

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESTUDO DE COMPORTAMENTO DINÂMICO  
DE SEMI-EIXO HOMOCINÉTICO COM O USO DE ANÁLISE MODAL

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

RODRIGO RIHL KNIEST

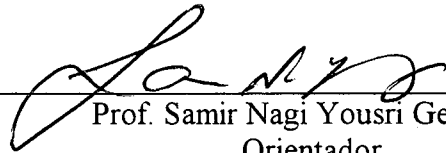
FLORIANÓPOLIS, ABRIL DE 1994

ESTUDO DE COMPORTAMENTO DINÂMICO  
DE SEMI-EIXO HOMOCINÉTICO COM O USO DE ANÁLISE MODAL

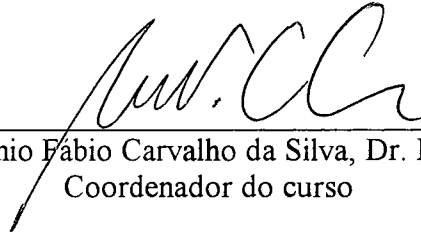
RODRIGO RIHL KNIEST

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO  
VIBRAÇÕES E RUÍDO, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.

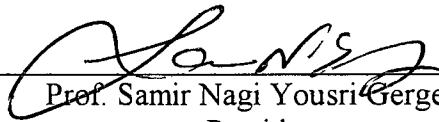


Prof. Samir Nagi Yousri Gerges, Ph.D.  
Orientador

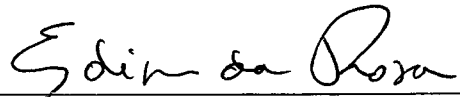


Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva, Dr. Eng. Mec.  
Coordenador do curso

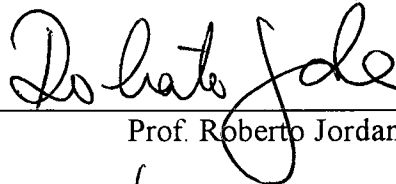
BANCA EXAMINADORA:



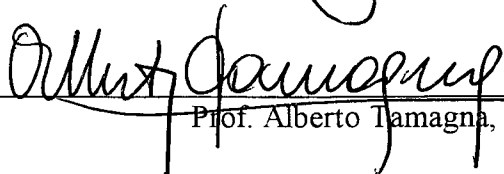
Prof. Samir Nagi Yousri Gerges, Ph.D.  
Presidente



Prof. Edison da Rosa, Dr. Eng.



Prof. Roberto Jordan, Dr.



Prof. Alberto Tamagna, M.Sc.

Ao meu pai e ao meu avô.

( in memorian )

"Em relação à ciência, sinto-me como uma criança que distrai-se fascinada com a beleza das conchas existentes na beira da praia, sem perceber o imenso oceano cheio de mistérios e encantos que se estende logo à frente esperando para ser desvendado."

Albert Einstein.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Samir N. Y. Gerges, pela orientação, ensinamentos, apoio e, principalmente, amizade sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

À ATH - Albarus Transmissões Homocinéticas Ltda., nas pessoas dos engenheiros Prof. Néelson Paulo Regner e Edgar Albarus, pelo apoio financeiro e motivacional durante todo o transcorrer do trabalho, mostrando em todos os momentos uma visão voltada para o amadurecimento profissional do corpo técnico da empresa.

Aos Prof. José João de Espíndola, Prof. Arcanjo Lenzi, Prof. Néelson Diógenes do Vale e Prof. Arno Blass, pelos ensinamentos transmitidos durante os créditos do curso e contatos extracurriculares.

Ao engenheiro Charles Fuerstenau, meu orientador dentro da ATH, pelo apoio e orientação sinceros que influíram decisivamente em todas as etapas deste trabalho.

Aos colegas Eduardo Alvarenga, Sílvio Duarte e Marco Reis pelo convívio intenso e edificante durante o curso.

Aos colegas da Engenharia Experimental da ATH, cujo apoio e auxílio colaborou em grande monta para a execução da parte experimental deste trabalho e das apresentações dos trabalhos técnicos relacionados no capítulo 7: João Lisboa, Nelson Tegel, Ricardo Gomes, Fabiano Gutierrez, Edgar Mattos, Lúcio Sacchet, Guilherme Etcheverry. Em especial aos colegas Carlos Krahe e Maurício de Oliveira Jr.

Ao Prof. Alberto Tamagna e ao Prof. Ademar Gilberto Groehs da Univ. Fed. do Rio Grande do Sul, ao Prof. Roberto Jordan da Univ. Fed. de Santa Catarina e ao Eng. Leônidas Coutinho da ATH pela orientação na abordagem analítica deste trabalho.

Ao Prof. David John Ewins, Ph.D., do Imperial College of Science and Technology e ao Eng. David Adams, Ph.D., da GKN-Technology, pela orientação no direcionamento deste trabalho.

Aos colegas da Univ. Fed. de Santa Catarina, pelas oportunidades de aprendizado durante o transcorrer deste trabalho, em especial a Jorge Cláudio da Silva Pinto, Geraldo Mollick Brandão, Hilton Penha Silva e Murilo Bonilha.

À minha família, pela compreensão e apoio durante todos estes anos dedicados a este trabalho, em especial ao meu pai e ao meu avô, os quais partiram desta vida sem presenciar o final deste trabalho, mas certamente influíram enormemente na determinação de concluí-lo.

À Ana Maria Cardoso, pelo apoio incondicional mesmo nos momentos mais difíceis ( e que não foram poucos ).

## ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - Objetivo do estudo	1
1.2 - Teoria básica das juntas homocinéticas	5
1.3 - Importância do comportamento dinâmico do semi-eixo ao conforto vibro-acústico do veículo - motivação do trabalho	9
1.3.1 - Vibrações geradas pelo semi-eixo	10
1.3.2 - Vibrações transmitidas pelo semi-eixo	11
1.4 - Descrição dos capítulos do trabalho e técnica usada	11
2 - "SOFTWARE BENCHMARKING"	13
2.1 - Objetivo	13
2.2 - Revisão teórica: análise modal experimental	14
2.2.1 - Verificação preliminar dos dados	14
2.2.2 - Análise modal experimental	16
2.2.3 - Observações sobre sistemas não lineares	27
2.2.4 - Apresentação dos resultados	28
2.3 - Comparação de análise modal experimental manual e PCMODAL	30
2.3.1 - Primeiro contato com o software	30
2.3.2 - Montagem do ensaio experimental	32
2.3.3 - Verificação preliminar dos dados	32
2.3.4 - Análise modal experimental manual - cálculos envolvidos	35
2.3.5 - Definição do nível de discretização do modelo	42
2.3.6 - Análise modal experimental manual - resultados obtidos	43
2.3.7 - Análise efetuada com o software PCMODAL	48
2.3.8 - Conclusões gerais obtidas com as análises efetuadas	51
3 - IDENTIFICAÇÃO DA EXCITAÇÃO VEICULAR	60
3.1 - Objetivo	60

3.2 - Revisão teórica	60
3.2.1 - Motor monocilíndrico	61
3.2.2 - Motor multicilíndrico genérico	64
3.2.3 - Motor de quatro cilindros em linha	69
3.3 - Medições efetuadas em campo	71
3.3.1 - Instrumentação utilizada	71
3.3.2 - Resultados obtidos	74
3.4 - Conclusões finais	79
4 - IDENTIFICAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO SISTEMA	80
4.1 - Introdução	80
4.2 - Resultados obtidos com o semi-eixo em condição livre-livre	81
4.2.1 - Influência da faixa de frequência na análise	81
4.2.2 - Influência da densidade populacional da matriz modal	84
4.2.3 - Definição da excitação de banda larga	84
4.2.4 - Influência do nível de excitação pseudo-randômica	87
4.2.5 - Influência do nível de excitação senoidal	90
4.2.6 - Influência do tipo de excitação	92
4.2.7 - Influência da posição da junta deslizante	93
4.2.8 - Influência do local da excitação	95
4.3 - Resultados obtidos com o semi-eixo instalado no veículo	96
4.3.1 - Influência do torque aplicado ao sistema	96
4.3.2 - Influência da orientação da medição	100
4.3.3 - Influência da disposição espacial do componente	103
4.3.4 - Influência do nível de excitação utilizada	104
4.3.5 - Verificação das alterações dos parâmetros dinâmicos do semi-eixo homocinético com o uso no veículo	107
4.4 - Conclusões finais da análise	121
5 - DESENVOLVIMENTO DE UMA BANCADA DE TESTE	125



5.1 - Introdução	125
5.2 - Fundamentos	125
5.3 - Definição das condições de contorno no veículo	126
5.3.1 - Procedimento para medição das condições de contorno	126
5.3.2 - Resultados e conclusões parciais sobre as condições de contorno	128
5.3.3 - Conclusões finais sobre as condições de contorno	144
5.4 - Projeto da bancada de teste	146
5.4.1 - Introdução	146
5.4.2 - Parâmetros de controle na bancada de teste	146
5.4.3 - Memorial descritivo	149
5.4.4 - Confecção da bancada de teste	150
5.5 - Resultados obtidos com a bancada de teste	158
5.5.1 - Bancada de teste antes de implementar melhorias estruturais	158
5.5.2 - Bancada de teste após a implementação de melhorias estruturais	165
5.6 - Conclusão	166
<b>6 - OTIMIZAÇÃO DE MODELOS ESTRUTURAIS DINÂMICOS</b>	<b>177</b>
6.1 - Introdução	177
6.2 - Revisão teórica	178
6.2.1 - Geração zero: validação de modelo teórico	178
6.2.2 - Primeira geração: baseados em propriedades modais	187
6.2.3 - Segunda geração: baseados em propriedades modais	191
6.2.4 - Terceira geração: baseados em funções de resposta	203
6.2.5 - Quarta geração: baseados em séries temporais	209
6.3 - Particularidades da otimização de modelos analíticos dinâmicos	209
6.3.1 - Comparação de autovetores reais e complexos	209
6.3.2 - Limitações do modelo experimental	210
6.3.3 - Identificação das propriedades de amortecimento em estruturas	214
6.4 - Exemplos numéricos	230

6.4.1 - Exemplo numérico artificial	230
6.4.2 - Exemplo numérico real simplificado	235
6.4.3 - Exemplo numérico real: semi-eixo homocinético	239
7 - CONCLUSÕES FINAIS E NOVAS PERSPECTIVAS	245
7.1 - Introdução	245
7.2 - Resumo das conclusões obtidas neste estudo	246
7.3 - Novas perspectivas	251
REFERÊNCIAS	253
ANEXOS	258

## SIMBOLOGIA

$\{x(t)\}$	»	Vetor de deslocamentos (variável com o tempo).
$\{\dot{x}(t)\}$	»	Vetor de velocidades (variável com o tempo).
$\{\ddot{x}(t)\}$	»	Vetor de acelerações (variável com o tempo).
$\{f(t)\}$	»	Vetor de forças externas (variável com o tempo).
PMS	»	Ponto morto superior do movimento de um pistão.
$X_p$	»	Deslocamento do pistão desde o ponto morto superior.
$\theta$	»	Ângulo de virabrequim desde o ponto morto superior.
R	»	Comprimento do braço do virabrequim.
L	»	Comprimento da biela.
$\beta$	»	Ângulo entre a biela e o eixo do cilindro.
$F_r$	»	Força de desbalanceamento alternativo.
$M_r$	»	Momento de desbalanceamento alternativo.
$W_g/g$	»	Massa de deslocamento alternativo.
a	»	Distância dos cilindros ao primeiro.
$\gamma_c$	»	Metade do ângulo do banco de cilindros (motor em "V").
$P_o$	»	Força normal à área de contato de Hertz (N).
Md	»	Momento (torque) aplicado à junta (Nm).
R	»	Raio primitivo da junta (mm).
$\delta$	»	Ângulo de contato transversal na pista (°).
$\gamma$	»	Ângulo de inclinação das pistas em relação ao eixo de simetria da junta (°).
e	»	Deslocamento dos centros de curvatura longitudinal das pistas da ponta de eixo e do A.I.R. (mm).
$\alpha$	»	Ângulo de deslocamento dos centros de curvatura (°).
$\rho$	»	Curvatura da pista (mm).
$d_e$	»	Diâmetro da esfera da junta homocinética (mm).
a	»	Semi-diagonal maior da elipse de pressão (mm).

$b$	»	Semi-diagonal menor da elipse de pressão (mm).
$E$	»	Módulo de elasticidade do material ( $N/mm^2$ ).
$\delta$	»	Gradiente de Poisson (adimensional).
$S_m$	»	Pressão média da elipse de pressão de Hertz ( $N/mm^2$ ).
$K_{art}$	»	Rigidez de articulação de junta homocinética (Nm).
$K_E$	»	Rigidez efetiva da estrutura.
$M_E$	»	Massa efetiva da estrutura.
$\zeta_E$	»	Amortecimento efetivo da estrutura (%).
$F_{ns}$	»	Frequência natural de sustentação (Hz).
$I$	»	Momento de inércia da seção ( $m^4$ ).
$l$	»	Vão entre os apoios (m).
$b$	»	Dimensão da base (m).
$h$	»	Dimensão da altura (m).
$m_l$	»	Massa linear da viga (Kg/m).
$x$	»	Índice para dados experimentais.
$a$	»	Índice para dados analíticos.
$r$	»	Índice para dados relativos ao r-ésimo modo.
$1$	»	Índice para modos medidos ou graus de liberdade dominantes.
$2$	»	Índice para modos não medidos ou graus de liberdade escravos.
$n_1$	»	Número de graus de liberdade dominantes.
$n_2$	»	Número de graus de liberdade escravos.
$n$	»	Número total de graus de liberdade.
*	»	Indicativo de dado pseudo-gerado computacionalmente ou suavizados.
$w_r$	»	Autovalor para o r-ésimo modo.
$s_r$	»	Autovalor complexo para o r-ésimo modo.
$(\phi)_{i,r}$	»	i-ésimo elemento do autovetor normalizado pela massa do r-ésimo modo.
$\{\phi\}$	»	Autovetor normalizado pela massa.
$[\Phi]$	»	Matriz de autovetores normalizados pela massa.

$\{v\}$	»	Vetor de variáveis dependentes.
$[\alpha \Phi_{11}^P]^{-1}$	»	Partição inversa da matriz analítica de autovetores.
[MAC]	»	Matriz do critério de confiança modal (modal assurance criterion).
M	»	Número total de modos da estrutura.
$m_0$	»	Número de modos correlacionados.
m	»	Número total de autovetores considerados.
[M]	»	Matriz de massa.
[K]	»	Matriz de rigidez.
[H]	»	Matriz de amortecimento hysterético.
[C]	»	Matriz de amortecimento viscoso.
$[Z_a(w)]$	»	Matriz de impedância analítica do sistema.
$[Z_x(w)]$	»	Matriz de impedância experimental do sistema.
$[EZ(w)]$	»	Matriz de erro de impedância = $[Z_x(w)] - [Z_a(w)]$
$[E\alpha(w)]$	»	Matriz de erro de receptância = $[\alpha_x(w)] - [\alpha_a(w)]$
$n_a$	»	Número total de graus de liberdade no modelo analítico.
$n_x$	»	Número total de graus de liberdade no modelo experimental.
$[\Phi']$	»	Autovetor otimizado.
$[K']$	»	Matriz de rigidez otimizada.
$[M']$	»	Matriz de massa otimizada.
$[EK]$	»	Matriz de erro de rigidez.
$[EM]$	»	Matriz de erro de massa.
$u$	»	Deslocamento (m).
$\dot{u}$	»	Velocidade (m/s).
$\ddot{u}$	»	Aceleração (m/s <sup>2</sup> ).
$\{y\}$	»	Vetor de estado incluindo $u$ e $\dot{u}$ .
$\zeta_r$	»	Fator de amortecimento viscoso do modo r.
$[K^R]$	»	Matriz reduzida de rigidez.
$[M^R]$	»	Matriz reduzida de massa.

- $[\Phi^R]$  » Matriz reduzida de autovetores.  
 $[\delta]$  » Matriz desvio  $\cong [I]$ .  
 $w_r$  » Freqüência natural (rad/s).  
 $w_{Dr}$  » Freqüência natural amortecida (rad/s).  
 $[K_C]$  » Matriz de rigidez complexa dada por  $[K_X]+i[H]$ .  
 $\alpha(w)$  » Receptância.  
 $Y(w)$  » Mobilidade.  
 $A(w)$  » Inertância.  
 $\cdot$  » Derivada em relação ao tempo.  
 $A_r$  » Constante ou coeficiente modal do r-ésimo modo.  
 $M_{jk}^R$  » Massa residual.  
 $K_{jk}^R$  » Rigidez residual.  
 $[\Psi]$  » Matriz modal de autovetores não normalizados.  
 $[\Phi]$  » Matriz modal de autovetores normalizados em relação à massa.  
 $\sim$  » Estimativa atualizada.  
 ${}_r D_{jk}$  » Diâmetro do círculo de Nyquist para o r-ésimo modo com excitação no nodo j e resposta obtida no nodo k.  
 $m_r$  » Massa generalizada (ou modal) de cada modo r.  
 $k_r$  » Rigidez generalizada (ou modal) de cada modo r.

## **RESUMO**

Devido ao constante avanço tecnológico da indústria automobilística, o desempenho vibratório de componentes veiculares atualmente ocupa destacada posição no aspecto de segurança e conforto. Neste contexto, o semi-eixo homocinético apresenta-se como um dos itens que merece uma atenção especial já a nível de projeto, caso se deseje evitar surpresas desagradáveis no lançamento de um veículo novo, num mercado competitivo e cada vez mais exigente.

Pesquisas isoladas nesta área são encontradas em publicações técnicas, porém, via de regra, carecem de uma abordagem sistêmica com o objetivo de investigar o comportamento dinâmico deste componente e esclarecer as suas causas.

Neste trabalho, o comportamento dinâmico de um semi-eixo homocinético, adotado como exemplo típico da aplicação em veículo de tração dianteira, é investigado com o uso da técnica de análise modal. O enfoque dado aborda a principal fonte de problemas vibratórios: a primeira ressonância estrutural transversal.

Inicialmente, é apresentada a verificação da validade de usar um software de análise modal experimental comercial neste componente complexo, com a comparação direta a quatro metodologias distintas de análise modal aplicadas manualmente.

A abordagem experimental deste trabalho identifica o nível e o tipo de excitação existentes no veículo e os parâmetros que influem no fenômeno em análise. Com estas informações, torna-se possível definir um experimento representativo para simular, em laboratório, o fenômeno em análise.

A abordagem analítica desenvolvida aplica uma técnica de otimização de modelos teóricos com o uso de dados experimentais, de forma a permitir que um modelo de elementos finitos possa representar o fenômeno em análise, desenvolvendo uma rotina computacional dedicada ao caso abordado.

Por fim, o conhecimento adquirido é aplicado no projeto e implementação de uma bancada de teste que simula as condições de contorno e demais parâmetros influentes impostos pelo veículo ao semi-eixo homocinético.

## **ABSTRACT**

Due to constant technological advances in the automotive industry, the vibratory performance of the automotive parts became a driving parameter of design concerning safety and comfort. In this context, the homocinetic half-shaft appears as a component that deserves a special care at the project stage in order to avoid unpleasant surprises when a new vehicle is launched to an increasingly competitive and demanding market.

Isolated researches in this field can be found in technical publications, but they usually lack a systematic approach with the purpose of investigating the dynamic behaviour of this component and clarifying its causes. In this present work, the dynamic behaviour of a typical homocinetic half-shaft on a front wheel driven vehicle is studied using the modal analysis technique. The main source of vibratory problem is focused on this approach: the first bending resonance.

The first part of this work presents the verification of the commercial software available in order to get confidence about its performance when applied to this specific complex mechanical component. A benchmarking against four manual methodologies is performed.

The experimental approach of this work identifies the vehicle excitation that occurs when the half-shaft is installed and the driving parameters of the phenomenon under analysis. Using this background, it is possible to determine a representative experiment that simulates the phenomenon in laboratory.

The analytical approach applies the modal updating technique using experimental data in order to allow the development of a finite element model to simulate the phenomenon. A dedicated subroutine is developed and tested against three different examples of increasing complexity.

At last, the acquired knowledge is applied to develop and to implement a teste rig that simulates all the driving parameters imposed by the vehicle concerning this phenomenon.



# Capítulo 1

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### **1.1) Objetivo do estudo:**

Este trabalho visa analisar, de forma sistemática, o comportamento dinâmico do sistema mecânico denominado semi-eixo homocinético, o qual cumpre a função de transmitir, de maneira suave e contínua, o movimento rotacional fornecido pelo diferencial do conjunto moto-propulsor de veículo de tração dianteira na forma de torque às rodas motrizes do veículo.

Conceitualmente, o componente permite a transmissão de movimento de rotação entre eixos não alinhados (através de ângulos nas juntas homocinéticas) e variação da distância relativa dos mesmos (através de deslocamento na junta homocinética deslizante) sem afetar o movimento, ou seja, o movimento de rotação obtido na saída do componente é idêntico ao de entrada.

Para cumprir esta função, o semi-eixo homocinético (ou simplesmente semi-eixo) é constituído pelos seguintes componentes:

a) Junta homocinética fixa (também conhecida como ponta-de-eixo ou junta externa devido ao fato de ser conectada ao cubo da roda ou ainda como junta fixa por questão de simplicidade): constituída por um anel interno, seis esferas, uma gaiola esférica e uma ponta-de-eixo (ou sino), ela apresenta a capacidade de permitir ângulos de até  $45^\circ$  e deslocamento axial nulo devido ao formato longitudinal esférico das pistas onde as esferas executam a função de transmitir os esforços entre as demais peças. Estas características permitem o movimento angular de esterçamento das rodas, possibilitando a dirigibilidade do veículo de tração dianteira (em especial em manobras com pequeno raio de giro).

b) Junta homocinética deslizante (também conhecida como junta interna devido à sua localização junto à saída de torque do diferencial ou ainda como junta deslizante por simplicidade): constituída por um anel interno, seis esferas, uma gaiola e um anel externo (ou bolacha), ela apresenta a capacidade de permitir ângulos de até  $22^\circ$  e deslocamento axial máximo

de 50 milímetros devido ao formato longitudinal reto e inclinado das pistas, onde as esferas executam a função de transmitir os esforços. Estas características permitem o movimento relativo entre o cubo da roda e a saída do diferencial decorrente do movimento do sistema de suspensão do veículo e do conjunto moto-propulsor sobre os coxins elásticos.

c) Eixo de conexão (ou também eixo de ligação, eixo intermediário ou simplesmente eixo): cumpre a função de transmitir o movimento (torque) entre os anéis internos das duas juntas homocinéticas, às quais está conectado por estrias longitudinais ("splines" de acoplamento). Pode ser manufaturado em eixo maciço usinado ou trefilado e conformado, eixos maciços com furação profunda (trepanados), soldados por fricção ou mesmo conformados por processo a morno (processo "swaging" de obtenção de eixo tubular monobloco). Independentemente do processo utilizado, o critério de definição de seu desenho a nível de projeto, até poucos anos, se limitava a dimensões de montagem ("lay-out" do sistema de transmissão de força do veículo) e resistência mecânica estática e de fadiga aos esforços impostos pela motorização.

d) Sistema de lubrificação e vedação das juntas: para cada junta existe um projeto específico de adequação do elemento lubrificante (graxa) usado para reduzir o atrito entre as partes internas móveis e prolongar a vida útil dos componentes e do sistema de vedação, composto por manga de material elástico (também conhecida por sanfona, coifa ou bota) e fitas de fixação, que objetivam isolar o interior da junta do meio ambiente (poeira, água, etc...) e reter adequadamente a graxa. Devido à alta inter-relação destes dois sistemas, a compatibilidade e adequação deles é relevante a ponto de serem considerados pertencentes a um projeto integrado.

Para facilitar a visualização deste sistema mecânico, a seguir são apresentadas as seguintes figuras:

Figura 1.1: Vista espacial da aplicação de típico par de semi-eixos homocinéticos em veículo de tração dianteira.

Figura 1.2: Vista frontal da aplicação de semi-eixo homocinético típico.

Figura 1.3: Representação em corte de um semi-eixo homocinético típico.

Figura 1.4: Junta fixa típica desmontada.

Figura 1.5: Junta deslizante típica desmontada.

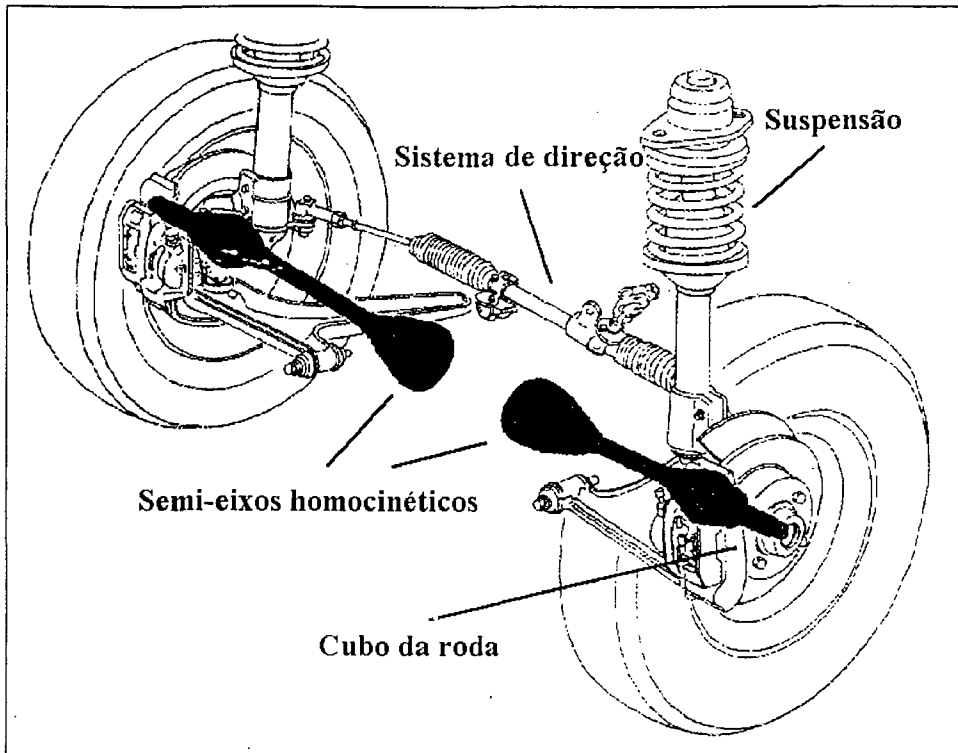


Figura 1.1: Vista espacial da aplicação de par de semi-eixos homocinéticos em veículo de tração dianteira.

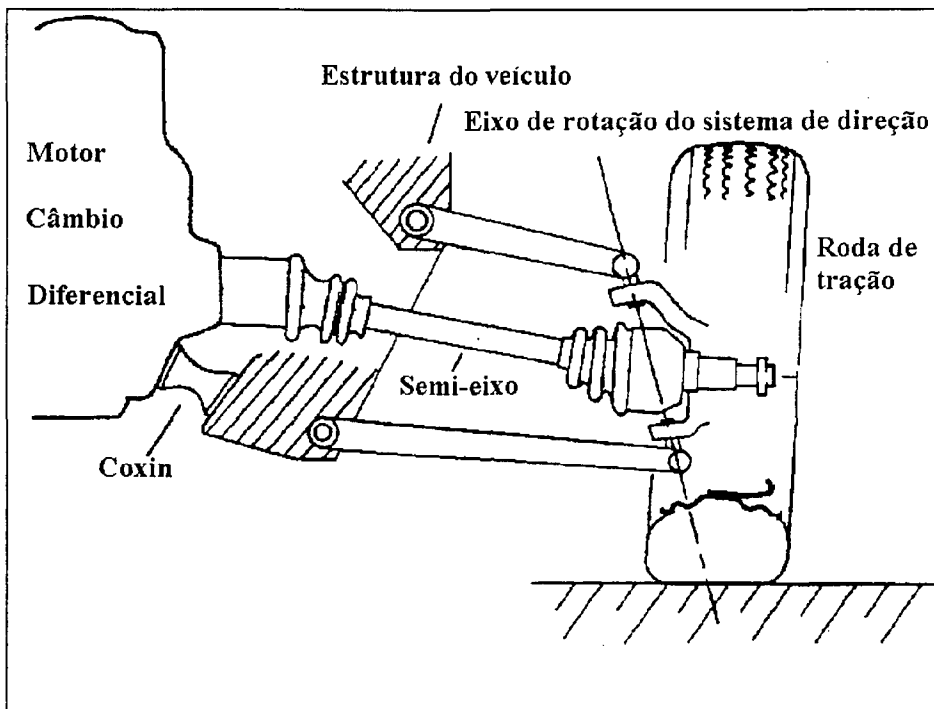


Figura 1.2: Vista frontal esquemática da aplicação de semi-eixo.

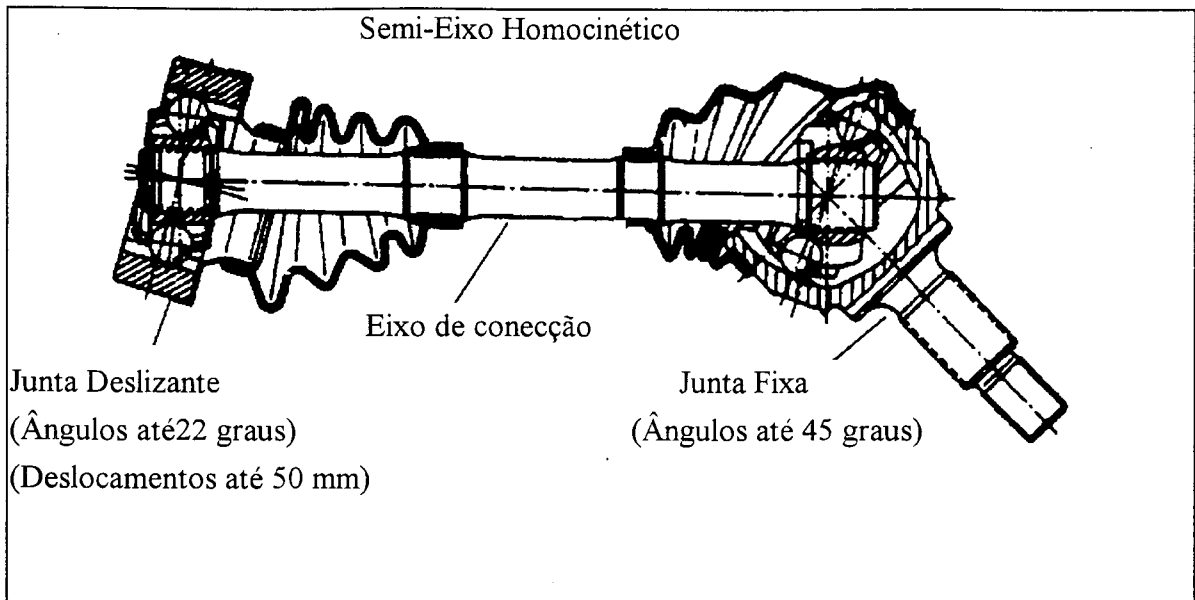
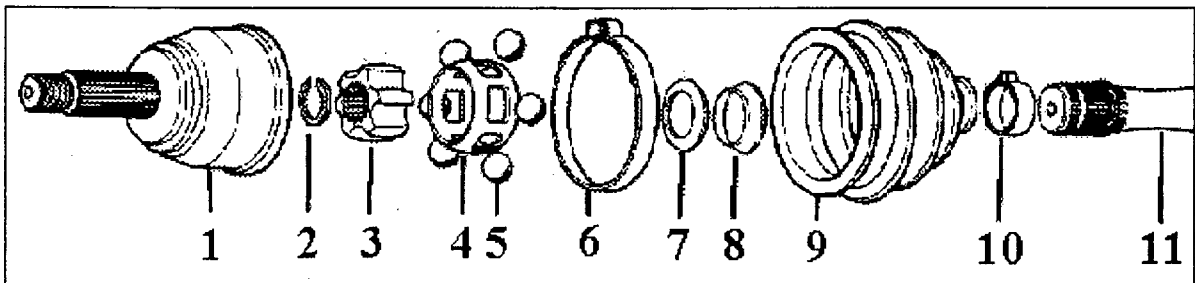
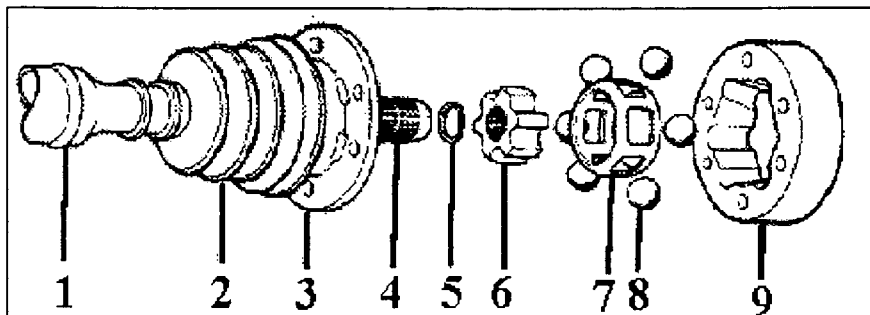


Figura 1.3: Representação de semi-eixo homocinético típico e nomenclatura.



- |                       |               |                      |
|-----------------------|---------------|----------------------|
| 1) Ponta de eixo      | 2) Anel-trava | 3) Anel interno R    |
| 4) Gaiola             | 5) Esferas    | 6) Abraçadeira maior |
| 7) Anel intermediário | 8) Mola-prato | 9) Manga de borracha |
| 10) Abraçadeira menor |               | 11) Eixo             |

Figura 1.4: Junta fixa típica e seus componentes.



- |                       |                      |                     |
|-----------------------|----------------------|---------------------|
| 1) Eixo               | 2) Manga de borracha | 3) Suporte da manga |
| 4) Entalhado (spline) | 5) Anel-trava        | 6) Anel interno V   |
| 7) Gaiola             | 8) Esferas           | 9) Anel externo V   |

Figura 1.5: Junta deslizante típica e seus componentes.

Deve ser salientado que o semi-eixo homocinético pode ter outras aplicações além da descrita acima. Em veículos de tração traseira de suspensão independente adota-se, comumente, semi-eixos homocinéticos compostos por duas juntas deslizantes, uma vez que não ocorre o movimento angular de esterçamento da roda e o deslocamento axial total do semi-eixo, assim constituído, permite movimentos mais amplos do sistema de suspensão e do diferencial do veículo. Além disto, aplicações não veiculares são menos comuns, porém existem (máquinas estacionárias em geral, aviação, navegação, dispositivos, etc...).

Outro aspecto a ser enfatizado é que as juntas homocinéticas apresentam várias soluções distintas de projeto, cujas peculiaridades objetivam atender necessidades específicas de cada aplicação ou processo de manufatura economicamente vantajoso, de acordo com características da região onde a indústria se localiza. Estas peculiaridades vão desde sistemas alternativos de fixação de juntas ao veículo (por exemplo, a junta deslizante pode ser do tipo disco parafusada no flange do diferencial como a apresentada acima ou com ponteira dotada de estrias longitudinais externas ou internas e a junta fixa pode ser fixada ao cubo da roda por meio de porca ou de parafuso) até soluções alternativas de projeto dos componentes internos que definem conceitos distintos de mecanismos, permitindo o funcionamento homocinético das juntas (por exemplo, existem juntas fixas e deslizantes que utilizam roletes apoiados em três espigas cilíndricas radiais no lugar das esferas e pistas longitudinais descritas anteriormente). Como medida de precaução no sentido de não tornar esta sucinta introdução cansativa e confusa, a descrição e o trabalho são limitados ao semi-eixo homocinético descrito anteriormente numa aplicação específica (GOL a gasolina motor AP1600 ano 1988) que apresenta todos os requisitos para ser considerado um semi-eixo homocinético típico e consagrado como solução adequada à aplicação.

### **1.2) Teoria básica das juntas homocinéticas**

Seria, no mínimo, estranho apresentar um trabalho sobre semi-eixo homocinético que pretenda esclarecer suas peculiaridades dinâmicas sem descrever, mesmo que de forma superficial e genérica, a base do funcionamento das juntas homocinéticas.

Segundo Wagner [1] e Orain [2], relações básicas podem ser estabelecidas de forma a apresentar as condições matemáticas necessárias para a transmissão homocinética (ou seja, com velocidade constante) quando uma junta opera em ângulo:

a) O plano de contato entre os elementos condutor e conduzido (ou membros de entrada e de saída do movimento) de uma junta homocinética deve se manter fixo no espaço.

b) O plano de contato deve ser perpendicular ou normal ao plano definido pelos eixos de rotação dos elementos condutor e conduzido da junta.

c) O plano de contato deve formar um ângulo relativo a ambos os elementos condutor e conduzido equivalente à metade do ângulo total da junta. Este ângulo é comumente definido como bissetor ao ângulo formado pelos eixos dos membros condutor e conduzido. Este plano recebe o nome de "plano homocinético", "plano do ângulo bissetor" ou "plano de velocidade constante". Portanto, o plano homocinético é aquele descrito por todos os pontos de contato de uma junta que produz uma relação unitária entre a velocidade angular dos elementos condutor e conduzido. Este ângulo bissecta o ângulo obtuso formado pelos eixos de rotação dos elementos condutor e conduzido e é perpendicular ao plano que contém estes eixos.

Portanto, o requisito básico do homocinetismo é que todos os pontos de contato entre os membros condutor e conduzido devem se localizar em todos os instantes no plano homocinético, durante toda a faixa de ângulos que a junta deve atender. Como consequência imediata, é óbvio que nenhum ponto do plano homocinético pode ser conectado rigidamente ou ser parte integrante dos membros condutor e conduzido de uma junta que pretenda atender ao requisito de homocinetismo.

O princípio básico de operação de uma junta homocinética simplificada está apresentada na figura 1.6 abaixo.

Ambos os eixos 2 e 3 tem braços que estão dobrados de um ângulo  $\Psi$ . Quando as linhas de simetria dos eixos são deslocadas, devido a um ângulo  $\theta$  formado pela junta, o ponto de contato entre os eixos (ponto B) recai no plano desta folha de papel e no plano bissetor descrito anteriormente. A velocidade do ponto B enquanto pertencente ao eixo 2, coincide com a do ponto B enquanto pertencente ao eixo 3. As perpendiculares aos eixos (BC e BD) são iguais.

Devido à simetria, o ponto de contato  $B$  se localizará no plano bissetor para todas as demais posições de rotação. O raio de giro do ponto de contato  $B$  sempre será igual para ambos os membros e, por consequência, as velocidades angulares dos dois eixos serão idênticas em todos os ângulos.

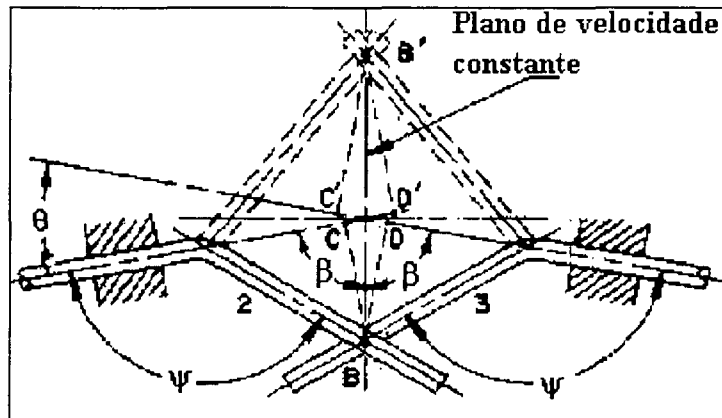


Figura 1.6: Junta homocinética esquemática.

Juntas de esferas de concepções construtivas variadas têm sido o meio mais comum de obter na prática o homocinetismo utilizando o princípio do plano bissetor. Neste tipo de junta, o plano homocinético passa através do centro instantâneo de rotação da junta e bissecta o ângulo entre os eixos de rotação dos membros condutor e conduzido a todos os instantes. O centro instantâneo de rotação de um corpo é definido como sendo um ponto sobre o qual o movimento do corpo, a qualquer instante, é de rotação pura e nenhum movimento de translação é necessário para reproduzir o movimento global apresentado pelo corpo. A intersecção dos eixos de rotação localizam o centro geométrico da junta, portanto, para uma junta de esferas, o seu centro instantâneo de rotação coincide com seu centro geométrico sempre que o plano de contato é mantido no plano bissetor.

Com o objetivo de funcionar homocineticamente, uma junta de articulação que utiliza esferas como membros condutores intermediários deve posicionar as esferas no plano bissetor. Estas esferas, uma vez acondicionadas em pistas de rolamento existentes nos elementos condutor e conduzido, devem permitir deslocamentos angulares relativos entre estes membros e, quando



guiadas adequadamente por algum tipo de sistema auto centrante, deverão manter contato com estes membros através do plano homocinético.

Vários tipos de juntas de esferas usam algum tipo de projeto com o qual as pistas se cruzam de forma que o ponto de intersecção sempre caia no plano bissetor. Pode ser demonstrado que qualquer tipo construtivo de pista atinge este resultado caso elas apresentem as mesmas características geométricas, porém invertidas. As pistas podem ser curvas ou retas desde que não sejam concêntricas. Usualmente é aplicado o termo "simetria especular" para descrever esta condição básica de projeto.

O mesmo princípio que produz o contato através do plano bissetor normalmente permite o deslocamento axial ou define a limitação a deslocamentos axiais. No local de intersecção das pistas, o movimento axial produz o mesmo tipo de alteração na geometria que quando operando sob a aplicação de um ângulo. Esta geometria impõe um movimento às esferas de uma amplitude da metade da distância relativa percorrida entre os membros condutor e conduzido.

No caso específico da junta fixa em estudo neste trabalho, a geometria das pistas existentes no anel interno e no anel externo (vide figura 1. 4 ) é curva, tanto no sentido transversal como longitudinal, formando uma seção toroidal. Isto impede o movimento axial relativo entre os membros condutor e conduzido, porém habilita ângulos de grande amplitude. No plano longitudinal as pistas do anel interno e da ponta de eixo não são concêntricas, apresentando uma defasagem proposital de forma a efetuar um efeito de cunha na esfera, que tende a expulsá-la do interior da junta ao ser aplicado um torque. Graças a esta peculiaridade geométrica e à existência da gaiola que mantém as esferas num mesmo plano espacial, ocorre o efeito de posicionamento das esferas no plano homocinético durante a articulação da junta.

No caso da junta deslizante em análise, as pistas são retas no sentido longitudinal e pertencem a planos paralelos, porém apresentam uma inclinação relativa que faz com que o posicionamento da esfera seja único. Devido a isto, existe a liberdade de deslocamento axial relativo entre o elemento condutor e o conduzido com a penalização da capacidade de articulação da junta (a qual é inferior ao caso da junta fixa). No sentido transversal, a pista é curva de forma a acomodar a esfera de maneira similar à junta fixa. Devido ao fato de que a inclinação das pistas é

alternada, temos que ao ser aplicado um torque sobre a junta, aparecem esforços que tendem a mover três esferas para fora e três esferas para dentro da junta. A existência da gaiola mantém as esferas no interior da junta em um plano espacial e este efeito permite a centragem da gaiola, independentemente do ângulo e do deslocamento impostos à junta.

### **1.3) Importância do comportamento dinâmico do semi-eixo ao conforto vibro-acústico do veículo - motivação do trabalho.**

A importância deste componente no conforto vibro-acústico do veículo torna-se evidente quando observamos as principais fontes de vibração e, conseqüentemente, ruído no veículo, ilustrados na figura 1.7 .

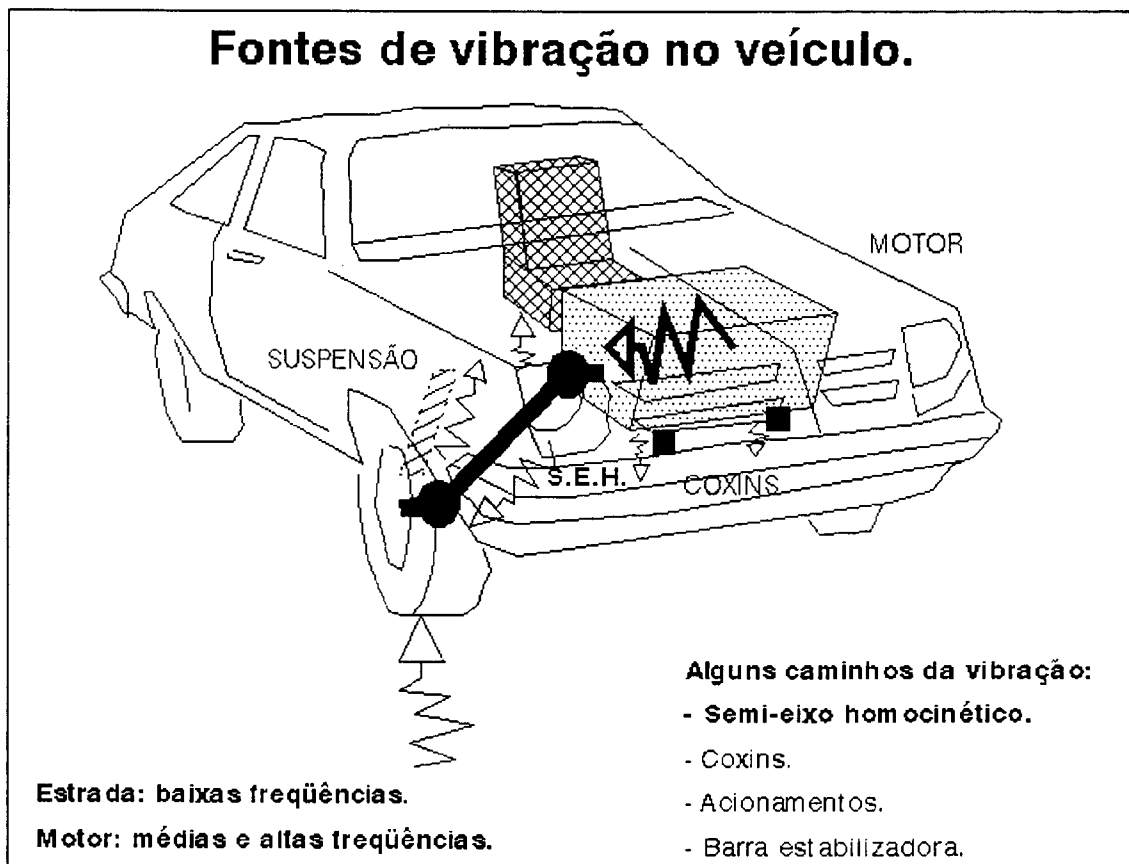


Figura 1.7: Representação das principais fontes de vibração do veículo.

Sendo o motor a fonte principal, temos que o semi-eixo homocinético é um dos caminhos possíveis de transmissão da vibração para a estrutura do veículo e, em consequência, para todos os passageiros. Isto é devido ao fato de que o semi-eixo (assim como os coxins do motor, a barra estabilizadora, os acionamentos do veículo, etc) é um dos elos físicos de ligação entre o motor e o restante do veículo.

Com o aprimoramento da técnica de projetar veículos cada vez mais potentes, mais leves (por questões de performance e economia) e mais confortáveis, a estrutura do veículo vem tornando-se cada vez mais sensível a vibrações de frequências mais elevadas, sendo imperativo atacar não apenas as causas (desenvolvendo motores e mecanismos que gerem menos vibração) como também os meios de propagação da energia vibratória pela estrutura.

Outro aspecto muito importante é o nível de exigência do cliente final (o usuário) em relação ao nível de vibração e ruído do veículo. A cada geração de veículos lançados no mercado, o nível de satisfação torna-se cada vez mais exigente, tornando barulhos anteriormente aceitáveis em fatores importantes de sucesso ou fracasso do produto no mercado. Ou seja, o comprador não se satisfaz mais com veículos que funcionem, não apresentem falhas, apresentem bom desempenho e dirigibilidade e sejam seguros, mas exige também bons níveis de conforto vibro-acústico.

No que tange ao semi-eixo homocinético, existem basicamente dois tipos de fenômenos vibratórios associados ao seu funcionamento:

### **1.3.1) Vibrações geradas pelo semi-eixo:**

Neste caso o componente age como um gerador ativo da vibração devido ao seu funcionamento inadequado (juntas com defeitos de projeto ou produção que ocasionam não homocinetismo ou simples desbalanceamento do conjunto) ou infeliz casamento de impedância com outros componentes do veículo acoplados nas proximidades (por exemplo, no caso de ressonância próxima do sistema de suspensão ou propulsão com o semi-eixo causando o chamado "beating-noise" - batimento ou modulação). Neste caso, cada tipo de problema apresenta características singulares e torna inviável um estudo generalizado mais amplo.

### **1.3.2) Vibrações transmitidas (ou até amplificadas) pelo semi-eixo:**

Neste caso o semi-eixo transmite, de forma inapropriada, as vibrações geradas pelo conjunto motor do veículo à estrutura do mesmo devido ao seu comportamento dinâmico não ser adequado. Esta é, sem dúvida, a causa mais frequente dos problemas vibratórios relacionados ao semi-eixo, sendo o caso mais comum a coincidência da primeira ressonância transversal do componente instalado no veículo com a excitação proveniente do motor (que varia de 30 Hz a 200 Hz em motores a quatro tempos de quatro cilindros). Pesquisando-se na bibliografia especializada [3], [4] e [5], observa-se que os modelos teóricos simples e regras práticas empíricas, utilizadas para estimar o comportamento dinâmico do semi-eixo quando instalado no veículo, nem sempre geram bons resultados e oportunizam desagradáveis surpresas quando é realizado o teste subjetivo final no veículo.

Em resumo, ainda não existe um domínio adequado do fenômeno (à primeira vista simples) de primeira ressonância transversal do semi-eixo homocinético e esta é a causa, na grande maioria das ocasiões, dos problemas vibratórios associados a este componente. Aliando-se a isto o fato de ser possível efetivar um estudo sistemático sobre um caso específico para obter conclusões mais abrangentes sobre este fenômeno, optou-se por concentrar os esforços deste trabalho no estudo de primeira ressonância transversal do semi-eixo homocinético[6],[7].

### **1.4) Descrição dos capítulos do trabalho e técnica usada.**

Várias técnicas de avaliação são utilizadas pela indústria automobilística em seus centros de pesquisa com o objetivo de analisar o desempenho dinâmico deste componente [3], [4] e [5]. No caso específico do enfoque dado neste trabalho, a técnica de análise modal experimental foi escolhida devido à sua característica de fornecer parâmetros dinâmicos envolvidos neste fenômeno de forma objetiva e realística. Com os resultados obtidos pela abordagem experimental pode-se fornecer as informações necessárias para o desenvolvimento de modelos analíticos do

componente ou otimizar modelos teóricos simples por meio de técnicas de otimização de modelos dinâmicos.

Devido ao grande número de informações que são processadas para a obtenção dos resultados finais, softwares desenvolvidos para este objetivo são extremamente úteis e de fácil aquisição no mercado (denominados de softwares de análise modal experimental). O capítulo 2 ("Software benchmarking") avalia o grau de confiança que pode ser atribuído ao software disponível para o trabalho realizado frente ao fenômeno físico analisado.

O capítulo 3 ("Identificação da excitação veicular") efetua uma investigação do tipo e nível de excitação ao qual o semi-eixo está exposto ao ser acoplado ao veículo, permitindo obter referências para efetivar ensaios representativos em laboratório.

O capítulo 4 ("Identificação do comportamento do sistema") dedica-se a identificar os parâmetros influentes na dinâmica do semi-eixo homocinético permitindo um entendimento mais aprofundado do fenômeno e fornece subsídios para a elaboração de um modelo analítico baseado no método de matriz de transferência por Leônidas [8].

O capítulo 5 ("Desenvolvimento de uma bancada de teste") apresenta a concepção e a efetivação de uma bancada de teste que permite simular as condições de contorno, disposição espacial e torque existentes quando o semi-eixo está acoplado ao veículo para permitir a simulação em laboratório.

O capítulo 6 ("Otimização de modelo analítico dinâmico") apresenta inicialmente uma extensa revisão bibliográfica de técnicas distintas que propõem-se a otimizar modelos dinâmicos analíticos sob a luz de resultados experimentais. Destas técnicas, a que mais se adapta ao enfoque deste trabalho é aplicada em três problemas de níveis distintos de complexidade para avaliar a sua validade frente ao fenômeno físico em análise.

Por fim, o capítulo 7 ("Conclusões finais e novas perspectivas") resume os pontos mais importantes do estudo realizado e sua aplicação prática (com ênfase na definição de um procedimento experimental representativo para a obtenção dos parâmetros modais do componente em laboratório) e indica os rumos que apresentam melhores perspectivas de resultados positivos na continuação deste estudo.

# Capítulo

# 2

## CAPÍTULO 2

### "SOFTWARE BENCHMARKING"

#### 2.1) Objetivo.

Uma vez definida a "ferramenta tecnológica" a ser usada para investigar a dinâmica do semi-eixo homocinético, deve-se verificar até que ponto pode-se confiar no equipamento e na técnica disponíveis.

Tratando-se de uma metodologia consagrada como é o caso da análise modal experimental, uma investigação sobre a sua validade seria comprovar o óbvio. Resta, porém, descobrir se o fenômeno a ser analisado apresenta-se bem comportado a ponto de estar de acordo com as premissas nas quais se baseia a técnica da análise modal experimental (especificamente se o sistema é linear e constante no tempo e se a ortogonalidade dos modos é válida).

Sobre o equipamento disponível (analisador FFT de dois canais BK2032, acelerômetros, amplificadores, filtros, etc) calibrações podem e devem ser efetuadas periodicamente e fazem parte do programa de calibração do equipamento.

Por fim, o software de análise modal experimental disponível (no caso o PCMODAL versão 2.1 da Vibration Engineering Consultants - EUA) deve ser investigado para verificar possíveis limitações e eventuais "bugs".

Neste capítulo é apresentada a confrontação dos resultados obtidos com o software PCMODAL com quatro técnicas básicas (e por isso mesmo confiáveis) aplicadas manualmente para permitir o controle pleno de todas as etapas do procedimento (além de permitir um contato mais direto com a metodologia, fugindo ao nível de mero usuário de um software fechado). O objeto-referência escolhido foi o próprio semi-eixo homocinético em análise, porém em condição livre-livre sustentado por meio de fios de nylon. Esta condição de contorno foi escolhida para evitar maiores complicações advindas do restante do veículo e para agilizar esta etapa inicial do trabalho. A escolha

pelo semi-eixo pretende trazer as peculiaridades deste componente desde o início do estudo, o que deve acelerar o processo de aprendizado e conhecimento do objeto do estudo. O semi-eixo escolhido é de aplicação Gol 1.8 e 1.6 (número 951582) e foi separado aleatoriamente da produção, estando a sua ficha de aprovação funcional apresentada no capítulo 4 deste trabalho.

## **2.2) Revisão teórica: análise modal experimental.**

A seguir, é apresentada uma resumida revisão das técnicas de análise modal experimental existentes em bibliografia [9] a [28], as quais foram aplicadas no benchmarking apresentado a seguir.

Filosoficamente, existem duas correntes principais de análise dos dados:

- a) **Análise Automática:** feita por software no qual o operador apenas fornece os dados (respostas em frequência, geometria, tipo de modelo,...) e recebe os resultados finais (parâmetros modais: autovetor  $\phi_x$ , autovalor  $w_x$  e fator de amortecimento  $\zeta_x$ ) sem interferir nos cálculos.
- b) **Análise Interativa:** onde o operador orienta a análise usando seu senso crítico de engenharia para superar deficiências dos dados (ruídos nas medições, modelo reduzido, complexidades e não linearidades do sistema, etc.).

A análise pode ser feita no domínio da frequência (FRF - Função de Resposta em Frequência) ou do tempo (FRI - Função de Resposta Impulsiva).

### **2.2.1) Verificação preliminar dos dados.**

É indicado analisar a resposta em frequência em escala log-log de forma a manter proporcional a agudeza dos picos nas diferentes faixas de frequência, assim como permitir a representação gráfica de linhas de rigidez e de massa com inclinação de 40 db/década (ou seja, +1 para rigidez e -1 para massa, no caso de ser utilizada uma escala adequada).

**2.2.1.1)** Nas baixas frequências pode-se identificar as condições de montagem escolhidas para o ensaio: engaste infere uma característica de rigidez (cuja magnitude indica a rigidez estática da



estrutura no local medido) e liberdade infere um comportamento de massa (expressando a inércia da estrutura no local medido).

**2.2.1.2)** Nas altas frequências, ocorrendo que a curva torna-se assintótica a uma linha de massa ou rigidez, indica que existe o domínio deste fator neste local de medição, inviabilizando a devida análise porque efeitos locais (existentes no local da excitação) dominam o comportamento do sistema.

**2.2.1.3)** O número de anti-ressonâncias identificáveis deve ser tão maior que o de pontos de mínimo (onde ocorre apenas uma inflexão da curva) quanto mais perto for feita a medição de resposta em relação ao local da excitação. Medições de resposta puntual devem apresentar apenas anti-ressonâncias e nenhum ponto de mínimo.

**2.2.1.4)** A agudeza dos picos de ressonância deve ser idêntica à dos vales de anti-ressonância (FRF em log-log). Deficiência desta característica indica problemas de resolução do equipamento ou níveis inadequados de excitação (medição pobre na região das anti-ressonâncias).

**2.2.1.5)** Podemos executar uma verificação global da disposição da curva FRF plotando retas com inclinação de linhas de massa e de rigidez que passam por pontos da curva que estão equidistantes entre frequências de ressonâncias e anti-ressonâncias. Este "esqueleto" montado deve seguir a FRF, indicando se a FRF é dominada por características de massa (inércia) ou rigidez pela inclinação geral da figura formada. Caso esta montagem não possa ser feita, a medição deverá estar contaminada de ruído. Para montar o "esqueleto" de uma FRF, temos que a primeira reta acompanha, nas baixas frequências em mobilidade log-log, a FRF com uma inclinação de -1 (rigidez) para condição de engaste (vide figura 2.1 abaixo). Posteriormente, a inclinação da reta altera-se de +2 a cada anti-ressonância e de -2 a cada ressonância, passando pelo ponto da FRF equidistante entre duas frequências de ressonância. Observar que para uma FRF puntual todas as retas terão inclinação +1 ou -1, porém para uma FRF de transferência as inclinações serão de +1, -1, -3, -5...

Cabe salientar que podemos calcular as constantes que descrevem o sistema em um modelo físico espacial neste tipo de análise.

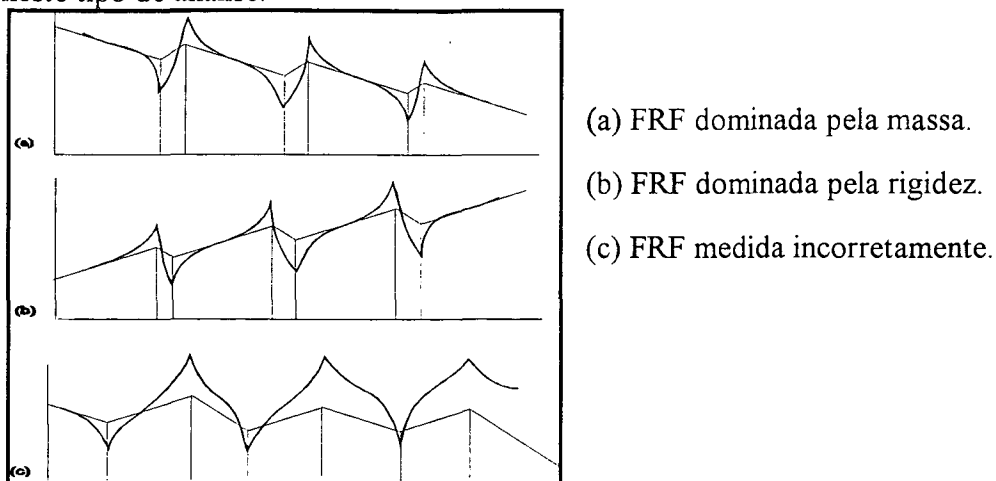


Figura 2.1: Verificação do esqueleto da FRF.

**2.2.1.6)** A região perto de uma ressonância deverá se apresentar como um segmento de círculo quando observada a FRF em Nyquist. Caso isto não ocorra, teremos modos interagindo (muito próximos) ou problemas na execução do ensaio (instrumentação). No caso de estruturas axisimétricas, temos duas ressonâncias coincidentes interagindo em cada autovalor flexional. No caso do semi-eixo homocinético ele apresenta uma simetria axial cíclica, cujas diferenças de distribuição de massa e rigidez entre os dois planos principais são pequenas, decorrendo o aparecimento de ressonâncias muito próximas e de difícil separação no momento da análise da FRF (este efeito será denominado de "picos gêmeos" durante este trabalho).

## 2.2.2) Análise modal experimental .

Existem duas alternativas de imediato:

- a) Análise modal de um grau de liberdade (SDOF - Single Degree of Freedom)
- b) Análise modal de vários graus de liberdade (MDOF - Multiple Degree of Freedom)

No primeiro caso, temos a premissa que nas vizinhanças de uma dada ressonância, a resposta total é dominada pela contribuição do modo associado a esta frequência enquanto que no segundo, esta condição é relaxada e admite a influência de vários modos simultaneamente. Alguns métodos

assumem a existência de uma leve contribuição dos demais modos. A seguir temos uma breve descrição das técnicas mais usuais.

### 2.2.2.1) Análise modal de um grau de liberdade.

A seguir é apresentado um resumo das técnicas mais comuns deste tipo de análise.

#### 2.2.2.1.1) Método da amplitude do pico básico.

Este é o método mais simples e vem sendo usado a muito tempo. É adequado a estruturas com modos bem separados e que apresentam um amortecimento não tão pequeno que atrapalhe a medição do pico e não tão grande que a resposta de um modo seja influenciada, de forma sensível, pelos demais. O método consta das seguintes etapas:

i) identificar os picos da FRF (em receptância  $\alpha(w)$ ) de cada modo e adotar a frequência de maior resposta como sendo a frequência natural deste modo ( $w_r$ ).

ii) identificar a amplitude da FRF em  $w_r$  e adotar como valor o pico  $|\hat{\alpha}|$ . Obter o valor de  $|\hat{\alpha}|/\sqrt{2}$

que identifica os pontos de meia potência  $w_a$  e  $w_b$  (vide figura 2.2 abaixo).

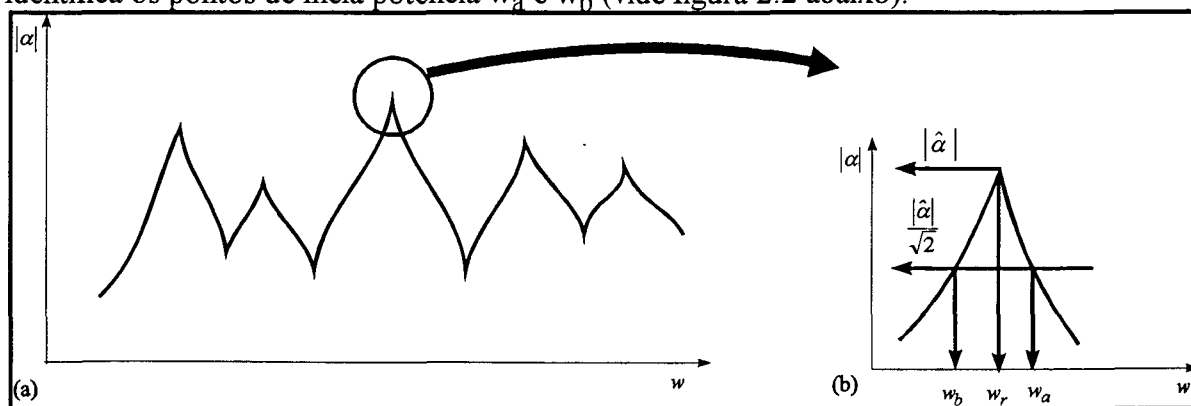


Figura 2.2: Determinação dos pontos de meia potência.

iii) estimar o amortecimento deste modo pela fórmula :

$$\text{Para amortecimento histerético: } \eta_r = \frac{w_a^2 - w_b^2}{2w_r^2} \cong \frac{w_a - w_b}{w_r}$$

(2.1)

Para amortecimento viscoso, na região da ressonância:  $2\zeta_r = \eta_r$

(2.2)

A característica básica do amortecimento hysterético é que a parte imaginária da FRF é constante, enquanto que no caso viscoso ela é uma função da frequência. É interessante observar a qualidade da medição (FRF obtida) na qual se baseou o cálculo do fator de amortecimento, pois esta poderá ser substituída ou ignorada em caso de estar distoando com os demais valores obtidos. Isto define um "fator de qualidade" associado a cada medição efetuada (verificar se o valor de amortecimento obtido em uma dada FRF distoa sensivelmente dos valores obtidos nas demais FRF da mesma estrutura).

iv) admitindo ser a resposta total devida apenas ao modo em questão, calcular a constante modal  $A_r$ :

$$\left| \hat{\alpha} \right| = \frac{A_r}{(w_r^2 \eta_r)} \quad \text{ou} \quad A_r = \left| \hat{\alpha} \right| w_r^2 \eta_r$$

(2.3)

As limitações do método se baseiam na precisão da medição do pico  $\left| \hat{\alpha} \right|$  da FRF, a qual é problemática em estruturas com baixo amortecimento, e no fato de obter-se apenas constantes modais reais, restringindo a análise ao caso de amortecimento proporcional. Mais importante é a restrição feita na análise de não existir influência de outros modos neste em análise. Caso isto não ocorra, têm-se uma estimativa superior de amortecimento e de coeficiente modal devido a influência dos demais modos. Este fato está exemplificado na figura 2.3 abaixo.

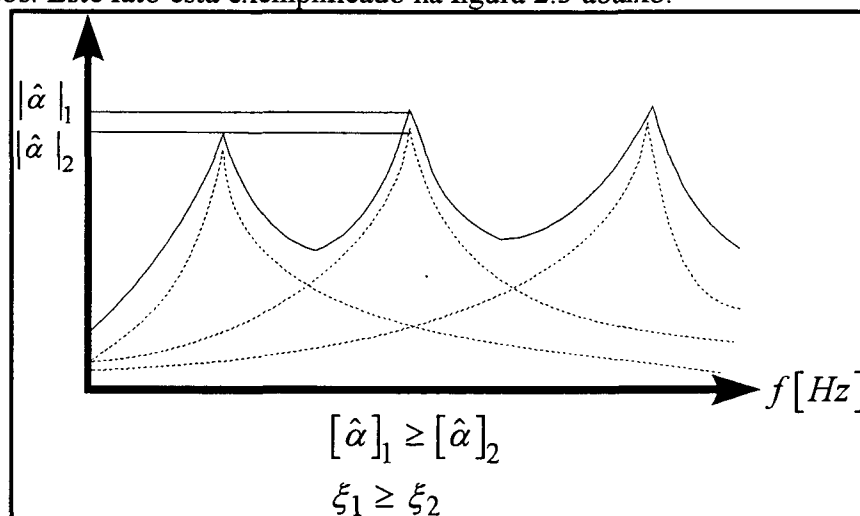


Figura 2.3: Influência de modos vizinhos na FRF medida.

### 2.2.2.1.2) Método da amplitude do pico estendido.

Uma sofisticação do procedimento acima pode reduzir a influência dos demais modos no cálculo. Deve-se considerar a curva da parcela real da receptância. A posição dos valores de máximo (MX) e mínimo (MN) são bons indicativos dos pontos de meia potência. A amplitude existente entre estes valores de pico indicam a constante modal deste modo pela fórmula:

$$A_r = (|MX| + |MN|) w_r^2 \eta_r \quad (2.4)$$

O valor da frequência natural  $w_r$  deste modo é obtido pelo ponto intermediário entre MX e MN, visível na figura 2.4 abaixo.

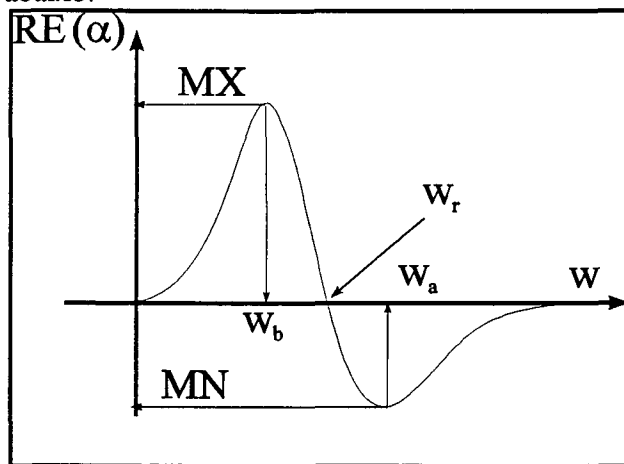


Figura 2.4: Representação da parte real da FRF  $\alpha(f)$ .

### 2.2.2.1.3) Método do ajuste de círculo de Nyquist - critério da velocidade de varrimento na frequência.

Este método, um pouco mais sofisticado que o anterior, baseia-se na característica de que, nas vizinhanças de um modo, a FRF visualizada em Nyquist apresenta uma curva no formato de um arco de círculo uma vez que seja escolhido o parâmetro adequado para o tipo de amortecimento existente (amortecimento histerético  $\rightarrow$  receptância  $\alpha(w)$ ; amortecimento viscoso  $\rightarrow$  mobilidade  $Y(w)$ ). Para amortecimento histerético, analisa-se a receptância  $\alpha(w)$ .

Para analisar o efeito de considerar que um dado modo domina a região em torno da sua frequência natural, toma-se a equação da FRF.

$$\alpha_{jk}(w) = \sum_{s=1}^n \frac{{}_s A_{jk}}{w_s^2 - w^2 + i\eta_s w_s w} \quad (2.5)$$

Evidenciando o termo em análise:

$$\alpha_{jk}(w) = \frac{{}_r A_{jk}}{w_r^2 - w^2 + i\eta_r w_r w} + \sum_{s=1}^n \frac{{}_s A_{jk}}{w_s^2 - w^2 + i\eta_s w_s w} \quad (2.6)$$

Onde o segundo termo seria considerado um valor constante  ${}_r B_{jk}$ . Ewins mostra que, na vizinhança de uma dada frequência natural, os dois termos evidenciados geram os seguintes gráficos:

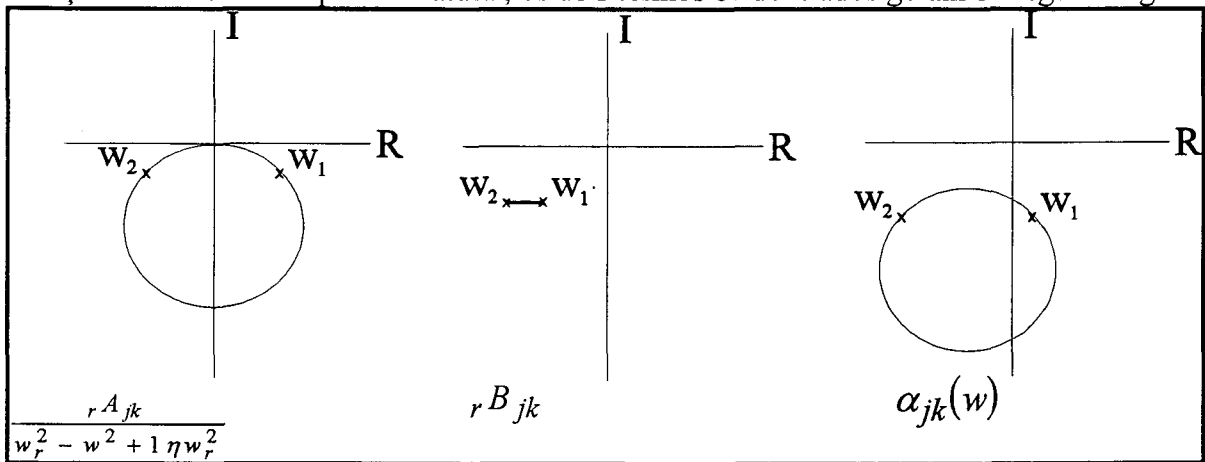


Figura 2.5: Influência de modos distantes.

Evidenciando que a influência dos demais modos sobre o que está em análise, longe de ser desprezível, pode ter influência considerável, porém sua contribuição pode ser considerada constante na faixa de frequência em análise.

No diagrama de Nyquist, pode-se identificar o autovalor pela velocidade de varrimento da frequência em torno do círculo: a taxa de varrimento é máxima quando  $w = w_r$ . O amortecimento pode ser obtido pela seguinte fórmula:

$$\left( \frac{d\theta}{dw^2} \right)_{w=w_r} = \frac{-2}{(w_r^2 \eta_r)} \quad (2.7)$$

Ou seja, a taxa de varrimento na frequência natural indica o valor de  $\eta_r$ .

Outra maneira, mais genérica, de obter o valor de amortecimento é usar duas frequências do gráfico, uma superior e uma inferior ao autovalor, na seguinte fórmula:

$$\eta_r = \frac{(w_a^2 - w_b^2)}{\left( w_r^2 \left( \tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right) \right)}$$

(2.8)

onde

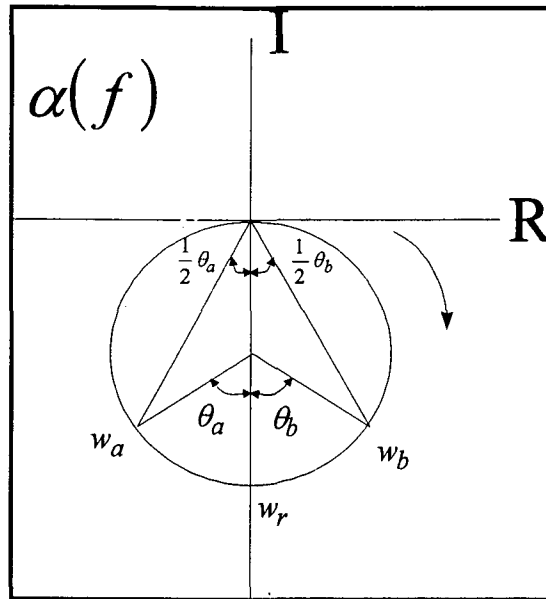


Figura 2.6: FRF em Nyquist e seus parâmetros básicos.

Esta equação é exata e aplica-se a qualquer nível de amortecimento.

O coeficiente modal pode ser obtido da fórmula que define o diâmetro do círculo  ${}_r D_{jk}$ :

$${}_r D_{jk} = \frac{|{}_r A_{jk}|}{w_r^2 \eta_r}$$

(2.9)

e o eixo principal (que passa pelo autovalor) está rotado de ângulo  $({}_r A_{jk})$  para o lado negativo do eixo imaginário. Para amortecimento viscoso, têm-se em mobilidade  $Y(w)$ :

$$Y(w) = \frac{iw}{(k + w^2 m) + i(wc)}$$

(2.10)

donde

$$\zeta_r = \frac{(w_a^2 - w_b^2)}{\left(2w_r \left(w_a \tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + w_b \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right)\right)\right)} \quad (2.11)$$

ou

$$\eta_r = 2\zeta_r \quad (2.12)$$

O procedimento para extrair os parâmetros modais segue as seguintes etapas:

- i) Selecionar os pontos a serem estudados: deve-se separar pontos espúrios da curva e abranger, sempre que possível, 270° do círculo. Deve-se usar mais de 6 pontos do círculo.
- ii) Usar uma subrotina para obter o círculo que mais se aproxima da FRF medida: obter o centro, o raio do círculo e um fator de qualidade que indica o desvio médio quadrático dos pontos escolhidos em relação ao círculo plotado.
- iii) Localizar o autovalor e estimar o amortecimento: utilizando pontos médios e traçando linhas radiais pode-se identificar a taxa de varrimento (ângulo percorrido) e observar onde ela é máxima. Usando um processo de diferenças finitas, podemos obter a frequência natural com uma precisão de 10% do valor da discretização em frequência ( $\Delta f$ ). O amortecimento pode ser calculado pela fórmula já apresentada.
- iv) Calcular múltiplas estimativas do amortecimento a avaliar: pode-se selecionar vários pares distintos de frequências em torno da frequência natural, gerando várias estimativas de amortecimento. Todos os valores deveriam ser idênticos, portanto o cálculo da média dos valores obtidos e o desvio existente entre eles é útil. Uma distribuição randômica identifica erros de medição, mas uma distribuição sistemática dos valores indica influência dos outros modos, comportamento não-linear ou experimento mal executado, entre outros fenômenos.
- v) Determinar a constante modal: com o uso da fórmula já apresentada, de posse do autovalor e do amortecimento, calcula-se o valor de  $|{}_r A_{jk}|$ .

Por fim, é útil obter a FRF regenerada. Para tal, é necessário verificar a influência dos demais modos neste em análise, medindo a distância do ponto do círculo mais próximo da origem dos eixos coordenados até esta origem ( ${}_r B_{jk}$ ).



Uma análise rápida pode ser executada da seguinte maneira: obter uma estimativa confiável do valor de amortecimento e da frequência natural através da análise completa de uma FRF que acredita-se ser representativa do sistema em análise. Com estes valores, calcular os coeficientes modais das demais FRF usando apenas o diâmetro destas curvas em Nyquist. O resultado será razoável, na medida em que pode-se atribuir que o amortecimento e as frequências naturais são constantes em relação ao ponto de medição no modelo.

#### 2.2.2.1.4) Método do ajuste de círculo de Nyquist - critério da distância à origem.

Existem, na literatura, vários critérios para definir o autovalor no círculo de Nyquist. Além do critério anteriormente apresentado, o critério de considerar a frequência do ponto do círculo de Nyquist mais distante à origem do sistema como sendo o autovalor do modo em análise é um critério amplamente difundido. Neste caso, o formulário é o mesmo do apresentado para o caso anterior, apenas o valor numérico final será diferente no caso do autovalor definido pelos dois critérios ser muito distante.

#### 2.2.2.1.5) Método inverso.

Este método baseia-se no fato de que uma função que gera um círculo no diagrama de Nyquist ( $\alpha(w)$ ) gera uma linha reta se plotarmos a sua recíproca  $\left(\frac{1}{\alpha(w)}\right)$ .

Ou seja:

$$\alpha(w) = \frac{(k - w^2 m) - i(h)}{(k - w^2 m)^2 + h^2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha(w)} = (k - w^2 m) + i(h)$$

(círculo)

(reta)

(2.13)

O procedimento para obter os parâmetros modais deste gráfico consta de:

i) Ajustar uma linha reta pelo método das diferenças quadráticas, e a estimativa para o amortecimento é lida diretamente do ponto de interceptação com o eixo imaginário. A qualidade da medição pode

ser constatada pelo desvio da curva obtida com a reta ajustada (randômica → erros de medição usuais, determinística → fenômeno a ser verificado).

ii) Ajustar o desvio entre a parte real dos dados medidos com o do modelo teórico, gerando estimativas dos parâmetros de massa e rigidez.

Deve-se salientar que esta técnica gera melhores resultados com modos reais e bem separados (influência maior do modo em análise). Para amortecimento viscoso o processo é idêntico, porém usando mobilidade ( $Y(w)$ ) gera uma rotação de  $90^\circ$  no diagrama de Nyquist.

### 2.2.2.1.6) Resíduos.

É um artifício que contabiliza a influência dos modos fora da faixa de frequência em análise mas que influem de qualquer maneira na FRF.

Têm-se que:

$$Y_{jk}(w) = \sum_{n=1}^{m_1-1} + \sum_{n=m_1}^{m_2} + \sum_{n=m_2+1}^N \left( \frac{iw_r A_{jk}}{w_r^2 - w^2 + i\eta_r w_r w} \right) \quad (2.14)$$

A primeira parcela tende a se comportar como um efeito de massa e a terceira como um efeito de rigidez para os modos incluídos na segunda parcela (em análise).

Portanto, obtemos:

$$Y_{jk}(w) \cong -\frac{iw}{w^2 M_{jk}^R} + \sum_{n=m_1}^{m_2} \left( \frac{iw_r A_{jk}}{w_r^2 - w^2 + i\eta_r w_r w} \right) + \frac{iw}{K_{jk}^R} \quad (2.15)$$

onde  $M_{jk}^R$  é a massa residual e  $K_{jk}^R$  é a rigidez residual para esta específica faixa de frequência em análise. O processo para calcular estes fatores consta de utilizar valores da FRF nos limites inferior e superior da faixa de frequência (de preferência anti-ressonância) para gerar estimativas que produzam uma nova FRF regenerada mais aproximada da FRF medida. Este processo deve ser iterativo na medida em que  $M_{jk}^R$  influi no efeito de  $K_{jk}^R$  (no caso da faixa de frequência em análise ser reduzida).

Cabe salientar que  $M_{jk}^R$  reflete as condições de fixação do teste, sendo que em caso de condição livre, o fator  $M_{jk}^R$  espelha as propriedades de massa (inércia) de corpo rígido da estrutura.

$K_{jk}^R$  terá valor máximo no caso de FRF puntual (pois todos os coeficientes modais serão positivos, somando-se os efeitos na faixa de altas frequências) e valor mínimo (talvez desprezível) para FRF de transferência com pontos de excitação e resposta bem afastados (pois os coeficientes modais terão sinais alternados, tendendo a se cancelar nas altas frequências).

### 2.2.2.2) Análise modal de vários graus de liberdade.

Existem casos em que a premissa de existir apenas uma das parcelas do somatório que compõe a FRF dominando sobre todas as demais não pode ser sustentada. Neste caso, cabe uma abordagem mais ampla e complexa. Por exemplo, no caso de modos próximos e acoplados (amortecimento elevado) ou no caso de sistemas com amortecimento extremamente pequeno (onde é difícil medir a FRF próximo das ressonâncias).

#### 2.2.2.2.1) Método de um grau de liberdade estendido.

Considerando a expressão completa:

$$\alpha_{jk}(w) = \frac{r A_{jk}}{w_r^2 + w^2 + i\eta_r w_r w} + \sum_{s=m_1, s \neq r}^{m_2} \frac{s A_{jk}}{w_s^2 + w^2 + i\eta_s w_s w} + \frac{1}{K R_{jk}} - \frac{1}{w^2 m R_{jk}} \quad (2.16)$$

Considera-se a segunda parcela não constante e aplica-se um processo iterativo de cálculo da primeira e da segunda parcela, ou seja, modela-se a primeira parcela e verifica-se a contribuição dos modos restantes por extração deste modo da FRF total. Com esta primeira estimativa, tenta-se isolar o modo em análise e repete-se o processo, o qual deve convergir até um nível de estabilidade que indica que o objetivo foi alcançado.

#### 2.2.2.2.2) Abordagem generalizada de ajuste de curva.

É um processo complexo e abrangente no qual é utilizada a equação completa de FRF e, por processos numéricos automáticos ou interativos (onde o operador participa em certas tomadas de decisões), procura-se minimizar a diferença entre este modelo matemático e a FRF medida, ajustando todos os parâmetros para vários modos simultaneamente. Este processo utiliza uma vasta

gama de rotinas computacionais que foram desenvolvidas para este fim e encontram-se disponíveis em literatura.

### 2.2.2.2.3) Aplicado a estrutura com amortecimento pequeno.

No caso da estrutura com fatores de amortecimento muito baixos ocorrem problemas para obter medições adequadas nas regiões próximas às ressonâncias.

Isto ocorre, em especial, quando componentes são analisados individualmente, visto que é usual que a maior parte do amortecimento de uma estrutura seja gerada pelas conexões e juntas e não pelo material.

Para este caso, foi desenvolvida uma técnica que identifica as freqüências naturais e os modos reais (amortecimento considerado nulo) com o uso de dados da FRF longe das ressonâncias.

Para um sistema sem amortecimento têm-se:

$$\alpha_{jk}(w) = \sum_{r=1}^N \frac{r A_{jk}}{w_r^2 - w^2} \quad (2.17)$$

ou, para uma dada  $w = \Omega_1$

$$\alpha_{jk}(\Omega_1) = \left\{ \left( w_1^2 - \Omega_1^2 \right)^{-1} \left( w_2^2 - \Omega_1^2 \right)^{-1} \dots \right\} \begin{Bmatrix} 1A_{jk} \\ 2A_{jk} \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

para uma coleção de n valores de  $\alpha_{jk}(w)$  para  $w = \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{jk}(\Omega_1) \\ \alpha_{jk}(\Omega_2) \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( w_1^2 - \Omega_1^2 \right)^{-1} & \left( w_2^2 - \Omega_1^2 \right)^{-1} & \dots & \dots \\ \left( w_1^2 - \Omega_2^2 \right)^{-1} & \left( w_2^2 - \Omega_2^2 \right)^{-1} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1A_{jk} \\ 2A_{jk} \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Portanto, para obter  $N$  valores  $A_{jk}$  necessita-se de  $N$  valores individuais da FRF ( $\alpha_{jk(w)}$ ), neste caso, tomados longe das ressonâncias. Caso possível, usa-se os valores das anti-ressonâncias, pois simplifica os cálculos, por ter-se valores nulos nestas frequências no modelo teórico (apesar de que os valores medidos sejam apenas próximos de zero).

### 2.2.3) Observações sobre sistemas não lineares.

Um forte indicativo de existência de não-linearidades no fenômeno em análise é dado pelo amortecimento: teoricamente o valor obtido nos cálculos deve se manter constante em relação ao local de medição e os pontos da FRF (Nyquist) escolhidos para cálculo. Plotando-se um gráfico tridimensional, com o valor do amortecimento obtido para cada par de valores considerados, deveria gerar uma superfície plana (figura 2.7). Erros de medição randômicos causam uma variação neste valor que tornam esta superfície irregular, porém ela aproxima-se de uma superfície nivelada e a média dos valores obtidos nos fornece uma boa indicação do valor real. Já, no caso de ser observada uma tendência nos valores (superfície torna-se inclinada), este tipo de média torna-se sem significado real, pois a variação do valor deverá ter um motivo físico real (figura 2.8).

Por exemplo, uma análise teórica de um sistema que apresente uma característica de rigidez cúbica apresenta a variação de amortecimento segundo a figura 2.9, enquanto um sistema com amortecimento viscoso e coulombiano está representado na figura 2.10 [9].

