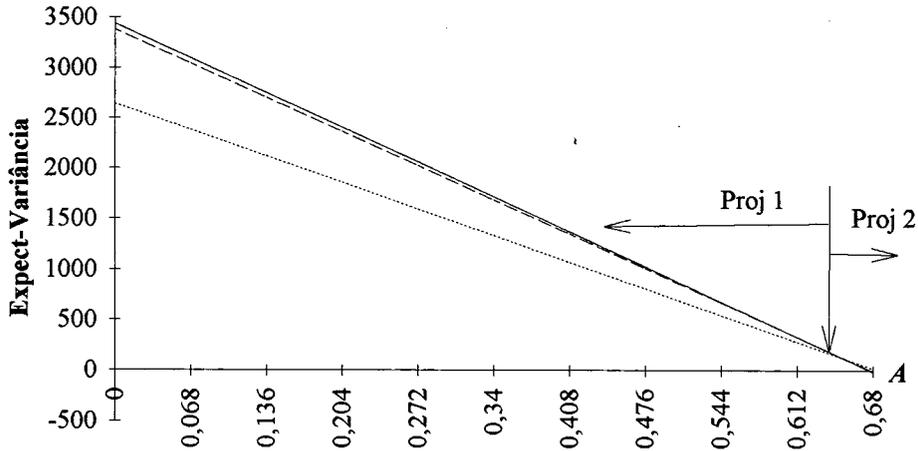


Fig. 4.8 Dominância em  $n = 10$

Na figura 4.8, período 10, o projeto 1 domina no intervalo de  $A = [0 ; 0,65]$ , o projeto 2, é dominante no intervalo  $A = [0,65 ; 0,68]$ , o projeto 3 é dominado. Observa-se que o projeto 1 domina fortemente no intervalo  $A$ , enquanto que a dominância do projeto 2, pode ser considerada como uma fraca dominância, uma vez que domina em uma pequena faixa do intervalo  $A$ .

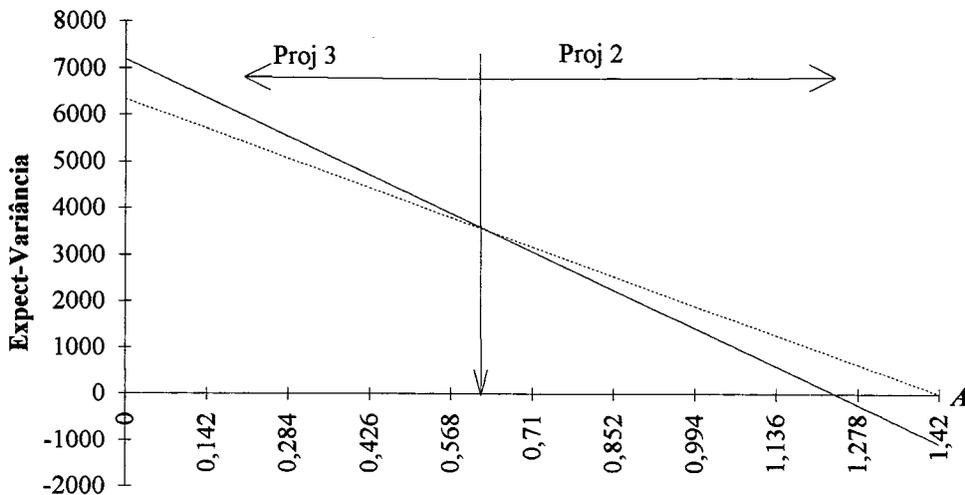
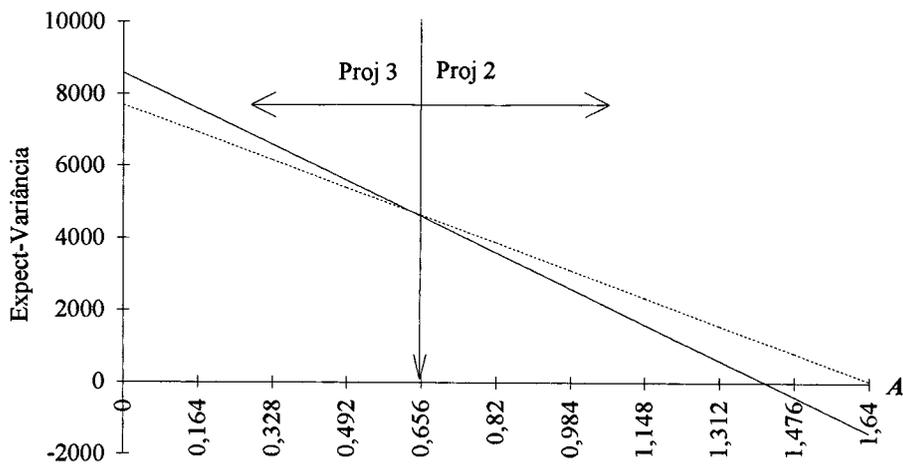
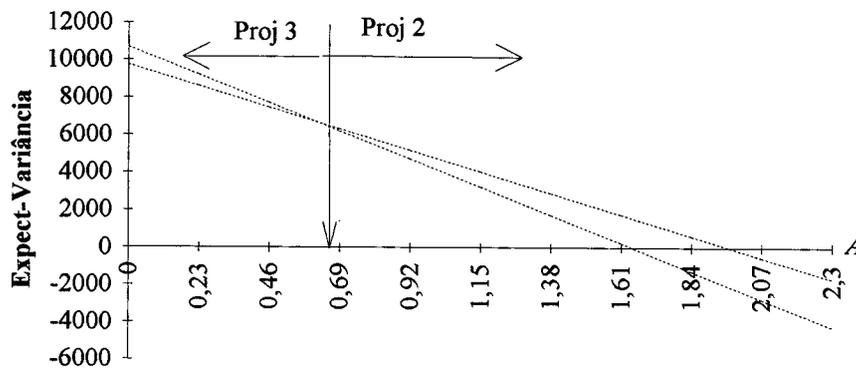


Fig. 4.9 Dominância em  $n = 14$

Na figura 4.9, período 14, o projeto 3 domina para um intervalo do coeficiente de aversão  $A = [0 ; 0,64]$ , sendo que no intervalo  $A = [0,64 ; 1,42]$  o projeto 2 é dominante. A figura 4.9, revela uma situação de fraca dominância para o intervalo de  $A$ , uma vez que os projetos 2 e 3, são dominantes em aproximadamente metade da faixa dos valores de  $A$ .

Fig 4.10 Dominância em  $n = 16$ 

No período 16, Figura 4.10, observar-se que o projeto 3 é dominante para o intervalo  $A = [0 ; 0,64]$  e o projeto 2 é dominante no intervalo  $A = ]0,64 ; 1,64]$ .

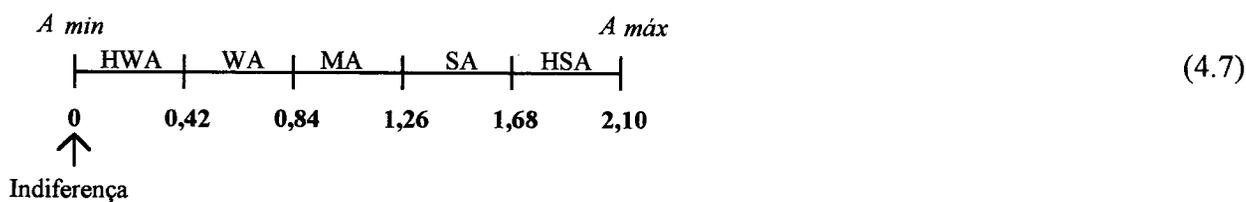
Fig 4.11 Dominância em  $n = 23$ 

No período 23, a figura 4.11, mostra que o projeto 3 domina no intervalo  $A = [0 ; 0,64]$ , e o projeto 2, é dominante no intervalo  $A = ]0,64 ; 2,30]$ . Observa-se que no intervalo  $n = [10 ; 23]$ , o intervalo de aversão ao risco  $A = [0,60 ; 0,64]$ , determina uma fronteira, a partir da qual a relação de dominância dos projetos é alterada, indicando, a princípio que neste intervalo existe um ponto no qual os projetos são indiferentes.

#### 4.2.7 Hierarquização das Alternativas

Pode-se hierarquizar os projetos segundo o coeficiente de aversão do decisor. Para representar esta situação, adotou-se arbitrariamente três diferentes níveis de aversão ao risco. Os valores obtidos fazem parte da Memória de Cálculos 4.7, tabela 4.7 do Anexo 2.

Respeitando-se o limite máximo admissível para  $A$ , relativo ao conjunto de projetos em análise, adotou-se três níveis de aversão ao risco. Estes valores baseiam-se em uma escala relativa, representada graficamente abaixo:



Onde:

HWA = muito fraca aversão ao risco;

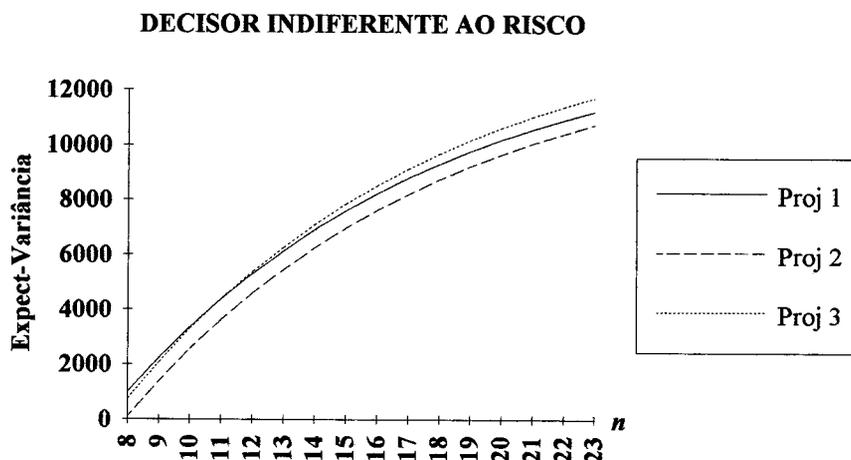
WA = fraca aversão ao risco;

MA = moderada aversão ao risco;

SA = forte aversão ao risco;

HSA = muito forte aversão ao risco ;

A primeira hierarquização, dá-se ao nível de  $A = 0$ , isto é, quando o decisor é indiferente ao risco, a qual esta representada graficamente na figura 4.12, tabela 4.7, anexo 2.



A figura 4.12, representa a situação em que o decisor é indiferente ao risco. Nesta condição, tem-se que o projeto 1, é preferível no intervalo  $n = [8 ; 10]$ , e o projeto 3 é preferível aos demais no intervalo  $n = [11 ; 23]$ .

Tomando-se um coeficiente de aversão ao risco no valor de  $A = 0,20$ , e comparando-se com a escala relativa (4.7) do item 4.3, este deve estar contido no intervalo onde classifica-se o decisor como tendo muito fraca aversão ao risco, obtendo-se com este valor de  $A$ , a figura 4.15, derivada da Memória de Cálculo 4.7, tabela 4.7 do Anexo 2.



Fig. 4.13 Hierarquização  $A=0,20$

Na figura 4.13 , representa-se a situação em que decisor muito fracamente avesso ao risco  $A = 0,20$ , onde tem-se que o projeto 3 deve ser preferível no intervalo  $n = [8 ; 23]$ .

Tomando-se o valor de  $A= 0,5$  e comparando-se também a escala (4.7) do item (4.2.7). pode-se classificar o decisor como sendo fracamente avesso ao risco, figura 4.13.

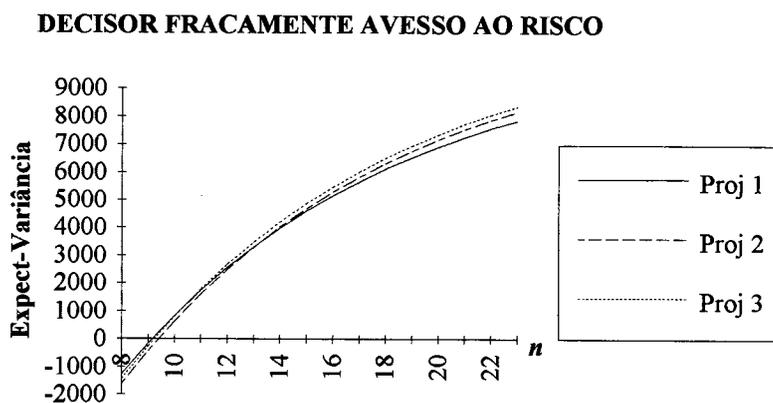


Fig 4.14 Hierarquização  $A=0,5$

A figura 4.13, representa a situação em que o decisor tem uma fraca aversão ao risco  $A = 0,5$ , e mostra que o projeto 1 é preferido no período  $n = 10$ , e o projeto 3 é preferível no intervalo  $n = [11 ; 23]$ .

Adotando-se o coeficiente de aversão  $A = 1,0$ , e comparando-se a escala relativa do item 4.3, pode-se classificar como sendo o decisor moderadamente avesso ao risco.

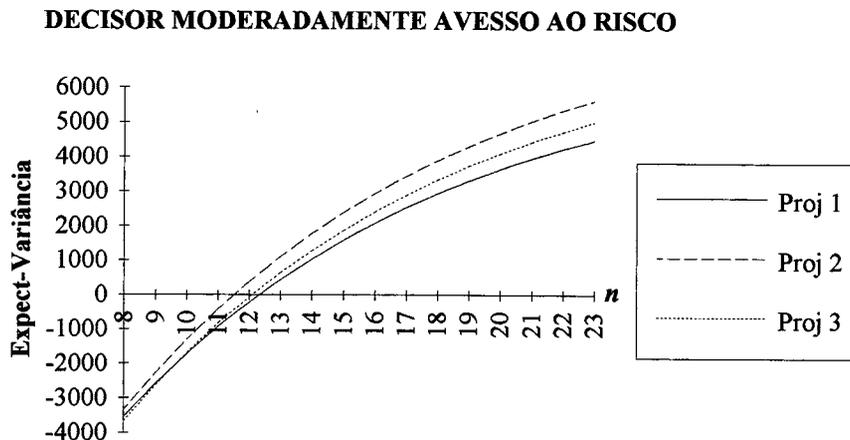


Fig. 4.15 Hierarquização  $A=1,0$

A figura 4.15, representa a situação em que o decisor é moderadamente avesso ao risco, tem-se que o projeto 2 é preferível no intervalo  $n = [12 ; 23]$ . Para valores de  $n < 11$ , os projetos devem ser rejeitados.

Note-se que quanto maior o coeficiente de aversão ao risco, maior é o  $n$  mínimo, isto é, o ponto a partir do qual os projetos passam a ser aceitáveis economicamente. Um dos fatores responsáveis por este "deslocamento" do período mínimo de aceitação, é que a dispersão do conjunto de projetos analisados, de uma maneira geral, é relativamente elevada.