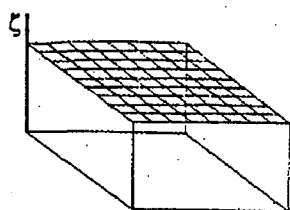


Figura 2.7

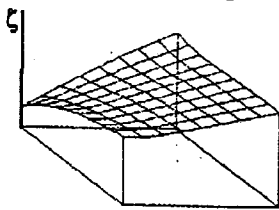


Figura 2.8

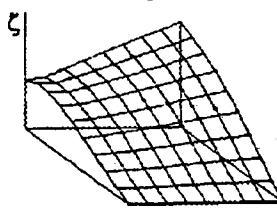


Figura 2.9

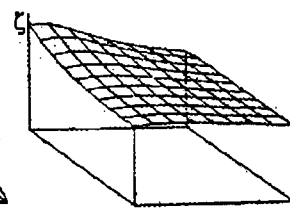


Figura 2.10

No caso de existir um comportamento de rigidez cúbica, o resultado obtido com um ensaio de excitação senoidal gera a figura 2.11, enquanto o ensaio de excitação randômica de banda estreita gera a figura 2.12. O resultado é esperado, uma vez que o processo de cálculo de FRF se baseia no

princípio da superposição, na realidade linearizando o sistema testado devido à fase ser aleatória na excitação randômica.

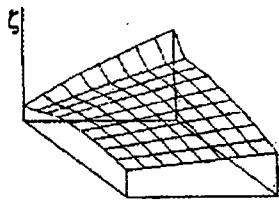


Figura 2.11

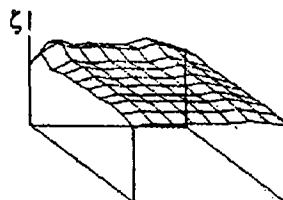


Figura 2.12

Outro tipo de não linearidade está associado ao nível de excitação usado no ensaio. Nos gráficos 2.13 e 2.14 estão representados os valores do amortecimento obtidos para o mesmo sistema, sob níveis diferentes de excitação.

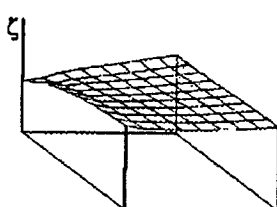


Figura 2.13

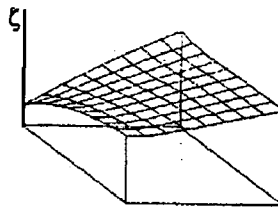


Figura 2.14

#### 2.2.4) Apresentação dos resultados.

O modelo modal obtido para uma dada estrutura consiste de duas matrizes que representam cada modo analisado: uma contendo as informações de amortecimento ( $\eta$  ou  $\zeta$ ) e frequência natural ( $w_r$ ) e outra com os coeficientes modais  $rA_{jk}$  (descreve o modo de vibração):

$$\left[ \begin{array}{c} \backslash \\ w_r^2(1+i\eta_r) \\ \backslash \end{array} \right]_{mxm} e [\psi]_{mxm}.$$

É interessante executar a obtenção de mais de uma linha (ou coluna) da matriz modal, pois poderá ser executada uma verificação entre as medições do modo em questão, proporcionando condições de substituir dados inconsistentes, ou mesmo verificar se não houve perda de informações devido a uma escolha infeliz dos pontos de medição (impossibilidade de observar um dado modo em especial).

Para a obtenção da matriz modal, e do respectivo modo de vibração, deve-se escolher um parâmetro para normalizar estes vetores. Normalmente usa-se a massa ou o maior valor do vetor em análise. O primeiro processo é denominado "normalização em relação à massa".

Dada a propriedade básica do modelo modal, denominada ortogonalidade dos modos, têm-se as relações:

$$[\psi]^T [M] [\psi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & m_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$[\psi]^T [K] [\psi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & k_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde  $k_r$  e  $m_r$  são chamados de rigidez e massa generalizadas ou modais referente ou modo "r".

Temos que  $w_r^2 = \frac{k_r}{m_r}$ , porém os valores de  $k_r$  e  $m_r$  não são únicos.

A normalização em relação à massa gera as seguintes relações:

$$[\phi]^T [M] [\phi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & I & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[\phi]^T [K] [\phi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_r^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ou seja:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi\}_r \quad (2.24)$$

Uma apresentação mais detalhada encontra-se no anexo 1. O segundo processo, denominado "normalização unitária", simplesmente indica que deve-se dividir vetorialmente todos os

componentes do autovetor pelo coeficiente modal  ${}_r A_{jk}$  de maior valor, obtendo valores entre 0 e 1 para eles e suas respectivas fases são referenciadas ao nodo de maior amplitude de movimento (amplitude 1 e fase 0).

Por fim, deve-se reduzir todas as aproximações de frequência natural, amortecimento e modo de vibração obtidos em uma estimativa representativa. Para tal, é importante efetuar uma média ponderada, onde o fator de ponderação é o "fator de qualidade" associado a cada medição.

Cabe salientar que, no caso de se adotar valores médios de amortecimento e frequência natural, deve-se revisar os cálculos de obtenção dos coeficientes modais, pois eles são provenientes de um cálculo onde estes valores são utilizados.

Ou seja:

$${}_r \tilde{A}_{jk} = {}_r A_{jk} \left( \frac{\tilde{w}_r^2 \tilde{\eta}_r}{w_r^2 \eta_r} \right) \quad (2.25)$$

### **2.3) Comparação de análise modal experimental manual e PCMODAL.**

#### **2.3.1) Primeiro contato com o software.**

O software de análise modal experimental disponível para a execução deste trabalho é o PCMODAL da Vibration Engineering Consultants Inc. - USA (V.E.C.).

A primeira análise modal efetuada gerou resultados não completamente esperados. O autovetor obtido para o primeiro modo em uma análise prévia do semi-eixo em condição livre-livre, que tinha como objetivo apenas tomar o primeiro contato com o equipamento e iniciar o processo de aprendizado com o mesmo, apresentou alguns nós de vibração inesperados na região do eixo.

Um novo ensaio foi efetivado com o eixo isolado das juntas e o fenômeno se repetiu, porém a localização dos nós de vibração foi outra.

Partiu-se para analisar uma viga de perfil retangular, ainda em condição livre-livre e em condição de engaste de um dos extremos (viga tipo cantilever). Os resultados repetiram o comportamento estranho para o autovetor, apesar de que os demais parâmetros obtidos (autovalor e



fator de amortecimento) foram adequados e corretos em relação a soluções exatas apresentadas em bibliografia.

Por fim, todo o material foi enviado à V.E.C. para solicitar auxílio neste problema. A resposta enviada via fax encontra-se na figura 2.15 abaixo onde, no item 1, eles admitem que havia um "bug" na subrotina de processamento final dos dados que tornava o autovetor errado.

<b>Vibration Engineering Consultants, Inc.</b>			
<b>10 State Street</b>			
<b>Woburn, Massachusetts 01801</b>		<b>Fax: 617-933-4428</b>	
<b>U.S.A.</b>		<b>Phone: 617-932-9585</b>	
<b>To:</b>	<b>ATH</b>	<b>Date:</b>	<b>May 12, 1992</b>
<b>Attn:</b>	<b>Rodrigo Kniest</b>	<b>From:</b>	<b>Steve Anagnostis</b>
<b>Fax No:</b>	<b>0513409549 (Brazil)</b>	<b>Pages Following:</b>	<b>0</b>
<b>Re: PCMODAL</b>			
<b>In answer to your recent fax:</b>			
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. The bug you encountered with Process Fit Data has been corrected - an upgrade has been shipped via EMS. Thanks for finding it.</li> <li>2. We have not added graphic printing support - there are numerous vendors which provide "screen capture" capabilities for PCs, we have had success using PIZAZZ Plus, and using the screen capture facilities in Microsoft Windows.</li> <li>3. The x-axis on Nyquist plots cannot be directly controlled. To force two Nyquist plots to overlay, load one in Trace A and the other in Trace B, then use the "match" (M) command (the match command did not work properly for Nyquist plots in previous versions - this upgrade has corrected the problem).</li> </ol>			
I did be very interested in seeing the results of your MSc thesis.			
Regards			
Steve Anagnostis			

Figura 2.15: Resposta via fax da V.E.C..

Esse fato serviu para reforçar o pensamento adotado inicialmente neste trabalho, que todos os recursos a serem usados deveriam ser validados de alguma forma, mesmo no caso de um produto comercial lançado no mercado há, pelo menos, cinco anos.

Superado este aprendizado de certa forma penoso, porém certamente valioso não apenas para o trabalho aqui apresentado, foi efetuada a validação da nova versão do PCMODAL.

### **2.3.2) Montagem do ensaio experimental.**

O semi-eixo homocinético já mencionado foi suportado por dois fios de nylon, posicionados na região dos centros de articulação das juntas homocinéticas, para simular condições de contorno livre-livre na direção horizontal. As juntas permaneceram com um ângulo nulo e a junta deslizante permaneceu centrada.

A excitação adotada foi a impulsiva com o uso de martelo excitador com célula de força dinâmica piezoelétrica (BK8202), por mera questão de agilizar esta etapa inicial dos trabalhos. O acelerômetro usado foi o tipo miniatura (BK4393) com base magnética acoplado a um amplificador de carga (BK2635). O analisador espectral utilizado (BK2032) apresenta dois canais de aquisição de dados e baseia-se na rotina FFT (Fast Fourier Transform).

Todo o sistema foi calibrado com o auxílio da mesa vibratória portátil de referência BK4294.

### **2.3.3) Verificação preliminar dos dados.**

No sentido de evitar a aplicação de esforços na análise de dados inadequados obtidos com a execução de um experimento de maneira incorreta, inicialmente foram utilizadas as técnicas de verificação preliminar de dados experimentais apresentadas na revisão teórica deste capítulo.

#### **2.3.3.1) Verificação das condições de contorno.**

Na figura 2.16 do anexo é apresentada a resposta em frequência puntual (mobilidade  $Y(w)$ ) obtida em um ponto deslocado do centro do eixo do componente (cerca de 25 mm da manga da junta deslizante) e a respectiva função de coerência da medição. Na curva de resposta em frequência pode-se observar a condição de contorno livre-livre adotada pela aproximação da curva assintoticamente a uma linha de massa nas baixas frequências, confirmando a montagem adequada do experimento.

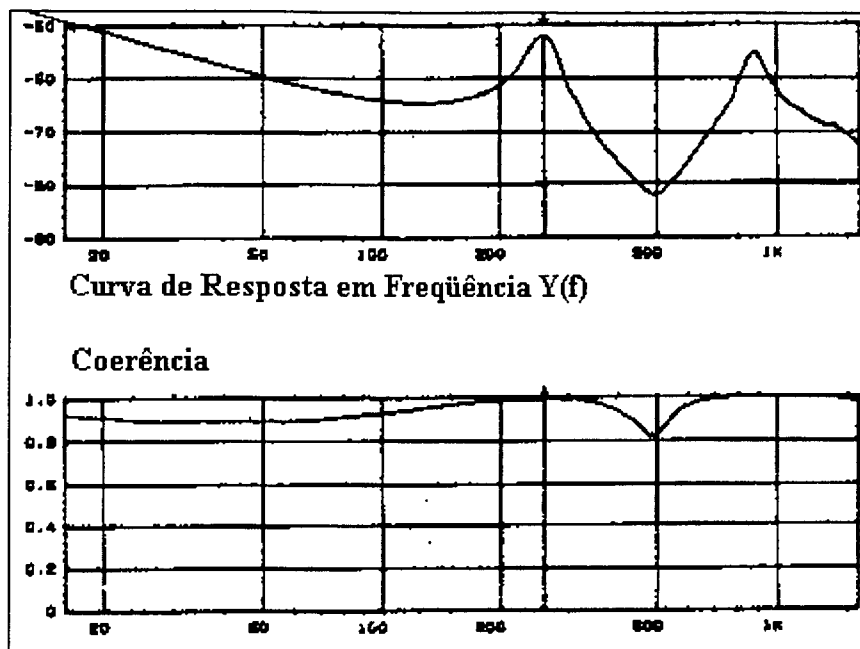


Figura 2.16: FRF puntual num local assimétrico do semi-eixo.

### 2.3.3.2) Verificação da função de coerência da medição.

Ainda na figura 2.16 é apresentada a função de coerência da medição efetuada, onde pode-se verificar o ótimo nível de coerência nas regiões próximas às ressonâncias (as quais são as regiões importantes para a análise modal a ser executada). A queda do valor da coerência para valores de até 0,8 na região da antiressonância é esperada, em decorrência da redução do valor da relação resposta/excitação neste região. Desta forma, o resultado mostra que o comportamento do sistema em análise é linear neste experimento e que não existe a presença de ruídos de maneira expressiva na medição.

### 2.3.3.3) Verificação dos pontos de mínimo.

Observa-se na figura 2.16 que entre as ressonâncias ocorre uma anti-ressonância, e o número de anti-ressonâncias só não é igual ao de ressonâncias porque a faixa de análise limita a observação da outra anti-ressonância. Isto é coerente com o fato de que a medição de uma curva de resposta em frequência puntual não deve apresentar pontos de mínimo.

### 2.3.3.4) Verificação da agudeza do pico de ressonância.

Na figura 2.16 observa-se que a agudeza dos picos de ressonância é de mesma ordem do pico de anti-ressonância, indicando que a resolução em frequência é adequada e os dois modos presentes apresentam amortecimento de mesma ordem de grandeza.

### 2.3.3.5) Verificação do "esqueleto" da curva de resposta em frequência.

Na figura 2.17 temos a construção do "esqueleto" da curva de resposta em frequência, conforme apresentado na revisão teórica. Desta construção pode-se observar que a curva de resposta em frequência não é dominada por efeitos locais de massa ou rigidez (pois não adota uma postura assintótica) e apresenta um bom ajuste ao "esqueleto".

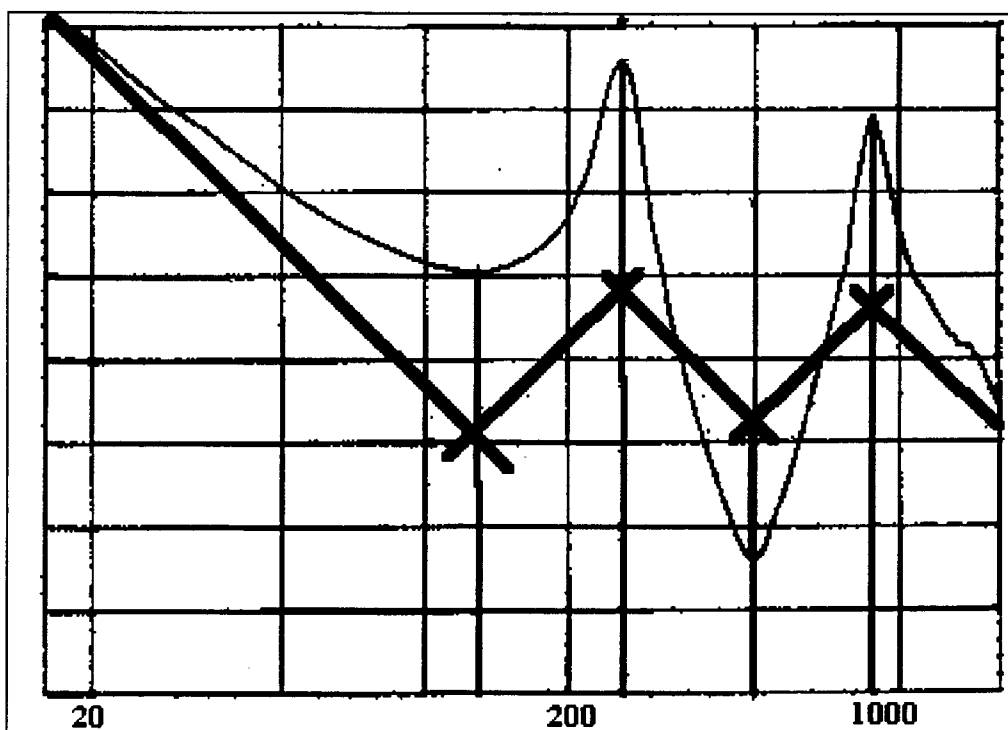


Figura 2.17: Construção do esqueleto da FRF.

### 2.3.3.6) Verificação no plano de Nyquist.

Na figura 2.18 tem-se a representação da curva de resposta em frequência no diagrama de Nyquist, onde observa-se curvas bem definidas e independentes nas vizinhanças das ressonâncias presentes, indicando serem modos bem separados.

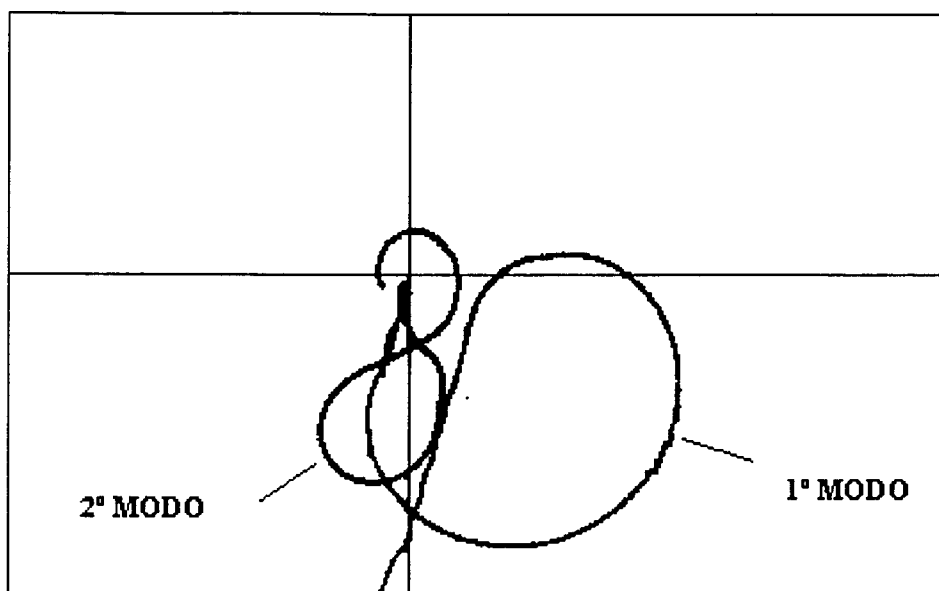


Figura 2.18: Representação da FRF em Nyquist.

#### 2.3.4) Análise modal experimental manual-cálculos envolvidos.

Uma vez avaliada a validade do experimento montado, parte-se para a efetivação da análise modal experimental usando quatro técnicas distintas que servirão de referência para a validação dos resultados obtidos com o software PCMODAL.

A discretização do sistema adotada consta de 17 nodos, sendo a medição da resposta efetivada por meio de acelerômetro fixado ao nodo central do eixo, por ser o mais sensível ao modo em análise (primeiro modo de vibração transversal) e a excitação efetua o varrimento pelos 17 nodos.

A seguir é apresentado um exemplo do procedimento de cálculo aplicado a uma medição, o qual foi repetido para os demais nodos para a obtenção do resultado final.

##### 2.3.4.1) Método da amplitude do pico básico.

Na figura 2.19 é apresentada a curva de mobilidade  $Y(w)$  em análise, tratando-se de um zoom na faixa de 210 a 310 Hz. Neste caso, obtém-se um valor de 262 Hz para a frequência natural e uma amplitude máxima do pico de  $\left| \hat{Y} \right| = 4.90 \text{ mm/s}$ , donde tem-se a amplitude de  $\frac{4,90}{\sqrt{2}} = 3,46 \text{ mm/s}$  para os pontos de meia potência localizados em:  $f_a = 282 \text{ Hz}$  e  $f_b = 246 \text{ Hz}$ .

Para o cálculo do fator de amortecimento:

Para amortecimento histerético:

$$\eta_r = \frac{2(f_a^2 - f_b^2)}{f_r^2} \quad (2.26)$$

$$\eta_r = \frac{2(281,875^2 - 245,625^2)}{262^2} = 27,9\%$$

Para amortecimento viscoso:

$$\zeta_r = \frac{\eta_r}{2} = 13,8\% \quad (2.27)$$

Para o cálculo do coeficiente modal  $A_r$ :

$$\left| \hat{Y} \right| = \frac{A_r}{\left( \frac{w_r^2 \eta_r}{2} \right)} \quad (2.28)$$

$$A_r = \left| \hat{Y} \right| w_r^2 \zeta_r$$

$$A_r = 4,90 \cdot 10^{-3} \cdot (262 \cdot 2 \cdot \pi)^2 \cdot 0,138$$

$$A_r = 1849,74 \text{ m/s}^3$$

### 2.3.4.2) Método da amplitude do pico estendido.

Neste caso, investiga-se a parte imaginária da mobilidade ( $\text{Im}(Y(w))$ ) apresentada na figura 2.20.

Para o autovalor tem-se a frequência intermediária aos pontos de máximo (MX) e mínimo (MN) da curva:

$$\text{MX} = 3,37 \text{ mm/s}, f_{\text{MX}} = 277,875 \text{ Hz}$$

$$\text{MN} = -2,20 \text{ mm/s}, f_{\text{MN}} = 243,625 \text{ Hz}$$

$$f_r = 260,75 \text{ Hz}$$

Para o coeficiente modal:

$$A_r = (|\text{MX}| + |\text{MN}|) w_r^2 \frac{\zeta_r}{2} \quad (2.29)$$

$$A_r = (3,37 \cdot 10^{-3} + 2,20 \cdot 10^{-3}) \cdot 260,75 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{0,279}{2}$$

$$A_r = 2082,64 \text{ m/s}^3$$

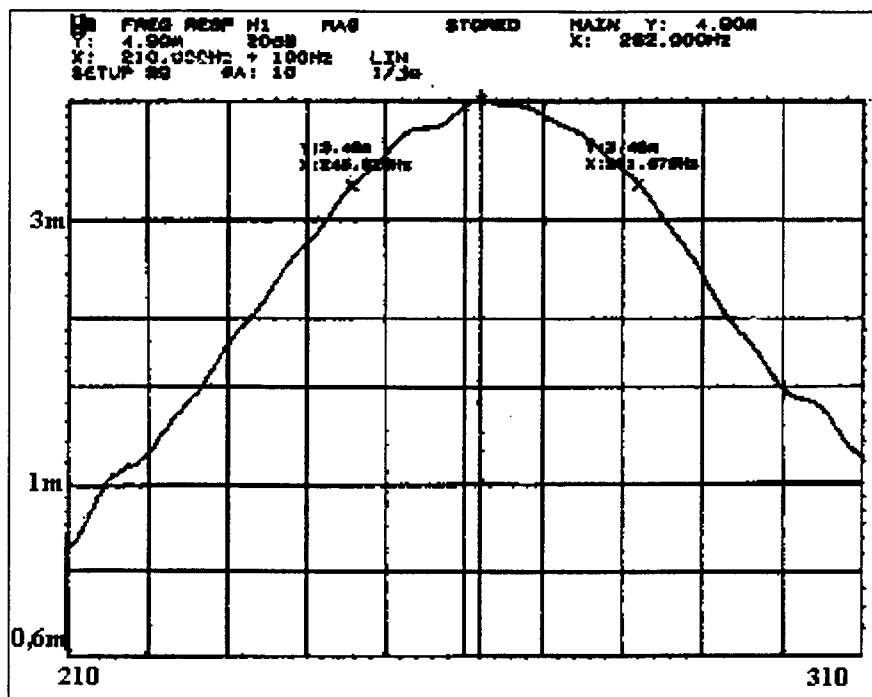


Figura 2.19: Zoom da FRF em mobilidade  $Y(w)$ .

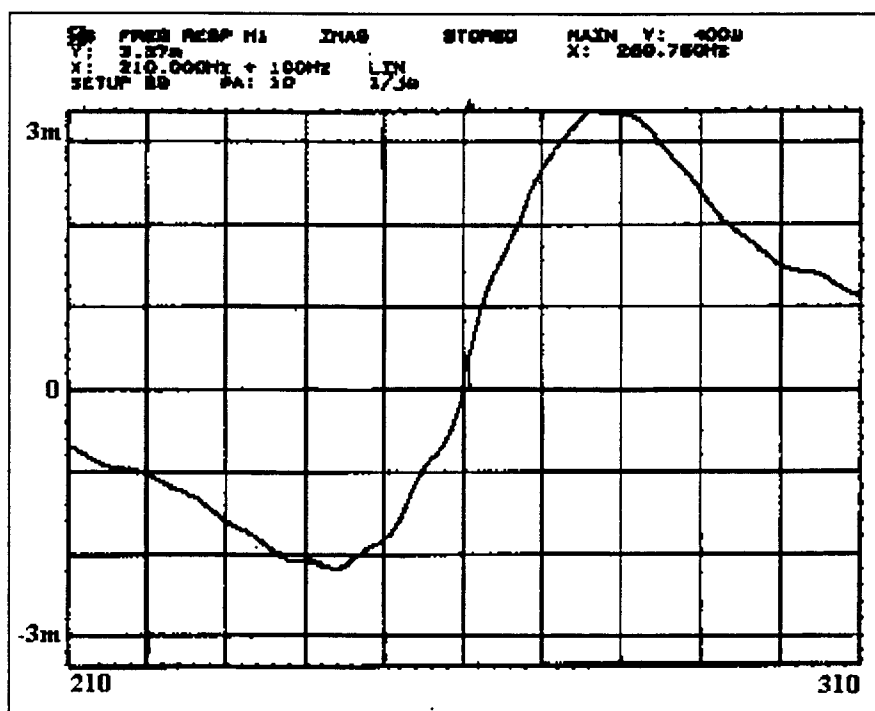


Figura 2.20: Parcela imaginária da FRF em mobilidade.

### 2.3.4.3) Método do ajuste do círculo de Nyquist - critério da velocidade de varrimento.

O primeiro passo é optar entre o amortecimento histerético ( $\eta$ ) ou viscoso ( $\zeta$ ). Um bom indicativo é o círculo de Nyquist, uma vez que para o caso histerético a curva se aproxima, de maneira melhor, a um círculo na forma de receptância ( $\alpha(w)$ ) e para o caso viscoso a curva se aproxima, de maneira melhor, a um círculo na forma de mobilidade ( $Y(w)$ ). Na figura 2.21 têm-se estas duas representações e observa-se que os resultados são semelhantes, não sendo possível definir qual o modelo de amortecimento é mais adequado por esta inspeção no plano de Nyquist.

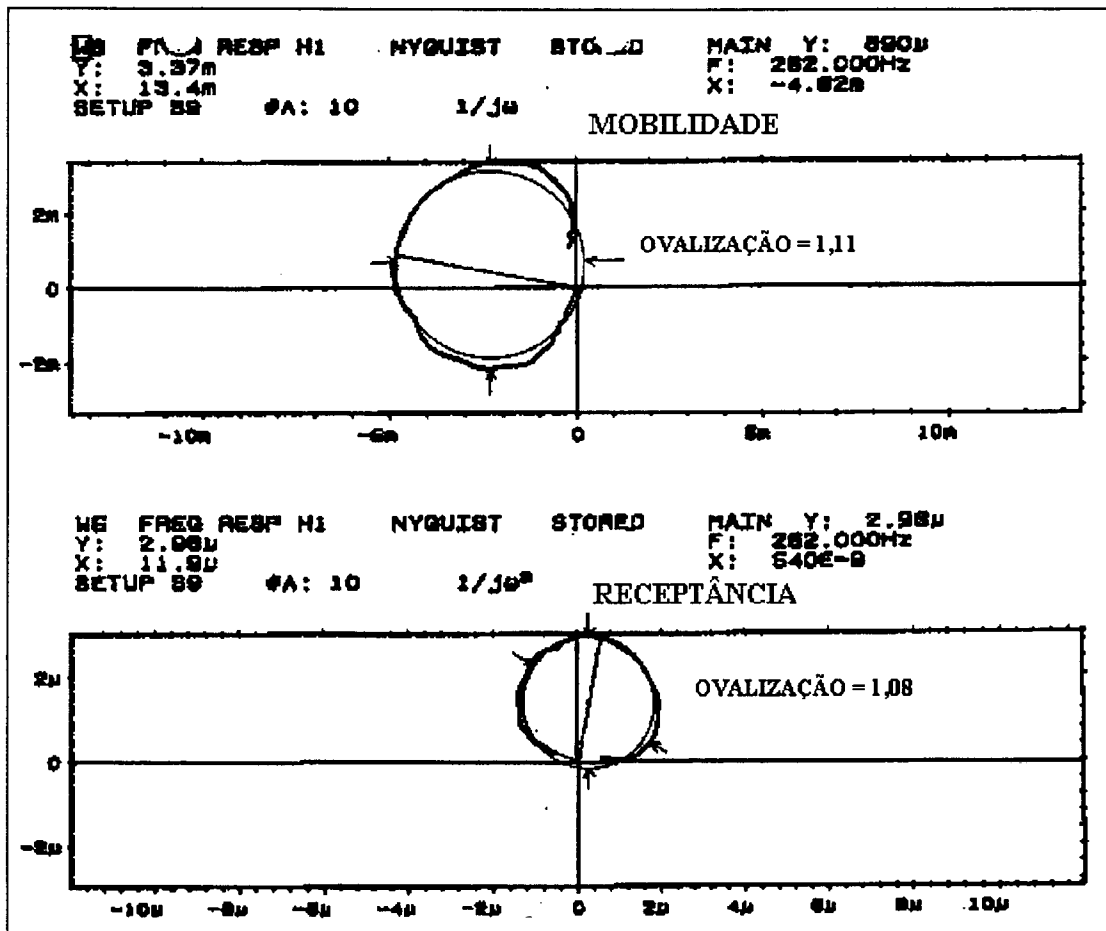


Figura 2.21: Comparação do ajuste a um círculo da FRF em receptância e em mobilidade.

Outra maneira de efetuar esta análise é observar a componente imaginária da curva inversa da mobilidade. Caso ela apresente-se horizontal, temos que o valor do amortecimento será constante na faixa de frequência observada, definindo o amortecimento histerético. Caso a curva mostre uma inclinação, temos que o valor do amortecimento varia na faixa de frequência observada, definindo o



amortecimento viscoso. Na figura 2.22 tem-se uma representação indicando ser o modelo de amortecimento viscoso o mais indicado para representar o sistema.

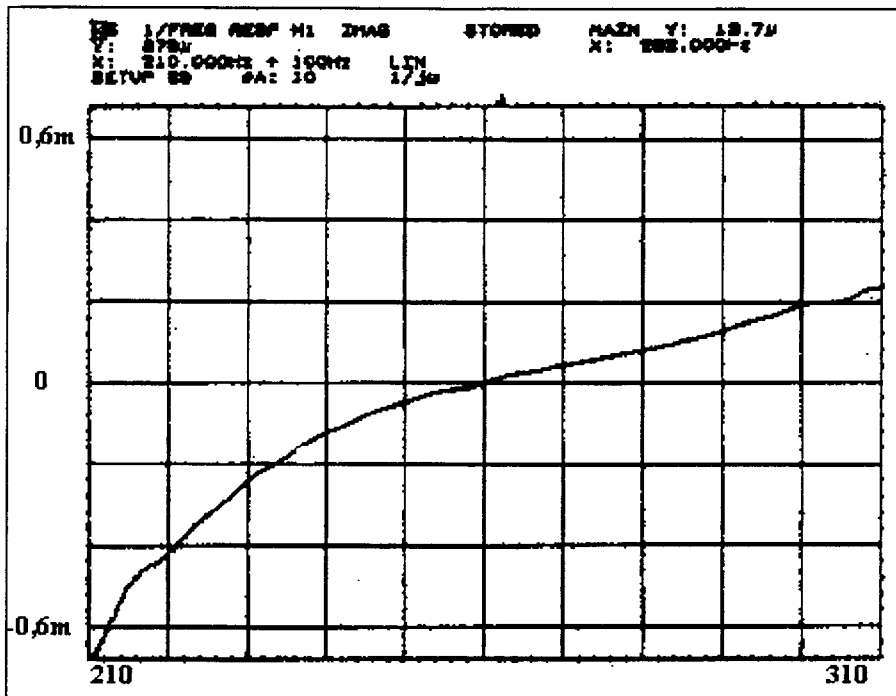


Figura 2.22: Componente imaginária da curva inversa da mobilidade.

O procedimento de cálculo gráfico usando 10 pares de pontos superiores e inferiores ao autovalor está representado na figura 2.23, onde tem-se a frequência de 260,84 Hz para a frequência natural obtida pelo critério do fator de velocidade de varrimento máximo de frequência.

Adota-se o autovalor como referência para localizar os ângulos  $\frac{1}{2}\theta_a$  e  $\frac{1}{2}\theta_b$ . Dos valores obtidos calcula-se os valores de amortecimento para cada par de pontos pela fórmula:

$$\zeta_r = \frac{w_a^2 - w_b^2}{2w_r \left( w_a \tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + w_b \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right)} \quad (2.30)$$

Obtem-se a tabela 2.1 abaixo que está plotada na figura 2.24.

Do gráfico da variação de  $\zeta_r$  devido aos pontos da curva de Nyquist usados para o cálculo, constata-se que nesta medição não existe uma tendência predominante ostensiva, apenas desvios aleatórios de até 40% (valores de  $\zeta_r$  de 4,1 a 7,1%).

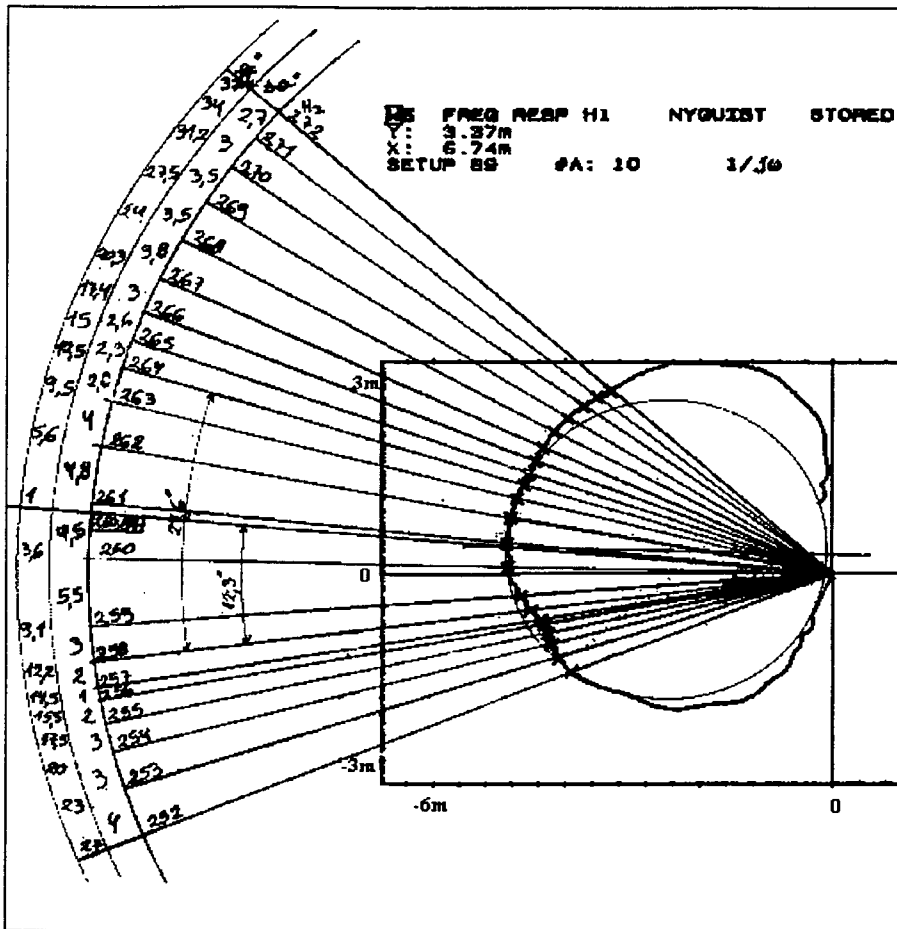


Figura 2.23: Cálculo gráfico na FRF em Nyquist.

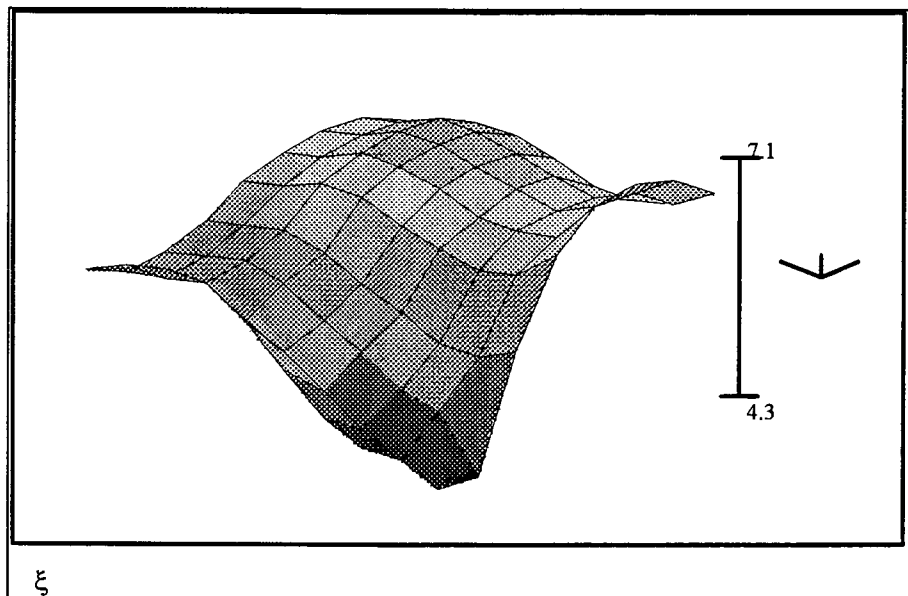


Figura 2.24: Variação do fator de amortecimento com a escolha de pontos da curva de Nyquist distintos (252 a 269 Hz).

$\frac{f_a \theta_a}{f_b \theta_b}$	261	262	263	264	265	266	267	268	269
	1	5.6	9.5	12.5	25	17.4	20.3	24	27.5
260 3.6	0.048	0.048	0.050	0.054	0.058	0.061	0.061	0.060	0.058
259 9.1	0.043	0.045	0.047	0.050	0.054	0.056	0.058	0.057	0.056
258 12.2	0.043	0.049	0.050	0.053	0.055	0.058	0.059	0.058	0.057
257 14.5	0.056	0.054	0.064	0.056	0.058	0.060	0.061	0.060	0.059
256 15.5	0.066	0.062	0.061	0.062	0.063	0.065	0.065	0.063	0.062
255 17.5	0.070	0.065	0.064	0.064	0.066	0.067	0.067	0.065	0.064
254 20	0.071	0.067	0.065	0.066	0.067	0.068	0.068	0.066	0.065
253 23	0.070	0.067	0.065	0.066	0.067	0.068	0.068	0.066	0.065
252 27	0.067	0.064	0.063	0.063	0.065	0.066	0.066	0.064	0.063

Tabela 2.1: Valores de  $\zeta$  calculados na curva de Nyquist.

Para o cálculo do coeficiente modal  $A_r$ :

$${}_r D_{jk} = \frac{|{}_r A_{jk}|}{w_r^2 2\zeta_r} \quad (2.31)$$

ou seja:

$$|{}_r A_{jk}| = {}_r D_{jk} w_r^2 2\zeta_r \quad (2.32)$$

$$|{}_r A_{jk}| = 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot (2 \cdot \pi \cdot 260,84)^2 \cdot 2 \cdot 0,0586 = 755,52 m/s^3$$

#### 2.3.4.4) Método do ajuste do círculo de Nyquist - critério da distância à origem.

Neste método têm-se as mesmas etapas e fórmulas apresentadas no método anterior, sendo a única diferença em relação ao cálculo do autovalor, o qual é definido pelo ponto do círculo de Nyquist mais distante da origem do sistema.

No caso em estudo, tem-se um valor de 262 Hz para a frequência natural. Uma vez que este valor é apenas cerca de 0,44% diferente do obtido pelo método anterior, o dispêndio de esforços para recalcular os parâmetros  $\zeta_r$  e  ${}_r A_{jk}$  parece ser ausente de um sentido prático real. Portanto, adotam-se os resultados anteriores como uma boa estimativa para este método, com a exceção do autovalor que é a base que distingue os métodos.

#### 2.3.5) Definição do nível de discretização do modelo.

Com o objetivo de verificar qual a discretização espacial necessária e suficiente para a obtenção de resultados válidos desta análise modal, três níveis distintos de discretização foram avaliados: 5, 9 e 17 nodos (vide figura 2.25).

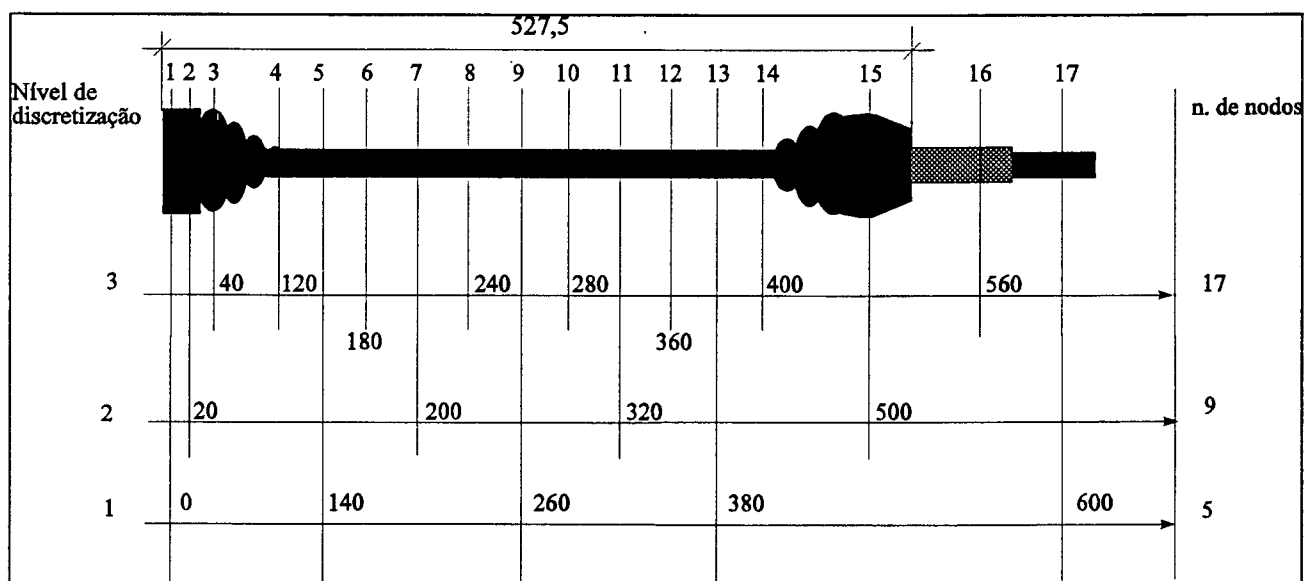


Figura 2.25: Níveis de discretização no modelo.

A importância desta definição é fácil de vislumbrar quando tem-se em mente o trabalho que ocasiona analisar todas as informações obtidas no estudo. A determinação do nível de discretização ótimo passa por um compromisso dos seguintes parâmetros: esforço dispendido na análise dos dados e precisão do modo obtido.

Em todas as análises efetuadas foi avaliada a influência de se adotar os três níveis distintos propostos. Os resultados para a análise efetuada, usando o método básico da amplitude do pico, apresentados na figura 2.26, mostram claramente que, em relação ao autovetor, o modelo com nove nodos é o mais indicado, uma vez que o de cinco nodos não consegue representar adequadamente o modo de vibração e o de dezessete nodos apresenta informações redundantes. Para as demais análises obteve-se o mesmo resultado.

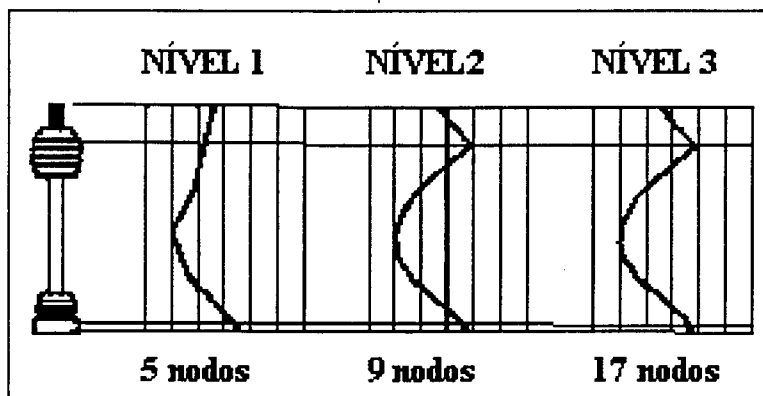


Figura 2.26: Comparação do autovetor obtido nas três malhas de discretização.

Em relação ao autovalor e ao fator de amortecimento, os resultados apresentados no final deste capítulo mostram que estes parâmetros modais são estáveis em relação ao nível de discretização utilizado.

### 2.3.6) Análise modal experimental manual - resultados obtidos.

Para a análise manual dos dados, as seguintes representações da curva de resposta em frequência foram plotadas para cada medição efetuada:

a) Magnitude da mobilidade em escala decibel ( $MAG|Y|dB$ ) e coerência da medição com pontos de meia potência salientados.

b) Mobilidade em Nyquist com pontos selecionados na faixa de 250 a 280 Hz identificados para o uso nos cálculos.

c) Inversa da mobilidade em Nyquist com alguns pontos selecionados na faixa de 252 a 312 Hz identificados.

d) Parte real e imaginária da mobilidade com pontos de máximos, de mínimo e zero identificados. Um resumo esquemático da análise destas funções está apresentada na figura 2.27.

As mesmas curvas de resposta em frequência foram arquivadas no microcomputador para posterior análise pelo software PCMODAL.

A análise foi efetuada fixando o acelerômetro no nodo nove do modelo por meio da base magnética. Este ponto foi escolhido por apresentar uma grande amplitude de movimento no modo de vibração em análise. A excitação efetuada com o uso do martelo excitador percorreu todos os nodos do modelo para obter um vetor completo da matriz modal da estrutura.

Por simplicidade, o critério de normalização dos autovetores escolhido foi a normalização unitária.

A seguir são apresentados os resultados finais obtidos e respectivos comentários.

#### **2.3.6.1) Método da amplitude do pico básico.**

Os resultados obtidos para o autovalor, o autovetor e o fator de amortecimento estão apresentados no gráfico 2.28, apresentando um autovalor médio de 270,194 Hz e um fator de amortecimento médio de 5,83%. No caso do autovalor tem-se uma dispersão pequena de valores em relação ao local da excitação (desvio padrão de cerca de 0,8% da média), porém no caso do fator de amortecimento tem-se uma dispersão bem superior (desvio padrão de cerca de 22% da média). Isto exprime a dependência do fator de amortecimento calculado com o local da excitação, indicando haver locais onde o processo de dissipação de energia vibratória se concentra. O autovetor mostra-se suave com exceção aos locais de ligação entre as juntas homocinéticas e o eixo, evidenciando um certo desacoplamento de movimentos entre estes três componentes. O eixo apresenta uma configuração deformada, similar a uma viga em vibração no primeiro modo transversal, enquanto as juntas apresentam translações de corpo rígido ("rocking modes").

FRF	Verificações preliminares	Parâmetro modal.
$ Y $ log-log MAG COERÊNCIA	Fixação → baixas frequências. Local da med. resp. → altas freq. # anti-res. versus # resson. Agudez dos picos e vales.	Coef. Infl. $A_r$ Fator de amortecimento Frequência natural $w_n$
$ Y $ NYQUIST	Forma circular: Qualidade da medição. Influência de outros modos. Tipo de amortecimento.	Coef. Infl. $A_r$ Fator de amortecimento. Frequência natural $w_n$ . Qualidade da medição: Amortec. $\times w_a \times w_b$ .
$ 1/Y $ NYQUIST	Forma retilínea: Qualidade da medição.	Fator de amortecimento.
Re $ Y $	Influência de outros modos.	Coef. de influência $A_r$
Im $ Y $	Tipo de amortecimento.	Frequência natural $w_n$

Apresentação dos resultados:

Matriz de amortecimento: 
$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_r^2(1+i\zeta_r) & \\ & & \backslash \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Freq. nat.  $w_n$ : média ponderada pelo fator de qualidade.

Coef. modal  $A_r$ : média ponderada pelo fator da qualidade.

Matriz dos autovetores (modal):  ${}_r A_{jk}]_{m \times m}$ .

$A_r$  normalizado pela normalização unitária..

Figura 2.27: Análise modal "Manual".

### 2.3.6.2) Método da amplitude do pico estendido.

Os resultados da análise estão apresentados na figura 2.29, apresentando um autovalor médio de 277,997 Hz e um fator de amortecimento médio de 4,72%. No caso do autovalor, tem-se uma dispersão com desvio padrão de cerca de 1,9% do valor médio e para o fator de amortecimento, de cerca de 18% do valor médio. O autovetor apresenta algumas distorções atribuídas ao processo de cálculo dos coeficientes modais. Apesar disto, apresenta, a grosso modo, o mesmo comportamento descrito anteriormente.

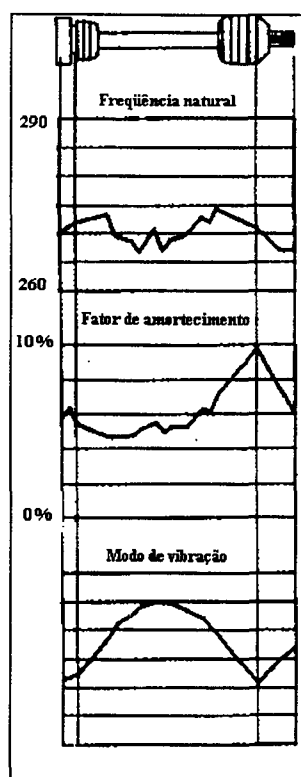


Figura 2.28: Análise modal manual.

Método básico da  
amplitude do pico.

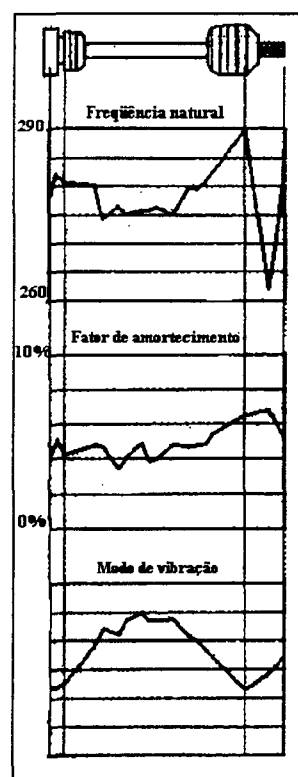


Figura 2.29: Análise modal manual.

Método estendido da  
amplitude do pico.

### 2.3.6.3) Método de ajuste do círculo de Nyquist - critério da velocidade de varrimento.

Nesta análise não foi adotado o procedimento expedito porque ele se baseia na constância dos valores obtidos para o autovalor e o fator de amortecimento para os diversos pontos de medição das curvas de resposta em frequência da estrutura. Como foi verificado nos métodos anteriores que



estes parâmetros variam de maneira considerável, considera-se necessária a obtenção de pelo menos uma estimativa destes valores para cada ponto de medição efetuada.

O procedimento foi totalmente manual (escolha de ponto da curva, ajuste de um círculo com uso de compasso, medição de ângulos com régua e transferidor,...), acarretando que os resultados têm uma componente subjetiva na sua obtenção, espelhando a habilidade (ou falta de) do operador.

No cálculo do autovalor pela velocidade de varrimento, o processo de executar uma média ponderada, usando o incremento na frequência como ponderador, parece aceitável, apenas o uso de uma faixa de frequência simétrica em relação ao autovalor (sempre é possível obter uma estimativa por mera inspeção) é importante para evitar um resultado tendencioso.

Para o cálculo da variação do fator de amortecimento com os pontos da curva escolhidos, foram usados cinco pares de frequências superiores e inferiores ao autovalor nas medições efetuadas com a excitação nos nodos 1, 9 e 17. Os resultados obtidos estão apresentados no gráfico 2.30 e indicam que o eixo apresenta comportamento mais linear que o apresentado pelas juntas homocinéticas.

Os resultados desta análise estão apresentados no gráfico 2.31, indicando um autovalor médio de 270,10 Hz, com desvio padrão de cerca de 9% e um fator de amortecimento médio de 5,86%, com desvio padrão de cerca de 25%. O autovalor mostra-se razoavelmente suave e confirma o comportamento observado nas duas análises anteriores.

#### **2.3.6.4) Método do ajuste do círculo de Nyquist - critério da distância à origem.**

Nesta análise tem-se que a determinação do autovalor se dá pelo critério do afastamento em relação ao centro do sistema, sendo o cálculo do autovetor e fator de amortecimento idênticos ao caso anterior. Devido a este fato, os resultados de autovalores obtidos estão apresentados no gráfico 2.31, sobrepostos à análise anterior para comparação direta. Neste caso tem-se que o autovalor apresenta um valor médio de 266,12 Hz e dispersão dada por um desvio padrão de cerca de 0,4% da média.

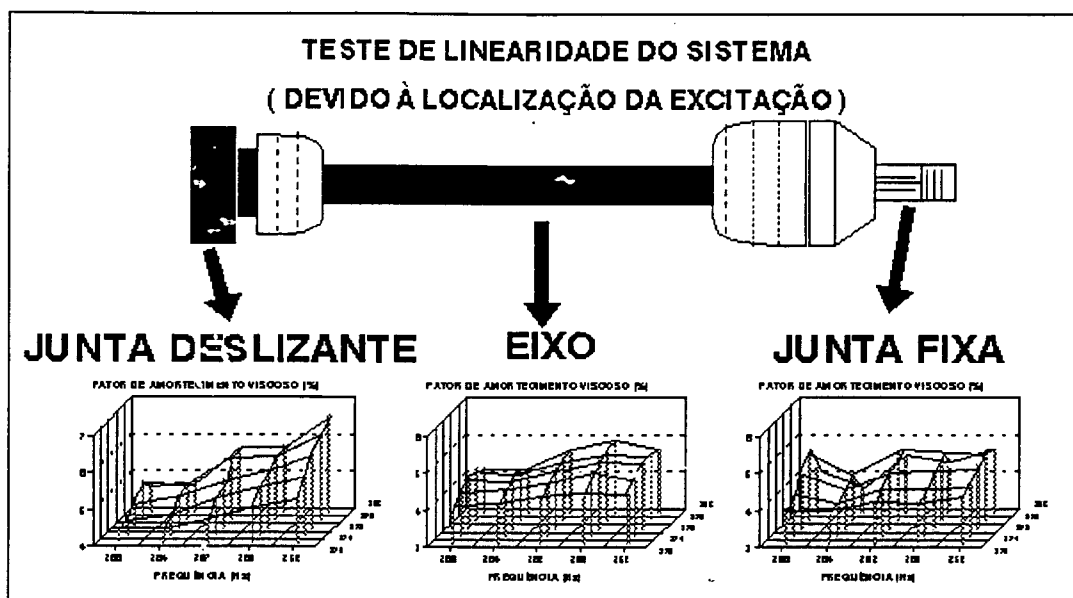


Figura 2.30: Variação do fator de amortecimento com os pontos escolhidos no círculo de Nyquist.

Excitação efetuada em locais distintos do semi-eixo.

### 2.3.7) Análise efetuada com software PCMODAL.

Para efetuar uma comparação dos resultados obtidos com os cálculos manuais pelos métodos apresentados anteriormente em relação aos resultados obtidos com o software, foi efetuada a análise dos mesmos dados com o uso do software PCMODAL.

Os resultados obtidos estão apresentados no gráfico 2.32 e apresentam um valor médio para o autovalor de cerca de 270,86 Hz, com um desvio padrão de 9% da média e um valor médio para o fator de amortecimento de 4,84%, com um desvio padrão de cerca de 21% do valor médio. O autovetor apresenta-se razoavelmente suave, com um comportamento similar ao descrito pela análise modal manual: eixo deformado em primeiro modo de ressonância transversal e juntas com movimento de corpo rígido. Os resultados obtidos diretamente pelo software estão apresentados nas figuras 2.33 (representação gráfica do autovetor), 2.34 (resultados da análise antes da normalização unitária) e 2.35 (resultados da análise após a normalização unitária).

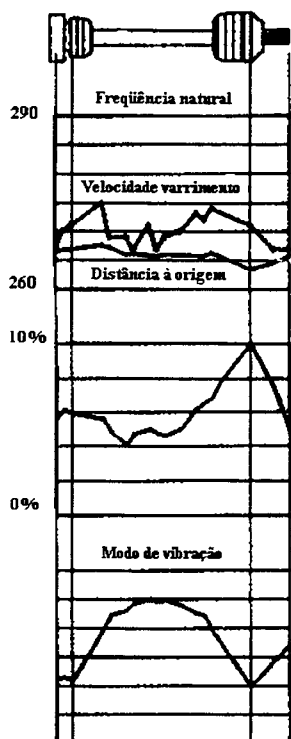


Figura 2.31: Análise modal manual.  
Método do ajuste de curva em Nyquist.

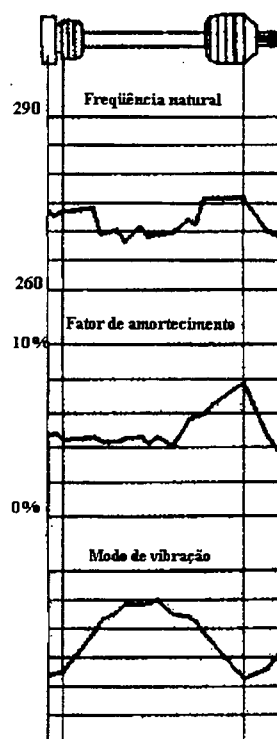


Figura 2.32: Análise modal via software PCMODAL

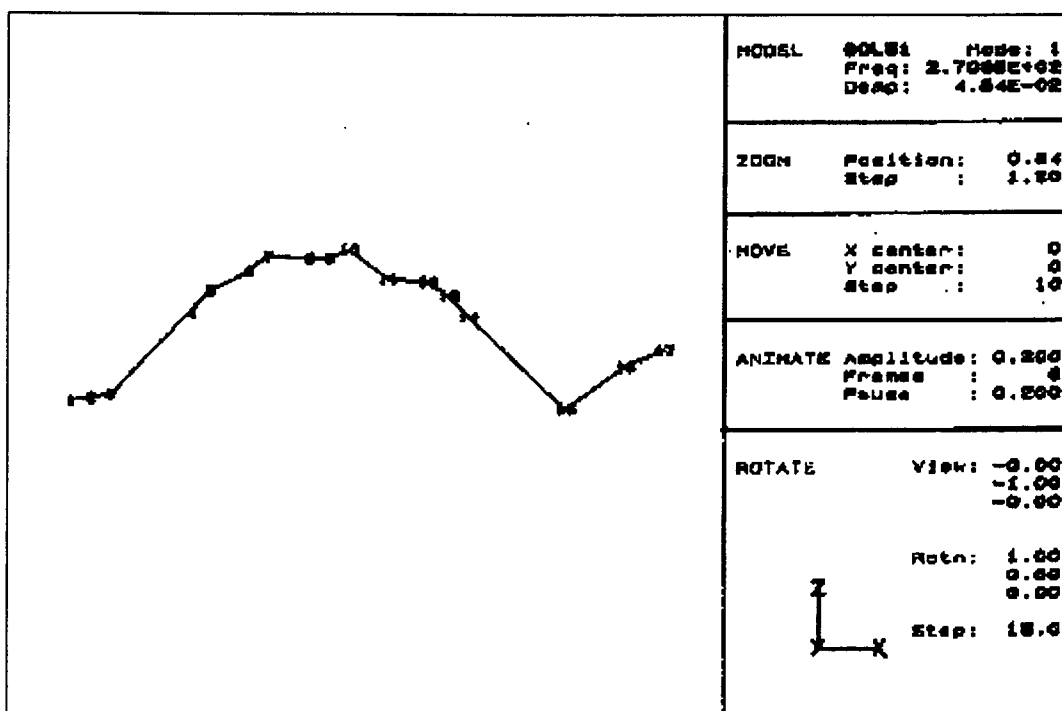


Figura 2.33: Representação gráfica do autovetor fornecido pelo PCMODAL.

Residues - Mode # 1									
Average Frequency: 2.7088E+02 Hz.					Average Damping: 4.84 %				
	Chan 1		Chan 2		Frequency	Damping	Residue		
	Node	Dir	Node	Dir	(Hz.)	(%)	Mag	Phase	
1	1	3	8	3	2.7384E+02	4.87	1.8537E+02	-126.14	
2	2	3	8	3	2.7271E+02	4.81	1.8828E+02	-121.08	
3	3	3	8	3	2.7341E+02	4.43	1.3143E+02	-128.37	
4	4	3	9	3	2.7415E+02	4.58	2.4882E+02	58.81	
5	5	3	9	3	2.6841E+02	4.31	3.5812E+02	48.88	
6	6	3	9	3	2.7023E+02	4.33	4.404E+02	47.41	
7	7	3	9	3	2.6807E+02	4.53	5.1558E+02	55.13	
8	8	3	9	3	2.7082E+02	4.92	5.1122E+02	47.83	
9	8	3	9	3	2.8801E+02	4.19	5.0840E+02	48.88	
10	10	3	8	3	2.8935E+02	4.80	5.4840E+02	53.02	
11	11	3	8	3	2.8865E+02	4.09	4.1188E+02	47.40	
12	12	3	8	3	2.7188E+02	5.68	3.9134E+02	48.53	
13	12	3	8	3	2.7128E+02	5.87	3.3138E+02	47.87	
14	14	3	9	3	2.7588E+02	6.58	2.3244E+02	40.88	
15	15	3	8	3	2.7887E+02	7.78	2.1888E+02	-188.18	
16	16	3	8	3	2.5885E+02	4.83	2.5283E+01	188.00	
17	17	3	8	3	2.8673E+02	3.54	7.7358E+01	72.05	

Figura 2.34: Resultados da análise antes da normalização unitária.

Frequency & Damping Table				
Mode #	Frequency (Hz.)	Damping (%)	Generalized Mass Mag	Phase
1	2.7088E+02	4.84E+00	2.88E+00	124.

Mode Shape # 1		
Frequency = 2.7088E+02 Hz.		
Damping = 4.04 %		
Node	Mag	Phase
1	3.82E-01	-178
2	2.78E-01	-174
3	2.40E-01	-178
4	4.50E-01	3
5	8.55E-01	-3
6	9.10E-01	-8
7	9.40E-01	2
8	8.32E-01	-5
9	8.27E-01	-3
10	1.00E+00	8
11	7.81E-01	-8
12	7.14E-01	-8
13	8.04E-01	-5
14	4.28E-01	-12
15	3.88E-01	-188
16	4.81E-02	118
17	1.41E-01	19

Figura 2.35: Resultados da análise após normalização unitária.

### **2.3.8) Conclusões gerais obtidas com as análises efetuadas.**

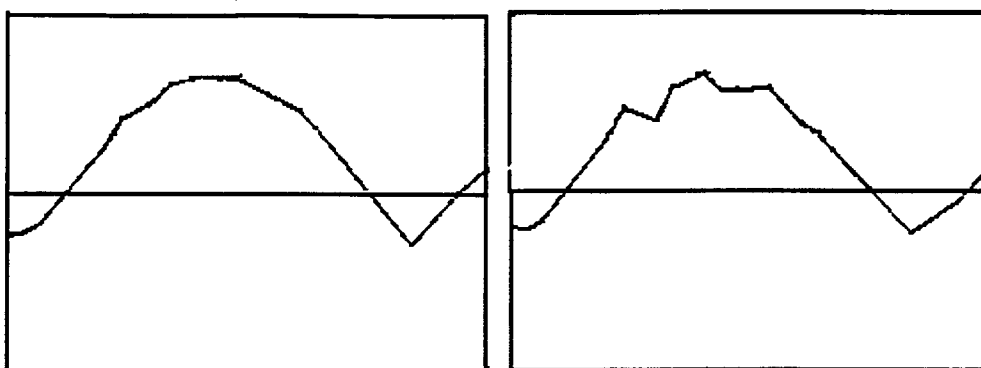
Uma vez que o objetivo do benchmark realizado neste capítulo é o de avaliar o uso do software PCMODAL frente ao fenômeno vibratório de primeira ressonância transversal do semi-eixo homocinético, a seguir são relatadas as conclusões obtidas, não apenas sobre a coerência dos resultados das diferentes análises, mas também sobre o comportamento do semi-eixo e suas peculiaridades que influem na análise modal experimental.

#### **2.3.8.1) Morfologia do modo analisado.**

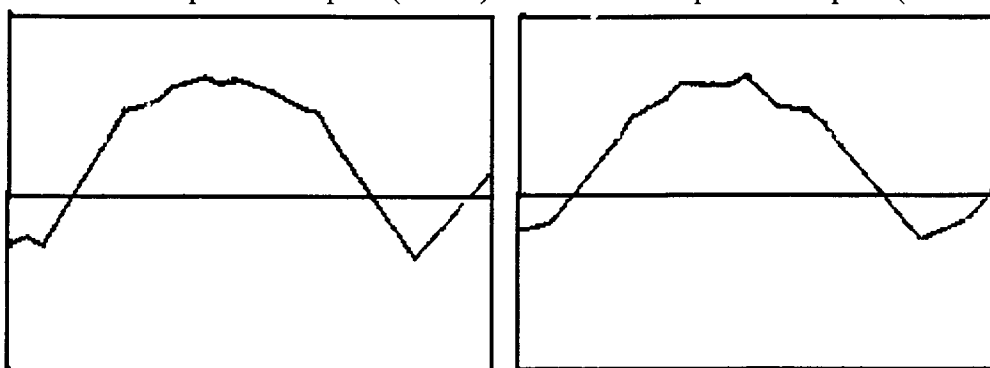
O autovetor do primeiro modo de vibração transversal do semi-eixo caracteriza-se pelo eixo vibrando em uma configuração que lembra o primeiro modo de uma viga em condição livre-livre, porém a existência das juntas de diferentes tipos em cada extremo causa uma assimetria a este movimento (a junta mais compacta (junta deslizante) restringe mais o movimento do que a junta fixa, fazendo com que o pico de movimento seja mais próximo dela). Observa-se que o eixo domina a frequência natural e o autovetor do semi-eixo, sendo ele o componente mais propício para modificações.

A junta deslizante tipo disco se comporta como um elemento de ancoramento e não apresenta alteração angular apreciável, ou seja, apresenta-se em movimento de corpo rígido ("rocking mode"). Seu movimento é em anti-fase ( $-180^\circ$ ) em relação ao eixo. A junta fixa apresenta-se também em movimento de corpo rígido (sua frequência natural à flexão é, assim como a da junta deslizante, muito mais elevada do que a do semi-eixo), porém apresenta um movimento angular considerável, ocorrendo um "nó de vibração" do semi-eixo próximo ao seu centro de inércia à rotação. Seu movimento é em anti-fase ( $-180^\circ$ ) em relação ao eixo. Cabe salientar que no caso da junta deslizante ser do tipo ponteira, seu comportamento se assemelha à junta fixa analisada.

A comparação dos autovetores obtidos com as quatro análises executadas está representada no gráfico 2.36. O autovetor mais agradável (contínuo) é o obtido com o método da amplitude do pico (básico), e o mais irregular é o obtido com o método da amplitude do pico (extensão). Todos os resultados são coerentes, apresentando o mesmo tipo de autovetor descrito acima.



Método da amplitude do pico (básico). Método da amplitude do pico (extensão).



Método do ajuste de curva em Nyquist.

Software PCMODAL.

Figura 2.36: Comparação dos autovetores obtidos com as diferentes análises.

### 2.3.8.2) Discretização necessária para representar adequadamente o modo de vibração.

Tendo em mente as observações obtidas no autovetor do semi-eixo , constata-se que, para representação mínima suficiente para o modo em questão, temos as seguintes regras:

a) A discretização do eixo é a parte mais importante e que exige maior refinamento. Isto devido a este componente dominar o modo de vibração do conjunto e devido aos grandes deslocamentos ( ou fatores de influência modal  $rA_{kj}$ ) obtidos neste componente. Para tal, pode-se considerar o modo deste componente como o modo de uma viga em flexão, porém o modo é assimétrico (como no caso de uma viga não uniforme). Portanto, para o primeiro modo, três pontos de medição seriam suficientes para obter uma configuração grosseira, porém, devido à assimetria do movimento, indica-se um mínimo de cinco pontos de medição distribuídos pela peça para identificar a localização do local de maior deslocamento do eixo.

b) A discretização da junta fixa exige apenas dois pontos de medição para caracterizar seu movimento de corpo rígido.

c) A junta deslizante tipo disco poderia ser representada por apenas um ponto de medição devido ao seu movimento angular ser quase desprezível.

d) Salienta-se que medições executadas em local próximo a um nó de vibração são difíceis de analisar (ruído alto, influência de outros modos,...), gerando valores que normalmente destoam do autovetor contínuo (suave). Estes valores devem ser considerados com as devidas ressalvas sobre a sua exatidão.

e) A influência do nível de discretização na obtenção de uma estimativa do autovalor e do fator de amortecimento viscoso está representada no gráfico 2.37, onde conclui-se:

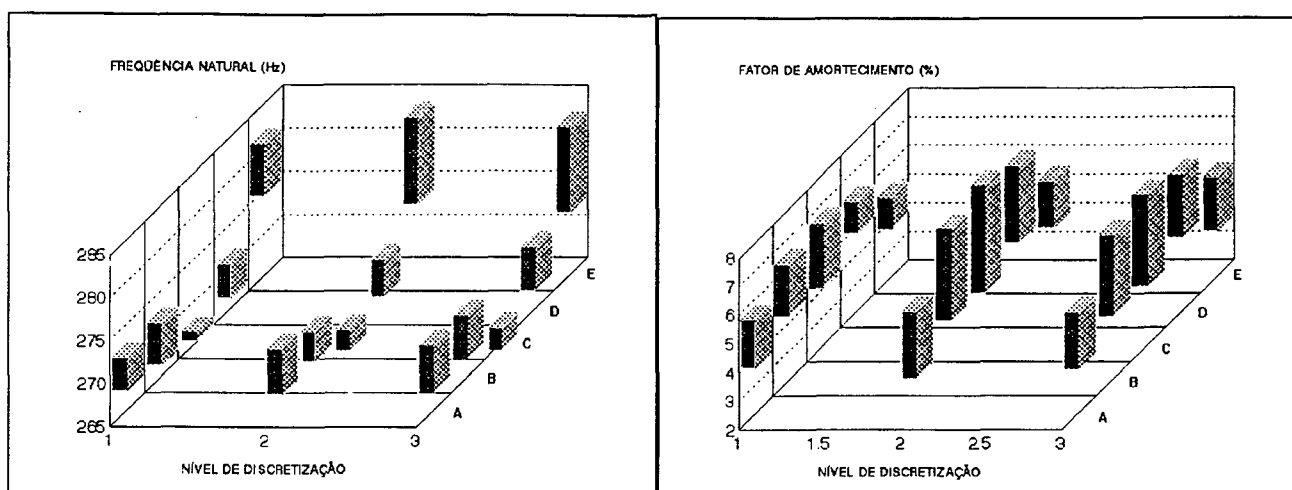
- o valor médio e a dispersão obtidos para o autovalor é semelhante nos três níveis, indicando ser o autovalor estável em relação à discretização do modelo.

- para o fator de amortecimento têm-se uma estimativa de valor médio e dispersão estáveis, exceto a dispersão obtida para a análise com Nyquist, a qual mostrou-se muito sensível em relação à discretização.

Portanto, pode-se concluir que o autovalor e o fator de amortecimento não exigem uma discretização muito refinada para obter uma estimativa confiável. Apenas o autovetor apresenta uma grande dependência entre a qualidade esperada da análise e o refinamento do modelo.

### **2.3.8.3) Efeito dos picos gêmeos.**

O efeito dos picos gêmeos foi identificado nesta análise. Trata-se do aparecimento de dois picos de vibração muito próximos. É efeito da não axisimetria perfeita do objeto, sendo as causas: eixo levemente empenado, juntas apresentam simetria a cada  $60^\circ$  e não apresentam uma relação fixa espacial (a posição angular relativa entre elas pode mudar dependendo da fixação das peças no eixo). A própria fixação do espécime (livre-livre) com o uso de fios de nylon e o conjunto na horizontal induz uma situação assimétrica de condições de contorno. A fixação vertical do objeto é inviabilizada pela existência da junta deslizante que tenderia a se distender durante o ensaio.



Legenda:

- A) Análise via PCMODAL  
 B) Análise por Nyquist ( critério de varrimento )  
 C) Análise por Nyquist ( critério de distância )  
 D) Análise pela amplitude do pico ( básico )  
 E) Análise pela amplitude do pico ( extensão )

Figura 2.37: Comparação dos autovalores e fatores de amortecimento obtidos com as diferentes análises.

Em alguns pontos de excitação este efeito é mais pronunciado do que em outros. Para visualizar esta distribuição, foram plotadas num mesmo gráfico todas as curvas de Nyquist obtidas. Observa-se que este efeito é mais pronunciado em níveis mais baixos de vibração, porém ele aparece em todos os níveis (vide figuras 2.38 e 2.39).

Como consequência deste fenômeno, pode-se salientar:

a) O cálculo do fator de amortecimento torna-se dependente da faixa de frequência escolhida. Se forem selecionadas faixas estreitas onde existe um domínio de apenas um dos picos, obtêm-se valores baixos e cuja curva de resposta em frequência regenerada fica uma estimativa bem inferior à curva obtida experimentalmente. Se forem selecionadas uma faixa de frequência muito larga, que envolva os dois picos por completo, a estimativa apresenta valores elevados, sendo a curva regenerada uma superestimada da curva de resposta em frequência experimental. Portanto, opta-se por considerar uma faixa de frequência que saliente o pico maior e identifique a contribuição do pico menor, para gerar uma curva mais aproximada da curva de resposta em frequência experimental. O uso do ajuste de dois modos nesta faixa de frequência para tentar representar a soma dos dois picos



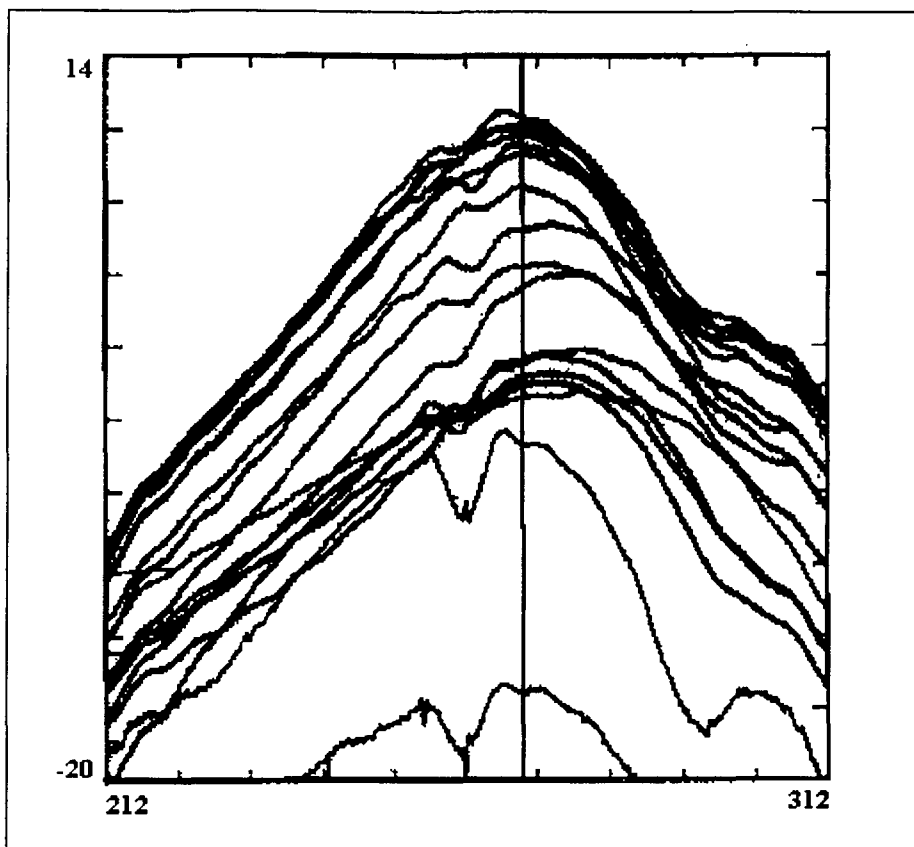


Figura 2.38: FRF em log mag de todos os nodos do modelo sobrepostas.

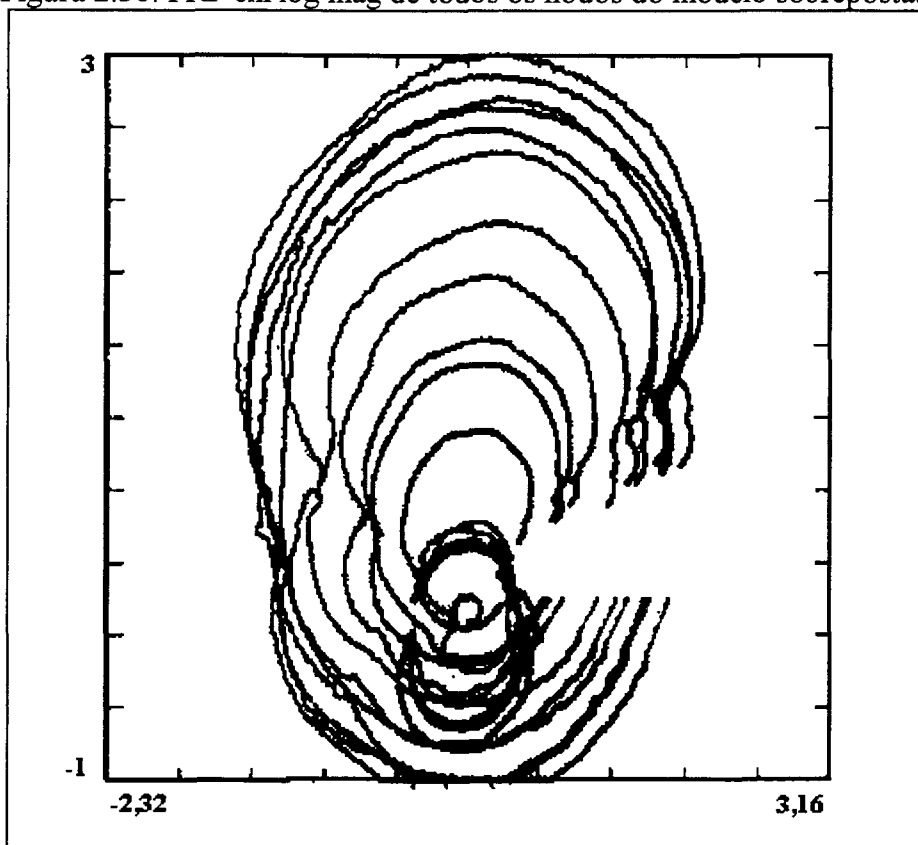


Figura 2.39: FRF em Nyquist de todos os nodos do modelo sobrepostas.

é inútil, pois a curva de resposta em frequência regenerada dista muito da experimental. Ajustar um pico de cada vez gera duas curvas regeneradas muito inferiores à original, e a resultante das duas simultaneamente é uma extrapolação.

b) O cálculo do autovalor segue a mesma diretiva. Pode-se obter um autovalor para cada pico, porém o resultado final (curva regenerada) dista do esperado (curva experimental). Portanto, optou-se por usar uma faixa de frequência que gera uma única frequência natural, cuja curva regenerada é próxima à experimental.

Esta opção de adotar um autovalor e um fator de amortecimento que represente adequadamente a curva experimental baseia-se na consideração prática de que cada eixo apresentará um nível de não axisimetria diferente, sendo importante, na realidade, apenas ter valores que representem a curva de resposta em frequência obtida de forma global para identificar os mecanismos vibratórios envolvidos.

c) O cálculo do coeficiente de influência modal é o mais crítico em relação a este fenômeno. A energia vibratória do modo em análise é partilhada pelos dois picos. Se eles forem de mesma amplitude, tem-se uma queda de 3 dB (metade da energia) na amplitude destes picos em relação à amplitude do pico caso este fenômeno não existisse. Como o efeito não é homogêneo em relação ao ponto de excitação, ele deforma os valores do coeficiente modal obtidos. Para tentar reduzir este problema, procura-se obter uma curva regenerada com mesma amplitude da medida, porém no caso de efeito exagerado (picos quase de mesma amplitude), adotamos uma estimativa superestimada em amplitude de até 3 dB (caso externo).

É óbvio que a escolha da orientação angular para a medição que reduza (ou até elimine) este efeito deve ser investigada antes de iniciar o ensaio e deve-se adotá-la como válida para a análise.

#### **2.3.8.4) Distribuição do valor calculado do autovalor e do fator de amortecimento no modelo.**

Em relação ao autovalor calculado, ocorre uma dispersão randômica dos resultados em relação ao ponto usado para a excitação, e a dispersão e o valor médio dependem da técnica usada, constatando-se que os valores tornaram-se mais estáveis (menor dispersão) quando próximos do centro do eixo. Isto se deve à qualidade da medição ser melhor neste local (amplitude do pico é

maior devido a ser próximo ao pico do modo (constante modal elevada), reduzindo o ruído na medição e a influência dos outros modos).

Em relação ao fator de amortecimento, a sua estimativa, em média, tem valores menores e mais estáveis nos pontos de medição no eixo (4,5%), na junta deslizante têm-se valores levemente maiores (5%) e na junta fixa observa-se valores sensivelmente maiores e com maior dispersão (até 8%).

#### **2.3.8.5) Comparação dos resultados obtidos com diferentes metodologias.**

A determinação do autovalor e do fator de amortecimento com o uso dos diferentes métodos mencionados indica que existe uma variação pequena da estimativa do autovalor dependendo da metodologia usada (cerca de 5%), enquanto a variação da estimativa do fator de amortecimento mostra-se mais amplo (cerca de 30%). Isto é visualizável no gráfico 2.40, onde constata-se que:

- Para o autovalor: estimativa obtida com o método da amplitude do pico (extensão) superestima e distoia dos demais métodos, e a estimativa obtida com o ajuste do círculo de Nyquist (pelo parâmetro do ponto mais distante da origem) torna-se subestimada e com a menor dispersão verificada. Os demais três métodos mostraram-se coerentes, gerando autovalores com dispersão semelhante. Cabe salientar que o resultado obtido com o PCMODAL encontra-se na faixa mediana (levemente superior) dos resultados obtidos, mostrando-se coerente com todos os demais.

- Para o fator de amortecimento: todas as análises geraram resultados semelhantes numa variação de 1,5 pontos percentuais, sendo o resultado obtido com o PCMODAL a estimativa inferior dentre as obtidas. O nível de dispersão de resultados foi semelhante em todos, exceto para análise através do ajuste de curva em Nyquist, que apresentou-se mais sensível em relação à discretização usada no modelo e com a maior dispersão entre os métodos analisados. Isto se deve ao fato deste ser um método mais preciso (ou sensível) para calcular o valor do fator de amortecimento.

#### **2.3.8.6) Influência de outros modos.**

Pela pequena distância existente entre o círculo de Nyquist e a origem, constata-se que existe uma influência muito reduzida de modos fora da faixa de frequência escolhida para a análise.

Análise	Nível	Fn méd. pond.	D.P.Fn	Coef. Amort [%]	D.P. C.A.
PCMODAL	1	270,15	1,91	4,70	0,81
	2	270,26	2,51	4,80	1,21
	3	270,86	2,39	4,84	1,00
Ampl. pico básico	1	269,10	1,91	5,49	0,50
	2	269,32	1,85	5,99	1,45
	3	270,19	2,28	5,83	1,26
Ampl. pico extensão	1	277,65	2,62	4,51	0,53
	2	278,93	4,72	4,78	0,76
	3	278,00	5,40	4,72	0,87
NYQUIST (varrimento)	1	269,37	2,38	5,34	0,19
	2	268,99	1,88	5,97	1,62
	3	270,10	2,50	5,88	1,44
NYQUIST (distância)	1	266,34	0,55	5,34	0,79
	2	265,95	1,02	5,97	1,62
	3	266,12	0,98	5,86	1,44

**Legendas:**

Análise: Tipo de cálculo usado para a frequência natural e o fator de amortecimento.

Nível: Nível de discretização do modelo.

1→5 pontos    2→9 pontos    3→17 pontos

Fn méd. pond.: Média ponderada da frequência natural.

D.P.Fn: Desvio padrão da dispersão de Fn obtida.

Coef. Amort. [%]: Coeficiente de amortecimento viscoso obtido (em porcentagem).

D.P. C.A.: Desvio padrão do coeficiente de amortecimento

Figura 2.40: Resumo dos resultados.

No PCMODAL verifica-se o mesmo, pelo fato da curva regenerada ser semelhante na amplitude (em log mag) e na localização (em Nyquist), uma vez que a curva regenerada apresentada pelo software não considera os termos residuais (modos fora da faixa de frequência).

Cabe salientar que a faixa selecionada parece ser adequada para este modo ( $\Delta f=100\text{Hz}$ ), uma vez que tem-se uma ótima resolução ( a duplicação da resolução ( $\Delta f=50$ ) não altera em nada as curvas obtidas) e ao visualizar uma queda de 20 dB, em média, em log mag e em Nyquist tem-se uma curva praticamente completa, sendo a velocidade de varrimento das frequências próximas aos limites superiores e inferiores muito reduzidas.

#### **2.3.8.7) Comparação entre resultados PCMODAL e cálculos "à mão".**

A comparação entre autovalores, fatores de amortecimento e autovetores obtidos com as análises efetuadas estão nos gráficos 2.36, 2.37, 2.40 onde constata-se que as estimativas obtidas com o software são coerentes com as outras análises e expressam uma estimativa média de todas as análises efetuadas. A dispersão de resultados obtida para o autovalor e o fator de amortecimento é da mesma ordem em todas as análises e os autovetores obtidos são similares.

O fator de amortecimento obtido com o PCMODAL situa-se levemente abaixo dos demais. O autovalor obtido com o método de amplitude do pico (estendido) gerou uma estimativa superior às demais e com uma dispersão maior. Isto é explicável devido ao efeito de picos gêmeos que, neste caso, apresenta a ressonância superior com maior amplitude.

# Capítulo

# 3

## CAPÍTULO 3

### IDENTIFICAÇÃO DA EXCITAÇÃO VEICULAR

#### 3.1) Objetivo.

O primeiro passo para a identificação do comportamento do sistema em análise consta da identificação da excitação vibratória imposta pelo veículo quando o semi-eixo encontra-se desempenhando a sua função. Isto permite obter referências de nível energético e tipo de sinal que serão usados para efetuar ensaios, em laboratório, representativos das condições nas quais o semi-eixo homocinético se encontra quando na sua aplicação real.

Para tal, o veículo em teste (Gol a gasolina motor AP1600 ano 1988) foi instrumentado com acelerômetros em locais próximos aos acoplamentos do semi-eixo ao restante do veículo (saída do diferencial e cubo de roda), e um sistema de tratamento e gravação de sinais portátil foi acondicionado no veículo de forma a permitir a aquisição de dados colhidos, em condições reais de rodagem, do veículo em estrada para posterior análise espectral em laboratório.

#### 3.2) Revisão teórica.

Segundo a literatura [29],[30] e [31], em motores de combustão interna com elementos de movimento alternativo existem dois tipos de desbalanceamento: um proveniente do desbalanceamento rotacional dos elementos rotativos como o virabrequim e outro proveniente do movimento linear alternado de componentes como pistões e bielas.

Alguns motores, tais como a maioria dos ditos motores V-8, apresentam um balanceamento das partes móveis alternativas e o único desbalanceamento presente é o devido à parcela rotacional dos componentes. No caso em análise, temos um motor de ciclo Otto a quatro tempos com quatro cilindros em linha (o qual é um exemplo típico da grande maioria dos motores presentes na indústria automobilística mundial) que apresenta desbalanceamento devido

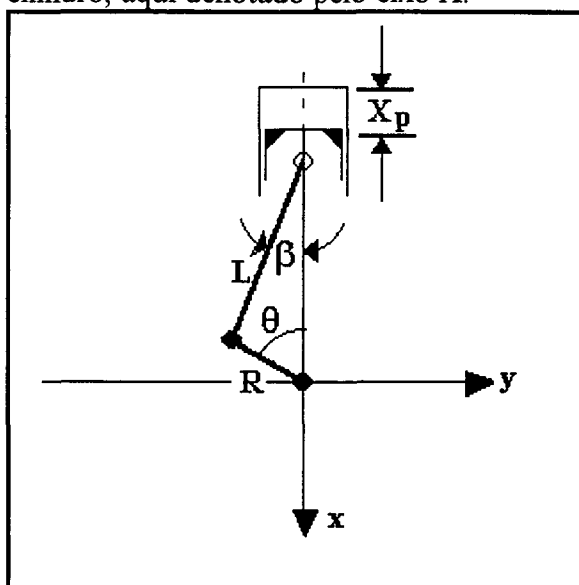
ao movimento alternativo inerente à sua concepção, e que gera vibrações que devem ser controladas para não serem transmitidas, de maneira indevida, ao habitáculo do veículo e seus ocupantes.

A seguir é apresentado o desenvolvimento dos conceitos básicos e formulário referente a este fenômeno vibratório, partindo do caso mais simples (motor de um cilindro) até o caso em análise (motor de quatro cilindros em linha).

### 3.2.1) Motor monocilíndrico.

Apesar do fato de que existem apenas raras aplicações de motor monocilíndricos em automóveis, este caso serve para ilustrar os conceitos básicos das forças de desbalanceamento alternativas. Além disto, qualquer motor multicilindro é uma composição deste caso sobre um mesmo virabrequim.

A figura 3.1 abaixo representa, esquematicamente, um pistão, uma biela e um virabrequim. A massa alternativa compõem-se do pistão e da parcela superior da biela. A força alternativa é dada pela multiplicação da massa alternativa pela aceleração da massa, ao longo do eixo do cilindro, aqui denotado pelo eixo X.



$X_p$  = deslocamento do pistão desde P.M.S.

$\theta = \omega t$  = ângulo do virabrequim desde P.M.S.

$R$  = Comprimento do braço do virabrequim.

$L$  = Comprimento da biela.

$\beta$  = ângulo entre a biela e o eixo do cilindro.

$\omega$  = velocidade angular do virabrequim.

Figura 3.1: Esquema de motor monocilíndrico.



Para obter a aceleração da massa alternativa pode-se derivar duas vezes o deslocamento do pistão. Um ponto de referência conveniente para o deslocamento do pistão é o ponto morto superior (PMS). Na figura 3.1 observa-se que o deslocamento do pistão ( $X_p$ ) pode ser escrito como:

$$X_p = R(1 - \cos \omega t) + L(1 - \cos \beta) \quad (3.1)$$

É assumido que a velocidade angular do virabrequim  $\omega$  é constante. O segundo termo  $L(1 - \cos \beta)$  é um fator de correção devido à inclinação da biela. O ângulo  $\beta$  pode ser expresso em termos do ângulo do virabrequim  $\theta = \omega t$ :

$$\sin \beta = \frac{R}{L} \sin \omega t \quad (3.2)$$

e

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \omega t} \quad (3.3)$$

A expressão exata para o deslocamento do pistão em termos do ângulo do virabrequim  $\omega t$  é:

$$X_p = R(1 - \cos \omega t) + L \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \omega t} \right) \quad (3.4)$$

onde  $R/L$  é a relação entre o raio do virabrequim e o comprimento da biela, sendo sempre inferior a 1.

Por conseguinte:

$$\left[ \left( \frac{R}{L} \right)^2 \sin^2 \omega t \right] \ll 1 \quad (3.5)$$

e  $\sqrt{1 - \left( \frac{R}{L} \right)^2 \sin^2 \omega t}$  pode ser escrito expandindo em uma série de potências de convergência rápida, da qual pode-se extrair o primeiro termo que gera uma ótima estimativa.

$$\sqrt{1 - \left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 wt} \cong 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2} \sin^2 wt$$

(3.6)

e

$$X_p \cong R(1 - \cos wt) + \frac{R^2}{2L} \sin^2 wt$$

(3.7)

Alterando o termo  $\sin^2 wt$  para cosseno:

$$X_p = R + \frac{R^2}{4L} - R \left( \cos wt + \frac{R}{4L} \cos 2wt \right)$$

(3.8)

Para obter a aceleração do pistão,  $X_p$  deve ser diferenciado duas vezes em relação ao tempo:

$$\ddot{X}_p = R w^2 \left[ \cos wt + \frac{R}{L} \cos 2wt \right]$$

(3.9)

Donde pode-se obter a força de desbalanceamento alternativo  $F_r$  dada por:

$$F_r = \frac{W_r}{g} \ddot{X}_p$$

(3.10)

onde  $W_r/g$  é a massa de deslocamento alternativo.

Ou seja:

$$F_r = \frac{W_r}{g} R w^2 \left[ \cos wt + \frac{R}{L} \cos 2wt \right]$$

(3.11)

Esta é a fórmula fundamental para o desbalanceamento alternativo que se aplica a um motor monocilíndrico ou a um cilindro individual num motor multicilíndrico. Da fórmula, pode-se separar as parcelas da força primária  $F_{r1}$  e secundária de desbalanceamento  $F_{r2}$ :

$$F_{r1} = \frac{W_r}{g} R w^2 \cos wt$$

(3.12)

$$F_{r2} = \frac{W_r R^2}{g L} w^2 \cos 2wt \quad (3.13)$$

A força total de desbalanceamento e os momentos associados para qualquer motor multicilindro podem ser expressos como uma combinação vetorial do desbalanceamento das forças dos cilindros individuais.

Graficamente, pode-se representar as forças de desbalanceamento em um cilindro individual durante um ciclo completo do virabrequim como o indicado na figura 3.2.

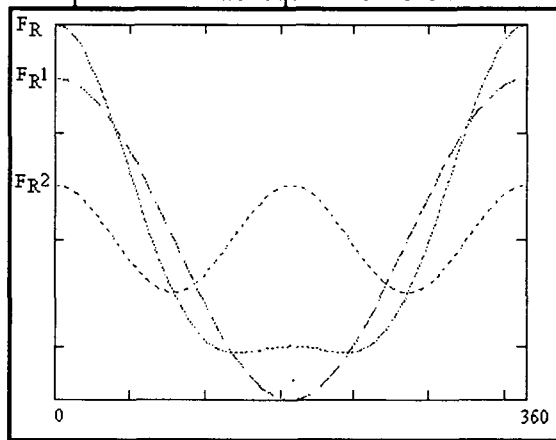


Figura 3.2: Variação das forças de desbalanceamento para um cilindro em uma revolução completa do virabrequim.

### 3.2.2) Motor multicilíndrico genérico.

Motores multicilíndricos, em adição às forças de desbalanceamento, podem apresentar também momentos ou pares de desbalanceamento devido à separação espacial existente entre os cilindros. A separação dos cilindros significa que as forças não são colineares e que existe a possibilidade de aparecerem momentos. A seguir é apresentado o caso para cilindros de duas disposições espaciais: em linha e em "V"

#### 3.2.2.1) Motores em linha.

Como já foi mencionado, um motor multicilíndrico pode ser considerado como uma combinação de cilindros individuais sobre um mesmo virabrequim. Para calcular as forças e momentos de desbalanceamento, a seqüência de explosões deve ser conhecida a priori.

Utilizando-se a posição do primeiro braço do virabrequim como uma referência angular, pode-se conhecer a posição dos demais braços usando uma orientação anti-horária da rotação do virabrequim. A posição angular relativa para os demais braços é estabelecida pela ordem de explosões (vide figura 3.3 abaixo).

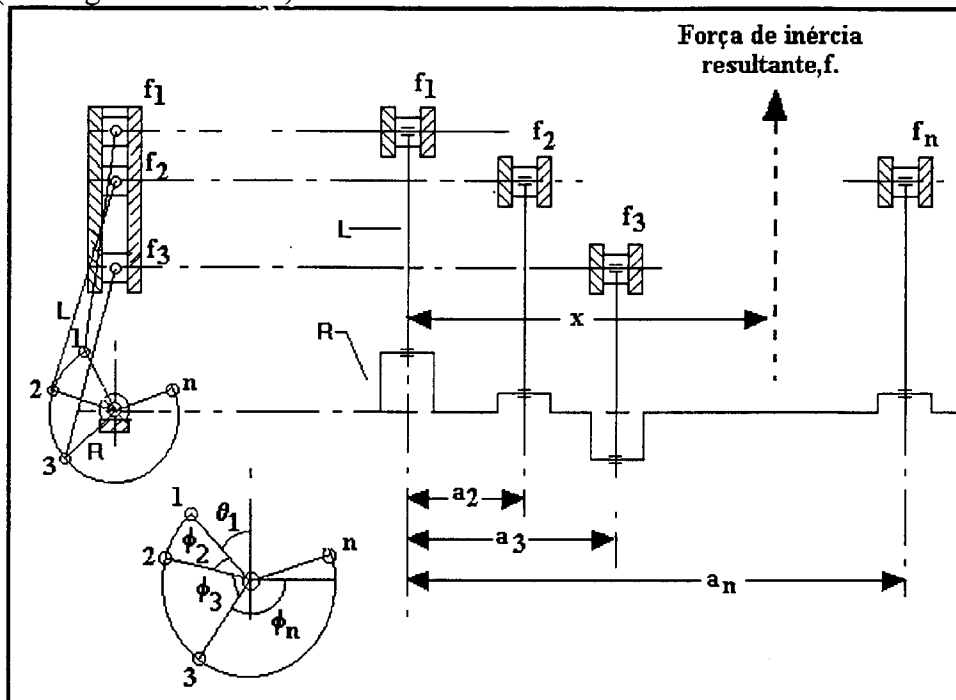


Figura 3.3: Disposição genérica de motor multicilíndrico em linha.

A força alternativa para cada cilindro, em um motor em linha genérico, é dada por:

$$F_1 = \frac{W_r}{g} RW^2 \left[ \cos(\omega t + \phi_1) + \frac{R}{L} \cos 2(\omega t + \phi_1) \right]$$

$$F_2 = \frac{W_r}{g} RW^2 \left[ \cos(\omega t + \phi_2) + \frac{R}{L} \cos 2(\omega t + \phi_2) \right]$$

---


$$F_n = \frac{W_r}{g} RW^2 \left[ \cos(\omega t + \phi_n) + \frac{R}{L} \cos 2(\omega t + \phi_n) \right]$$

(3.14)

onde:  $\frac{W_r}{g}$  é a massa alternativa para cada cilindro e é assumida como sendo a mesma para todos

os cilindros.

Os ângulos  $\phi_i$  são os ângulos entre o i-ésimo braço do virabrequim e o primeiro braço ( $\phi_1 = 0$  por definição).

A soma total das forças alternativas individuais representa a força de desbalanceamento alternativo resultante F.

$$F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (3.15)$$

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{W_r}{g} RW^2 \left[ \cos(wt + \phi_i) + \frac{R}{L} \cos 2(wt + \phi_i) \right] \quad (3.16)$$

Ou, expandindo em série de potências e rearranjando as funções trigonométricas, obtêm-se:

$$\sum_{i=1}^n \cos(wt + \phi_i) = \cos wt \sum_{i=1}^n \cos \phi_i - \sin wt \sum_{i=1}^n \sin 2 \phi_i \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^n \cos 2(wt + \phi_i) = \cos 2wt \sum_{i=1}^n \cos \phi_i - \sin 2wt \sum_{i=1}^n \sin 2 \phi_i \quad (3.18)$$

Tem-se a força final para a força de desbalanceamento alternativo resultante:

$$F = \frac{W_r}{g} RW^2 \left[ \cos wt \sum_{i=1}^n \cos \phi_i - \sin wt \sum_{i=1}^n \sin \phi_i + \frac{R}{L} \left( \cos 2wt \sum_{i=1}^n \cos 2 \phi_i - \sin 2wt \sum_{i=1}^n \sin 2 \phi_i \right) \right] \quad (3.19)$$

Devido ao fato dos cilindros não serem colineares, as forças alternativas individuais de cada um deles também não serão e um momento de desbalanceamento poderá aparecer.

Para o cálculo do momento "M" o cilindro número um é usado como referência e a grandeza "a<sub>i</sub>" é a distância do primeiro cilindro aos demais.

$$M = F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + \dots + F_n a_n \quad (3.20)$$

Substituindo nesta relação as fórmulas já apresentadas, tem-se:

$$F = \frac{W_r}{g} RW^2 \left[ \cos wt \sum_{i=2}^n a_i \cos \phi_i - \sin wt \sum_{i=2}^n a_i \sin \phi_i + \frac{R}{L} \left( \cos 2wt \sum_{i=2}^n a_i \cos 2 \phi_i - \sin 2wt \sum_{i=2}^n a_i \sin 2 \phi_i \right) \right] \quad (3.21)$$

As fórmulas derivadas para as forças e momentos de desbalanceamento alternativo mostram que, para as forças primárias estarem balanceadas, as somas dos senos e cossenos dos ângulos dos braços individuais do virabrequim devem ser iguais a zero.

$$\sum_{i=1}^n \cos \phi_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \text{sen } \phi_i = 0 \quad (3.22)$$

Para que as forças secundárias sejam nulas, as somas dos senos e cossenos do dobro dos ângulos dos braços individuais do virabrequim devem ser iguais a zero.

$$\sum_{i=1}^n \cos 2 \phi_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \text{sen } 2 \phi_i = 0 \quad (3.23)$$

Similarmente, os momentos primários estarão balanceados, caso tenha-se:

$$\sum_{i=2}^n a_i \cos \phi_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=2}^n a_i \text{sen } \phi_i = 0 \quad (3.24)$$

Os momentos secundários estarão balanceados, caso tenha-se:

$$\sum_{i=2}^n a_i \cos 2 \phi_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=2}^n a_i \text{sen } 2 \phi_i = 0 \quad (3.25)$$

Portanto, quatro possíveis resultados podem ocorrer da análise de forças e momentos alternativos:

1º) Somas de todas as forças e momentos referentes ao cilindro número um são nulas, implicando em balanceamento completo do motor.

2º) A força resultante é nula mas a resultante dos momentos, em referência ao primeiro cilindro, não é nula. Neste caso tem-se um desbalanceamento apenas de momentos.

3º) A força resultante não é nula, porém o momento resultante é zero. Neste caso tem-se um desbalanceamento com uma força no plano do primeiro cilindro.

4º) A força resultante e o momento resultante são diferentes de zero. Isto indica que o desbalanceamento é devido a uma força, cuja localização pode ser efetuada pela seguinte fórmula:

$$d = \frac{M}{F}$$

(3.26)

onde  $d$  identifica a distância desta força ao primeiro cilindro.

A maneira mais simples de fazer uso deste formulário é tabular cada caso possível. Nesta tabela tem-se a soma dos senos e dos cossenos de cada ângulo de braço do virabrequim. Se a soma é nula, existe o balanceamento. Caso exista desbalanceamento, a amplitude pode ser obtida multiplicando o fator apresentado na tabela pelos valores apropriados de peso, velocidade, dimensionamento, etc...

### 3.2.2.2) Motores em "V".

No caso de motores em linha, as forças e os momentos atuam em um plano definido pela orientação espacial dos cilindros. Para motores em "V" existem dois planos de cilindros, conseqüentemente, os momentos e as forças de desbalanceamento ocorrem em dois planos. A maneira mais fácil de tabular e lidar com estas forças e momentos é expressá-las por componentes horizontais e verticais.

A abordagem usual para a análise de motores tipo "V" é de calcular as forças para cada par de cilindros, separadamente, e combinar estes pares para obter as forças e momentos resultantes para o motor completo. Esta abordagem é adequada para motores nos quais cada par de cilindros comunga o mesmo braço de virabrequim. No caso de motores onde ocorre uma defasagem para cada cilindro esta técnica torna-se complexa.

Na abordagem descrita a seguir, o motor tipo "V" é tratado como combinação de dois motores em linha, compartilhando um virabrequim comum e inclinados um em relação ao outro.

A análise compreende os sete passos descritos abaixo:

1º) Determinar a seqüência de explosões dos cilindros e o número de cilindros em cada banco (ou braço do "V") de cilindros.

2º) Escrever as expressões de força para cada cilindro. Os ângulos dos braços do virabrequim são referidos ao banco de cilindros ao qual pertencem, e não ao centro de simetria do motor.

3°) Calcular e somar as componentes verticais das forças:  $F_V = F \cos \gamma$

(3.27)

onde:  $\gamma$  é a metade do ângulo do banco de cilindros.

$F$  é a força ao longo do banco de cilindros.

$F_V$  é a componente vertical.

4°) Calcular e somar os momentos verticais em relação ao primeiro "V". Estes cálculos são simplificados se a defasagem entre os dois cilindros no mesmo "V" é desconsiderada.

5°) Calcular e somar as componentes horizontais das forças:  $F_H = \text{sen } \gamma$ .

(3.28)

Observar que neste plano os bancos são opostos, portanto os sinais das forças de cada banco serão opostos.

6°) Calcular e somar os momentos horizontais em relação ao primeiro "V".

7°) De posse das componentes verticais e horizontais calculadas acima, pode-se obter a resultante final de desbalanceamento alternativo.

Como o estudo abordado neste trabalho restringe-se a um motor em linha, exemplos de motores tipo "V" não serão desenvolvidos além desta breve introdução.

### 3.2.3) Motor de quatro cilindros em linha.

Uma vez que a aplicação do semi-eixo, em análise neste trabalho, utiliza um motor de ciclo Otto a quatro tempos com quatro cilindros em linha, é apresentada agora a particularização do formulário desenvolvido para este caso.

O motor considerado apresenta quatro cilindros em linha com ordem de explosão 1-3-4-2. Um esquema do motor está apresentado na figura 3.4 abaixo.



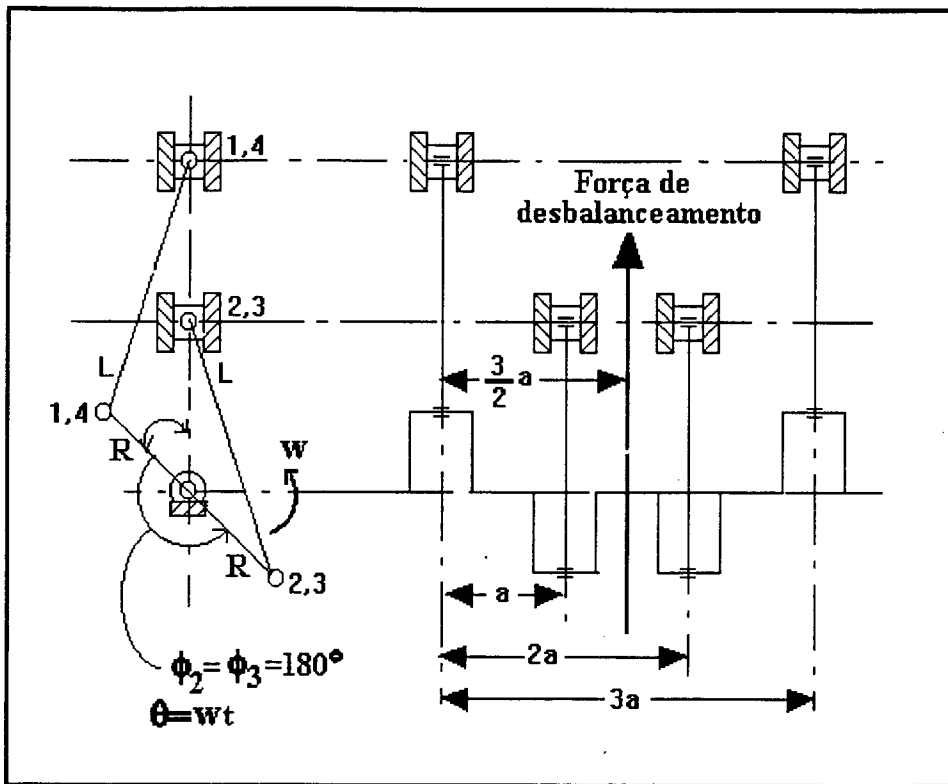


Figura 3.4: Motor de quatro cilindros em linha.

A tabela 3.1 abaixo apresenta os ângulos dos braços do virabrequim e respectivos senos e cossenos (considera-se a distância entre cilindros dada por "a").

$\phi$	Forças					Momentos				
	$\cos\phi$	$\sin\phi$	$2\phi$	$\cos 2\phi$	$\sin 2\phi$	a	$a\cos\phi$	$a\sin\phi$	$a\cos 2\phi$	$a\sin 2\phi$
$\phi_1=0^\circ$	1	0	$0^\circ$	1	0	0	0	0	0	0
$\phi_2=180^\circ$	-1	0	$360^\circ$	1	0	a	-a	0	a	0
$\phi_3=180^\circ$	-1	0	$360^\circ$	1	0	2a	-2a	0	2a	0
$\phi_4=0^\circ$	1	0	$0^\circ$	1	0	3a	3a	0	3a	0
$\Sigma$	0	0	-	4	0	-	0	0	6a	0

Tabela 3.1: Resultados numéricos para motor de 4 cilindros em linha.

A tabela mostra que uma força de desbalanceamento de segunda ordem existe e é dada por:

$$F = \frac{W_r}{g} RW^2 \left[ 4 \frac{R}{L} \cos 2\omega t \right] \quad (3.29)$$

O momento de segunda ordem em relação ao primeiro cilindro é dado por:

$$M = \frac{W_r}{g} RW^2 \left[ 6a \frac{R}{L} \cos 2\omega t \right] \quad (3.30)$$

A localização dada pela coordenada Z da força de desbalanceamento é dada por:

$$Z = \frac{M}{f} = \frac{3a}{2} \quad (3.31)$$

O resultado mostra que a localização da força de desbalanceamento resultante é no meio do motor. Esta conclusão pode ser obtida também por inspeção, uma vez que quando os pistões 1 e 4 movem-se para cima os pistões 2 e 3 movem-se para baixo, acarretando em um momento de desbalanceamento nulo.

Portanto, neste tipo de motor tem-se uma resultante das forças de desbalanceamento alternado no mesmo plano dos cilindros e numa frequência de duas vezes a frequência de rotação do virabrequin (esta frequência também é conhecida como frequência de "firing" do motor, porque coincide com a frequência das explosões que ocorrem nos cilindros).

### **3.3) Medições efetuadas em campo**

#### **3.3.1) Instrumentação utilizada.**

Para a aquisição das informações necessárias para avaliar o nível de vibração existente no semi-eixo quando sob uso normal, o veículo de teste foi instrumentado com dois acelerômetros triaxiais BK4321, fixados próximos à saída do diferencial (próximo à junta deslizante) e próximo ao cubo de roda (próximo a junta fixa) com as seguintes orientações:

- 1º) Direção vertical radial ao semi-eixo no diferencial.
- 2º) Direção horizontal radial ao semi-eixo no diferencial.
- 3º) Direção vertical radial ao semi-eixo na base da suspensão.

4º) Direção horizontal radial ao semi-eixo na base da suspensão.

Foi efetuada uma avaliação preliminar destes locais escolhidos para monitoração da vibração, com o objetivo de evitar que ressonâncias existentes nestes locais mascarassem os resultados. Para tal, foram obtidas as curvas de resposta em frequência com o uso de martelo excitador as quais estão apresentadas nas figuras 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8, respectivamente às direções listadas acima. Nesta rápida análise, constata-se não haver nenhuma ressonância saliente a ponto de ser uma fonte potencial de distorção das medições (as ressonâncias, observadas para a base da suspensão, encontram-se amortecidas a ponto de suavizar adequadamente a curva de resposta em frequência).

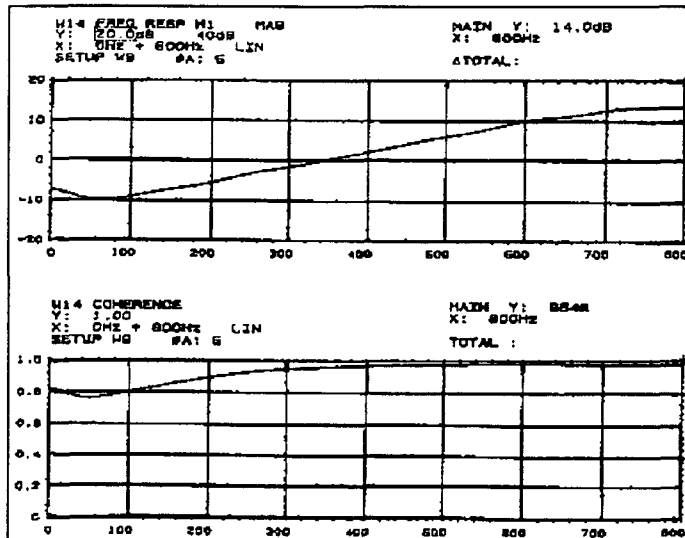


Figura 3.5: Resposta dinâmica do local de medição no diferencial, na direção vertical.

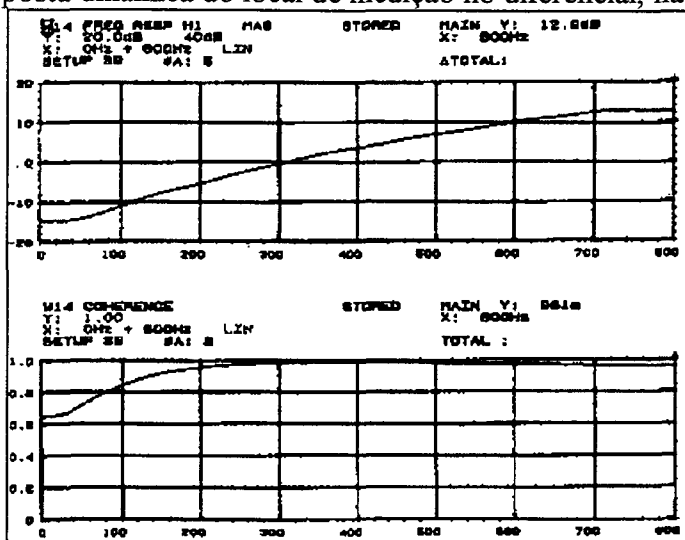


Figura 3.6: Resposta dinâmica do local de medição no diferencial, na direção horizontal.

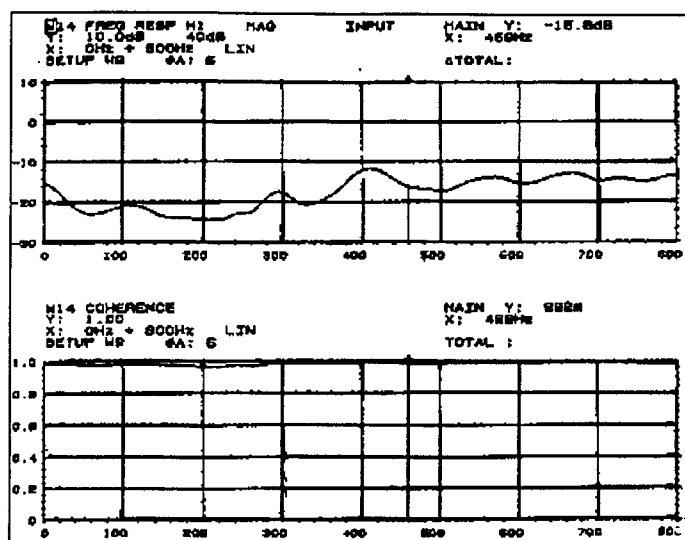


Figura 3.7: Resposta dinâmica do local de medição na base da suspensão, na direção vertical.

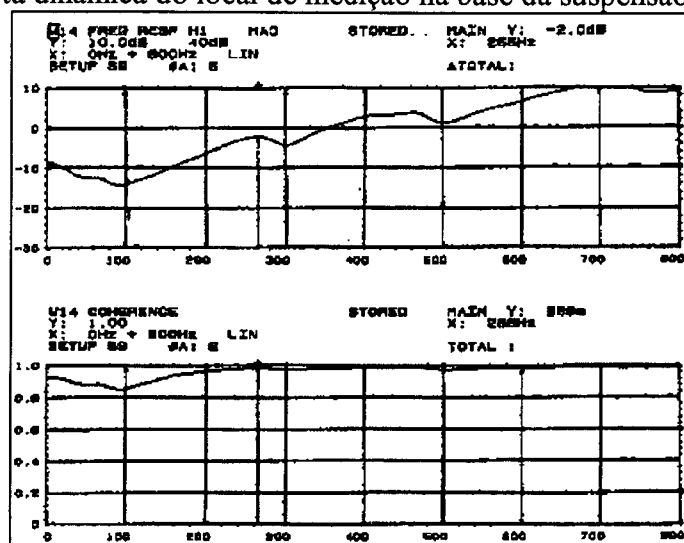


Figura 3.8: Resposta dinâmica do local de medição na base da suspensão, na direção horizontal.

A cadeia de medição é completada com o uso de amplificadores de linha BK2644, alimentadores de força BK2813 e gravador analógico de quatro canais BK7006. Este sistema de medição foi calibrado com o uso de mesa vibratória de referência BK4294.

Devido à ausência de conta giros no painel de instrumentos do veículo de testes, foi montada a tabela 3.2 abaixo, de relação entre velocidade do veículo, rotação do motor (virabrequim) e frequência de explosão ("firing"), com o uso do analisador espectral BK2032 e o veículo suspenso pelo elevador (elevador de veículos que permite suspender apoiando no seu chassis, liberando as rodas do veículo para girar).

		VELOCIDADE DO VEÍCULO (Km/h)		
Rotação do motor (RPM)	Firing	Marcha 3	Marcha 4	Marcha 5
2000	67	42	62	80
3000	100	63	90	112
4000	133	83	120	144

Tabela 3.2: Relação entre rotação e velocidade do veículo.

Esta faixa de rotação do motor foi escolhida devido ao fato de que a curva de torque do motor atinge valores máximos próximos a 3000 RPM, induzindo o motorista a, instintivamente, utilizar o motor nesta faixa de rotações para obter uma boa performance do veículo.

Os testes de campo foram efetuados em auto-estrada asfaltada em bom estado, sempre em trechos planos e retos, com o objetivo de reduzir ao mínimo as influências da via e da dinâmica do veículo (sistemas de direção e suspensão do veículo).

O procedimento de teste constou de três aquisições de dados com o veículo em velocidade constante estabilizada para obter espectros de vibrações representativos destas situações.

Para permitir a simulação em laboratório, do nível de vibração observado no teste de campo, foram efetuadas as medições simultâneas nos locais descritos anteriormente ( e usadas durante os testes de campo) e no centro do eixo, com o veículo parado em marcha neutra (semi-eixo deve ficar estático para permitir a fixação do acelerômetro miniatura BK4393 no centro do eixo devido a ausência de sensores de vibração sem contato para a efetivação do ensaio). É sabido que esta situação não é rigorosamente a mesma que ocorre com o veículo em movimento, porém devido às limitações de instrumentação, aceita-se que esta é uma aproximação aceitável ou pelo menos melhor que a ausência total de dados.

### 3.3.2) Resultados obtidos.

Das medições efetuadas em campo foi efetuada uma extensa tabulação, considerando como parâmetro mais representativo do espectro o valor do pico mais proeminente. A dispersão de resultados entre as repetições do experimento girou em torno de 2 dB, sendo fácil de visualizar

nos gráficos montados (vide figuras 3.11, 3.12 e 3.13), pois neles temos os extremos obtidos para cada medição, durante as três repetições.

Considerando que a apresentação dos espectros de vibração obtidos tomaria muito espaço e seria monótono (pois o aspecto do espectro é sempre o mesmo, apenas variando as freqüências dos picos de vibração de acordo com a rotação do motor), opta-se por apresentar uma curva característica para cada local de medição na condição de quinta marcha, velocidade de 112 Km/h, 3000 RPM de rotação do motor que gera uma freqüência de explosão de cerca de 100 Hz. Na figura 3.9 tem-se, no espectro superior, a medição obtida na base da suspensão na direção vertical (com 30 dB de atenuação) e no espectro inferior, a medição obtida na saída do diferencial na direção vertical (com 20 dB de atenuação). Na figura 3.10 tem-se, no espectro superior, a medição obtida na base da suspensão na direção horizontal (com 30 dB de atenuação) e no espectro inferior, a medição obtida na saída do diferencial na direção horizontal (com 20 dB de atenuação).

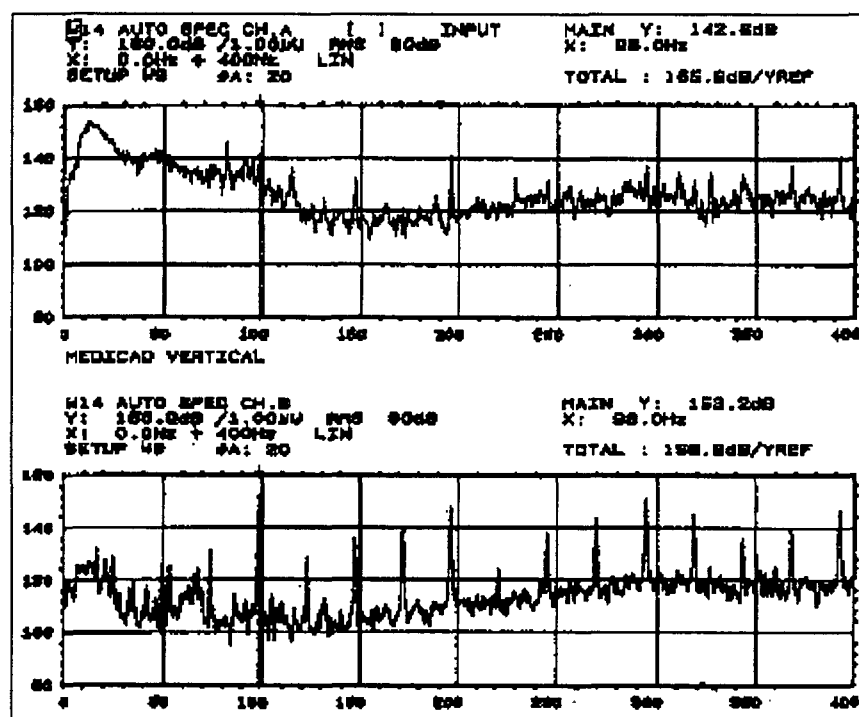


Figura 3.9: Espectro de vibração obtido para a direção vertical.

Base da suspensão - acima. Diferencial - abaixo.

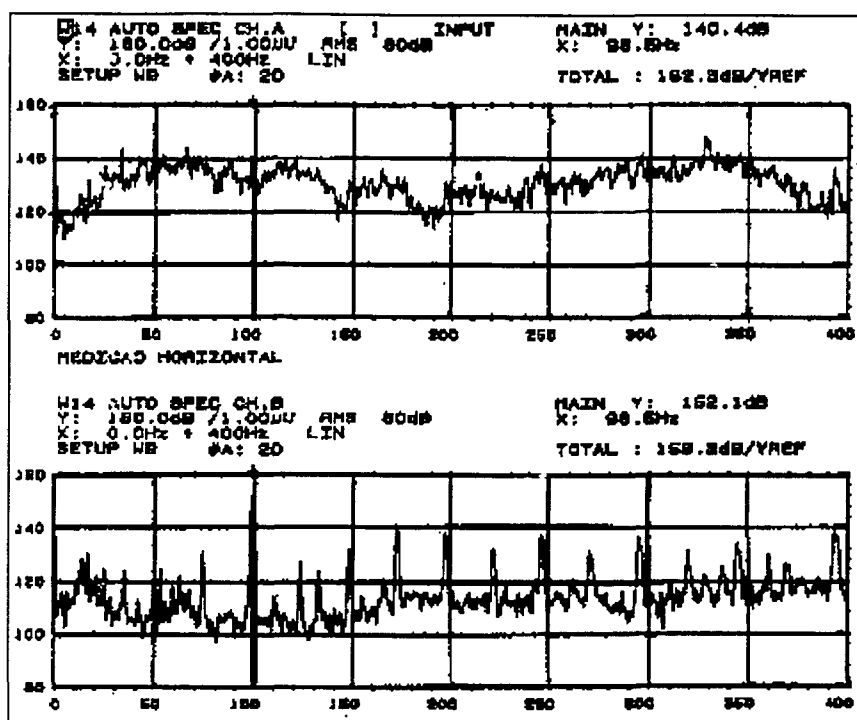


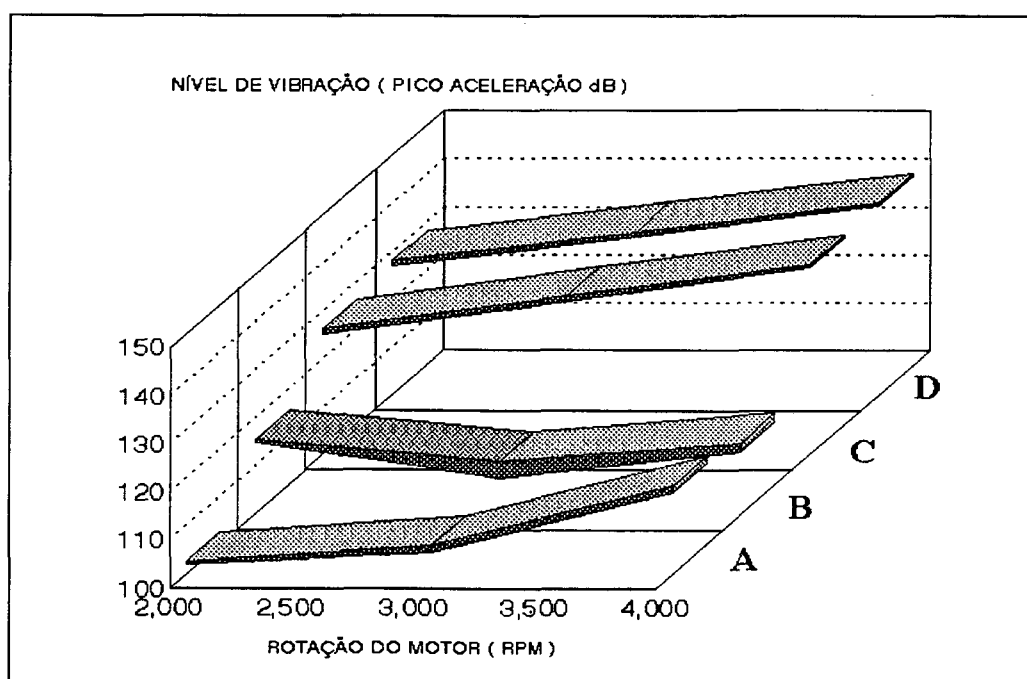
Figura 3.10: Espectro de vibração obtido para a direção horizontal.

Base da suspensão - acima. Diferencial - abaixo.

A melhor maneira de apresentar quantitativamente os resultados obtidos para todas as situações avaliadas é através de gráficos, onde têm-se os valores extremos obtidos para cada situação. Na figura 3.11 têm-se os valores obtidos para a terceira marcha, na figura 3.12 têm-se os valores para a quarta marcha e na figura 3.13 têm-se para a quinta marcha. Nelas pode-se observar a ótima repetibilidade e a tendência clara de crescimento da vibração com o aumento da rotação do motor para medições efetuadas na saída do diferencial, enquanto que as medições efetuadas na base da suspensão não apresentam o mesmo sucesso. Este fato é explicável se for observado que na base da suspensão tem-se a influência de outras fontes de vibração de forma mais proeminente (excitação da via, rolamentos do cubo da roda, etc), mascarando a vibração do motor, além de que a vibração do motor que atinge este local tem sua maior parcela transmitida pelo semi-eixo, que neste caso é reconhecidamente um projeto adequado (tem transmissibilidade muito baixa), impedindo uma maior transmissão desta vibração à estrutura do veículo.

Portanto, o parâmetro mais adequado para ser usado como referência da simulação em laboratório é o nível de vibração presente no diferencial, o qual mostrou pouca variação em relação à marcha utilizada (indicando ser oriunda exclusivamente do motor).

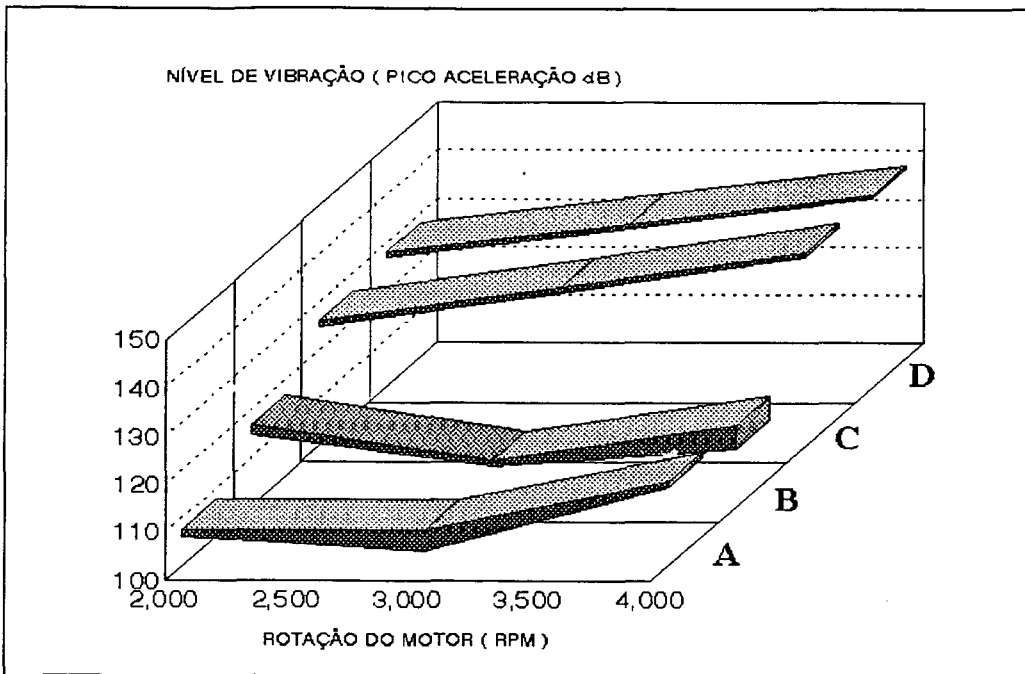
Por fim, o ensaio de medição dos níveis de vibração simultaneamente em relação ao centro do eixo gerou os resultados apresentados na figura 3.14 (os valores obtidos para a base da suspensão não estão apresentados devido ao motivo exposto anteriormente). Nesta figura pode-se visualizar uma relação quase constante entre a vibração observada no diferencial e no eixo, sendo esta relação de cerca de 3 dB maior na saída do diferencial.



- A) Medição vertical na base da suspensão.    B) Medição horizontal na base da suspensão.  
 C) Medição horizontal no diferencial.        D) Medição vertical no diferencial.

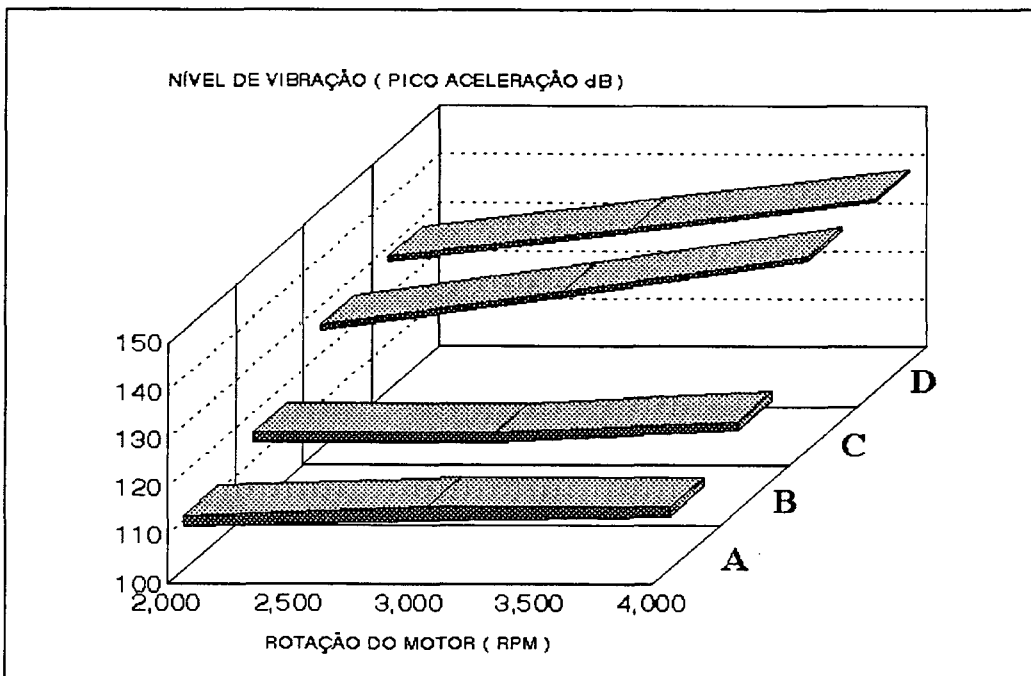
Figura 3.11: Nível de vibração em terceira marcha.





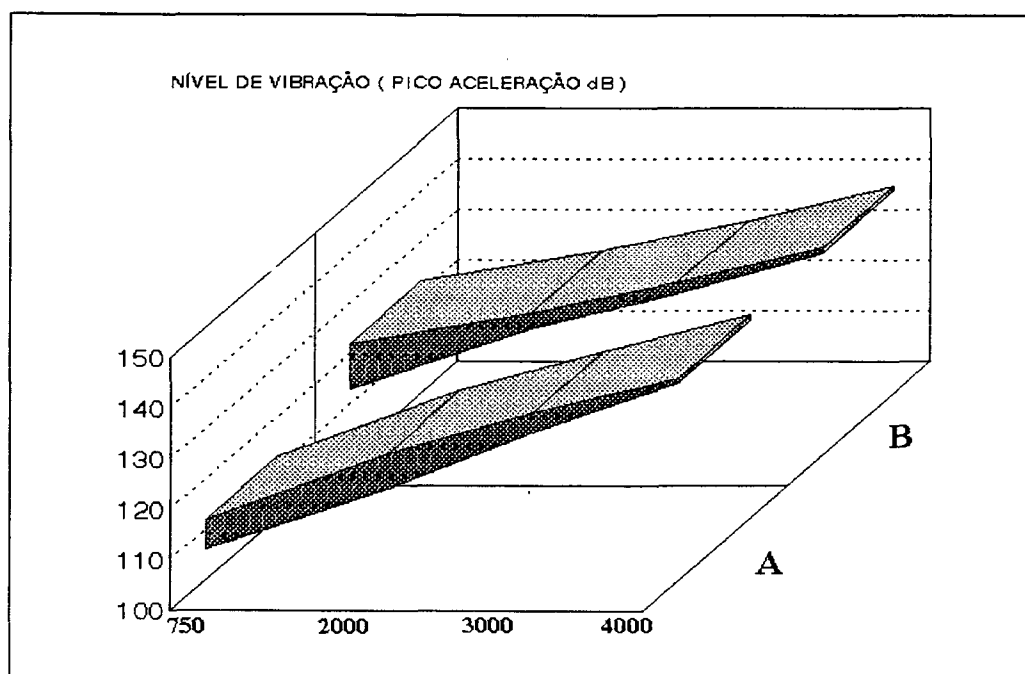
- A) Medição vertical na base da suspensão. B) Medição horizontal na base da suspensão.  
C) Medição horizontal no diferencial. D) Medição vertical no diferencial.

Figura 3.12: Nível de vibração em quarta marcha.



- A) Medição vertical na base da suspensão. B) Medição horizontal na base da suspensão.  
C) Medição horizontal no diferencial. D) Medição vertical no diferencial.

Figura 3.13: Nível de vibração em quinta marcha.



A) Diferença entre a medição horizontal no centro do eixo e no diferencial.

B) Diferença entre a medição vertical no centro do eixo e no diferencial.

Figura 3.14: Comparativo do nível de vibração no centro do eixo e no diferencial.

### **3.4) Conclusões finais.**

Dos resultados obtidos pode-se determinar os níveis de vibração existentes no semi-eixo quando na sua aplicação veicular, utilizando os valores obtidos na saída do diferencial.

A relação obtida entre estes valores e o centro do eixo permite efetuar ensaios em laboratório, representativos da aplicação em campo com o uso de mesa vibratória fixado no centro do eixo ( esta montagem será usada extensivamente para avaliar o comportamento dinâmico do semi-eixo no capítulo quatro).

A forma do espectro de vibração, obtida para todos os ensaios efetuados, confirma a exposição teórica apresentada neste capítulo. A excitação é composta basicamente por um sinal periódico composto de senóides harmônicas (cujas componentes mais evidentes são a de segunda ordem em relação à rotação do motor) e um sinal de banda larga num nível bem inferior. Portanto, o parâmetro adotado como representativo do espectro de vibrações é o valor do pico de "firing" do motor.

# Capítulo

# 4

## CAPÍTULO 4

### IDENTIFICAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO SISTEMA

#### 4.1) Introdução

Este pode ser considerado o capítulo mais importante e trabalhoso deste estudo. Importante porque ele se propõe a investigar o fenômeno vibratório associado à primeira ressonância transversal do semi-eixo homocinético, identificando os fatores que influenciam o seu comportamento dinâmico. Isto servirá de base para qualquer trabalho a ser feito com este sistema, desde a simples medição das suas frequências naturais até o projeto da bancada de teste (capítulo 5). Trabalhoso porque, para atingir este objetivo, uma quantidade vultosa de informações deve ser adquirida experimentalmente e posteriormente analisada e organizada de forma a fornecer as informações desejadas. Isto se deve ao fato de existirem vários parâmetros externos (ou seja, que não são inerentes ao semi-eixo mas decorrem da sua aplicação veicular e acarretam alterações no comportamento dinâmico do mesmo) a serem investigados de forma a estabelecer uma avaliação qualitativa e quantitativa das suas influências. Por avaliação qualitativa entende-se a determinação da maneira que o parâmetro em questão influencia o fenômeno (se aumenta ou diminui a frequência natural, se altera o modo de vibração e como o faz, etc). Por avaliação quantitativa entende-se a verificação da ordem de grandeza do efeito deste parâmetro sobre o fenômeno vibratório, permitindo, inicialmente, estabelecer uma ordem de seu efeito e, numa análise mais profunda, estabelecer critérios de estimativa da alteração dos parâmetros modais do sistema, baseados no comportamento obtido experimentalmente e posteriormente modelado.

Cabe salientar que as informações obtidas neste capítulo serviram de banco de dados para a confecção de um modelo modal analítico baseado na técnica da matriz de transferência, desenvolvido por Coutinho [8].

Uma vez que existem vários itens a serem investigados, optou-se, por questões didáticas, por apresentar simultaneamente o procedimento experimental, os resultados obtidos e as

conclusões extraídas de cada item em sub-capítulos individualizados de dois tipos de experimentos: experimento realizado com o semi-eixo instalado no veículo e em condições livre-livre.

Uma última ressalva deve ser feita em relação aos parâmetros do fenômeno que foram analisados. A influência dos efeitos giroscópios e cinemáticos das juntas em movimento (rotação) é aqui desconsiderada por ser de segunda ordem em relação aos efeitos avaliados neste capítulo, relacionados à primeira ressonância transversal [32]. Isto se deve ao fato de que, em relação aos efeitos giroscópios, os momentos de inércia e as rotações envolvidas são pequenas (a 200Km/h o semi-eixo gira a uma frequência de cerca de 30 Hz) e, em relação aos efeitos cinemáticos, que as forças decorrentes do funcionamento das juntas homocinéticas dependem do grau de homocinetismo que ela apresenta (vide capítulo 1), o qual atinge níveis excelentes uma vez que o seu projeto seja adequado à aplicação e sua manufatura tenha níveis de qualidade compatíveis.

#### **4.2) Resultados obtidos com o semi-eixo em condição livre-livre**

Todos os resultados e as conclusões apresentados neste sub-capítulo baseiam-se no tipo de experimento descrito no capítulo anterior, onde o semi-eixo homocinético encontra-se suspenso por dois fios de nylon simulando condições de contorno livre-livre. A excitação utilizada variou entre o método impulsivo (martelo excitador) e o uso de mesa vibratória com sinais de banda larga (sinal pseudo-randômico) e de banda estreita (senoidal).

Este tipo de montagem tem por objetivo avaliar os fenômenos envolvidos com o semi-eixo, descartando as complexidades que o restante da estrutura do veículo impõe. Portanto, ela é indicada para verificar se um dado comportamento é inerente ao semi-eixo ou é decorrente da influência da estrutura do veículo. Cabe salientar que esta montagem não é representativa do que ocorre na aplicação veicular do semi-eixo, uma vez que as condições de contorno são bem distintas das aqui presentes (livre-livre).

##### **4.2.1) Influência da faixa de frequência na análise.**

Foi escolhida uma curva de resposta em frequência puntual obtida com o método impulsivo aplicado ao nodo nove do modelo (neste caso a relação sinal/ruído é máxima e ocorre um efeito de picos gêmeos bem pronunciado).

Variando a faixa de frequência considerada na análise de 100 até 10 Hz em torno do pico de resposta, obtemos a figura 4.1 que indica uma variação pequena para a frequência natural (cerca de 4 Hz, ou seja, 1,5% do autovalor), porém de forma determinística, crescendo o valor da frequência natural com a redução da faixa de análise (com exceção para o primeiro ponto, caso em que a faixa de análise de 10 Hz é pequena demais para gerar uma estimativa confiável de frequência natural).

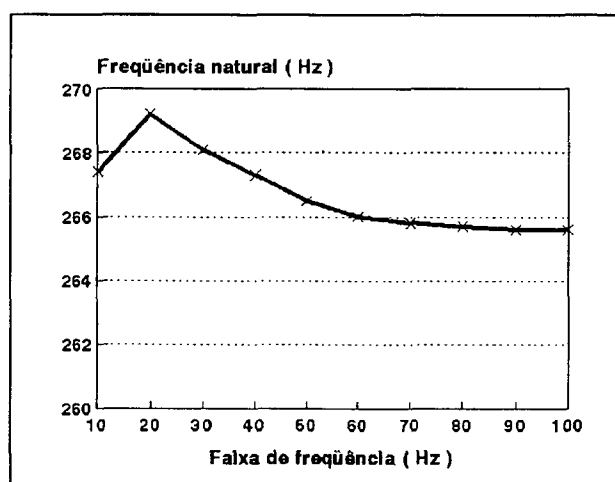


Figura 4.1: Variação da frequência natural com a faixa de análise.

Em relação ao fator de amortecimento viscoso, verifica-se que o valor torna-se maior com a diminuição da faixa de frequência, variando cerca de 1 ponto percentual (ou 20% do valor máximo obtido) observável na figura 4.2 .

A amplitude do pico de curva ajustada pelo software não apresentou nenhuma tendência dominante, variando cerca de  $0,25 \text{ m/s}^2$  (6% do valor máximo obtido) conforme mostra a figura 4.3 .

Desta rápida análise concluiu-se que os valores de amplitude do pico (que definem o autovetor) e frequência natural não apresentam grande influência da variação da faixa de

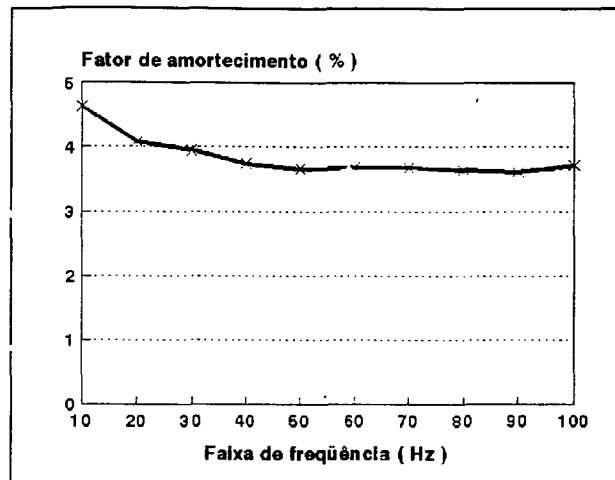


Figura 4.2: Variação do fator de amortecimento com a faixa de análise.

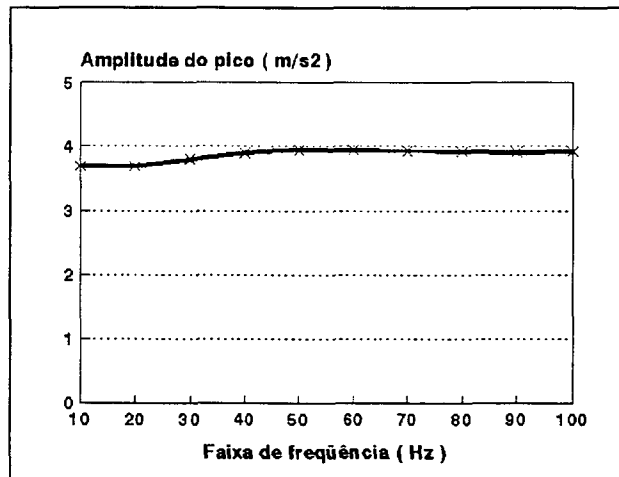


Figura 4.3: Variação da amplitude do pico com a faixa de análise.

freqüência analisada, porém o fator de amortecimento demonstra uma variação apreciável e tendenciosa explicável pelo fato de que o nível de excitação gerado pelo sinal impulsivo (espectro de excitação  $S_{xx}(w)$ ) não é constante próximo à freqüência natural, acarretando que níveis de excitação ligeiramente diferentes são aplicados a cada freqüência [7]. No caso de termos um sistema não-linear (o que será mostrado ser o caso do semi-eixo ainda neste capítulo), o regime global de resposta (curva de resposta em freqüência obtida) é o somatório de parcelas de contribuição de cada curva de resposta pertinente a cada um destes níveis, gerando uma curva assimétrica.

#### 4.2.2) Influência da densidade populacional da matriz modal.

Para verificar a influência da densidade populacional da matriz modal  $[\Phi]$  e da qualidade das medições obtidas nos diferentes nodos do modelo, foi escolhido o nível de discretização de 9 nodos e efetuada a aquisição das 81 curvas de resposta em frequência possíveis.

Um resumo dos resultados obtidos, analisando cada linha da matriz modal em separado e todas em conjunto, está apresentado na figura 4.4, donde conclui-se que a utilização de todas as linhas da matriz modal de forma indiscriminada gera um resultado degradado pela influência das medições de qualidade ruim. Obtêm-se uma análise mais adequada utilizando-se apenas os resultados obtidos na região do eixo (devido à boa qualidade das medições efetuadas nele).

A medição ou excitação efetuada nas juntas homocinéticas gera resultados de qualidade inferior. Devido às discontinuidades e aos mecanismos não lineares localizados nestes componentes, as medições assim obtidas não geram bons resultados. A influência de fatores locais (rigidez ou inércia elevada no local da medição) distorce a curva de resposta em frequência obtida. Os autovetores obtidos com base nestas medições são descontínuos e distorcidos, assim como seus autovalores e fatores de amortecimento.

Nas medições efetuadas na junta fixa observa-se os maiores valores de fator de amortecimento e frequência natural, indicando maior influência de não linearidade neste componente devido, possivelmente, às grandes amplitudes de movimento nele observadas.

Um resumo global dos resultados está apresentado na figura 4.5, onde temos presente a dispersão obtida nos dados.

#### 4.2.3) Definição da excitação de banda larga.

Para efetivar a excitação do tipo banda larga utiliza-se uma mesa vibratória eletromagnética BK4809 conectada através de uma barra delgada (para evitar sobrecargas ao sistema) à célula de carga BK8200, que por sua vez é conectada ao nodo central do eixo (nodo 9). Este local foi escolhido por ser o mais adequado para excitar o modo em análise.

A forma de fixação da célula de carga ao eixo passou por aprimoramentos devido à grande variação no espectro apresentado pelas concepções iniciais (fita plástica de engate rápido e



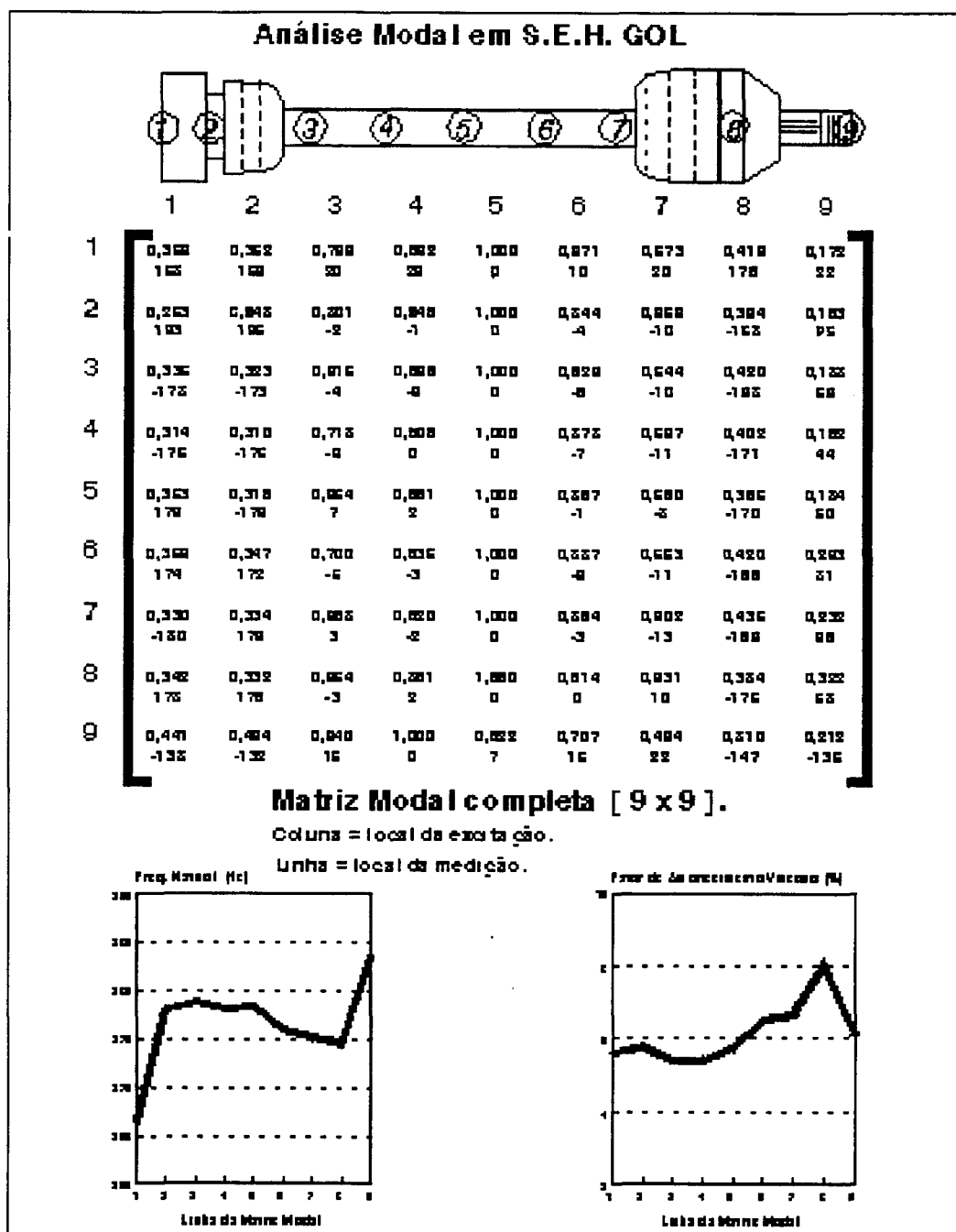


Figura 4.4: Matriz modal completa .

abraceadeira metálica com rosca sem-fim tipo "suprens"). Por fim, definiu-se o uso de um sistema metálico que envolve a seção transversal do eixo fixado por meio de parafusos que permitem a aplicação de pré-tensão adequada.

O tipo de sinal fornecido pelo gerador de função do BK2032 (usando-se amplificador de potência Nashville NA-1600P) escolhido foi o pseudo-randômico em detrimento do randômico

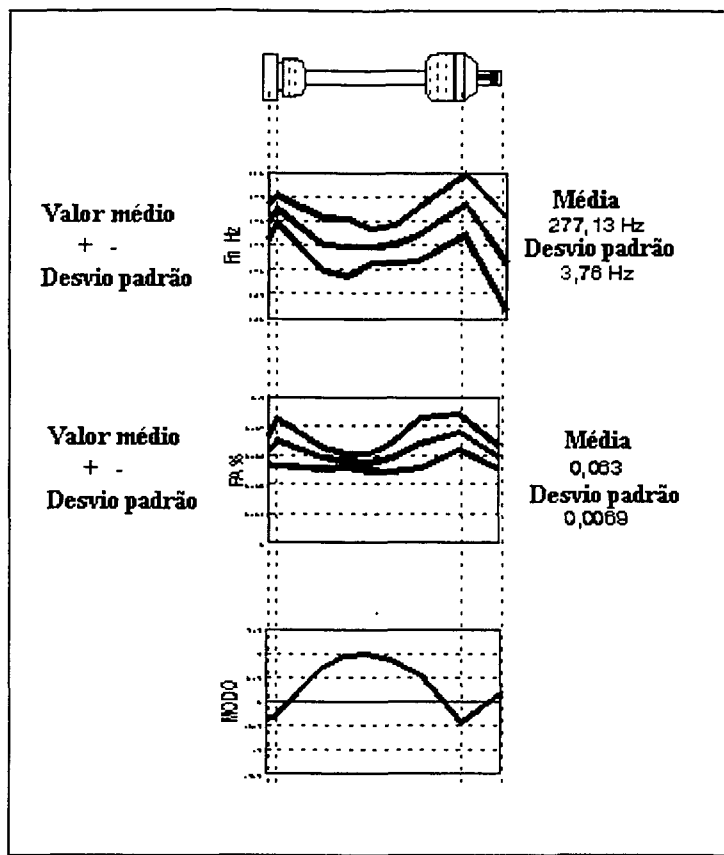


Figura 4.5: Resultados da análise modal completa.

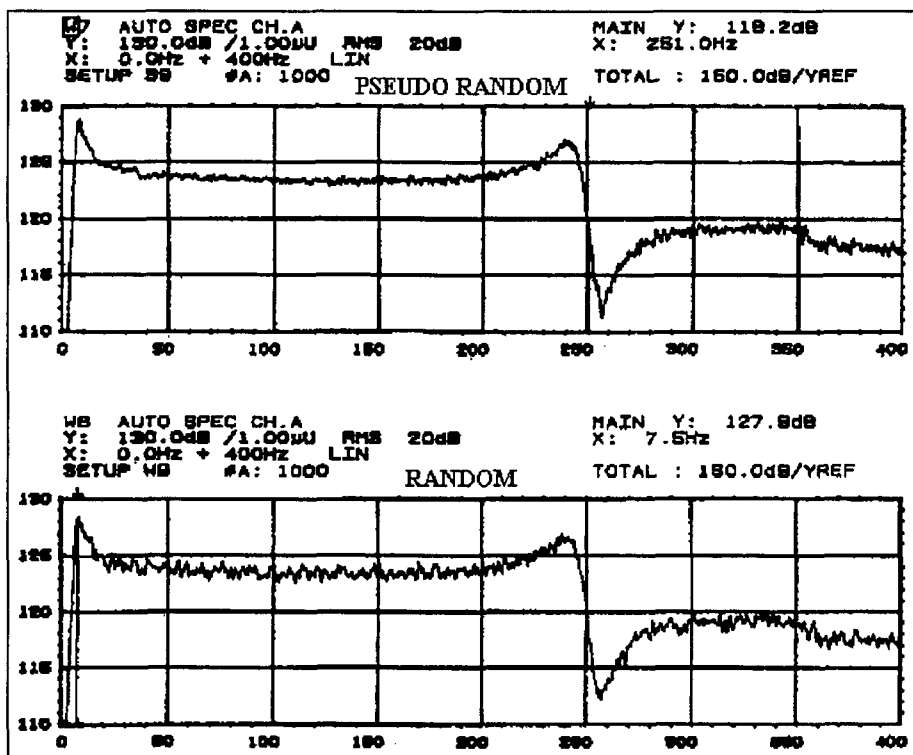


Figura 4.6: Comparação entre excitação randômica e pseudo-randômica.

puro, devido ao fato de que o primeiro gera um espectro de excitação mais estável e plano, com um número menor de amostras que o segundo (vide na figura 4.6 , uma comparação para uma média de 1000 amostras).

#### 4.2.4) Influência do nível de excitação pseudo-randômica.

A vantagem maior de se utilizar este tipo de excitação é que ele permite um controle do seu nível energético mais eficaz que no caso da excitação impulsiva.

Alterando-se o nível de excitação desde níveis inferiores (nível total de 117 dB) até superiores (nível total de 165 dB) tem-se uma grande alteração na forma da curva de resposta em frequência obtida e nos seus parâmetros modais. Para visualizar estas diferenças, as curvas de resposta em frequência estão sobrepostas na figura 4.7 , e seus respectivos espectros de excitação estão sobrepostos na figura 4.8 . As funções de coerência das medições estão sobrepostas na figura 4.9, onde pode-se observar o aumento da coerência da medição com o aumento do nível de excitação devido ao aumento da relação sinal / ruído.

Foi efetuada a aquisição das curvas de resposta em frequência para a efetivação da análise modal utilizando o nodo 9 (centro do eixo) como local de excitação. Quatro níveis distintos de excitação foram usados e os resultados obtidos estão resumidos na tabela 4.1 abaixo e representados na figura 4.10 (autovetores).

Nível de excitação [dB]	Frequência natural [Hz]	$\zeta$ [%]
145	257,61	2,54
150	257,07	2,26
155	252,74	3,42
163	250,33	4,10

Tabela 4.1: Análise modal com excitação pseudo-randômica aplicada no eixo.

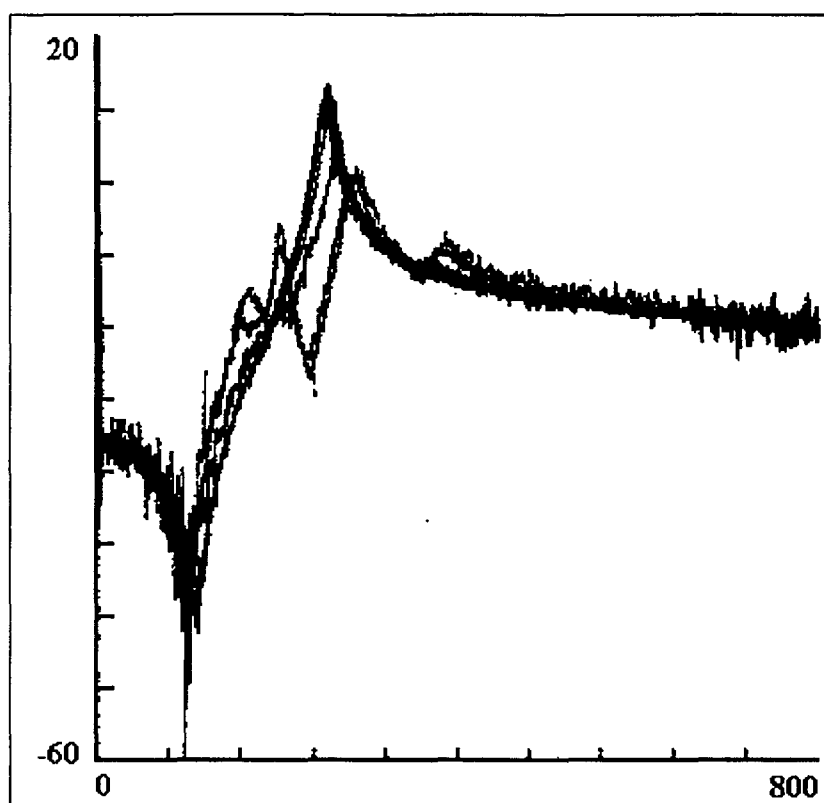


Figura 4.7: Curvas de resposta em frequência obtidas com seis níveis de excitação distintos.

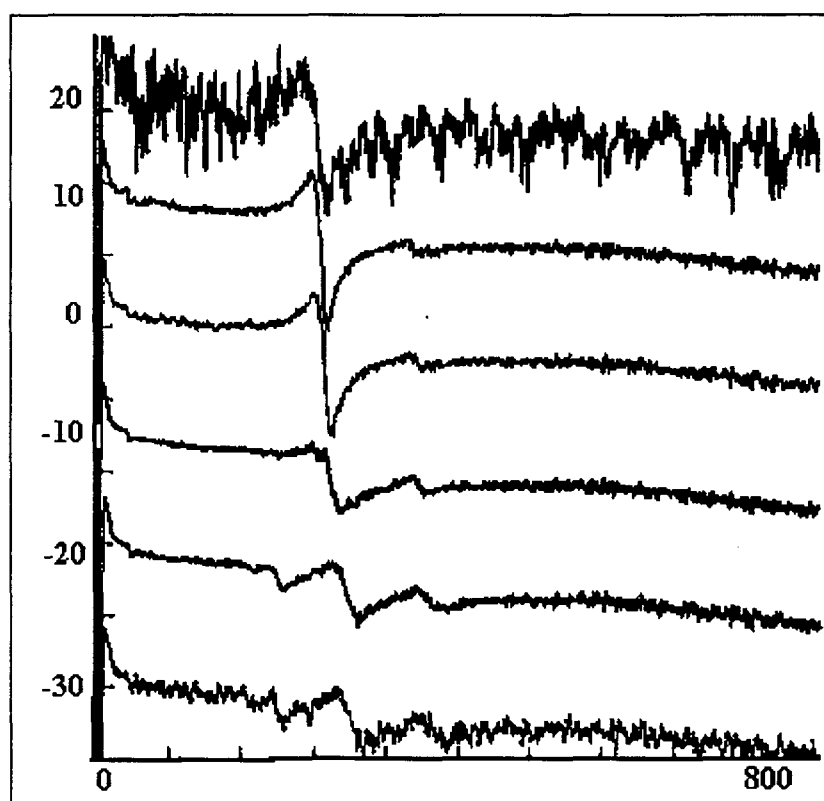


Figura 4.8: Níveis de vibração pseudo-aleatória utilizados na medição de 4.7.

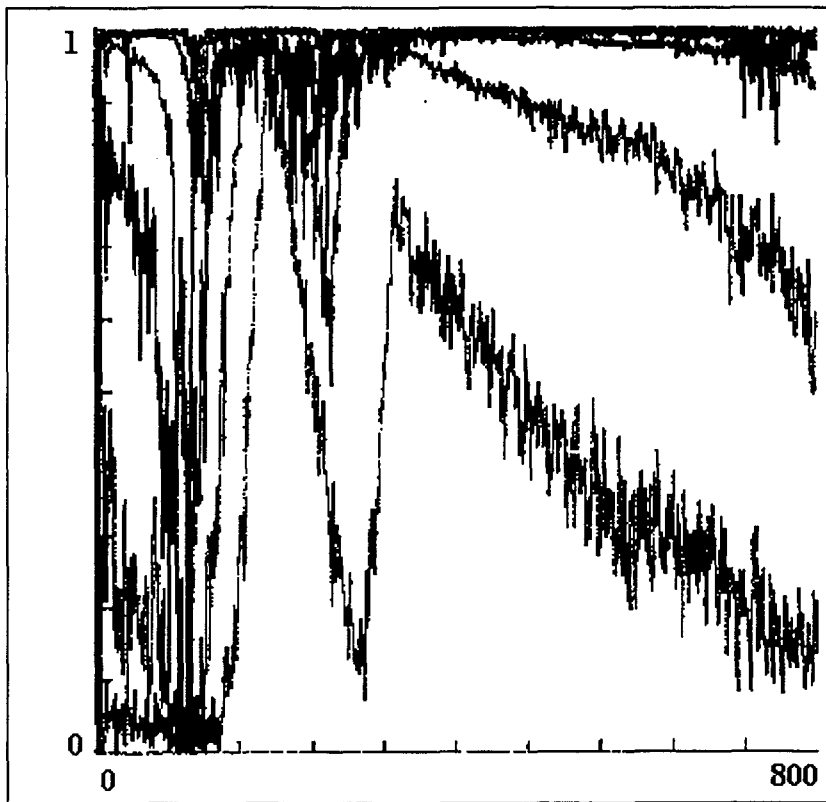
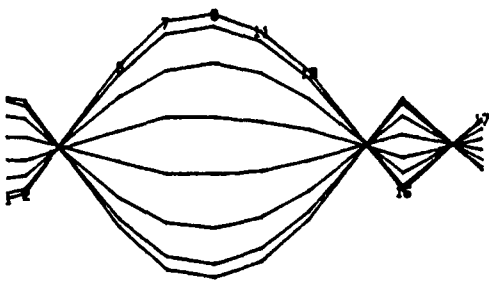
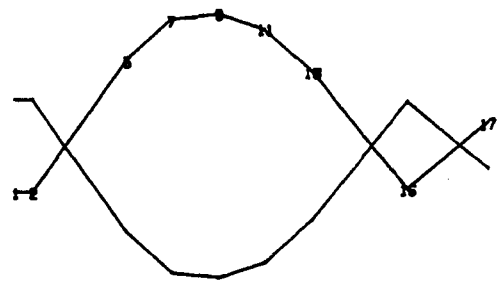


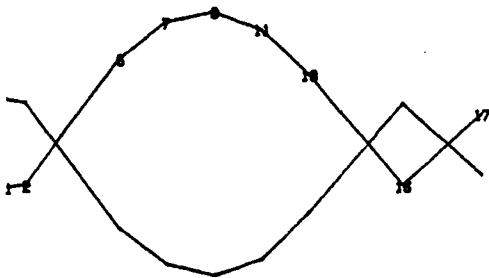
Figura 4.9: Funções de coerência da medição 4.7.



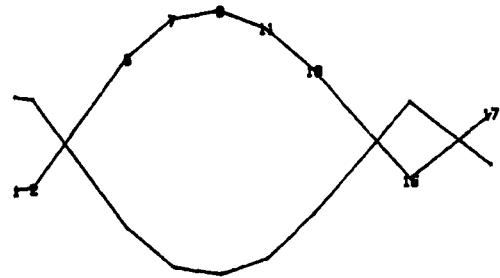
Nível 163 dB



Nível 155 dB



Nível 150 dB



Nível 145 dB

Figura 4.10: Autovetores obtidos com níveis distintos de excitação.

Pode-se observar que, apesar do autovetor não apresentar alterações, o autovalor e o fator de amortecimento se alteram. O autovalor apresenta uma nítida tendência a diminuir, enquanto que o fator de amortecimento tende a crescer como o aumento do nível de excitação.

Desta análise preliminar temos que o comportamento do semi-eixo homocinético não é linear em relação ao nível de excitação aplicado, uma vez que a curva de resposta em frequência altera-se de forma sensível frente a este parâmetro.

#### **4.2.5) Influência do nível de excitação senoidal.**

O uso de excitação senoidal para obtenção da curva de resposta em frequência apresenta como vantagem o controle completo do nível e a frequência de excitação, e impõe a premissa básica da teoria de vibrações lineares na qual a estrutura excitada em uma frequência específica responde apenas na mesma frequência, sem ocorrer a transferência de energia para outras frequências. Em contrapartida, o tempo necessário para efetuar o varrimento por todas as frequências desejadas com uma discretização adequada é muito superior aos necessários nos casos da excitação impulsiva e pseudo-randômica.

Segundo Ewins [9], a maior vantagem deste tipo de excitação é que neste caso têm-se condições de obter a curva de resposta em frequência da estrutura sem o seu mascaramento, devido às metodologias de amostragem e determinação de médias usadas nos demais tipos de excitação (nas quais, a falta de controle da fase da excitação em cada amostra acaba gerando uma suavização da curva de resposta em frequência que representa uma estimativa linearizada da curva de resposta em frequência real da estrutura).

Para a efetivação do ensaio foi utilizada a mesma montagem descrita anteriormente (pseudo-randômica), porém o gerador de função foi programado para gerar um sinal senoidal puro, cuja frequência e amplitude foram ajustadas manualmente pelo operador. Foi adotada uma discretização de 5 Hz na faixa de 200 a 350 Hz para a localização do pico e um refinamento de 1 Hz em torno do mesmo para permitir uma estimativa melhor do autovalor e do fator de amortecimento.

As curvas de resposta em frequência obtidas para seis níveis distintos de excitação (simulando regimes do motor do veículo de 2500 a 5000 RPM) estão sobrepostas na figura 4.11. Nesta figura pode-se observar claramente as diferenças existentes nas curvas de resposta em frequência, sendo que a frequência natural decresce de 310 Hz para 248 Hz com o aumento do nível de excitação, enquanto o fator de amortecimento varia de maneira não linear.

O resultado obtido com este tipo de excitação (senoidal) foi diferente do obtido com a excitação pseudo-randômica. Este fato era esperado, tendo em vista as diferenças inerentes a estes dois tipos de excitação e o mais importante é que nos dois casos tem-se uma variação coerente da curva de resposta em frequência de acordo com o nível de excitação usado no experimento.

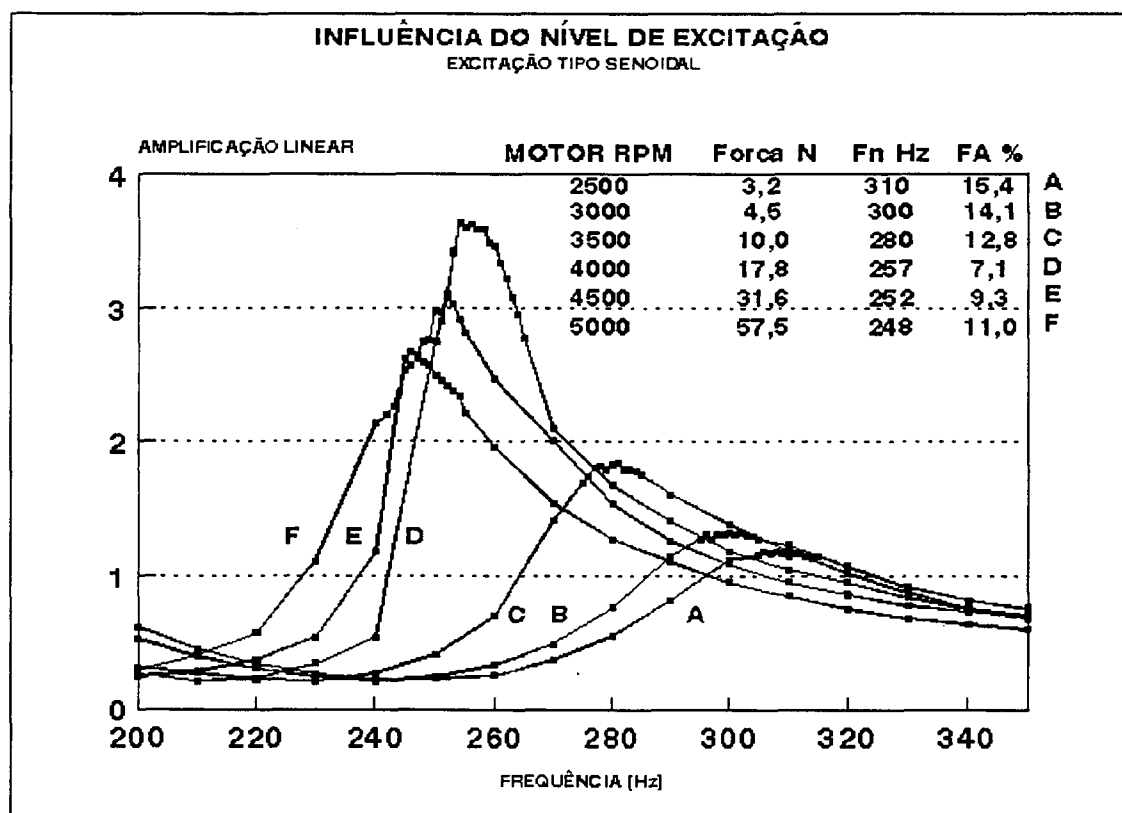


Figura 4.11: Curvas de resposta em frequência obtidas com níveis de excitação senoidal diferentes.

#### 4.2.6) Influência do tipo de excitação.

Dos dois tipos anteriores de experimento pode-se observar que não apenas o nível de excitação usado no experimento mas também o tipo de sinal influencia na resposta em frequência obtida.

Para observar este fato de maneira mais direta, na figura 4.12 têm-se, superpostas, as curvas de resposta em frequência obtidas com os dois tipos de experimento. Nesta figura observa-se que as curvas de resposta em frequência obtidas com níveis de excitação pseudo-randômicas superiores aos níveis de excitação senoidal em condição livre-livre apresentam boa coerência, indicando que o nível global da excitação influencia na obtenção da curva de resposta em frequência.