A tabela 4.5, resume o "ranking" de preferência entre os projetos, para os quatro níveis de aversão ao risco sugeridos para o conjunto de projetos em análise.

Indiferença ao Risco	Muito Fraca Aversão	Fraca Aversão	Moderada Aversão
$A=0,0$	$A=0,20$	$A=0,5$	$A=1,0$
$n=[8;10] \text{ P1} > \text{P3} > \text{P2}$	$n=[9;16] \text{ P3} > \text{P1} > \text{P2}$	$n=[10;10] \text{ P1} > \text{P3} > \text{P2}$	$n=[13;23] \text{ P2} > \text{P3} > \text{P1}$
$n=[11;23] \text{ P3} > \text{P1} > \text{P2}$	$n=[16;23] \text{ P3} > \text{P2} > \text{P1}$	$n=[13;23] \text{ P3} > \text{P2} > \text{P1}$	

Tabela 4.5 Ranking dos Projetos P1, P2 e P3, em função de  $E(VP)$  e  $\sigma(VP)$ .

É possível observar-se no quadro 4.5, que os projetos alternam-se na dominância, em função da mudança do coeficiente de aversão ao risco, e que para valores de  $A > 1,0$ , projeto 2 deve ser estritamente dominante até  $A = 2,30$ .

Não adotou-se um coeficiente de aversão ao risco  $A > 1,38$ , que fosse classificado como forte aversão risco, porque a característica dos projetos não permite tal pressuposto.

### **4.3 Segunda Etapa ( Incorporação da Análise Variacional)**

#### **4.3.1 Introdução**

Nesta segunda etapa, sugere-se que sejam observados os seguintes passos:

- 1) entra-se com os dados em forma de intervalos, informando-se os limites mínimo, máximo, e valor mais provável;
- 2) calcula-se o intervalo de possíveis resultados para o Valor Presente de cada Projeto, através do método da Análise Variacional [39];
- 3) adota-se uma Distribuição de Probabilidades para representar o comportamento das variáveis. Sugere-se a distribuição AEX [38], item 3.8.4 do Capítulo 3;
- 4) ordena-se os Projetos com base no coeficiente de aversão ao risco  $A$ ;
- 5) hierarquiza-se os projetos segundo o grau de aversão ao risco do decisor.

#### **4.3.2 Intervalos de Entrada**

A exemplo da abordagem através do método Vertex[22], item 4.2.1 do Capítulo 4, as variáveis de entrada são partes integrantes de um fluxo de caixa, onde os fluxos de entrada (receitas) e os fluxos de saída (custos), são independentes estatisticamente entre si.

O ponto intermediário pode localizar-se em qualquer ponto dentro do intervalo mínimo e máximo, e deve ser interpretado como sendo o valor modal.

$$CO = [co_{j,\min} , co_{j,m} , co_{j,\max} ]$$

$$CI = [ci_{j,\min} , ci_{j,m} , ci_{j,\max} ]$$

$$RA = [ra_{j,\min} , ra_{j,m} , ra_{j,\max} ]$$

$$I = [i_{\min} , i_m , i_{\max} ]$$

$$n = [n_{\min} , n_m , n_{\max} ]$$

Onde:

$CO$  = custo operacional dos projetos

$CI$  = custo inicial dos projetos

$RA$  = receita anual do projetos

$I$  = taxa de juros considerada

$n$  = intervalo de tempo de duração dos projetos

$j = 1,2,\dots,k;$

$m$  = valor mais provável (modal)

Onde,  $k$  é o número dos projetos analisados

A formatação básica dos dados de entrada, esta representada na Memória de Cálculo 4.1 do Anexo 2.

### 4.3.3 Cálculo do Valor Presente ( $VP$ )

Para calcular-se o Valor Presente, Memória de Cálculo 4.2 do anexo 3, utiliza-se a fórmula (4.1) descrita no item 4.2.2 do Capítulo 4, e o procedimento é o mesmo representado no algoritmo 4.2, com a diferença de substituir-se a utilização do Método Vertex [22], pelo Método da Análise Variacional [39]. Os passos para calcular-se o Valor Presente estão descritos no item 4.2.2 do Capítulo 4, e os resultados constam na tabela 4.8 do anexo 2, os quais podem ser visualizados na figura 4.3, que apresenta os intervalos de possíveis resultados para  $VP_j$ , que são os seguintes:

projeto 1;

$$n_1 = [ 6,0 , 12 ];$$

projeto 2;

$n_2 = [ 6,0 , 10 ]$ ;

projeto 3;

$n_3 = [ 5,2 , 15 ]$ .

Na figura 4.16, representa-se também, os intervalos de variação para  $VP$  ( $\Delta VP$ ), utilizando-se os intervalos da tabela 4.2 do anexo 3.

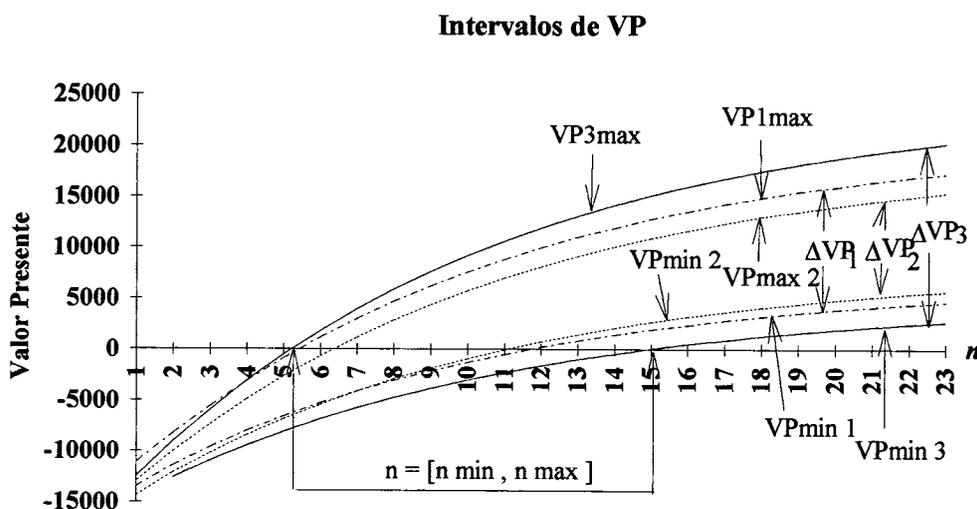


Figura 4.16 Intervalo de Variação de VP

As observações a respeito dos intervalos de variação  $\Delta VP_j$ , no item 4.2.2 do Capítulo 4, podem ser consideradas como aplicáveis com relação a figura 4.16, resguardadas as devidas proporções dos intervalos, uma vez que os intervalos de variação de  $VP$  são significativamente menores do que os obtidos através do método Vertex [22].

#### 4.3.4 Discretização do Intervalo de Possibilidades para VP

Idem ao item 4.2.3, com a diferença de que não se tem agora como resultado uma combinação de intervalos, mas um intervalo cujos erros são devidamente corrigidos e incorporados ao Valor Esperado de  $VP$ . A representação gráfica da Discretização está demonstrada na figura 4.4, do item 4.2.3 do Capítulo 4.

### 4.3.5 Intervalo de Dominância

Idem ao item 4.2.5, na figura 4.17. Representa-se o Intervalo de Dominância em função do Valor Esperado de  $VP$  e do Desvio Padrão, através da função Expectância-Variância. Os valores obtidos para elaboração do gráfico da figura 4.17, estão na tabela 4.2, anexo 3.

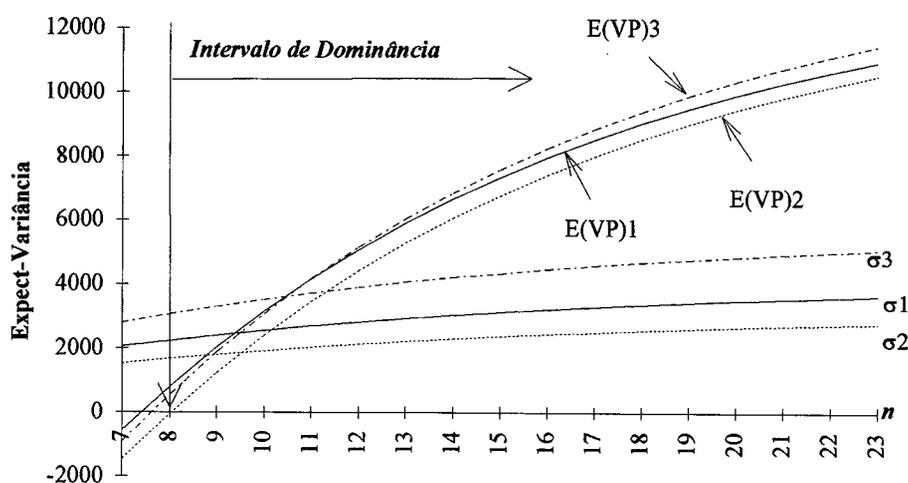


Fig. 4.17 Discretização do Intervalo de Dominância

Analisando-se a figura 4.17, com relação ao Valor Esperado de  $VP$ , é possível identificar-se que o projeto 1 é dominante,  $n = [8 ; 11]$ , e o projeto 3 é dominante no intervalo  $n = [11 ; 23]$ , enquanto que o projeto 2, é dominado no intervalo  $n = [8 ; 23]$ .

#### 4.3.5.1 Análise dos Intervalos de Dominância

Representa-se através das figuras 4.18, 4.19, 4.20, e 4.21, a dominância entre os projetos, considerando-se os coeficientes de aversão máximos admissíveis para os projetos, através da função Expectância-Variância. Nestas figuras representa-se graficamente aqueles projetos que definem a fronteira dos intervalos de dominância, procurando-se desta forma facilitar a interpretação das mesmas.

A primeira representação gráfica, é relativa ao período  $n = 8$ , através da figura 4.18, seguindo-se as demais relativas a seus períodos correspondentes. Os valores para estes gráficos, foram obtidos a partir da equação (4.7), e estão numericamente representados na tabela 4.9 da Memória de Cálculos 4.9.

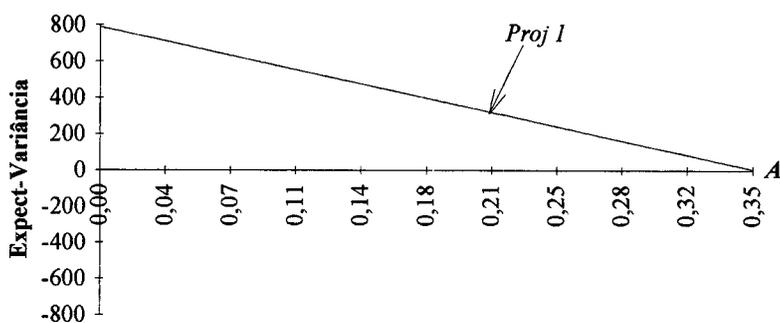


Fig.4.18 Dominância n = 8 (Análise Variacional)

A figura 4.18, período 8, revela que o projeto 1 é dominante para o intervalo de aversão ao risco  $A = [0 ; 0,35]$ , este projeto é estritamente dominante neste período, uma vez que domina em toda a faixa do intervalo de  $A$ .

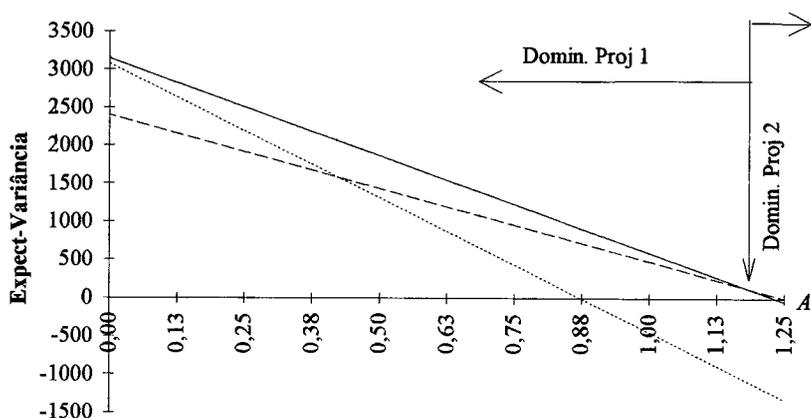


Fig. 4.19 Dominância n=10 (Análise Variacional)

Na figura 4.19, período 10, percebe-se que o projeto 1 é dominante ao nível de aversão  $A = [0 ; 1,19]$ , sendo que o projeto 2 domina no intervalo  $A = [1,19 ; 1,25]$ . Nota-se que existe uma forte dominância do projeto 1 sobre os demais.

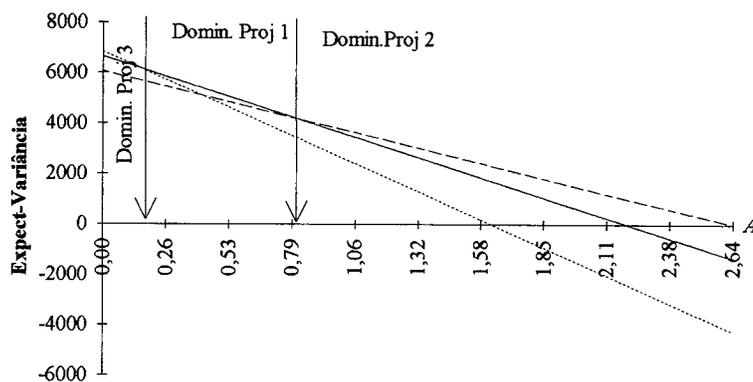


Fig. 4.20 Dominância n=14 (Análise Variacional)

A figura 4.20, período 14, revela que o projeto 3 é dominante no intervalo  $A = [0 ; 0,15]$ , o projeto 1 é dominante no intervalo  $A = [0,15; 0,80]$ , e o projeto 2 é dominante no intervalo  $A = [0,80 ; 2,64]$ . No período em análise existe uma fraca relação de dominância, uma vez que os três projetos alternam-se na dominância a diferentes subintervalos de aversão  $A$ .