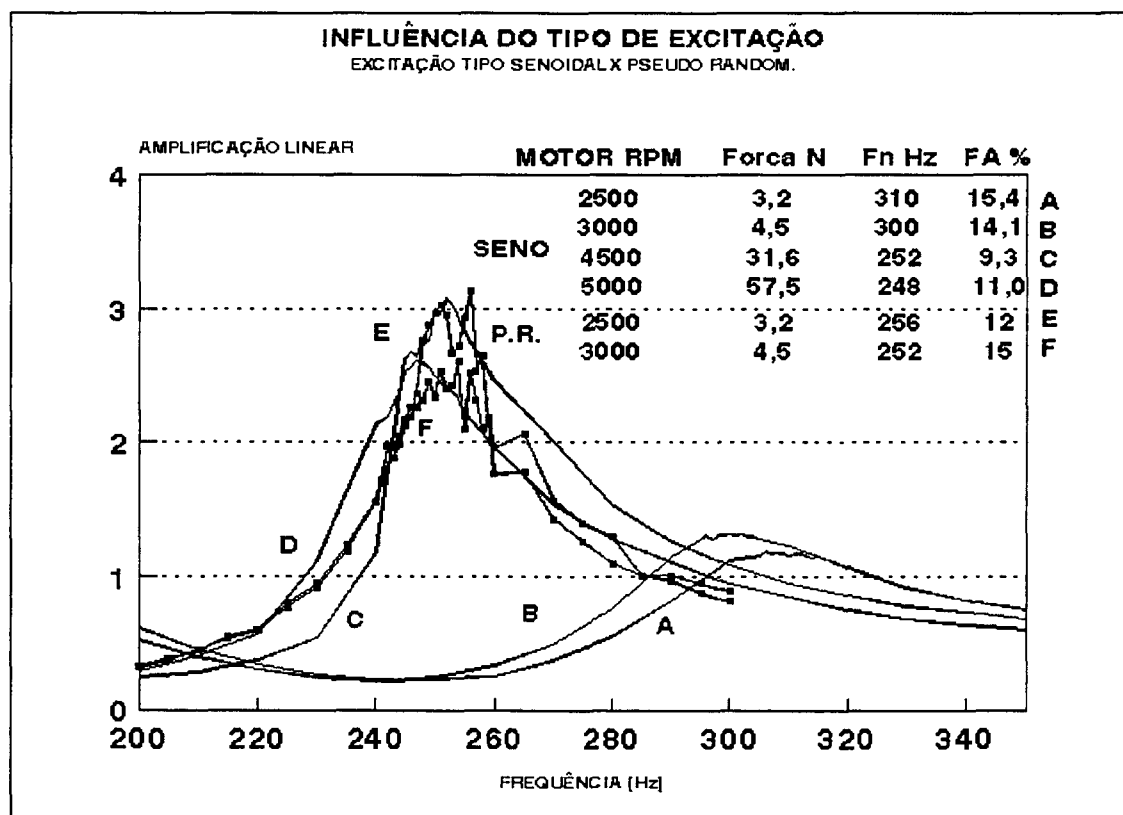


Figura 4.12: Comparação das curvas de resposta em frequência obtidas com excitação senoidal e pseudo-randômica.



Devido a limitações do equipamento disponível para a execução do experimento, a comparação só pode ser efetuada na faixa de 130 a 140 dB. Isto porque quando a excitação da banda larga (pseudo-randômica) é usada a energia vibratória é distribuída na faixa de 150 a 350 Hz e atinge uma faixa dinâmica de 90 dB (limiar inferior da célula de carga, causando baixa relação sinal/ruído no sinal de excitação) até 140 dB (limiar superior de energia fornecida pela mesa vibratória). Quando a excitação de banda estreita (senoidal) é usada a energia vibratória é concentrada numa faixa muito estreita de energia e atinge uma faixa dinâmica de 130 dB (limiar inferior do amplificador de carga para um tom puro, causando baixa relação sinal/ruído no sinal de resposta) até 160 dB (limiar superior de energia fornecida pela mesa vibratória).

Cabe salientar que para permitir esta comparação de resultados obtidos com tipos de excitação diferentes em níveis de excitação similares, uma seleção artificial dos dados foi executada de forma a obter uma curva de resposta em frequência com nível de excitação pseudo-randômica plana. Inicialmente foi efetuada uma medição de curvas de resposta em frequência com níveis de excitação pseudo-randômica diferentes de apenas 1 dB para uma faixa de 10 dB em torno da medição original. Identificando, no espectro de excitação ( $S_{xx}(w)$ ), as frequências que apresentam o nível de excitação desejada, pode-se montar uma curva com pontos provenientes de curvas de resposta em frequência distintas. Todo este trabalho se justifica quando observa-se a variação no espectro de excitação nas vizinhanças da ressonância, a qual atinge amplitudes de até 10 dB (vide figura 4.8). Esta metodologia gerou curvas de frequência um pouco descontínuas, porém a coerência com as medições executadas com excitação senoidal ficou visivelmente maior.

A comparação direta da influência do tipo do sinal de excitação com o semi-eixo instalado no veículo está apresentada no item 4.3.5.2.e deste capítulo.

#### **4.2.7) Influência da posição da junta deslizante.**

Durante todos os ensaios as juntas foram mantidas com ângulo nulo e a junta deslizante centrada.

Com o objetivo de verificar como a posição da junta deslizante (angular e axial) pode influir na obtenção da curva de resposta em frequência, experimentos foram executados com a

junta comprimida, centrada e distendida, simultaneamente à aplicação de ângulo nulo e de  $10^\circ$  (cerca de 50% da capacidade angular máxima da junta).

Os resultados obtidos com excitação pseudo-randômica estão apresentados na figura 4.13 e na tabela 4.2 abaixo.

Posição axial	Posição angular	Frequência natural [Hz]	$\xi$ [%]
centrada	$0^\circ$	253,31	2,83
centrada	$10^\circ$	255,20	1,80
comprimida	$0^\circ$	256,66	1,87
comprimida	$10^\circ$	258,83	1,91
distendida	$0^\circ$	239,00	1,66
distendida	$10^\circ$	251,17	3,46

Tabela 4.2: Influência da posição da junta deslizante.

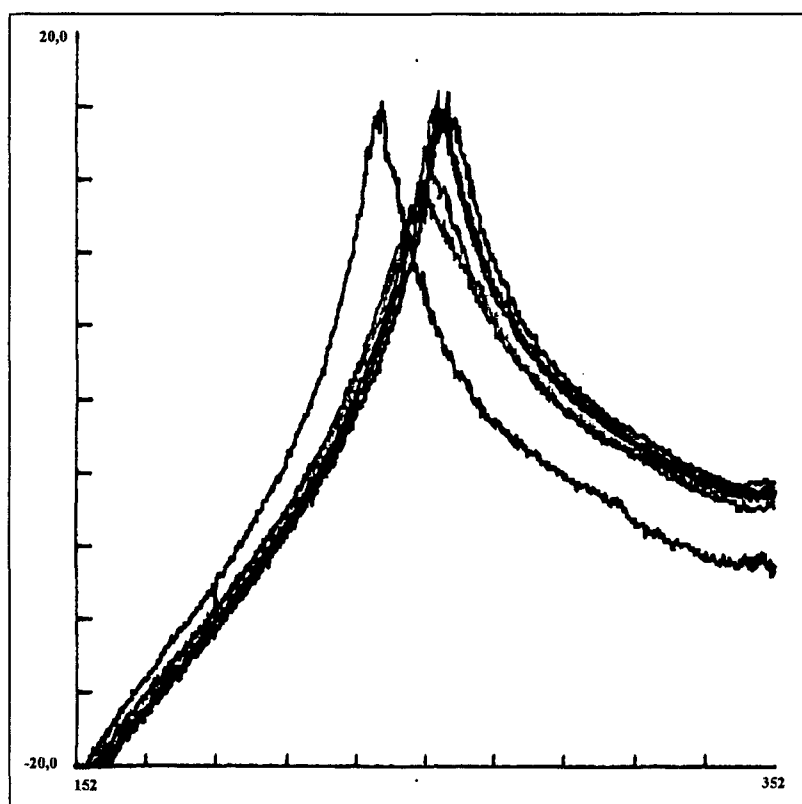


Figura 4.13: Influência da posição da junta deslizante.

Conclui-se que a aplicação do ângulo faz a frequência natural crescer cerca de 1% e a frequência natural do semi-eixo comprimido é cerca de 6% superior ao semi-eixo distendido. Em relação ao fator de amortecimento não foi constatada uma relação fixa nesta verificação preliminar.

#### 4.2.8) Influência do local da excitação.

Com o objetivo de verificar a influência do local de excitação, foi executada uma análise modal utilizando-se como local de excitação a haste da junta fixa (nodo 17). Foram utilizados quatro níveis de excitação e os resultados estão apresentados na tabela 4.3 abaixo e na figura 4.14 (autovetores).

Nível de excitação [dB]	Frequência natural [Hz]	$\xi$ [%]
145	262	3,38
150	260	4,34
160	264	3,86
163	261	2,21

Tabela 4.3: Análise modal com excitação pseudo-randômica aplicada na junta.

Pode ser constatado que estes resultados destoam daqueles obtidos com a excitação realizada no ponto central do eixo (tabela 4.2), e que o autovetor apresenta-se bastante alterado.

Conclui-se que, efetuando a excitação pela junta fixa, a energia não consegue atravessar as discontinuidades existentes na junta de maneira satisfatória. Isto pode ser observado pela grande amplitude do movimento da junta fixa em relação ao eixo, além do fato de que quanto menor a energia introduzida no sistema, menor é a parcela que atinge o eixo. Desta maneira, ocorre que os parâmetros locais influenciam, de sobremaneira, a medição.

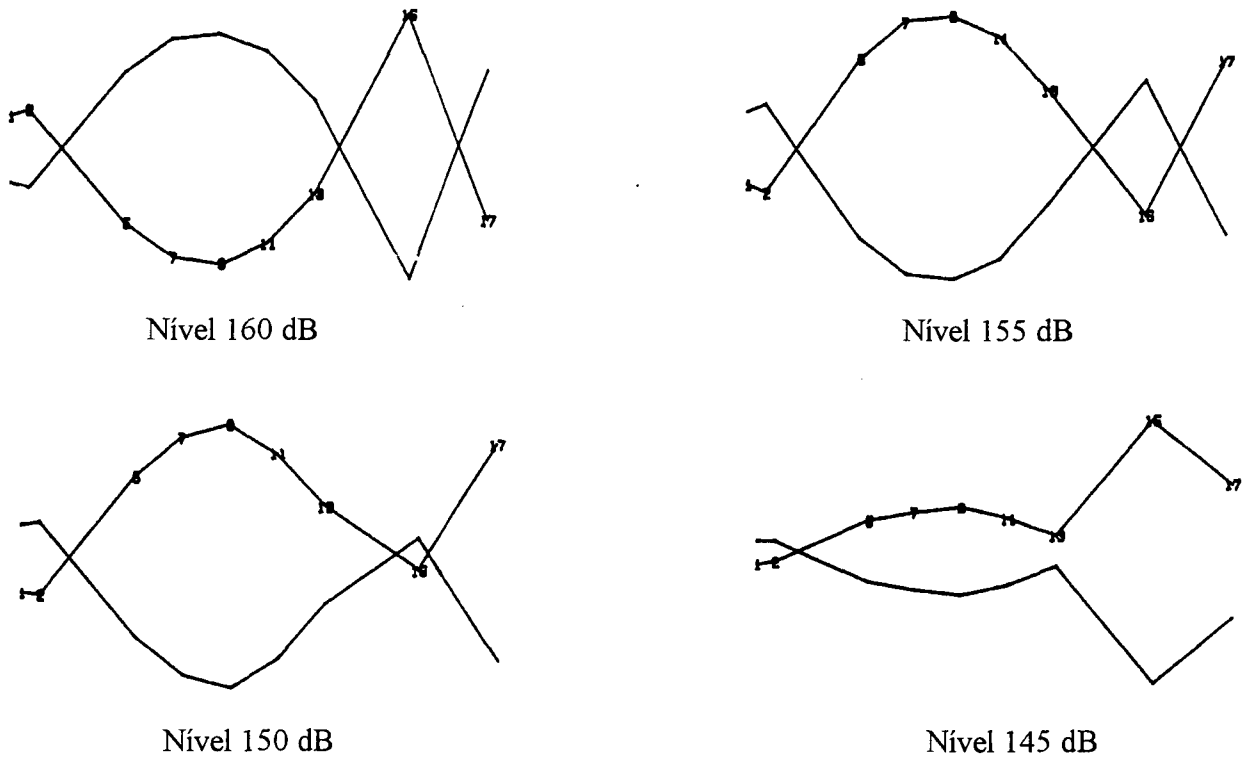


Figura 4.14: Autovetores obtidos com excitação na ponta de eixo em níveis distintos.

### **4.3) Resultados obtidos com o semi-eixo instalado no veículo.**

Uma vez efetuada a análise preliminar em condição livre-livre, parte-se para analisar o comportamento do componente na sua aplicação real, ou seja, instalado no veículo. Neste caso, temos presente na análise a influência que a estrutura do veículo exerce sobre a dinâmica do semi-eixo.

#### **4.3.1) Influência do torque aplicado ao sistema.**

Uma vez que a função básica do semi-eixo homocinético é transmitir o torque fornecido pelo motor na saída do diferencial até a roda de tração do veículo, temos que este é um parâmetro importante a ser investigado.

Para tal, foi utilizado o método impulsivo descrito anteriormente para permitir o acesso ao eixo, de forma a executar medições de curva de resposta em frequência nas direções vertical e

horizontal. Tanto a excitação como a medição da resposta foram executadas no nodo 9 (centro do eixo) para permitir uma boa relação sinal/ruído na medição.

O veículo de teste (Gol 1.6 a gasolina ano 1988) foi posicionado, com auxílio de elevador para veículos, sobre quatro apoios especialmente projetados para permitir a acomodação dos pneus sobre o solo. Dois apoios fixos foram usados para firmar as rodas traseiras do veículo na mesma altura das dianteiras, ancorando o veículo durante a execução dos testes. Dois apoios especiais foram utilizados para permitir o movimento das rodas dianteiras através de três graus de liberdade: deslocamento horizontal axial e transversal ao veículo e rotação do eixo vertical (movimento de esterçamento da roda). Na figura 4.15 pode-se visualizar este dispositivo. Com esta montagem têm-se a liberdade necessária para aplicar ao veículo diferentes posições de suspensão, esterçamento e torque.

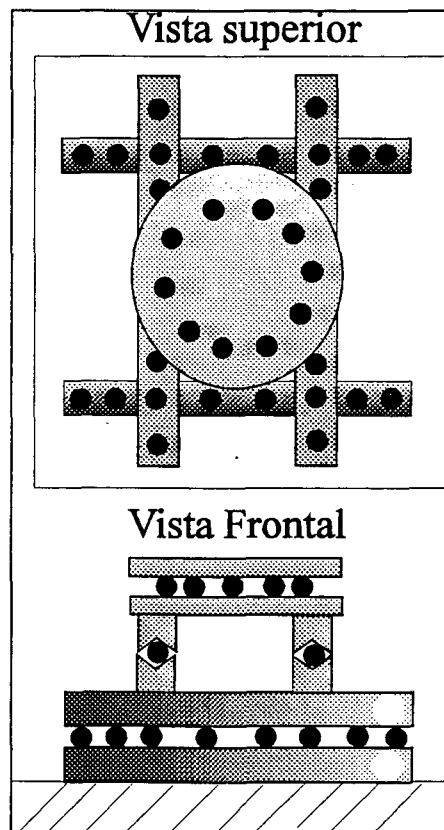


Figura 4.15: Base móvel de três graus de liberdade.

Para a aplicação de torque foi adotado o seguinte procedimento: com a marcha a ré engatada (maior redução da caixa de câmbio), uma das rodas dianteiras do veículo é ancorada por meio da frenagem do movimento axial da sua base de apoio, enquanto na outra roda dianteira é acoplado um torquímetro à porca de fixação da junta fixa. O torque é aplicado por meio de um guincho hidráulico, permitindo a aplicação de um torque estável com precisão de 1 Nm. O valor máximo do torque que pode ser aplicado é de cerca de 250 Nm, acima deste valor o motor gira (o torque vence a pressão contrária dos cilindros do motor) e o torque cai abruptamente. Esta faixa de torque é adequada, uma vez que para regimes estacionários o veículo desenvolve valores em torno de 100 Nm.

Esta montagem pode ser visualizada na figura 4.16 e os resultados obtidos estão apresentados de forma gráfica na figura 4.17, e de forma numérica na tabela 4.4 abaixo.

Torque [Nm]	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240
Fn [Hz] vert.	203	218	240,2	246	248	250	252	253	255	256	258	260	260
$\xi$ [%] vert.	4,24	6,12	4,41	4,18	4,41	4,76	4,50	4,64	4,66	4,55	4,68	4,43	4,41
Fn [Hz] hor.	206	227	241,7	247	249	251	253	256	261	265	267	271	271
$\xi$ [%] hor.	4,31	6,05	4,29	4,41	5,36	5,83	6,30	6,53	7,03	7,03	6,89	6,69	6,30

Tabela 4.4: Influência do torque na medição impulsiva efetuada no veículo.

Dos resultados obtidos, conclui-se que o fator de amortecimento apresenta uma variação pequena e não linear, porém a característica mais importante observada é que a frequência natural varia de maneira crescente com o aumento do torque aplicado em cerca de 60 Hz (quase 30% do valor com torque nulo). A curva obtida apresenta uma morfologia característica de crescimento acelerado no início da aplicação de torque que é atenuado de maneira a apresentar um comportamento assintótico, sendo os valores obtidos na direção vertical sempre inferiores aos obtidos na direção horizontal.

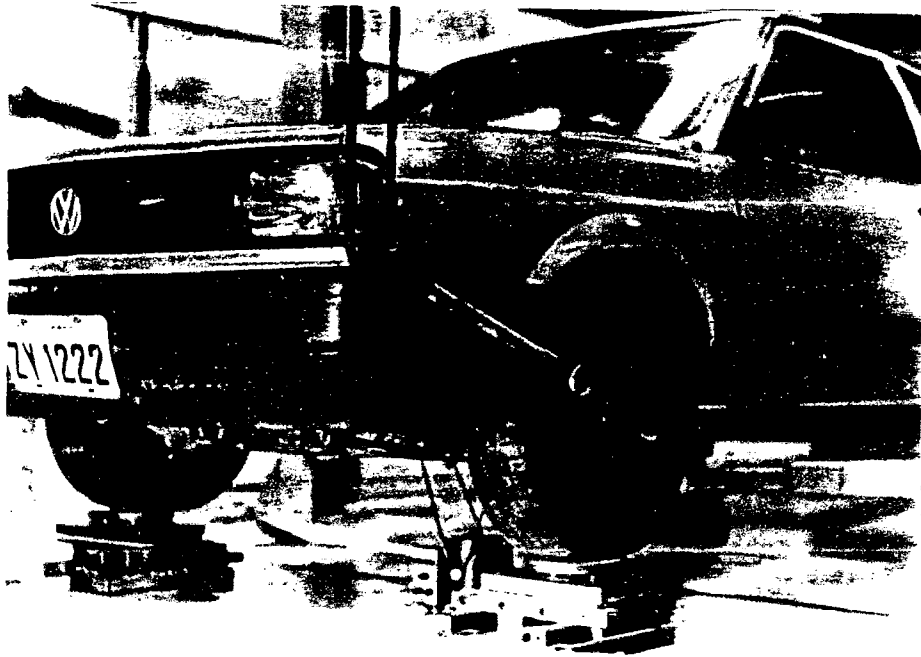
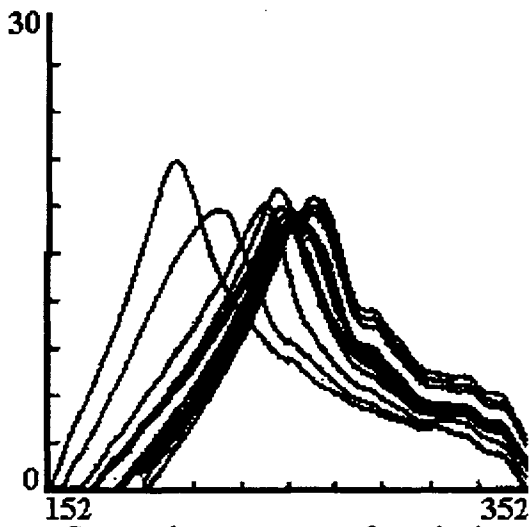
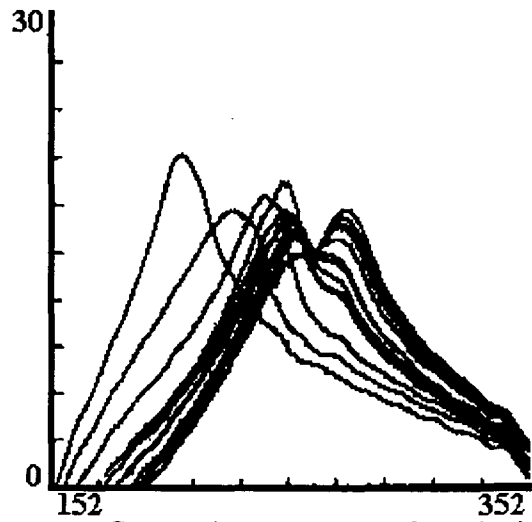


Figura 4.16: Montagem experimental para aplicação de torque.



Curvas de resposta em frequência obtidas na direção vertical.



Curvas de resposta em frequência obtidas na direção horizontal.

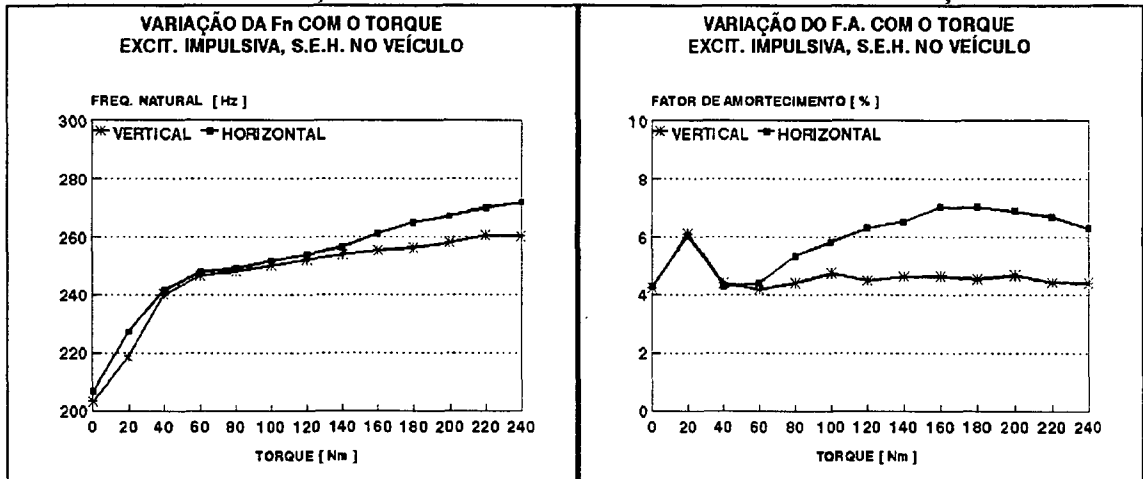


Figura 4.17: Variação dos parâmetros modais com a aplicação do torque.

Observa-se que as curvas de resposta em frequência indicam uma simples migração do pico de ressonância em direção às frequências superiores do espectro até o momento em que atinge a frequência de cerca de 300 Hz, onde ocorre uma forte atenuação de banda estreita. Este fato indica que algum componente nas proximidades do semi-eixo está funcionando como um neutralizador dinâmico sintonizado em 300 Hz. Este efeito é mais forte no sentido horizontal.

Uma análise mais aprofundada do mecanismo interno das juntas homocinéticas indicou como provável causa deste efeito o aumento da efetividade dos contatos entre as partes móveis devido ao aumento de torque aplicado ao sistema. Uma maneira de modelar este fenômeno é através da teoria do contato de superfícies elásticas desenvolvida por Hertz para descrever o comportamento de sistemas mecânicos como engrenamentos e rolamentos. Para não alongar demasiadamente este item, a teoria de Hertz e sua aplicação para o caso em análise está desenvolvida no anexo 2 , onde pode ser constatado que a adoção de uma grandeza definida como momento de articulação da junta pode explicar a influência do torque sobre a frequência natural do semi-eixo de maneira adequada.

Em relação ao autovetor não podemos afirmar nada baseado neste experimento pelo simples fato dele não permitir a obtenção dos mesmos. Mais adiante será apresentado um experimento que permite esta comparação (item 4.3.4) e dela conclui-se que os autovetores obtidos com torques de 0 Nm e 100 Nm apresentam ,como única diferença sensível, o movimento maior das juntas no último caso devido à maior parcela da energia vibratória sendo transmitida a elas, ocasionada pelo maior momento da articulação decorrente do torque. Para visualizar este aspecto de forma clara, na figura 4.18 temos a comparação dos autovetores obtidos sob três níveis diferentes de torque e com mesmo nível de excitação pseudo-randômica.

#### **4.3.2) Influência da orientação da medição.**

No item anterior pode ser observada uma diferença entre os valores obtidos com as medições efetuadas em duas direções distintas.



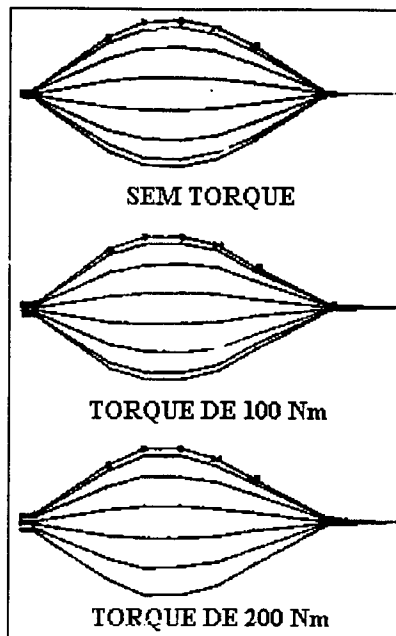
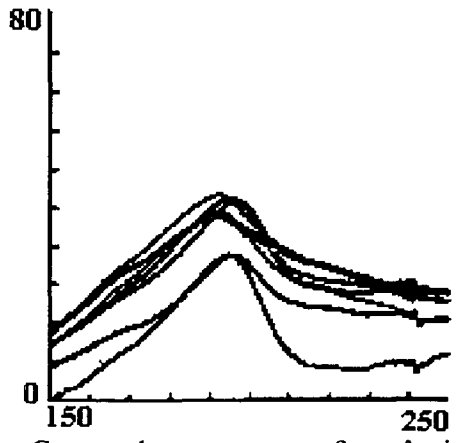


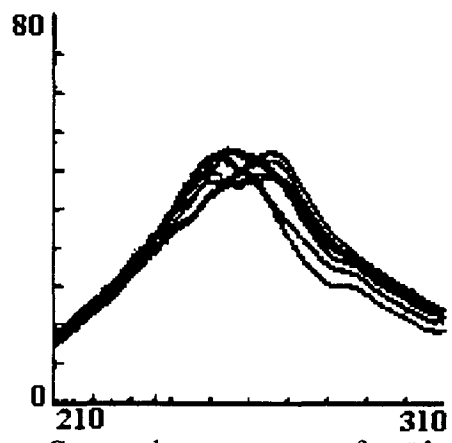
Figura 4.18: Variação do autovetor com a aplicação do torque.

Com o objetivo de investigar mais aprofundadamente este efeito, medições foram realizadas com o veículo na mesma condição descrita anteriormente, com o uso de excitação impulsiva para permitir o acesso ao local da medição (centro do eixo) por várias orientações angulares diferentes e com o sistema sob duas condições de torque: com torque nulo e com torque de 100 Nm aplicado. Como referência, foi adotado um eixo horizontal e paralelo ao plano de simetria do veículo, no sentido de trás para frente do mesmo, como orientação de zero grau e a variação angular crescente no sentido anti-horário no plano vertical observando o eixo pela junta deslizante (saída do diferencial). Ou seja, a medição executada no centro do eixo e na direção horizontal de trás para frente é dita de orientação  $0^\circ$ , e a medição executada na direção vertical de baixo para cima é dita de orientação  $90^\circ$ .

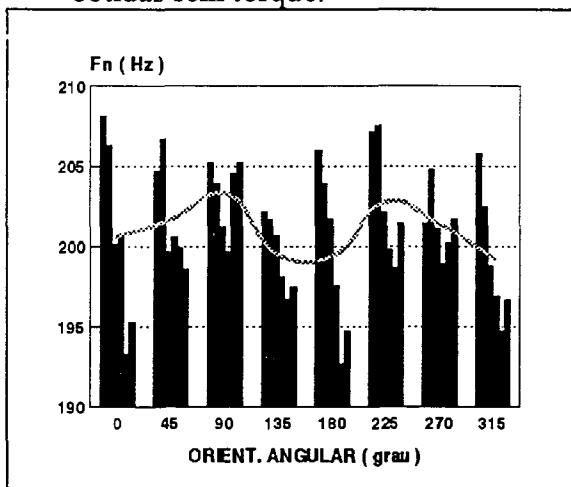
Os resultados obtidos com três medições de duas amostras efetuadas em dias diferentes e após o veículo ter rodado consideráveis distâncias (para fornecer uma idéia da dispersão dos resultados deste experimento) estão apresentados de forma gráfica na figura 4.19 do anexo, da qual pode-se concluir que a dispersão de resultados é sensivelmente menor com a aplicação do torque de 100 Nm. Constata-se uma variação sistemática da frequência natural e do fator de amortecimento.



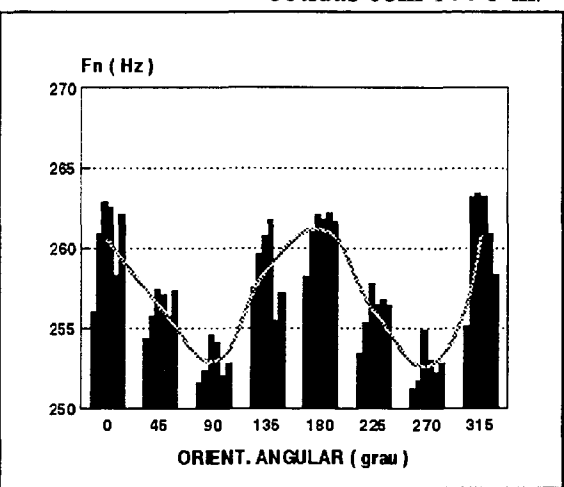
Curvas de resposta em frequência obtidas sem torque.



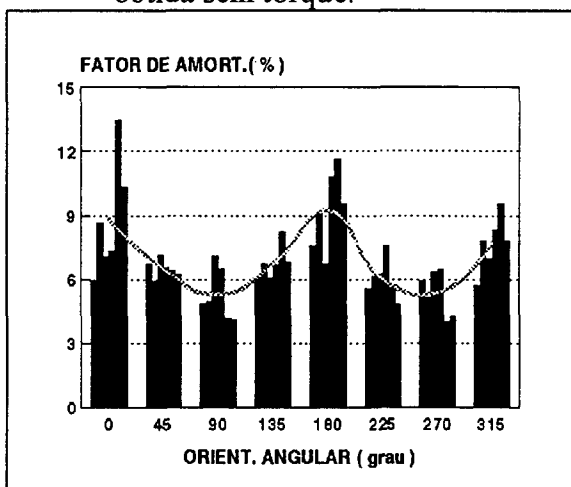
Curvas de resposta em frequência obtidas com 100 Nm.



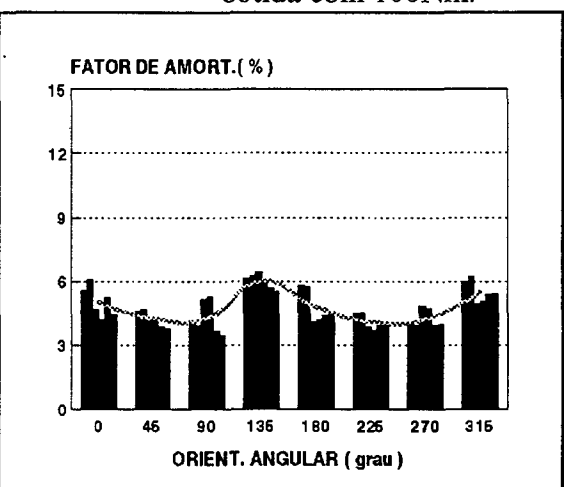
Varição do autovalor com a orientação obtida sem torque.



Varição do autovalor com a orientação obtida com 100Nm.



Varição do fator de amortecimento com a orientação obtida sem torque.



Varição do fator de amortecimento com a orientação obtida com 100 Nm.

Figura 4.19: Variação dos parâmetros modais com a orientação angular da medição.

No caso com torque nulo, os resultados indicam uma clara variação da frequência natural, sendo que o seu valor varia de cerca de 198 Hz (numa orientação de 135° a 180°) a cerca de 204 Hz (de 45° a 90°). O fator de amortecimento varia de 5,8% (90°) até 8,2% (180°).

Com a aplicação do torque de 100 Nm surge o efeito dos picos gêmeos já mencionado anteriormente neste trabalho e constata-se que, dependendo da orientação da medição, eles se alternam em importância: na orientação 0° o pico superior domina a curva de resposta em frequência e na orientação 90° o pico inferior domina. Este fato pode ser observado na variação da frequência natural, a qual oscila de valor entre cerca de 262 Hz a 0° e 252 Hz a 90°. Esta variação (cerca de 3%) é proporcional à observada no caso sem torque. O fator de amortecimento varia de cerca de 4% a 45° e de 6% a 135°, sendo esta variação proporcional à observada no caso sem torque.

Resumindo, temos que a orientação da medição influi, de maneira não muito expressiva, na curva de resposta em frequência, porém deve ser considerada no caso de análises mais precisas.

#### **4.3.3) Influência da disposição espacial do componente.**

Durante o funcionamento do semi-eixo homocinético na sua aplicação veicular a sua disposição espacial ( ângulos nas juntas e deslocamento na junta deslizante) se altera constantemente devido aos movimentos dos sistemas moto-propulsor, de suspensão e de direção do veículo.

A influência destes parâmetros foi avaliada com a execução de medição da curva de resposta em frequência do semi-eixo em condições diferentes de ângulo de esterçamento das rodas e deslocamento da suspensão com a elevação do veículo. A excitação utilizada nestes experimentos foi do tipo pseudo-randômica a um nível de 150 dB (simulando 2000 RPM do motor) aplicada por meio da mesa vibratória acoplada ao centro do semi-eixo na direção vertical e sob três níveis de torque (0 , 100 e 200 Nm).

Os resultados obtidos estão resumidos na tabela 4.5 abaixo.

Disposição espacial		Frequência natural [Hz]			Fator de amortecimento [%]		
Esterçamento	Suspensão	0 Nm	100 Nm	200 Nm	0 Nm	100 Nm	200Nm
0°	0 mm	193,4	251,9	254,8	7,27	2,55	2,49
esq. 17,5°	0 mm	196,9	244,7	252,3	4,44	2,95	2,39
esq. 34,5°	0 mm	199,6	248,1	252,9	3,83	2,22	2,66
dir. 17,0°	0 mm	199,1	249,6	255,8	4,72	3,43	3,01
dir. 34,0°	0 mm	200,1	243,5	248,6	3,75	3,39	3,65
0°	+ 30 mm	197,1	254,1	-----	6,82	2,35	-----
0°	+ 70 mm	208,8	255,1	-----	6,03	2,57	-----
esq. 34,5°	+ 70 mm	209,3	248,4	255,1	3,03	2,73	2,56
dir. 34,0°	+ 70 mm	221,0	247,6	251,4	3,10	2,62	2,33

Tabela 4.5: Influência da disposição espacial do semi-eixo no veículo.

A variação dos valores para a frequência natural e o fator de amortecimento, decorrente da variação do ângulo de esterçamento da roda e deslocamento da suspensão, mostra-se complexa e sem uma regra de formação simples que possa descrevê-la. Este fato é esperado frente à complexidade inerente dos mecanismos de direção e de suspensão do veículo. Por exemplo, a alteração do ângulo de esterçamento acarreta não apenas um ângulo na junta fixa mas também uma alteração no deslocamento da junta deslizante. O movimento da suspensão altera, por sua vez, simultaneamente os ângulos das juntas e o deslocamento da junta deslizante [33] [34].

Apesar de não ser possível estabelecer uma regra que relacione estes fatores, pode ser observado que, em relação à frequência natural, o movimento de esterçamento da roda ocasiona uma variação de cerca de 6% em torno do valor médio, enquanto que o movimento da suspensão ocasiona uma variação de cerca de 10%. Portanto, é indicado definir adequadamente a condição espacial de trabalho do semi-eixo em análise para montar o experimento de forma que o mesmo esteja em condições representativas da sua disposição espacial no veículo.

#### 4.3.4) Influência do nível de excitação utilizado.

A fonte de excitação vibratória do semi-eixo quando na sua aplicação veicular, como já apresentado nos capítulos anteriores, é o conjunto moto propulsor. Uma vez que o seu nível de vibração varia constantemente e que nas análises preliminares (em condição livre-livre) foi identificado um comportamento não-linear do componente frente a níveis de excitação distintos, cabe investigar como o componente se comporta frente a esse parâmetro quando instalado no veículo.

Para tal, utiliza-se a mesa vibratória para fornecer um sinal de excitação pseudo-randômico que pode ter a sua amplitude controlada para simular diferentes regimes de funcionamento do motor. Foram executados ensaios sob três níveis distintos de torque (0 Nm, 100 Nm e 200 Nm) e quatro diferentes níveis de excitação (vide figura 4.20). Os resultados obtidos estão resumidos na tabela 4.6 abaixo e na figura 4.21 (autovetores).

Nível de Excitação			Frequência natural [Hz]			Fator de Amortec. %		
Força [N]	Motor [RPM]	Nível [dB]	0 Nm	100 Nm	200 Nm	0 Nm	100 Nm	200 Nm
1,0	1000	145	230,3	253,8	256,5	4,43	2,39	2,38
1,8	2000	150	198,8	256,1	256,1	9,94	2,47	2,37
3,2	2500	155	194,1	251,8	254,7	6,82	2,55	2,47
5,6	3000	160	190,0	248,5	251,5	9,08	2,66	2,90
----	----	Variação [%]	6,4	2,1	2,0	105,0	11,0	2,0

Tabela 4.6: Influência do nível de excitação pseudo-randômica.

Conclui-se, dos dados obtidos, que a frequência natural decresce e o fator de amortecimento cresce com o aumento do nível de excitação, sendo esta variação mais sensível para o caso sem torque que nos demais (a aplicação do torque torna o sistema menos sensível à variação do nível de excitação). Isto pode ser explicado da seguinte forma: o aumento do nível de excitação aumenta a dissipação de energia por meio do atrito entre as partes móveis internas das juntas (que apresentam deslocamentos relativos maiores), aumentando o fator de amortecimento e

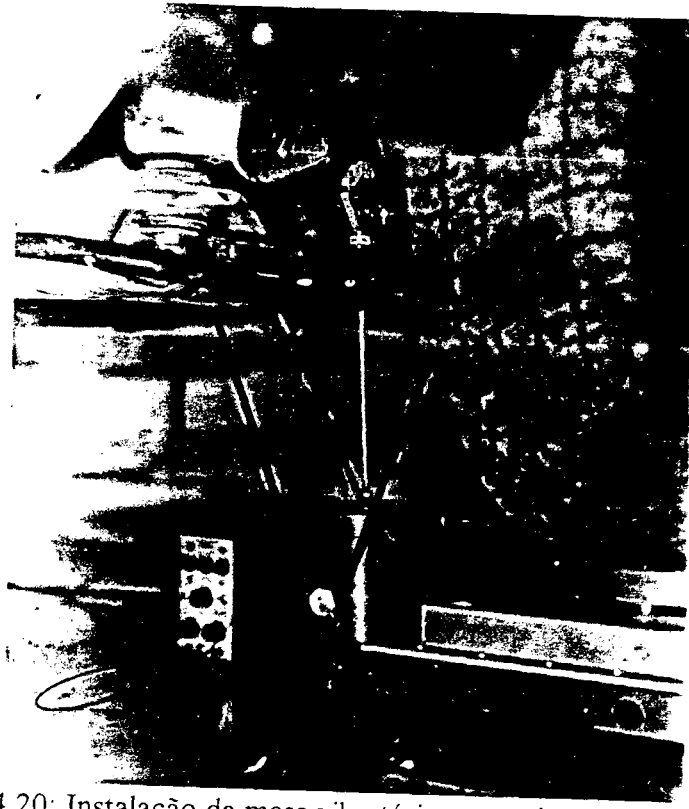


Figura 4.20: Instalação da mesa vibratória no semi-eixo sob torque.

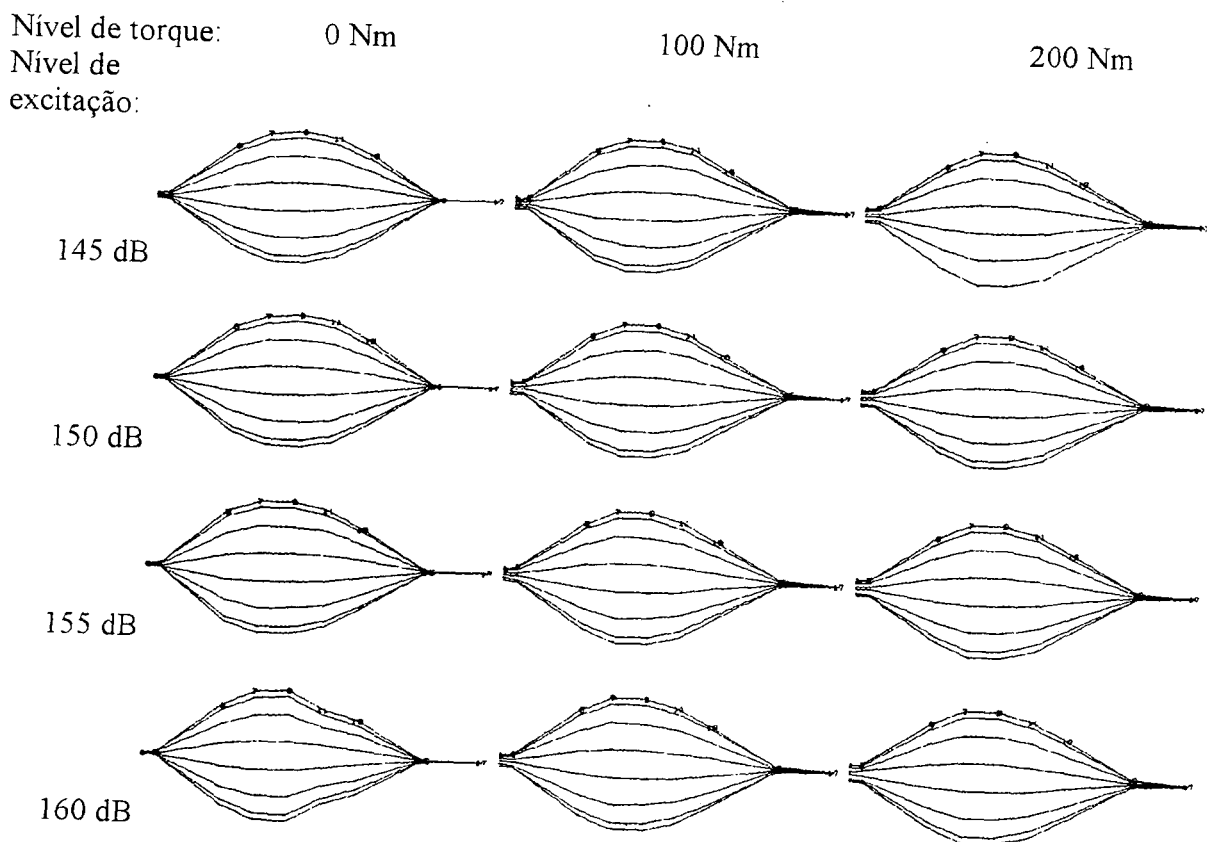


Figura 4.21: Variação do autovetor com o nível de torque e de excitação.

acarretando o decréscimo da frequência natural amortecida. No caso de termos um torque aplicado ao sistema, a variação do deslocamento relativo das partes móveis internas torna-se menor devido ao exposto no anexo 2, reduzindo a sua influência no fator de amortecimento e, conseqüentemente, na frequência natural.

Em relação ao autovetor, além da alteração no deslocamento das juntas devido à alteração do nível de excitação diminuir com a aplicação do torque, temos que o movimento da junta deslizante aumenta de forma mais sensível com o aumento do nível de excitação que a junta fixa. Isto indica que o cubo da roda representa uma condição de contorno mais rígida que o diferencial (o qual está montado, junto com o motor e caixa de câmbio, sobre coxins elásticos).

#### **4.3.5) Verificação das alterações dos parâmetros dinâmicos do semi-eixo homocinético com o uso no veículo.**

##### **4.3.5.1) Procedimento.**

Com o objetivo de avaliar as alterações que o uso do componente acarreta nos seus parâmetros modais, o semi-eixo adotado neste estudo foi instalado no veículo e rodou 22.419 Km em condições normais de utilização. Com esta quilometragem o componente encontra-se saudável, porém certamente a influência do desgaste pelo uso deverá ser identificável em alguma extensão.

Com o componente instalado no veículo, uma série de medições são efetuadas para permitir não apenas a comparação com os resultados obtidos anteriormente com o componente sem uso, como também gerar um referencial para a validação da bancada de teste desenvolvida no capítulo 5. As medições efetuadas são as seguintes:

- a) Verificação da influência do torque aplicado ao conjunto, usando excitação impulsiva no sentido vertical e horizontal de medição.
- b) Verificação da influência da orientação da medição, usando excitação impulsiva com o componente sob um torque de 100 Nm.

c) Verificação da influência do nível de excitação, usando excitação senoidal aplicada na direção vertical com o componente sob um torque de 100 Nm.

d) Verificação da influência do nível de excitação, usando excitação pseudo-aleatória aplicada na direção vertical com o componente sob um torque de 100 Nm.

e) Verificação da influência do tipo de excitação na obtenção da curva de resposta em frequência.

f) Análise modal efetuada com uso de excitação pseudo-aleatória (com diferentes níveis) na direção vertical com o componente sob um torque de 100 Nm.

#### **4.3.5.2) Resultados obtidos.**

a) Os resultados obtidos nas três medições consecutivas efetuadas com torques de zero a 220 Nm estão apresentados nas figuras 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25 onde pode-se visualizar a variação da frequência natural e do fator de amortecimento. No caso da frequência natural observa-se a curva característica de crescimento em relação ao torque e a repetibilidade da medição ficou em cerca de 3 Hz, exceto para torques inferiores a 40 Nm onde o sistema mostra-se muito sensível. Devido ao fato de que as medições iniciaram na direção vertical e somente após foram efetuadas na direção horizontal, observa-se claramente que os valores para níveis baixos de torque sofreram a influência da acomodação das partes internas das juntas que, apesar dos esforços no sentido de retirar todo o torque antes de iniciar nova bateria de medições, foram inevitáveis.

No caso do fator de amortecimento, na direção vertical observa-se uma dispersão de resultados da ordem de 0,5% e uma tendência clara de decréscimo com a aplicação de torque (devido à explicação dada anteriormente neste capítulo). Na direção horizontal, a dispersão foi bem superior (da ordem de 2%) e não apresentou um comportamento definido, indicando existir uma parcela elevada do amortecimento proveniente de fontes externas ao componente em análise (coxins elastoméricos, pneumático, junções entre componentes do motor, óleo de lubrificação do motor, etc...).

Em ambos os casos, os valores não apresentaram alterações substanciais em relação às medições anteriores, sendo as mesmas coerentes qualitativa e quantitativamente.



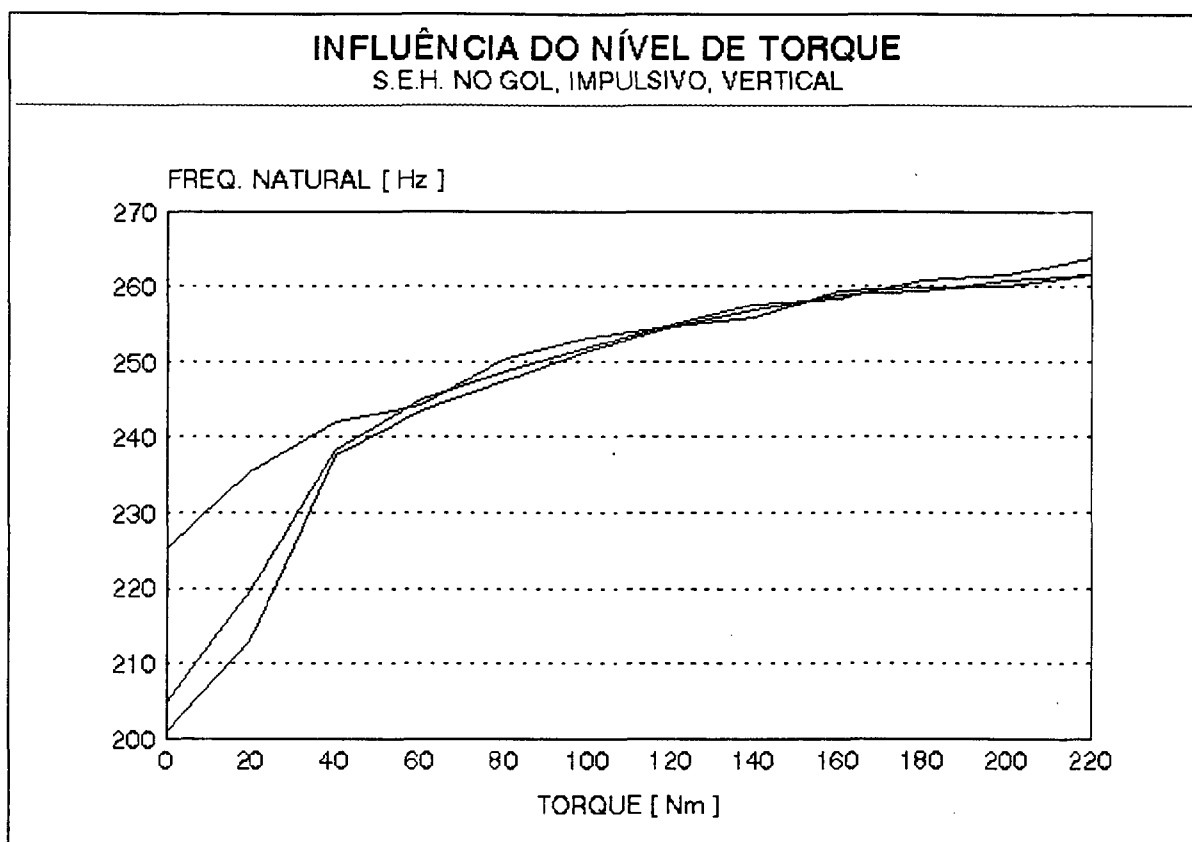


Figura 4.22: Variação da frequência natural com a aplicação do torque na direção vertical.

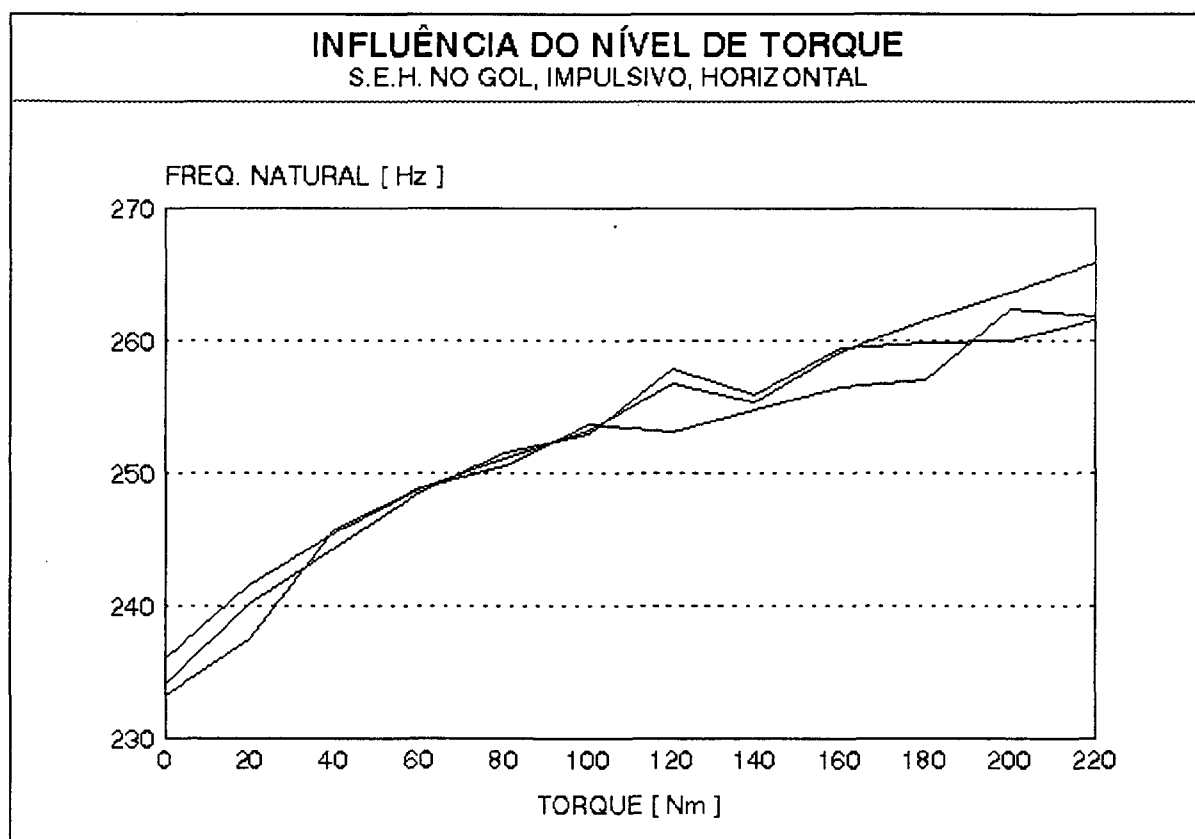


Figura 4.23: Variação da frequência natural com a aplicação do torque na direção horizontal.

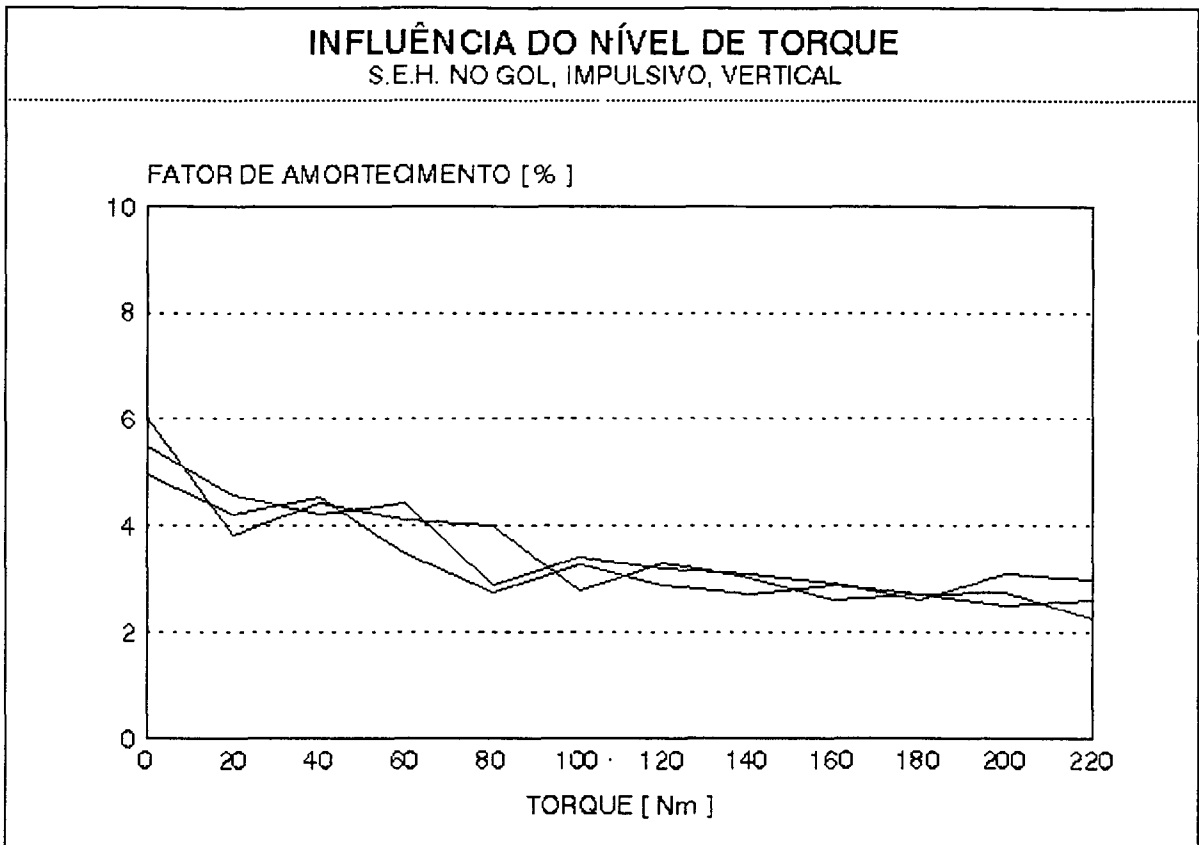


Figura 4.24: Variação do fator de amortecimento com a aplicação do torque na direção vertical.

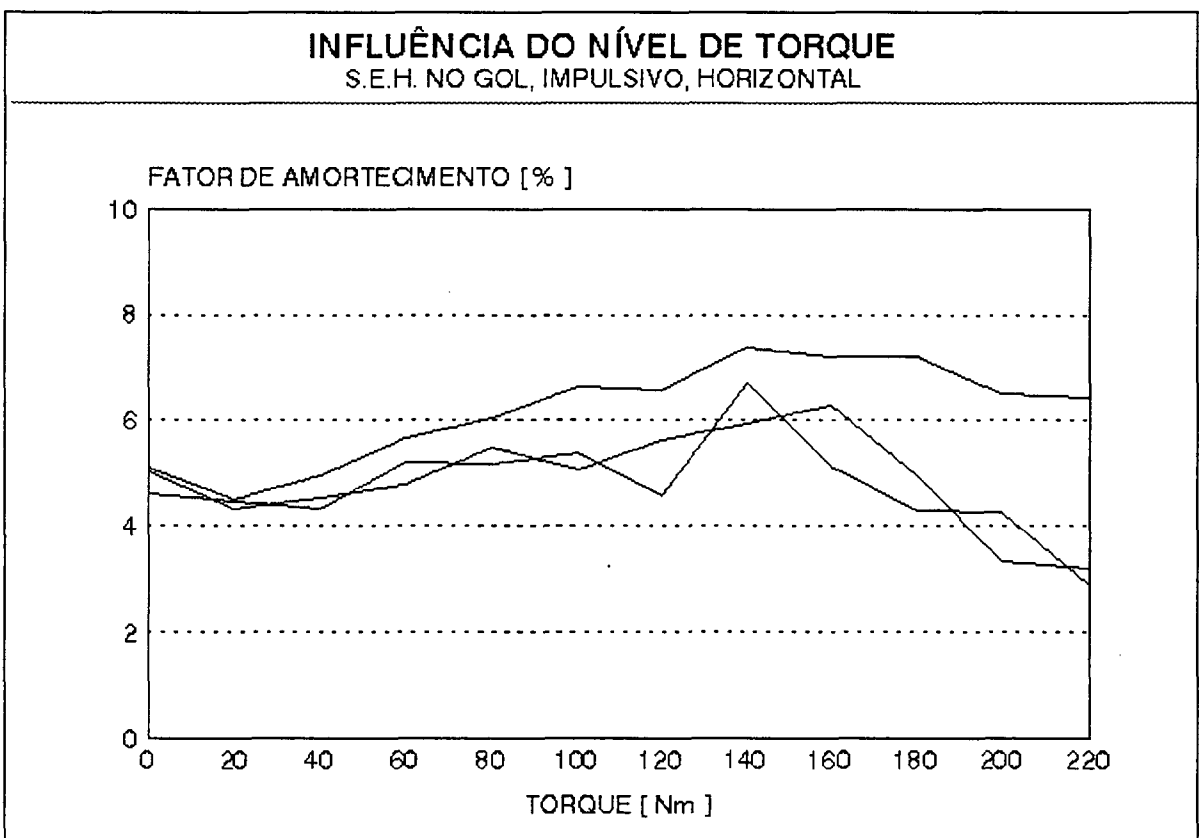


Figura 4.25: Variação do fator de amortecimento com a aplicação do torque na direção horizontal.

O gráfico sobreposto das curvas de resposta em frequência na direção vertical (figura 4.26) e horizontal (figura 4.27) indica que o efeito da existência de um neutralizador dinâmico na frequência de 300 Hz ( a qual é mais efetivo na direção horizontal) se confirma, porém com menor influência na medição, sendo provável que com o uso do veículo este efeito (proposital ou não) foi reduzido pelo desgaste ou pela manutenção periódica executada neste intervalo de tempo (troca de coxins da barra estabilizadora e discos de embreagem).

b) Os resultados obtidos nas três medições consecutivas efetuadas em direções distintas apresentam a variação característica da frequência natural (figura 4.28) e do fator de amortecimento (figura 4.29) com uma variação da ordem de 10 Hz (4%) e de 2 % (30%), similarmente às obtidas nas medições anteriores. Novamente a frequência natural medida na direção vertical apresenta valor inferior à medida na direção horizontal.

c) As curvas de resposta em frequência obtidas com excitação senoidal estão graficadas na figura 4.30, sendo ela precisa somente a ponto de permitir avaliar a alteração na sua forma decorrente da aplicação de níveis distintos de excitação ao ser executado o ensaio. Pode-se visualizar clara alteração na frequência natural, a qual reduz cerca de 13 Hz (6%) com o aumento do nível total de execução de 130 dB (aproximadamente 0,2 N) para 155 dB (aproximadamente 3,2 N), assim como no fator de amortecimento, o qual cresce com o aumento no nível de excitação de 4,0% para 14,8% (explicado pelo maior movimento relativo entre as partes móveis das juntas e conseqüente aumento de dissipação de energia).

Como este tipo de medição só foi efetivada anteriormente em condição livre-livre, uma comparação direta torna-se inviável.

d) A medição efetuada com o uso de excitação pseudo-randômica apresentou resultados similares aos obtidos com excitação senoidal descrita acima (figura 4.31), revelando uma redução de cerca de 15 Hz (7%) na frequência natural (figura 4.32) e um crescimento de cerca de 4% (60%) no fator de amortecimento (figura 4.33) com o aumento do nível de excitação na mesma faixa descrita anteriormente. Estes resultados mostram-se coerentes com os obtidos anteriormente e com o ensaio usando excitação senoidal.

e) Efetuando a comparação das medições anteriores para analisar a influência do uso de tipos de excitação diferentes, obtem-se da excitação pseudo-randômica a variação na resposta em frequência devido ao nível de excitação apresentada na figura 4.34 que pode ser comparada com a figura 4.30 obtida para a excitação senoidal. Sobrepondo estas medições obtem-se a figura 4.35 .

Inicialmente, pode-se constatar a boa coerência entre as medições, sendo o comportamento relativo ao nível de excitação similar nos dois casos.

Para avaliar melhor as medições, devemos levar em conta que o parâmetro adotado para identificar o nível de excitação ( nível total do espectro de excitação) serve como um referencial apenas, sendo a relação entre este referencial e outros parâmetros (que definem de maneira mais adequada a excitação para fins de classificação perante o nível aplicado a cada frequência) apresentada na tabela 4.7 abaixo, onde o nível médio representa o valor aproximado da excitação aplicada em cada frequência do espectro.

Da tabela pode-se observar que a comparação correta sob o ponto de vista da energia aplicada a cada frequência se limita aos dois níveis superiores de pseudo-random e dois níveis inferiores do senoidal apresentados na figura 4.36. Nela observa-se que as curvas de resposta em frequência obtidas para um mesmo nível de excitação são distintas. Da figura 4.36 do anexo pode-se concluir que se o ensaio for executado com um nível de excitação médio senoidal cerca de 10 vezes maior que a excitação pseudo-randômica, pode-se obter respostas em frequência similares.

Esta conclusão já havia sido indicada anteriormente (apesar de que os experimentos foram executados em condições de contorno distintas) e pode ser explicada pelo conteúdo energético global do ensaio que, devido ao fato da excitação pseudo-randômica apresentar espectro denso e a excitação senoidal apresentar espectro discreto, são distintos nestes tipos de ensaio.

f) A análise modal efetuada com diferentes níveis de excitação gera valores de frequência natural (figura 4.37) e fator de amortecimento (figura 4.38) que confirmam as conclusões apresentadas no item anterior, uma vez que estes valores agora representam não apenas uma medição isolada de valores, mas a média ponderada dos valores obtidos nos nove pontos de medição adotados na malha de discretização.

Tipo de excitação	Nível total	Nível médio	Nível médio
	F [dB]	F [dB]	F [N]
Senoidal	130	130	3,2
	135	135	5,6
	140	140	10
	145	145	17,8
	150	150	31,6
	155	155	56,2
P. Random	140	110	0,3
	145	115	0,6
	150	120	1,0
	155	125	1,8
	160	130	3,2
	165	140	10

Tabela 4.7: Relação entre parâmetros de nível de excitação.

A superposição dos autovetores obtidos para os diferentes níveis de excitação mostra uma grande semelhança entre eles (figura 4.39) e a análise de cada um deles apresenta novamente a característica básica de que o eixo encontra-se em ressonância de flexão, e as juntas apresentam deslocamentos transversais de corpo rígido, sendo de maior amplitude na junta deslizante (figura 4.40).

Cabe salientar que nestas medições foi solucionado o problema de acesso ao ponto 17 (extremo da ponta de eixo sobre o qual está acoplado o torquímetro de aplicação do torque) possibilitando a medição neste ponto, o que permite a obtenção do movimento de translação da junta fixa de forma mais completa do que a executada anteriormente.

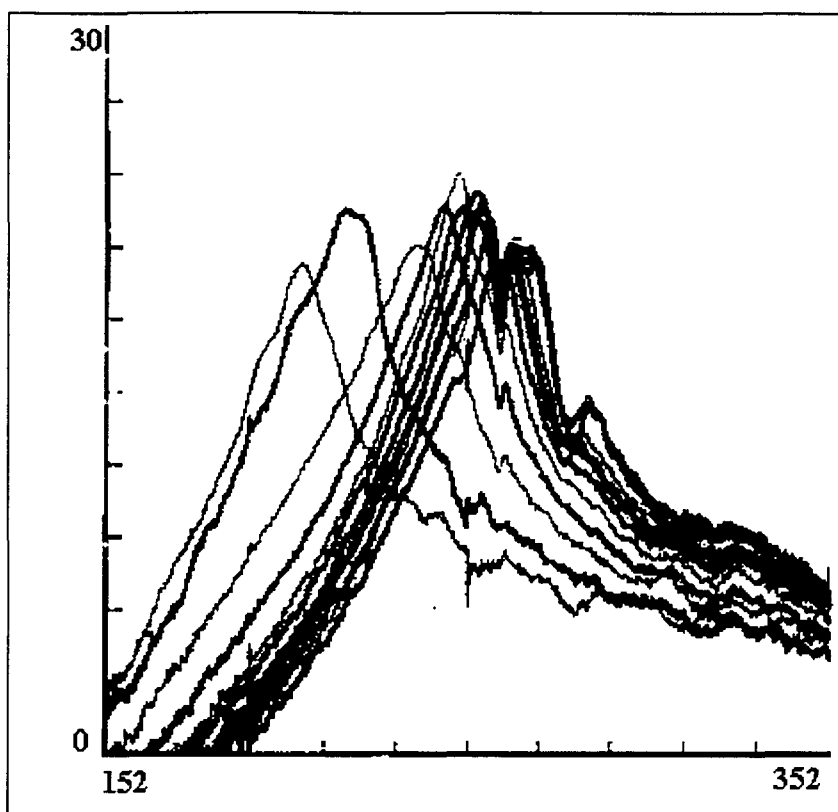


Figura 4.26: Variação da curva de resposta em frequência na direção vertical com a aplicação do torque.

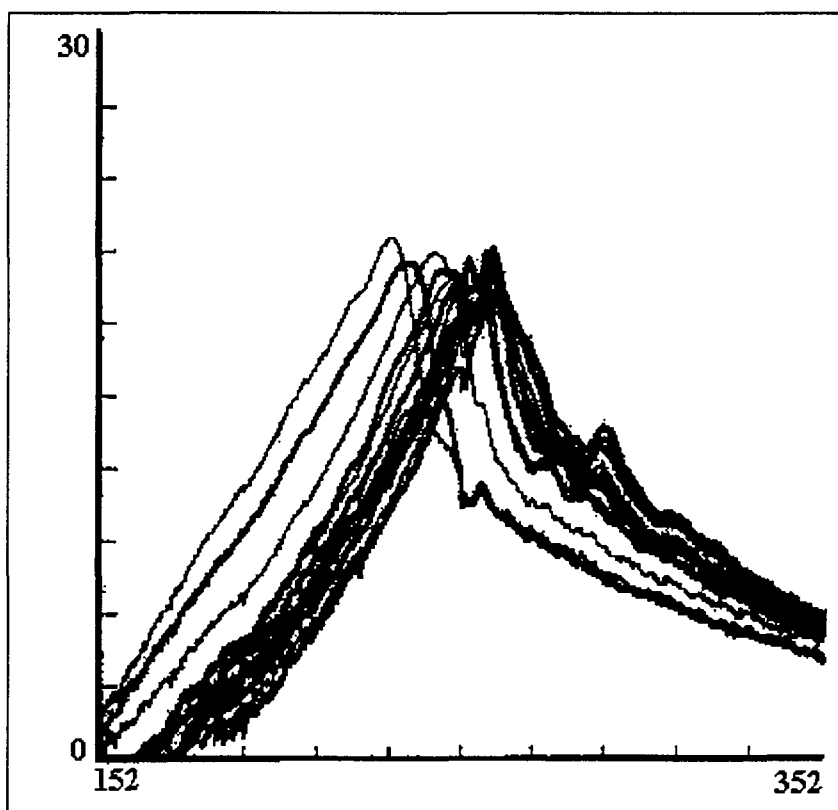


Figura 4.27: Variação da curva de resposta em frequência na direção horizontal com a aplicação do torque.

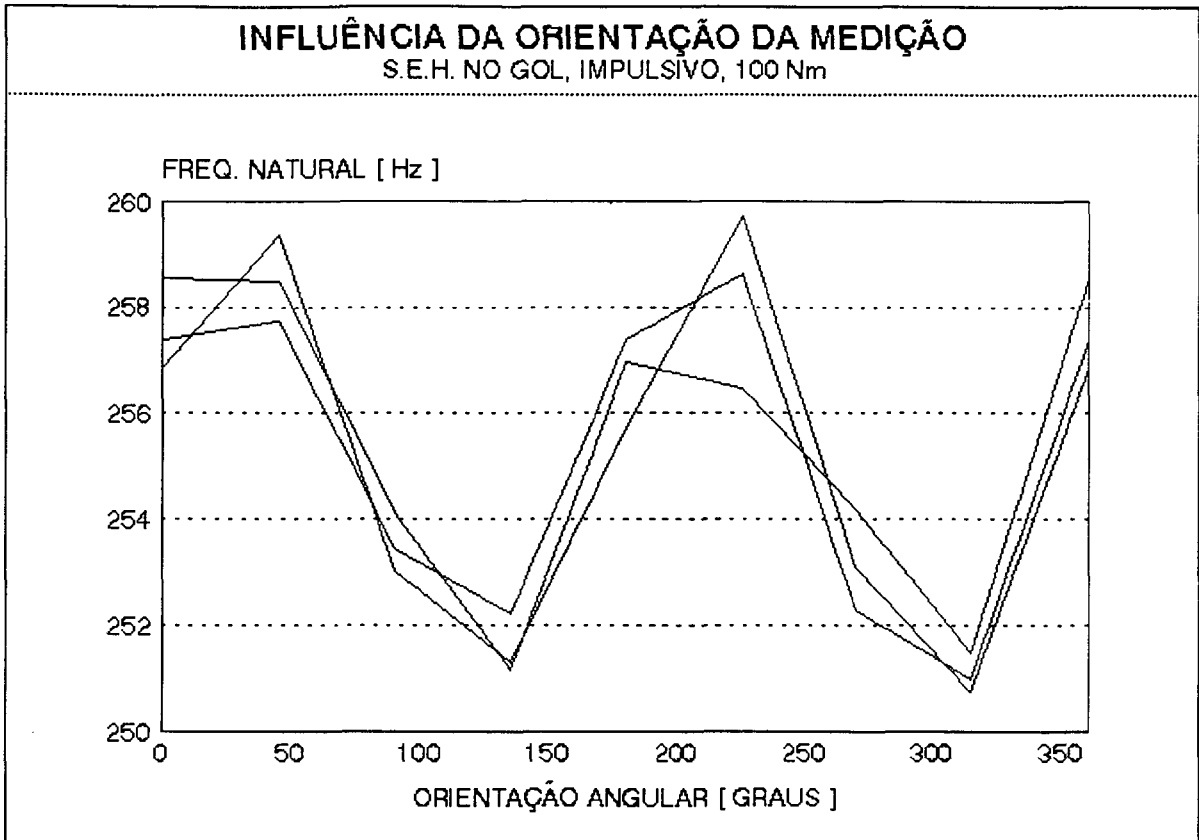


Figura 4.28: Variação da frequência natural com a orientação da medição.

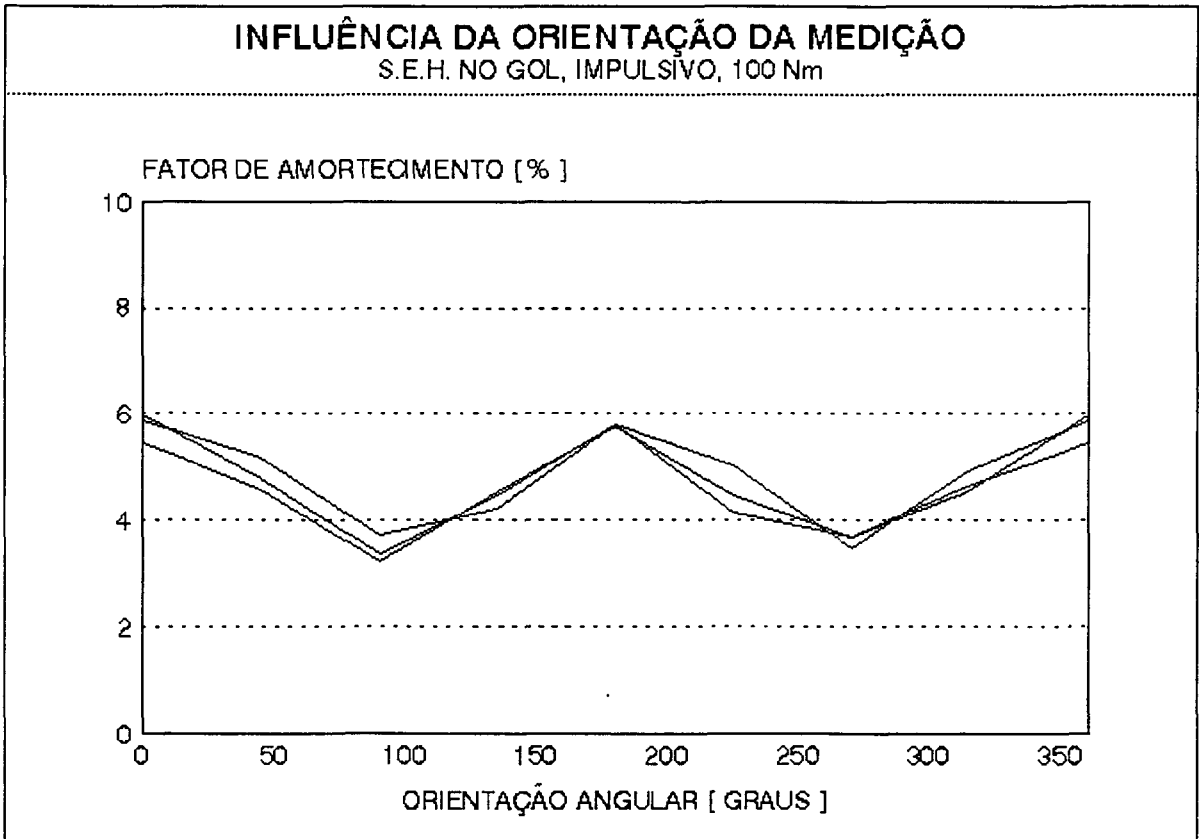


Figura 4.29: Variação do fator de amortecimento com a orientação da medição.

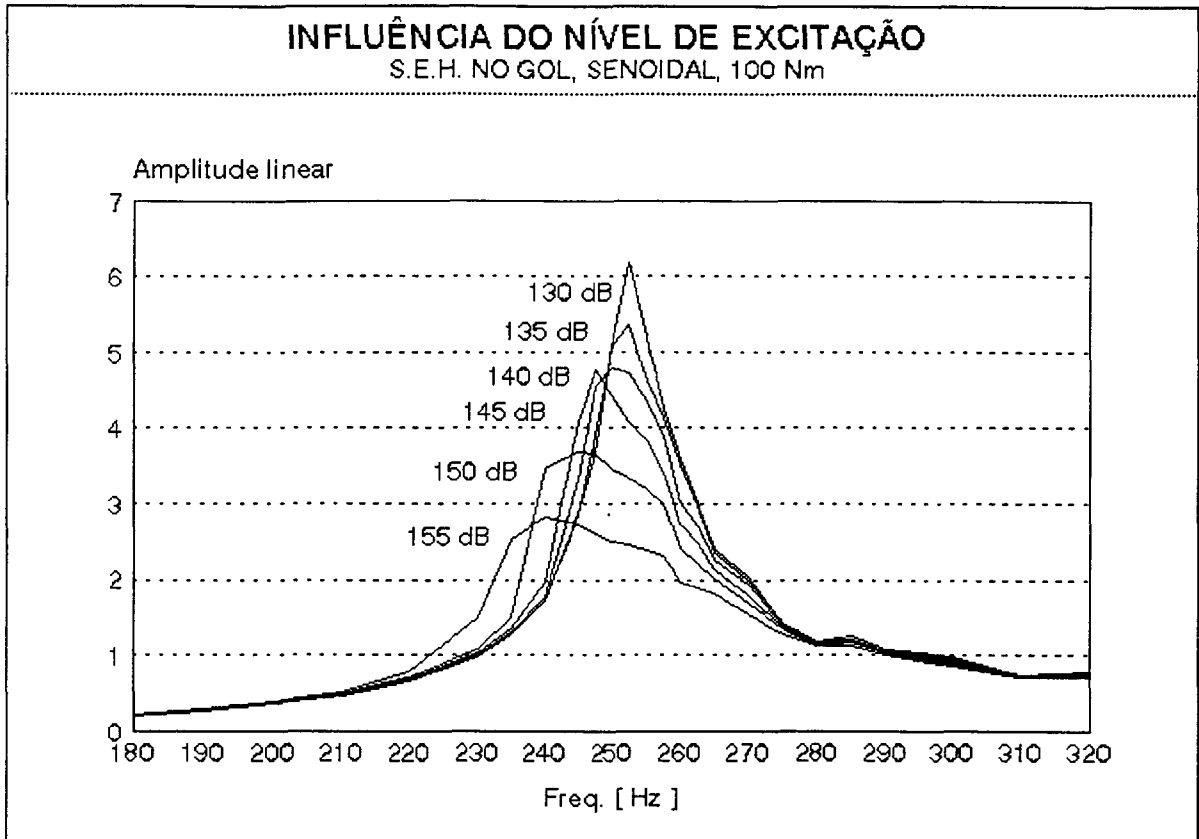


Figura 4.30: Variação na curva de resposta em frequência com a amplitude da excitação senoidal.

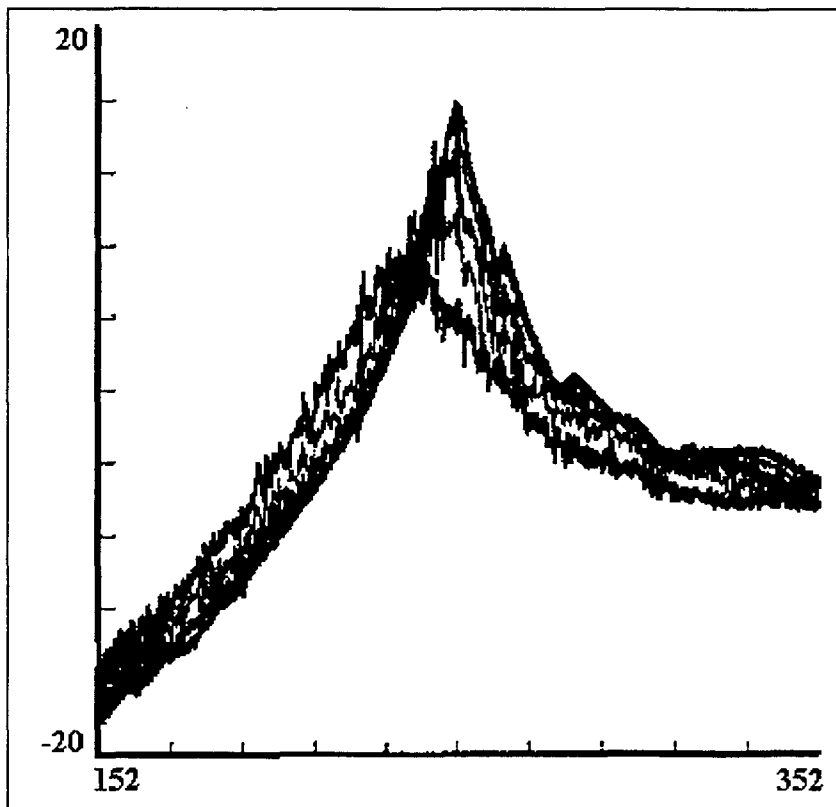


Figura 4.31: Variação da curva de resposta em frequência com o nível de excitação pseudo-aleatória.



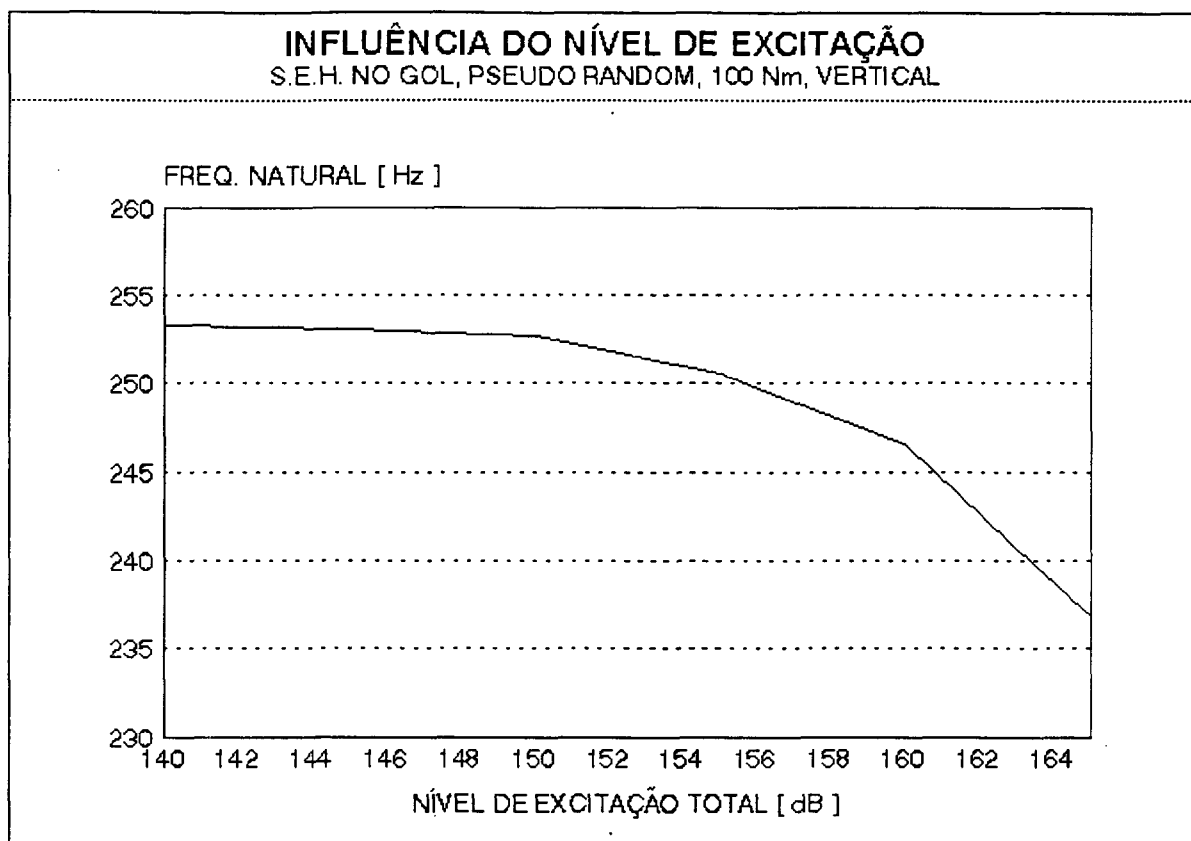


Figura 4.32: Variação da frequência natural com o nível de excitação pseudo-randômica.

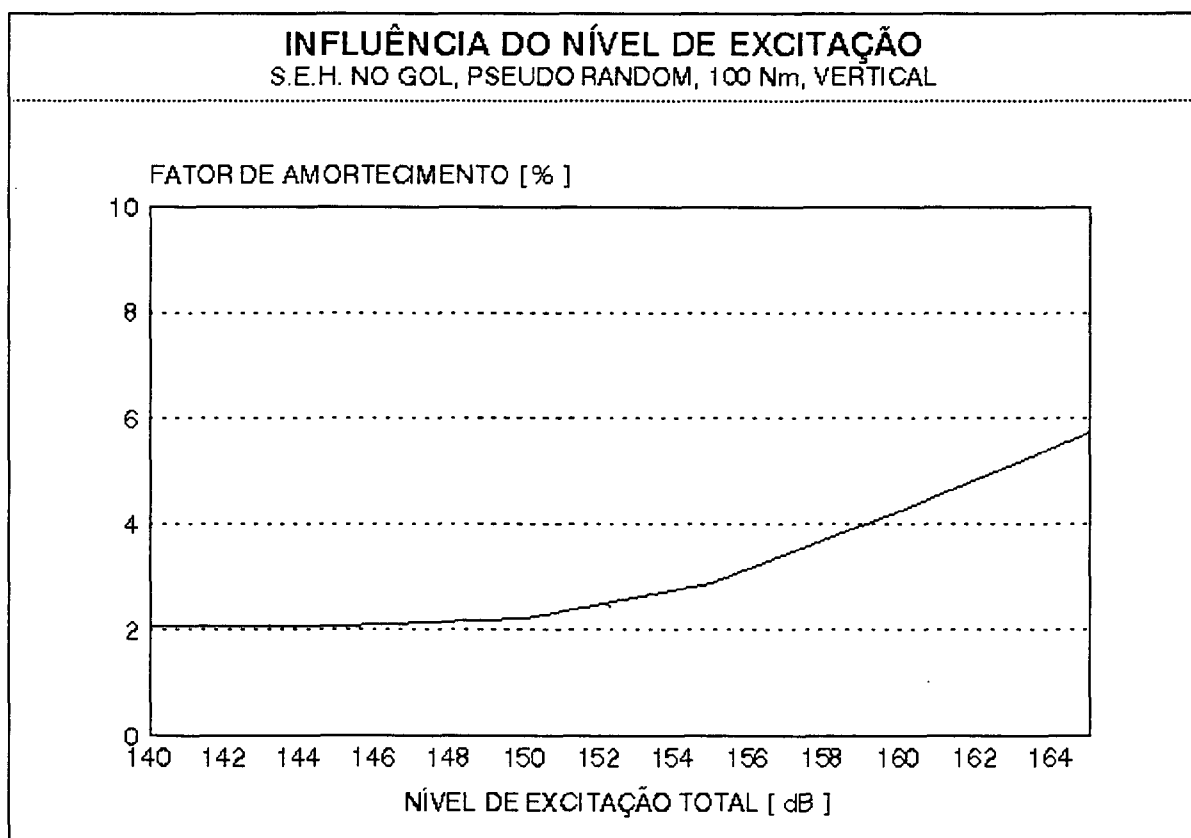


Figura 4.33: Variação do fator de amortecimento com o nível de excitação pseudo-randômica.

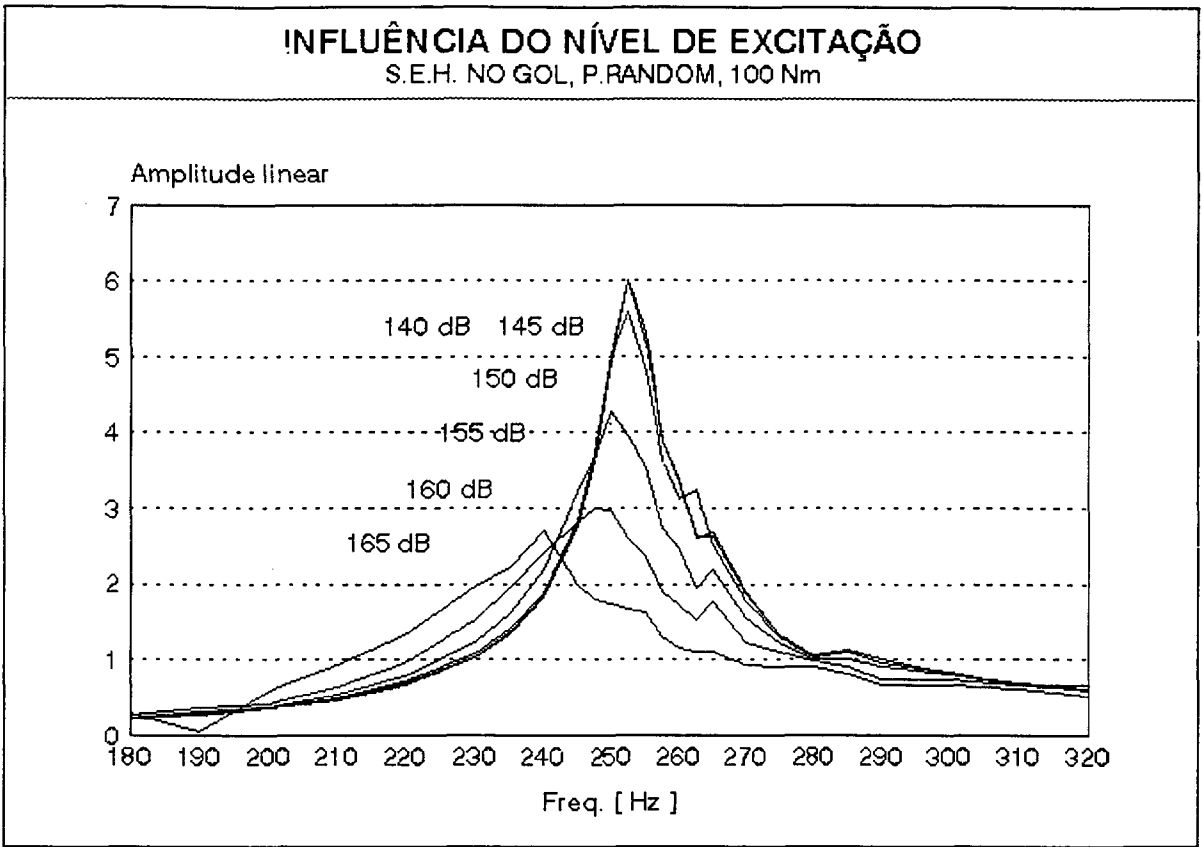


Figura 4.34: Variação da curva de resposta em frequência com o nível de excitação pseudo-aleatória.

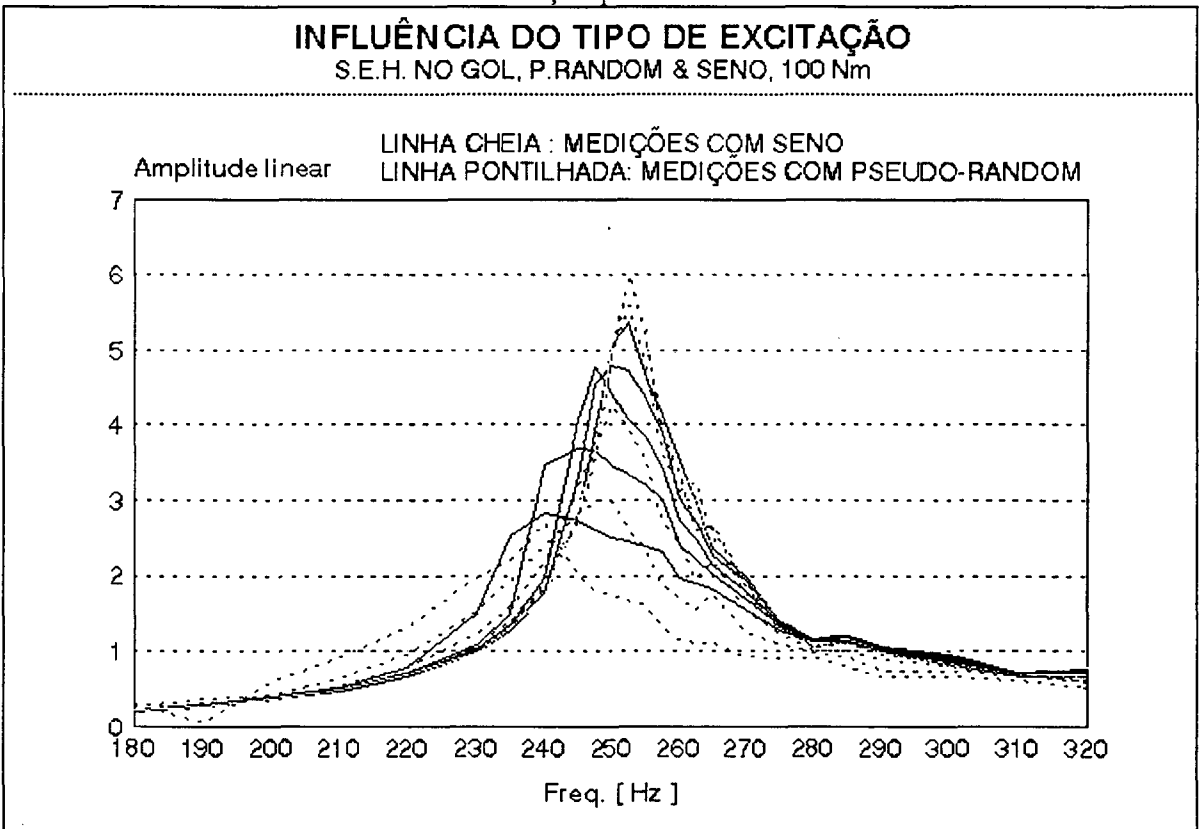


Figura 4.35: Variação da curva de resposta em frequência com o tipo de excitação adotada.

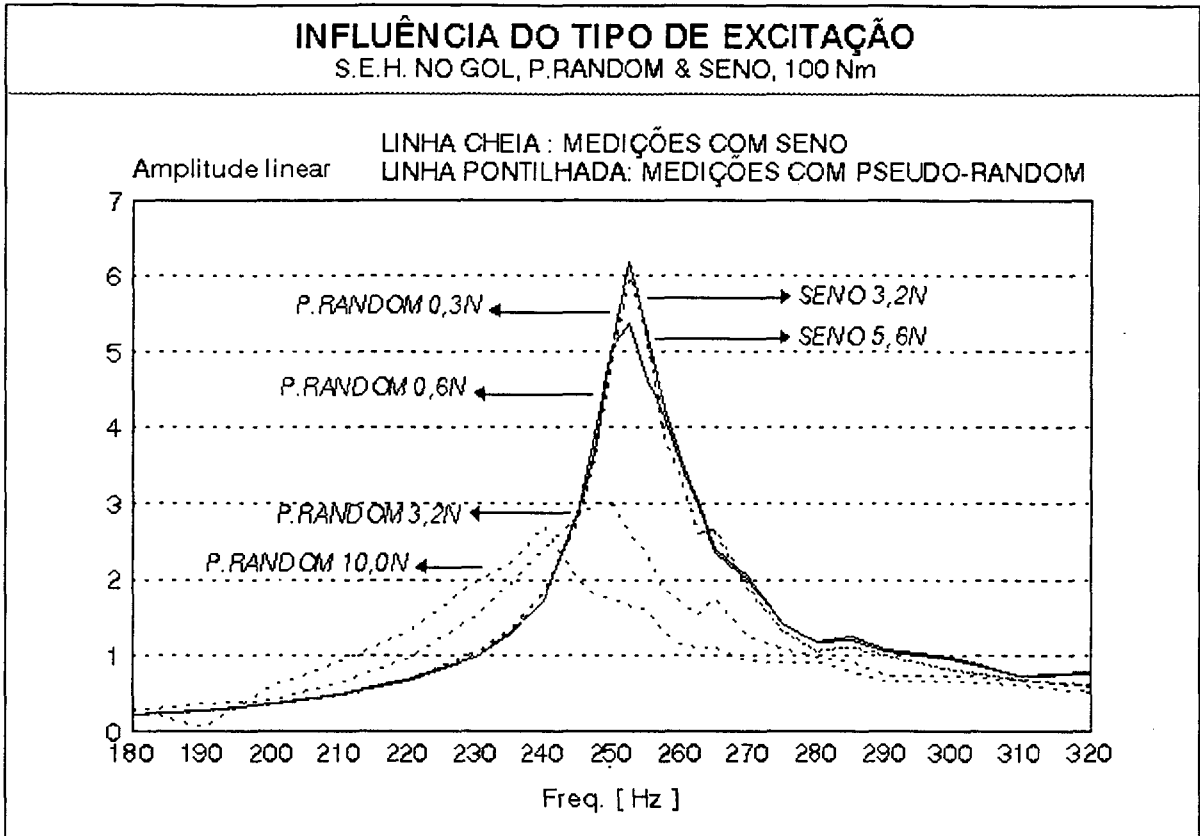


Figura 4.36: Variação da curva de resposta em frequência com o tipo de excitação adotada.

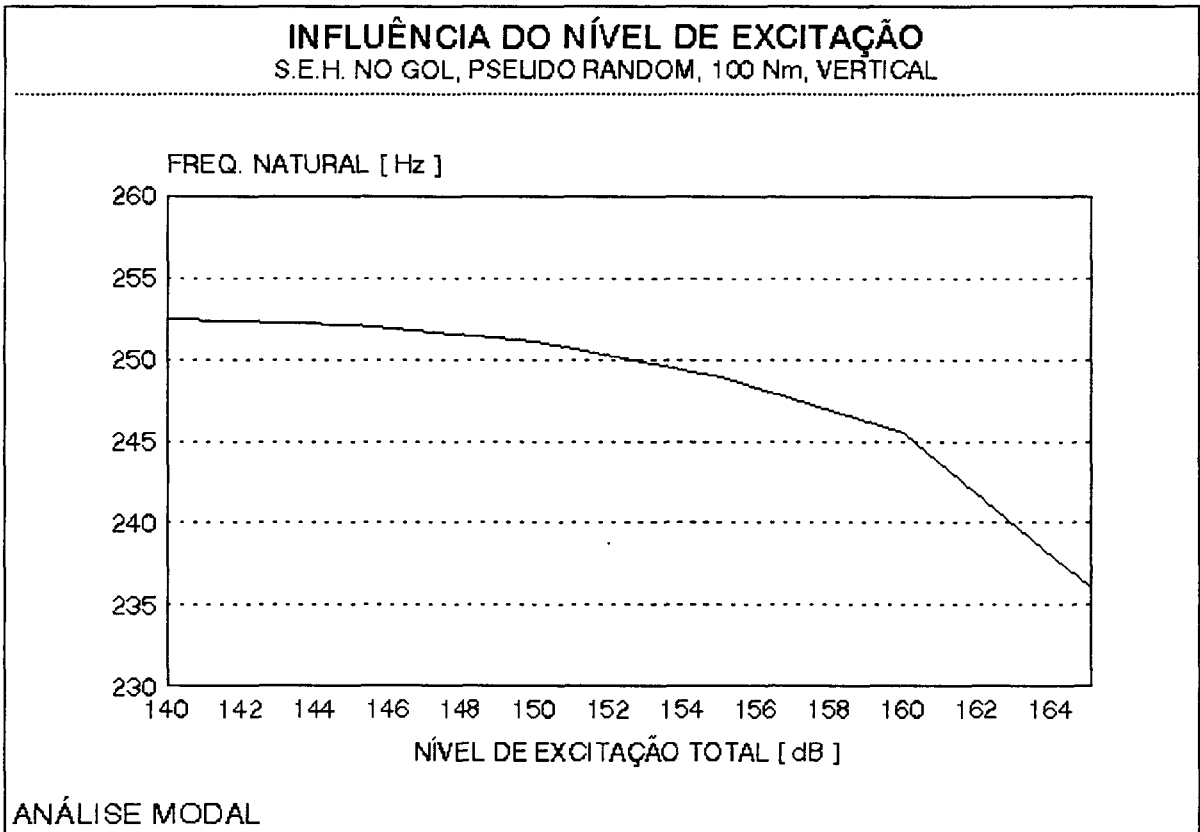


Figura 4.37: Variação da frequência natural com o nível de excitação pseudo-randômica.

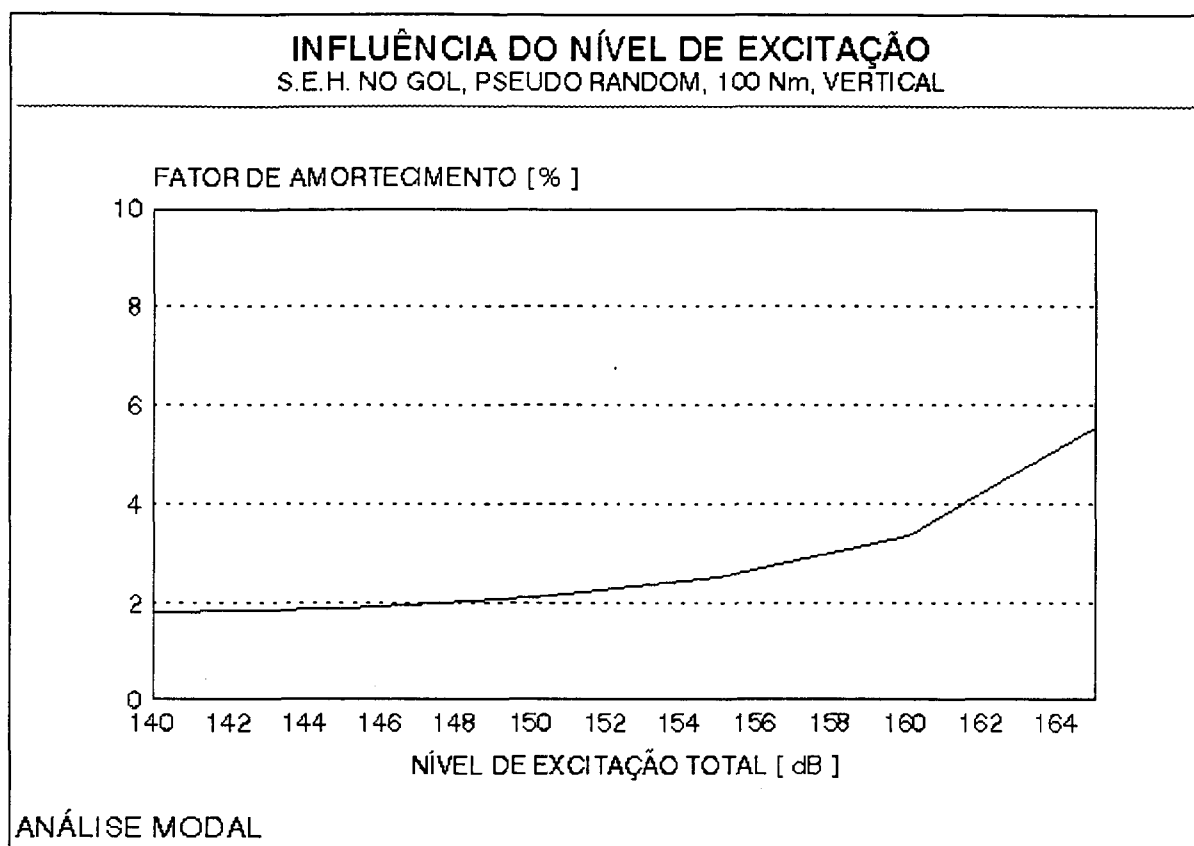


Figura 4.38: Variação do fator de amortecimento com o nível de excitação pseudo-randômica.

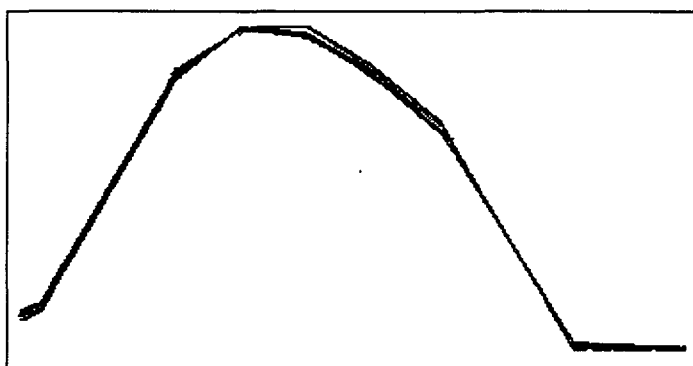


Figura 4.39: Superposição dos autovetores obtidos com diferentes níveis de excitação.

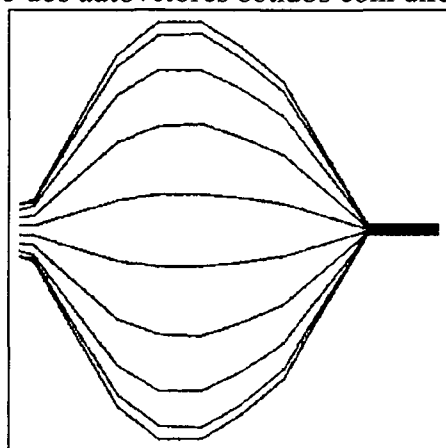


Figura 4.40: Autovetor típico do semi-eixo instalado no veículo.

#### **4.3.5.3) Conclusão final**

Todas as medições efetuadas apresentaram uma boa coerência com as anteriores, tanto qualitativa como quantitativamente, e indicam que não ocorreu alteração sensível nos parâmetros dinâmicos do semi-eixo com o desgaste proveniente de 22.419 Km de uso.

#### **4.4) Conclusões finais da análise.**

Resumindo todos os resultados obtidos neste capítulo, têm-se as seguintes conclusões genéricas sobre o comportamento dinâmico do semi-eixo homocinético:

**4.4.1)** A configuração espacial obtida para este primeiro modo de vibração transversal do semi-eixo homocinético indica que o componente que domina as características dinâmicas do conjunto é o eixo de conexão, sendo ele o mais indicado a sofrer alterações estruturais no intuito de melhorar o desempenho do conjunto (alterando o seu desenho ou acoplando sistemas que alterem o seu comportamento, como ,por exemplo, absorvedores dinâmicos ou dessintonizadores).

**4.4.2)** O amortecimento do semi-eixo homocinético advém, em sua maior parte, das juntas homocinéticas, sendo provavelmente decorrente do atrito e das folgas existentes entre as suas partes móveis. Fontes externas de amortecimento existem e influenciam no comportamento dinâmico do semi-eixo homocinético.

**4.4.3)** O fenômeno dinâmico que envolve este componente, quando na sua aplicação veicular, é complexo, em especial porque os parâmetros dinâmicos estão em contínua variação. Salienta-se o efeito identificado da variação considerável da frequência natural do sistema com a variação da amplitude da excitação na análise efetuada com excitação senoidal, a qual é mais indicada para este estudo, uma vez que ela não efetua uma linearização do fenômeno ( que é o caso da pseudo-randômica ou impulsiva) e temos um controle mais completo dos seus parâmetros.

Foi observado que um aumento de 25 dB na excitação pode causar uma redução de cerca de 6% na frequência natural. Considerando-se os dados obtidos em teste de campo, constata-se que na faixa de operação do motor, com aumento da rotação ocorre esta variação na excitação, portanto o semi-eixo homocinético apresenta um comportamento distinto para cada regime de rotação do motor.

Soma-se a isto o efeito da variação da frequência natural com o torque aplicado a ele, o qual é diferente a cada rotação do motor, que atinge variações de 30% numa variação de 0 a 240 Nm.

**4.4.4)** Devido à ótima repetibilidade e estabilidade em relação aos fatores influentes do ensaio (em medições executadas em dias diferentes, após o veículo ter rodado alguns quilômetros, obteve-se uma repetibilidade de cerca de 0,5 Hz → 0,3% da frequência natural e de 0,2% → 0,7% do fator de amortecimento), assim como a sua influência na frequência natural, conclui-se que o experimento mais indicado para a verificação dos parâmetros dinâmicos do componente é com a sua instalação no veículo (o qual deve estar apoiado sobre as próprias rodas) e sob um valor médio de torque aplicado sobre ele (100 Nm). Deve ser observado que a orientação angular utilizada na medição tem influência no resultado, sendo indicada uma avaliação mesmo que superficial (pelo menos nas direções horizontal e vertical). Esta influência foi observada em outros veículos como sendo bem mais efetiva do que o valor de 3% de variação observada neste veículo analisado, possivelmente em decorrência de condições de contorno bem diversas em orientações diferentes.

**4.4.5)** Como um resumo geral dos ensaios executados, podem ser resumidos os resultados obtidos com as diversas montagens utilizadas na tabela 4.8.

Este quadro expressa a variação dos parâmetros dinâmicos do componente decorrente da alteração das condições de ensaio, salientando a importância de um controle adequado dos parâmetros. Na fase de projeto do experimento, estas informações devem ser observadas para que

o ensaio seja representativo da aplicação real do componente e seus resultados válidos para embasar decisões de engenharia.

**4.4.6)** Em relação ao desgaste do componente devido ao seu uso normal no veículo, os ensaios efetivados após 22.419 Km rodados indicam que não ocorreram alterações sensíveis nos parâmetros dinâmicos do semi-eixo homocinético.

**4.4.7)** O parâmetro externo que apresenta maior influência no comportamento dinâmico do semi-eixo (a aplicação de torque) pode ser explicado pela definição de um momento de articulação das juntas homocinéticas baseada na teoria de contato de corpos elásticos de Hertz (vide anexo 2).

Condição de contorno	Tipo de excitação	Excitação F[N] (pico)	Torque [Nm]	Orientação Angular (°)	Fn [Hz]	$\zeta_n$ [%]			
Livre-Livre	Impulso	0,03			277	6,3			
	Pseudo-Randômico	0,03			288	4,2			
		0,10			282	4,5			
		0,32			266	4,3			
		1,00			258	2,3			
		3,20			254	2,1			
		10,00			251	2,6			
	Seno	3,2			310	15,4			
		4,5			300	14,0			
		10,0			280	12,8			
		17,8			257	7,1			
		31,6			252	9,3			
		57,5			248	11,0			
	Instalado no Veículo	Pseudo-Randômico	1,0	0	90°	203	4,4		
199						5,9			
194						6,8			
190						9,1			
1,8			100	90°	254	2,4			
					253	2,5			
					252	2,6			
					249	2,7			
3,2			200	90°	257	2,4			
					256	2,4			
					255	2,5			
					252	2,9			
5,6		0			201	8,8			
					202	6,5			
					203	5,3			
					199	6,8			
199					9,2				
203					6,0				
201					5,4				
199					7,7				
100					0°			260	5,0
								256	4,3
								253	4,3
								259	6,0
		261	4,8						
		256	4,1						
253		4,2							
261		5,5							
Impulso		0,03						207	4,3
								242	4,3
	249							5,4	
	254							6,3	
	251				4,7				
	267				6,9				
	272				6,3				
	90°				203	4,2			
					240	4,4			
					248	4,4			
					252	4,5			
					255	7,0			
258		4,7							
260	4,4								
Seno			100	90°	253	2,0			
					252	2,8			
					250	3,4			
					248	3,7			
					245	5,3			
					240	7,4			

Tabela 4.8: Resumo dos resultados obtidos com experimentos diferentes.



# Capítulo

# 5

## CAPÍTULO 5

### DESENVOLVIMENTO DE UMA BANCADA DE TESTE

#### **5.1) Introdução.**

Devido às conclusões obtidas no capítulo quatro, constata-se a importância de construir uma bancada de teste que possa conferir as mesmas condições de fixação ao semi-eixo homocinético que as impostas pelo veículo. Este equipamento permite uma maior repetibilidade dos resultados, uma vez que o veículo é um sistema complexo e o seu uso altera gradualmente os seus parâmetros, e o custo de alocar um veículo dedicado para desempenhar o papel de uma bancada de teste para análise modal em laboratório é proibitivo. O controle dos parâmetros envolvidos no teste é mais preciso, pois sistemas de medição são projetados para fornecer a precisão adequada a cada parâmetro envolvido no teste. Por fim, a variação dos parâmetros da bancada de teste permite a simulação de diferentes veículos, reduzindo custos e prazos para realizar avaliações em aplicações diferentes, além de permitir a execução de estimativas no caso de veículos novos não disponíveis para testes (em fase de projeto na montadora), porém com os dados básicos da sua estrutura definidos (motorização, coxinição, sistema de suspensão, cubo de roda e distribuição de peso).

#### **5.2) Fundamentos.**

De acordo com os resultados obtidos no capítulo anterior, têm-se que os parâmetros externos (ou seja, não inerentes ao componente mas decorrentes da sua aplicação no veículo) que regem a dinâmica do semi-eixo são, em ordem de importância: o torque aplicado, as condições de contorno (comportamento dinâmico do cubo da roda e da saída do diferencial do veículo), o nível de excitação, o tipo de sinal usado para gerar a excitação e a configuração espacial do componente (ângulos aplicados às juntas e deslocamento existente na junta deslizante). A

influência dos efeitos giroscópicos e cinemáticos das juntas em movimento (rotação) são aqui desconsiderados devido a sua influência ser de segunda ordem em relação aos acima listados no enfoque deste trabalho, e serem de difícil implementação prática devido à complexidade dos acionamentos envolvidos.

De todos os parâmetros mencionados como importantes, apenas a definição das condições de contorno do veículo carece de uma análise mais detalhada, uma vez que os demais ou foram abordados nos capítulos três (nível e tipo de excitação) e quatro (torque aplicado) ou encontram-se disponíveis em desenho do produto (configuração espacial). Esta análise é apresentada a seguir.

### **5.3) Definição das condições de contorno no veículo.**

Para a definição das condições de contorno impostas pelo veículo ao semi-eixo foram utilizadas, como dados práticos, as curvas de resposta em frequência ( $H(f)$ ) obtidas no cubo da roda e na saída do diferencial para estimar parâmetros dinâmicos efetivos que a bancada de teste deverá apresentar ( $K_E, M_E, \zeta_E$ ). São considerados dois graus de liberdade perpendiculares no plano vertical transversal do semi-eixo para a medição das condições de contorno (eixos Y e Z na figura 5.1 abaixo).

#### **5.3.1) Procedimento experimental para medição das condições de contorno.**

Para quantificar os parâmetros envolvidos no fenômeno, deve-se ter o conjunto de curvas de resposta em frequência que se deseja simular na bancada de teste. Com este objetivo, foram medidas curvas de resposta em frequência nas duas direções apresentadas na figura 5.1, em cada uma das condições de contorno (cubo de roda e flange do diferencial), definindo-as de vertical (eixo Z, de baixo para cima) e horizontal (eixo Y, de trás para a frente).

Foi adotado o seguinte procedimento:

a) Utilizando o veículo de teste, foi feita a avaliação do comportamento dinâmico das condições de contorno no eixo vertical Z ( $H_z(f)$ ) com o uso de excitação pseudo-randômica,

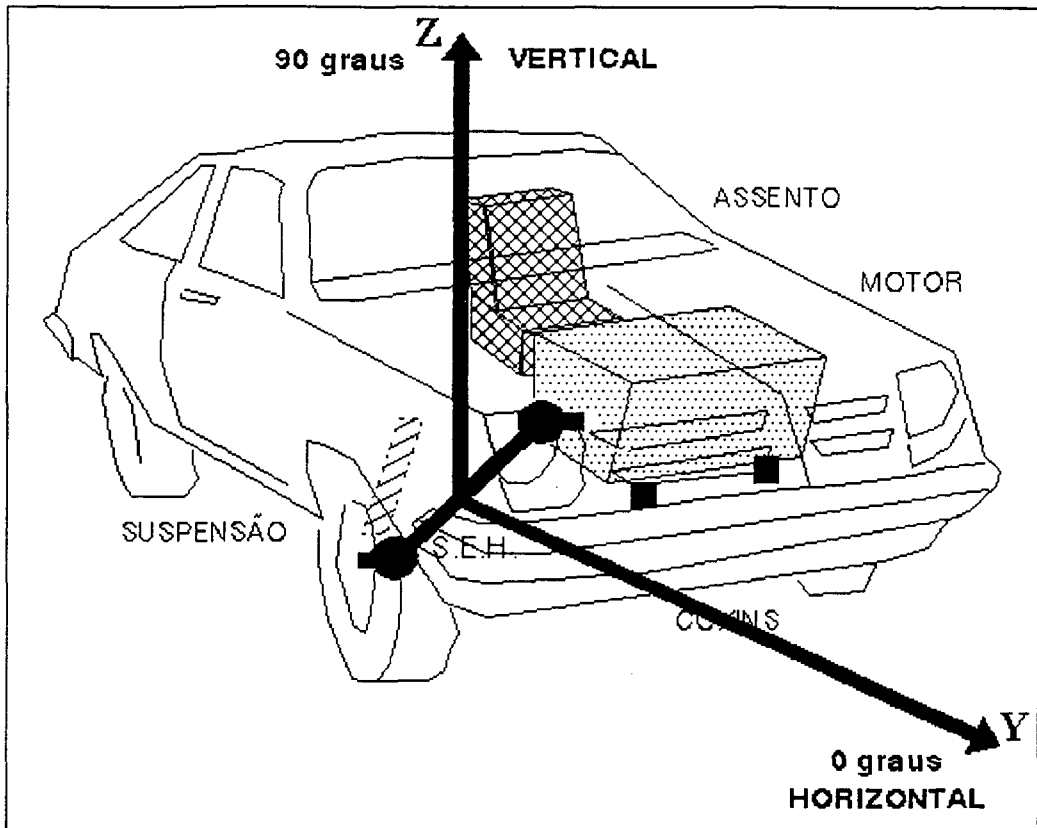


Figura 5.1: Sistema de orientação adotado para as medições.

simulando diferentes regimes de rotação do motor (lenta, 1000, 2000, 3000 e 4000 RPM) usando como referência os dados obtidos no capítulo três com e sem torque aplicado ao sistema. Para tal, foram aplicados os níveis conhecidos de excitação no centro do eixo e mediu-se a aceleração decorrente no ponto de medição da resposta que foi adotada para avaliar o comportamento dinâmico. Com esta referência, pode-se estimar o nível adequado de excitação a ser utilizada no ponto de excitação adotado para avaliar a  $H_z(f)$  no cubo de roda e no flange do diferencial. Esta segunda etapa foi realizada com e sem o semi-eixo acoplado ao veículo.

b) Utilizando o martelo excitador, mediu-se a  $H_z(f)$  das condições de contorno pelo método impulsivo e compararam-se estes resultados com os obtidos com a mesa vibratória em 5.3.1.a para avaliar a validade deste tipo de medição.

c) Baseado na conclusão obtida em 5.3.1.b, efetuou-se a medição da  $H_y(f)$  nas condições de contorno pelo método impulsivo (por ser impossível o acesso com o uso da mesa vibratória nesta direção) e estimou-se as condições de contorno ali existentes nesta direção.

### 5.3.2) Resultados e conclusões parciais sobre as condições de contorno.

#### 5.3.2.1) Determinação do nível de excitação existente nas condições de contorno.

a) As medições realizadas com acelerômetro fixado ao flange do diferencial na direção vertical abrangeram uma faixa de 0 a 800 Hz com o veículo em marcha neutra, sem torque, nas rotações: lenta, 2000, 3000, e 4000 RPM. Os espectros de vibração estão superpostos na figura 5.2. Deles pode-se extrair os parâmetros básicos conforme a figura 5.3, gerando a tabela 5.1 e a figura 5.4.

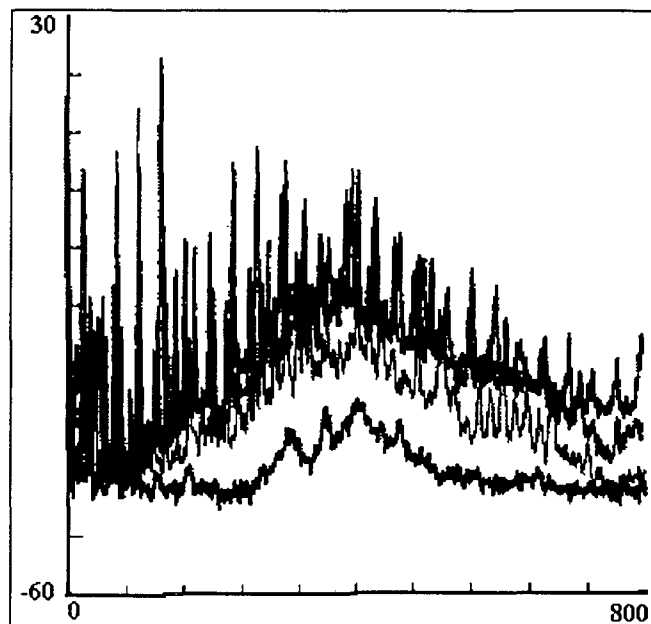


Figura 5.2: Comparação dos quatro níveis de vibração medidos no diferencial.

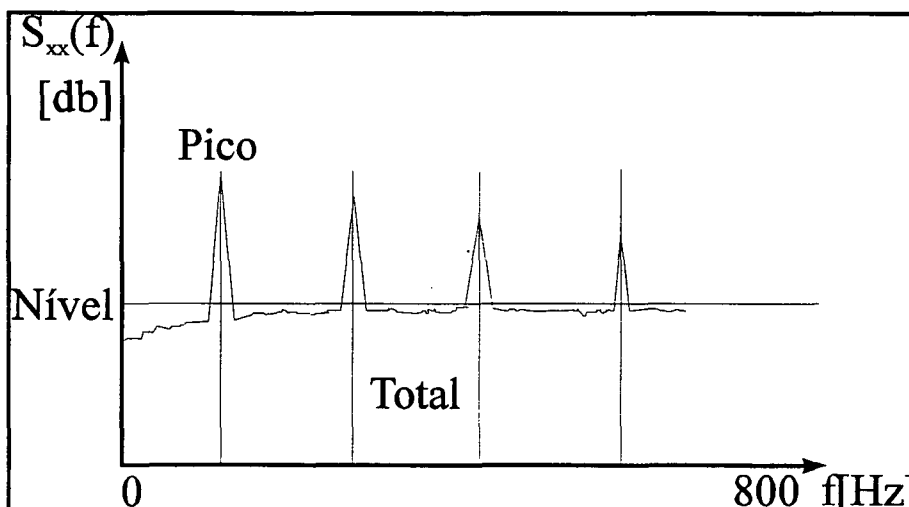


Figura 5.3: Nomenclatura dos parâmetros que definem o espectro.

Rotação (RPM)	Pico (dB)	Total (dB)	Nível (dB)
Lenta	119,0	140,0	85
2000	131,0	140,5	90
3000	138,5	144,5	95
4000	144,0	147,5	100

Tabela 5.1: Valores de vibração no flange do diferencial.

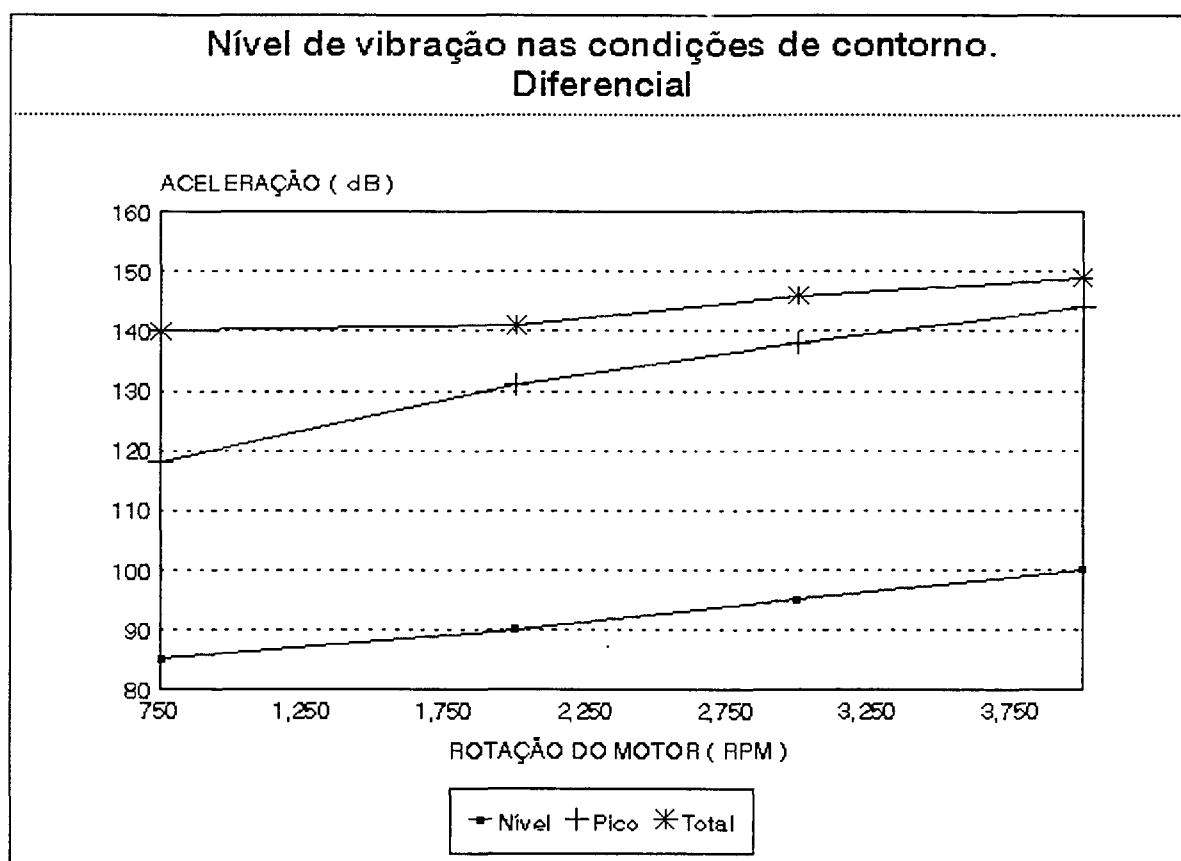


Figura 5.4: Nível de vibração medido no flange da junta deslizante.

Como o fenômeno em análise neste trabalho encontra-se na faixa de 200 a 300 Hz, o valor definido como nível de vibração é adotado para efetivar experiências em laboratório para avaliar as condições de contorno do semi-eixo.

No caso da análise executada com o semi-eixo desconectado do veículo, a curva de resposta em frequência apresenta um comportamento aproximando-se a uma linha de rigidez, com apenas duas frequências naturais se sobressaindo ( $F_1=312$  e  $F_2=575$  Hz)(vide figura 5.5). Com o

acoplamento do semi-eixo, ocorre o aparecimento de mais um pico nas baixas frequências ( $F1=200$  Hz) decorrente da sua frequência natural transversal, além de influir nas duas frequências naturais já existentes, reduzindo seus valores ( $F2$  baixou de 312 para 295 Hz e  $F3$  baixou de 575 para 431 Hz) e tornando-as mais proeminentes (vide figura 5.6). A aplicação de torque faz com que a frequência natural do semi-eixo suba de 200 para 250 Hz, influenciando nas demais, no sentido de empurrá-las para frequências superiores ( $F2$  sobe de 295 para 300 Hz e  $F3$  de 431 para 450 Hz), (vide figura 5.7).

b) Para o cubo de roda efetuou-se a mesma análise de nível de excitação, executada para o diferencial, acrescentando a aplicação de 100 Nm como alternativa para o caso sem torque. Os resultados obtidos estão tabelados na tabela 5.2 abaixo e graficados nas seguintes figuras :

- espectros de vibração sem torque: figura 5.8
- espectros de vibração obtidos com 100 Nm: figura 5.9
- gráficos dos valores da tabela 5.2: figura 5.10

Condição	Sem Torque			100 Nm		
	Pico (dB)	Total (dB)	Nível (dB)	Pico (dB)	Total (dB)	Nível (dB)
Rotação (RPM)						
Lenta	89,7	120,8	80	89,3	123,0	85
2000	93,1	122,2	85	92,8	124,4	90
3000	96,5	124,8	90	95,8	128,1	95
4000	98,3	129,4	95	97,2	132,2	100

Tabela 5.2: Valores de vibração no cubo da roda.

Pode-se observar a influência da primeira frequência natural do semi-eixo nas medições, cuja identificação pode ser feita pela variação no espectro de excitação em torno de 250 Hz.

Com a aplicação do torque observa-se claramente a alteração no espectro devido à translação da ressonância do semi-eixo de 200 para 250 Hz.

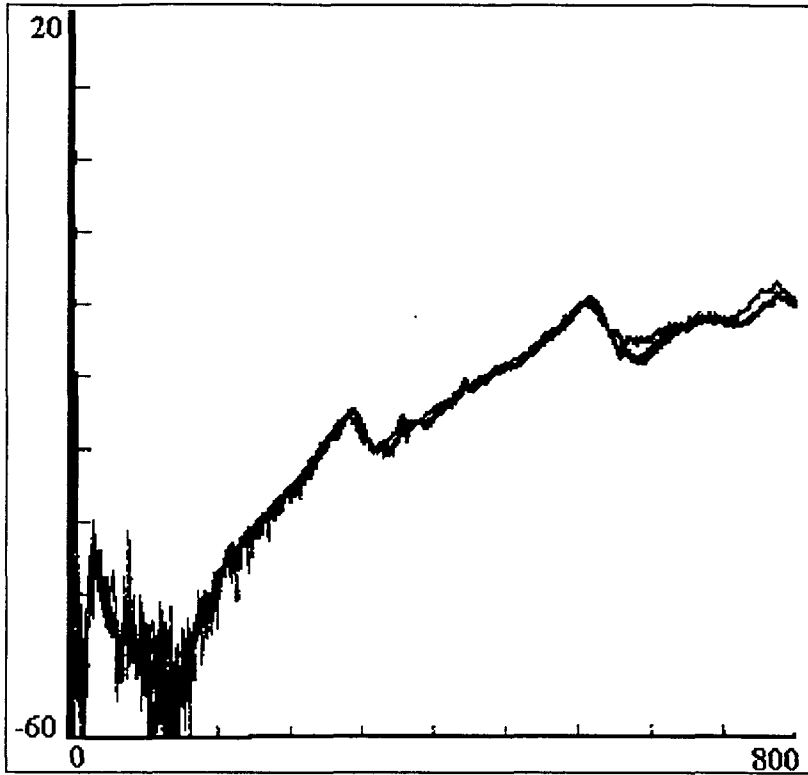


Figura 5.5: Curvas de resposta em frequência obtidas no diferencial sem semi-eixo, sem torque.

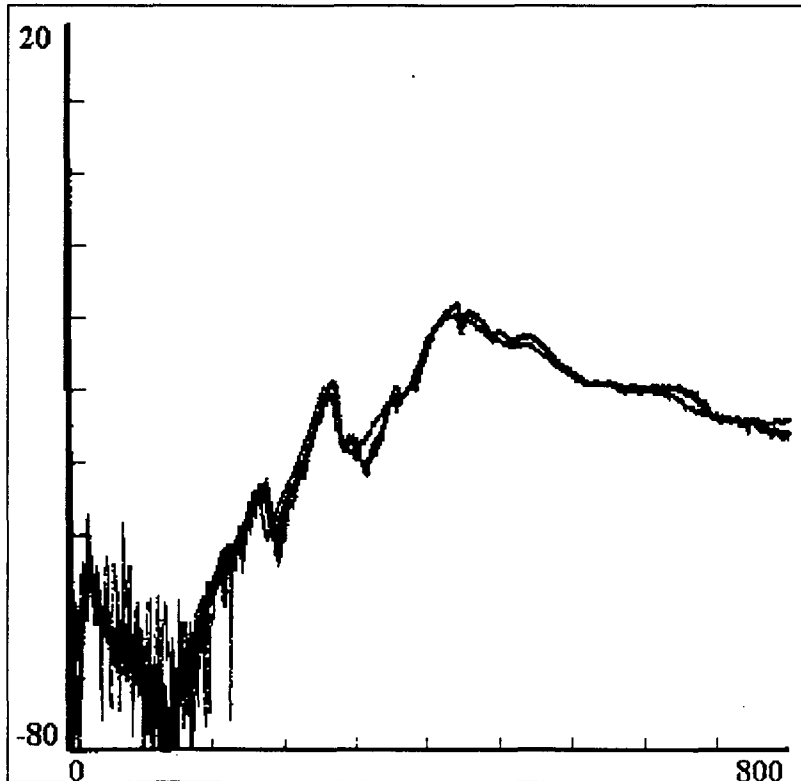


Figura 5.6: Curvas de resposta em frequência obtidas no diferencial com semi-eixo, sem torque.



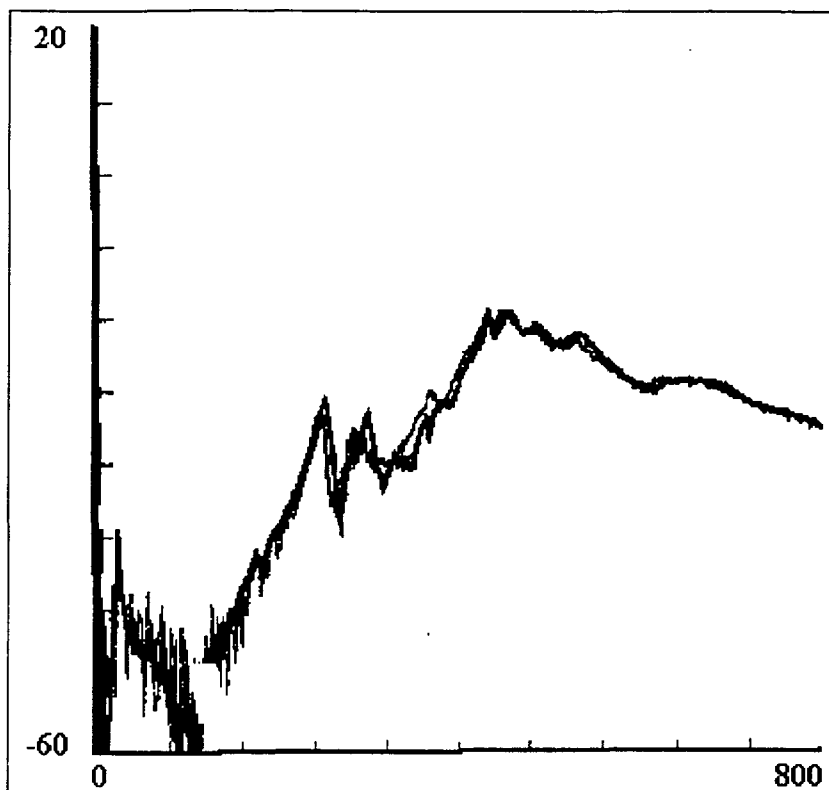


Figura 5.7: Curvas de resposta dinâmica obtidas no diferencial com semi-eixo, com torque.

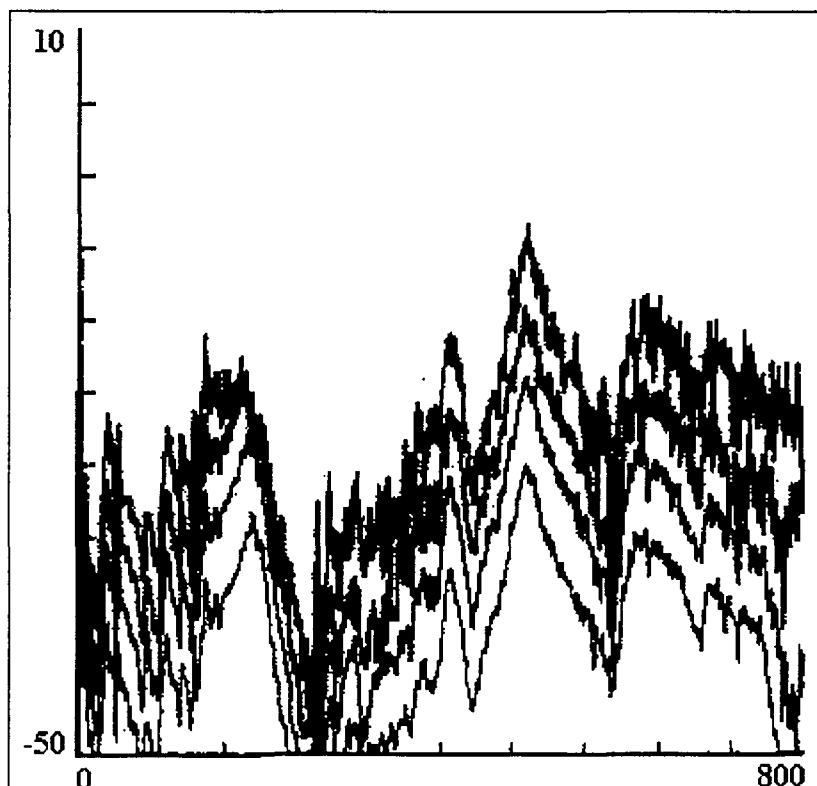


Figura 5.8: Espectros de vibração obtidos no cubo da roda com semi-eixo, sem torque.

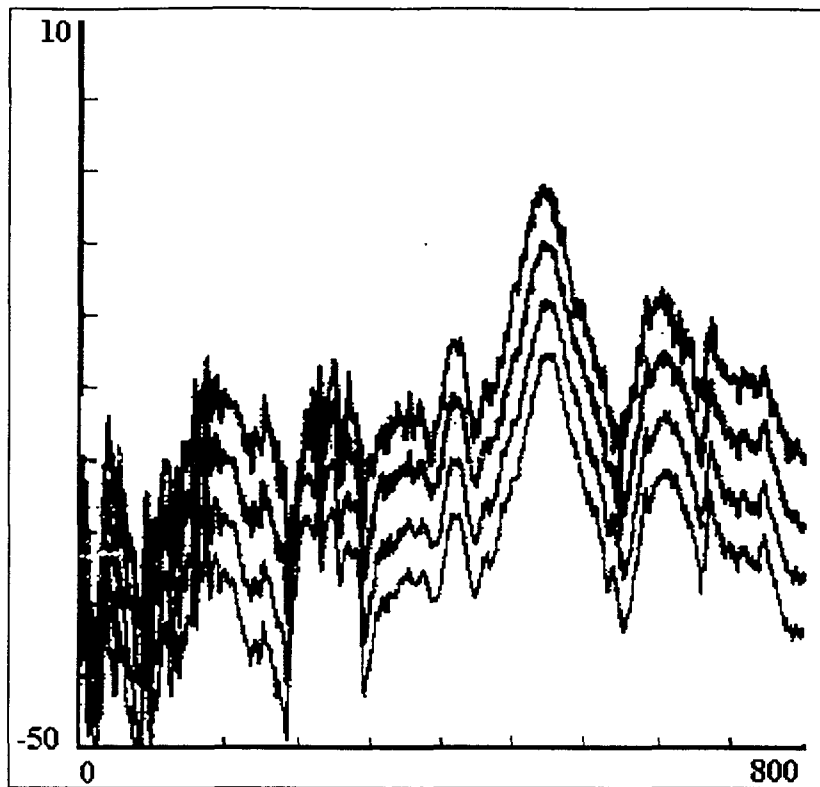


Figura 5.9: Espectros de vibração obtidos no cubo da roda com semi-eixo, com torque.

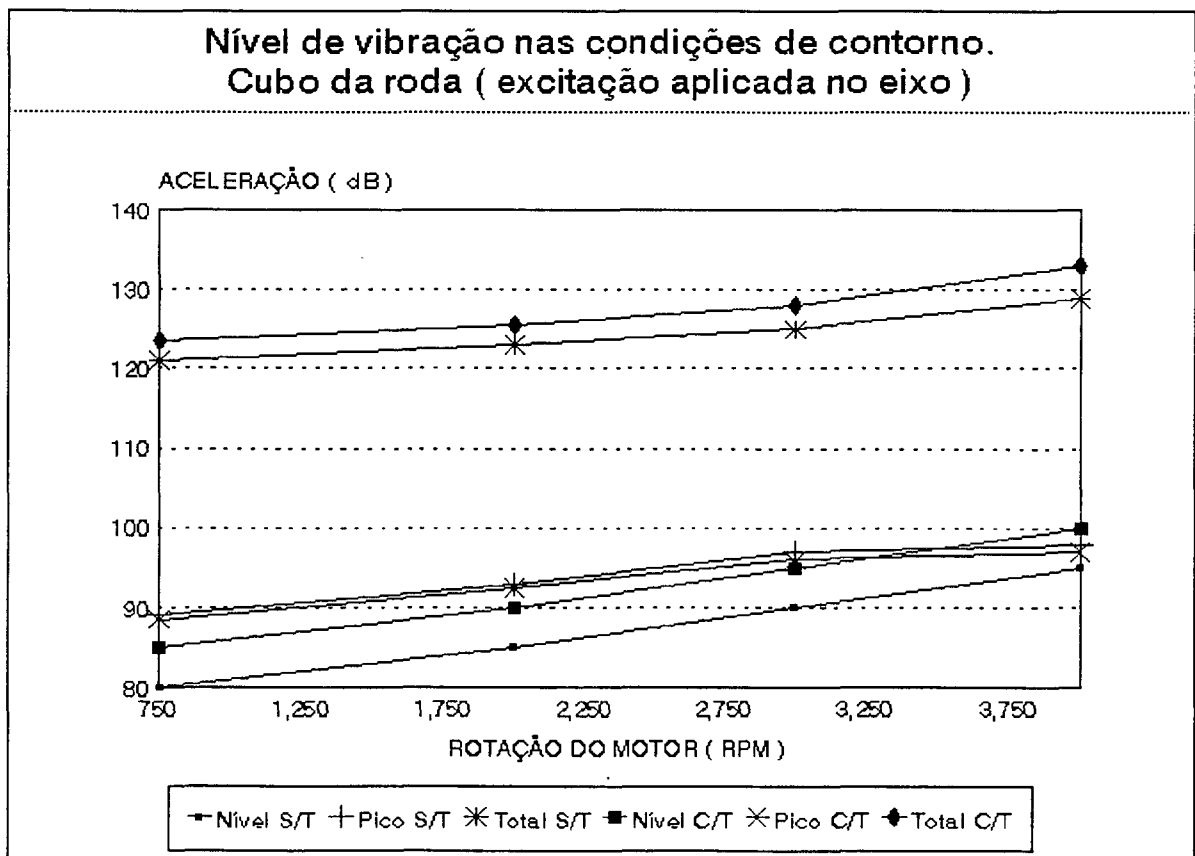


Figura 5.10: Nível de vibração medido no cubo da roda ( excitação no eixo ).

No caso da análise executada com o semi-eixo desconectado do veículo, a curva de resposta em frequência apresenta um comportamento tendendo para uma linha de rigidez, porém têm-se pelo menos três frequências naturais nítidas:  $F1 \cong 275$  Hz,  $F2 \cong 390$  Hz e  $F3 \cong 500$  Hz (vide figura 5.11). Com o acoplamento do semi-eixo ocorre um efeito inverso ao observado no caso do diferencial. A curva de resposta em frequência torna-se mais próxima a uma linha de rigidez, com o crescimento da resposta na região das altas frequências e o desaparecimento do primeiro pico mencionado anteriormente, restando três picos menos proeminentes:  $F1 \cong 605$  Hz,  $F2 \cong 640$  Hz e  $F3 \cong 770$  Hz, sendo este último o mais saliente e apenas observável a medida que a excitação torna-se maior (vide figura 5.12). A aplicação do torque faz com que as frequências naturais cresçam de forma quase imperceptível na frequência e tornem-se mais suaves, tornando a curva de resposta em frequência mais similar a uma linha de rigidez (vide figura 5.13).

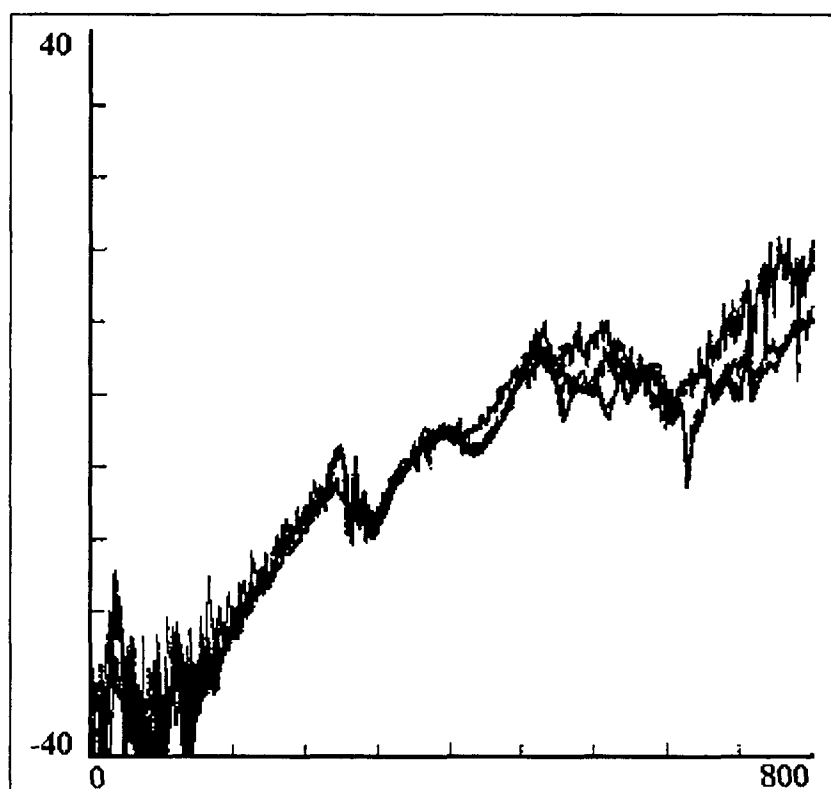


Figura 5.11: Curvas de resposta em frequência obtidas no cubo da roda sem semi-eixo, sem torque.

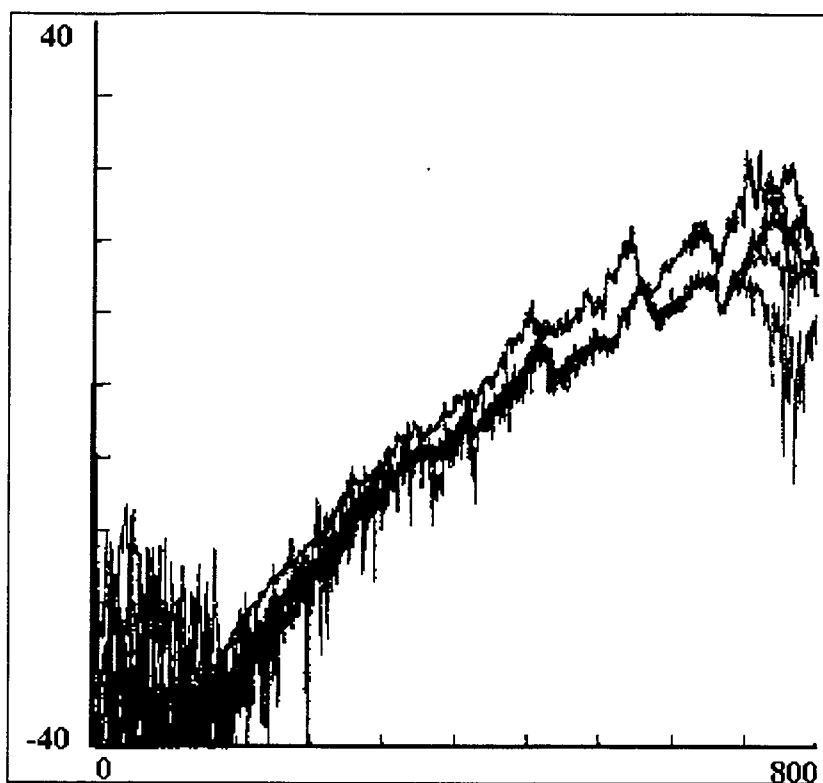


Figura 5.12: Curvas de resposta em frequência obtidas no cubo da roda com semi-eixo, sem torque.

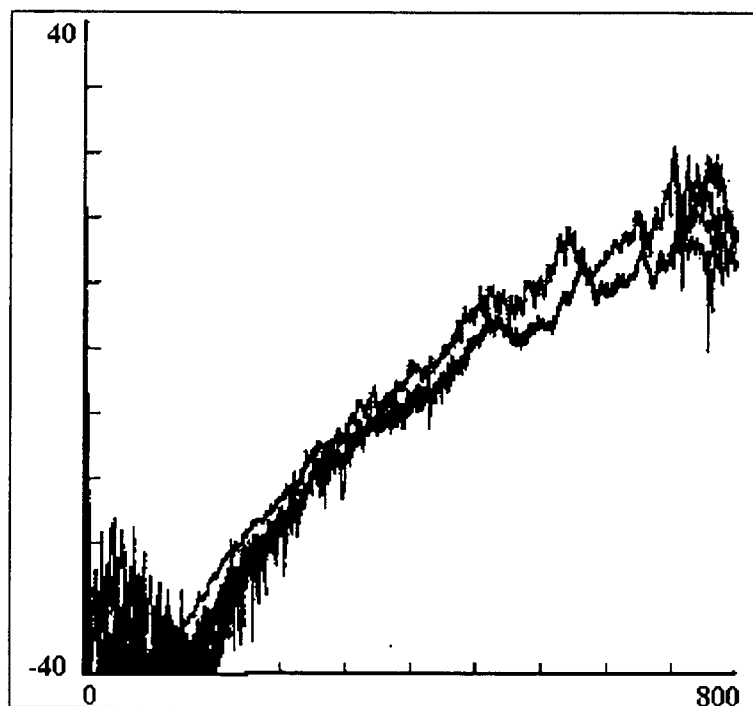


Figura 5.13: Curvas de resposta em frequência obtidas no cubo da roda com semi-eixo, com torque.

### **5.3.2.2) Influência do nível de excitação na obtenção das $H_z(f)$ das condições de contorno.**

Com o objetivo de avaliar a influência do nível de excitação na curva de resposta em frequência  $H_z(f)$  obtida para as condições de contorno, o experimento anterior foi repetido com e sem o semi-eixo acoplado ao veículo. Neste caso a excitação foi realizada junto à posição do acelerômetro, obtendo a curva de resposta em frequência pontual das condições de contorno.

a) Para o diferencial, a medição foi realizada no flange de saída e os resultados obtidos para os diferentes níveis de excitação estão apresentados superpostos nas figuras 5.6 (com semi-eixo, sem torque), 5.7 (com semi-eixo, 100 Nm) e 5.5 (sem semi-eixo) já apresentadas.

Em todos estes três casos tem-se uma ótima repetibilidade da curva de resposta em frequência medida em relação ao nível de excitação, provando uma forte estabilidade do comportamento nesta condição de contorno, exceção a ser feita para a medição executada com um valor extremo de excitação (impondo uma situação de excitação em que o motor não tem condições de gerar em banda larga) onde ocorre uma leve translação de todas as frequências naturais em direção às baixas frequências.

b) Para o cubo da roda o procedimento descrito acima foi aplicado e obteve-se os espectros apresentados nas figuras 5.12 (com semi-eixo, sem torque), 5.13 (com semi-eixo, 100 Nm) e 5.11 (sem semi-eixo) já apresentadas.

Em todos os casos tem-se uma ótima repetibilidade em relação ao nível de excitação, observando, também nesta condição de contorno, uma forte estabilidade do comportamento dinâmico, exceção novamente para a medição executada com um valor de excitação extremamente alto em relação ao nível efetivamente observado no veículo durante as medições, onde ocorre um aumento no nível de resposta do sistema de maneira homogênea na frequência e uma leve migração dos picos em direção às baixas frequências.

### **5.3.2.3) Definição da condição de teste representativa.**

Como curva de resposta em frequência a ser adotada como referência para este estudo, define-se que a influência do acoplamento do semi-eixo na condição de contorno e a aplicação de torque no sistema não podem ser desconsideradas, sendo esta condição (semi-eixo acoplado e

torque de 100 Nm aplicado) uma boa representação da condição existente quando o veículo encontra-se em uso, trafegando em regime estacionário em uma rodovia reta e plana. Devido à excelente repetibilidade da resposta dinâmica obtida com diferentes níveis de excitação (dentro dos limites que ocorrem na realidade), tem-se que qualquer regime de funcionamento do motor poderia ser utilizado sem maiores restrições. A caráter de referencial, adotou-se a condição de aplicação de 100 Nm de torque com o semi-eixo acoplado ao veículo e um nível de excitação referente ao regime de 3000 RPM do motor.

#### **5.3.2.4) Obtenção da resposta dinâmica na direção vertical com o uso do método impulsivo.**

Devido à grande flexibilidade e rapidez do uso de martelo excitador para a obtenção da curva de resposta em frequência, foi executada a medição da  $H_z(f)$  das condições de contorno para confrontar com os resultados obtidos com a mesa vibratória. As condições foram as seguintes:

- com semi-eixo acoplado, sem torque e com 100 Nm.
- sem semi-eixo acoplado.

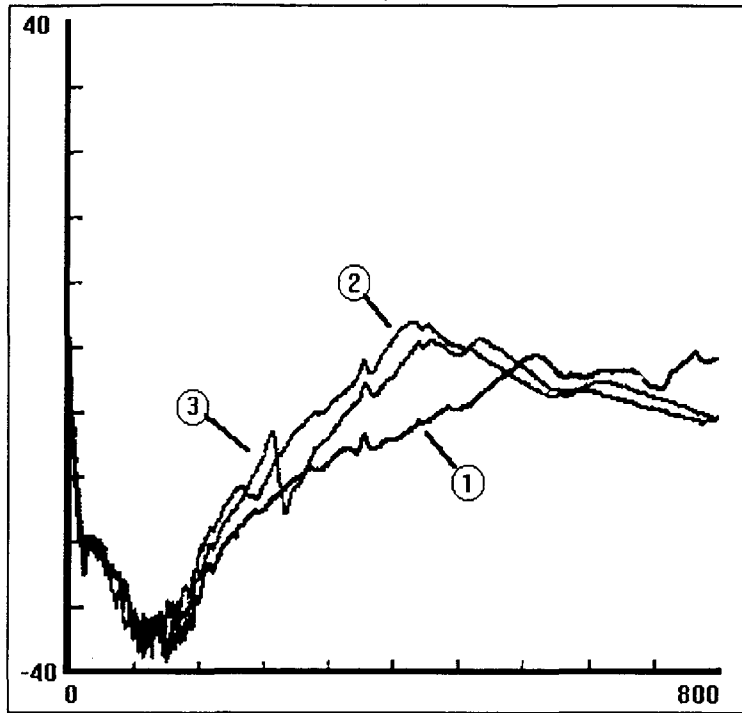
As curvas de resposta em frequência obtidas para o diferencial estão plotadas no gráfico 5.14 e para o cubo da roda no gráfico 5.15.

No caso do diferencial constatou-se claramente que todas as observações feitas, no caso do uso de excitação estacionária, continuam válidas com o uso de excitação impulsiva, ou seja, sem o acoplamento do semi-eixo tem-se um comportamento semelhante a uma linha de rigidez, com o acoplamento do semi-eixo a sua influência é observada pela sua frequência natural (~200 Hz) e a translação do gráfico em direção às baixas frequências, salientando em especial um pico em 430 Hz. A aplicação do torque translada o gráfico em direção às altas frequências, salientando em especial a frequência natural do semi-eixo agora em torno de 250 Hz (vide figura 5.14). Não obstante, comparando estes resultados com os obtidos com a excitação estacionária (figura 5.16), observa-se um acréscimo na resposta do sistema (translação vertical da curva) de cerca de 13 dB, além de uma suavização da curva (picos menos proeminentes) no caso do semi-eixo acoplado sem o torque aplicado, sendo este fato explicável pela dissipação de energia nos contatos entre as

partes móveis internas das juntas homocinéticas, que é muito maior no caso sem torque do que no caso com torque aplicado (conclusão apresentada no capítulo 4).

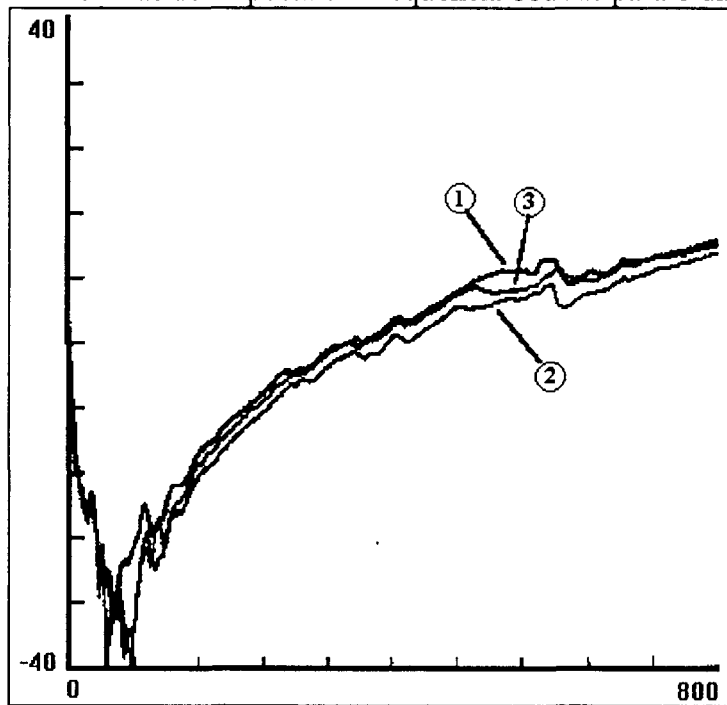
No caso do cubo da roda, constatou-se pouca alteração na forma da curva de resposta em frequência em relação à instalação do semi-eixo e a aplicação do torque de 100 Nm, apenas uma leve translação na amplitude da resposta em torno de 3 dB (vide figura 5.15). Comparando-se estas curvas obtidas com excitação impulsiva com as obtidas com excitação estacionária (figura 5.17) observa-se que a primeira causa uma forte suavização dos picos existentes, porém a característica mais importante do comportamento, que define o comportamento similar a uma linha de rigidez na faixa de interesse (0-400 Hz), é mantida nesta medição. Novamente ocorre um acréscimo na amplitude de resposta do sistema de cerca de 13 dB nesta faixa (0-400Hz), porém esta diferença reduz-se na medida que subimos na frequência, chegando a inverter a situação acima de 700 Hz.

Tendo em vista as observações feitas sobre as discrepâncias entre as curvas de resposta em frequência, obtidas com excitação estacionária e impulsiva na direção vertical, conclui-se que esta última é uma aproximação válida para a faixa de interesse (0-400 Hz) para ambos os casos (sendo válida em todo o espectro para o caso do diferencial) se for descontado cerca de 13 dB de amplitude na resposta da excitação impulsiva. Esta diferença pode ser atribuída à grande diferença de nível de excitação existente nos dois casos, forçando uma comparação entre o comportamento dinâmico das condições de contorno em níveis bem distintos, sendo cerca de 125 dB para a excitação estacionária e de 100 dB para a excitação impulsiva no caso do diferencial (vide figura 5.18). No caso do cubo de roda, a excitação obtida com o shaker apresenta uma forma complexa (em parte devido ao difícil acesso ao local da excitação, o que determinou a execução de um complexo dispositivo para efetuar a excitação) que varia a amplitude da ordem de 23 dB na faixa de interesse (vide figura 5.19).



- 1) Sem semi-eixo, sem torque      2) Com semi-eixo, sem torque  
3) Com semi-eixo, com torque

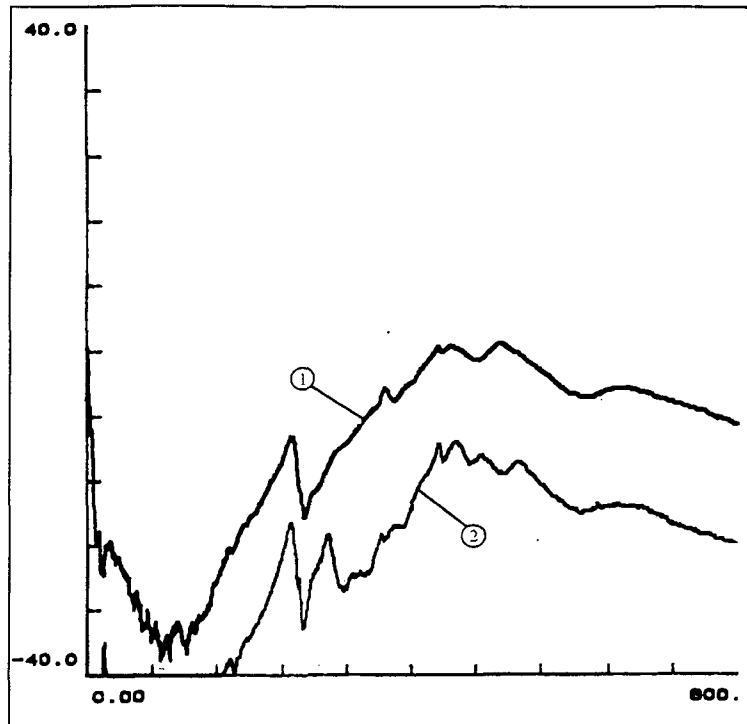
Figura 5.14: Curvas de resposta em frequência obtidas para o diferencial.



- 1) Sem semi-eixo, sem torque      2) Com semi-eixo, sem torque  
3) Com semi-eixo, com torque

Figura 5.15: Curvas de resposta em frequência obtidas para o cubo da roda.

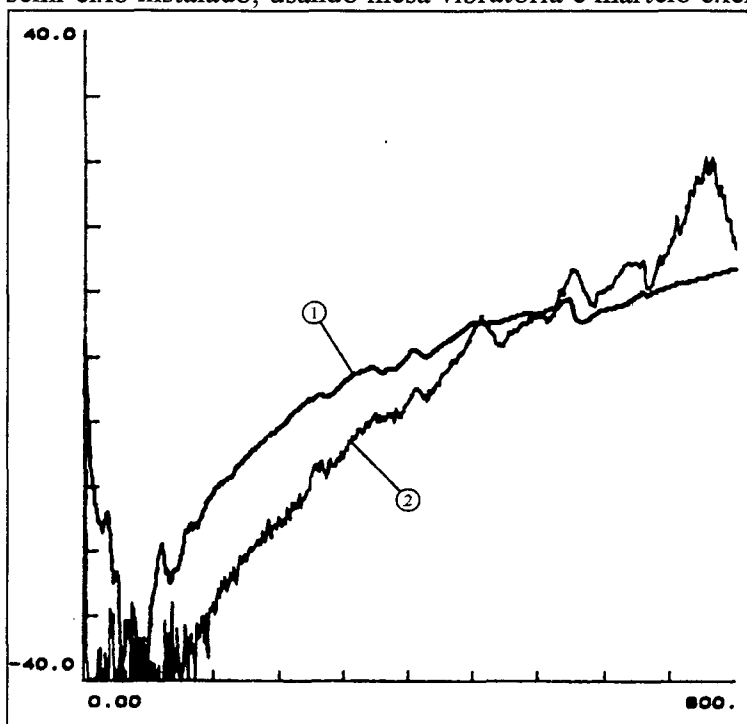




1) Martelo Excitador

2) Mesa Vibratória

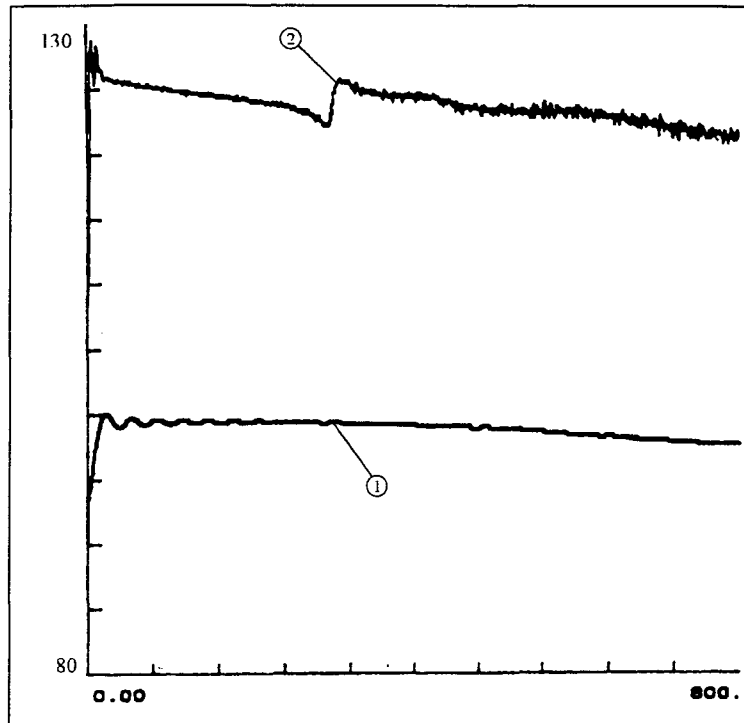
Figura 5.16: Comparação da curva de resposta em frequência do diferencial na direção vertical, com semi-eixo instalado, usando mesa vibratória e martelo excitador.



1) Martelo Excitador

2) Mesa Vibratória

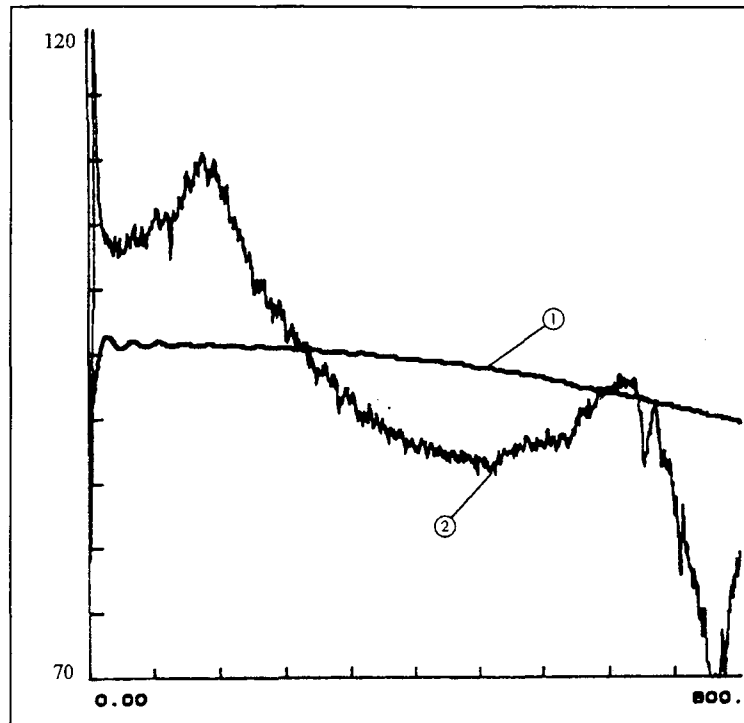
Figura 5.17: Comparação da curva de resposta em frequência do cubo da roda na direção vertical, com semi-eixo instalado, usando mesa vibratória e martelo excitador.



1) Martelo Excitador

2) Mesa Vibratória

Figura 5.18: Comparação das curvas de espectro de excitação das medições apresentadas na figura 5.16.



1) Martelo Excitador

2) Mesa Vibratória

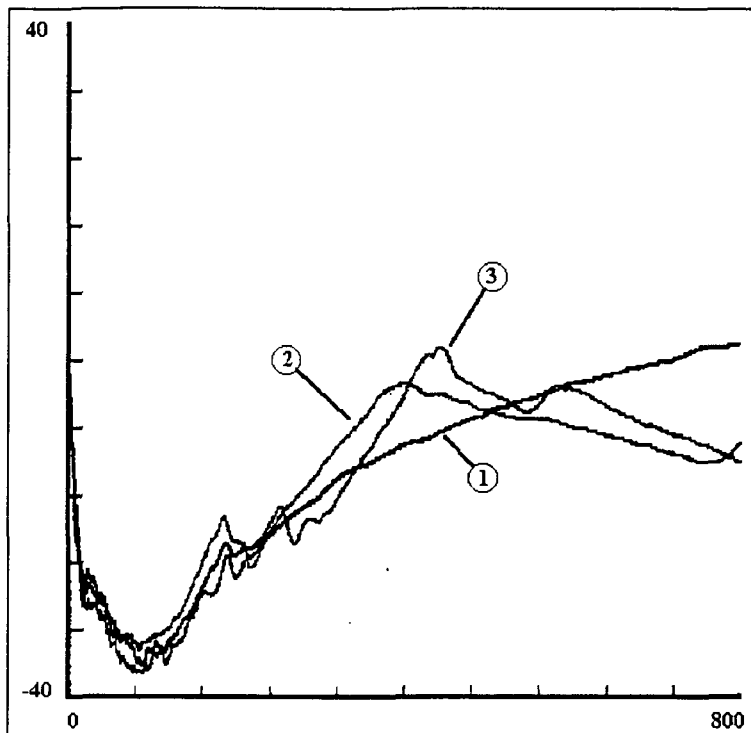
Figura 5.19: Comparação das curvas de espectro de excitação das medições apresentadas na figura 5.17.

### 5.3.2.5) Obtenção da resposta dinâmica na direção horizontal com o uso de método impulsivo.

Devido ao difícil acesso, somente pode-se medir a  $H_y(f)$  com o uso do martelo excitador. Com o conhecimento obtido nas etapas anteriores pode-se julgar a validade destas informações assim obtidas. As condições de teste foram as mesmas adotadas anteriormente. As curvas de resposta em frequência obtidas para o diferencial estão plotadas na figura 5.20, e as obtidas para o cubo da roda estão na figura 5.21.

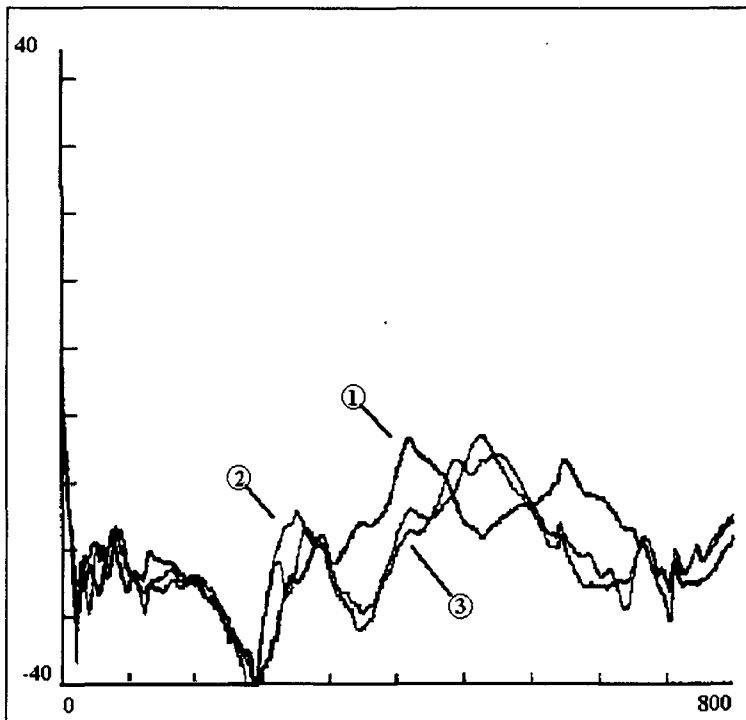
Em relação ao diferencial, as curvas de resposta em frequência apresentam um comportamento semelhante aos casos anteriores no que tange à aplicação de torque e ao acoplamento do semi-eixo. Comparando com as medições efetuadas na direção vertical, observa-se uma grande semelhança entre as curvas, excetuando uma leve redução na amplitude da resposta (cerca de 6 dB), a influência menor da ressonância do semi-eixo e o surgimento de um ressonância na frequência de 190 Hz.

Em relação ao cubo da roda, as curvas de resposta em frequência obtidas nesta direção são extremamente diferentes das obtidas na direção vertical. Isto pode ser explicado pela grande assimetria apresentada na configuração física desta condição de contorno (sistema de suspensão, de direção, bandeja estabilizadora,...). As alterações na curva de resposta em frequência, decorrentes da aplicação de torque e instalação do semi-eixo, não fogem às regras observadas nos demais ensaios: no caso sem semi-eixo (e sem torque) têm-se a presença de duas frequências naturais básicas:  $F1 \cong 317$  e  $F2 \cong 414$  Hz.. Com a instalação do semi-eixo ocorre a translação destas frequências naturais para frequências mais baixas:  $F1 \cong 271$  e  $F2 \cong 496$  Hz, sendo que a frequência natural do semi-eixo não chega a ser notada, provavelmente devido aos fatores locais do cubo da roda e à inexistência de um vínculo rígido entre o eixo e o cubo da roda (sistema sem torque). No momento que aplica-se o torque de 100 Nm, a frequência do semi-eixo aparece ( $F1 \cong 250$  Hz), provavelmente pela introdução de uma rigidez de articulação na junta devido à aplicação do torque e ,conseqüentemente, maior efetividade entre os contatos das partes móveis internas na junta fixa, e as demais frequências naturais sobem levemente na frequência:  $F1 \cong 290$  e  $F3 \cong 497$  Hz. Nesta situação, a adoção de um modelo de rigidez não é mais possível e o tratamento desta



- 1) Sem semi-eixo, sem torque      2) Com semi-eixo, sem torque  
 3) Com semi-eixo, com torque

Figura 5.20: Curvas de resposta em frequência obtidas para o diferencial na direção horizontal.