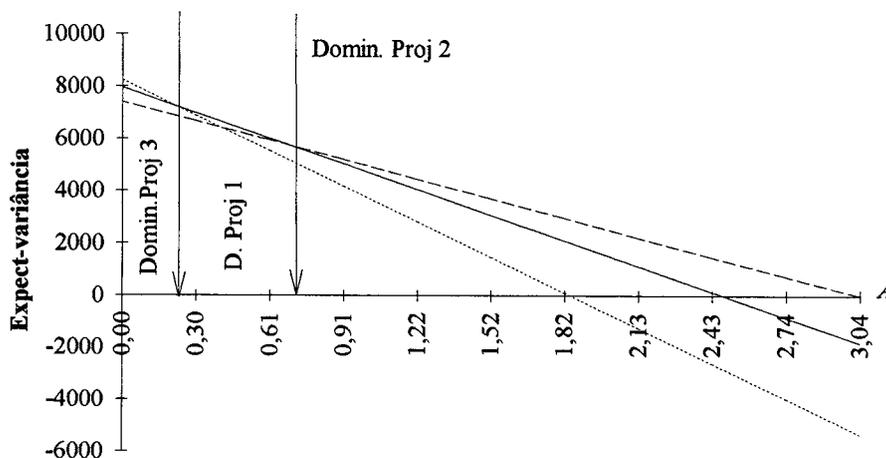


Fig.4.21 Dominância n=16 (Análise Variacional)

Na figura 4.21, período 16, tem-se que o projeto 3 é dominante para o intervalo  $A = [0 ; 0,25]$ , o projeto 1 dominante no intervalo  $A = [0,25 ; 0,70]$ , e o projeto 2 domina no intervalo  $A = [0,70 ; 3,04]$ . A exemplo do que se identificara no período 11, figura 4.20, ocorre para o período 16 que os três projetos dominam a diferentes subintervalos de  $A$ , podendo-se, a princípio, dizer que no período em análise, para o intervalo de aversão ao risco  $A = [0 ; 3,04]$ , existe uma fraca relação de dominância entre os projetos 1, 2 e 3.

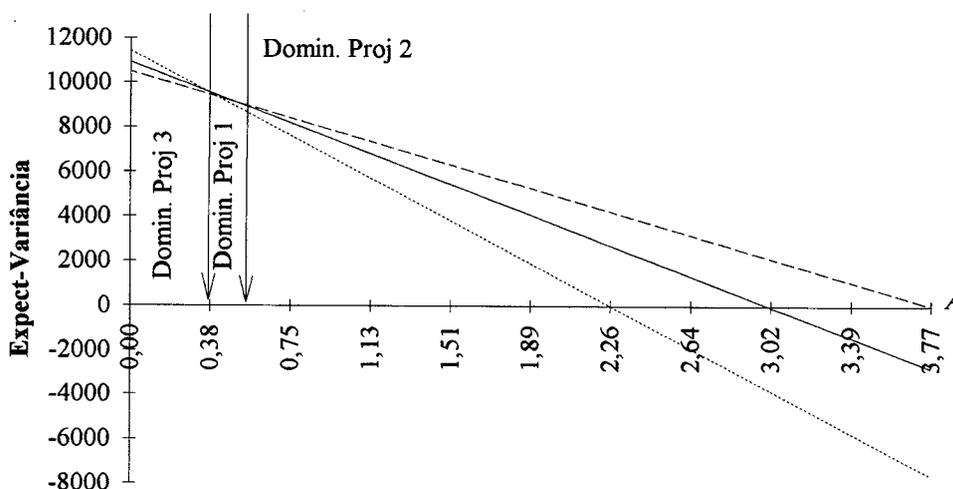


Fig. 4.22 Dominância n=23 (Análise Variacional)

Na figura 4.22, período 23, o projeto 3 domina no intervalo  $A = [0 ; 0,40]$ , o projeto 1 no intervalo  $A = [0,40 ; 0,50]$  e o projeto 2 domina no intervalo  $A = [0,50 ; 3,77]$ . Idem aos períodos 14 e 16, no que se refere a relação de dominância entre os projetos envolvidos.

Analisando-se a dominância dos projetos, período a período, em função do coeficiente de aversão ao risco ( $A$ ), percebe-se que o projeto 3 é dominante para a faixa de valores menores para  $A$ . O projeto 1 domina para os valores intermediários de  $A$ , enquanto que o projeto 2 domina para a faixa de valores mais elevados para  $A$ .

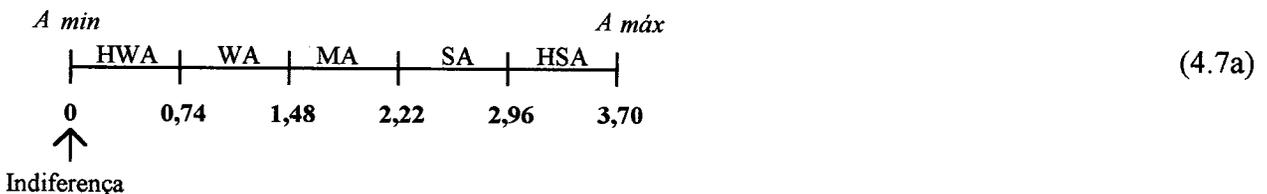
O projeto 3, é o projeto que apresenta a maior dispersão, o projeto 2 apresenta a menor dispersão, e o projeto 1 uma dispersão intermediária, com relação aos demais projetos.

A ordem de dominância esta relacionada fisicamente com a dispersão dos projetos, uma vez que o coeficiente de aversão ao risco ( $A$ ) atua como um redutor do Valor Esperado, sendo compreensível que para um mesmo Valor Esperado com diferentes graus de dispersão, tem-se diferentes valores possíveis para  $A$ . Isto é, quanto menor for a dispersão (Desvio Padrão), maior pode ser o valor atribuído a  $A$ .

Sob o ponto de vista econômico, pode-se dizer que a ordem de dominância observada é coerente com os princípios básicos da Teoria da Utilidade, uma vez que quanto maior a aversão do decisor ao risco, mais este tenderá escolher aquele projeto que apresentar menor dispersão.

#### 4.3.7 Hierarquização das Alternativas

Utiliza-se o mesmo processo do item 4.2.7 para hierarquização dos projetos, segundo o coeficiente de aversão do decisor ( $A$ ). Tomando-se valores proporcionais ao utilizados na escala relativa (4.7) do item 4.3.6 deste Capítulo.



Onde:

HWA = muito fraca aversão ao risco;

WA = fraca aversão ao risco;  
 MA = moderada aversão ao risco;  
 SA = forte aversão ao risco;  
 HSA = muito forte aversão ao risco.

A primeira hierarquização dá-se ao nível de  $A = 0$ , isto quando o decisor é indiferente ao risco, a qual esta representada graficamente na figura 4.23, tabela 4.10 do anexo 2.

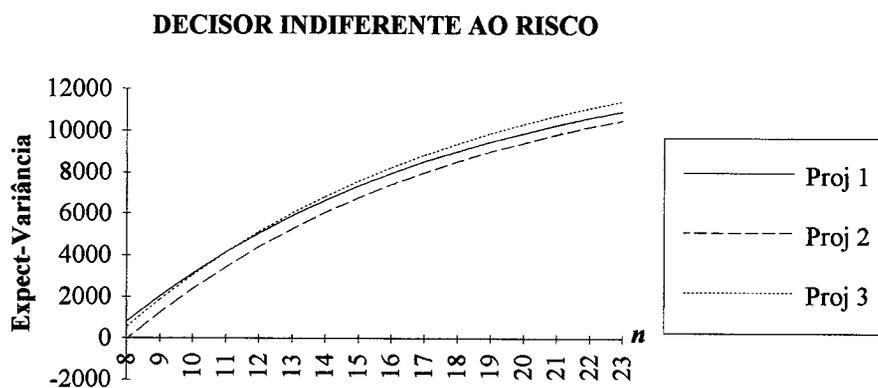


Fig. 4.23 Hierarquização  $A=0$

A figura 4.23, representa a situação em que o decisor é indiferente ao risco. Nesta condição, tem-se que o projeto 1 é preferível no intervalo  $n = [8 ; 10]$ , o projeto 3 é preferível aos demais no intervalo  $n = [11 ; 23]$ .



Fig. 4.24 Hierarquização  $A= 0,32$

Na figura 4.24 , representa-se a situação em que decisor é muito fracamente avesso ao risco  $A = 0,20$ , onde tem-se que o projeto 1 deve ser preferível no intervalo  $n = [8 ; 17]$ , e o projeto 3 no intervalo  $n=[17 ; 23]$

### FRACAMENTE AVESSO AO RISCO.

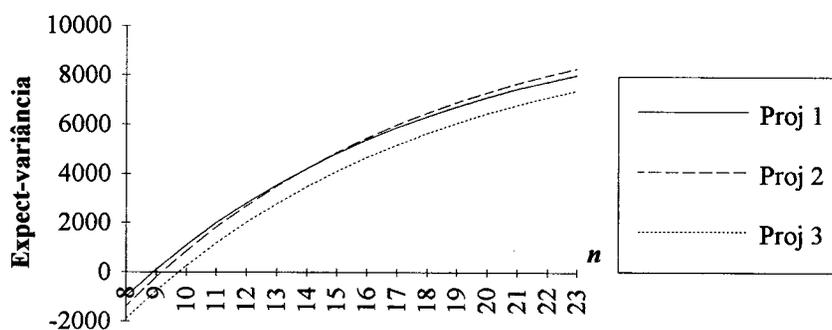


Fig. 4.25 Hierarquização  $A=0,80$

A figura 4.25 representa a situação em que o decisor tem uma fraca aversão ao risco  $A = 0,5$ , mostrando o projeto 1 é preferido no intervalo  $n = [10 ; 20]$ , e o projeto 2 é preferível no intervalo  $n = [20 ; 23]$ .

### MODERADAMENTE AVESSO AO RISCO

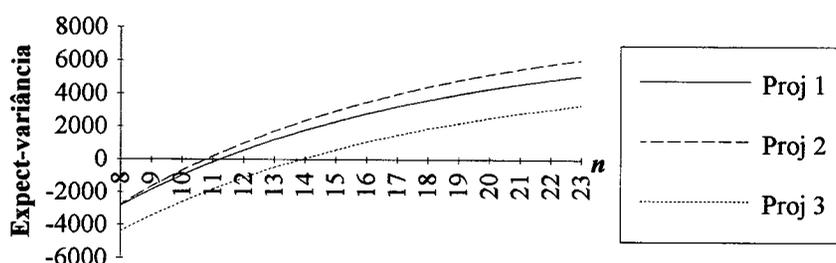


Fig. 4.26 Hierarquização  $A=1,61$

A figura 4.26, representa a situação em que o decisor é moderadamente avesso ao risco, para esta situação, tem-se que o projeto 1 é preferível no intervalo  $n = [10 ; 12]$ , e o Projeto 2 é dominante no intervalo  $n = [12 ; 23]$ .

Na tabela 4.6, resume-se o "ranking" de preferência entre os projetos, para os quatro níveis de aversão ao risco sugeridos para o conjunto de projetos em análise.

Indiferença ao Risco	Muito Fraca Aversão	Fraca Aversão	Moderada Aversão
$A=0,0$	$A=0,20$	$A=0,5$	$A=1,0$
$n=[8;11] P1 \succ P3 \succ P2$	$n=[8;16] P1 \succ P3 \succ P2$	$n=[10;10] P1 \succ P2 \succ P3$	$n=[9;12] P3 \succ P2 \succ P1$
$n=[11;23] P3 \succ P1 \succ P2$	$n=[16;23] P3 \succ P1 \succ P2$		$n=[12;23] P2 \succ P1 \succ P3$

Tabela 4.6, Ranking dos Projetos P1, P2 e P3, em função de  $E(VP)$  e  $\sigma(VP)$ .

É possível observar-se no quadro 4.5, que os projetos alternam-se na dominância, em função da mudança do coeficiente de aversão ao risco.

#### 4.3.7 Comparação dos Métodos Vertex (VT) e Análise Variacional (AN)

Neste item, procura-se comparar a ordem de dominância dos projetos, segundo os dois métodos, uma vez que os mesmos mostraram-se equivalentes na análise de intervalos de incerteza. Esta equivalência entre os dois métodos pode ser visualizada nas seguintes figuras :

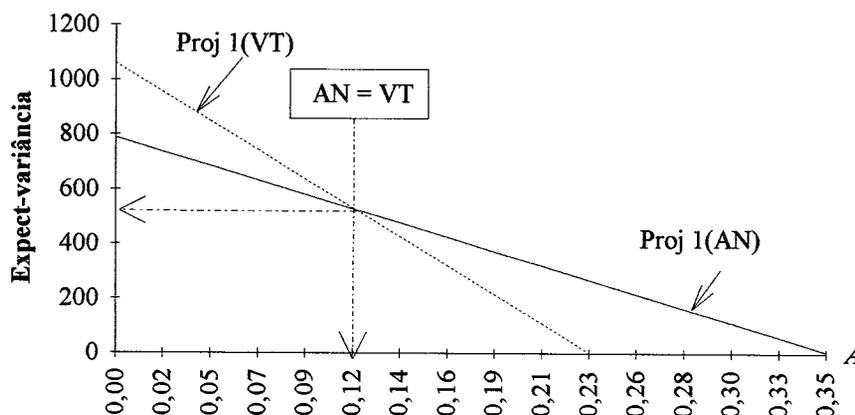


Fig 4.27 Dominância em  $n=8$  (AN x VT)

A figura 4.27, período 8, mostra que o projeto 1 é dominante no período 8, tanto pela aplicação do método da Análise Variacional (AN), quanto pelo método Vertex(VT). Pelo método da AN o coeficiente de aversão máximo admitido pelo projeto no período 8 é 52% superior ao obtido pelo método VT. Ao nível de aversão aproximadamente igual a 0,12, os dois métodos apresentam o mesmo valor para a função Expectância-Variância.

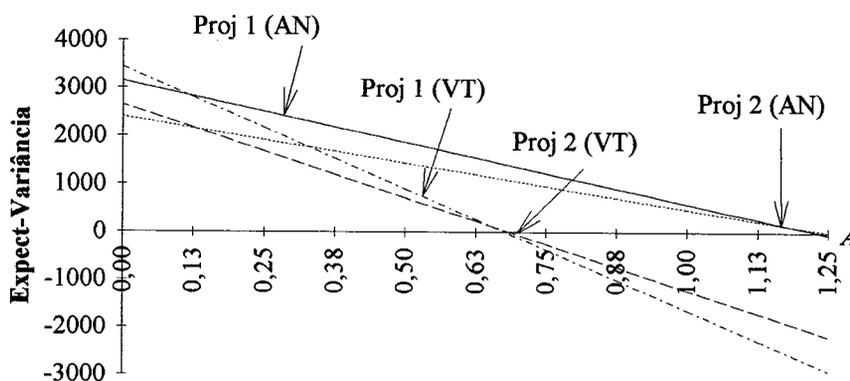


Fig 4.28 Dominância em  $n=10$  (AN x VT)

A figura 4.28, que representa a ordem de dominância no período 10, revela que a ordem de dominância obtida para os projetos 1 e 2, é a mesma para os dois métodos, VT e AN. O coeficiente de aversão máximo observado para o método da AN, é aproximadamente 82% maior do que o coeficiente  $A$  máximo obtido através do método VT.