- 1) Sem semi-eixo, sem torque      2) Com semi-eixo, sem torque  
 3) Com semi-eixo, com torque

Figura 5.21: Curvas de resposta em frequência obtidas para o cubo da roda na direção horizontal.

condição de contorno nesta direção deve ser similar ao caso do diferencial.

### 5.3.3) Conclusões finais sobre as condições de contorno.

Resumindo todas as observações feitas sobre as medidas de comportamento dinâmico das condições de contorno, têm-se as seguintes afirmações:

a) Linearidade em relação ao nível de excitação:

Ambas condições de contorno comportam-se de forma linear, dentro da faixa de excitação à qual são submetidas pela vibração do motor.

b) Comportamento dinâmico e direção da medição:

O diferencial apresenta um comportamento dominado por uma ressonância com alto amortecimento nas duas direções (vertical e horizontal), ocorrendo uma redução na amplitude de resposta no caso horizontal de 6 dB em relação ao vertical (vide figura 5.22).

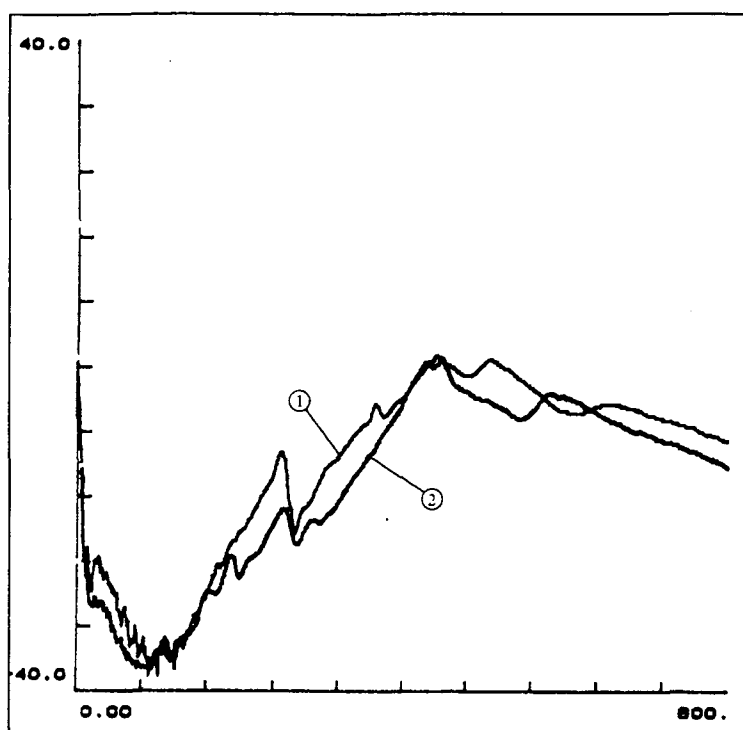
O cubo da roda apresenta comportamento radicalmente distinto nas duas direções: para a direção vertical seu comportamento assemelha-se a uma linha de rigidez ( $K \cong 3,2 \times 10^7 \text{ N/m}$ ) e para a direção horizontal apresenta três frequências naturais com alto amortecimento, definindo um espectro bem irregular (vide figura 5.23).

c) Acoplamento do semi-eixo:

O acoplamento do semi-eixo influi de forma distinta para cada condição de contorno: no caso do diferencial ele faz aparecer uma ressonância na faixa de frequência em análise, enquanto que no caso do cubo da roda ele torna o espectro similar a uma linha de rigidez. Devido a isto, torna-se necessária a presença do semi-eixo, instalado no momento de verificar o comportamento dinâmico das condições de contorno.

d) Aplicação de torque:

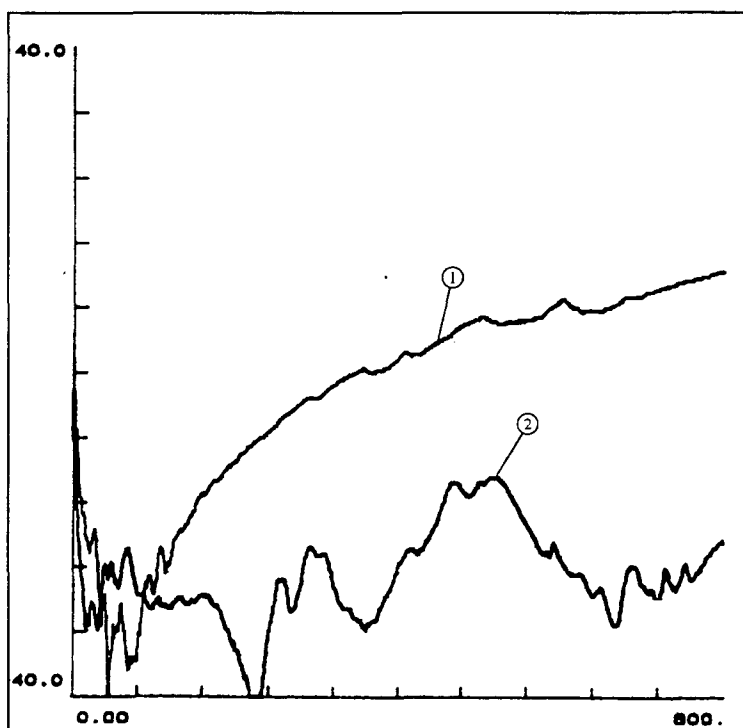
A aplicação de torque ocasiona sempre a mesma influência de empurrar as ressonâncias para a faixa mais alta de frequência, em especial no caso da ressonância do semi-eixo. Devido a este fato, torna-se necessária a aplicação de um torque representativo (100 Nm) para estimar o comportamento dinâmico das condições de contorno na condição normal de utilização do veículo em regime estacionário de movimento.



1) Vertical

2) Horizontal

Figura 5.22: Comparação da curva de resposta em frequência do diferencial, com semi-eixo instalado e utilizando martelo excitador, nas direções vertical e horizontal.



1) Vertical

2) Horizontal

Figura 5.23: Comparação da curva de resposta em frequência do cubo da roda, com semi-eixo instalado e utilizando martelo excitador, nas direções vertical e horizontal.

e) Tipo de excitação:

A utilização de excitação impulsiva permite a introdução de apenas baixos níveis de energia, aquém da faixa de excitação do motor, tornando a curva de resposta em frequência das condições de contorno mais suaves, restringindo a proeminência dos picos de vibração e reduzindo em cerca de 13 dB a resposta do sistema em toda a faixa em análise. Não obstante, mostra o seu valor prático para estimar, de forma rápida, o comportamento das condições de contorno se levarmos em conta estas suas características inerentes. Algumas comparações básicas podem ser visualizadas nas figuras 5.16 e 5.17 já apresentadas.

#### **5.4) Projeto da bancada de teste.**

##### **5.4.1) Introdução.**

Devido à ausência de literatura técnica específica sobre a confecção de bancadas de teste para a área de vibrações (ênfase em análise modal experimental), o projeto da bancada de teste teve de partir de um nível bastante rudimentar, em relação à concepção de funcionamento e soluções de manufatura. As propostas evoluíram com o aprofundamento do estudo e a troca valiosa de informações com colegas da área experimental e projetistas experientes na área de projeto e automação industrial da empresa.

Não obstante a evolução que a bancada sofreu ainda a nível de projeto, partiu-se para a sua confecção com a certeza de que melhorias deveriam surgir com o início dos trabalhos práticos. Portanto, deve-se considerar este projeto como um protótipo a ser otimizado para culminar em uma bancada de teste apta a desempenhar plenamente a sua função.

##### **5.4.2) Parâmetros de controle na bancada de teste.**

Baseado nas análises efetuadas no capítulo quatro, foram idealizados os seguintes sistemas para atender aos requisitos necessários ao funcionamento adequado da bancada de teste.

###### **5.4.2.1) Aplicação de torque.**

O torque deve ser aplicado de forma gradual a fim de permitir sua estabilização sem flutuações (valor contínuo e estável). Para tal, sistemas servo-hidráulicos ou pneumáticos são desaconselháveis. Adotou-se, devido às características de robustez, estabilidade, facilidade de controle e manufatura, um sistema de mancalização com rolamentos de acionamento manual via torquímetro desacoplável, o qual permite a aplicação e medição do torque, simultaneamente. Uma vez atingido o valor de torque desejado, um sistema de freio por atrito seco mantém este valor estável.

#### **5.4.2.2) Excitação vibratória.**

O atuador escolhido para fornecer a excitação vibratória, necessária para efetivar a medição da resposta dinâmica do componente, é um atuador eletro-mecânico de porte médio (mesa vibratória) comandado por um gerador de funções e respectivo amplificador de potência. Desta maneira é possível controlar a forma e a amplitude da excitação, de maneira a torná-la representativa da gerada pelo motor do veículo. A instalação deste sistema é efetivada numa seção do eixo de conexão equidistante das juntas homocinéticas, favorecendo a excitação do primeiro modo de vibração transversal do semi-eixo. Um transdutor dinâmico de força permite a avaliação da excitação imposta pelo atuador ao semi-eixo.

#### **5.4.2.3) Configuração espacial.**

A disposição espacial do semi-eixo ("lay-out") é obtida através de movimentos dos suportes que simulam o diferencial e o cubo da roda. No caso do primeiro, têm-se condições de ajustar sua posição nas direções transversal-vertical (eixo z), transversal-horizontal (eixo y) e longitudinal (eixo x). No caso do segundo, têm-se condições de ajustar sua posição nas direções: transversal-horizontal (eixo y), longitudinal (eixo x) e rotação sobre o eixo vertical (giro  $\theta_z$ ).

Com isto, pode-se aplicar ângulos nas juntas homocinéticas e deslocamento na junta deslizante, de forma a simular a posição relativa existente entre o diferencial e o cubo da roda no veículo considerando movimentos de suspensão e esterçamento da roda.



#### 5.4.2.4) Condições de contorno.

As condições de contorno impostas pelo veículo ao semi-eixo são definidas pelo comportamento dinâmico do diferencial e do cubo da roda. Na etapa inicial deste estudo, foi observado a existência de comportamentos dinâmicos distintos para diferentes planos de medição, ou seja, as condições de contorno existentes no veículo não são axissimétricas, mas definem dois planos básicos de comportamentos distintos. Este fato é fácil de aceitar quando observa-se que os elementos de rigidez e massa, acoplados ao diferencial e ao cubo da roda, não estão distribuídos de forma simétrica em relação ao semi-eixo (amortecedores, molas, coxins, barra estabilizadora, etc...).

No caso da bancada de teste, as condições de contorno são consequência dos parâmetros dinâmicos dos suportes (massa, rigidez e amortecimento efetivos). Para permitir o controle destes parâmetros em duas direções perpendiculares (horizontal e vertical), ambas transversais ao eixo de simetria do semi-eixo, deve-se desacoplar estas duas direções de movimento. Para tal, uma subestrutura com guias verticais e horizontais foi projetada para permitir o controle individual destas direções.

O parâmetro "massa efetiva" ( $M_E$ ) tem um valor mínimo dado pelo flange de acoplamento e pode ser aumentado com a adição de pesos mortos, sendo impossível desacoplar totalmente os seus efeitos, uma vez que a massa efetiva na direção horizontal ( $M_Y$ ) será sempre inferior à existente na direção vertical ( $M_Z$ ), sendo esta última igual à primeira mais a influência da subestrutura e os pesos adicionais acoplados à subestrutura ( $\Delta M_z$ ).

O parâmetro de "rigidez efetiva" ( $K_E$ ) é controlado por vigas biapoiadas que funcionam como molas à flexão, tanto na direção horizontal ( $K_Y$ ) como na vertical ( $K_Z$ ). A definição do dimensionamento destas molas depende da massa efetiva ( $M_E$ ) sustentada por ela, e da frequência natural de sustentação ( $F_{ns}$ ) desejada.

O formulário básico que rege este dimensionamento é dado pela equação que define a frequência natural de um sistema de um grau de liberdade:

$$F_{ns} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_E}{M_E}}$$

sendo a equação da rigidez de uma viga biapoiada dada por [36]:

$$K_E = 48 \frac{EI}{l^3} \quad (5.2)$$

onde: I é o momento de inércia da seção

E é o módulo de elasticidade

l é o vão entre os apoios.

Para uma barra de seção retangular temos

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (5.3)$$

onde: b é a dimensão da base

h é a dimensão da altura

Substituindo-se a (5.3) em (5.2), obtêm-se a relação que define o dimensionamento da mola:

$$K_E = 4 \frac{Ebh^3}{l^3} \quad (5.4)$$

O parâmetro de "amortecimento efetivo" ( $\zeta_E$ ) é o mais complexo de ser controlado. Devido à dificuldade de prever o nível de amortecimento que o suporte apresentará, ainda na fase de projeto, optou-se por executar a confecção do mesmo e proceder empiricamente as necessárias correções numa abordagem experimental. Cabe salientar que quase a totalidade do amortecimento presente na bancada provém das conexões entre os componentes, e espera-se que a complexidade da estrutura (número de componentes) forneça valores de amortecimento de mesma ordem de grandeza que os existentes no veículo, além de permitir um certo ajuste no valor final do amortecimento com a variação da tensão aplicada nas uniões parafusadas (torque nos parafusos).

### 5.4.3) Memorial descritivo.

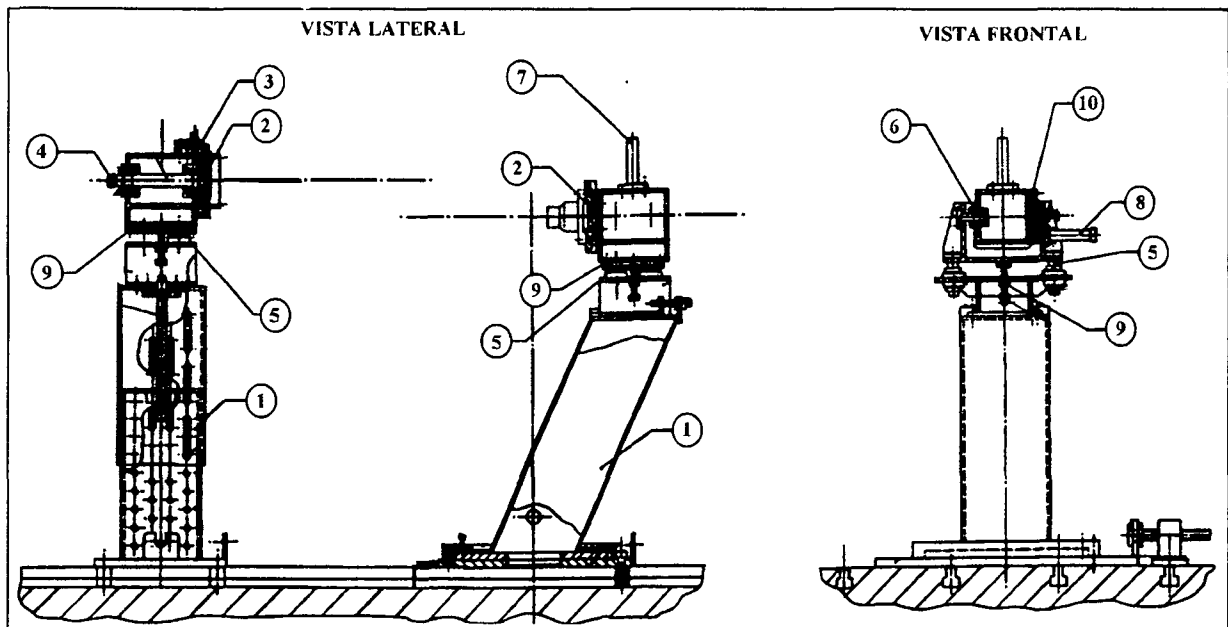
Para a confecção da bancada de teste foi montado um memorial descritivo, sendo ele o

documento oficial de definição do serviço a ser orçado por empresas de construção mecânica. Este documento encontra-se transcrito no anexo 3.

#### 5.4.4) Confeção da bancada de teste.

A confecção da bancada de teste foi efetuada num prazo de 90 dias e o desenho final está apresentado de forma esquemática na figura 5.24.

A seguir são apresentadas algumas soluções construtivas que foram utilizadas, suas limitações e os resultados obtidos com os primeiros ajustes efetuados na bancada.



Nomenclatura:

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| 1) Suporte                     | 2) Flange de acoplamento da junta       |
| 3) Sistema de freio por atrito | 4) Flange de acoplamento do torquímetro |
| 5) Guias verticais             | 6) Guias horizontais                    |
| 7) Suporte de massa vertical   | 8) Suporte de massa horizontal          |
| 9) Mola de flexão vertical     | 10) Mola de flexão horizontal           |

Fig 5.24: Esquema simplificado da bancada de teste.

##### 5.4.4.1) Dimensionamento das molas de sustentação.

Cada cabeçote da bancada apresenta uma mola que define a rigidez vertical e duas molas que definem a rigidez horizontal do flange de acoplamento. Para o dimensional inicial das mesmas, foram utilizados os resultados obtidos nas análises anteriormente apresentadas.

Das medições executadas no veículo foram selecionadas as mais representativas, obtidas com excitação proveniente de mesa vibratória com nível de excitação simulando a do motor, a 3000 RPM com o semi-eixo acoplado ao veículo e torque de 100 Nm aplicado. Uma vez que existem grandes restrições de espaço disponível para fazer a medição na direção horizontal, utilizou-se excitação impulsiva para estimar as características dinâmicas nesta direção.

Segundo Ewins [9], numa região satisfatoriamente inferior à ressonância, a curva de resposta em frequência de inércia de qualquer sistema mecânico comporta-se como uma linha de rigidez com inclinação de 40 dB / década (visualizada como uma reta em escala logarítmica para as frequências).

Nas curvas de resposta em frequência obtidas (figuras 5.25, 5.26, 5.27 e 5.28) tem-se que esta inclinação não é obedecida, provavelmente devido à existência de ressonâncias na faixa observada, apesar de seu comportamento apresentar-se basicamente como uma linha de rigidez em três dos quatro casos em análise (a medição horizontal do cubo de roda é a exceção observada). Para obter-se uma estimativa inicial do dimensionamento das molas, adotou-se como critério a determinação de uma rigidez geradora de uma linha de inclinação adequada que represente, aproximadamente, a curva de resposta em frequência desejada na faixa de 200 a 300 Hz (onde ocorre a frequência natural em estudo).

A intersecção desta reta com o eixo das amplitudes na frequência de 1Hz fornece a informação necessária para estimar o valor da rigidez efetiva ( $K_E$ ) através da fórmula da inércia.:

$$A(\omega) = 2 \log(\omega) - \log(K_E) \quad (5.5)$$

substituindo  $f = 1\text{Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad/s}$

temos

$$A(2\pi) = 2 \log(2\pi) - \log(K_E) \quad (5.6)$$

Com o valor de  $K_E$ , obtemos as dimensões da mola com a equação (5.4) que servem de primeira estimativa a ser ajustada, de forma experimental, após a confecção da bancada.

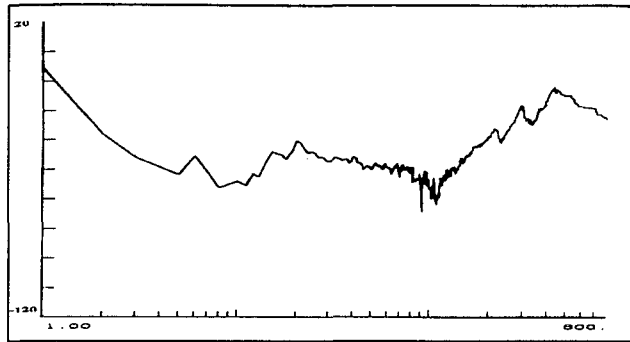


Figura 5.25: Diferencial, vertical, mesa vibratória.

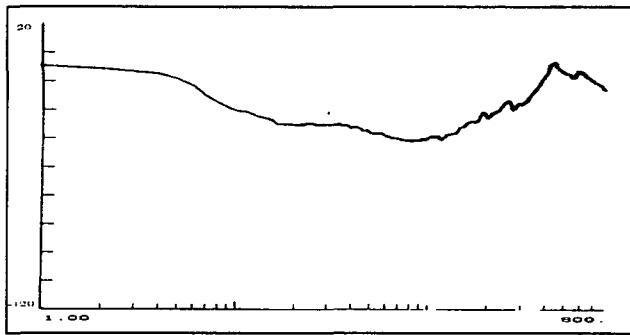


Figura 5.26: Diferencial, horizontal, martelo excitador.

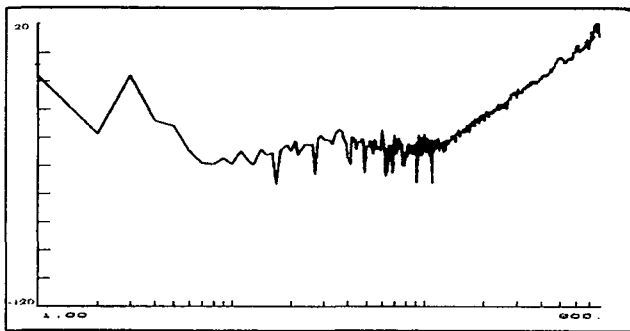


Figura 5.27: Cubo da roda, vertical, mesa vibratória

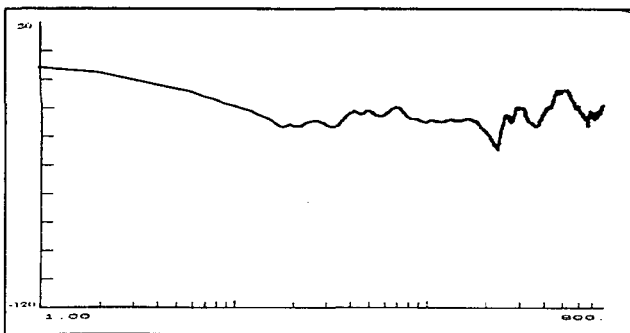


Figura 5.28: Cubo da roda, horizontal, martelo excitador.

Os valores obtidos estão tabelados abaixo (tabela 5.3):

Local	Vertical	Horizontal	Excitador
Diferencial	$2,22 \times 10^7$	$2,49 \times 10^7$	Martelo
Cubo de roda	$7,02 \times 10^6$	$7,02 \times 10^7$	Excitador
Diferencial	$7,88 \times 10^7$	$(8,84 \times 10^7)$	Mesa
Cubo de roda	$3,20 \times 10^7$	$(3,20 \times 10^8)$	Vibratória

Tabela 5.3: Valores de ( $K_E$ ) obtidos experimentalmente.

( )  $\Rightarrow$  valores estimados.

Devido à sua melhor representatividade, os dados obtidos com o uso de mesa vibratória são considerados os mais adequados para o projeto da bancada. No caso das medições horizontais, as quais não foram realmente efetuadas com o uso da mesa vibratória, foi adotada uma estimativa direta, utilizando como referência a relação das medições efetuadas na vertical pelos dois métodos. Estes valores devem ser substituídos na equação (5.1) juntamente com a massa efetiva  $M_E$  da bancada, na direção considerada para avaliar se a frequência de sustentação ( $F_{ns}$ ) obtida é adequada, caso contrário novos ajustes são necessários.

Após a confecção da bancada, os cabeçotes foram pesados e obteve-se a seguinte tabela (tabela 5.4):

Local	Vertical	Horizontal
Cabeçote de junta deslizante	57,35 Kg	31,95 Kg
Cabeçote de junta fixa	45,66 Kg	23,06 Kg

Tabela 5.4: Peso dos cabeçotes da bancada.

Aplicando o critério de utilizar a mesma rigidez observada no veículo para o dimensionamento das molas de flexão, obtêm-se os seguintes valores estimados para as frequências naturais de sustentação da bancada de teste (tabela 5.5): °

Local	Vertical	Horizontal
Cabeçote da junta deslizante	187 Hz	265 Hz
Cabeçote da junta fixa	133 Hz	593 Hz

Tabela 5.5: Frequência natural de sustentação.

Estes valores encontram-se aquém do desejado. Devido a este fato, adotou-se o critério de estipular a frequência natural de sustentação para definir a rigidez das molas. Adotando-se o valor de 400 Hz obtêm-se os valores de rigidez e respectivo dimensional para cada mola, apresentados na tabela 5.6 abaixo (dimensões representadas na figura 5.29 abaixo).

Local	Quantidade	Direção	h (m)	b (m)	l (m)	k (N/m)
Cabeçote lado J.D.	1	Vertical	0,0323	0,120	0,210	$3,62 \cdot 10^8$
Cabeçote lado J.D.	2	Horizontal	0,0159	0,030	0,100	$9,98 \cdot 10^7$
Cabeçote lado J.F.	1	Vertical	0,0240	0,120	0,160	$3,37 \cdot 10^8$
Cabeçote lado J.F.	2	Horizontal	0,0144	0,030	0,100	$7,50 \cdot 10^7$

Tabela 5.6: Dimensional das molas de flexão.

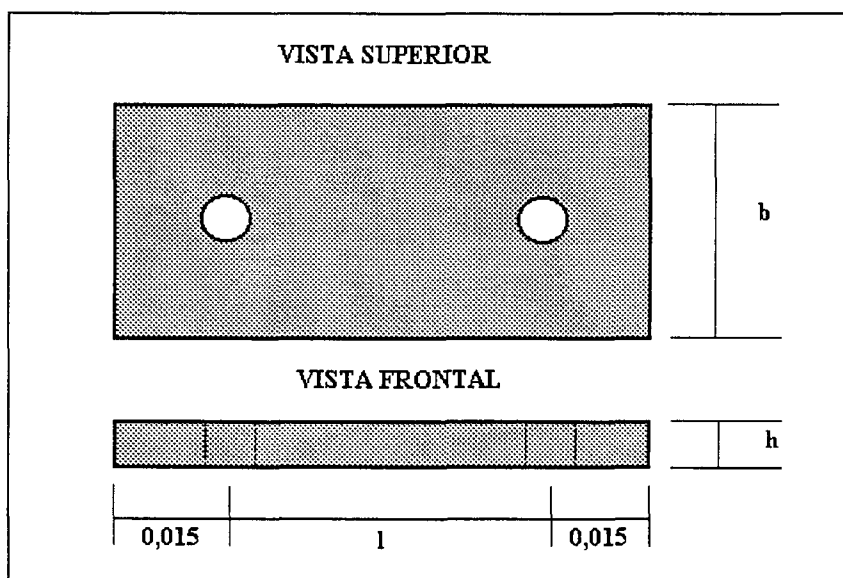


Figura 5.29: Desenho esquemático do dimensional das molas de flexão.

#### 5.4.4.2) Eficiência do sistema de aplicação de torque.

O sistema de aplicação de torque construído consta de um eixo mancalizado por rolamentos de esferas com um engate para torquímetro manual em seu extremo posterior e com um disco de freio e o flange de acoplamento em seu extremo anterior. Com o auxílio de torquímetro manual, um torque estático pode ser aplicado com medição simultânea (precisão de 1 Nm), sendo este valor mantido com o acionamento de um sistema de freio por atrito seco (uma presilha é prensada ao disco de freio por meio de parafuso).

Devido à simplicidade e robustez do sistema, não devem ocorrer oscilações no valor de torque durante a execução do ensaio, porém uma limitação inerente deste sistema é o alívio de torque que ocorre ao retirar o torquímetro.

Para verificar a magnitude desta alteração do torque (torque aplicado em relação ao mantido pelo sistema), um semi-eixo similar ao em análise foi instrumentado com strain gauges para medição de torque existente no semi-eixo antes e após a remoção do torquímetro.

A concepção inicial do sistema de freio apresentava apenas um parafuso M10 para a aplicação da força de aperto. Este sistema foi testado e os resultados estão apresentados na tabela 5.7 abaixo.

Dos resultados obtidos, constata-se que este sistema dotado de um parafuso apenas apresenta uma queda de torque em torno de 15%. Acrescida a este fato a incerteza gerada pelo procedimento manual da aplicação do torque, temos erros de até 23% (sempre no sentido de reduzir o torque existente no espécime durante o ensaio).

Frente a este resultado pouco satisfatório, o sistema de freio foi otimizado com o uso de dois parafusos M10 e o aumento da área de contato em cerca de 30%. Com esta nova versão, obteve-se os resultados apresentados na tabela 5.8 abaixo.

Dos resultados obtidos constata-se que ocorreu uma sensível melhoria na queda de torque, decrescendo a valores da ordem de 2,5% do valor aplicado. Neste caso, temos um erro na aplicação de torque em torno de 3% devido à queda de torque e à qualidade do torquímetro usado.



Torque aplicado lido no Torquímetro [Nm]	Torque aplicado lido pelos Strain Gauges [Nm]	Torque sustentado lido pelos Strain Gauges [Nm]	Queda de torque [%]
0	0	0	0
20	22,3	19,5	12,5
40	37,3	31,6	15,2
60	56,3	46,9	16,3
80	77,3	65,6	15,1
100	98,4	84,9	13,7
120	120,4	104,2	13,5
140	134,6	115,4	14,3
160	158,1	132,3	16,3
180	175,6	150,8	14,1
200	192,2	163,9	14,7
220	222,9	183,8	18,7
240	235,0	195,9	16,6

Tabela 5.7: Queda de torque no sistema de freio original (média de três valores).

#### 5.4.4.3) Eficiência das guias lineares de esferas recirculantes.

Um dos componentes mais importantes para a estrutura da bancada de teste é o sistema de guias lineares que permite o movimento dos cabeçotes em duas direções bem definidas (vertical e horizontal) e, teoricamente, deveria restringir os demais movimentos.

A solução proposta que prometia a melhor relação custo/eficiência foi o uso de guias de esferas recirculantes com seção cilíndrica. Por questão de robustez, foram utilizadas quatro guias para cada direção definida.

O primeiro inconveniente observado foi o difícil ajuste do paralelismo relativo entre as peças. Foram necessários vários ajustes na superfície de aparafusamento do eixo das guias e montagem seletiva para atingir um movimento suave e com força de deslocamento baixa.

Torque aplicado lido no Torquímetro [Nm]	Torque aplicado lido pelo Strain gages [Nm]	Torque sustentado lido pelo Strain Gages [Nm]	Queda de torque [%]
0	0	0	0
20	22,5	22,5	0
40	40,5	39,5	2,5
60	59,5	58,5	1,7
80	82,5	80,5	2,4
100	102,0	99,5	2,5
120	122,0	118,0	3,3
140	139,5	136,0	2,5
160	161,5	157,5	2,5
180	182,0	177,5	2,5
200	200,5	195,0	2,7
220	220,0	216,5	2,5
240	241,5	235,5	2,5

Tabela 5.8: Queda de torque no sistema de freio otimizado (média de três valores)

O maior problema identificado foi a performance aquém do esperado, no aspecto de restringir folgas de movimento em direções diferentes da desejada. A gaiola pouco rígida permite folgas aos rolamentos e esta é uma das causas que limita o desempenho destas peças.

Para contornar esta limitação, a qual é muito séria, pois o cabeçote da bancada se apoia sobre um pino centrado em relação à mola vertical que gera uma grande instabilidade se as guias não cumprem a sua função adequadamente, instalou-se quatro parafusos em pontos o mais distantes possível do centro de simetria vertical do suporte, para aplicar uma pré-tensão à mola vertical e remover a instabilidade anteriormente mencionada

Acredita-se que as limitações apresentadas pelas guias lineares com esferas recirculantes

foram contornadas adequadamente, porém recomenda-se o uso de guias com mancais de deslizamento para este tipo de aplicação.

#### **5.4.4.4) Rigidez da estrutura de desacoplamento.**

A estrutura da bancada de teste foi toda construída em chapas de aço de 1/4" de espessura, atingindo um total de 750 Kg. No caso da estrutura de desacoplamento de movimento vertical e horizontal nos cabeçotes, esta espessura de chapa não foi suficiente para proporcionar uma rigidez superior às molas de flexão dimensionadas pela análise apresentada anteriormente. Para evitar que esta estrutura funcionasse como uma mola acoplada em série à mola projetada, reforços constituídos de guias de aço temperado de perfil quadrado com espessura de 2" foram parafusados em locais estratégicos. Isto solucionou a falta de rigidez, porém ocasionou um efeito colateral indesejado de aumentar significativamente o peso dos cabeçotes, reduzindo sensivelmente as frequências naturais horizontal e vertical nas condições de contorno da bancada de teste.

### **5.5) Resultados obtidos com a bancada de teste.**

A seguir são apresentados os resultados experimentais obtidos com a bancada de teste em duas condições distintas. A primeira é a condição de recebimento da bancada e a segunda é após as melhorias estruturais descritas serem implementadas.

#### **5.5.1) Bancada de teste antes de implementar melhorias estruturais.**

A primeira verificação a ser feita na bancada de teste é em relação às condições de contorno que ela proporciona ao semi-eixo. Para tal, uma vez instaladas as molas descritas anteriormente, foi executada a medição da curva de resposta em frequência nos eixos axial (X), transversal-horizontal (Y) e transversal-vertical (Z) em cada um dos flanges de acoplamento. Os resultados estão apresentados na figura 5.30 para a flange da junta deslizante, e na figura 5.31 para o flange da junta fixa. Em ambos os casos o semi-eixo não estava conectado, de forma a permitir avaliar o comportamento dinâmico da bancada de teste em separado. Pode-se verificar

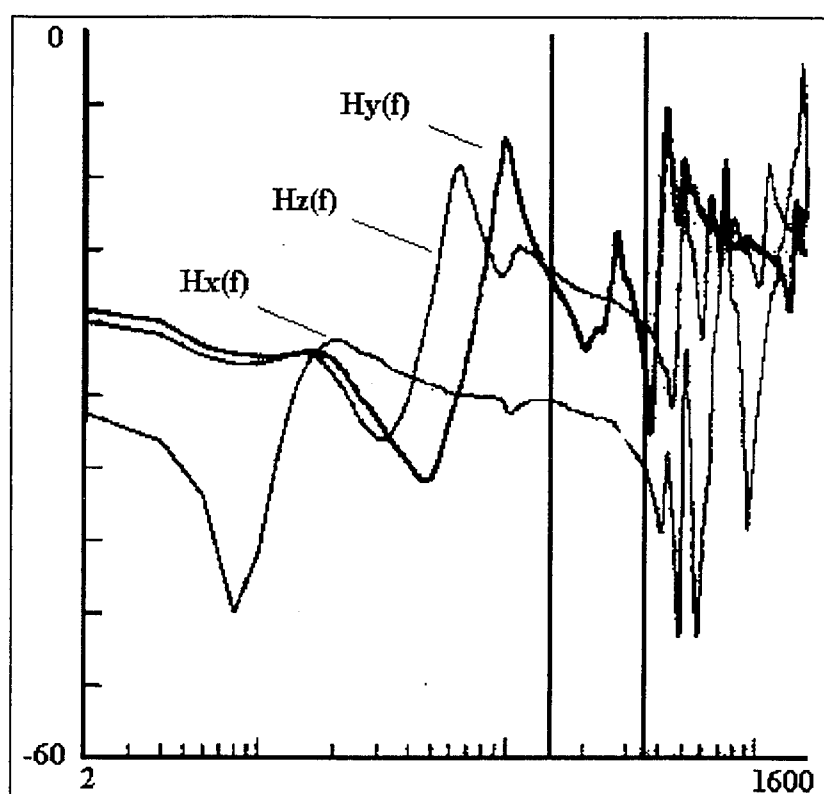


Figura 5.30: Curvas de resposta em frequência do flange da junta deslizante.

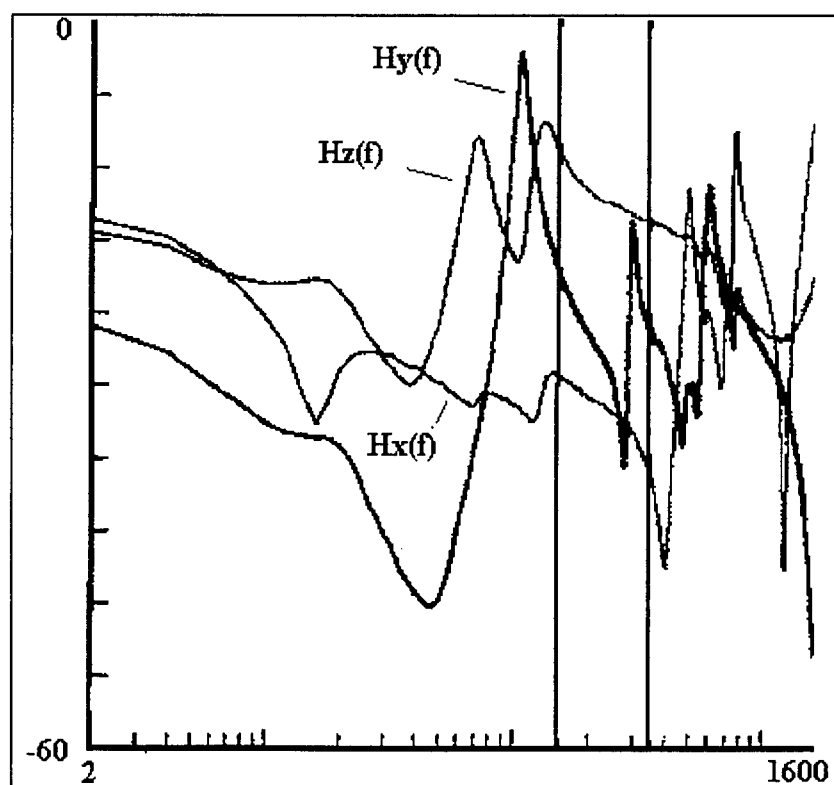


Figura 5.31: Curvas de resposta em frequência do flange da junta fixa.

que a premissa de que a primeira ressonância das condições de contorno deveria ser superior a 400Hz foi desrespeitada, obtendo-se frequências naturais apresentadas na tabela 5.9 abaixo.

Local	F <sub>x</sub> (Hz)	F <sub>y</sub> (Hz)	F <sub>z</sub> (Hz)
Flange da junta deslizante	134	100	66
Flange da junta fixa	144	110	72

Tabela 5.9: Frequências naturais obtidas nos flanges.

Uma análise rápida indica que a causa desta ressonância abaixo do previsto é que os cabeçotes são pesados demais, de modo que os suportes não apresentam rigidez suficiente para manter a ressonância na faixa esperada. Em resumo, os suportes não são suficientemente rígidos e funcionam como molas em série com as molas de sustentação.

Apesar disto, a resposta dinâmica obtida nas condições de contorno com o semi-eixo acoplado aos flanges e sob um torque de 100 Nm apresenta-se numa faixa de amplitude similar ao que ocorre no veículo quando observada a faixa de frequências de interesse (150 a 350 Hz). Isto pode ser observado nas figuras: 5.32 (flange da junta deslizante, direção horizontal), 5.33 (flange da junta deslizante, direção vertical), 5.34 (flange da junta fixa, direção horizontal) e 5.35 (flange da junta fixa, direção vertical).

A curva de resposta em frequência obtida para o semi-eixo, medida na seção central do eixo com 100 Nm aplicados e ângulo e deslocamento nulos nas juntas, apresenta-se destoante da obtida no veículo, indicando uma ressonância em frequência superior ao esperado. Na figura 5.36 temos, superpostas, as curvas obtidas na bancada de teste e no veículo, na direção horizontal, e na figura 5.37 temos a comparação feita para a direção vertical. Para investigar o motivo desta grande diferença, foi efetuada a análise modal de toda a bancada com o semi-eixo instalado, com 100Nm aplicado, nas direções transversais vertical e horizontal utilizando a mesa vibratória, instalada no centro do eixo, como fonte de excitação. O modelo de discretização da bancada de teste com o semi-eixo acoplado está apresentado na figura 5.38. O resultado destas análises está apresentado na figura 5.39 para a direção vertical, e 5.40 para a direção horizontal. Em ambos os

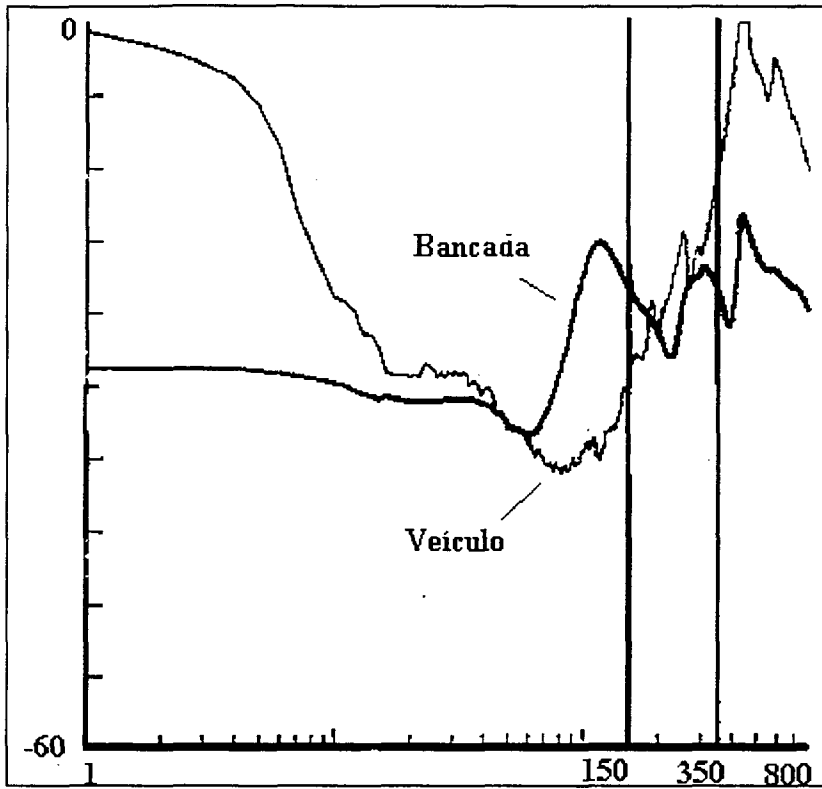


Figura 5.32: Comparação da resposta dinâmica para a condição de contorno no lado da junta deslizante, direção horizontal.

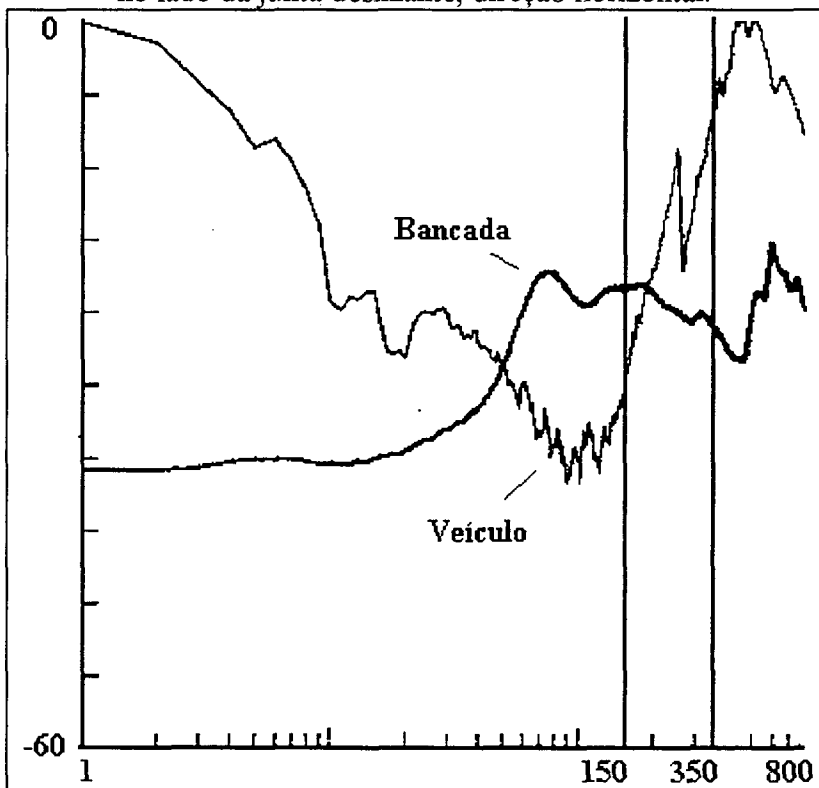


Figura 5.33: Comparação da resposta dinâmica para a condição de contorno no lado da junta deslizante, direção vertical.

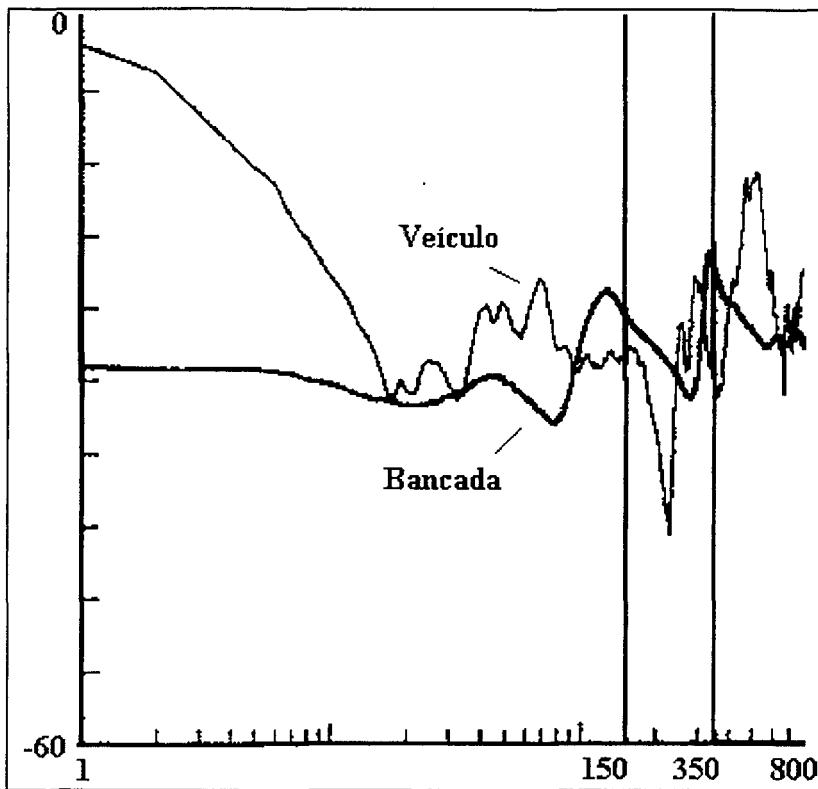


Figura 5.34: Comparação da resposta dinâmica para a condição de contorno no lado da junta fixa; direção horizontal.

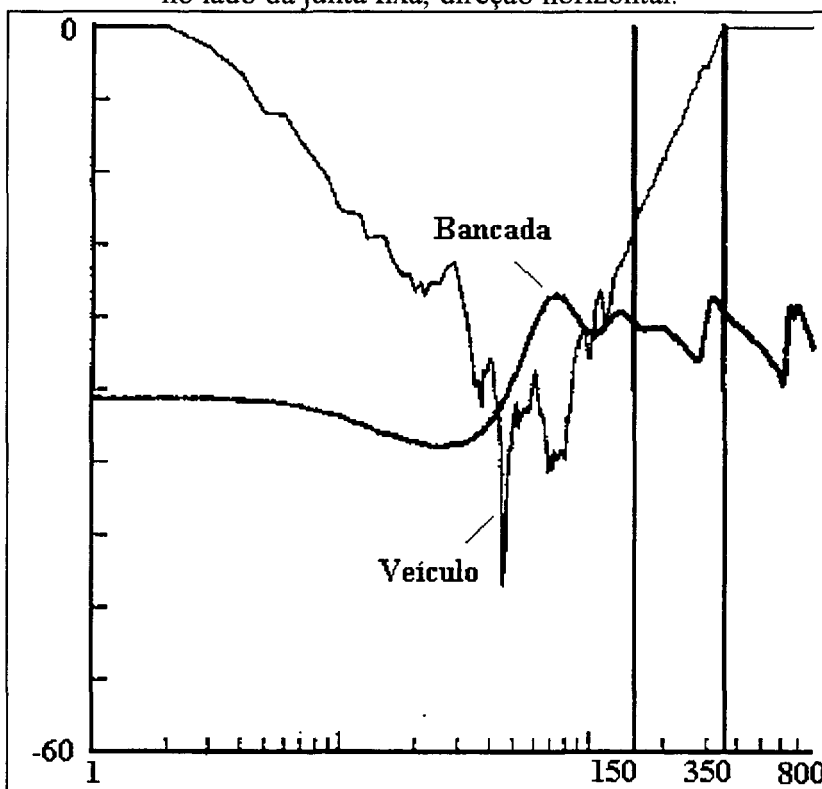


Figura 5.35: Comparação da resposta dinâmica para a condição de contorno no lado da junta fixa, direção vertical.

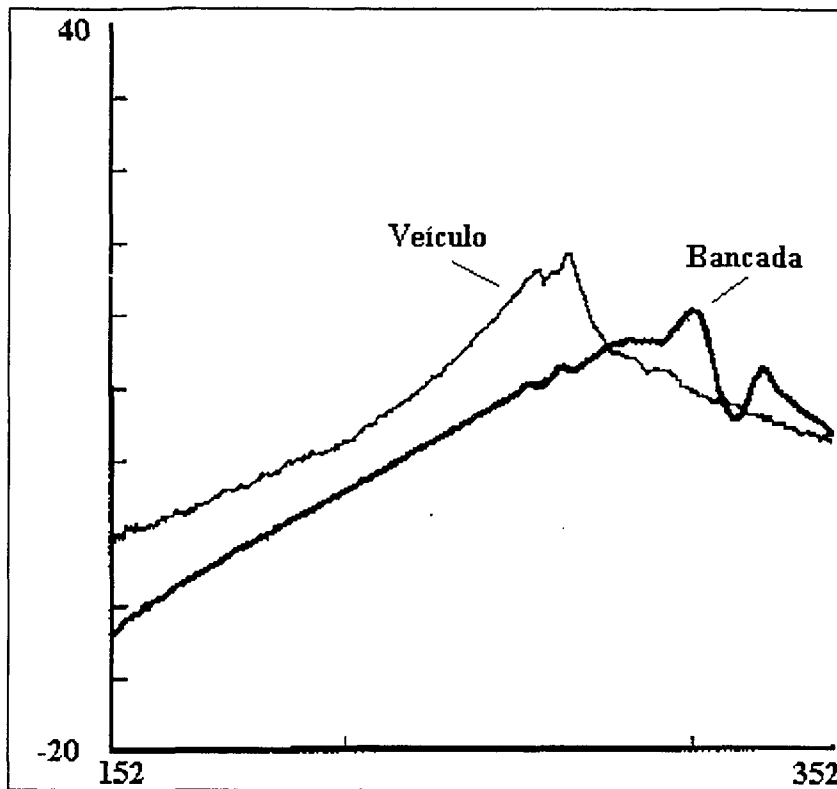


Figura 5.36: Comparação da curva de resposta em frequência obtida para o semi-eixo na direção horizontal.

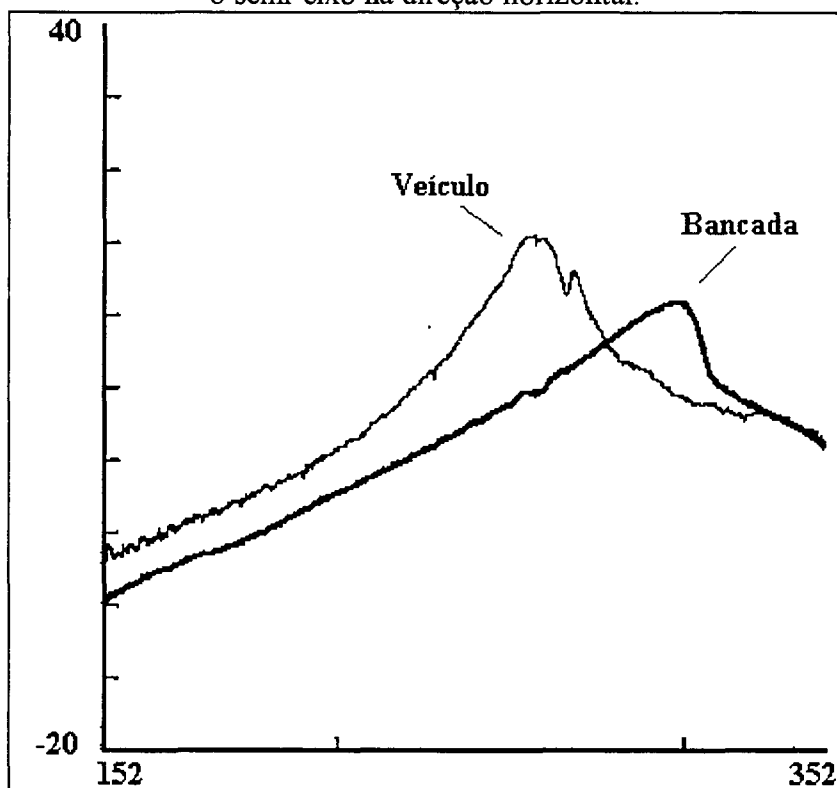


Figura 5.37: Comparação da curva de resposta em frequência obtida para o semi-eixo na direção vertical.



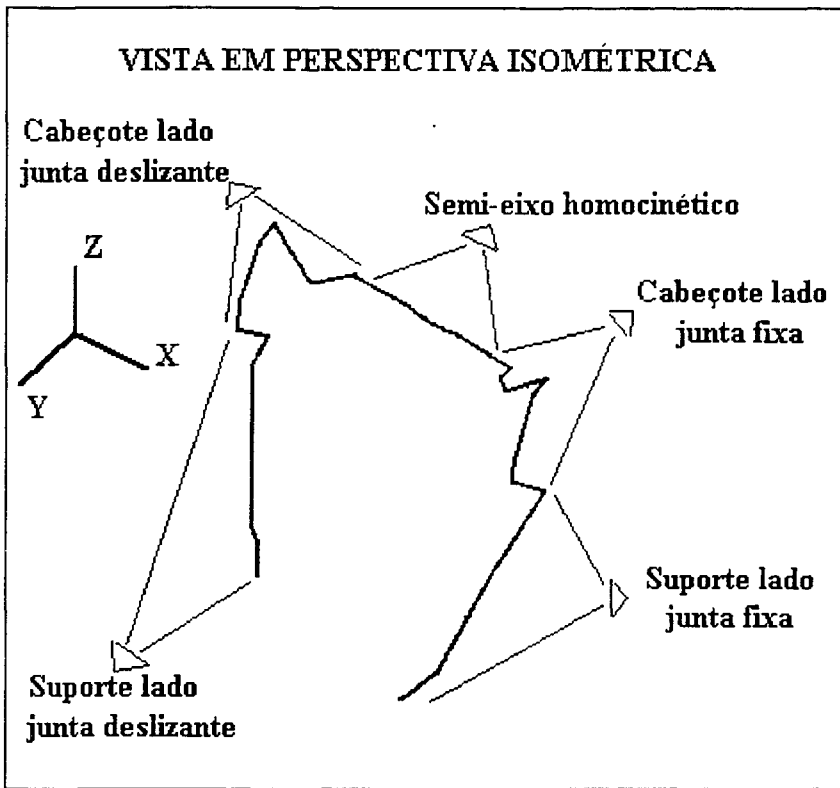


Figura 5.38: Modelo de discretização adotado para efetivar análise modal da bancada de teste com o semi-eixo instalado.

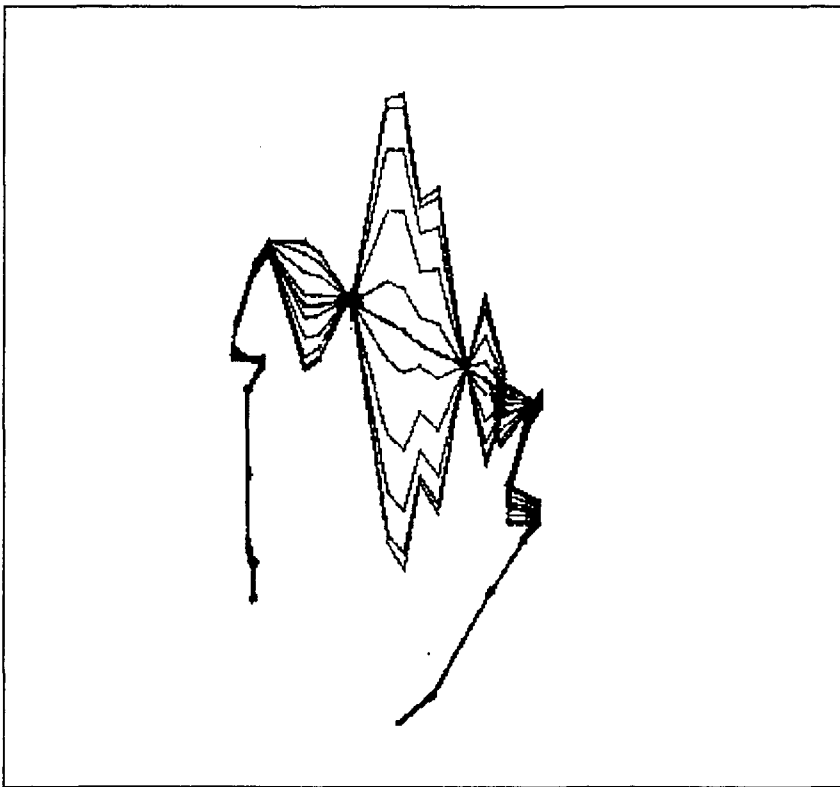


Figura 5.39: Modo de vibração na direção vertical da bancada de teste com o semi-eixo instalado.

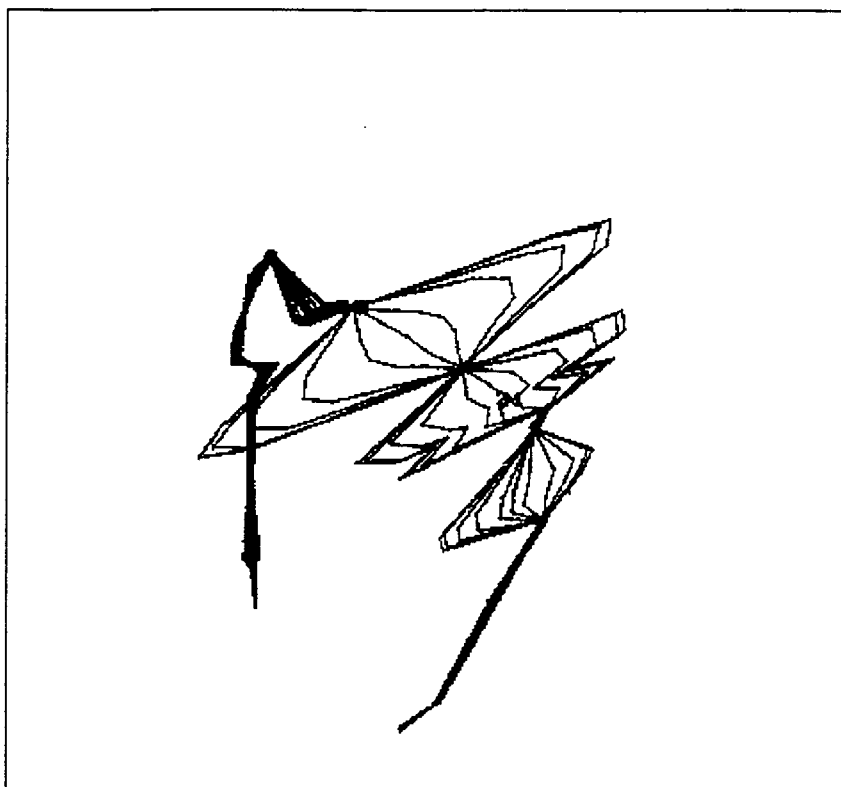


Figura 5.40: Modo de vibração na direção horizontal da bancada de teste com o semi-eixo instalado.

casos observa-se que os suportes dos cabeçotes permanecem estáticos, portanto a sua falta de rigidez não impõe maiores empecilhos à análise nesta faixa de frequência, porém os cabeçotes apresentam movimentos amplos que distorcem o modo de vibração do semi-eixo e prejudicam, de sobre-maneira, a medição.

#### 5.5.2) Bancada de teste após a implementação de melhorias estruturais.

Com os resultados obtidos na análise modal da bancada de teste, definiu-se as seguintes melhorias estruturais para tentar reduzir a influência indevida dos cabeçotes:

a) Instalação de reforços estruturais (guias de aço temperado, de perfil quadrado de 2", aparafusadas aos cabeçotes), com o objetivo de enrijecê-los.

b) Instalação de quatro parafusos M10 em cada cabeçote, distribuídos de forma a aplicar uma pré-tensão à mola de flexão vertical e reduzir a instabilidade gerada pelas folgas nas guias lineares verticais.

c) Reaperto, com máximo torque admissível, nos parafusos que efetuam a união entre os componentes dos cabeçotes.

Após a implementação destas melhorias, a análise modal da bancada de teste foi refeita e gerou os resultados apresentados na figura 5.41 para a direção vertical e 5.42 para a direção horizontal.

Observa-se claramente a melhoria obtida no comportamento dinâmico dos cabeçotes, tornando o modo de vibração do semi-eixo similar ao que ocorre no veículo (vide figura 5.43), assim como o autovalor obtido.

A influência da aplicação do torque para a medição da curva de resposta em frequência na direção vertical está apresentada na figura 5.44, e a variação ocorrida no autovalor está apresentada na figura 5.45.

A verificação das condições de contorno, frente ao referencial adotado (veículo de teste), está apresentada nas figuras: 5.46 (flange da junta deslizante, direção horizontal), 5.47 (flange da junta deslizante, direção vertical), 5.48 (flange da junta fixa, direção horizontal) e 5.49 (flange da junta fixa, direção vertical).

A curva de resposta em frequência obtida para o semi-eixo na direção vertical está apresentada na figura 5.50.

Com o intuito de verificar a influência de adicionar massa aos cabeçotes, pesos adicionais num total de 80 Kg foram instalados sobre os mesmos e a análise modal foi refeita gerando os resultados apresentados na figura 5.51 para a direção vertical e 5.52 para a direção horizontal. Observa-se uma diminuição do movimento dos cabeçotes apenas na direção vertical, com a respectiva alteração no autovalor e autovetor do semi-eixo.

## **5.6) Conclusão.**

Apesar do fato de que a premissa básica proposta no projeto do sistema de controle da resposta dinâmica dos cabeçotes da bancada de teste (condições de contorno) não ter sido implementada com sucesso devido ao peso excessivo dos cabeçotes (acarretando frequências de

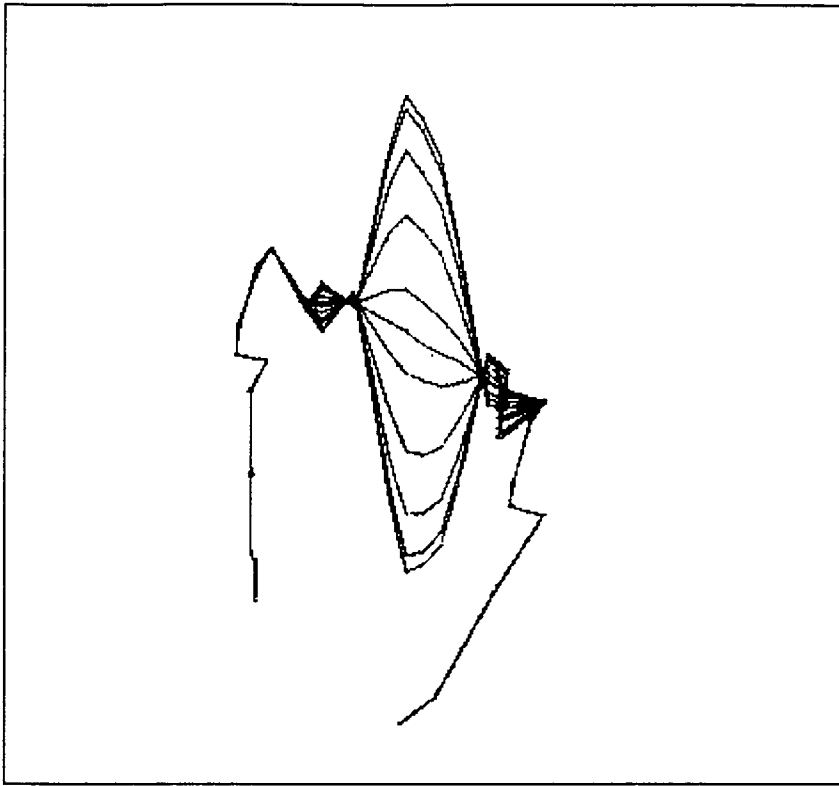


Figura 5.41: Modo de vibração na direção vertical da bancada de teste  
melhorada com o semi-eixo instalado.

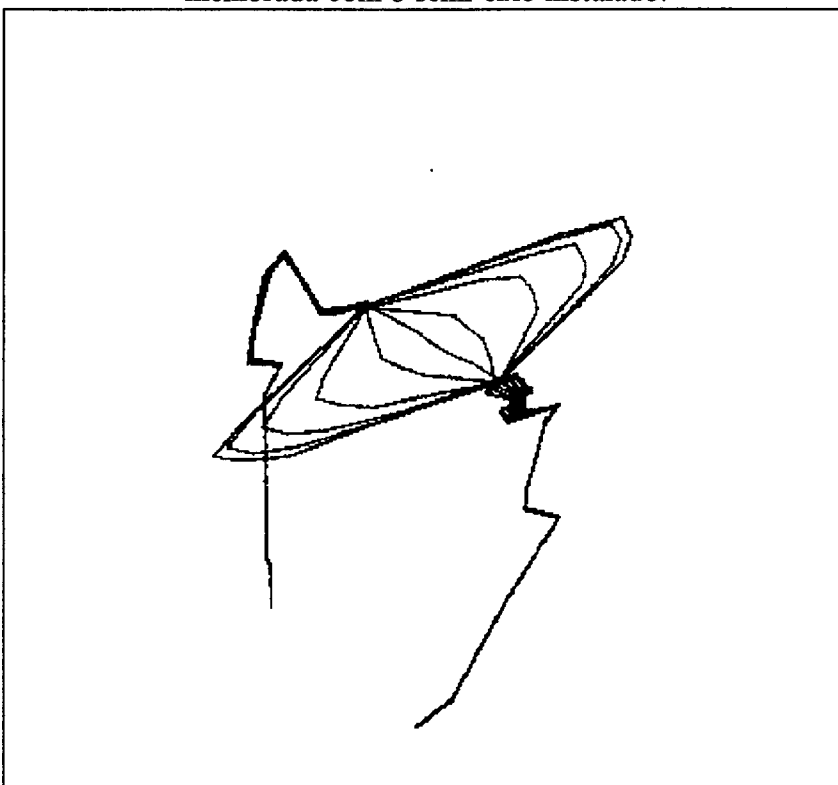


Figura 5.42: Modo de vibração na direção horizontal da bancada de teste  
melhorada com o semi-eixo instalado.

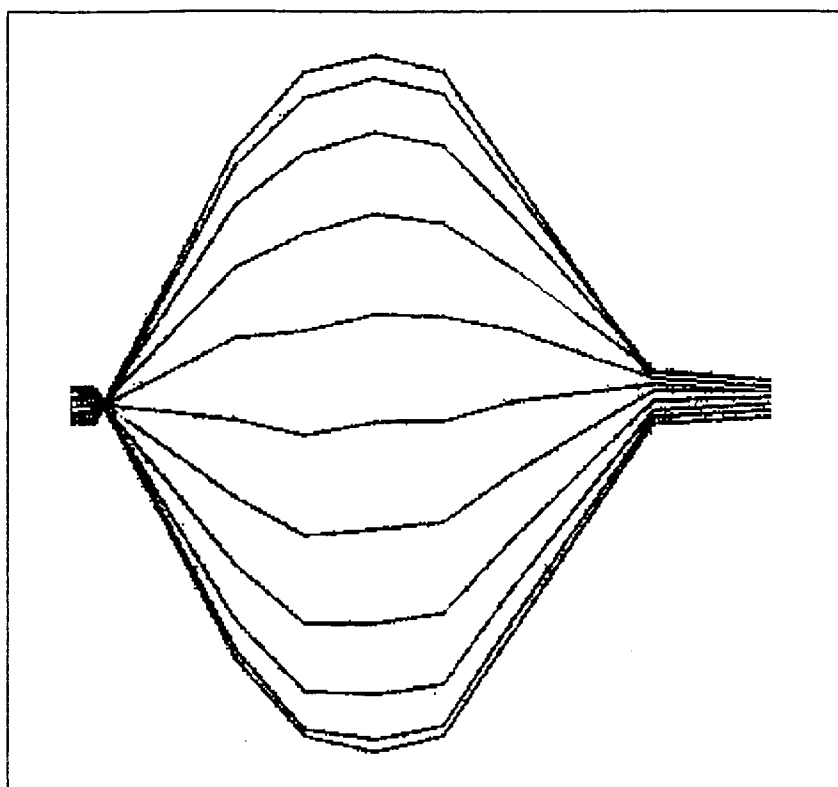


Figura 5.43: Autovetor obtido para o semi-eixo instalado na bancada de teste após melhoramentos sob um torque de 100 Nm.

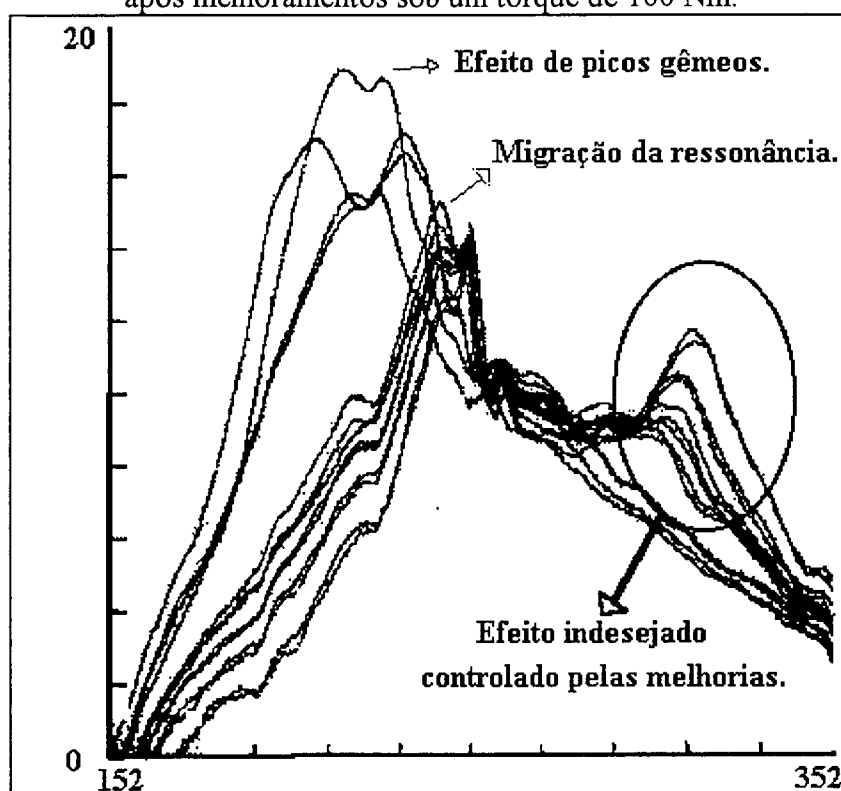


Figura 5.44: Influência da aplicação do torque na medição da curva de resposta em frequência, na direção vertical.

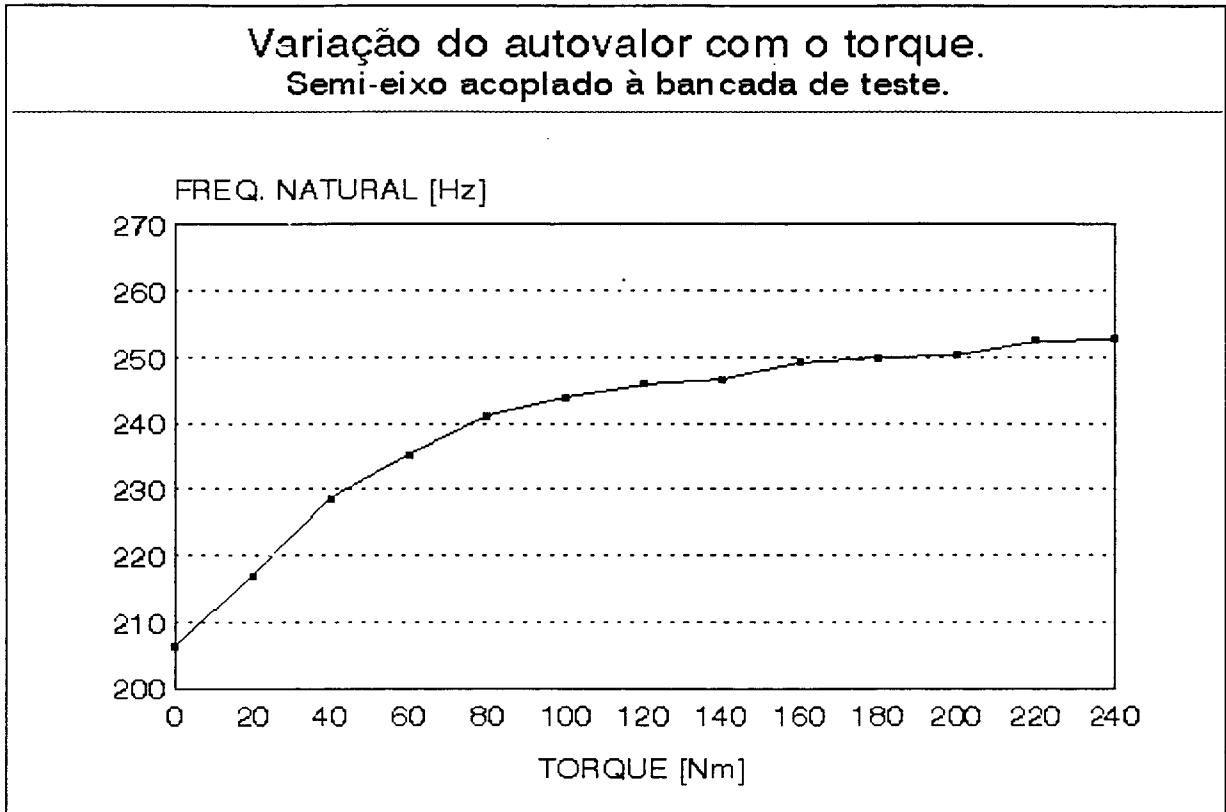


Figura 5.45: Influência da aplicação do torque na medição do autovalor, na direção vertical.

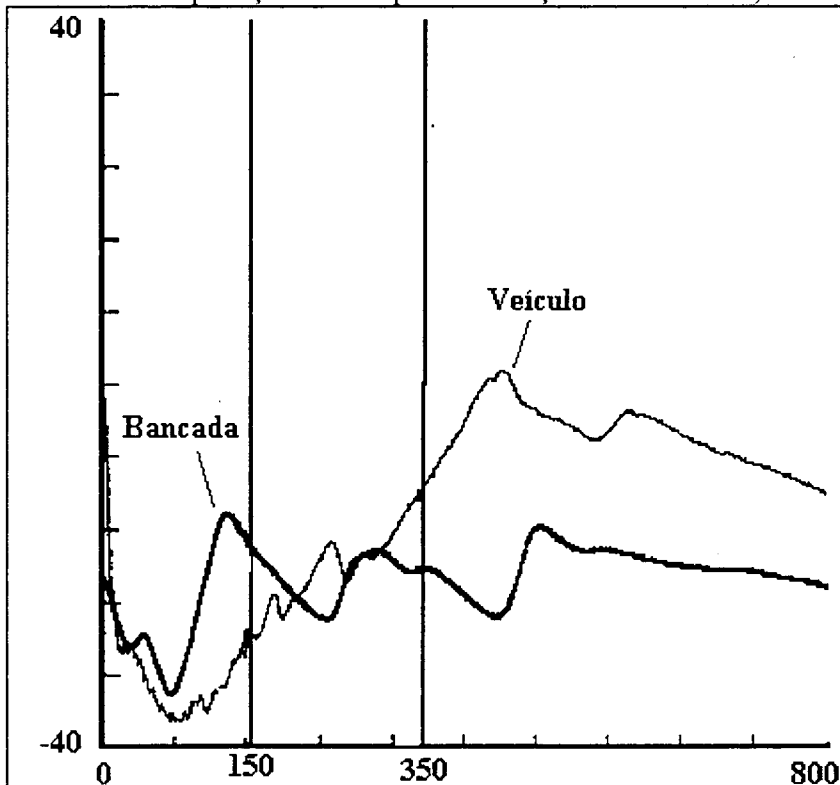


Figura 5.46: Comparação da resposta dinâmica para a condição de contorno no lado da junta deslizante, direção horizontal.

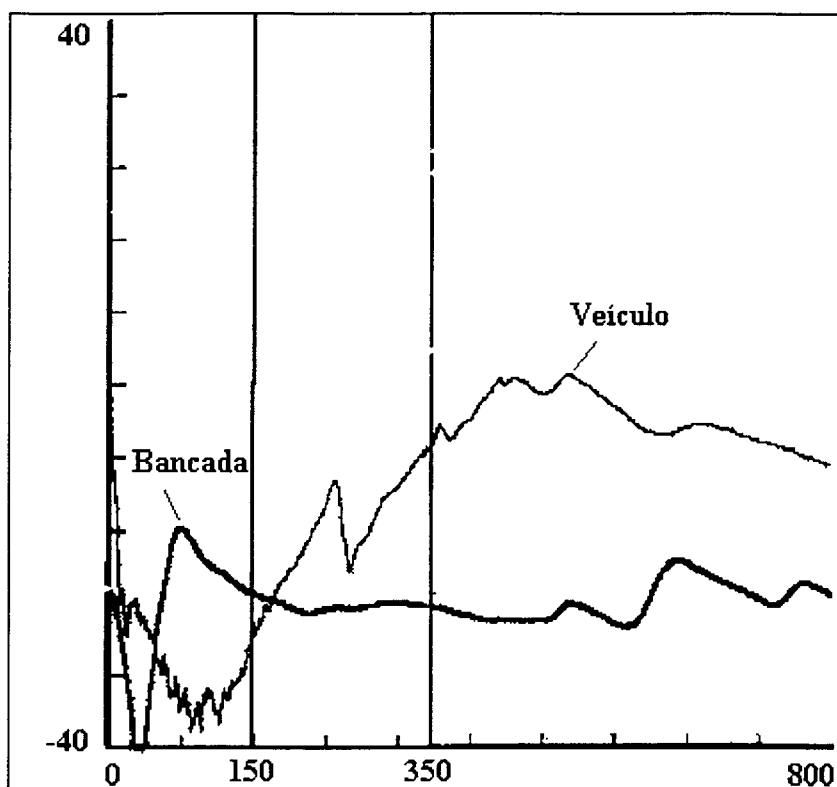


Figura 5.47: Comparação da resposta dinâmica para a condição de contorno no lado da junta deslizante, direção vertical.

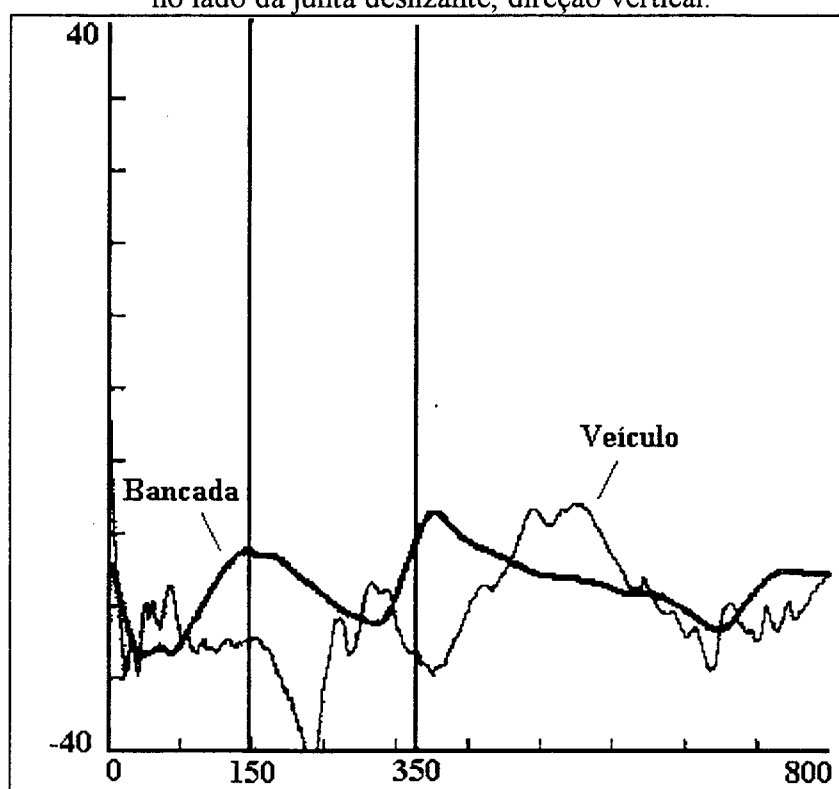


Figura 5.48: Comparação da resposta dinâmica para a condição de contorno no lado da junta fixa, direção horizontal.

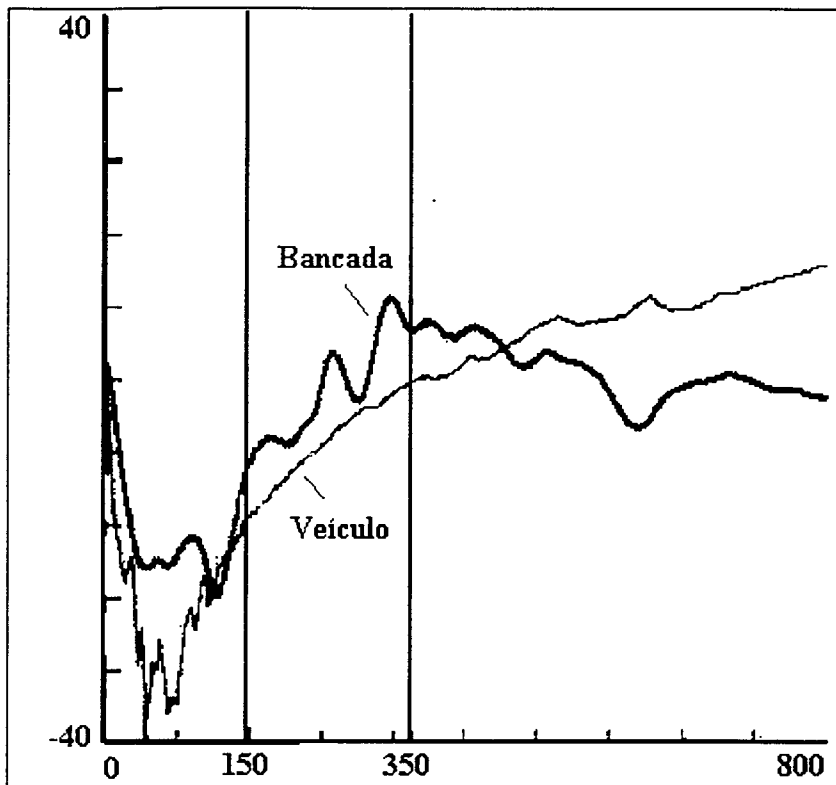


Figura 5.49: Comparação da resposta dinâmica para a condição de contorno no lado da junta fixa, direção vertical.

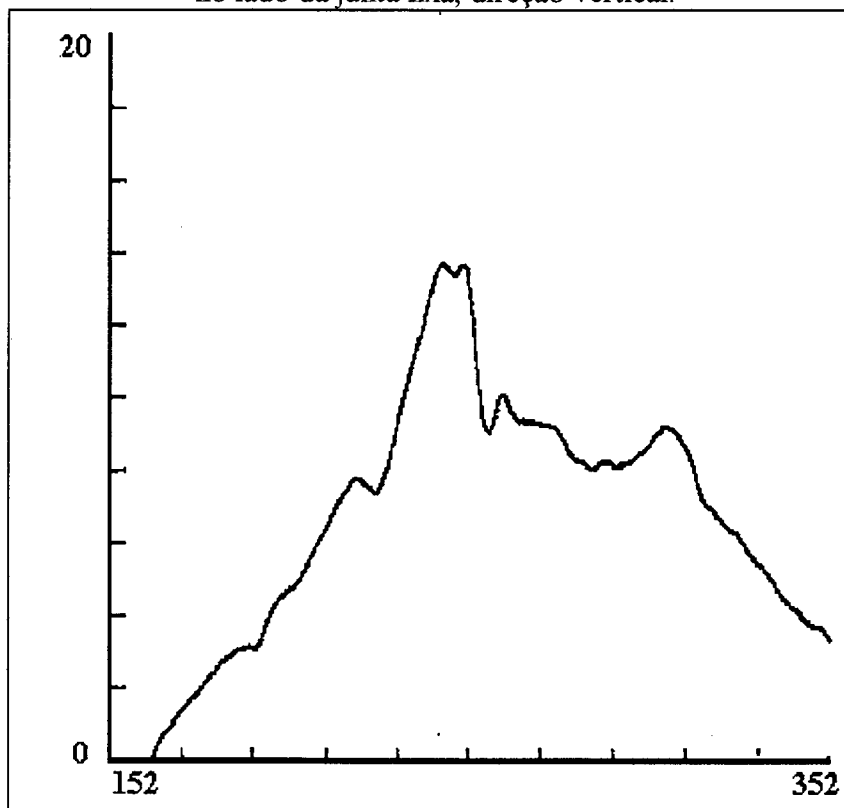


Figura 5.50: Curva de resposta em frequência do semi-eixo instalado na bancada de teste sob um torque de 100 Nm e na direção vertical.