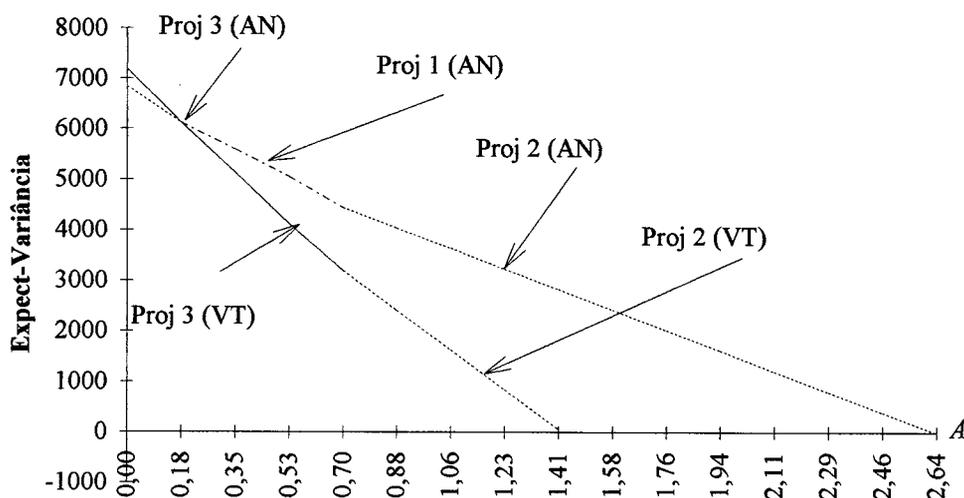


Fig.4.29 Dominância em  $n=14$  (AN x VT)

A figura 4.29, período 14, demonstra que segundo o método VT, tem-se que o projeto 3 é dominante até um nível de  $A=0,64$ , passando a dominar a partir deste ponto o projeto 2. Na abordagem através do método da AN, três métodos alternam-se a diferentes níveis de aversão, segundo a seguinte ordem, projeto 3, projeto 1 e projeto 2. O coeficiente de aversão ao risco máximo obtido pelo método da AN, é da ordem de 87% maior do que o obtido através do método VT.

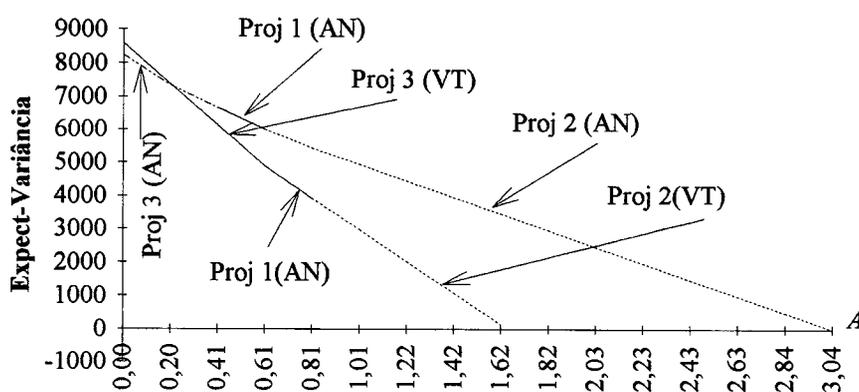


Fig. 4.30 Dominância em  $n=16$  (AN x VT)

A figura 4.30, para o período 16, mostra que, para este período, os métodos são perfeitamente equivalentes, indicando que os projetos 1, 3 e 2, alternam-se na dominância, a

diferentes níveis de  $A$ . O método da Análise Variacional [39] apresenta um  $A_i$  máximo 87%, superior ao obtido através do método Vertex [22].

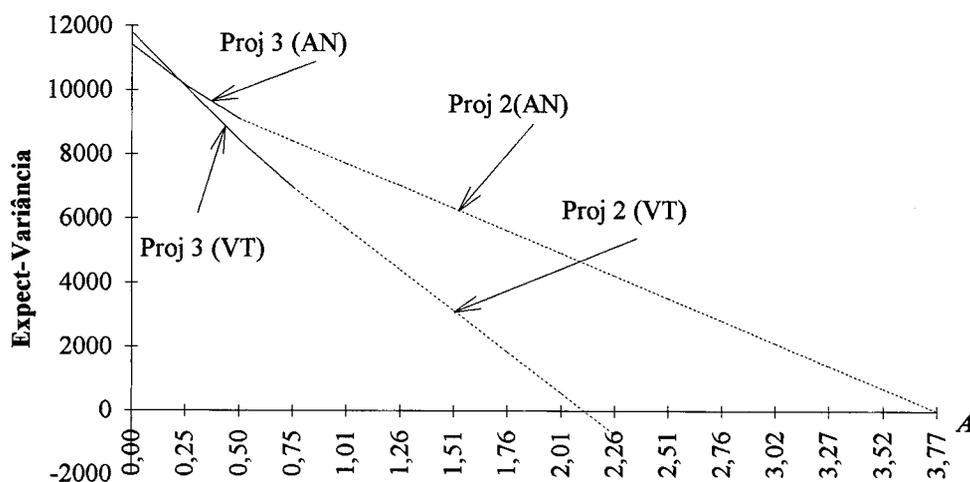


Fig. 4.31 Dominância em  $n=23$  (VT x AN)

A figura 4.31, período  $n=23$ , mostra a mesma ordenação para os projetos, utilizando-se as duas abordagens em análise (VT e AN), sendo que a abordagem através da Análise Variacional permite um coeficiente de aversão ao risco da ordem de 76% maior do que o  $A$  máximo admitido na abordagem através do Vertex.

## 4.4 Terceira Etapa (Abordagem Possibilística)

### 4.4.1 Introdução

Na abordagem difusa ou possibilística, pressupõe-se que as variáveis não possuem um comportamento que possa ser definido como aleatório, mas um comportamento de características difusa, ou seja, existe um determinado grau de incerteza associado a cada intervalo variável, o qual não pode ser medido com base na Teoria das Probabilidades, mas pode ser representado por uma Distribuição de Possibilidades.

### 4.4.2 Intervalos de Entrada

Idem ao item 4.2.1 e 4.3.1 deste Capítulo 4.

### 4.4.3 Cálculo do Valor Presente $VP$

Idem ao item 4.2.1 deste Capítulo 4, que representando-se em uma distribuição de possibilidades triangular assumiria a forma da figura 4.32:

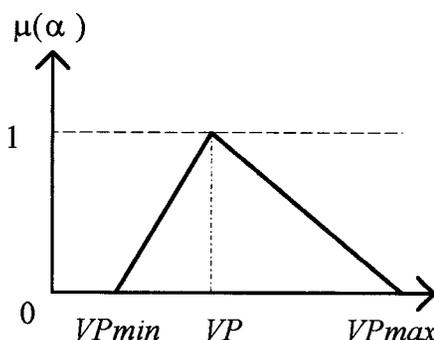


Fig. 4.32 Distribuição de Possibilidades de  $VP$

Esta distribuição pode ser representada pela função proposta por Chiu e Park [25], que tem a seguinte forma:

Seja  $P$  um número difuso representado à esquerda ( $l$ ) e a direita ( $r$ );

$$P = [P^{l(\alpha)}, P^{r(\alpha)}] = [a + (b - a)\alpha, c + (b - c)\alpha]; \quad (3.13)$$

Para  $\alpha = 0$ , tem-se que:

$a =$  valor mínimo de  $P \Rightarrow VPmin$ ;

$b =$  valor máximo de  $P \Rightarrow VPmax$ ;

Para  $\alpha = 1$ , tem-se que:

$b \Rightarrow$  valor modal,  $VP$

Substituindo-se na função (3.13), na distribuição AEX [18], obtém-se;

$$AEX_{ed} = \{ [a + (b - a) \cdot e^{(1,83 \cdot r - 1,59)}] \alpha, [c + (b - c) \cdot e^{(0,257 - 0,484/(1-r))}] \alpha \} \quad (4.6)$$

Os valores obtidos para o valor presente, ao nível  $\alpha = 0$ , ou seja o suporte de AEX, são os mesmos calculados pelo método Vertex [22], e constam da tabela 4.3, Memória de Cálculo 4.2 do Anexo 2.

#### 4.4.4 Discretização do Intervalo de Possibilidades de $VP$

Idem ao item 4.2.3 deste Capítulo 4, podendo ser representado graficamente pela figura 4.4 do mesmo item.

#### 4.4.5 Distribuição de Possibilidades

A distribuição de possibilidades adotada foi apresentada no item 4.3.2 deste Capítulo. Adotou-se, também, a Aproximação Exponencial AEX adaptada para representar quantidades difusas (4.6).

#### 4.4.6 Intervalo de Dominância

Idem ao item 4.2.5 deste Capítulo 4, com a diferença de que não representa-se a dispersão de  $VP$ , em forma de Desvio Padrão, figura 4.33.

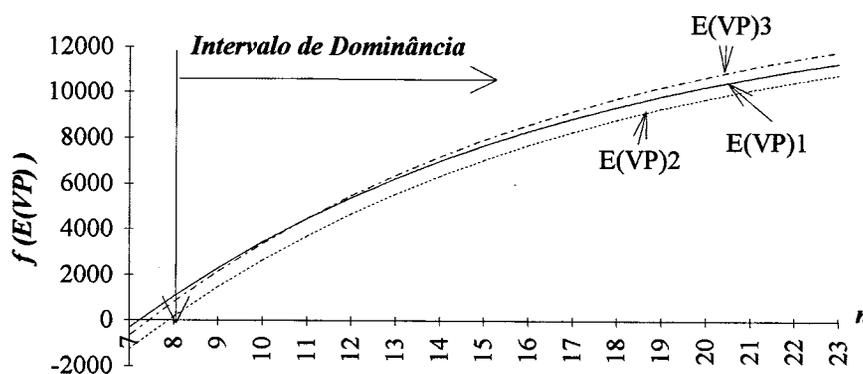


Fig. 4.33 Discretização Intervalo Dominância

A figura 4.33, revela que segundo o Valor Esperado, o projeto 1 é dominante no intervalo de  $n = [7 ; 11]$ , e o projeto 3 é dominante em  $n = [11 ; 23]$ , ao nível de possibilidade  $\alpha = 0$ . Este resultado é igual aos obtidos com os métodos Vertex [22] e Análise Variacional [39].

#### 4.4.7 Aversão ao Risco

Os modelos difusos representados por distribuições de possibilidades, permitem a incorporação do grau de aversão ao risco. Porém, neste trabalho não se pretende estudar o relacionamento existente entre o coeficiente de aversão ao risco ( $A$ ), aplicado através da função Expectância-Variância e sua possível aplicação aos modelos difusos.

#### 4.4.8 Hierarquização Difusa dos Projetos

A hierarquização pode ser feita a diversos níveis de possibilidades (cortes  $\alpha$ ). Os níveis  $\alpha$  são importantes na medida em que a partir destes, pode-se criar uma relação de ordem de dominância, identificando-se os projetos que se caracterizam por: estrita dominância, fraca dominância ou indiferença com relação aos demais. A figura 4.34, representa-se um conjunto de projetos a serem ordenados.

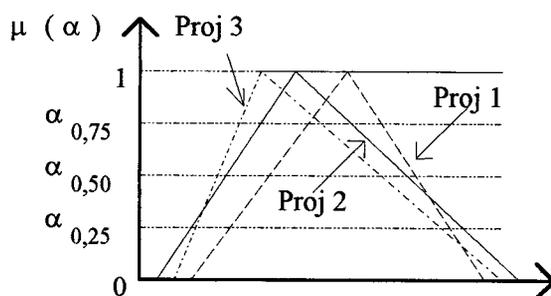


Fig. 4.34 Hierarquização Difusa a Diferentes  $\alpha$  – Níveis

Para o processo de hierarquização, propõe-se o método do ponto médio das áreas, desenvolvido no Capítulo 3, utilizando-se a equação (3.20):

A equação (3.20), hierarquizar-se os projetos para  $\alpha = [0 ; 1]$ , obtendo-se como resultado uma relação de ordem a cada nível  $\alpha$ , o que possibilita classificar-se a dominância de um determinado projeto como sendo, fraca, forte, indiferente, ou estrita, com relação aos demais.

##### 4.4.8.1 Hierarquização ao Nível de $\alpha = 1$

Tomando-se a equação (3.1), procede-se a hierarquização dos projetos. Os valores obtidos constam da Tabela 4.11 do Anexo 2, obtendo-se os valores através dos quais é possível representar-se graficamente na figura 4.31.

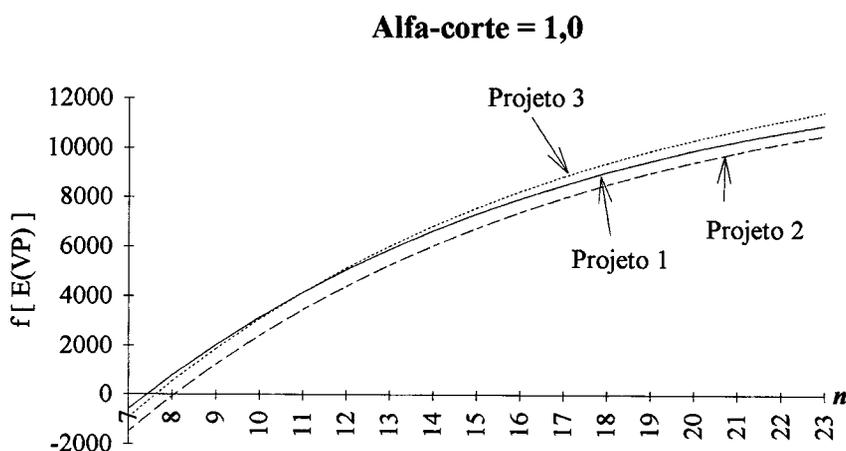


Figura 4.35 Hierarquização Difusa

A figura 4.35, mostra que no intervalo  $n = [8 ; 10]$ , o projeto 1 é dominante, enquanto que no intervalo  $n = [10 ; 23]$  o projeto 3 é dominante. Estes resultados são equivalentes aos resultados obtidos, nas abordagens através do método Vertex e Análise Variacional, para um coeficiente de aversão  $A = 0$ . Isto é, nas situações em que não se leva em consideração a aversão do decisor ao risco ( $A$ ), os três métodos são perfeitamente equivalentes.

#### 4.4.9 Comparação dos Métodos de Hierarquização de Quantidades Difusas

Neste item, procura-se demonstrar os resultados obtidos com a equação (3.12), comparando-se aos métodos apresentados no item 3.6.2 do Capítulo 3. Os resultados integram a tabela 4.5, onde pode ser constatada a mesma ordem de hierarquização que se encontrou com a equação (4.7), ao nível  $\alpha = 0$ .