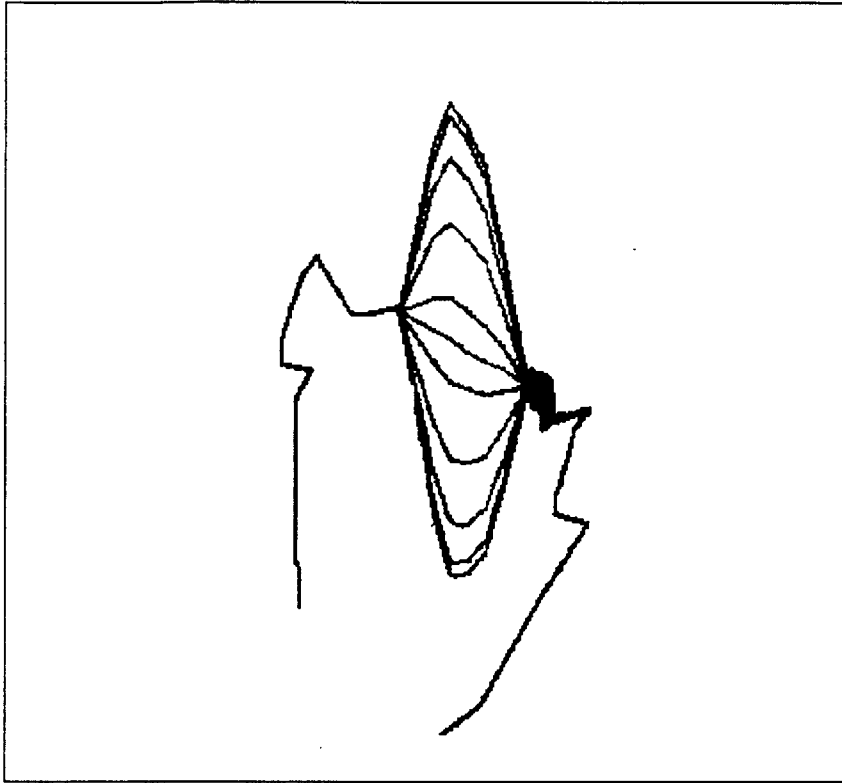


Figura 5.51: Autovetor obtido para o semi-eixo instalado na bancada de teste com pesos adicionais, sob um torque de 100 Nm e na direção vertical.

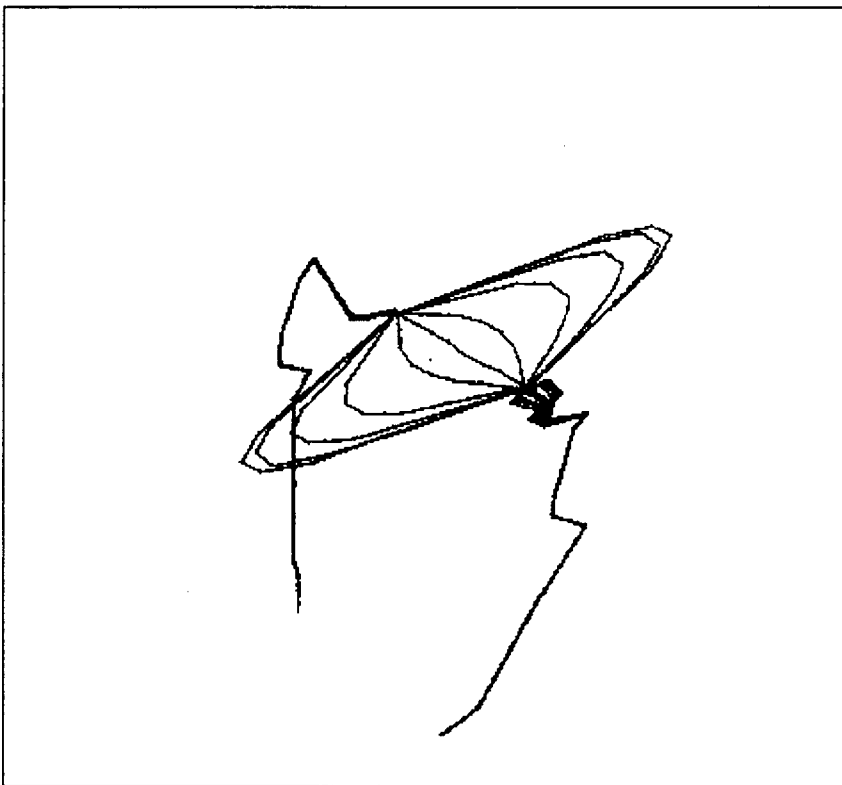


Figura 5.52: Autovetor obtido para o semi-eixo instalado na bancada de teste com pesos adicionais, sob um torque de 100 Nm e na direção horizontal.

ressonância abaixo do esperado), o ajuste das molas de flexão e o uso de pesos adicionais permitem a obtenção de respostas dinâmicas próximas às desejadas na faixa de frequência em análise, obtendo uma simulação razoável das condições encontradas no veículo. A variação do autovalor, em relação ao torque aplicado, demonstra um comportamento análogo ao encontrado no veículo.

Portanto, pode-se creditar um nível aceitável de sucesso ao estágio atual do desenvolvimento da bancada de teste apresentada nas figuras 5.53, 5.54 e 5.55. Apesar disto, novas melhorias deverão ser implementadas no futuro próximo. Estas melhorias deverão ocasionar alterações substanciais nos cabeçotes da bancada de teste, extrapolando a abordagem de pequenas melhorias adaptadas ao conceito original desenvolvido neste projeto. Basicamente, o objetivo será o de reduzir radicalmente o peso dos cabeçotes, utilizando mancal de deslizamento ao invés de rolamento de esferas e suprimindo as guias lineares de esferas recirculantes (as quais apresentaram eficiência aquém do esperado). A nova proposta apresentará o conceito de substituir as molas de flexão unidirecionais por uma única mola de flexão bidirecional (ou seja, que atue efetivamente definindo a rigidez em duas direções: transversais vertical e horizontal, e restringindo ao máximo os movimentos na direção axial horizontal). Este sistema deverá simplesmente substituir os cabeçotes atuais sobre os suportes já existentes, os quais representam a maior parcela do custo do equipamento, tornando a alteração simples e com baixo custo de implementação.

Um esquema simplificado, e ainda em estágio embrionário de projeto, está apresentado na figura 5.56, onde pode ser claramente observada a simplicidade e a robustez desta nova concepção que acarretará uma redução sensível do peso. Cabe salientar que a mola bidimensional, representada na figura 5.56 como uma única viga em balanço, será, na prática, dividida em quatro vigas idênticas, fixadas nos extremos do mancal de deslizamento de maneira a proporcionar um apoio mais estável ao sistema (maior rigidez ao movimento de pêndulo, tanto no sentido transversal como axial, favorecendo o movimento de translação do mancal, em detrimento do movimento de rotação).

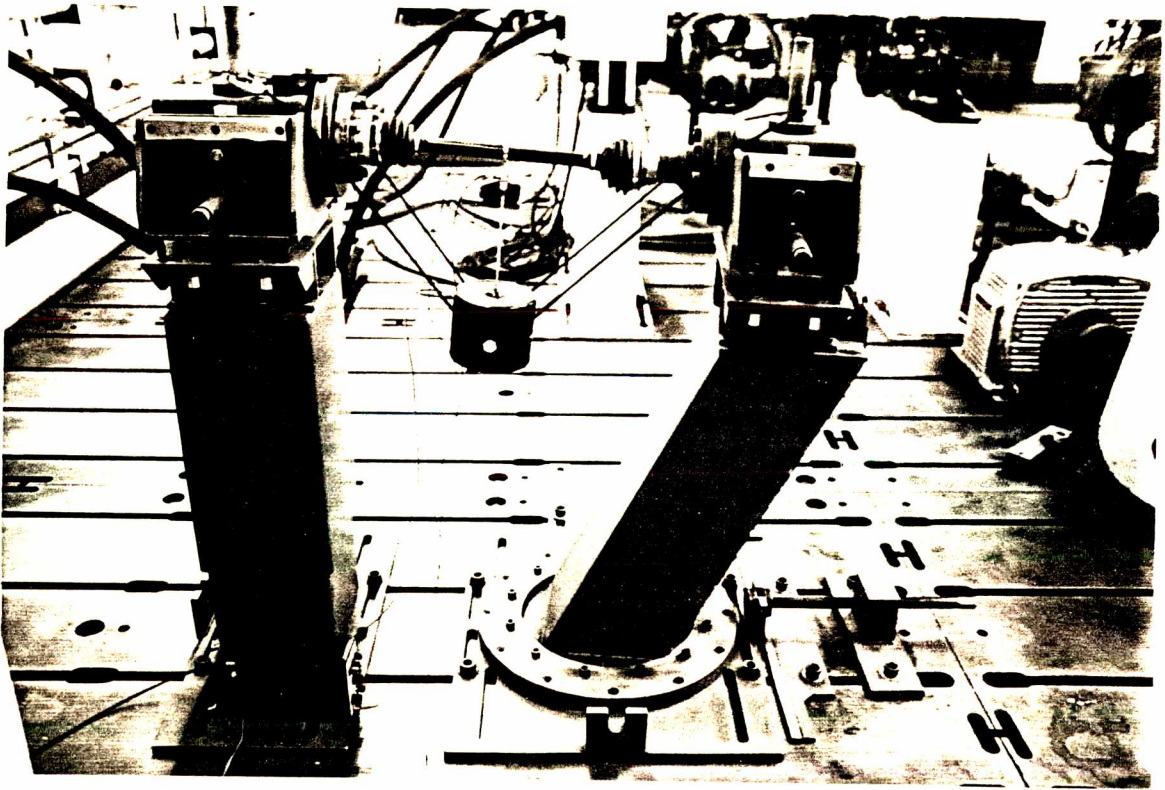


Figura 5.53: Detalhe da base lado diferencial da bancada de teste.

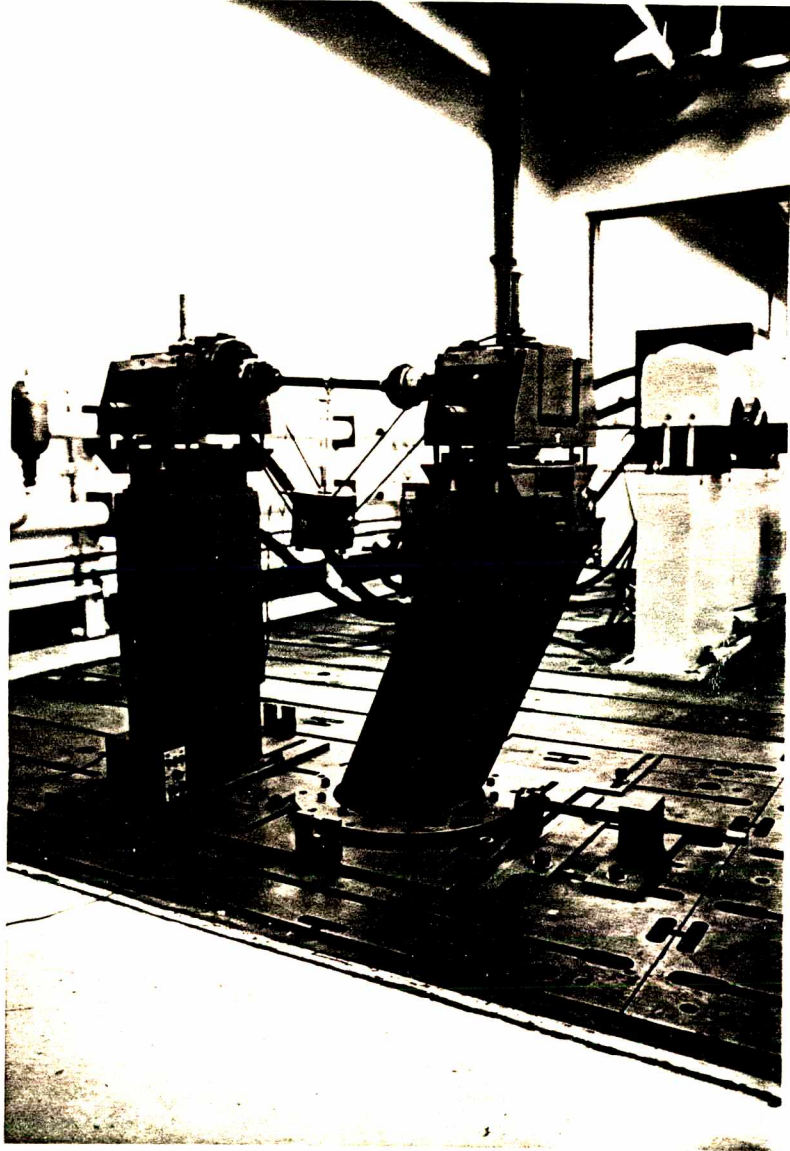


Figura 5.54: Detalhe da base lado roda da bancada de teste.

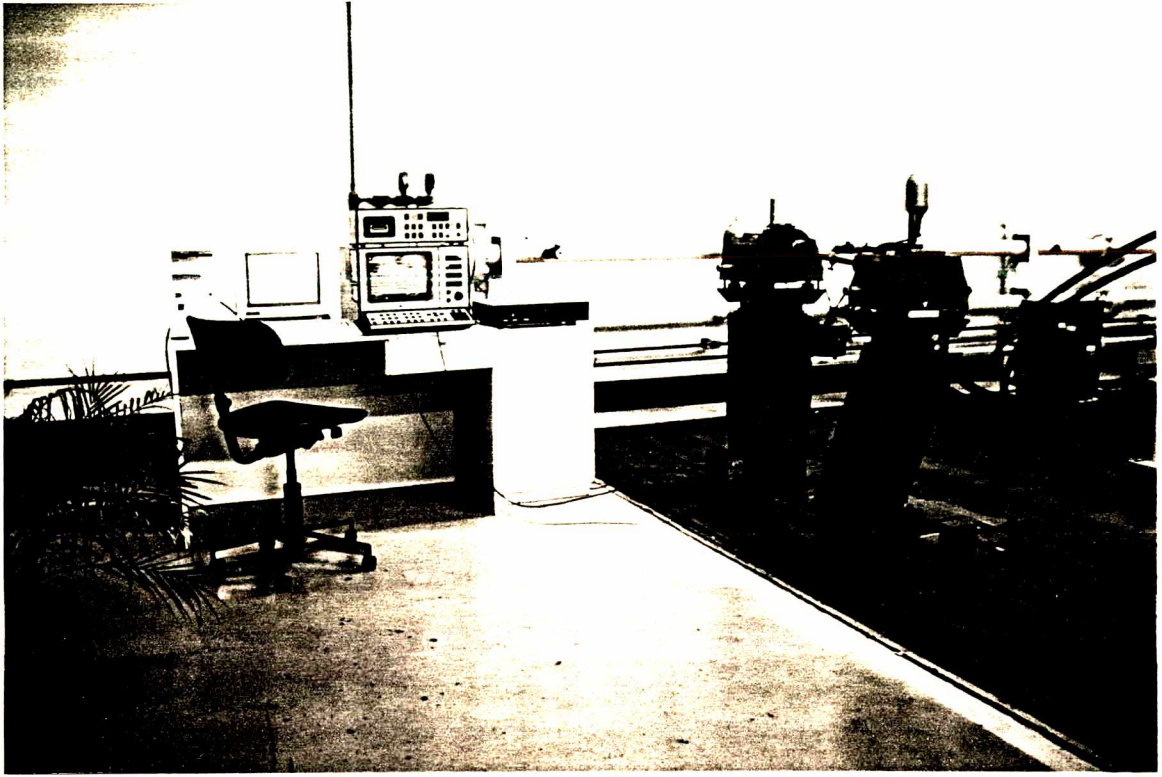
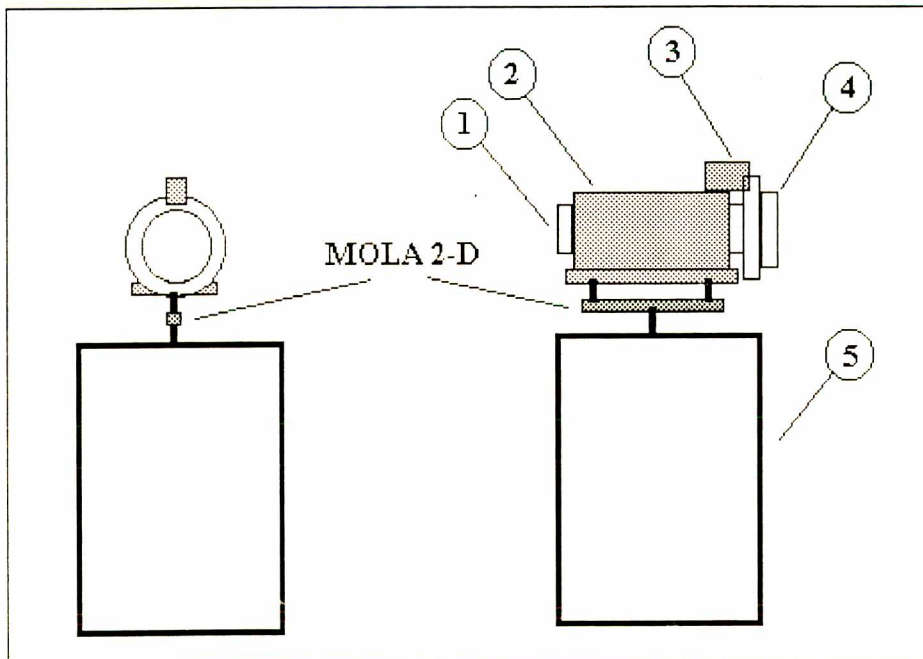


Figura 5.55: Visão geral da bancada de teste com os equipamentos de medição conectados.



Nomenclatura:

- |                                 |                            |
|---------------------------------|----------------------------|
| 1) Conexão para torquímetro.    | 2) Mancal de deslizamento. |
| 3) Sistema de freio por atrito. | 4) Flange de acoplamento.  |
| 5) Base de sustentação.         |                            |

Figura 5.56: Nova concepção de cabeçote da bancada de teste.

# Capítulo

# 6

## CAPÍTULO 6

### OTIMIZAÇÃO DE MODELOS ESTRUTURAIS DINÂMICOS

#### 6.1) Introdução

Existem duas fontes distintas de obtenção de um modelo matemático para representar a dinâmica de estruturas:

- abordagem teórica ou analítica (A)
- abordagem experimental (X)

A abordagem analítica é construída sobre premissas, simplificações e modelos teóricos que representam, no final de seu desenvolvimento, uma aproximação do comportamento real da estrutura enfocada. Utiliza-se métodos analíticos do tipo: Trabalhos Virtuais, Princípio de Hamilton, Elementos Finitos, Diferenças Finitas, Matrizes de Transferência e outros. Como características básicas, o modelo assim obtido apresenta-se completo (pode-se calcular todas as grandezas envolvidas no fenômeno em qualquer ponto da estrutura modelada), porém incorreto (as aproximações inerentes aos métodos tornam o resultado final uma aproximação às vezes grosseira do fenômeno real em análise).

A abordagem experimental é desenvolvida sobre dados obtidos com a estrutura em análise, os quais fornecem parâmetros para ajustar um modelo genérico que representa o fenômeno real com uma precisão tão boa quanto forem corretos os dados obtidos e a metodologia utilizada, porém apenas os parâmetros medidos podem ser determinados na análise (modelo não é completo).

Destas características inerentes das duas abordagens existentes, surge a seguinte metodologia para otimizar modelos: usar modelos analíticos como base para representar a dinâmica de estruturas (devido ao seu modelamento completo) e usar dados experimentais para validar e corrigir este modelo (devido à sua fidelidade com o fenômeno real).

Portanto, pode-se definir o processo de otimização de um modelo estrutural dinâmico como o processo de ajustar um modelo matemático de uma estrutura, usando dados experimentais de forma que o modelo ajustado represente de forma mais correta o comportamento dinâmico da estrutura.

## **6.2) Revisão Teórica**

Segundo Ewins [37], uma característica importante para quantificar a qualidade de um modelo dinâmico é o nível de correção. Por definição, existem os seguintes níveis:

- Nível 1 - os autovetores e autovalores experimentais e analíticos conferem nos graus de liberdade e modos analisados.

- Nível 2 - os autovetores e autovalores experimentais e analíticos conferem nos graus de liberdade não medidos nos modos analisados.

- Nível 3 - as curvas de resposta em frequência experimentais e analíticas conferem na faixa de frequência analisada.

- Nível 4 - as curvas de resposta em frequência medidas e as não medidas conferem na faixa de frequência analisada.

- Nível 5 - todas as curvas de resposta em frequência conferem (em todos os graus de liberdade e em todas as frequências).

Para comparar resultados analíticos com experimentais existem vários enfoques que definem 5 gerações de metodologias de crescente complexidade.

### **6.2.1) Geração zero: validação do modelo teórico.**

Leva este nome por não se configurar um método de otimização de modelo propriamente dito, pois apenas compara resultados gerados pelas duas metodologias sem dar indícios ou significado físico para as correções necessárias no modelo. Serve como uma simples verificação do grau de proximidade entre os resultados analíticos e os experimentais.

Este procedimento é usualmente denominado de validação do modelo teórico e é a



aplicação mais simples e popular do uso da análise modal experimental.

Baseia-se na comparação direta de propriedades modais, quantificando a magnitude das diferenças nos resultados obtidos pelas duas abordagens.

Devido ao complexo processo necessário para obter os resultados finais da análise modal tanto teórico como experimental, a comparação entre elas deve ser da forma mais completa possível, envolvendo preferivelmente os três níveis do modelo dinâmico ("espacial", "modal" e "resposta") conforme apresentado no capítulo 2. Ewins [9] expressa claramente a necessidade de efetuar esta comparação de forma completa, utilizando tantos tipos diferentes de comparação quantos forem possíveis.

#### **6.2.1.1) Comparação de propriedades de "resposta":**

Esta comparação mostra-se a mais apropriada para ser inicialmente feita devido à disponibilidade direta desses parâmetros pela abordagem experimental (a curva de resposta em frequência é o dado inicial desta análise) e, apesar do longo processo de análise dispendido até este nível, a abordagem analítica incorre em menos incertezas através dos processos computacionais e matemáticos. Sobrepondo-se as curvas de respostas em frequência obtidas pelas duas abordagens, pode-se observar as discrepâncias nas estimativas de frequências naturais, amortecimento e anti-ressonâncias.

#### **6.2.1.2) Comparação de propriedades "modais":**

Devido ao nível de modelo modal exigir um esforço similar de análise nas duas abordagens (em ambos os casos trata-se de um segundo nível na análise), esta é a forma mais comum de comparação.

Procedimentos usuais:

a) comparar graficamente os autovalores ( $w_x$  versus  $w_a$ )

Os pontos deste gráfico devem formar uma reta de 45°, sendo fácil identificar discordâncias entre as abordagens. Caso a inclinação seja diferente de 45°, a causa provável do erro é o uso de propriedades inadequadas do material no modelo teórico. Caso ocorra uma

pequena dispersão randômica de valores em torno da inclinação de  $45^\circ$ , provavelmente existem erros inerentes do processo experimental.

Caso seja detectada uma divergência nos autovalores dos modelos teóricos e experimental, não pode-se determinar se esta divergência decorre duma diferença entre as matrizes de rigidez, de massa ou ambas entre os modelos.

b) comparar graficamente os autovetores ( $\phi_x$  versus  $\phi_a$ )

A tendência natural é de apenas sobrepor as representações gráficas dos autovetores para observar as discrepâncias. Outra forma, talvez mais conveniente para avaliar a causa das discrepâncias, é usar um gráfico X-Y similar ao utilizado para comparar os autovalores. Cada ponto deste gráfico representará um nodo da malha de discretização adotado para representar o objeto e deverão todos localizarem-se próximos a uma linha de  $45^\circ$  para autovetores normalizados em relação à massa. O uso da mesma discretização e idêntico posicionamento dos nodos nas duas malhas é crucial para fornecer uma comparação válida.

Esta análise é ideal para verificar se modos considerados correlatos nas abordagens experimental e analítica realmente o são, além de facilmente identificar locais no modelo onde o refinamento da malha de discretização deve melhorar (no caso de ocorrer uma discrepância persistente entre valores, para específicos nodos em diferentes modos analisados).

A maior limitação desta comparação é que o autovetor teórico é real e o experimental é, via de regra, complexo. Segundo Ewins [37], tentar compensar esta discrepância através de complicados artificios numéricos não trazem, na grande maioria dos casos, ganhos reais para a análise. Deve-se apenas ter ciência desta limitação e aproveitar a parcela útil desta comparação.

Existem fórmulas que geram valores representativos de propriedades estatísticas simples do par de autovetores em análise, permitindo uma avaliação quantitativa da discrepância entre os mesmos. A seguir, são apresentados dois exemplos típicos.

c) O "Modal Scale Factor" (MSF) representa a inclinação da melhor estimativa de linha reta traçada sobre os pontos plotados pela comparação dos autovetores (note que não indica a qualidade do ajuste dos valores obtidos com a reta).

$$MSF(x, a) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_x)_j (\phi_a)_j^*}{\sum_{j=1}^n (\phi_a)_j (\phi_a)_j^*} \quad (6.1)$$

d) O "Modal Assurance Criterion" (MAC) indica o desvio quadrático mínimo dos pontos obtidos com a linha reta, não indicando o tipo de dispersão (randômica ou sistemática).

$$MAC(a, x) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\phi_x)_j (\phi_a)_j^* \right|^2}{\left( \sum_{j=1}^n (\phi_x)_j (\phi_x)_j^* \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^n (\phi_a)_j (\phi_a)_j^* \right)} \quad (6.2)$$

ou

$$\left[ MAC(\{\phi_a\}_j, \{\phi_x\}_k) \right] = \frac{\left| \{\phi_a\}_j^t \{\phi_x\}_k \right|^2}{\{\phi_a\}_j^t \{\phi_a\}_j \{\phi_x\}_k^t \{\phi_x\}_k} \quad (6.3)$$

Gerando uma matriz  $m_a \times m_x$ , onde  $m_a$  é o número de modos teóricos e  $m_x$  é o número de modos experimentais considerados.

Na prática, tem-se que se os autovetores obtidos pelas duas abordagens são idênticos  $MSF = MAC = 1$ . Uma matriz graficando os valores de MAC entre todos os autovetores teóricos e experimentais indica claramente quais autovetores são relacionados entre si. Valores baixos de MAC são atribuídos aos seguintes fatores usuais: não linearidades na estrutura, ruído nos dados, modelo teórico inadequado ou autovetores não correlacionados.

Segundo Wright et al [38], mesmo em estruturas complexas (no caso uma barragem de usina hidroelétrica) o uso desta técnica permite a avaliação da qualidade do modelo analítico.

### 6.2.1.3) Comparação de propriedades "espaciais":

Para localizar onde se concentram erros no modelo analítico, utiliza-se os seguintes métodos:

Verificar amplitude dos elementos das matrizes erro definidas abaixo:

$$[E_m] = [M_a] - [M_x] \quad (6.4)$$

$$[E_k] = [K_a] - [K_x] \quad (6.5)$$

Neste caso, o modelo experimental deve ser capaz de descer ao nível espacial e apresentar as matrizes  $[M_x]$  e  $[K_x]$  completas, considerando todos os modos existentes no modelo (igual ao número de graus de liberdade; na prática, raramente passíveis de obtenção).

a) Comparação das Matrizes Pseudo Inversas de Massa e Rigidez.

Autovalores e autovetores podem ser combinados em um único conjunto de dados que podem ser comparados relacionando vários modos simultaneamente [39].

Para um sistema completamente definido por "n" graus de liberdade temos "n" autovalores e "n" autovetores. No caso de autovetores normalizados pela massa, temos as relações:

$$[\Phi]_n^T [M]_n [\Phi]_n = [I]_n \quad (6.6a)$$

$$[\Phi]_{nn}^T [K]_{nn} [\Phi]_{nn} = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_r^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (6.6b)$$

onde n é o número total de graus de liberdade no modelo. Rearranjando:

$$[M]_{nn}^{-1} = [\Phi]_{nn} [\Phi]_{nn}^T \quad (6.7)$$

$$[K]_{nn}^{-1} = [\Phi]_{nn} \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \frac{1}{w_r^2} & \\ & & \diagdown \end{bmatrix} [\Phi]_{nn}^T$$

(6.8)

onde:  $[M]^{-1}$  - matriz inversa de massa do sistema

$[K]^{-1}$  - matriz inversa de rigidez do sistema

Caso tenha-se apenas  $m$  modos considerados na análise, porém sendo o autovetor completo (vetor  $n \times 1$ ), obtêm-se a matriz modal reduzida  $[\Phi^R]_{n \times m}$ . Para o caso de considerar-se apenas um modo temos o vetor  $\{\phi^R\}_{n \times 1}$ .

Portanto, para apenas um modo, tem-se:

$$[M]_{nn}^{*-1} = \{\phi^R\}_{n1} \{\phi^R\}_{1n}^T$$

(6.9)

$$[K]_{nn}^{*-1} = \{\phi^R\}_{n1} \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \frac{1}{w_1^2} & \\ & & \diagdown \end{bmatrix} \{\phi^R\}_{1n}^T$$

(6.10)

onde:  $[M]^{*-1}$  - pseudo matriz inversa de massa.

$[K]^{*-1}$  - pseudo matriz inversa de rigidez.

Uma pseudo matriz tem as mesmas dimensões que a matriz completa (ou seja,  $n \times n$ ) mas com elementos diferentes, pois seja para a matriz de rigidez:

$$[K]_{nn}^{*-1} = [\Phi^R]_{nm} \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \frac{1}{w_R^2} & \\ & & \diagdown \end{bmatrix} [\Phi^R]_{mn}^T$$

(6.11)

O termo "pseudo" é aplicado para a matriz quadrada ( $n \times n$ ) obtida com o uso de matriz de autovetores retangular ( $n \times m$ ).

Devido ao fato de que  $m < n$ , o "rank" da pseudo matriz inversa é  $m$ , portanto deverá haver colunas e linhas que são combinações lineares das demais, tornando a pseudo matriz singular. No caso de considerar-se um modo apenas ( $m=1$ ) pode-se verificar facilmente esta afirmação:

$$\begin{aligned} \text{Seja: } \{\Phi\}_{n1} &= \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \\ \text{Tem-se: } \left[ \overset{*}{K} \right]_{nn}^{-1} &= \{\Phi^R\}_{n1} \frac{1}{w_0^2} \{\Phi^R\}_{1n}^T \\ &= \frac{1}{w_0^2} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} \left\{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n \right\}^T \\ &= \frac{1}{w_0^2} \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 & \cdots & \phi_1 \phi_n \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 & \cdots & \phi_2 \phi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_n \phi_1 & \phi_n \phi_2 & \cdots & \phi_n \phi_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Observa-se que as linhas e colunas da matriz são relacionadas entre si (por exemplo o fator comum na primeira coluna é  $\phi_1$  e na segunda é  $\phi_2$ ). Portanto, o "rank" da matriz é um. Devido à dependência das colunas e linhas, o determinante da matriz é nulo e ela não pode ser invertida de maneira usual.

Para o caso de matriz modal reduzida  $[\Phi^R]_{nm}$ , tem-se:

$$\left[ \overset{*}{M} \right]_{nn}^{-1} = [\Phi^R]_{nm} [\Phi^R]_{mn}^T \quad (6.13)$$

$$\left[ \overset{*}{K} \right]_{nn}^{-1} = [\Phi^R]_{nm} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \frac{1}{w_1^2} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} [\Phi^R]_{mn}^T \quad (6.14)$$

Estas relações fornecem um meio para comparar propriedades modais analíticas e experimentais da seguinte forma:

$$[E_m]_{nn} = [M_x^*]_{nn}^{-1} - [M_a^*]_{nn}^{-1} \quad (6.15)$$

$$[E_k]_{nn} = [K_x^*]_{nn}^{-1} - [K_a^*]_{nn}^{-1} \quad (6.16)$$

Onde  $[E_m]$  e  $[E_k]$  são as matrizes erro das pseudo matrizes inversas de massa e rigidez respectivamente.

Em termos de propriedades modais, tem-se:

$$[E_m]_{nn} = [\Phi_x^R]_{nm} [\Phi_x^R]^T_{mn} - [\Phi_a^R]_{nm} [\Phi_a^R]^T_{mn} \quad (6.17)$$

$$[E_k]_{nn} = [\Phi_x^R]_{nm} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \frac{1}{w_x} & \\ & R & \backslash \end{bmatrix}_{mm} [\Phi_x^R]^T_{mn} - [\Phi_a^R]_{nm} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \frac{1}{w_a} & \\ & R & \backslash \end{bmatrix}_{mm} [\Phi_a^R]^T_{mn} \quad (6.18)$$

para  $n$  graus de liberdade e  $m$  modos e autovalores.

As matrizes erro podem ser plotadas em gráficos tridimensionais para facilitar a visualização dos elementos onde ocorrem as maiores discrepâncias. Caso o objetivo seja o de apenas identificar os elementos com maiores discrepâncias entre as pseudo matrizes inversas, o uso do valor absoluto dos elementos das matrizes facilita a análise visual.

O resultado obtido com esta metodologia depende grandemente do número de modos ( $m$ ) considerados para a comparação. No caso de todos os modos do modelo serem considerados ( $m=n$ ), a magnitude dos elementos das matrizes indicam a correção a ser feita no modelo. No caso extremo de ser usado apenas um modo ( $m=1$ ), temos que esta técnica apresentará a discrepância dos modelos em relação a apenas este modo considerado, sendo as correções indicadas válidas apenas para adequar o modelo teórico ao modo experimental usado e provavelmente não serão corretas em relação aos modos desconhecidos, sendo desprovidas de representatividade física com a estrutura real.

Por fim, Sidhu [39] demonstra que esta técnica pode somente ser usada para comparar

propriedades modais e não identifica áreas de modelamento deficiente na estrutura em análise, fornecendo um indicativo da discrepância entre os modelos teóricos e experimental ( $[E]$  tende a ser uma matriz nula quando os modelos são idênticos).

b) Usando Matrizes de Massa e Rigidez.

Devido à dificuldade na interpretação e aplicação dos resultados obtidos em a), tem-se que a mesma derivação para matrizes de massa e rigidez é mais útil. A simples inversão do resultado obtido em a) não é exequível por serem estas matrizes singulares, exceto no caso raro de considerar-se um número idêntico de modos e graus de liberdade no modelo.

Por definição:  $[E_k] = [K_x] - [K_a]$

donde:

$$[K_x]^{-1} = ([I] + [K_a]^{-1}[E_k]^{-1})[K_a]^{-1} \quad (6.19)$$

expandindo em uma série:

$$[K_x]^{-1} = [K_a]^{-1} - [K_a]^{-1} \cdot [E_k] \cdot [K_a]^{-1} + ([K_a]^{-1} \cdot [E_k])^2 [K_x]^{-1} + \dots \quad (6.20)$$

Caso se considere as divergências entre as matrizes de rigidez teórica e experimental pequenas (matriz erro pequena), tem-se que os termos de terceira e maior ordem podem ser negligenciados:

$$[E_k] = [K_a] \cdot ([K_a]^{-1} - [K_x]^{-1}) \cdot [K_a] \quad (6.21)$$

Segundo Sidhu et al [40], a única matriz conhecida a princípio é  $[K_a]$  proveniente da análise teórica e deve ser reduzida para a dimensão da matriz de rigidez experimental (ordem n) através de uma redução de Guyan [41], obtendo  $[K_a^R]_{n \times n}$ . A matriz  $[K_x]^{-1}$  deve ser obtida, na prática, por:

$$[K_x]_{n \times n}^{-1} = [\Phi_x^R]_{n \times m} \left[ \begin{array}{c} \diagdown \\ \frac{1}{W_r^2} \\ \diagup \end{array} \right]_{m \times m} [\Phi_x^R]^T_{m \times n} \quad (6.22)$$

onde:  $[\Phi_x^R]$  : autovetor normalizado em relação à massa reduzida



$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \frac{1}{w_r^2} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} : \text{matriz diagonal com autovalores experimentais invertidos}$$

m : número de modos medidos

n : número de DOF's medidos

donde:

$$[E_k]_{n \times n} = [K_a^R]_{n \times n} \left( [K_a]_{n \times n}^{-1} - [K_x]_{n \times n}^{-1} \right) [K_a^R]_{n \times n} \quad (6.23)$$

O mesmo procedimento é aplicável à matriz massa:

$$[E_m] = [M_x] - [M_a]$$

donde:

$$[M_x]^{-1} = \left( [I] + [M_a]^{-1} [E_m]^{-1} \right) [M_a]^{-1} \quad (6.24)$$

obtendo:

$$[E_m]_{n \times n} = [M_a^R]_{n \times n} \left( [M_a]_{n \times n}^{-1} - [M_x]_{n \times n}^{-1} \right) [M_a^R]_{n \times n} \quad (6.25)$$

Plotando a matriz erro pode-se observar onde no modelo tem-se a maior discrepância entre as abordagens e, no caso extremo de considerar-se todos os graus de liberdade e modos da estrutura, tem-se o valor da correção que deve ser executada. Sidhu et al [40] mostra que o uso de um número de nodos e modos inferior ao existente na estrutura na análise teórica incorre em aproximações que reduzem grandemente a precisão e validade desta comparação, servindo, no entanto, ainda como bom indicativo da região no modelo onde ocorrem maiores discordâncias. É interessante avaliar diferentes combinações de autovetores para esta análise e observar os gráficos da matriz erro para cada uma, utilizando-se todas as informações possíveis para formar uma conclusão mais abrangente.

### 6.2.2) Primeira Geração: baseados em propriedades modais.

Para a correção de modelos via propriedades modais, têm-se as duas metodologias

básicas:

### 6.2.2.1) Propriedades de ortogonalidade dos modos em relação à massa.

O uso da propriedade de ortogonalidade dos modos indica que, se modos normalizados pela massa forem usados, tem-se:

$$[\Phi_x]^T [M_a] [\Phi_x] = [\delta_x] \cong [I] \quad (6.25)$$

Sendo [I] a matriz identidade.

O uso dos mesmos nodos para a malha de discretização teórica e experimental é necessário para possibilitar esta avaliação, sendo necessário usar uma matriz de massa teórica condensada caso o número de pontos medidos não seja o mesmo dos nodos do modelo teórico.

a) Correção do autovetor.

Caso seja necessário um ajuste no modelo teórico (considerando a análise experimental uma boa aproximação da realidade), temos que, segundo Baruch [42] e Targoff [43], para pequenas correções nos modelos:

$$[\Phi'_x] = [\Phi_x] \left( [\Phi_x]^T [M_a] [\Phi_x] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.26)$$

Nesta abordagem, a matriz de massa teórica é considerada correta (por ser relativamente fácil de obtenção analítica) e é essencial incorporar todos os nodos do autovetor em análise.

b) Ajuste da matriz de rigidez teórica:

Seguindo esta linha de raciocínio, tem-se que a matriz de rigidez teórica provavelmente apresenta erros que podem ser corrigidos com o uso dos autovetores obtidos na etapa anterior, ou seja, a obtenção da matriz de rigidez que, junto com a matriz de massa teórica, gera os autovalores medidos e autovetores otimizados.

$$[K'_a] = [M_a] [\Phi'_x] \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ \frac{1}{w_x^2} \\ \backslash \end{array} \right] [\Phi'_x]^T [M_a] \quad (6.27)$$

### 6.2.2.2) Matriz erro do sistema.

O objetivo desta abordagem é identificar regiões no modelo onde têm-se discrepâncias sensíveis entre as abordagens teórica e experimental. Para tal, existem duas abordagens:

a) usando matrizes inversas de massa e rigidez:

$$[K] = [\Phi]^{-T} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \frac{1}{w_r^2} & \\ & & \backslash \end{bmatrix} [\Phi]^{-1} \quad (6.28)$$

$$[M] = [\Phi]^{-T} [\Phi]^{-1} \quad (6.29)$$

donde  $\{\phi\}_{r_{nx1}} \{\phi\}_{r_{1xn}}^T = \{A_r\}_{nxn}$   
 $\frac{1}{w_r^2} \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T = \{B_r\}_{nxn}$

donde derivam-se as matrizes erro:

$$[E_a] = [A_x] - [A_a] \quad (6.30)$$

$$[E_b] = [B_x] - [B_a] \quad (6.31)$$

Graficando estes valores podem-se identificar regiões no modelo onde um refinamento ou revisão do modelo trará benefícios para aumentar a qualidade do resultado final.

Segundo Ewins et al [44], a matriz de rigidez analítica  $[K_a]$  é mais vulnerável a erros devido às simplificações inerentes à abordagem teórica, sendo ela merecedora de atenção especial no processo de correção. Apesar disto, caso existam erros de modelamento, tanto na matriz de rigidez  $[K_a]$  como na de massa  $[M_a]$ , deve-se corrigir ambas sob pena de que o resultado da correção efetuada sobre apenas uma delas seja um modelo otimizado não refletindo a realidade física da estrutura.

Inicialmente deve-se definir o que seria considerado um bom modelo, possibilitando, desta forma, estabelecer metas a serem alcançadas com o estudo.

Pode-se considerar que o modelo ideal deveria apresentar as seguintes características:

- a) representa, de forma correta, as conectividades físicas
- b) os autovetores analíticos concordam com os experimentais
- c) deve prever corretamente os modos não medidos experimentalmente.

Segundo Ewins et al [44], a condição mínima que um modelo válido deve respeitar é a condição b), sendo ideal que, baseado na condição a), a imposição da condição b) gere um modelo que atenda a condição c).

Uma premissa usualmente adotada em processos de otimização do modelo analítico é que os maiores erros existentes no modelo são localizados, sendo que a correção destes erros fornece uma grande melhoria na qualidade do modelo.

Uma característica deste processo de otimização é que ele não presume ou exige que a matriz de massa analítica  $[M_a]$  seja correta para melhorar a matriz de rigidez  $[K_a]$ , usando um grupo de autovetores medidos como base para a otimização. A mesma afirmação pode ser feita para o processo de otimização da matriz de massa  $[M_a]$ .

Devido à limitação prática no número de autovetores obtidos na abordagem experimental, tem-se que o número de autovetores obtidos ( $m_x$ ) é menor que o número de graus de liberdade ( $n_x$ ) considerados.

No caso crítico de ter-se apenas um modo medido, ainda assim pode ser executada uma otimização no modelo utilizando uma relação conhecida entre as matrizes do modelo e este modo:

$$[E_k][\Phi_x] = [M_a][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_{rx}^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} - [K_a][\Phi_x] \quad (6.32)$$

ou:

$$[E_k]([\Phi_x][\Phi_x]^T) = [M_a][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_{rx}^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} [\Phi_x]^T - [K_a]([\Phi_x][\Phi_x]^T) \quad (6.33)$$

onde  $[\Phi_x]$  é a matriz modal incompleta experimental.

No caso de ter-se apenas o autovetor  $\{\phi_x\}$ , tem-se a seguinte relação:

$$[E_k]\{\phi_x\} = [M_a]\{\phi_x\}w_x^2 - [K_a]\{\phi_x\} \quad (6.34)$$

ou:

$$[E_k](\{\phi_x\}\{\phi_x\}^T) = [M_a]\{\phi_x\} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\phi_x\}^T - [K_a](\{\phi_x\}\{\phi_x\}^T) \quad (6.35)$$

Utilizando-se este processo de forma iterativa obtém-se a quantificação do erro no modelo de forma muito mais satisfatória. Para avaliar se o processo é convergente, deve-se avaliar (utilizando-se os métodos da "geração zero") a coerência existente entre os modelos antes e depois de cada iteração.

### 6.2.3) Segunda geração: baseados em propriedades modais.

O uso da técnica de análise de sensibilidade no problema de autovalores e autovetores permite a identificação da ordem de importância dos graus de liberdade do modelo analítico na definição das propriedades modais da estrutura. Este estudo pode servir de orientação para a adequação do modelo analítico em relação ao experimental, gerando as relações matemáticas abaixo. To et al [45] apresenta uma revisão dos métodos baseados na perturbação de primeira ordem e uma nova abordagem utilizando o método de iteração do quociente de Rayleigh.

#### 6.2.3.1) Método da Minimização das Restrições (CMM - Constraint Minimization Method).

He [46] apresenta este método desenvolvido por Baruch e Bar Itzhack, inicialmente considerando o sistema levemente amortecido, ou seja, com autovetores reais.

O método baseia-se na premissa de que a matriz de massa analítica  $[M_a]$  é correta (ou seja,  $[E_m] = [0]$ ) e a matriz de rigidez otimizada deve satisfazer as seguintes restrições físicas:

$$i) [K_x][\Phi_x] = [M_x][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$ii) [K_x]^T = [K_x] \text{ (simetria).}$$

Para avaliar a diferença entre a matriz de rigidez teórica  $[K_a]$  e a experimental  $[K_x]$  tem-se a norma Euclidiana:

$$d = \left\| [M_x]^{-\frac{1}{2}} ([K_x] - [K_a]) [M_x]^{-\frac{1}{2}} \right\| \quad (6.37)$$

As restrições físicas são incorporadas, por multiplicadores Lagrangianos, numa função de Lagrange, a qual é minimizada para derivar a matriz de rigidez otimizada  $[K_x]$ :

$$[K_x] = [K_a] - [K_a][\Phi_x][\Phi_x]^T[M_x] - [M_x][\Phi_x][\Phi_x]^T[K_a] + [M_x][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{bmatrix} [\Phi_x]^T[M_x] + [M_x][\Phi_x][\Phi_x]^T[K_a][\Phi_x][\Phi_x]^T[M_x] \quad (6.38)$$

Donde obtêm-se a seguinte definição para a diferença entre matrizes de rigidez analítica e otimizada:

$$[\Delta K] = -[K_a][\Phi_x][\Phi_x]^T[M_x] - [M_x][\Phi_x][\Phi_x]^T[K_a] + [M_x][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{bmatrix} [\Phi_x]^T[M_x] + [M_x][\Phi_x][\Phi_x]^T[K_a][\Phi_x][\Phi_x]^T[M_x] \quad (6.39)$$

Este método apresenta a característica de não requerer os parâmetros modais do modelo analítico, uma vez que ele propõe a otimização da distribuição de rigidez (que é um parâmetro físico) usando diretamente os parâmetros modais experimentais.

Outra característica é sua premissa básica de considerar a matriz de massa analítica correta, o que limita a aplicação prática deste método, e que sua aplicação não é iterativa, ou seja, o uso desta metodologia otimiza o modelo analítico em uma só operação. O uso deste método sempre gera o mesmo resultado, descartando o uso do mesmo de forma iterativa.

Uma metodologia similar foi desenvolvido por Bergman para a otimização da matriz de massa analítica. Pode-se impor a condição de ortogonalidade durante o procedimento de otimização e derivar a matriz de massa otimizada através da minimização da seguinte norma

Euclidiana:

$$d = \left\| [M_a]^{-\frac{1}{2}} ([M_x] - [M_a]) [M_a]^{-\frac{1}{2}} \right\| \quad (6.40)$$

Obtendo a matriz de massa otimizada  $[M_x]$ :

$$[M_x] = [M_a] + [M_a][\Phi_x][m_a]^{-1}([I] - [m_a])[m_a]^{-1}[\Phi_x]^T[M_a] \quad (6.41)$$

onde a matriz  $[m_a]$  é a matriz modal de massa definida por:

$$[m_a] = [\Phi_x]^T[M_a][\Phi_x] \quad (6.42)$$

### 6.2.3.2) Método da Matriz de Erro (Error Matrix Method-EMM) - Comparação de Propriedades Espaciais.

#### 6.2.3.2.1) Descrição do método.

Caso as matrizes completas de rigidez e massa do modelo teórico e do experimental fossem disponíveis, então a diferença entre estas duas matrizes fornece não apenas a correção a ser feita no modelo teórico como indica os graus de liberdade onde os maiores erros ocorrem (onde o modelamento é precário e necessita de melhorias).

Sidhu [39] apresenta a seguinte dedução para o caso da matriz de rigidez.

Seja  $[E_k]$  a matriz erro de rigidez:

$$[E_k] = [K_x] - [K_a] \quad (6.43)$$

$[E_k]$  pode ser apresentada na forma de um gráfico tridimensional onde é fácil visualizar onde ocorrem as maiores discrepâncias entre os modelos e a correção a ser feita.

Na prática, a matriz experimental é raramente completa devido ao grande número de medições necessárias para tal, sendo mesmo tecnicamente inviável medir certos graus de liberdade (rotações e graus de liberdade internos da estrutura). Neste caso, pode-se calcular uma aproximação da matriz erro da seguinte forma:

Sendo  $[K_x]=[K_a]+[E_k]$

(6.44)

Invertendo ambos os lados da igualdade:

$$\begin{aligned} [K_x]^{-1} &= [[K_a]+[E_k]]^{-1} \\ &= \left( [K_a] \left[ [I]+[K_a]^{-1}[E_k] \right] \right)^{-1} \\ &= \left[ [I]+[K_a]^{-1}[E_k] \right]^{-1} [K_a]^{-1} \end{aligned}$$

(6.45)

Considerando que a multiplicação  $([K_a]^{-1}[E_k])$  é pequena, ou seja:

$$\left[ [K_a]^{-1}[E_k] \right]^{\infty} = [0]$$

(6.46)

Pode-se expandir usando uma expansão binomial:

$$\left[ [I]+[K_a]^{-1}[E_k] \right]^{-1} = [I]-[K_a]^{-1}[E_k]+[K_a]^{-1}[E_k]^2-[K_a]^{-1}[E_k]^3+\dots$$

(6.47)

Substituindo na equação (6.45) e pós multiplicando por  $[K_a]^{-1}$ , tem-se:

$$[K_x]^{-1} = [K_a]^{-1} - [K_a]^{-1}[E_k][K_a]^{-1} + [K_a]^{-1}[E_k]^2[K_a]^{-1} - [K_a]^{-1}[E_k]^3[K_a]^{-1} + \dots$$

(6.48)

Caso os modelos apresentem apenas pequenas divergências, ou seja, as potências superiores de  $([K_a]^{-1}[E_k])$  são pequenas quando comparadas com a matriz  $[K_a]$ , temos:

$$[K_x]^{-1} \cong [K_a]^{-1} - [K_a]^{-1}[E_k][K_a]^{-1}$$

(6.49)

ou seja:

$$[K_a]^{-1}[E_k][K_a]^{-1} \cong [K_a]^{-1} - [K_x]^{-1}$$

(6.50)

Pré e pós multiplicando por  $[K_a]$ , tem-se:

$$[E_k] \cong [K_a] \left[ [K_a]^{-1} - [K_x]^{-1} \right] [K_a]$$

(6.51)

Esta equação fornece a matriz erro aproximada  $[E_k]$  em termos das matrizes  $[K_a]^{-1}$ ,  $[K_x]^{-1}$  e  $[K_a]$ .



Nela, a única matriz conhecida a priori é  $[K_a]$ , pois nem sempre é possível invertê-la para obter  $[K_a]^{-1}$  (matriz de rigidez singular), porém é possível obter as pseudo-matrizes  $[K_a^*]^{-1}$  e  $[K_x^*]^{-1}$  conforme já apresentado neste capítulo:

$$[M]_{nn}^* = \{\Phi^R\}_{n1} \{\Phi^R\}_{1n}^T \quad (6.52)$$

$$[K]_{nn}^* = \{\Phi^R\}_{n1} \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ \frac{1}{w_r^2} \\ \backslash \end{array} \right]_{11} \{\Phi^R\}_{1n}^T \quad (6.53)$$

Porém precisa-se da inversa de  $[K_a^*]^{-1} \left( [K_a^*] \right)$ . Como já apresentado, não é possível inverter pseudo matrizes pelos métodos convencionais. Para contornar este problema, é assumido que a pré e pós multiplicação pode ser feita usando-se  $[K_a]$  diretamente conhecida:

$$[E_k]_{nn} \cong [K_a]_{nn} \left[ [K_a^*]_{nn}^{-1} - [K_x^*]_{nn}^{-1} \right] [K_a]_{nn} \quad (6.54)$$

onde:

$$[K_a]_{n \times n}^{-1} \cong [\Phi_a]_{n \times m} \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ w_a^2 \\ \backslash \end{array} \right]_{m \times m}^{-1} [\Phi_a]_{m \times n}^T \quad (6.55)$$

$$[K_x]_{n \times n}^{-1} \cong [\Phi_x]_{n \times m} \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{array} \right]_{m \times m}^{-1} [\Phi_x]_{m \times n}^T \quad (6.56)$$

substituindo em (54), tem-se a expressão da matriz erro de rigidez em termos de parâmetros modais:

$$[E_k] \cong [K_a] \left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \Phi_a \\ \vdots \\ \Phi_n \end{array} \right]_{n \times n} \left[ \begin{array}{c} W_a^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \Phi_a^T \\ \vdots \\ \Phi_n^T \end{array} \right]_{n \times n} - \left[ \begin{array}{c} \Phi_x \\ \vdots \\ \Phi_m \end{array} \right]_{n \times m} \left[ \begin{array}{c} W_x^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right]_{m \times m} \left[ \begin{array}{c} \Phi_x^T \\ \vdots \\ \Phi_m^T \end{array} \right]_{m \times n} \end{array} \right) [K_a] \quad (6.57)$$

Usando a mesma metodologia, obtêm-se para a matriz erro de massa:

$$\text{Por definição: } [E_m] = [M_x] - [M_a]$$

$$\text{Obtêm-se: } [E_m] \cong [M_a] ([M_a]^{-1} - [M_x]^{-1}) [M_a] \quad (6.58)$$

ou, em termos de parâmetros modais:

$$[E_m]_{n \times n} \cong [M_a] \left( \left[ \begin{array}{c} \Phi_a \\ \vdots \\ \Phi_n \end{array} \right]_{n \times m} \left[ \begin{array}{c} \Phi_a^T \\ \vdots \\ \Phi_n^T \end{array} \right]_{m \times n} - \left[ \begin{array}{c} \Phi_x \\ \vdots \\ \Phi_m \end{array} \right]_{n \times m} \left[ \begin{array}{c} \Phi_x^T \\ \vdots \\ \Phi_m^T \end{array} \right]_{m \times n} \right) [M_a] \quad (6.59)$$

Sidhu [39] apresenta em seu trabalho a confirmação que as premissas usadas (matriz erro pequena, uso de pseudo matrizes em lugar das matrizes completas e uso da matriz  $\left[ \begin{array}{c} * \\ K_a \end{array} \right]$  em lugar de  $[K_a]$  na equação (10)) são válidas e obtêm as seguintes propriedades da matriz erro:

a) A matriz erro é aditiva em relação aos modos usados no seu cálculo, ou seja, a matriz erro obtida considerando os modos 1,2 e 3 ( $[E_{1,2,3}]$ ) representa a somatória das matrizes erro obtidas com os modos 1,2 e 3 em separado:

$$[E_{1,2,3}] = [E_1] + [E_2] + [E_3]$$

b) A ordem na qual os modos são considerados no cálculo da matriz erro não influi no seu resultado:

$$[E_{1,2,3}] = [E_{2,3,1}] = [E_{3,2,1}] = [E_{1,3,2}] = \text{etc...}$$

O resultado desta metodologia é dependente do número de modos usados no processo. No caso extremo de considerarmos o mesmo número de modos que os presentes no modelo (número de modos = número de graus de liberdade) obtêm-se na matriz erro resultante não apenas a localização na estrutura dos graus de liberdade onde ocorrem as maiores discrepâncias, como também o valor da correção a ser efetuada. No caso de usar-se um número de modos inferior ao existente, tem-se que o processo força uma adequação do modelo teórico com o experimento exclusivamente em relação aos modos considerados, podendo prejudicar a precisão do modelo em relação aos demais modos e mesmo propor alterações no modelo teórico

desprovidas de base física.

Características básicas deste método:

O processo de melhoria da matriz de rigidez não pressupõe ou necessita que a matriz de massa analítica seja correta ( $[M_a] = [M_x]$ ), valendo a mesma observação em relação à melhoria da matriz de massa, onde não há exigência que  $[K_a]=[K_x]$ . Isto se deve ao fato de que a matriz de rigidez não é determinada usando como referência direta a matriz de massa, mas sim os modos obtidos experimentalmente (embora deva ser observado que ocorre uma relação implícita, pois deriva-se  $[\Phi_a]$  e  $[w_a]$  de  $[M_a]$  e  $[K_a]$ ).

Este método usa matrizes de flexibilidade ( $[K]^{-1}$ ) durante os cálculos, nas quais os modos de baixa frequência dominam e são os usualmente mais fáceis de medir na prática [46].

Este método pode ser usado de forma iterativa para melhorar o resultado da análise até um valor aceitável de discordância entre os modelos.

Segundo He [46], o uso de um conjunto incompleto de modos experimentais ocasiona a perda das características de conectividade do sistema e torna a localização de erro no sistema menos clara, embora ela permaneça aceitável se o número de modos usado é suficientemente grande. Para reduzir este efeito negativo, um processo iterativo pode ser adotado com o objetivo de obter uma matriz erro de rigidez ou massa cada vez menor, indicando que a matriz teórica melhorada é cada vez mais próxima à matriz experimental. A ilustração deste processo está na figura 6.1.

Como critério de convergência, He propõe vários parâmetros que se baseiam tanto nos parâmetros modais (autovalores e autovetores) como nos parâmetros espaciais (elementos das matrizes de rigidez e massa), dos quais foram selecionados os seguintes:

a) Erro percentual dos autovalores:

$$\frac{\left| \left( (w_x)_p - (w^r)_p \right) \right|}{(w_x)_p} \times 100\%$$

(6.60)

b) Erro percentual do p-ésimo autovetor:

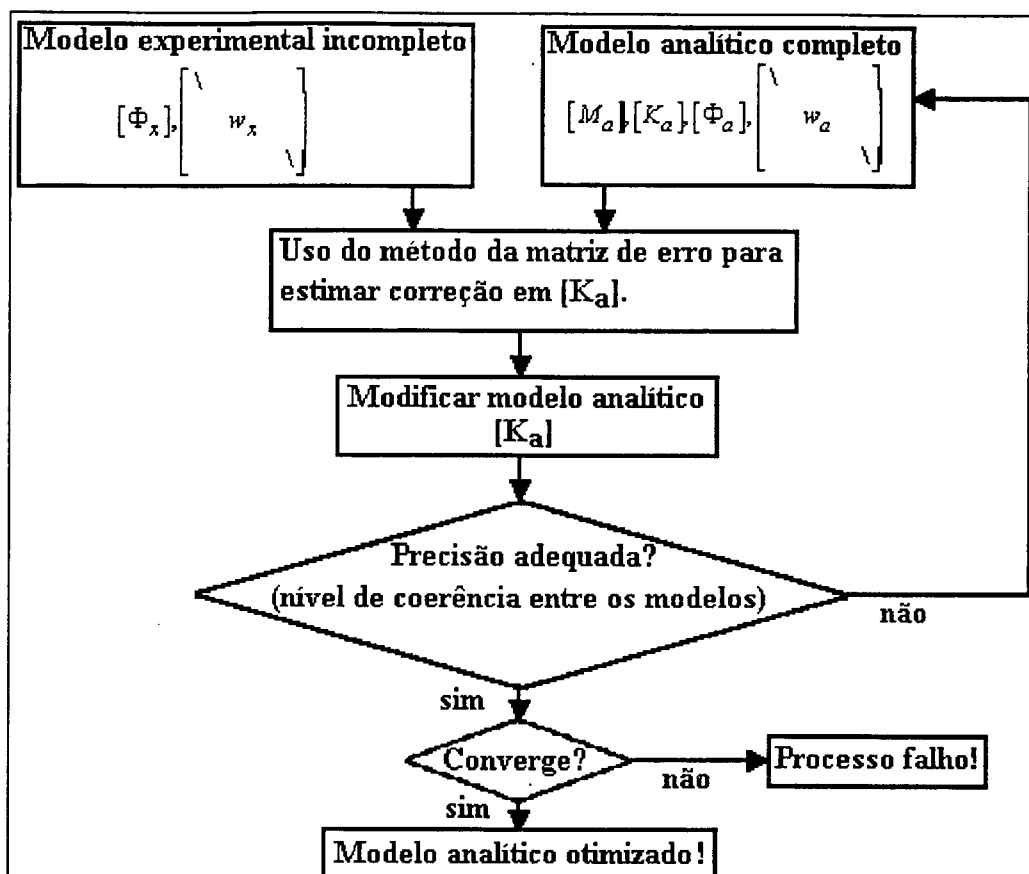


Figura 6.1: Processo iterativo para otimizar modelo analítico.

$$\frac{\left\{ \sum_{q=1}^n \left( |\phi_{pq}|_x - |\phi_{pq}|_r \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\sum_{q=1}^n |\phi_{pq}|_x} \times 100\% \quad (6.61)$$

c) Razão percentual dos elementos das matrizes de rigidez:

$$\frac{(k^r)_{pq}}{(k_x)_{pq}} \times 100\% \quad (6.62)$$

onde r identifica modelo otimizado na r-ésima iteração.

He mostra que o processo iterativo normalmente diverge caso não sejam considerados um número aceitável de modos, se o processo é aplicado com o objetivo de corrigir todo o modelo.

Localização de regiões com modelamento deficiente.

Em seu trabalho, He [46] mostra que o uso das técnicas CMM e EMM, de forma a otimizar o

modelo como um todo, não atinge um sucesso aceitável e o processo iterativo usado para o método EMM não converge caso o modelo experimental não considere quase a totalidade dos modos considerados na abordagem analítica.

Para contornar este problema, é proposto o procedimento de inicialmente identificar os locais no modelo onde ocorrem as maiores discrepâncias, visto que usualmente têm-se erros de modelamento concentrados em regiões que apresentam certos tipos de complexidades (por exemplo, juntas de ligação e mudanças de material).

Para localizar as regiões com maiores erros na matriz de rigidez  $[K_a]$ , apóia-se na premissa que a matriz de massa  $[M_a]$  é adequadamente correta ( $[M_a] = [M_x]$ ).

Por definição:  $[E_k] = [K_x] - [K_a]$  (6.63)

Pós-multiplicando ambos os lados da igualdade pela matriz de autovetores experimental (incompleta):

$$[E_k][\Phi_x] = [K_x][\Phi_x] - [K_a][\Phi_x] \quad (6.64)$$

Apesar de não ser conhecido  $[K_x]$ , tem-se a seguinte relação:

$$[K_x][\Phi_x] = [M_x][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

Como considera-se  $[M_a] = [M_x]$ , tem-se na equação (6.64):

$$[E_k][\Phi_x] = [M_a][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} - [K_a][\Phi_x] \quad (6.66)$$

Pós-multiplicando ambos os lados da equação pela matriz incompleta de autovetores experimental transposta, tem-se:

$$[E_k]([\Phi_x][\Phi_x]^T) = [M_a][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} [\Phi_x]^T - [K_a]([\Phi_x][\Phi_x]^T) \quad (6.67)$$

Devido ao fato da matriz  $[\Phi_x]$  ser incompleta, não pode-se obter a inversa de  $([\Phi_x][\Phi_x]^T)$  para calcular o valor de  $[E_k]$ . Apesar disto, o valor de  $[E_k]([\Phi_x][\Phi_x]^T)$  serve como indicativo de regiões com modelamento deficiente.

A equação (6.67) pode ser transposta gerando a equação:

$$([\Phi_x][\Phi_x]^T)[E_k] = [\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} [\Phi_x]^T [M_a] - ([\Phi_x][\Phi_x]^T)[K_a] \quad (6.68)$$

As equações (6.67) e (6.68) estão representadas na figura 6.2, onde uma região hipotética de modelamento deficiente é representada pela área achurada. É fácil de verificar que a equação (6.67) define as linhas onde ocorrem erro de modelamento, enquanto a equação (6.68) define as colunas referentes a erros de modelamento. Multiplicando-se estas duas equações obtêm-se a indicação correta da área em questão pela sobreposição das linhas e colunas indicadas (figura 6.3).

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{achurada} \\ [E_k] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} [\Phi_x][\Phi_x]^T \\ \text{achurada} \\ [E_k] \end{bmatrix} \end{bmatrix} [\Phi_x][\Phi_x]^T = \begin{bmatrix} \text{achurada} \\ \text{achurada} \end{bmatrix}$$

Figura 6.2: Ilustração do processo de localização de região mal modelada.

$$\begin{bmatrix} \text{achurada} \\ \text{achurada} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{achurada} \\ \text{achurada} \end{bmatrix}$$

Figura 6.3: Ilustração da localização final de região mal modelada.

Toda esta metodologia pode ser aplicada para o caso de se considerar um autovalor isolado  $\{\phi_x\}_i$  (referente ao i-ésimo modo medido). Para tanto, tem-se da equação (6.64):

$$[E_k]\{\phi_x\}_i = [K_x]\{\phi_x\}_i - [K_a]\{\phi_x\}_i \quad (6.69)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtêm-se:

$$[E_k] \left( \{\phi_x\} \{\phi_x\}^T \right) = w_x^2 [M_a] \{\phi_x\} \{\phi_x\}^T - [K_a] \left( \{\phi_x\} \{\phi_x\}^T \right) \quad (6.70)$$

Da equação (6.70) conclui-se que apenas um modo medido é necessário para efetuar a localização de regiões modeladas de maneira deficiente, desde que este modo seja sensível às divergências  $[E_k]$  que se deseja corrigir.

Uma forte vantagem deste método é sua independência quanto ao nível de discrepância entre a abordagem analítica e experimental ( $[E_k]$  não deve necessariamente ser pequeno).

Uma desvantagem é que este processo não pode ser usado iterativamente, pois nem mesmo pode ser usado para otimizar a matriz teórica  $[K_a]$ , sendo o seu objetivo puramente de indicar regiões onde deve-se usar um outro método para otimizar  $[K_a]$ . Cabe salientar que pode-se usar mais de um modo ou combinação dos mesmos para obter maior precisão e confiança na localização destes erros na matriz  $[K_a]$ .

De forma análoga, pode-se desenvolver um método similar para o caso da matriz de massa analítica  $[M_a]$ , apesar de que na prática são raros os casos onde as incertezas envolvidas na matriz  $[M_a]$  são superiores às referentes à matriz  $[K_a]$ .

Neste caso, a premissa assumida é de que a matriz de rigidez analítica é correta (ou seja,  $\{K_a\} = \{K_x\}$ )

$$\text{Definindo a matriz erro de massa: } [E_m] = [M_x] - [M_a] \quad (6.71)$$

Analogicamente ao caso desenvolvido para  $[E_k]$ , obtêm-se:

$$[E_m] \left( \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi_x \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{array} \right] \left[ \Phi_x \right]^T \end{array} \right) = [K_a] \left[ \Phi_x \right] \left[ \Phi_x \right]^T - [M_a] \left( \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi_x \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{array} \right] \left[ \Phi_x \right] \end{array} \right) \quad (6.72)$$

$$\left( \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi_x \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{array} \right] \left[ \Phi_x \right]^T \end{array} \right) [E_m] = \left[ \Phi_x \right] \left[ \Phi_x \right]^T [K_a] - \left( \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi_x \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{array} \right] \left[ \Phi_x \right]^T \end{array} \right) [M_a] \quad (6.73)$$

Donde obtêm-se, para o caso de um único modo:

$$[E_m](w_x^2\{\phi_x\}\{\phi_x\}^T) = [K_x]\{\phi_x\}\{\phi_x\}^T - [M_a](w_x^2\{\phi_x\}\{\phi_x\}^T) \quad (6.74)$$

Para o caso genérico de se necessitar a otimização tanto da matriz de massa analítica  $[M_a]$  como a matriz de rigidez analítica  $[K_a]$ , tem-se que as premissas  $[M_a]=[M_x]$  ou  $[K_a]=[K_x]$  não são mais válidas. Para contornar este problema, é usada a definição de  $[E_m]$  (equação (6.71)) na equação (6.66), obtendo:

$$[E_k][\Phi_x] = ([M_a] + [E_m])[\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} - [K_a][\Phi_x] \quad (6.75)$$

Pós-multiplicando a equação pela transposta da matriz experimental de autovetores obtêm-se:

$$\begin{aligned} [E_k](\{\Phi_x\}[\Phi_x]^T) - [E_m] \left( \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\Phi_x\}^T \right) &= \\ = [M_a] \left( \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \{\Phi_x\}^T \right) - [K_a](\{\Phi_x\}[\Phi_x]^T) & \end{aligned} \quad (6.76)$$

Na equação (6.76) tem-se a coexistência de  $[E_k]$  e  $[E_m]$ , cujas influências devem ser separadas.

A grande vantagem deste procedimento é identificar regiões no modelo analítico onde melhorias localizadas trazem grandes benefícios ao modelo como um todo, evitando executar alterações em regiões onde o modelamento é adequado e respeitando a conectividade física no modelo, pois apenas elementos com representação física no modelo são alterados. A implementação da correção do modelo passa pela quantificação das matrizes  $[E_k]$  e  $[E_m]$ .

Para o caso de considerar-se  $[M_a]=[M_x]$ , obtêm-se uma metodologia para estimar  $[E_k]$  da seguinte forma:

- utilizando-se um modo isolado  $\{\phi_x\}_i$ , a equação (6.66) torna-se:

$$[E_k]\{\phi_x\}_i = (w_x^2)_i [M_x]\{\phi_x\}_i - [K_a]\{\phi_x\}_i \quad (6.77)$$



Este sistema de equações, segundo He [6.11], pode ser resolvido para  $\beta$  regiões contíguas identificadas com erro de modelamento relevante se forem usados  $\beta$  modos experimentais, tornando o sistema de equações referentes a estas regiões determinadas.

No caso de existirem regiões não contíguas, ou seja, independentes, pode-se resolver cada grupo de regiões contíguas individualmente com os mesmos modos experimentais. Por exemplo, para o caso onde temos  $\gamma$  regiões identificadas com erro que não apresentam inter-relação física direta no modelo, pode-se utilizar apenas um modo medido  $\gamma$  vezes para resolver cada equação de forma isolada.

O mesmo procedimento pode ser adotado para o caso de desejar a otimização de  $[M_a]$  considerando  $[K_a]=[K_x]$ , porém esta situação é muito rara na prática.

Com o uso da identificação das regiões de erro, pode-se usar as técnicas CMM e EMM de forma a utilizar apenas as melhorias indicadas para regiões identificadas pelo método como sendo carentes de melhorias, descartando as outras melhorias propostas como erros inerentes ao uso de poucos modos para a otimização do modelo analítico. Desta forma, pode-se adotar um processo iterativo com o cálculo de nova  $[K_a]$  a cada iteração incluindo as melhorias propostas. He [46] mostra o sucesso deste método.

Enfim, pode-se concluir que o processo iterativo ocasiona uma melhoria na relação entre os modos teóricos e os experimentais usados no processo, apesar da correção perder significado físico e a relação entre os modos não considerados usualmente piorar.

#### **6.2.4) Terceira Geração: baseados em funções de resposta.**

Métodos baseados em propriedades modais apresentam algumas limitações, tais como:

a) dificuldade de comparar modos reais e completos  $[\Phi_a]$  com modos complexos, incompletos e não completamente corretos  $[\Phi_x]$ .

b) necessita da expansão dos modos incompletos e dos dados para determinar as variáveis desconhecidas nas equações.

c) existem mais variáveis desconhecidas que conhecidas nas fórmulas de determinação dos fatores de correção; tendendo a gerar um sistema de equações subdeterminada.

Estas limitações orientaram a criação dos métodos de 3ª geração, onde utilizam-se funções de resposta para otimizar o modelo dinâmico. Algumas vantagens são:

a) funções de resposta são dados mais próximos aos realmente medidos na abordagem experimental, sendo, portanto, menos contaminados por aproximações decorrentes do método de análise modal.

b) premissas sobre o amortecimento não são necessárias.

c) comparação de modos não é necessária.

d) como sempre existe uma grande quantidade de dados (curvas de resposta medidas), as fórmulas não precisam permanecer subdeterminadas.

A formulação básica do método Response Function Method (RFM) reduz-se a:

$$[R] \{p\} = \{EH(w)\} \quad (6.78)$$

onde  $[R]$ : contém propriedades das respostas em frequência do modelo analítico e do experimental.

$\{EH(w)\}$ : divergência entre as abordagens

$\{p\}$ : contém os fatores de correção ( $E_{mj}, E_{kj}$ ).

Lin e Ewins [47] apresentam a derivação deste formulário, baseados na seguinte identidade matemática:

$$[[A]+[B]]^{-1} = [A]^{-1} - [[A]+[B]]^{-1}[B][A]^{-1} \quad (6.79)$$

onde  $[A]$  e  $[B]$  são matrizes complexas não singulares.

A verificação desta equação pode ser feita pré-multiplicando ambos os lados por  $([A] + [B])$ :

$$[I] = [I] + [B][A]^{-1} - [B][A]^{-1} = [I] \quad (6.80)$$

Considerando que  $[A]$  seja a matriz de impedância analítica do sistema  $[Z_a(w)]$  e que  $[A] + [B]$  seja a matriz de impedância experimental do sistema  $[Z_x(w)]$ , obtêm-se:

$$[Z_x(w)]^{-1} = [Z_a(w)]^{-1} - [Z_x(w)]^{-1}([Z_x(w)] - [Z_a(w)])[Z_a(w)]^{-1} \quad (6.81)$$

Reescrevendo em forma de matriz de erro de receptância e impedância, tem-se:

$$[E\alpha(w)] = [\alpha_x(w)] - [\alpha_a(w)] = -[\alpha_x(w)][EZ(w)][\alpha_a(w)] \quad (6.82)$$

Caso uma coluna  $\{\alpha_x(w)\}_i$  (ou linha, uma vez que  $[\alpha_x(w)]_i$  é simétrica) completa tenha sido medida:

$$\{\alpha_a(w)\}_i^T - \{\alpha_x(w)\}_i^T = \{\alpha_x(w)\}_i^T [EZ(w)][\alpha_a(w)] \quad (6.83)$$

Na otimização de modelo analítico tem-se que a conectividade física do modelo analítico deve ser respeitada e mantida durante o processo, ou seja, os erros podem apenas ocorrer onde os elementos da matriz de massa ou rigidez são diferentes de zero, sendo que geralmente a conectividade física da matriz de amortecimento  $[H]$  é assumida como sendo a mesma da matriz de rigidez  $[K]$ . Substituindo  $[E_z(w)]$  na equação (6.83) em termos de  $[Em]$ ,  $[Ek]$  e  $[H]$ , e efetuando a sua transposta, obtêm-se:

$$\{\alpha_a(w)\}_i - \{\alpha_x(w)\}_i = [\alpha_a(w)](-w^2[Em] + [Ek] + i[H])\{\alpha_x(w)\}_i \quad (6.84)$$

Considerando a conectividade física do modelo analítico e definidas as mudanças nas variáveis da matriz de massa como  $E_{mr}$  (sendo  $r=1, L_1$ ; onde  $L_1$  é o número total de variáveis independentes na matriz de massa que podem ser não nulas), na matriz de rigidez como  $E_{ks}$  ( $s=1, L_2$ ) e na matriz de amortecimento como  $h_s$  ( $s=1, L_2$ ), pode-se mostrar que cada elemento  $b_j(w)$  ( $j=1, N$ ; onde  $n_a$  é o número total de graus de liberdade no modelo analítico) da solução direita (right hand solution) da equação (6.84), a qual é um vetor, pode ser expresso como uma combinação linear das mudanças de todas as variáveis:

$$b_j(w) = \sum_{r=1}^{L_1} C_m^r(w) E_{m_r} + \sum_{s=1}^{L_2} C_k^s(w) E_{k_s} + \sum_{s=1}^{L_2} C_h^s(w) h_s = \{C_j(w)\}^T \{P\} \quad (6.85)$$

Onde  $\{C_j(w)\}$  é o conhecido vetor de coeficientes formado com o uso de  $\{\alpha_x(w)\}$  e  $[\alpha_a(w)]$  e  $\{P\}$  é um vetor desconhecido de mudanças nas variáveis. Para uma frequência

específica  $w$ ,  $b_j=b_j(w)(j=1,N)$  são conhecidas como as diferenças entre as receptâncias analítica e experimental da coordenada  $x_j$  (com excitação sendo aplicada em  $x_1$ ). Portanto, da equação (6.84) pode-se formar as seguintes equações algébricas lineares em termos do desconhecido vetor de mudanças nas variáveis  $\{P\}$ :

$$[C(w)]\{P\} = \{B(w)\} \quad (6.86a)$$

onde:

$$[C(w)] = \begin{bmatrix} \{C_1(w)\}^T \\ \{C_2(w)\}^T \\ \vdots \\ \{C_N(w)\}^T \end{bmatrix}, \{P\} = \begin{bmatrix} Em_1 \\ \vdots \\ Em_{L_1} \\ Ek_1 \\ \vdots \\ Ek_{L_2} \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{L_2} \end{bmatrix} e \{B(w)\} = \begin{bmatrix} b_1(w) \\ b_2(w) \\ \vdots \\ b_N(w) \end{bmatrix}$$

Na presença de amortecimento no sistema,  $[C(w)]$  e  $\{B(w)\}$  tornam-se complexos enquanto  $\{P\}$  é real, obtendo:

$$\begin{bmatrix} \text{Re}([C(w)]) \\ \text{Im}([C(w)]) \end{bmatrix} \{P\} = \begin{Bmatrix} \text{Re}(\{B(w)\}) \\ \text{Im}(\{B(w)\}) \end{Bmatrix} \quad (6.86b)$$

A equação (6.86a)(ou (6.86b)) é obtida usando dados de receptância analítica e experimental de uma frequência específica.

Quando usamos dados de  $j$  frequências distintas, o número total de equações lineares algébricas torna-se  $j$  vezes maior, tornando a equação (6.86a)(ou (6.86b)) um conjunto sobre-determinado de equações algébricas. Com o objetivo de obter  $\{P\}$ , a melhor técnica numérica

disponível é a Decomposição do Valor Singular (SVD). Uma vez que nenhuma aproximação foi feita durante a formulação do problema,  $\{P\}$  pode ser resolvida diretamente. Uma vez obtido  $\{P\}$ , utilizando-se o modelo analítico, pode-se determinar de forma única o sistema otimizado de matrizes. Deve-se observar que nenhuma consideração sobre a magnitude das matrizes erro  $[E_m]$  e  $[E_k]$  foi feita e não existe, conseqüentemente, nenhuma restrição quanto à amplitude na discrepância entre os dois modelos. Prova disto é o excelente resultado obtido com o uso desta técnica com uma discrepância de 25% entre as matrizes  $[M_x]$  e  $[M_a]$ ,  $[K_x]$  e  $[K_a]$  em um sistema de 8 graus de liberdade apresentado no trabalho de Lin et al [47], salientam que o uso de mais de um autovetor não promoveu melhoria significativa nos resultados.

Caso o conjunto de coordenadas medidas experimentalmente seja menor que o usado no modelo analítico (modelo incompleto), deve-se adotar o uso de processo iterativo para a convergência do processo a resultados corretos.

Considerando que as matrizes erro de massa e de rigidez do sistema ( $[E_m]$  e  $[E_k]$ ) podem ser expressas pela combinação linear das matrizes de massa e rigidez dos elementos do sistema ( $[m_s]$  e  $[k_s]$  para um  $s$ -ésimo genérico elemento) utilizando-se de fatores de alteração das variáveis de modelamento associadas a cada elemento ( $\beta_s$  e  $\gamma_s$  para um  $s$ -ésimo elemento), tem-se:

$$[E_m] = \sum_{s=1}^{N_1} \beta_s [m_s] \text{ e } [E_k] = \sum_{s=1}^{N_1} \gamma_s [k_s] \quad (6.87)$$

para  $N_1$  elementos do sistema.

Substituindo a seguinte relação:

$$[E_z(w)] = (-w^2[E_m] + [E_k]) \quad (6.88)$$

na equação

$$\{\alpha_a(w)\}_i - \{\alpha_x(w)\}_i = [\alpha_a(w)](-w^2[E_m] + [E_k] + i[H])\{\alpha_x(w)\}_i \quad (6.89)$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} {}_x\alpha_{1i}(w) & {}_a\alpha_{1i}(w) \\ {}_x\alpha_{2i}(w) & {}_a\alpha_{2i}(w) \\ \vdots & \vdots \\ {}_x\alpha_{ni}(w) & {}_a\alpha_{ni}(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(w) & a_{12}(w) & \cdots & a_{1(2.N1)}(w) \\ a_{21}(w) & a_{22}(w) & \cdots & a_{2(2.N1)}(w) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(w) & a_{n2}(w) & \cdots & a_{n(2.N1)}(w) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N1} \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{N1} \end{Bmatrix}$$

(6.90)

Onde, para uma específica frequência  $w$ ,  $[A(w)]$  e  $\{\alpha(w)\}$  são conhecidos.

No caso de que as coordenadas experimentais sejam incompletas, utilizando os termos de receptância analíticas  $\{\alpha_a(w)\}_i$  faltantes e deletando as linhas em ambos os lados da equação (6.90) onde  ${}_x\alpha_{ji}(w)$  não forem medidos gera o seguinte sistema de equações lineares algébricas de ordem reduzida:

$$[A(w)] \{P\} = \{E\alpha(w)\}$$

(6.91)

Neste método, devido à liberdade de escolha das frequências cujos valores da curva de resposta em frequência serão usados para a melhoria do modelo analítico, o uso de frequências afastadas das frequências naturais do sistema permite que as influências de vários modos sejam levadas em consideração simultaneamente, rompendo com a dependência de que o modo em análise domine na faixa de frequência utilizada e permite avaliar a influência dos modos fora da faixa de frequências medidas. Devido à facilidade de obter informações em um grande número de frequências (com o uso de excitação impulsiva ou estacionária do tipo ruído de banda larga, por exemplo) tem-se uma grande quantidade de dados que tornam este método sobre determinado em quase todos os casos reais.

Este método não apresenta nenhuma limitação quanto a existência de amortecimento no sistema (magnitude e distribuição), sendo inclusive que as informações decorrentes do amortecimento são fornecidas como subproduto desta análise. Outra consequência desta metodologia é a sua utilidade para analisar estruturas não lineares, pois o uso de informações extraídas diretamente da curva de resposta em frequência evita o uso da técnica de propriedades modais, a qual é baseada em comportamento de estruturas lineares.

### **6.2.5) Quarta Geração - baseados em séries temporais.**

Existe um consenso de que, após o devido domínio dos métodos pertinentes à terceira geração, o próximo passo será a comparação direta de séries temporais obtidas no método experimental (ou resposta impulsiva do sistema  $h(t)$ ) com as obtidas pelo método analítico. Isto exigirá muito da abordagem analítica, uma vez que ela deverá desenvolver os modelos partindo do espacial (distribuição de massa e rigidez na estrutura), passando pelo modal (parâmetros modais:  $w_n$ ,  $[\Phi_n]$ ) até atingir o de resposta (funções de resposta em frequência e no tempo), permitindo a correlação entre todos estes modelos. A maior vantagem destes métodos será o uso dos dados experimentais mais puros e livres de erros: séries temporais que representam o movimento da estrutura medido por sensores eletrônicos, dispensando a execução da transformada de Fourier para o campo da frequência (que já é uma aproximação do valor real, uma vez que, na verdade, os equipamentos disponíveis efetuam a chamada Transformada Rápida de Fourier (FFT) que exige, entre outras coisas, o uso de janelas na amostragem temporal para suavizar efeitos indesejáveis como o "leakage") e todo o processo de ajuste de um modelo linear de vibrações ao fenômeno medido (análise modal experimental).

## **6.3) Particularidades da Otimização de Modelos Analíticos Dinâmicos.**

### **6.3.1) Comparação de autovetores reais e complexos**

Quando existe um nível significativo de amortecimento distribuído de forma não homogênea na estrutura, os autovetores obtidos experimentalmente tornam-se complexos, enquanto a abordagem teórica usualmente desconsidera o amortecimento, gerando apenas autovetores reais. A abordagem básica para contornar a dificuldade de comparar autovetores reais com complexos é de extrair os reais dos complexos para serem comparados diretamente com os obtidos teoricamente. Segundo Ewins et al [44], várias restrições e a impossibilidade de estudar o amortecimento por esta abordagem tornam-na não muito atraente.

Outra abordagem é usar os autovetores complexos diretamente para aprimorar o modelo teórico e construir uma matriz de amortecimento experimental. Uma vez que o amortecimento

encontra-se, via de regra, concentrado em regiões da estrutura (juntas, elementos absorvedores,...) torna-se relativamente fácil localizar e quantificar o seu valor, obtendo uma matriz de amortecimento aceitável que pode ser utilizada no modelo teórico.

Neste caso, o processo de otimização do modelo teórico baseia-se na localização dos erros no modelo teórico e dos elementos mais expressivos de amortecimento na estrutura e posteriormente estimando-os sob a orientação dos resultados de um método de comparação entre os modelos teórico e experimental.

Uma alternativa para a otimização do modelo teórico é o uso das informações acima obtidas para estudar em maior detalhe, refazendo medições de forma mais direcionada e acurada, e revisando o modelo teórico procurando por uma melhor representação da estrutura. Não obstante, cabe lembrar a observação já mencionada feita por Ewins [37] de que a prática de sofisticar este processo de comparação raramente acarreta melhorias sensíveis na análise, sendo mais prático aproveitar a parcela útil desta comparação sob a luz das suas limitações inerentes.

### **6.3.2) Limitações do Modelo Experimental.**

Devido a vários fatores práticos (equipamentos, custos, tempo, viabilidade técnica,...), o modelo obtido com a abordagem experimental normalmente apresenta duas limitações básicas:

a) É incompleto: o número de modos obtidos experimentalmente é menor do que o de modos analíticos, sendo usualmente insuficientes para melhorar o modelo analítico ou mesmo localizar, de forma conclusiva, os erros existentes no modelo analítico.

A prática de se utilizar de processo iterativo para melhorar o processo de correção nem sempre torna-se convergente, sendo interessante o uso da localização, mesmo que dúbia, dos erros no modelo como direcionamento no processo iterativo.

b) É incompatível com o modelo analítico: é comum o uso de um número de graus de liberdade no modelo analítico muito maior do que no experimental para descrever adequadamente a estrutura em análise. A maioria dos processos de melhoria de modelo analítico baseia-se na compatibilidade entre os modelos (mesma malha de discretização da estrutura), existindo basicamente duas abordagens para contornar este problema:



i) Redução do modelo analítico para os graus de liberdade do experimental, utilizando a redução de Guyan [41], a qual preserva a energia potencial do sistema que é governada pela matriz de rigidez e altera a matriz de massa, ou "redução dinâmica" [48], a qual preserva as propriedades de massa (energia cinética do sistema) e altera a matriz de rigidez. Uma abordagem mais completa pode ser feita utilizando-se a matriz de rigidez obtida pela redução de Guyan e a matriz de massa obtida pela redução dinâmica, a qual não preserva a energia do sistema mas gera melhores resultados que as análises tomadas individualmente. Segundo Ewins et al [44], caso este processo de redução seja efetuado de forma a compatibilizar modelos bem distintos quanto ao número de graus de liberdade, podem gerar erros na otimização usando o método da matriz de erro (E.M.M.) que usualmente colocam em dúvida a validade do modelo assim obtido. Segundo Lieven et al [49], existem várias desvantagens em adotar esta redução, tais como: as propriedades modais do modelo analítico não são preservadas completamente, a conectividade das matrizes reduzidas não refletem as propriedades físicas do modelo analítico completo, a energia total do sistema não é mantida e compromete os esforços de um refinamento ou detalhamento do modelo analítico.

ii) Expansão do modelo experimental para os graus de liberdade do analítico, usando as matrizes do modelo analítico de forma a aumentar o número de graus de liberdade considerados no modelo experimental, estimando-os. Interpolando os graus de liberdade medidos para obter um modelo compatível com o teórico. Este último é útil para suavizar erros de medição, porém causa problemas com mudanças abruptas de geometria na estrutura. Uma terceira abordagem assume que os autovetores medidos são combinações lineares dos autovetores teóricos, calculando uma matriz de transformação relacionando estes modelos para estimar os graus de liberdade faltantes no modelo experimental.