Os métodos comparados foram os seguintes:

- a) método de Choobineh e Li [11], equação (3.21);
- b) método de Chang [5], equação (3.22);
- c) método de Chiu e Park [5], equação (3.17);
- d) método  $M_{AEX}$ , equação (4.7).

Na tabela 4.11, estão relacionados todos os valores encontrados para os quatro métodos anteriormente citados. E o resultado foi a mesma hierarquização para todos os métodos, em todos os períodos analisados como pode ser comprovado na tabela 4.11

AEX				C&L [11]			Chang [5]			Park [5]						
Eq. (4.7)				Eq. (3.2)			Eq.(3.3)			Eq.(3.5)						
n	M	M	M	Ranking	K1	K2	K3	Ranking	CH1	CH2	CH3	Ranking	PK1	PK2	PK3	Ranking
8	789	-54	546	1>3>2	0,487	0,447	0,476	1>3>2	51	36	47	1>3>2	977	670	928	1>3>2
9	2023	1232	1871	1>3>2	0,487	0,453	0,481	1>3>2	126	111	124	1>3>2	2234	1942	2217	1>3>2
10	3140	2396	3071	1>3>2	0,488	0,457	0,485	1>3>2	203	188	202	1>3>2	3371	3093	3384	1>3>2
11	4153	3451	4158	3>1>2	0,488	0,461	0,488	3>1>2	280	265	281	3>1>2	4401	4135	4441	3>1>2
12	5071	4407	5143	3>1>2	0,488	0,464	0,491	3>1>2	356	341	358	3>1>2	5334	5079	5398	3>1>2
13	5902	5273	6035	3>1>2	0,488	0,466	0,493	3>1>2	430	415	433	3>1>2	6180	5935	6266	3>1>2
14	6656	6058	6844	3>1>2	0,489	0,468	0,495	3>1>2	501	486	505	3>1>2	6945	6709	7051	3>1>2
15	7338	6769	7576	3>1>2	0,489	0,470	0,497	3>1>2	568	554	574	3>1>2	7638	7411	7762	3>1>2
16	7956	7413	8240	3>1>2	0,489	0,471	0,498	3>1>2	632	618	640	3>1>2	8266	8046	8406	3>1>2
17	8516	7996	8841	3>1>2	0,489	0,473	0,499	3>1>2	693	679	701	3>1>2	8834	8621	8989	3>1>2
18	9024	8525	9386	3>1>2	0,489	0,474	0,500	3>1>2	749	736	759	3>1>2	9350	9142	9518	3>1>2
19	9484	9004	9879	3>1>2	0,489	0,475	0,501	3>1>2	802	789	813	3>1>2	9815	9614	9996	3>1>2
20	9900	9438	10326	3>1>2	0,489	0,476	0,502	3>1>2	851	838	863	3>1>2	10238	10042	10430	3>1>2
21	10278	9831	10731	3>1>2	0,488	0,475	0,501	3>1>2	899	887	912	3>1>2	10651	10459	10853	3>1>2
22	10620	10187	11099	3>1>2	0,490	0,477	0,503	3>1>2	939	927	953	3>1>2	10967	10779	11178	3>1>2
23	10930	10510	11431	3>1>2	0,490	0,478	0,504	3>1>2	978	966	993	3>1>2	11282	11097	11501	3>1>2

Tabela 4.11 Comparação entre os Métodos Difusos (a), (b), (c) e (d), do item 4.3.8

Na tabela 4.11, observa-se que a hierarquização obtida com os quatro diferentes métodos foi exatamente a mesma conseguida com o método Vertex e a Análise Variacional ao nível de Aversão  $A = 0$ .

Para a ilustração proposta os três métodos conduziram a resultados equivalentes, isto no entanto não assegura que estas conclusões possam ser generalizadas.

Observando-se as tabelas 4.5 e 4.6, as quais resumem o ranking dos projetos para o método Vertex e o da Análise Variacional, respectivamente. É possível visualizar-se que, pelos métodos para os valores extremos de  $(A)$ , os resultados obtidos são totalmente equivalentes, enquanto que algumas diferenças podem ser observadas para os valores intermediários de  $(A)$ . Isto deve-se ao fato de que o método da Análise Variacional é mais preciso do que o método Vertex. Mostrando-se um método mais estável do que o método Vertex, uma vez que permite uma maior variação para  $(A)$ , sem que se altere a ordem de dominância dos projetos.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 5.1 - Conclusões

Dentre as principais conclusões depreendidas no desenvolvimento do presente trabalho, cita-se as seguintes:

- a abordagem dos problemas de análise sob incerteza, com base em intervalos aritméticos, mostrou ser de manipulação matemática relativamente simples;
- os intervalos permitem uma representação mais aproximada das situações reais, uma vez que é possível simular a variação de diversos parâmetros simultaneamente, tal qual ocorre com frequência no mundo econômico;
- o processo de discretização dos intervalos, mostrou ser uma técnica eficiente quando existe a necessidade de identificar-se intervalos de dominância entre duas ou mais alternativas de investimentos;
- em condições de incerteza, a discretização em subintervalos aumenta a segurança do decisor, uma vez que permite um melhor conhecimento das possibilidades de retorno a cada período, permitindo associar-se a estratégia do decisor frente ao investimento, com as características do projeto;
- a utilização da distribuição Beta aproximada (AEX) mostrou ser uma alternativa mais precisa para a estimativa baseada em três pontos. Além disto, por ser uma representação triangular da função Beta, é apropriada para representar quantidades difusas triangulares;
- as técnicas testadas para redução dos intervalos de incerteza mostraram-se bastante eficientes, conseguindo-se uma redução de até 40% (quarenta por cento), apenas com um rearranjo da fórmula do fator  $(P/A, i, n)$ ;

- dentre os métodos utilizados para calcular os intervalos de possibilidades, o de melhor performance foi o método da Análise Variacional, uma vez que através deste método foi obtida uma sensível redução do intervalo de incerteza. Além disto, o método permite abordagens de natureza probabilística.

## 5.2 Recomendações

Recomenda-se que as seguintes implementações seja incorporadas à metodologia proposta:

- substituir a correção dos fluxos pelo fator  $(P/A, i, n)$ , pela correção período a período, aumentando desta forma a precisão dos intervalos de possibilidades;
- adaptar a metodologia para análise de sensibilidade, uma vez que o modelo permite que assim se proceda;
- compatibilizar o coeficiente de aversão ao risco ( $A$ ), na condição probabilística, e o grau de aversão ao risco ( $\lambda$ ), na situação possibilística (difusa).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - BRAVERMAN, H. Trabalho e Capital Monopolista. A Degradação do Trabalho no Século XX, Rio de Janeiro, Zahar Editores S.A, p.268-69,1980.
- 2 - KAPLAN, R.S. New approaches to measurement and control, The Engeneering Economist, v.36, n.1,p.201-218, Spring, 1991.
- 3 - SULLIVAN, L.P. Policy Management Through Quality Function Deployment, Quality Progress, p.18-20, June, 1988.
- 4 - DEAN, J. Measuring the productivity of capital, Harvard Business Review ,v.32, n.1, jan-feb, 1954.
- 5 - ENSSLIN, L. Avaliação e perspectivas da engenharia econômica, 14º ENEGEP, ANAIS I, Florianópolis, outubro 1994.
- 6 - FENSTERSEIFER, J.E., SAUL, N. Investimentos de capital nas grandes empresas. Revista de Administração , v. 28, n.3 , p. 3-12, julho-agosto 1993.
- 7 - HAYES, R.H., PISANO, G.P. Beyond world class: The new manufacturing strategy, Harvard Business Review, p. 77-86, January-february, 1994.
- 8 - SMITH, A. A Riqueza das Nações, Nova York, p. 314, 1937.
- 9 - PORTER, M.E. Competitive Advantage: Creating and Sustaining Superior Performance, Free Press, New York, 1985.
- 10 - CANADA, J. R. Decision Tree Methodology in Capital Project Evaluation , Proceedings, 18 th Annual Conferece, AIIE, maio 1967.
- 11 - SKINER, W. Manufacturing missing link in corporate strategy, Harvard Business Review, p. 136-145, june 1969.
- 12 - MACK, R.P. Planning on Incetainty, New York, John Wiley & Sons, 1971.

- 13 - ENSSLIN, L. Análise de Investimentos, Publicação Interna EPS - UFSC, Florianópolis, 1977.
- 14 - KAHNE, S. A procedure for optimizing development decisions . Automatica, v. 11, p. 261 - 269, 1975.
- 15 - LANZER, E. A. Programação Linear: Conceitos e aplicações, Rio de Janeiro, IPEA INPES, 1988.
- 16 - LEE, S. M. Programming for Decision Analysis, Philadelphia, AUER BACH Publishers Inc, 1972.
- 17 - CHARNES, A., COOPER, W. W. Management Models on Industrial Application of Linear Programming, New York : John Willey & Sons, 1961.
- 18 - IJIRI, Y. Management Goals and Account for Control, Chicago, Rand-MacNally, 1965.
- 19 - BEKMAN , O.R. Análise estatística da decisão, São Paulo : Edgar Blücher, 1980.
- 20 - FRENCH, S. Decision Theory : A Introduction to the mathematics of Rationality, Manchester, John Willey & Sons, 1986.
- 21 - SHAALAN, M.E., BROADWATER, R.P.FABRYCKY, W.J. The application of interval analysis to economic decision evaluation of electric energy systems. The Engineering Economist, v.39, n. 3, spring 1994.
- 22 - DONG, W, SHAH, C.H. Vertex method for computing functions of fuzzy variables, Fuzzy Sets and Systems, vol 24, p 65 - 78, 1987.
- 23 - ZIMMERMAN, H.J. Fuzzy Sets Theory and Its Applications, Boston, Kluwer Nijhoff, p.106, 1985.
- 24 - DUBOIS, D. , PRADE, H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, New York, Academic Pres, 1980.

- 25 - CHUI, Y., PARK, C. Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion, The Engineering Economist, v. 39, p 113-138, winter 1994.
- 26 - ZADEH, L.A. Fuzzy sets, Information and Control, v.8, n.3, p. 338-353, 1965.
- 27 - ZAHO, R., GOVIND, R. Solutions of algebraic equations involving generalized fuzzy numbers, Information Science, v.56, p. 199-243, 1991.
- 28 - ZADEH, L.A., The concept of linguistic variable and its applications to approximate reasoning, Information Science Part I, v.8, pp 199-249, 1975.
- 29 - YAGER, R.R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval, Information Sciences, v.24, p. 143-161, 1981.
- 30 - DUBOIS, D., PRADE, H. Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, Information Sciences, v.30, p. 183-224, 1983
- 31 - CHOUBINEH, F., BEHRENS, A. Use of intervals and possibility distributions in economic analysis, Operational Research Society, v.43, n.9, p. 907 - 918, 1992.
- 32 - VON NEUMAN, J., MORGERNSTERN, O. Theory of Games and Economic Behavior, John Wiley & Sons, USA, agosto 1967.
- 33 - BUCKLEY, J.J. . The fuzzy mathematics of finance, Fuzzy Sets and Systems, vol 21, p 257 - 273, 1987.
- 34 - CHOUBINEH, F., LI, H. Ranking fuzzy multicriteria alternatives with respect to a decision maker's fuzzy goal, Information Sciences, v.72, p 143-155, 1993.
- 35 - GONZALES, A., VILA, M.A. Dominance Relations on fuzzy numbers, Information Sciences, v. 64, p. 1-16, 1992.
- 36 - PARK, C.S. The mellin transform in probabilistic cash flow modeling, The Engineering Economist, v.32, n.2, winter 1987.

- 37 - KEEFER, D.L., BODILY, Samuel, Three point approximations for continuous random variables, Management Science , v. 29, p595-609, 1983.
- 38 - FERREIRA, F.C., Distribuição de Variáveis Aleatórias Mal Definidas, Publicação Interna EPS - UFSC, Florianópolis, Junho 1994.
- 39 - ENSSLIN, L., ENSSLIN, S.R. Análise de investimentos de projetos mal definidos, Anais do XVIII Congresso Latino Íbero Americano de Pesquisa Operacional e Engenharia de Sistema, Santiago, Chile, junho, 1994.
- 40 - BASS, S.M., KAWERNAACK, H. Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets, Automatica , v.13., p 47-58 , 1977.
- 41 - LINDGREN, B.W, Elements of decision Theory , New York : Macmillan Company, 1971.
- 42 - GANTT, H. L. Work Wages and Profits, New York, p. 29, 1910.
- 43 - SAATY, T. L. An exposition of the AHP in reply to the paper remarks on the analytic hierarchyc process, Menagement Science ,v.36, p.259-268, 1990.
- 44 - ZADEH, L. A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems, v.1,p. 3-28, 1978.
- 45 - BANA e COSTA, C. A. Processo de apoio à decisão: Problemáticas, actores e acções. Palestra apresentada no curso " Ambiente: Fundamentalismo e Pragmatismo", Seminário Pedro Nunes, Convento da Arrábida, agosto 1993.

## ANEXO 1

### **Exemplo 3.1- Sub-Distributividade - Dong e Shah [22].**

Sejam os intervalos  $X_1 = [1, 4]$ ,  $X_2 = [2, 3]$ ,  $X_3 = [1, 5]$  ;

Calcular  $Y = X_1 [X_2 - X_3]$  :

$$Y_1 = X_1 [X_2 - X_3] \quad \text{e} \quad Y_2 = X_1 X_2 - X_1 X_3$$

$$Y_1 = [1, 4].([2, 3] - [1, 5])$$

$$= [1, 4].[-3, 2] \quad Y_1 = \{\min[-3, 2, -12, 8]; \max[-3, 2, -12, 8]\}$$

$$= [-12, 8]$$

$$Y_2 = \{[1, 4].[2, 3]\} - \{[1, 4].[1, 5]\}$$

$$= \{\min[2, 3, 8, 12]; \max[2, 3, 8, 12]\} - \{\min[1, 5, 4, 20]; \max[1, 5, 4, 20]\}$$

$$= \{[2, 12] - [1, 20]\}$$

$$= [-18, 11]$$

Ou;

$$Y_1 < Y_2 \Rightarrow [-12, 8] \subset [-18, 11]$$

### **Exemplo 3.2**

Sendo  $f(x) = 2x + 3$  e  $X = [a, b] = [1, 5]$ , então;

$$f(a) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$f(b) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$$

$$Y = \{\min(5, 13), (\max(5, 13))\} = [5, 13] = [2, 10] + 3$$

### **Exemplo 3.3 - (Vertex) Correção da Sub-distributividade**

Tomando-se o exemplo dado em 3.1, e resolvendo-se pelo método Vertex;

Tem-se que:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3) = Y = X_1 (X_2 - X_3)$$

$$X_1 = [1, 4]; X_2 = [2, 3]; X_3 = [1, 5]$$

$$a_1 = 1, b_1 = 4$$

$$a_2 = 2; b_2 = 3$$

$$a_3 = 1; b_3 = 5$$

Para o caso tridimensional tem-se  $2^3 = 8$ , resulta na seguinte combinação :

$$c_1 = (1, 2, 1), c_2 = (1, 2, 5), c_3 = (1, 3, 1), c_4 = (1, 3, 5), \\ c_5 = (4, 2, 1), c_6 = (4, 2, 5), c_7 = (4, 3, 1), c_8 = (4, 3, 5).$$

Para as ordenadas obtém-se:

$$\begin{aligned} f(c_1) &= 1. (2 - 1) = 1, & f(c_2) &= 1. (2 - 5) = -3, \\ f(c_3) &= 1. (3 - 1) = 2, & f(c_4) &= 1. (3 - 5) = -2, \\ f(c_5) &= 4. (2 - 1) = 4, & f(c_6) &= 4. (2 - 5) = -12, \\ f(c_7) &= 4. (3 - 1) = 8, & f(c_8) &= 4. (3 - 5) = -8, \end{aligned}$$

$$Y = \min_j [ (f(c_j)) ], \max_j [ (f(c_j)) ], \text{ para } j = 1, \dots, N;$$

$$= \min [ 1, -3, 2, -2, 4 - 12, 8, -8 ]; \max [ 1, -3, 2, -2, 4 - 12, 8, -8 ]$$

$$= [-12, 8];$$

### Exemplo 3.4 - Solução de Continuidade no Vertex

Seja a função representada na figura 1.1:

$$f(x) = x.(2-x) \quad \text{com } x \in [ 0,5 ; 2 ]$$

Onde;

$$c_1 = (0,5) \text{ e } c_2 = (2)$$

$$f(c_1) = 0,5.(2-0,5) = 0,75$$

$$f(c_2) = 2.(2-2) = 0$$

Então;

$$Y = \{ \min [ (f(c_1)) , (f(c_2)) ] , \max [ (f(c_1)) , (f(c_2)) ] \} = [ 0 ; 0,75 ]$$

Para corrigir esta distorção

Supõe-se que existam  $m$  pontos extremos,  $E_k [k = 1 \dots m]$ ,

Então deve-se alterar  $Y = f(x)$  para:

$$Y = \{ \min [ (f(c_i)) , (f(E_k)) ] , \max [ (f(c_i)) , (f(E_k)) ] \}$$

Sendo a condição de continuidade obtida através da derivada parcial de  $f(x)$ ;

$$\frac{d f(x)}{d x} = 2x - 2 = 0$$

$$x_0 = 1$$

Substituindo o ponto  $E_k$  na função obtem-se:

$$Y = \{ \min [0,5. (2 - 0,5)] , [2.(2 - 2)] , [1.(2 - 1)] , \max [0,5. (2 - 0,5)] , [2.(2 - 2)] , [1.(2 - 1)] \}$$

$$Y = [ 0 ; 1 ] .$$

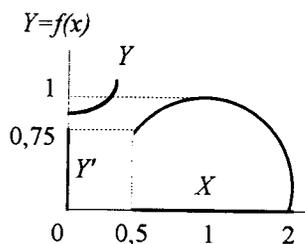


Figura 1.1 Mapa de X para Y

**Exemplo 3.5 - Redução dos Intervalos Shaalan, Broadwater e Fabrycki [21]**

Para  $i = [0.10 , 0.12]$   
 e  $n = 1$  a  $30$ ;

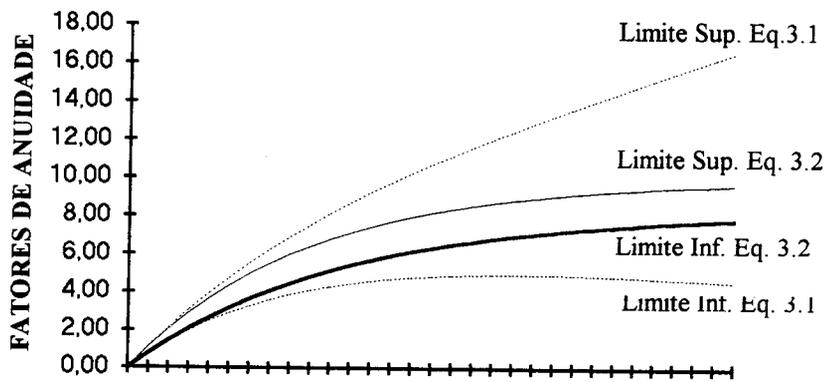


Fig.3.2 Aumento da Precisão do Intervalo de I  $n$

Seja

$$(P/A, i, n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Onde;

$$i = [0,11, 0,12], \text{ e } n = 2$$

Resolvendo;

$$\begin{aligned} \text{Valor Presente} &= 1000 * ((P/A, i, 2)) \\ &= [1000, 1000] * [1,570, 1,844] \\ &= [1570, 1844] \end{aligned}$$

Transformando período a período, com o auxílio da equação (11)

$$(P/A, i, n) = \frac{1}{(1+i)}$$

Primeiro Ano (ano 2 para ano 1);

$$\begin{aligned} \text{Valor Presente} &= [1000, 1000] * 1/(1+i) \\ &= [893, 901] \end{aligned}$$

Segundo Ano (ano 1 para ano 0);

$$\begin{aligned} \text{Valor Presente} &= ([893, 901] + [1000, 1000] * 1/(1+i)) \\ &= [1690, 1713] \end{aligned}$$

### Exemplo 3.6 - Número difuso M:

$$L(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$R(x) = \frac{1}{(1+|2|)}$$

$$\alpha = 2;$$

$$\beta = 3;$$

$$m = 5;$$

Então;

$$\mu(x) \begin{cases} \tilde{L} \left( \frac{5-x}{2} \right) = \frac{1}{1 + \left( \frac{5-x}{2} \right)^2} & , x \leq 5 \\ \tilde{R} \left( \frac{x-5}{3} \right) = \frac{1}{1 + \left( \frac{x-5}{3} \right)^2} & , x \geq 5 \end{cases}$$

Representação gráfica na figura 3.8

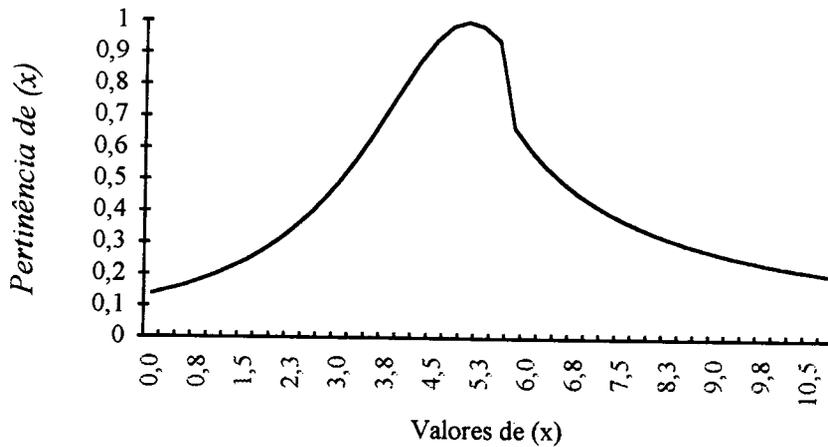


Figura 3.8 Número Difuso M , a Direita e a Esquerda

### Exemplo 3.7 - Operações com números difusos triangulares.

Sendo:

$$P = [1,2,4]; e$$

$$Q = [2,5,7];$$

Adição

$$P = [1 + (2-1)\alpha, 4 + (2-4)\alpha]$$

$$Q = [2 + (5-2)\alpha, 7 + (5-7)\alpha]$$

$$\begin{aligned} P \oplus Q &= [(1 + \alpha) + (2 + 3\alpha), (4 - 2\alpha) + (7 - 2\alpha)] \\ &= [3 + 4\alpha, 11 - 4\alpha] \end{aligned}$$

Para  $\alpha = 0$ ;

Anexo 1

$$P \oplus Q = [3, 11]$$

Para  $\alpha = 1$ ;

$$P \oplus Q = [7, 7]$$

Aplicando-se as operações de Intervalos Aritméticos;

Para  $\alpha = 0$ ;

$$\begin{aligned} P \oplus Q &= [1, 4] + [2, 7] \\ &= [3, 11] \end{aligned}$$

Para  $\alpha = 1$ ;

$$\begin{aligned} P \oplus Q &= [2, 2] + [5, 5] \\ &= [7, 7] \end{aligned}$$

Obtém-se a Multiplicação ( $\otimes$ ), da seguinte forma:

Se  $P$  e  $Q$  são positivos;

$$P \otimes Q = [P^l(\alpha) \cdot Q^l(\alpha), P^r(\alpha) \cdot Q^r(\alpha)]$$

$$P \otimes Q = [(1 + \alpha) \cdot (2 + 3\alpha), (4 - 2\alpha) \cdot (7 - 2\alpha)]$$

$$P \otimes Q = [(3\alpha^2 + 5\alpha + 2), (4\alpha^2 - 22\alpha + 28)]$$

Solução através de Intervalos;

Para  $\alpha = 0$ ;

$$\begin{aligned} P \otimes Q &= [1, 4] \cdot [2, 7] \\ &= \{\min[1 \cdot 2, 1 \cdot 7, 4 \cdot 2, 4 \cdot 7], \max[1 \cdot 2, 1 \cdot 7, 4 \cdot 2, 4 \cdot 7]\} \\ &= [2, 28] \end{aligned}$$

Para  $\alpha = 1$ ;

$$\begin{aligned} P \otimes Q &= [2, 2] \cdot [5, 5] \\ &= \{\min[2 \cdot 5], \max[2 \cdot 5]\} \\ &= [10, 10] \end{aligned}$$

$$P \oslash Q = [(1 + \alpha)/(7 - 2\alpha), (4 - 2\alpha)/(2 + 3\alpha)]$$

Para  $\alpha = 0$ ;

$$P \oslash Q = [1/7, 2]$$

Para  $\alpha = 1$ ;

$$P \oslash Q = [2/5, 2/5].$$

Por intervalos tem-se;

Para  $\alpha = 0$ ;

$$\begin{aligned} P \otimes Q &= [1, 4] \cdot [1/7, 1/2] \\ &= \{\min[1.(1/7), 1.(1/2), 4.(1/7), 4.(1/2)], \max[1.(1/7), 1.(1/2), 4.(1/7), 4.(1/2)]\} \\ &= [1/7, 2] \end{aligned}$$

Para  $\alpha = 1$ ;

$$\begin{aligned} P \otimes Q &= [2, 2] \cdot [1/5, 1/5] \\ &= \{\min[2.(1/5)], \max[2.(1/5)]\} \\ &= [2/5, 2/5] \end{aligned}$$

Para  $\alpha = 1$ ;

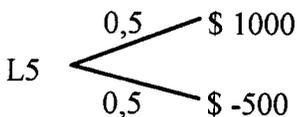
$$P \otimes Q = [2/5, 2/5].$$

### Exemplo 3.8 - Determinação da Função Utilidade.

Admitindo que os limites mínimo e máximo respectivamente são -500 e 1000 , e atribuindo-se utilidades entre 0 e 1, tem-se:

$$u(-500) = 0 \text{ e } u(1000) = 1;$$

Tomando-se a preferência de um dado decisor, o qual deva decidir participar ou não de uma loteria hipotética nas condições que seguem:



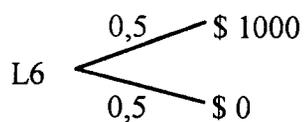
Pergunta-se ao decisor qual o equivalente certo para a loteria L5, se ele for indiferente a participar, logo pode-se atribuir o valor de 0 (zero) ao equivalente certo, obtendo-se;

$$u(L5) = u(0);$$

Porém;

$$u(L5) = 0,5 \times u(1000) + 0,5 \times u(-500) = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0 = 0,5 \therefore u(0) = 0,5$$

Perguntando-se agora, entre um equivalente certo de \$ 400 e uma loteria L6;



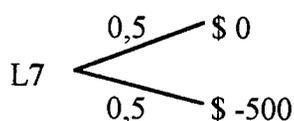
Logo;

$$u(L6) = u(400);$$

Mas;

$$u(L6) = 0,5 \times u(1000) + 0,5 \times u(0) = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0,5 = 0,75;$$

Supondo-se a oferta de mais uma situação de escolha, entre um equivalente certo de \$ -300, isto é o decisor pagaria para não se submeter a loteria L7;



Tem-se que:

$$u(L7) = u(-300), \text{ mas;}$$

$$u(L7) = 0,5 \times u(0) + 0,5 \times u(-500) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0 = 0,25$$

De posse destes pontos, já é possível determinar-se a curva aproximada de função utilidade de tal decisor, conforme mostra figura 3.4.1

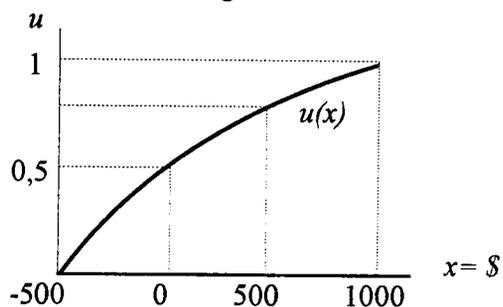


Figura 3.4.1 Função Utilidade

## ANEXO 2 - MEMÓRIA DE CÁLCULOS DO CAPÍTULO 4

### MC - 4.1 Representação das Variáveis de Entrada (Vertex e Análise Variacional)

Seja uma situação na qual faz-se necessário decidir entre o projeto mais vantajoso dentre um conjunto de três diferentes projetos para uma dada alternativa de investimentos. E que conhece-se apenas os limites mínimos e máximos dos intervalos das variáveis envolvidas. Pressupondo ainda que, o tempo de duração dos projetos sejam desconhecidos.

Pode-se representar os dados de entrada através do quadro 4.1, valorando os fluxos como segue:

Variáveis		PROJETO 1	PROJETO 2	PROJETO 3
Custo Inicial (CI)	\$	[14000;16000]	[16000;17000]	[16000;16800]
Custo Operacional (CO)	\$	[3000; 4000]	[5150; 6100]	[4230; 4330]
Receita Anual (RA)	\$	[6000; 7000]	[8500; 9000]	[6500; 8500]
Taxa de Juros (I)	%	[9,75; 11,00]	[9,75; 11,00]	[9,75; 11,00]

Tabela 4.1-Valoração das Variáveis de Entrada.

A tabela 4.2 estão representadas todas as possíveis combinações para os intervalos de Entrada, a partir da tabela 4.1.

		Projeto 1				Projeto 2				Projeto 3			
2 <sup>3</sup>	2 <sup>2</sup>	2 <sup>1</sup>	2 <sup>0</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>2</sup>	2 <sup>1</sup>	2 <sup>0</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>2</sup>	2 <sup>1</sup>	2 <sup>0</sup>		
RA	CO	Fator I	CI	RA	CO	Fator I	CI	RA	CO	Fator I	CI		
6000	3000	(P/A ,9,75,n)	14000	8500	5150	(P/A ,9,75,n)	16000	6500	4230	(P/A ,9,75,n)	16000		
6000	3000	(P/A ,9,75,n)	16000	8500	5150	(P/A ,9,75,n)	17000	6500	4230	(P/A ,9,75,n)	16800		
6000	3000	(P/A ,11.0,n)	14000	8500	5150	(P/A ,11.0,n)	16000	6500	4230	(P/A ,11.0,n)	16000		
6000	3000	(P/A ,11.0,n)	16000	8500	5150	(P/A ,11.0,n)	17000	6500	4230	(P/A ,11.0,n)	16800		
6000	4000	(P/A ,9,75,n)	14000	8500	6100	(P/A ,9,75,n)	16000	6500	4330	(P/A ,9,75,n)	16000		
6000	4000	(P/A ,9,75,n)	16000	8500	6100	(P/A ,9,75,n)	17000	6500	4330	(P/A ,9,75,n)	16800		
6000	4000	(P/A ,11.0,n)	14000	8500	6100	(P/A ,11.0,n)	16000	6500	4330	(P/A ,11.0,n)	16000		
6000	4000	(P/A ,11.0,n)	16000	8500	6100	(P/A ,11.0,n)	17000	6500	4330	(P/A ,11.0,n)	16800		
7000	3000	(P/A ,9,75,n)	14000	9000	5150	(P/A ,9,75,n)	16000	8500	4230	(P/A ,9,75,n)	16000		
7000	3000	(P/A ,9,75,n)	16000	9000	5150	(P/A ,9,75,n)	17000	8500	4230	(P/A ,9,75,n)	16800		
7000	3000	(P/A ,11.0,n)	14000	9000	5150	(P/A ,11.0,n)	16000	8500	4230	(P/A ,11.0,n)	16000		
7000	3000	(P/A ,11.0,n)	16000	9000	5150	(P/A ,11.0,n)	17000	8500	4230	(P/A ,11.0,n)	16800		
7000	4000	(P/A ,9,75,n)	14000	9000	6100	(P/A ,9,75,n)	16000	8500	4330	(P/A ,9,75,n)	16000		
7000	4000	(P/A ,9,75,n)	16000	9000	6100	(P/A ,9,75,n)	17000	8500	4330	(P/A ,9,75,n)	16800		
7000	4000	(P/A ,11.0,n)	14000	9000	6100	(P/A ,11.0,n)	16000	8500	4330	(P/A ,11.0,n)	16000		
7000	4000	(P/A ,11.0,n)	16000	9000	6100	(P/A ,11.0,n)	17000	8500	4330	(P/A ,11.0,n)	16800		

Tabela 4.2 Combinação das Variáveis de Entrada

### MC- 4.2 Cálculo do Valores para VP.( Vertex e Abordagem Difusa )

Utilizando-se a equação (4.1), procede-se o cálculo dos VPs (mínimo, máximo e mais provável), com o auxílio do método Vertex e com base nos valores da tabela 4.1, obtendo-se a tabela 4.2, onde constam os valores compreendidos no intervalo  $n = [1, 23]$ .

$n$	$VP1, \min$	$VP1, \max$	$VP2, \min$	$VP2, \max$	$VP3, \min$	$VP3, \max$	$VP1$	$VP2$	$VP1$
1	-14385	-9934	-15062	-12087	-15047	-11660	-12282	-13669	-13483
2	-12913	-6272	-13296	-8562	-13451	-7750	-9819	-11104	-10840
3	-11572	-2972	-11686	-5386	-11996	-4228	-7588	-8780	-8445
4	-10350	1	-10220	-2524	-10670	-1054	-5567	-6674	-6275
5	-9237	2679	-8884	53	-9462	1805	-3736	-4766	-4310
6	-8222	5092	-7667	2376	-8361	4380	-2077	-3038	-2529
7	-7298	7265	-6558	4468	-7358	6701	-573	-1472	-915
8	-6456	9224	-5547	6353	-6445	8791	789	-54	546
9	-5689	10988	-4626	8051	-5612	10674	2023	1232	1871
10	-4989	12577	-3787	9580	-4853	12371	3140	2396	3071
11	-4351	14009	-3023	10959	-4162	13899	4153	3451	4158
12	-3772	15299	-2326	12200	-3532	15277	5071	4407	5143
13	-3243	16461	-1691	13319	-2959	16517	5902	5273	6035
14	-2761	17508	-1113	14326	-2463	17635	6656	6058	6844
15	-2322	18451	-586	15234	-1959	18642	7338	6769	7576
16	-1922	19301	-106	16052	-1525	19549	7956	7413	8240
17	-1557	20066	331	16789	-1130	20366	8516	7996	8841
18	-1225	20756	730	17453	-769	21102	9024	8525	9386
19	-922	21377	1093	18051	-441	21765	9484	9004	9879
20	-647	21937	1424	18589	-142	22363	9900	9438	10326
21	-395	22441	1726	19075	131	22901	10278	9831	10731
22	-166	22896	2000	19512	379	23386	10620	10187	11099
23	42	23305	2251	19906	606	23823	10930	10510	11431

Tabela 4.3 Intervalo de VP(Min, Máx), e Valor Mais Provável (VP).

### MC - 4.4 Cálculo para $E(VP)$ e $\sigma(VP)$ (Vertex)

Através das equações (4.4a), (4.4b) e (4.6), obteve-se os valores para  $E(VP)$  e  $\sigma(VP)$ , para cada projeto, a cada período do intervalo  $n = [1 ; 23]$ , tabela 4.4.

$n$	$E(VP)1$	$E(VP)2$	$E(VP)3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
1	-12230	-13633	-13439	1287	861	981
2	-9737	-11043	-10763	1922	1370	1652
3	-7478	-8697	-8339	2489	1824	2251
4	-5433	-6573	-6144	2997	2228	2786
5	-3581	-4649	-4157	3450	2588	3264
6	-1903	-2907	-2357	3855	2908	3691
7	-384	-1328	-726	4216	3192	4073
8	992	101	750	4539	3445	4413
9	2238	1396	2087	4828	3670	4717
10	3366	2568	3298	5085	3870	4988
11	4388	3631	4395	5314	4047	5230
12	5314	4592	5388	5520	4204	5446
13	6152	5464	6288	5703	4344	5639
14	6911	6253	7101	5866	4468	5818
15	7599	6968	7841	6011	4578	5963
16	8222	7615	8509	6141	4676	6100
17	8786	8202	9114	6257	4762	6222
18	9297	8733	9663	6360	4839	6330
19	9759	9214	10159	6451	4906	6426
20	10178	9650	10609	6534	4966	6512
21	10558	10044	11016	6606	5019	6589
22	10902	10402	11385	6671	5066	6657
23	11213	10726	11719	6729	5107	6717

Tabela 4.4, Valores de  $E(VP)$  e  $\sigma(VP)$  no Intervalo  $n = [1 ; 23]$

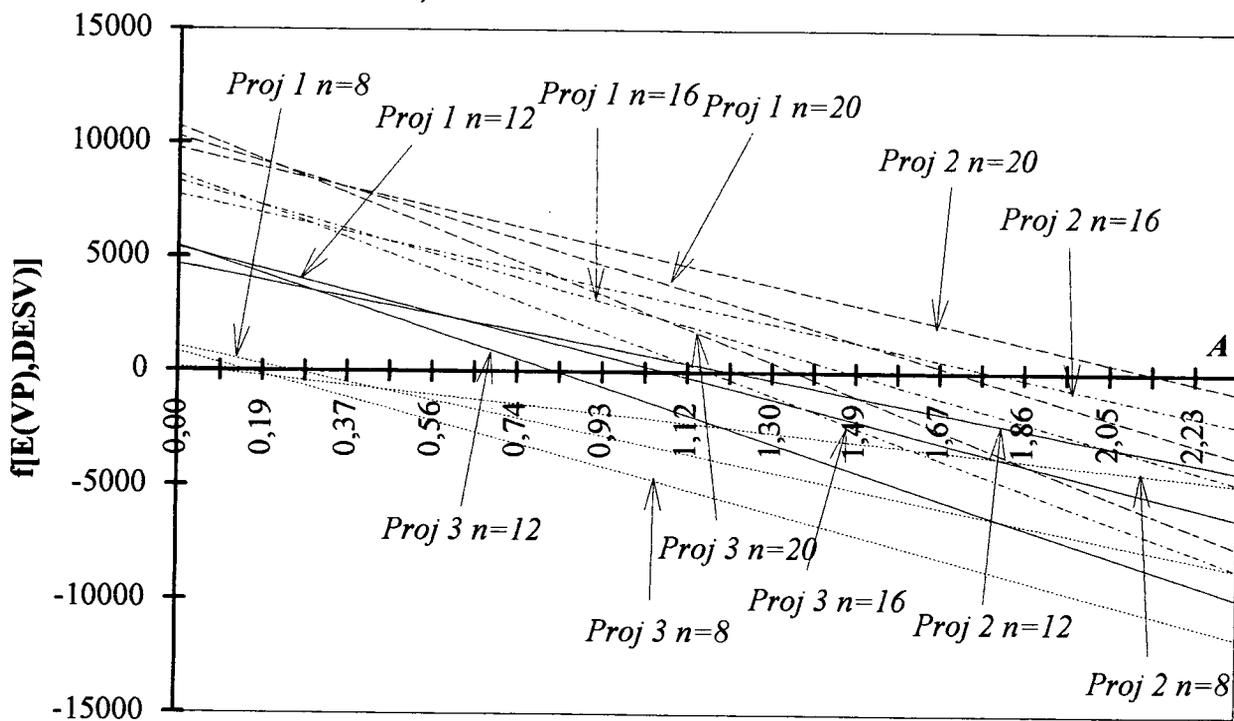


Figura 4.6 Função Expectância-Variância

### MC - 4.5 Comparação PERT e AEX, com Beta

Utilizando-se os dados da tabela 4.1, calculou-se o Valor Esperado e o Desvio Padrão, das distribuições PERT e AEX, comparando-se os resultados com a distribuição Beta, o resultados numéricos constam na tabela 4.5a, enquanto que na figura 4.32, podem ser visualizados graficamente. Exemplificou-se com base nos valores do projeto 1, uma vez que a diferença encontrada para os valores de um projeto, mantém-se para os demais.

<i>n</i>	E(VP)Beta	Desv Beta	E(VP)Pert	Desv Pert	E(VP)AEX	Desv AEX
1	-12215	1233	-12229	742	-12230	1287
2	-9706	1694	-9722	1107	-9737	1922
3	-7431	2188	-7453	1433	-7478	2489
4	-5371	2662	-5400	1725	-5433	2997
5	-3505	3099	-3542	1986	-3581	3450
6	-1815	3498	-1860	2219	-1903	3855
7	-287	3859	-338	2427	-384	4216
8	1097	4186	1039	2613	992	4539
9	2349	4481	2286	2780	2238	4828
10	3483	4747	3414	2928	3366	5085
11	4508	4986	4436	3060	4388	5314
12	5437	5202	5360	3179	5314	5520
13	6277	5395	6197	3284	6152	5703
14	7037	5570	6955	3378	6911	5866
15	7726	5727	7640	3462	7599	6011
16	8349	5868	8261	3537	8222	6141
17	8912	5995	8823	3604	8786	6257
18	9423	6110	9332	3664	9297	6360
19	9885	6213	9793	3717	9759	6451
20	10303	6305	10209	3764	10178	6534
21	10682	6389	10587	3806	10558	6606
22	11024	6464	10929	3844	10902	6671
23	11335	6532	11239	3877	11213	6729

Tabela 4.5a Valores Comparativos das Distribuições Beta, Pert e AEX.

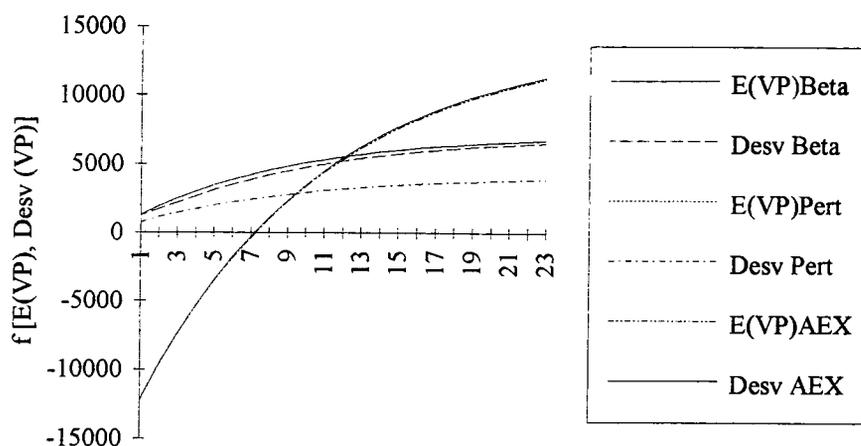


Fig 4.32 Comparação Beta, Pert e AEX

Diferentemente do que ocorre com o Valor Esperado, a figura 4.32 mostra que a distribuição PERT, no que se refere ao Desvio Padrão, não possui uma aproximação confiável, enquanto que os erros cometidos na adoção da distribuição AEX, são perfeitamente aceitáveis para a faixa de valores dada.

#### MC - 4.6 Coeficiente de Aversão ao Risco (Vertex)

$n$	E(VP)1	$\sigma$ 1	A	E(VP)2	$\sigma$ 2	A	E(VP)3	$\sigma$ 3	A	A max
8	992	4539	0,22	101	3445	0,03	750	4413	0,17	0,22
9	2238	4828	0,46	1396	3670	0,38	2087	4717	0,44	0,46
10	3366	5085	0,66	2568	3870	0,66	3298	4988	0,66	0,66
11	4388	5314	0,83	3631	4047	0,90	4395	5230	0,84	0,90
12	5314	5520	0,96	4592	4204	1,09	5388	5446	0,99	1,09
13	6152	5703	1,08	5464	4344	1,26	6288	5639	1,12	1,26
14	6911	5866	1,18	6253	4468	1,40	7101	5818	1,22	1,40
15	7599	6011	1,26	6968	4578	1,52	7841	5963	1,31	1,52
16	8222	6141	1,34	7615	4676	1,63	8509	6100	1,39	1,63
17	8786	6257	1,40	8202	4762	1,72	9114	6222	1,46	1,72
18	9297	6360	1,46	8733	4839	1,80	9663	6330	1,53	1,80
19	9759	6451	1,51	9214	4906	1,88	10159	6426	1,58	1,88
20	10178	6534	1,56	9650	4966	1,94	10609	6512	1,63	1,94
21	10558	6606	1,60	10044	5019	2,00	11016	6589	1,67	2,00
22	10902	6671	1,63	10402	5066	2,05	11385	6657	1,71	2,05
23	11213	6729	1,67	10726	5107	2,10	11719	6717	1,74	2,10

Tabela 4.6 Valores para Expectância-Variância (Vertex).

#### MC - 4.7 Hierarquização a Diferentes Níveis de Aversão ao Risco

Tomando-se arbitrariamente três diferentes níveis de aversão ao risco, respeitando-se os limites máximos admitidos pelos projetos, através da equação Expct-Var, obtém-se a tabela 4.7.

A=0,2					A=0,5					A=1,0				
	Proj 1	Proj 2	Proj 3	Rank		Proj 1	Proj 2	Proj 3	Rank		Proj 1	Proj 2	Proj 3	Rank
8	84	-588	-132	1	8	-1278	-1621	-1456		8	-3548	-3344	-3663	
9	1272	662	1144	1>3>2	9	-176	-439	-271		9	-2590	-2274	-2630	
10	2349	1795	2301	1>3>2	10	824	634	804	1>3>2	10	-1719	-1301	-1690	
11	3325	2821	3349	3>1>2	11	1731	1607	1780	3>1>2	11	-926	-417	-835	
12	4210	3752	4299	3>1>2	12	2554	2490	2665	3>1>2	12	-206	388	-58	2
13	5012	4595	5160	3>1>2	13	3301	3292	3469	3>1>2	13	449	1120	649	2>3>1
14	5738	5359	5938	3>1>2	14	3978	4019	4192	3>2>1	14	1046	1785	1284	2>3>1
15	6397	6052	6648	3>1>2	15	4593	4679	4859	3>2>1	15	1588	2390	1877	2>3>1
16	6994	6680	7289	3>1>2	16	5151	5277	5459	3>2>1	16	2081	2940	2409	2>3>1
17	7535	7249	7870	3>1>2	17	5658	5821	6003	3>2>1	17	2529	3439	2893	2>3>1
18	8025	7765	8397	3>1>2	18	6117	6313	6498	3>2>1	18	2937	3894	3333	2>3>1
19	8469	8233	8874	3>1>2	19	6534	6761	6946	3>2>1	19	3308	4308	3733	2>3>1
20	8872	8656	9306	3>1>2	20	6912	7167	7353	3>2>1	20	3645	4684	4096	2>3>1
21	9237	9041	9698	3>1>2	21	7255	7535	7722	3>2>1	21	3952	5025	4427	2>3>1
22	9568	9389	10054	3>1>2	22	7566	7869	8057	3>2>1	22	4231	5336	4728	2>3>1
23	9867	9704	10376	3>1>2	23	7849	8172	8360	3>2>1	23	4484	5619	5002	2>3>1

Tabela 4.7 Valores da Expect-Variação, Calculados para  $A = (0,0 ; 0,20, 0,5 \text{ e } 1,0)$

#### MC - 4.8 Cálculo dos VPs (Análise Variacional)

Para calcular-se o Valor Presente dos projetos, utiliza-se a fórmula do método da Análise Variacional [19], partindo-se dos valores contidos no quadro 4.1.

Projeto 1			Projeto 2			Projeto 3		
n	VP min	VP max	n	VP min	VP max	n	VP min	VP max
1	-13470	-11094	1	-14366	-12971	1	-14474	-12491
2	-11398	-8241	2	-12158	-10049	2	-12615	-9064
3	-9603	-5574	3	-10199	-7360	3	-10952	-5938
4	-8008	-3126	4	-8439	-4909	4	-9452	-3099
5	-6578	-893	5	-6851	-2682	5	-8095	-524
6	-5291	1138	6	-5416	-660	6	-6868	1810
7	-4130	2983	7	-4119	1175	7	-5757	3926
8	-3081	4658	8	-2946	2839	8	-4752	5845
9	-2134	6179	9	-1885	4349	9	-3842	7584
10	-1277	7558	10	-926	5719	10	-3019	9160
11	-503	8809	11	-58	6961	11	-2274	10590
12	198	9944	12	726	8088	12	-1599	11885
13	831	10974	13	1436	9110	13	-989	13060
14	1403	11908	14	2078	10038	14	-437	14124
15	1921	12755	15	2658	10879	15	62	15090
16	2390	13523	16	3183	11643	16	514	15965
17	2813	14220	17	3657	12335	17	923	16759
18	3196	14852	18	4086	12964	18	1293	17478
19	3542	15425	19	4474	13534	19	1628	18130
20	3855	15945	20	4824	14052	20	1931	18722
21	4139	16417	21	5141	14521	21	2205	19258
22	4395	16845	22	5427	14947	22	2452	19745
23	4626	17233	23	5686	15334	23	2677	20186

Tabela 4.8 Valores de VPs, Método da Análise Variacional.

n	E(VP) 1	$\sigma$ 1	n	E(VP) 2	$\sigma$ 2	n	E(VP) 3	$\sigma$ 3
8	789	2234	8	-54	1670	8	546	3059
9	2023	2400	9	1232	1800	9	1871	3298
10	3140	2550	10	2396	1918	10	3071	3516
11	4153	2688	11	3451	2026	11	4158	3713
12	5071	2814	12	4407	2125	12	5143	3893
13	5902	2928	13	5273	2215	13	6035	4056
14	6656	3032	14	6058	2298	14	6844	4204
15	7338	3127	15	6769	2373	15	7576	4338
16	7956	3214	16	7413	2442	16	8240	4460
17	8516	3293	17	7996	2505	17	8841	4571
18	9024	3365	18	8525	2563	18	9386	4672
19	9484	3430	19	9004	2616	19	9879	4764
20	9900	3490	20	9438	2664	20	10326	4847
21	10278	3544	21	9831	2708	21	10731	4923
22	10620	3594	22	10187	2748	22	11099	4992
23	10930	3639	23	10510	2785	23	11431	5054

Tabela 4.8a Valores de  $E(VP)$  e  $\sigma(VP)$ , Análise Variacional.**MC 4.9 - Expectância-Variância, Aversão ao Risco (Análise Variacional)**

n	E(VP) 1	$\sigma$ 1	A	E(VP) 2	$\sigma$ 2	A	E(VP) 3	$\sigma$ 3	A	A max
8	789	2234	0,35	-54	1670	-0,03	546	3059	0,18	0,35
9	2023	2400	0,84	1232	1800	0,68	1871	3298	0,57	0,84
10	3140	2550	1,23	2396	1918	1,25	3071	3516	0,87	1,25
11	4153	2688	1,55	3451	2026	1,70	4158	3713	1,12	1,70
12	5071	2814	1,80	4407	2125	2,07	5143	3893	1,32	2,07
13	5902	2928	2,02	5273	2215	2,38	6035	4056	1,49	2,38
14	6656	3032	2,19	6058	2298	2,64	6844	4204	1,63	2,64
15	7338	3127	2,35	6769	2373	2,85	7576	4338	1,75	2,85
16	7956	3214	2,48	7413	2442	3,04	8240	4460	1,85	3,04
17	8516	3293	2,59	7996	2505	3,19	8841	4571	1,93	3,19
18	9024	3365	2,68	8525	2563	3,33	9386	4672	2,01	3,33
19	9484	3430	2,76	9004	2616	3,44	9879	4764	2,07	3,44
20	9900	3490	2,84	9438	2664	3,54	10326	4847	2,13	3,54
21	10278	3544	2,90	9831	2708	3,63	10731	4923	2,18	3,63
22	10620	3594	2,95	10187	2748	3,71	11099	4992	2,22	3,71
23	10930	3639	3,00	10510	2785	3,77	11431	5054	2,26	3,77

Tabela 4.9 Valores calculados para a Expectância-Variância (Análise Variacional).

**MC - 4.10 Hierarquização a Diferentes Níveis de Aversão ao Risco (Análise Variacional)**

Tomando-se arbitrariamente três diferente níveis de aversão ao risco, respeitando-se o limites máximos admitidos pelos projetos, e utilizando-se a equação da expectância-variância (3.1), calcula-se os valores de  $ev$ , para o intervalo de interesse ao níveis de aversão  $A = 0$ ,  $A = 0,5$  e  $A = 1$ , obtendo-se os valores constantes da tabela 4.7.

A=0,32				A=0,8				A=1,61						
n	Proj 1	Proj 2	Proj 3	Rank	n	Proj 1	Proj 2	Proj 3	Rank	n	Proj 1	Proj 2	Proj 3	Rank
8	74	-588	-432	1	8	-999	-1390	-1901		8	-2809	-2743	-4379	
9	1255	656	815	1>3>2	9	103	-208	-768	1	9	-1841	-1666	-3440	
10	2324	1782	1946	1>3>2	10	1100	862	258	1>2>3	10	-966	-692	-2590	
11	3293	2803	2970	1>3>2	11	2003	1830	1187	1>2>3	11	-175	189	-1821	2
12	4171	3727	3897	1>3>2	12	2820	2707	2029	1>2>3	12	541	986	-1124	2>1
13	4965	4564	4737	1>3>2	13	3560	3501	2791	1>2>3	13	1188	1706	-494	2>1
14	5685	5323	5498	1>3>2	14	4230	4220	3481	1>2>3	14	1773	2358	76	2>1>3
15	6337	6009	6188	1>3>2	15	4836	4870	4106	2>1>3	15	2303	2948	592	2>1>3
16	6928	6631	6812	1>3>2	16	5385	5459	4672	2>1>3	16	2782	3481	1059	2>1>3
17	7463	7195	7378	1>3>2	17	5882	5992	5184	2>1>3	17	3215	3963	1481	2>1>3
18	7947	7705	7891	1>3>2	18	6332	6475	5648	2>1>3	18	3607	4399	1864	2>1>3
19	8386	8167	8355	1>3>2	19	6740	6911	6068	2>1>3	19	3961	4793	2209	2>1>3
20	8784	8585	8775	1>3>2	20	7108	7307	6449	2>1>3	20	4281	5149	2522	2>1>3
21	9144	8964	9156	1>3>2	21	7442	7665	6793	2>1>3	21	4571	5471	2806	2>1>3
22	9470	9308	9501	1>3>2	22	7745	7989	7105	2>1>3	22	4833	5763	3062	2>1>3
23	9765	9619	9814	1>3>2	23	8018	8282	7388	2>1>3	23	5070	6026	3293	2>1>3

Tabela 4.10 Valores Calculados para Expect-Variância  $A = (0,0 ; 0,32 ; 0,80 ; 1,61)$ **MC - 4.11 - Hierarquização Difusa Com Indiferença ao Risco**

	Projeto 1	Projeto 2	Projeto 3	
n	M	M	M	Ranking
8	789	-54	546	1>3>2
9	2023	1232	1871	1>3>2
10	3140	2396	3071	1>3>2
11	4153	3451	4158	3>1>2
12	5071	4407	5143	3>1>2
13	5902	5273	6035	3>1>2
14	6656	6058	6844	3>1>2
15	7338	6769	7576	3>1>2
16	7956	7413	8240	3>1>2
17	8516	7996	8841	3>1>2
18	9024	8525	9386	3>1>2
19	9484	9004	9879	3>1>2
20	9900	9438	10326	3>1>2
21	10278	9831	10731	3>1>2
22	10620	10187	11099	3>1>2
23	10930	10510	11431	3>1>2

Tabela 4.11a Hierarquização para condição de Indiferença ao Risco .

### MC - 4.12 Comparação Entre os Métodos ( a, b, c, d )

AEX (d)			C&L [11] (a)					Chang [5] (b)			Park [5] (c)					
Eq. (4.7)			Eq. (3.2)					Eq. (3.3)			Eq. (3.5)					
n	M	M	M	Rank	K1	K2	K3	Rank	CH1	CH2	CH3	Rank	PK1	PK2	PK3	Rank
8	789	-54	546	1>3>2	0,487	0,447	0,476	1>3>2	51	36	47	1>3>2	977	670	928	1>3>2
9	2023	1232	1871	1>3>2	0,487	0,453	0,481	1>3>2	126	111	124	1>3>2	2234	1942	2217	1>3>2
10	3140	2396	3071	1>3>2	0,488	0,457	0,485	1>3>2	203	188	202	1>3>2	3371	3093	3384	1>3>2
11	4153	3451	4158	3>1>2	0,488	0,461	0,488	3>1>2	280	265	281	3>1>2	4401	4135	4441	3>1>2
12	5071	4407	5143	3>1>2	0,488	0,464	0,491	3>1>2	356	341	358	3>1>2	5334	5079	5398	3>1>2
13	5902	5273	6035	3>1>2	0,488	0,466	0,493	3>1>2	430	415	433	3>1>2	6180	5935	6266	3>1>2
14	6656	6058	6844	3>1>2	0,489	0,468	0,495	3>1>2	501	486	505	3>1>2	6945	6709	7051	3>1>2
15	7338	6769	7576	3>1>2	0,489	0,470	0,497	3>1>2	568	554	574	3>1>2	7638	7411	7762	3>1>2
16	7956	7413	8240	3>1>2	0,489	0,471	0,498	3>1>2	632	618	640	3>1>2	8266	8046	8406	3>1>2
17	8516	7996	8841	3>1>2	0,489	0,473	0,499	3>1>2	693	679	701	3>1>2	8834	8621	8989	3>1>2
18	9024	8525	9386	3>1>2	0,489	0,474	0,500	3>1>2	749	736	759	3>1>2	9350	9142	9518	3>1>2
19	9484	9004	9879	3>1>2	0,489	0,475	0,501	3>1>2	802	789	813	3>1>2	9815	9614	9996	3>1>2
20	9900	9438	10326	3>1>2	0,489	0,476	0,502	3>1>2	851	838	863	3>1>2	10238	10042	10430	3>1>2
21	10278	9831	10731	3>1>2	0,488	0,475	0,501	3>1>2	899	887	912	3>1>2	10651	10459	10853	3>1>2
22	10620	10187	11099	3>1>2	0,490	0,477	0,503	3>1>2	939	927	953	3>1>2	10967	10779	11178	3>1>2
23	10930	10510	11431	3>1>2	0,490	0,478	0,504	3>1>2	978	966	993	3>1>2	11282	11097	11501	3>1>2

Tabela 4.12 Comparação entre o método proposto (d) , com (a), (b) e (c), do Item 4.3.8 Cap.4.