Segundo Lieven et al [49], esta abordagem (expansão do modelo experimental) é mais interessante pois, uma vez que seja implementada de forma precisa, obtêm-se uma indicação mais precisa e localizada dos erros existentes nos elementos do modelo analítico, ao invés de uma mera orientação vaga obtida pela redução do modelo. Uma vez que nenhum processo de expansão pode compensar de forma completa a falta de dados experimentais, aconselha-se a medição do

maior número de informações para evitar a dependência demasiada nestes métodos.

A técnica de interpolar os graus de liberdade ausentes no modelo experimental usualmente utiliza uma função de spline cúbico através dos valores medidos e extrai os valores necessários das curvas resultantes, sendo sua maior limitação prática a representação de regiões com mudanças abruptas de geometria.

O método que se baseia na premissa de que cada modo experimental pode ser considerado uma combinação linear dos modos analíticos é derivado da seguinte forma:

Tem-se:

$$\begin{Bmatrix} {}_x\phi_1 \\ {}_x\phi_2^* \end{Bmatrix}_r = \begin{bmatrix} {}_a\phi_{11} & {}_a\phi_{12} \\ {}_a\phi_{21} & {}_a\phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}_r \quad (6.92)$$

Onde  ${}_x\phi_2^*$  são os graus de liberdade escravos.

Pré-multiplicando os dois lados da equação, tem-se:

$$\{v_1\}_r = [{}_a\phi_{11}^P]^{-1} \{ {}_x\phi_1 \}_r + [{}_a\phi_{12}^P]^{-1} \{ {}_x\phi_2 \}_r \quad (6.93)$$

$$\{v_2\}_r = [{}_a\phi_{21}^P]^{-1} \{ {}_x\phi_1 \}_r + [{}_a\phi_{22}^P]^{-1} \{ {}_x\phi_2 \}_r \quad (6.94)$$

Para obter as três variáveis, necessita-se de mais uma equação:

$$\{v_2\}_r = \{0\} \quad (6.95)$$

Esta truncagem da matriz modal invertida significa que a partição direita da matriz é considerada sem influência. Isto não implica que os modos mais altos não têm contribuição na expansão, pois a sua influência é espalhada pela porção esquerda da matriz invertida.

Obtem-se, desta forma, a seguinte equação para os graus de liberdade escravos:

$$\begin{Bmatrix} {}_x\phi_2^* \end{Bmatrix}_r = [{}_a\phi_{21}^P] [{}_a\phi_{11}^P]^{-1} \{ {}_x\phi_1 \}_r \quad (6.96)$$

Esta técnica pode ser estendida com o objetivo de suavizar os dados experimentais:

$$\begin{Bmatrix} x\phi_1^* \\ x\phi_2^* \end{Bmatrix}_r = \begin{bmatrix} a\phi_{11} \\ a\phi_{21} \end{bmatrix} [a\phi_{11}^P]^{-1} \{x\phi_1\}_r, \quad (6.97)$$

A validade desta suavização, que tende a reduzir os erros inerentes ao processo experimental, depende da confiança existente nos dados disponíveis.

Como a suavização obtida é consequência do truncamento no número de modos analíticos usados devido a impor valor nulo a  $\{v_2\}$ , um outro método foi desenvolvido para considerar os modos mais altos: a expansão do coeficiente de confiança modal.

Este método envolve o cálculo do [MAC] entre os  $m_x$  modos experimentais e os  $m_a$  modos analíticos para fornecer uma medida quantificada da correspondência entre os modos:  $[MAC_{x,a}]_{m_x m_a}$

Desta forma, os elementos de cada linha da matriz [MAC] podem ser interpretados como sendo a contribuição do modo analítico para o modo experimental dado pelo número da coluna. Entretanto, este cálculo dá apenas uma medida da semelhança entre os autovetores, não levando em conta a fase entre os modos experimentais e analíticos ou a sua magnitude. Para considerar estes aspectos de forma que a matriz [MAC] obtida forneça a combinação linear dos modos analíticos para cada modo experimental, existe o seguinte procedimento (Lieven et al [49]): inicialmente deve-se seleccionar os pares de modos correlacionados da matriz [MAC] e ajustar a fase de cada modo analítico para coincidir com o experimental, seguido pela adequação da magnitude dos autovetores analíticos em relação aos experimentais.

$$\begin{Bmatrix} a\phi_1^* \\ a\phi_2^* \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} a\phi_1 \\ a\phi_2 \end{Bmatrix}_r \times \frac{X_{sum_r}}{a_{sum_r}} \quad (6.98)$$

onde

$$X_{sum_r} = \sum_{i=1}^{m_a} |(x\phi_{11})_{i,r}|$$

$$a_{sum_r} = \sum_{i=1}^{m_a} |(a\phi_{11})_{i,r}|$$

Por fim, aplica-se a transposta da matriz [MAC] para os graus de liberdade ajustados em fase e magnitude para gerar os graus de liberdade desejados:

$$[{}_x\phi_2^*]_{m_a, 2m_x, 0} = [{}_a\phi_{21} \quad {}_a\phi_{22}]_{m_a, 2m_x, 0} [MAC_{x,a}]_{m_x, 0, m_x, 0}^T \quad (6.99)$$

O terceiro método mencionado, usualmente chamado de "expansão física", é derivado de uma redução de Guyan inversa.

Da equação dinâmica básica:

$$\left( \begin{bmatrix} {}_a k_{11} & {}_a k_{12} \\ {}_a k_{21} & {}_a k_{22} \end{bmatrix} - w_r^2 \begin{bmatrix} {}_a M_{11} & {}_a M_{12} \\ {}_a M_{21} & {}_a M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_r = \{0\} \quad (6.100)$$

Pode-se mostrar que, substituindo os autovalores e autovetores medidos obtém-se os graus de liberdade faltantes por:

$$\{ {}_x\phi_2^* \}_r = - \left( [{}_a k_{22}] \cdot w_r^2 [{}_a M_{22}] \right)^{-1} \left( [{}_a k_{21}] \cdot w_r^2 [{}_a M_{21}] \right) \{ {}_x\phi_1 \}_r \quad (6.101)$$

Este método apresenta a vantagem de usar as matrizes particionadas do modelo analítico completo, impondo diretamente as propriedades de conectividade física. A implicação disto é que a validade deste processo depende da validade do modelo analítico original.

### 6.3.3) Identificação das Propriedades de Amortecimento em Estruturas.

A abordagem analítica usualmente considera sistemas não amortecidos devido, basicamente, ao fato de ser difícil de estimar teoricamente os mecanismos e níveis de amortecimento associados a estruturas complexas. Desta abordagem obtém-se modos reais.

A abordagem experimental obtém as características dinâmicas reais da estrutura (considerando o caso de uma análise bem executada) que apresentam intrinssicamente o amortecimento existente em todas estruturas reais.

Caso este amortecimento apresente uma amplitude pequena, a abordagem mais direta é de desprezá-lo, considerando os modos reais e facilitando a comparação com os resultados teóricos.

Caso o nível de amortecimento não permita o seu desprezo, o procedimento usual é atribuir uma relação direta entre a sua distribuição na estrutura e a das características de massa e rigidez, configurando o modelo de amortecimento proporcional:

- para o caso de amortecimento histerético:

$$[H] = \alpha[K] + \beta[M] \quad (6.102)$$

- para o caso de amortecimento viscoso:

$$[C] = \gamma[K] + \delta[M] \quad (6.103)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  são constantes ajustadas para representar a distribuição de amortecimento no modelo.

Neste caso, os autovetores permanecem reais (idênticos ao caso sem amortecimento) e os autovalores alteram-se levemente.

Porém, em estruturas reais, é mais comum observar distribuições de amortecimento bem diferente dos dois modelos acima, onde é comum existir amortecimento distribuído de forma irregular na estrutura, cujas maiores parcelas de contribuição advém das juntas e interfaces dos componentes básicos da estrutura que apresentam um amortecimento histerético quase desprezível (este é o caso exato do semi-eixo homocinético em análise neste trabalho).

Neste caso, adota-se para representar o comportamento do sistema o seguinte sistema de vários graus de liberdade discretos descrito pela equação para o caso de amortecimento histerético:

$$\left(-\omega^2[M_x] + [K_x] + i[H]\right)\{q\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (6.104)$$

Para o caso de amortecimento viscoso, tem-se:

$$\left(-\omega^2[M_x] + i\omega[C] + [K_x]\right)\{q\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (6.105)$$

sendo  $\{q\}$  um vetor de amplitudes harmônicas complexas.

Para o caso de excitação de um só ponto, temos que a receptância entre dois pontos  $j$  e  $k$  do sistema será:

- para amortecimento histerético:

$$\alpha_{jk} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk} + i {}_r B_{jk}}{1 - \left(\frac{w}{w_r}\right)^2 + i \eta_r} \quad (6.106)$$

- para amortecimento viscoso:

$$\alpha_{jk} = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r A_{jk} + i \left(\frac{w}{w_r}\right)_r B_{jk}}{1 - \left(\frac{w}{w_r}\right)^2 + 2i \left(\frac{w}{w_r}\right) \zeta_r} \quad (6.107)$$

Onde A e B são as parcelas real e imaginária da constante modal  $H_r$  ou  $C_r$  e  $\eta$  e  $\zeta$  são os respectivos fatores de perda.

O primeiro passo consta da identificação do tipo de amortecimento observado pela abordagem experimental.

Considerando que a constante modal  $H_r$  seja real, para o amortecimento histerético, tem-se:

$$\text{Im}\left(\frac{1}{\alpha_H}\right) = \frac{\eta w_r^2}{H_r} \quad (6.108)$$

Para o amortecimento viscoso  $C_r$ , tem-se:

$$\text{Im}\left(\frac{1}{\alpha_v}\right) = \frac{2\zeta w_r w}{C_r} \quad (6.109)$$

Portanto, utilizando o gráfico da inversa da receptância pode-se observar o amortecimento histerético numa linha horizontal e o viscoso como uma linha inclinada (como comentado no capítulo 2).

No caso de níveis de amortecimento mais altos, a constante modal  $C_r$  será um valor complexo. Neste caso deve-se inicialmente remover esta complexividade:

$$\frac{1}{\alpha} = \text{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \text{Im}\left(\frac{1}{\alpha}\right)i =$$

$$= \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\alpha} \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\alpha} \right) i \right] [(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)] \quad (6.110)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de rotação observado no gráfico de Nyquist de  $\alpha$  e  $\alpha$  é a receptância com valor da constante modal real.

Usando esta relação, obtêm-se:

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cos \theta - \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\alpha} \right) \operatorname{sen} \theta \quad (6.111)$$

$$\operatorname{Im} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cos \theta + \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\alpha} \right) \operatorname{sen} \theta \quad (6.112)$$

Onde interpreta-se  $\operatorname{Im}(1/a)$  da mesma forma descrita anteriormente.

A segunda etapa consta da localização dos elementos de amortecimento existentes na estrutura. Devido à característica observada na grande maioria de estruturas reais, onde o amortecimento global do sistema recebe a maior parcela de contribuição das juntas e elementos de ligação, pode-se considerar que o amortecimento encontra-se localizado em regiões isoladas no modelo. Graças a este fato, pode-se adotar um procedimento de localizar as regiões onde o amortecimento apresenta valores expressivos para, numa segunda etapa, avaliar quantitativamente cada contribuição, obtendo a matriz de amortecimento da estrutura.

6.3.3.a) Modelo de amortecimento histerético.

i) Localização dos elementos de amortecimento

Para a localização dos elementos de amortecimento, no caso de amortecimento estrutural histerético  $[H]$ , considera-se a definição da "matriz de rigidez complexa":

$$[K_c] = [K_x] + i[H] \quad (6.113)$$

Numa primeira análise, considera-se que o modelo analítico é correto ( $[K_a] = [K_x]$  e  $[M_a] = [M_x]$ ).

A equação (6.113) pode ser pós-multiplicada pela matriz de autovetores complexa  $[\Phi_x]$ :

$$[K_c][\Phi_x] = [K_x][\Phi_x] + i[H][\Phi_x] \quad (6.114)$$

Uma vez que existe a relação:

$$[K_c][\Phi_x] = [M_x][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

pode-se rearranjar a equação (6.113) para obter:

$$i[H][\Phi_x][\Phi_x]^T = [M_x][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} [\Phi_x]^T - [K_x][\Phi_x][\Phi_x]^T \quad (6.116)$$

Deve ser observado que os autovetores  $[\Phi_x]$  e autovalores  $\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix}$  experimentais são

complexos enquanto as matrizes de rigidez  $[K_x]$ , massa  $[M_x]$  e amortecimento  $[H]$  são reais. Portanto, a equação (6.116) pode ser dividida em duas equações, representando as partes real e imaginária. A equação da parte imaginária permite a localização dos elementos de amortecimento da matriz  $[H]$ . Esta equação pode ser escrita para o caso de considerar-se apenas um autovetor.

Matematicamente:

$$i[H](\text{Re}[\Phi_x] + \text{Im}[\Phi_x]i)(\text{Re}[\Phi_x]^T + \text{Im}[\Phi_x]^T i) = [M_x](\text{Re}[\Phi_x] + \text{Im}[\Phi_x]i) \left( \text{Re} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} + \text{Im} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} i \right) (\text{Re}[\Phi_x]^T + \text{Im}[\Phi_x]^T i) - [K_x](\text{Re}[\Phi_x] + \text{Im}[\Phi_x]i)(\text{Re}[\Phi_x]^T + \text{Im}[\Phi_x]^T i) \quad (6.117)$$

Parte imaginária:

$$i[H](\text{Re}[\Phi_x]\text{Re}[\Phi_x]^T + \text{Im}[\Phi_x]i\text{Im}[\Phi_x]^T i) = [M_x] \left( \text{Re}[\Phi_x]\text{Re} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \text{Im}[\Phi_x]^T i + \text{Re}[\Phi_x]\text{Im} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \text{Re}[\Phi_x]^T \right) - [K_x]\text{Im}[\Phi_x]i \quad (6.118)$$

Para o caso de um n-ésimo autovetor solitário:



$$i[H]\left(\operatorname{Re}\{\phi_x\}_n \operatorname{Re}\{\phi_x\}_n^T + \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n i \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n^T i\right) = [M_x]\left(\operatorname{Re}\{\phi_x\}_n \operatorname{Re}(w_x^2)_n \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n^T i + \operatorname{Re}\{\phi_x\}_n \operatorname{Im}(w_x^2)_n \operatorname{Re}\{\phi_x\}_n^T\right) - [K_x] \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n i \quad (6.119)$$

Desta equação pode-se ter uma indicação dos locais com maior influência no amortecimento do modelo caso o modo em observação seja adequadamente sensível ao amortecimento.

Para o caso genérico de considerar-se que o modelo analítico não é correto ( $[M_a] \neq [M_x]$  e  $[K_a] \neq [K_x]$ ), a equação (6.113) torna-se:

$$[K_c] = [K_a] + [E_k] + i[H] \quad (6.120)$$

Derivando-se de forma análoga, obtêm-se:

$$[E_k][\Phi_x][\Phi_x]^T + i[H][\Phi_x][\Phi_x]^T = [M_x][\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} [\Phi_x]^T - [k_a][\Phi_x][\Phi_x]^T \quad (6.121)$$

Portanto, neste caso genérico tem-se que a influência das parcelas desconhecidas da equação  $[E_k]$  e  $[H]$  estarão presentes simultaneamente nas parcelas real e imaginária da equação:

$$\begin{aligned} & [E_k]\left(\operatorname{Re}[\Phi_x] \operatorname{Im}[\Phi_x]^T i + \operatorname{Im}[\Phi_x] i \operatorname{Re}[\Phi_x]^T\right) + i[H]\left(\operatorname{Re}[\Phi_x] \operatorname{Re}[\Phi_x]^T + \operatorname{Im}[\Phi_x] i \operatorname{Im}[\Phi_x]^T i\right) = \\ & = [M_x] \left( \operatorname{Re}[\Phi_x] \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \operatorname{Im}[\Phi_x]^T i + \operatorname{Re}[\Phi_x] \operatorname{Im} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \operatorname{Re}[\Phi_x]^T \right) - [k_x] \operatorname{Im}[\Phi_x] i \end{aligned} \quad (6.122)$$

Para o caso de considerar-se o n-ésimo modo isoladamente:

$$\begin{aligned} & [E_k]\left(\operatorname{Re}\{\phi_x\}_n \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n^T i + \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n i \operatorname{Re}\{\phi_x\}_n^T\right) + i[H]\left(\operatorname{Re}\{\phi_x\}_n \operatorname{Re}\{\phi_x\}_n^T + \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n i \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n^T i\right) = \\ & = [M_x]\left(\operatorname{Re}\{\phi_x\}_n \operatorname{Re}(w_x^2)_n \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n^T i + \operatorname{Re}\{\phi_x\}_n \operatorname{Im}(w_x^2)_n \operatorname{Re}\{\phi_x\}_n^T\right) - [K_x] \operatorname{Im}\{\phi_x\}_n i \end{aligned} \quad (6.123)$$

Entretanto, segundo He [46], geralmente o efeito da matriz erro  $[E_k]$  domina a parcela real da equação (6.121) e a matriz de amortecimento histerético  $[H]$  domina a parcela imaginária, permitindo a localização das regiões de maior contribuição para o amortecimento global.

Após a localização, parte-se para a quantificação dos elementos de amortecimento do

modelo com o uso do número limitado de modos experimentais complexos.

Para tanto, uma extensão do método da matriz de erro (EMM) foi desenvolvida por He [46] definindo a matriz de erro de rigidez complexa experimental  $[K_c]$  (considerada correta) e a matriz de rigidez analítica  $[K_a]$ :

$$[Ek_c] = [K_c] - [K_a] \quad (6.124)$$

$$= ([K_x] + i[H]) - ([K_x] - [K]) \quad (6.125)$$

$$= [K] + i[H]$$

A parte real de  $[Ek_c]$  é a matriz erro de rigidez já apresentada neste capítulo enquanto a parte imaginária representa a matriz de amortecimento histerética.

Da equação (6.124), tem-se que a matriz de rigidez complexa correta pode ser escrita como:

$$[K_c] = [K_a] + [Ek_c] \quad (6.126)$$

Invertendo ambos os lados, tem-se:

$$\begin{aligned} [K_c]^{-1} &= ([K_a] + [Ek_c])^{-1} = \\ &= ([I] + [K_a]^{-1}[Ek_c])^{-1} [K_a]^{-1} = \\ &= \left\{ [I] - ([K_a]^{-1}[Ek_c]) + ([K_a]^{-1}[K_c])^2 - \dots \right\} [K_a]^{-1} = \\ &= [K_a]^{-1} - ([K_a]^{-1}[Ek_c])[K_a]^{-1} + ([K_a]^{-1}[K_c])^2 [K_a]^{-1} - \dots \end{aligned} \quad (6.127)$$

Uma vez que  $[Ek_c]$  e  $[H]$  podem ser consideradas pequenas comparadas com  $[K_a]$ , tem-se que o produto matricial  $([K_a]^{-1}[Ek_c])^n$  tende a zero com  $n$  crescente, ou seja:

$$([K_a]^{-1} [Ek_c])^n \rightarrow [0] \text{ com } n \rightarrow \infty. \quad (6.128)$$

Portanto, da equação (6.127) obtêm-se:

$$[K_c]^{-1} \cong [K_a]^{-1} - [K_a]^{-1}[Ek_c][K_a]^{-1} \quad (6.129)$$

portanto

$$[K_a]^{-1}[Ek_c][K_a]^{-1} \cong [K_a]^{-1} - [K_c]^{-1} \quad (6.130)$$

e,

$$[Ek_c] \cong [K_a] \left( [K_a]^{-1} - [K_c]^{-1} \right) [K_a] \quad (6.131)$$

Uma vez que a parte real de  $[Ek_c]$  é definida como  $[Ek]$  e a parte imaginária como  $[H]$ , pode-se separar a equação (6.131) nas suas parcelas real e imaginária para obter a matriz erro de rigidez  $[Ek]$  e a matriz de amortecimento histerético  $[H]$ :

$$\begin{aligned} [Ek] &= \text{Re}([Ek_c]) \\ &\cong \text{Re}\left\{ [K_a] \left( [K_a]^{-1} - [K_c]^{-1} \right) [K_a] \right\} \\ &\cong [K_a] \left( [K_a]^{-1} - \text{Re}([K_c]^{-1}) \right) [K_a] \end{aligned} \quad (6.132)$$

$$\begin{aligned} [H] &= \text{Im}([Ek_c]) \\ &\cong \text{Im}\left\{ [K_a] \left( [K_a]^{-1} - [K_c]^{-1} \right) [K_a] \right\} \\ &\cong [K_a] \left\{ \text{Im}([K_c]^{-1}) \right\} [K_a] \end{aligned} \quad (6.133)$$

Portanto, pode-se estimar independentemente  $[Ek]$  e  $[H]$ .

ii) Considerando um modelo experimental incompleto:

No caso de ser usado um conjunto incompleto de modos para estimar  $[Ek]$  e  $[H]$ , a matriz de flexibilidade analítica  $[K_a]^{-1}$  e a matriz complexa de flexibilidade experimental  $[K_c]^{-1}$  devem ser aproximadas pelos respectivos parâmetros modais reais e complexos:

$$[K_a]^{-1} = [\Phi_a]_{n \times m} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_a^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix}_{m \times m}^{-1} [\Phi_a]_{m \times n}^T \quad (6.134)$$

$$[K_c]^{-1} = [\Phi_x]_{n \times m} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & w_x^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix}_{m \times m}^{-1} [\Phi_x]_{m \times n}^T \quad (6.135)$$

Substituindo nas equações (6.132) e (6.133), tem-se:

$$[Ek] \cong [K_a] \left( \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi_a \right] \\ \left[ \Phi_x \right]^T \end{array} \right] \begin{array}{c} \backslash \\ w_a^2 \\ \backslash \end{array} \right) - \text{Re} \left\{ \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi_x \right] \\ \left[ \Phi_x \right]^T \end{array} \right] \begin{array}{c} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{array} \right\}^{-1} [K_a] \quad (6.136)$$

$$[H] \cong [K_a] \left( \text{Im} \left\{ \left[ \begin{array}{c} \left[ \Phi_x \right] \\ \left[ \Phi_x \right]^T \end{array} \right] \begin{array}{c} \backslash \\ w_x^2 \\ \backslash \end{array} \right\}^{-1} \right) [K_a] \quad (6.137)$$

Deve ser salientado que, devido ao uso de um número limitado de modos no cálculo da matriz de amortecimento, [H] obtida por este procedimento será uma matriz cheia, contradizendo a premissa inicial deste estudo (amortecimento concentrado em poucos locais da estrutura). Isto se deve à aproximação efetuada nos cálculos, sendo que no caso de ser usado um número crescente de modos tem-se a definição de locais com amortecimento maior e outros com tendência a se anular, indicando uma matriz com elementos representativos em poucas posições e que devem confirmar a localização efetuada no procedimento desenvolvido anteriormente.

iii) Considerando dois modos próximos:

Uma observação importante deve ser feita sobre o caso de considerar-se dois modos próximos. Uma vez que a matriz [H] é pequena comparada com  $[K_x]$ , ela pode ser considerada como uma perturbação complexa de  $[K_x]$ . A matriz complexa de rigidez  $[K_c] (= [K_x] + i[H])$  é o resultado desta perturbação. De acordo com a teoria da perturbação, a consequência de uma perturbação  $i[H]$  na matriz de rigidez  $[K_x]$  é que cada autovetor complexo  $\{\Phi_x\}_r (r=1,2,\dots,n)$  pode ser expresso, depois da perturbação, como uma combinação dos correspondentes autovetores reais  $\{\Phi_x\}_r$  antes da perturbação mais a contribuição de todos os demais autovetores reais, ou seja:

$$\{\phi_c\}_r = \{\phi_x\}_r + \sum_{s=1}^n (w_r^2 - w_s^2)^{-1} \left\{ \{\phi_x\}_s^T i[H] \{\phi_x\}_r \right\} \{\phi_x\}_s \quad (6.138)$$

Caso dois modos r e s sejam próximos, então, como  $(w_r^2 - w_s^2)$  é pequeno, eles contribuirão de forma significativa para a modificação de cada autovetor.

Isto significa que modos próximos apresentam um efeito considerável na perturbação  $i[H]$  em  $[K_x]$  e devem conter informações significativas da perturbação nos autovetores sendo, portanto, especialmente interessantes para estimar a matriz de amortecimento.

iv) Método iterativo para estimação de  $[H]$ :

Uma vez que a localização dos elementos significativos da matriz de amortecimento  $[H]$  pode ser determinada antes da quantificação dos seus valores, os elementos estimados pela equação (6.137) que apresentarem valores contraditórios a esta localização podem ser considerados erros introduzidos pelo número insuficiente de modos experimentais usados na análise e devem ser suprimidos artificialmente (esta metodologia é similar a adotada pelo processo iterativo da matriz de erro de rigidez apresentada no início deste capítulo). O mesmo argumento pode ser usado para a estimação da matriz de erro de rigidez obtida pela equação (6.136). As matrizes  $[H]$  e  $[E_k]$  assim obtidas são grosseiras aproximações, uma vez que o número de modos complexos usados são geralmente bastante limitados. Portanto, com o conhecimento da localização dos locais de maior amortecimento, pode-se utilizar um processo iterativo para obter uma matriz de amortecimento razoavelmente correta. Este processo está ilustrado na figura 6.4.

6.3.3.b) Modelo de amortecimento viscoso:

Lawrence [50] desenvolveu, baseado no trabalho de Sidhu et al [40], uma abordagem onde considera amortecimento viscoso na análise, estendendo as vantagens inerentes desta metodologia: indica qualitativa (local no modelo) e quantitativamente (amplitude da correção a ser feita) as discrepâncias entre as abordagens analítica e experimental retendo as características físicas da estrutura real, não sendo um mero artifício matemático para obter autovalores e autovetores teóricos próximos aos medidos.

i) Procedimento proposto na bibliografia:

Partindo da equação de movimento para um sistema amortecido linear:

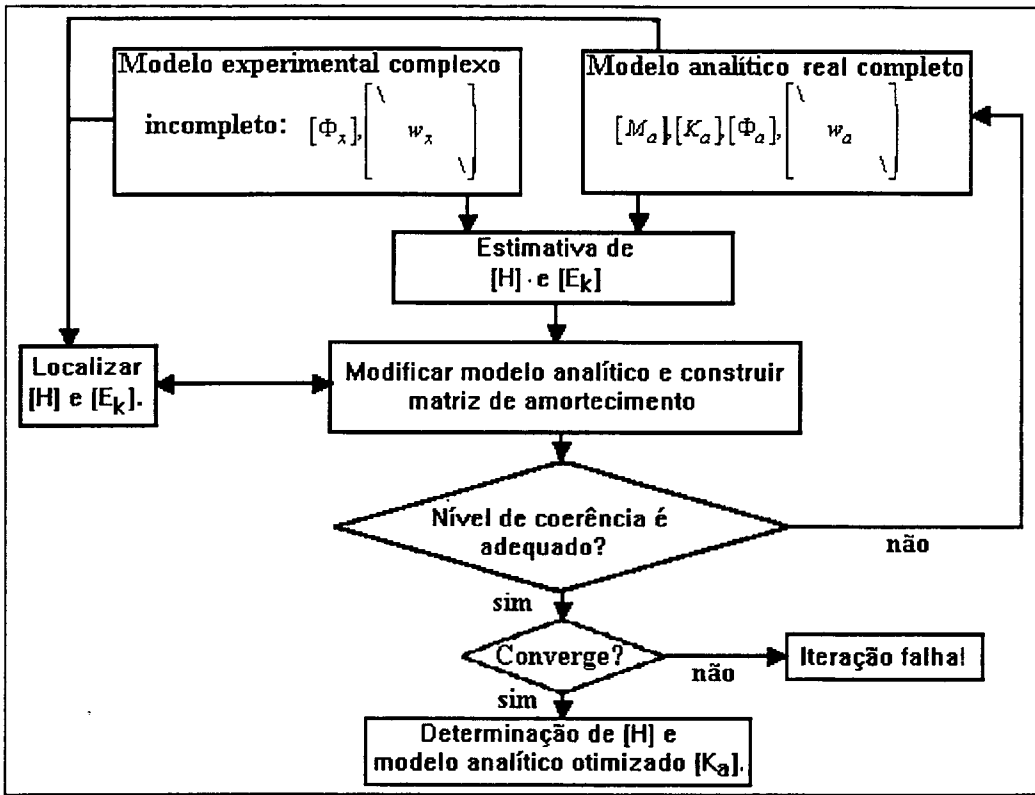


Figura 6.4: Processo iterativo para estimar [H] e otimizar [K<sub>a</sub>].

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

(6.139)

Estando o amortecimento presente, tem-se que a solução desta equação resulta em autovalores e autovetores complexos que aparecem em pares conjugados, tornando a matriz modal de dimensões  $n \times 2n$  (dobro de raízes da equação em relação aos graus de liberdade no modelo).

Esta equação pode ser reescrita na forma de vetor de estado:

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{0\}$$

(6.140)

onde:

$$\{y\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{u} \\ u \end{array} \right\}_{2n}$$

(6.141)

$$[A] = \begin{bmatrix} [O] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}_{2nx2n} \quad (6.142)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [M] & [O] \\ [O] & [K] \end{bmatrix}_{2nx2n} \quad (6.143)$$

Esta formulação permite usar a matriz modal para desacoplar as equações. Assumindo a solução  $\{\dot{y}\} = \{\dot{\Phi}\}e^{st}$ , obtendo-se o problema de autovetores:

$$\{[A]s + [B]\}\{\phi\} = \{0\} \quad (6.144)$$

Para amortecimentos subcríticos, a solução desta equação gera  $2n$  autovalores complexos  $s_r$  e respectivos autovetores:

$$s_r = -w_r \zeta_r \pm iw_{Dr} \quad (6.145)$$

onde :  $w_r$  = frequência natural

$w_{Dr}$  = frequência natural amortecida

$\zeta_r$  = fator de amortecimento do modo  $r$

Substituindo a matriz modal  $[\Phi]$  na equação acima e pré multiplicando por  $[\Phi]^T$  tem-se:

$$[\Phi]^T [A] [\Phi] [s] + [\Phi]^T [B] [\Phi] = \{0\} \quad (6.146)$$

da propriedade de ortogonalidade dos modos, obtêm-se:

$$[\Phi]^T [A] [\Phi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & a & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (6.147)$$

$$[\Phi]^T [B] [\Phi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & b & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (6.148)$$

Normalizando os autovetores em relação a  $[A]$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [A] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [B] [\Phi] &= - \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & s & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.149)$$

A diferença entre as matrizes  $[B]$  obtidos pela abordagens analíticas  $[B_a]$  e experimental  $[B_x]$  é dada por:

$$[E_B]_B = [B_x] - [B_a] \quad (6.150)$$

ou seja:

$$[B_x] = [B_a] + [E_B]_B \quad (6.151)$$

invertendo ambos os lados:

$$\begin{aligned} [B_x]^{-1} &= \{[B_a] + [E_B]\}^{-1} \\ [B_x]^{-1} &= \{[B_a] \{ [I] + [B_a]^{-1} [E_B] \} \}^{-1} \\ [B_x]^{-1} &= \{ [I] + [B_a]^{-1} [E_B] \}^{-1} [B_a]^{-1} \end{aligned} \quad (6.152)$$

A equação entre colchetes pode ser estendida em uma série de Taylor. Caso considere-se as diferenças entre as abordagens teórica e experimental pequenas, pode-se considerar apenas a primeira parcela da série, obtendo:

$$[B_x]^{-1} \cong \{ [I] - [B_a]^{-1} [E_B] \} [B_a]^{-1} \quad (6.153)$$

ou seja:

$$[B_x]^{-1} \cong [B_a]^{-1} - [B_a]^{-1} [E_B] [B_a]^{-1} \quad (6.154)$$

rearranjando:

$$-[B_x]^{-1} + [B_a]^{-1} \cong [B_a]^{-1} [E_B] [B_a]^{-1} \quad (6.155)$$



e resolvendo para  $[E_B]$ :

$$[E_B] \cong [B_a] \{ [B_a]^{-1} - [B_x]^{-1} \} [B_a] \quad (6.156)$$

Substituindo a equação (6.149) na equação, obtêm-se finalmente:

$$[E_B] \cong [B_a] \left\{ [\Phi_a] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & s & \\ & & \backslash_a \end{bmatrix}^{-1} [\Phi_a]^T - [\Phi_x] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & s & \\ & & \backslash_x \end{bmatrix}^{-1} [\Phi_x]^T \right\} [B_a] \quad (6.157)$$

Utilizando a mesma metodologia para  $[A]$ , obtêm-se:

$$[E_A] \cong [A_a] \{ [\Phi_a][\Phi_a]^T - [\Phi_x][\Phi_x]^T \} [A_a] \quad (6.158)$$

Uma vez calculados  $[E_A]$  e  $[E_B]$  têm-se identificadas as discrepâncias entre os modelos teórico e experimental, sendo possível utilizar estes valores não apenas para localizar onde o modelo deve ser melhorado (a representação gráfica destas matrizes é especialmente útil para localizar as discrepâncias nos nodos da malha de discretização) como indica a amplitude da correção a ser executada, sendo possível efetuar um processo iterativo de correção onde o modelo teórico corrigido por esta metodologia (considerando-se as informações da abordagem experimental adequadamente corretas e livres de erros grosseiros de medição) é novamente avaliado e corrigido segundo os mesmos passos apresentados acima, de forma a gerar um modelo teórico mais coerente com o experimental a cada iteração. Lawrence [50] mostra em seu trabalho que os dois fatores mais influentes na exatidão deste processo são o uso de um número adequado de autovetores na análise (uma regra prática encontrada é que o número de autovetores deve ser igual ou superior á metade de graus de liberdade usados no modelo; caso esta relação não seja satisfeita, tem-se que o resultado obtido pela análise será subestimado) e o grau de discrepância entre os modelos teórico e experimental, valendo notar as seguintes características desta influência:

a) Não existe forte inter-relação entre os parâmetros dinâmicos (massa, rigidez e amortecimento), ou seja, caso a discrepância seja grande para o parâmetro massa, essa diferença não deteriora a precisão obtida com este processo para a rigidez e o amortecimento.

b) No caso específico da massa, se a diferença entre os modelos for maior ou igual ao valor da massa modal analítica (neste modo em observação), tem-se que o resultado da análise deve ser considerado apenas como orientação qualitativa do local das maiores diferenças entre os modelos.

c) No caso da rigidez tem-se um comportamento idêntico ao observado para a massa.

d) No caso do amortecimento observa-se uma independência da precisão da análise em relação à amplitude da diferença entre os modelos, sendo esta característica muito animadora uma vez que se sabe que o amortecimento é o parâmetro dinâmico mais difícil de se prever de forma precisa no modelo analítico e de medir na abordagem experimental.

e) Em relação ao procedimento iterativo mencionado, observa-se que, caso seja usado um número adequado de modos na análise, a iteração converge rapidamente (1 ou 2 iterações são suficientes) para a solução exata independente da amplitude das divergências entre as abordagens teórica e experimental.

Cabe salientar que a qualidade das estimativas obtidas na abordagem experimental é uma condição básica necessária para toda análise, sendo necessário o uso de julgamento por parte da pessoa que utilizar esta técnica sobre até onde pode ser atribuída confiança nestes valores.

ii) Procedimentos propostos neste trabalho:

As limitações encontradas nesta abordagem desenvolvida por Lawrence [50] (a necessidade de um número substancial de modos experimentais para permitir a convergência do processo iterativo) podem ser contornadas caso adote-se a filosofia que embasa a abordagem de He [46].

Neste caso o método seria dividido em duas etapas distintas e interdependentes: inicialmente uma avaliação com poucos modos experimentais (ou, no caso extremo, apenas um modo experimental) poderia localizar os locais onde ocorrem as maiores contribuições para o amortecimento global do sistema. Numa segunda etapa, um processo iterativo guiado pela localização obtida na primeira etapa permite a avaliação quantitativa dos elementos da matriz de amortecimento viscoso [C].

Desenvolvendo matematicamente esta estratégia, têm-se das equações (6.157) e (6.158) considerando um r-ésimo modo solitário:

$$[E_B] \cong [B_a] \left\{ \left\{ \phi_a \right\}_r \left( \frac{1}{S_a} \right)_r \left\{ \phi_a \right\}_r^T - \left\{ \phi_x \right\}_r \left( \frac{1}{S_x} \right)_r \left\{ \phi_x \right\}_r^T \right\} [B_a] \quad (6.159)$$

e

$$[E_A] \cong [A_a] \left\{ \left\{ \phi_a \right\}_r \left\{ \phi_a \right\}_r^T - \left\{ \phi_x \right\}_r \left\{ \phi_x \right\}_r^T \right\} [A_a], \quad (6.160)$$

A utilização de alguns modos distintos, um de cada vez, e mesmo algumas combinações deles permite avaliar a validade desta metodologia.

Uma vez localizados os elementos mais importantes na matriz de amortecimento [C] (ou seja, de maior amplitude), esta informação é usada para guiar o processo iterativo apresentado anteriormente suprimindo artificialmente os elementos da matriz [C] otimizada onde não se espera grandes contribuições de amortecimento, considerando estes valores como resíduos da aproximação grosseira ocasionada pela utilização de um número restrito e insuficiente de modos experimentais. A parcela útil da informação é utilizada para melhorar as matrizes [A<sub>a</sub>] e [B<sub>a</sub>], as quais fornecem novos modos analíticos que servem como entrada para a nova iteração. Deve-se monitorar este processo com os parâmetros de qualidade da análise apresentados anteriormente para verificar a convergência do processo e o atingimento de um nível aceitável de precisão para interromper o processo.

Com este procedimento pode ser executada a otimização de um modelo analítico com apenas alguns poucos modos (inclusive no caso extremo de apenas um modo, caso este em questão seja sensível ao fenômeno de amortecimento em análise)

A maior diferença em relação ao método apresentado por Lawrence [50] é que naquele ocorre a tentativa de corrigir todo o modelo de forma generalizada, considerando as informações espúrias no processo, gerando instabilidades na iteração caso o número de modos não seja suficientemente grande (ou seja, fazendo uma analogia com instrumentação, a relação sinal/ruído do processo deveria ser boa para permitir o domínio da parcela saudável da informação no processo de iteração, tornando-se convergente), enquanto que o desenvolvido aqui apresentado

orienta o processo de forma a descartar a parcela da informação que com certeza não é correta, melhorando a qualidade da informação que é usada para estimar um modelo mais correto.

#### **6.4)Exemplos Numéricos.**

Para verificar a validade e as limitações de alguns dos métodos apresentados anteriormente, os mesmos foram aplicados em exemplos numéricos dispostos em três níveis distintos e crescentes de complexibilidade:

a) Exemplo numérico artificial, onde dois modelos teóricos levemente distintos são comparados considerando um como um modelo analítico e outro como um modelo experimental hipoteticamente obtido com medições reais. Este exercício permite tomar contato com os métodos com um domínio maior do fenômeno em análise, permitindo a execução de uma espécie de "benchmark" da metodologia.

b) Exemplo numérico real simplificado, onde uma estrutura simples, porém real, é modelada de forma analítica e experimental, permitindo o contato com as limitações e complexidades básicas inerentes ao processo de comparação destas duas abordagens. O modelo em questão apresenta as características básicas de um caso real: amortecimento não homoganeamente distribuído, incompatibilidade de modos (número de modos experimentais inferior ao de modos analíticos) e de graus de liberdade (número de coordenadas experimentais inferior ao de coordenadas analíticas).

c) Exemplo numérico real complexo: semi-eixo homocinético. Neste exemplo utiliza-se o objeto deste trabalho, o qual apresenta, de forma mais acentuada, as características listadas anteriormente, além de condições de contorno complexas e comportamento não linear identificado no capítulo 4 deste trabalho.

##### **6.4.1) Exemplo numérico artificial.**

Dentre os métodos de otimização de modelos apresentados, o Método da Matriz Erro (E.M.M) foi escolhido para ser implementado em uma rotina baseado no software MATHCAD

4.0. O objetivo inicial desta otimização de modelos analíticos era utilizar o trabalho desenvolvido por Coutinho [8], porém por restrições de tempo, este trabalho, que foi desenvolvido utilizando o método de matriz de transferência, não foi implementado a ponto de fornecer as matrizes de rigidez  $[K_a]$  e de massa  $[M_a]$  globais do sistema na forma necessária para localizar erros de modelamento na malha de discretização do modelo analítico, impedindo, por conseguinte, o uso da metodologia adotada no presente trabalho diretamente com este modelo teórico.

A primeira opção foi procurar um software de elementos finitos comercial para gerar o modelo analítico. Foram avaliados os softwares ANSYS 5.0 e GAELI (Gerador e Analisador de Estruturas Lineares desenvolvido pela UFRGS), os quais atenderam plenamente às expectativas.

Por questões meramente didáticas, optou-se por desenvolver uma rotina baseada no método de elementos finitos dedicada ao caso em análise.

Inicialmente foi construída uma rotina em ATMATLAB baseado no trabalho de Jordan [51]. Apesar do sucesso obtido com este software, procurou-se por um aplicativo que permitisse uma maior flexibilidade e qualidade na apresentação dos resultados.

Por fim, esta procura aportou no software MATHCAD 4.0, o qual permitiu uma integração de todas as etapas do processo, apresentando como única restrição o limitado tamanho de matrizes disponíveis devido à limitação de hardware (IBM 486 DX 33MHz 4MRAM).

A rotina desenvolvida apresenta-se esquematizada na figura 6.5, onde observa-se as etapas principais descritas por : entrada de dados, solução do problema de autovalores associados, compatibilização dos modelos, localização da região mal modelada , estimativa de correção do modelo analítico e determinação de indicadores de coerência entre os modelos.

Neste nível inicial de exemplo numérico, foi adotado um modelo analítico de uma viga biapoiada considerando apenas um grau de liberdade por nodo (translação perpendicular à estrutura) representada na figura 6.6 juntamente com as matrizes consistentes de rigidez e de massa de um elemento genérico. Efetuando a montagem das matrizes, segundo a conectividade dos elementos, obteve-se as matrizes globais de rigidez  $[K_a]$  e massa  $[M_a]$ . As condições de contorno são impostas anulando-se os elementos referentes ao deslocamento do primeiro e do último nodo da malha de discretização.

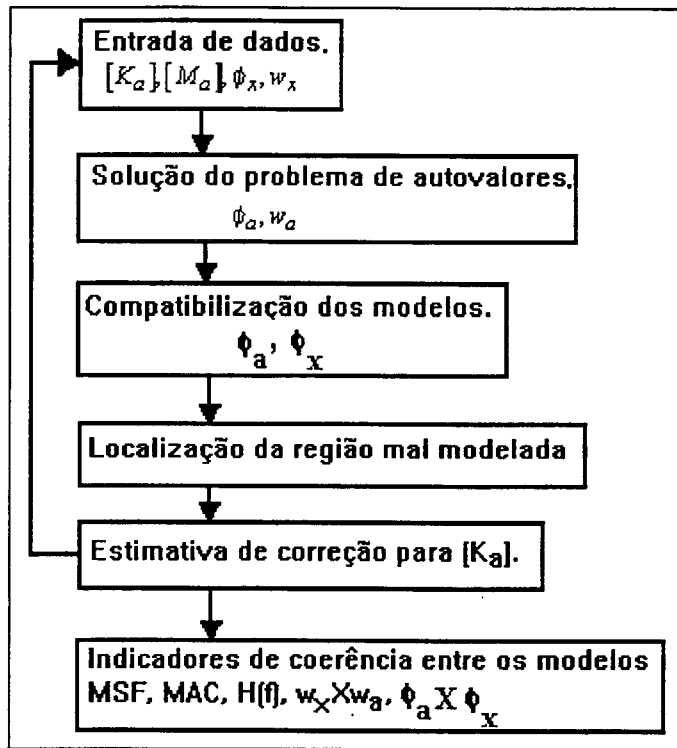


Figura 6.5: Esquema da rotina computacional.

Modelo de viga biapoada para exemplo numérico artificial.

Matriz consistente de rigidez de um elemento genérico i:

$$[M_a]_i = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriz consistente de massa de um elemento genérico i:

$$[K_a]_i = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 54 \\ 54 & 156 \end{bmatrix}$$

onde: E = módulo de elasticidade do material =  $2,1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>.  
 I = momento de inércia transversal da seção =  $\frac{bh^3}{12}$ .  
 L = comprimento de um elemento.  
 m = massa por unidade de comprimento.

Figura 6.6: Modelo de viga biapoada.

O modelo considerado "experimental" apresenta uma singularidade no nodo 5 (região central da viga) constituída de uma redução de cerca de 16,67% no valor de seu momento de inércia transversal  $I$  (simulando uma seção de rigidez menor, representando uma junta parafusada, por exemplo).

O modelo considerado "analítico" representa uma viga homogênea, onde a singularidade presente no modelo experimental não é considerada (simulando o desconhecimento, a priori, da existência da junta na estrutura).

Os resultados desta comparação estão apresentados em trabalho técnico publicado pela SAE - Brasil [52] e mostram a estabilidade da convergência do método iterativo de correção do modelo analítico, identificando com precisão a divergência imposta entre os modelos.

A rotina desenvolvida para este exemplo está apresentada no anexo 4 (antes de aplicar o processo de otimização) e no anexo 5 (depois de aplicar a otimização), através da qual deve-se salientar o primeiro modo de vibração dos modelos antes do processo de otimização (visualização sobreposta dos modos) e a representação gráfica da divergência imposta entre os modelos (figura 6.7).

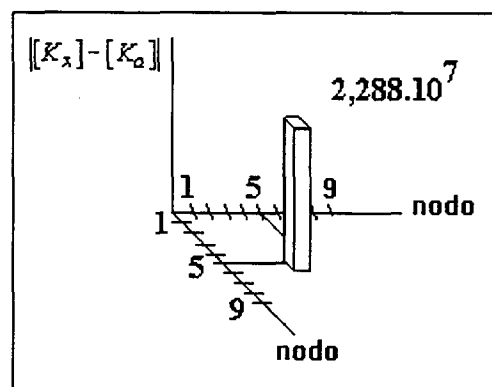


Figura 6.7: Representação gráfica da divergência imposta entre os modelos experimental e analítico.

Para avaliar o comportamento da metodologia no caso extremo de existir apenas o primeiro modo experimental para efetivar o processo de otimização do modelo, neste exemplo apenas este modo experimental é considerado.

A identificação do local da região mal modelada é obtida pela multiplicação da localização da coluna pela localização da linha na matriz de erro  $[E_k]$ , apresentadas no anexo 4 (localização de regiões mal modeladas).

O resultado do cálculo da estimativa de correção para a matriz de rigidez analítica  $[E_k]$  é aplicada no início da rotina gerando novos valores de  $\{\phi_a\}$ ,  $w_a$  e  $E_k$ . A convergência do processo pode ser comprovada pelos gráficos de erro percentual do autovalor (figura 6.8) e de  $E_k$  (figura 6.9) em relação ao número de iterações efetuadas. Para evidenciar, de forma mais clara, a coerência entre os modelos antes e após o processo de otimização ser aplicado, alguns indicativos de coerência entre os modelos estão apresentados no final dos anexos 4 (antes) e 5 (depois).

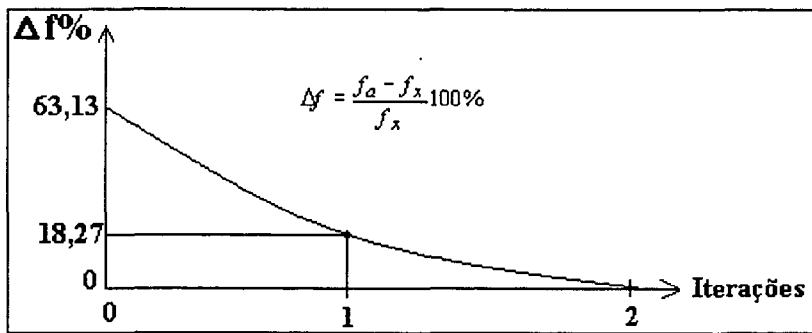


Figura 6.8: Convergência do processo iterativo: autovalor.

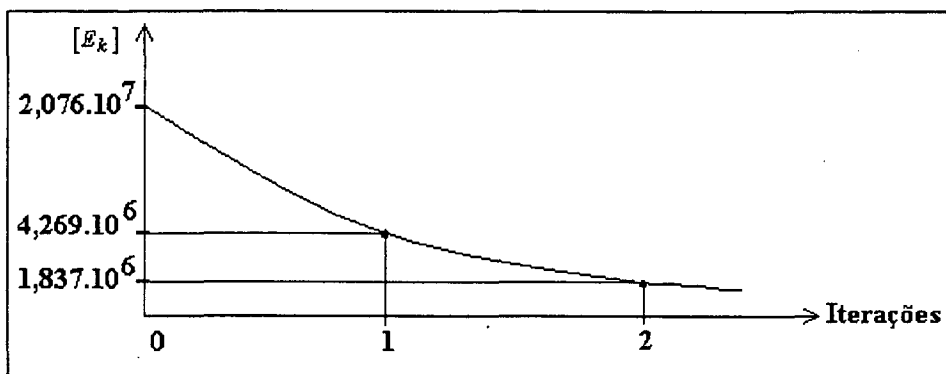


Figura 6.9: Convergência do processo iterativo: correção proposta.

O mesmo processo foi efetuado baseando-se no segundo modo de vibração e o resultado obtido foi que não foi possível localizar e quantificar a divergência dos modelos. Este fato explica-se devido a influência da singularidade ser mínima neste modo (nodo 5 é um nó de



vibração), fato este observado por He em seu trabalho [46].

### Conclusão:

O processo de otimização do modelo analítico mostrou-se bastante estável e convergente no sentido de aproximar o modelo dito analítico para o dito experimental.

A localização da região mal modelada é adequada e o nível de precisão obtido com o modelo otimizado depende apenas do número de iterações efetuadas e da sensibilidade do modo utilizado para o efeito da deficiência de modelamento em questão.

### 6.4.2) Exemplo numérico real simplificado.

Para considerar as peculiaridades inerentes do uso de dados reais, foi aplicada a metodologia, apresentada anteriormente, em um caso real onde o modelo experimental é uma viga bipartida unida por uma união parafusada no seu centro (vide figura 6.10).

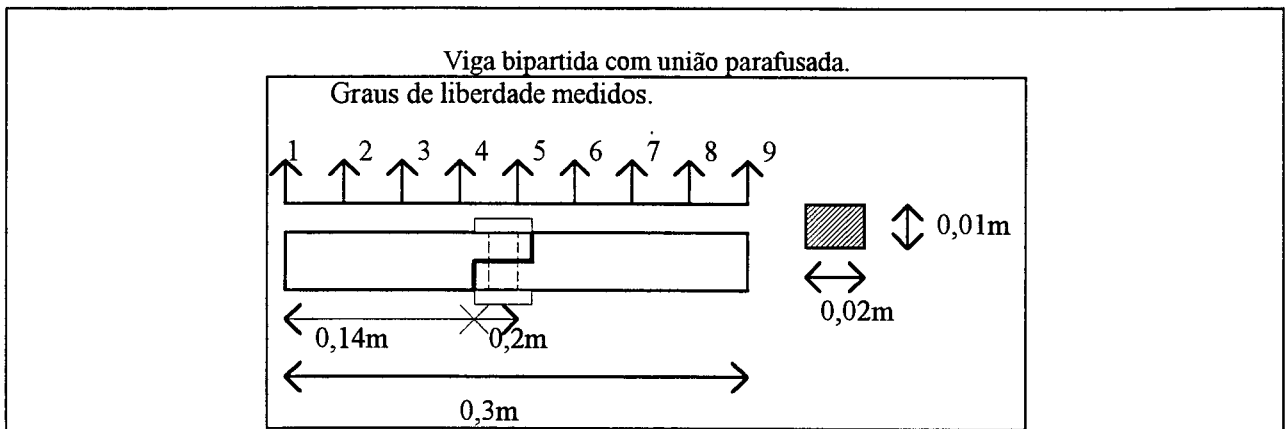


Figura 6.10: Viga bipartida.

Neste caso, o modelo analítico adotado é similar ao apresentado anteriormente (viga homogênea), porém foram considerados dois graus de liberdade por nodo (deslocamento transversal e rotação angular) representados na figura 6.11 junto às respectivas matrizes consistentes de rigidez  $[K_a]$  e massa  $[M_a]$  de um elemento genérico  $i$  [46]. A adoção do segundo grau de liberdade torna-se necessário para que o valor dos autovalores obtidos sejam adequados.

No caso anterior, onde era executada apenas uma análise comparativa entre dois modelos numéricos, este fato não apresentava nenhuma restrição ao objetivo da análise. No presente caso, a adequada representação analítica da estrutura real é importante para a validade da análise de otimização do modelo analítico. A comparação dos resultados dos autovalores obtidos com este modelo com soluções exatas [36] está apresentada na figura 6.12.

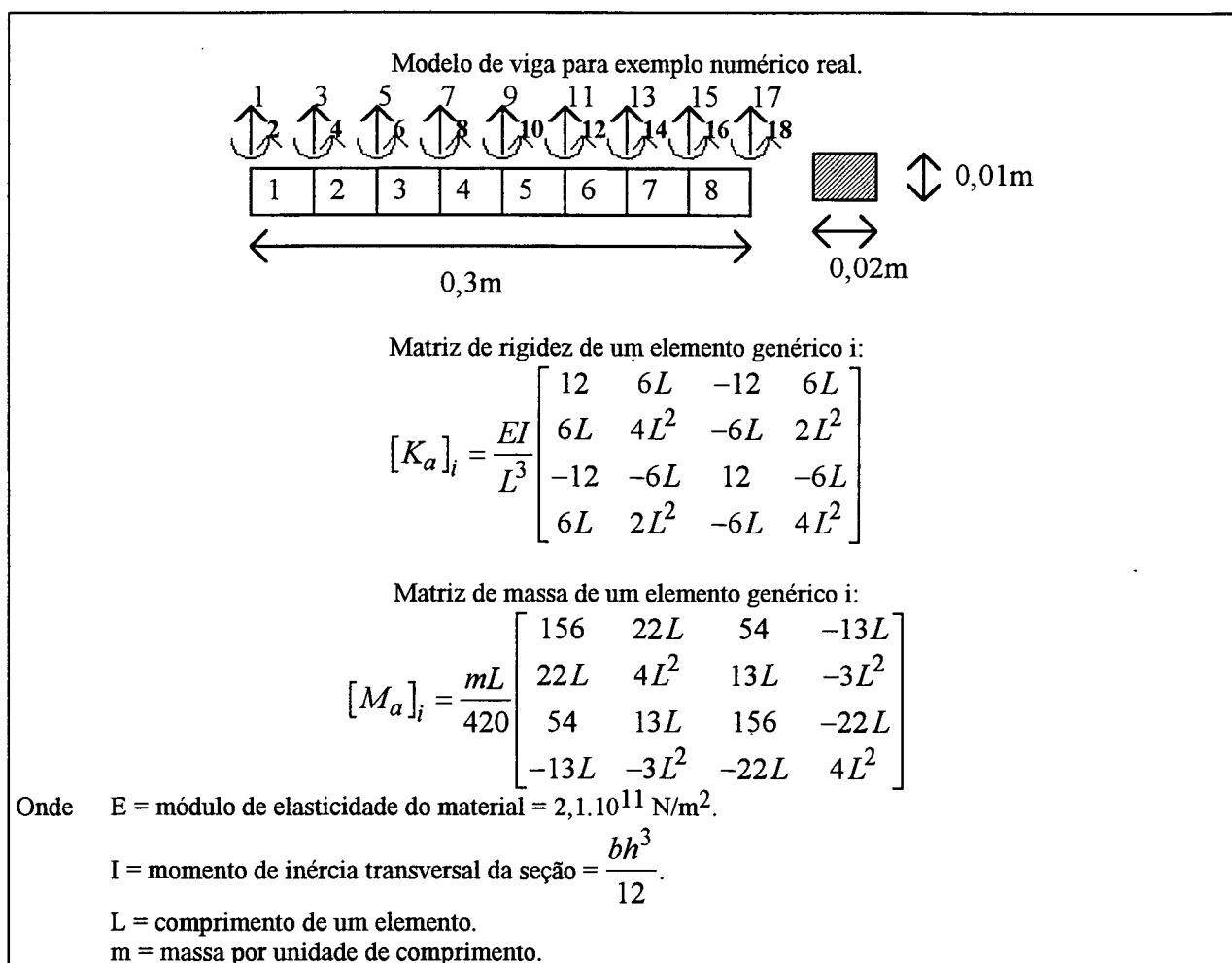


Figura 6.11: Modelo analítico da viga.

Modo	Modelo de 2g.d.l.	Solução exata [6.17]	erro %
1	604,41 Hz	605,09 Hz	0,11
2	1666,90 Hz	1666,69 Hz	0,01
3	3272,80 Hz	3268,55 Hz	0,13

Figura 6.12: Comparação dos autovalores

No caso anterior, a compatibilização dos modelos era automática devido ao mesmo número de graus de liberdade e de modos de vibração nos dois modelos e da amplitude dos modos serem em mesma escala.

No presente caso, o número de graus de liberdade presentes no modelo analítico é o dobro do existente no experimental (devido à não medição das rotações nos nodos). A compatibilização foi inicialmente executada com o uso do método de expansão do modo experimental baseado no modelo analítico apresentado por He [46] ("expansão física" apresentada pela equação 6.101). Este método foi implantado com sucesso, porém, como o próprio autor deste procedimento observa em seu trabalho, esta expansão não cria novos dados para a análise, uma vez que os valores de rotação obtidos serão coerentes com o modelo analítico. Devido a este fato, foi investigada a possibilidade de apenas descartar estes graus de liberdade do modelo analítico para reduzir este modelo ao mesmo nível que o modelo experimental e concluiu-se que não ocorre perda nenhuma de qualidade na análise, além de reduzir o tamanho das matrizes usadas nos cálculos à metade (fato este importante devido às limitações existentes de hardware). Portanto, optou-se por reduzir o modelo analítico ao nível do experimental utilizando  $[M_a]$ ,  $[K_a]$  e  $\dots$  oriundas do modelo de um grau de liberdade por modo.

Nesta análise novamente adotou-se usar apenas um modo para efetuar a otimização do modelo, apesar de que os cinco primeiros modos foram medidos experimentalmente.

Para compatibilizar a amplitude dos modos, adotou-se como referência os autovetores analíticos.

Devido ao fato de que em todos os modos o fator de amortecimento viscoso máximo obtido foi 0,30% e que em todos os autovetores a divergência apresentada na fase não ultrapassou  $10^\circ$ , foi adotado um modelo não amortecido para representar a estrutura.

Segundo He [46] e Ewins [9], esta simplificação não é apenas aceitável como também é indicada devido ao pequeno efeito no resultado final da análise.

Por simplicidade, as condições de contorno adotadas foram livre-livre (a matriz  $[K_a]$  é considerada na sua plenitude).

A rotina desenvolvida no MATHCAD está apresentada no anexo 6 (antes) e no anexo 7

(depois) e segue as mesmas diretrizes que as adotadas na rotina apresentada anteriormente. Dele salienta-se a comparação dos autovetores antes do processo de otimização, onde observa-se a não simetria do modelo experimental (visualização sobreposta dos modos). Este fato é explicado pelo tipo de junta que foi efetuada na viga, a qual é na realidade assimétrica em relação ao ponto central quando observa-se a rigidez transversal por ela proporcionada (o apoio proporcionado por esta região não é idêntico para a esquerda e para a direita do nodo central).

A localização da região mal modelada é adequada (anexo 6) e a estimativa de correção  $E_k$  proporciona uma convergência extremamente rápida do processo iterativo, observável pelos gráficos de erro percentual de autovalores (figura 6.13) e de  $E_k$  (figura 6.14) em relação ao número de iterações efetuadas.

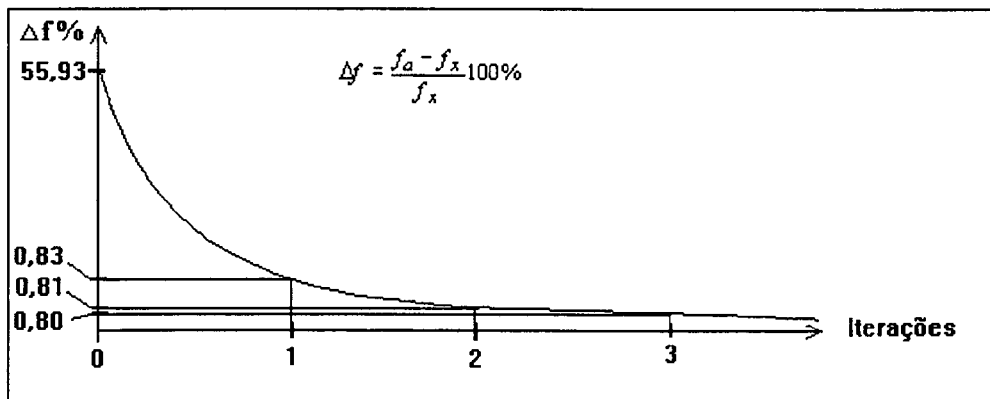


Figura 6.13: Convergência do processo iterativo: autovalor.

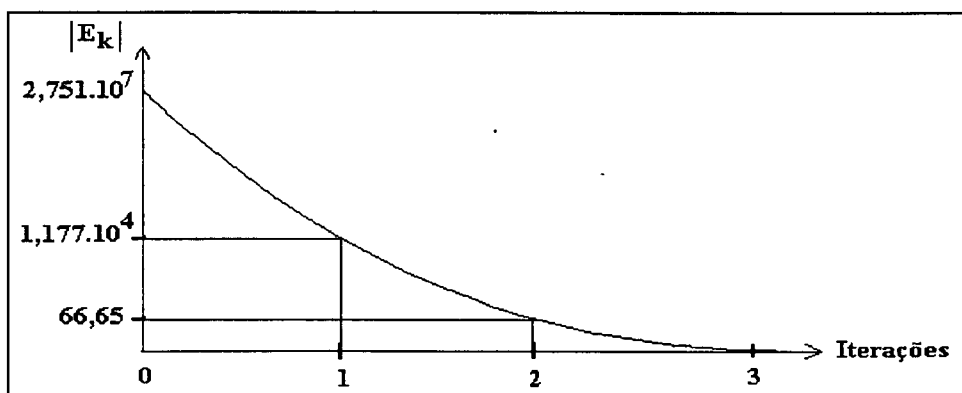


Figura 6.14: Convergência do processo iterativo: correção proposta

Para evidenciar de forma mais clara a coerência entre os modelos antes e após o processo de otimização ser implantado, alguns indicativos de coerência entre os modelos estão

apresentados no final do anexo 6 (antes) e do anexo 7 (depois).

### **Conclusão:**

O processo de otimização mostrou-se bastante estável e convergente no sentido de aproximar o modelo analítico do experimental.

A localização da região mal modelada é adequada e o nível de precisão obtido com o modelo otimizado depende apenas do número de iterações efetuadas e da sensibilidade do modo utilizado para o efeito da deficiência de modelamento em questão.

Neste modelo simples, a redução do modelo analítico ao nível do modelo experimental e o uso de um sistema não amortecido simples não causou perdas à análise e simplificou amplamente o processo .

Da localização da região mal modelada apresentada nos anexos 6 e 7, observa-se claramente a redução de discrepância no modelo como um todo pela redução do valor máximo do gráfico de  $6,933 \cdot 10^6$  para  $1,192 \cdot 10^6$  e pela dispersão da correção a ser feita para vários nodos do modelo.

Nos indicativos de coerência observa-se que os valores de MAC e MSF do primeiro modo crescem de 0,878 e 0,992 para 0,988 e 0,998 e que as retas interpoladas pelos gráficos X-Y de autovetores e autovalores aproximam-se da reta desejada de 45 graus de inclinação. Cabe salientar que os valores de MAC e MSF vão decrescendo à medida que compara-se modos de ordens mais elevadas. Este fato é coerente com a limitação dos modelos, tanto o analítico como o experimental, de representar adequadamente os autovetores mais elevados devido a discretização ser pouco refinada. Por fim, a representação do modo e a curva de resposta em frequência de cada modelo exprimem visualmente o grau de coerência obtido graças ao processo de otimização do modelo.

#### **6.4.3) Exemplo numérico real: semi-eixo homocinético.**

Uma vez dominada a técnica de otimização de modelo analítico, foi aplicado o

procedimento desenvolvido ao caso real enfocado neste trabalho.

Para tal, o modelo experimental adotado como representativo do comportamento dinâmico do semi-eixo homocinético na sua aplicação veicular proveniente do capítulo 4 e apresentado em publicação técnica [53] considera o semi-eixo acoplado ao veículo, sob um torque de 100 Nm e medição efetuada com o uso de mesa vibratória acoplada na direção vertical ao centro do eixo excitado com um nível de força da ordem de 3,2 N (simulando uma excitação do motor a 2500 RPM) e indica uma frequência natural transversal de 251,78 Hz com amortecimento de  $\zeta=2,55\%$  e modo apresentado na figura 6.15a.

O modelo analítico adotado considera uma viga biapoiada com dois graus de liberdade por nodo (deslocamento transversal e rotação angular) já apresentada anteriormente com oito elementos de discretização, porém com seção transversal circular cujo diâmetro representa a dimensão do eixo de conexão (24,3 mm), uma vez que este é o componente que domina e define primordialmente este modo em análise.

Devido ao baixo valor de amortecimento observado e a discrepância de fase no modo experimental ser inferior a  $10^\circ$ , novamente adotou-se um modelo analítico não amortecido.

Em relação ao modelamento das juntas homocinéticas, foi implementado um modelo analítico onde a massa e a rigidez destas peças foi considerada através da adoção dos elementos 1 e 8 do modelo com um diâmetro superior aos demais na tentativa de representar, mesmo que grosseiramente, estas características. O resultado deste modelo foi ruim, provavelmente devido ao nível pouco refinado deste modelo, indicando ser mais adequado considerar no modelo uma viga homogênea.

Cabe salientar que o objetivo deste exercício é verificar as dificuldades inerentes ao processo e suas limitações com um exemplo simples para, numa etapa posterior, implementar um procedimento mais complexo e preciso com o uso de software comercial (GAELI ou ANSYS) e hardware mais potente.

O primeiro problema a ser resolvido é a incompatibilidade dos modelos apresentados. Em relação ao número de graus de liberdade, adotou-se a conclusão apresentada no exemplo anterior de reduzir o modelo analítico ao nível do experimental (suprimindo os graus de liberdade

rotacionais). Em relação à disposição espacial dos nodos do modelo de discretização, inicialmente optou-se por adequar o modelo analítico às posições medidas no modelo experimental (definidas por questões de espaço e acesso dos sensores). Este modelo gerou resultados ruins devido à quebra da regra básica do método de elementos finitos de não distorcer a malha de discretização de forma exagerada (no caso, o menor elemento apresenta uma dimensão 7 vezes menor do que o maior elemento). Devido a este fato, decidiu-se adequar o modelo experimental a um modelo analítico onde os elementos apresentem dimensões homogêneas, tendo-se o cuidado de localizar os nodos 2 e 8 na posição dos centros de articulação das juntas (para permitir a correção do modelo sobre estes nodos). Para tal, devido à impossibilidade de fazer as medições nestes locais por falta de acesso, executou-se um ajuste de curva para interpolar os valores relativos a estes locais baseando-se nos dados disponíveis. Foi utilizado o programa GRAPHER 4.0 para ajustar três curvas: uma para descrever a deformada do eixo (no caso uma curva similar a uma viga sob ressonância transversal de primeiro modo gerando um polinômio de quinta ordem), uma para descrever a deformada da junta deslizante e uma para a junta fixa (nestes dois casos têm-se movimentos de corpo rígido representados por regressões lineares). Para permitir o uso da condição de contorno apoiada no caso da junta deslizante (onde ocorre um deslocamento devido ao movimento de todo o conjunto moto propulsor sobre os coxins elastoméricos), foi efetuada uma mudança de eixo de referência para as coordenadas transversais de forma a zerar o deslocamento no nodo 1 (no caso do nodo 9 este valor já é nulo). Estas alterações no modelo experimental estão representadas nas figuras 6.15 e 6.16.

Aplicando a rotina computacional desenvolvida em MATHCAD 4.0 anteriormente, obtêm-se os resultados do processo de otimização de modelos apresentados nos anexos 8 (antes de aplicar a correção) e 9 (depois de aplicar a primeira correção). Destes anexos, salienta-se as seguintes observações:

a) Na visualização do autovetor experimental observa-se que ocorre uma certa assimetria no modo, com amplitudes um pouco superiores no semi-eixo do lado da junta deslizante. Este fato pode ser atribuído às características inerentes da junta deslizante, a qual permite movimentos angulares e de deslocamento (este último não considerado na análise por ser de amplitude muito

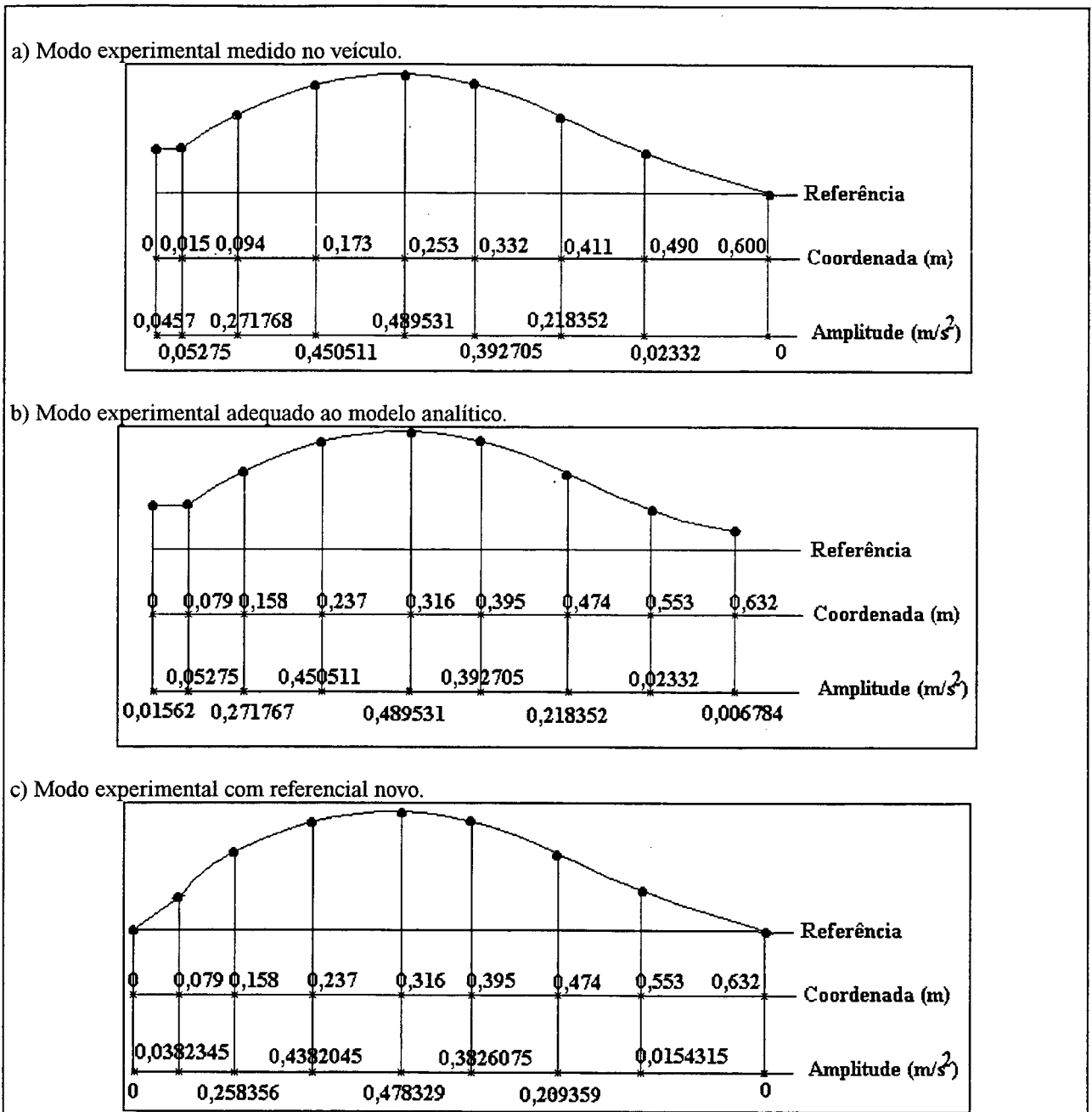


Figura 6.15: Modo experimental do semi-eixo usado na análise.

reduzida no fenômeno vibratório) e apresenta tolerância de manufatura e montagem bem superiores às existentes na junta fixa (permitindo inclusive folgas radiais e deslocamento longitudinal).

b) A correção proposta tenta adequar-se à assimetria do modo, atingindo um certo êxito neste aspecto apesar de ficar um pouco deficiente no lado da junta deslizante, provavelmente devido aos fatos mencionados anteriormente.



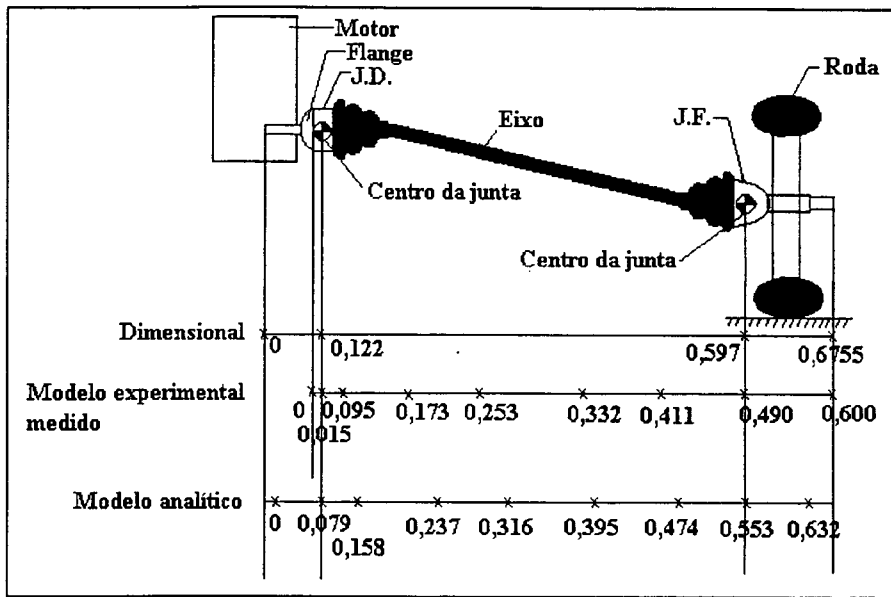


Figura: 6.16: Modelos adotados na análise.

c) A localização do local das correções a serem feitas é bastante adequada, indicando serem as juntas (nodos 2 e 8) as principais fontes de discrepância entre os modelos. Uma fonte secundária aparece devido à assimetria no eixo já discutida acima. Após a correção, observa-se claramente a redução da discrepância entre os modelos devido à redução do valor máximo do gráfico de  $1,73 \cdot 10^{14}$  para  $9,684 \cdot 10^{13}$  (sendo agora apenas indicado o eixo como local a ser corrigido).

d) A correção proposta decai rapidamente (vide figura 6.17), indicando a rápida convergência do processo.

e) Dentre os indicativos de coerência dos modelos apresentados no final dos anexos, salienta-se os valores de MSF e MAC que antes da correção apresentam os valores 0,84 e 0,93 e após a correção são 1,06 e 0,99, indicando a melhoria da qualidade do modelo analítico.

f) O autovalor é o único item que não apresentou uma convergência aceitável. Várias avaliações foram feitas para verificar a causa deste fato (condição de contorno inapropriada, dimensões dos modelos erradas, dados experimentais errados, etc) e concluiu-se que a causa mais provável deste fracasso é a limitação inerente deste modelo simplificado.

Iteração	Correção na J.D.	Correção na J.F.
1	$4,172 \cdot 10^8$	$1,014 \cdot 10^9$
2	$1,071 \cdot 10^5$	$-3,681 \cdot 10^5$
3	2,1	33,9

Figura 6.17: Convergência da correção proposta.

### Conclusão:

A aplicação da metodologia de otimização de modelos analíticos com base nas propriedades modais obtidas experimentalmente do semi-eixo gerou bons resultados apesar do singelo modelo analítico adotado. A convergência do processo, a localização adequada dos locais de correção no modelo e a boa coerência do autovetor obtido com o processo indicam que a metodologia é válida.

A limitação do modelo analítico usado é a provável causa do resultado ruim obtido quanto ao autovalor. Este problema deverá ser superado na etapa posterior a este trabalho, onde um software de elementos finitos comercial e o uso de hardware mais poderoso deverão fornecer subsídios para a obtenção de um modelo analítico inicial mais adequado.

# Capítulo

# 7

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES FINAIS E NOVAS PERSPECTIVAS

#### 7.1) Introdução.

No capítulo 1 deste trabalho estão expostos os motivos que orientaram este estudo que objetivou a análise do comportamento dinâmico de semi-eixo homocinético de uma forma mais sistemática que a existente na literatura conhecida. A determinação dos parâmetros influentes no seu comportamento, a definição de metodologias experimentais (configuração de ensaio representativo), a investigação de ferramentas tecnológicas modernas (otimização de modelos modais com abordagem teórico-experimental) e o desenvolvimento de meios físicos para ensaios em laboratório (bancada de teste) certamente contribuem, de alguma forma, para enriquecer o conjunto de conhecimentos existentes nesta área da tecnologia automobilística, justificando o sentimento de que os objetivos propostos foram alcançados.

Provavelmente o aspecto mais importante deste trabalho reside, não apenas nas informações e conclusões obtidas sobre o fenômeno analisado, mas também na divulgação destes resultados em diferentes congressos que abrangem uma ampla gama de audiências, desde congressos técnicos de enfoque industrial nacionais e internacionais [52] [53] [54] [55] [56] até congressos científicos de enfoque acadêmico nacionais e internacionais [57] [58] [59] [60] [61].

Sob o ponto de vista da empresa que patrocinou a execução deste estudo, o desenvolvimento de um "know-how" próprio na área de vibrações e acústica eleva-a a um nível tecnológico cobiçado por muitas empresas da área automobilística em todo o planeta, porém compartilhada efetivamente por poucos e honrosos exemplos.

A seguir é apresentado um resumo sucinto das conclusões obtidas neste estudo e as perspectivas que se abrem para futuros trabalhos.

## **7.2) Resumo das conclusões obtidas neste estudo.**

Dispersas em cada capítulo deste trabalho existem conclusões que foram alcançadas com a análise dos resultados obtidos. Neste item foi efetuado um resumo destas conclusões já apresentadas e algumas novas com o cruzamento das informações dos capítulos do trabalho e é indicado o capítulo de referência de cada uma para maiores explicações.

### **7.2.1) Validação do equipamento e metodologia.**

O primeiro grande aprendizado prático foi a importância de se executar uma validação de todo e qualquer equipamento novo ou metodologia nova a ser utilizada em uma análise que tenha a pretensão de ser séria. O problema identificado no software de análise modal experimental exprime claramente esta necessidade, uma vez que não existiam, a priori, dúvidas sobre o funcionamento de um software comercializado internacionalmente, há pelo menos cinco anos (vide capítulo 2).

### **7.2.2) Validade da técnica da análise modal experimental.**

Após a devida correção do software, concluiu-se das análises efetuadas que a técnica de análise modal experimental tradicional (linear) pode ser aplicada ao fenômeno vibratório envolvido com a primeira ressonância transversal de semi-eixo homocinético, desde que seja adotada uma abordagem de fixar os parâmetros externos influentes em níveis representativos durante a execução da análise (também conhecida como abordagem "step-by-step")(vide capítulo 2 e 4).

### **7.2.3) Parâmetros externos influentes.**

Foram identificados os seguintes parâmetros externos influentes (não inerentes ao semi-eixo, mas decorrentes da sua aplicação veicular) no fenômeno em análise (vide capítulo 4):

- a) torque aplicado ao sistema.
- b) condições de contorno.

- c) nível de excitação.
- d) tipo de excitação.
- e) disposição física espacial.

#### **7.2.4) Definição de um ensaio representativo.**

Devido à ótima repetibilidade e estabilidade em relação aos fatores externos influentes do ensaio, conclui-se que o experimento mais indicado para a verificação dos parâmetros dinâmicos do componente é com a sua instalação no veículo (veículo apoiado sobre suas próprias rodas no solo, de forma a aplicar as condições de contorno e configuração espacial reais ao semi-eixo) sob um valor médio de torque aplicado a ele (aconselha-se 100 Nm), com o uso de excitação pseudo-randômica a um nível representativo (medições com excitação senoidal são muito dispendiosas e não se justificam no presente caso, uma vez que existe uma relação que permite estimar uma de posse da outra) com uma rápida verificação das diferenças existentes nas medições efetuadas em direções distintas (vertical e horizontal).

Esta definição é muito importante devido ao fato de ser comum empresas ou entidades de pesquisa confrontarem resultados obtidos com experimentos distintos, acarretando em comparações carentes de significado prático. Por exemplo, é comum efetuar medição de resposta em frequência com semi-eixo instalado no veículo suspenso pelo elevador de carros, distendendo completamente a suspensão, alterando a condição de contorno da junta fixa e aplicando um torque nulo ao componente. Este tipo de experimento, efetuado usualmente com excitação impulsiva de baixo nível energético, apresentou uma repetibilidade muito pequena e seus resultados distoam amplamente dos obtidos no ensaio proposto neste trabalho (vide capítulo 4).

#### **7.2.5) Conceito de frequência natural de semi-eixo.**

De forma implícita, porém enfática devido aos vários exemplos fornecidos, este trabalho pretende alterar o conceito de "frequência natural do semi-eixo" como um valor inerente apenas ao componente para um conceito mais abrangente onde os parâmetros externos influentes participam ativamente. Esta mudança, até um certo ponto sutil, é importante para salientar que a

obtenção da curva em resposta em frequência "do semi-eixo" em condição livre-livre (usualmente efetivada com o componente suspenso por molas, fios de nylon ou tiras de material elastomérico ou apoiado sobre espuma) não representa adequadamente o comportamento dinâmico do componente quando na sua aplicação real (que é realmente imposta pelo veículo).

Portanto, a informação da curva de resposta em frequência, obtida com determinado semi-eixo homocinético, deveria ser acompanhada das condições básicas da execução do ensaio (parâmetros externos influentes apresentados no item 7.2.3) para permitir a avaliação adequada da mesma (vide capítulo 4).

#### **7.2.6) Complexidade do fenômeno dinâmico.**

O fenômeno dinâmico que envolve este componente quando na sua aplicação veicular é complexo, em especial porque os parâmetros dinâmicos estão em contínua variação. Salienta-se o efeito identificado da variação considerável da frequência natural do sistema com a variação da amplitude da excitação na análise efetuada com excitação senoidal, a qual é a mais indicada para este estudo, uma vez que ela não efetua uma linearização do fenômeno ( que é o caso da pseudo-randômica ou impulsiva) e temos um controle mais completo dos seus parâmetros.

Foi observado que um aumento de 25 dB na excitação pode causar uma redução de cerca de 6% na frequência natural. Considerando-se os dados obtidos em teste de campo, constata-se que na faixa de operação do motor, com o aumento da rotação, ocorre esta variação na excitação. Portanto o semi-eixo homocinético apresenta um comportamento distinto para cada regime de rotação do motor.

Soma-se a isto o efeito da variação da frequência natural com o torque aplicado a ele, o qual é diferente a cada rotação do motor, que atinge variações de 30% numa variação de 0 a 240 Nm (vide capítulo 4).

#### **7.2.7) Componente do semi-eixo que domina a sua primeira ressonância transversal.**

A configuração espacial ,obtida para este primeiro modo de vibração transversal do semi-eixo homocinético, indica que o componente que domina as características dinâmicas do conjunto

é o eixo de conexão, sendo ele o mais indicado a sofrer alterações estruturais no intuito de melhorar o desempenho do conjunto (alternando o seu desenho ou acoplando sistemas que alterem o seu comportamento, como, por exemplo, absorvedores dinâmicos ou dessintonizadores). Esta conclusão vai ao encontro de referências nesta área [32](vide capítulo 4).

#### **7.2.8) Fontes de não-linearidade no semi-eixo.**

O amortecimento do semi-eixo homocinético advém, em sua maior parte, das juntas homocinéticas, sendo provavelmente decorrente das folgas e atrito existentes entre as suas partes móveis.

Devido a este fato, as juntas homocinéticas não são indicadas para servirem de local de excitação para efetivar a análise modal, além de que nestes locais a amplitude do modo de vibração é pequena e confere uma alta impedância, impedindo a fácil excitação do conjunto (vide capítulo 4).

#### **7.2.9) Uso da técnica de otimização de modelos.**

O uso de técnica analítico-experimental, baseada na metodologia da matriz de erro (E.M.M.) para aprimorar um modelo simples de elementos finitos frente a resultados experimentais, mostrou-se válida e com uma convergência bastante rápida. Melhores resultados para o autovalor deverão ser obtidos com o uso de modelos analíticos mais refinados (modelo com maior número de nodos), (vide capítulo 6).

#### **7.2.10) Modelamento analítico de semi-eixo.**

Um subproduto do estudo de otimização de modelos analíticos foi a definição de um modelo simples e eficiente para o comportamento dinâmico do semi-eixo homocinético. Constatou-se que as juntas homocinéticas impõem, devido às suas ressonâncias serem numa faixa de frequências muito acima da do eixo, uma condição de contorno de bi-apoiamento ao eixo. Portanto, um modelo teórico simples que represente adequadamente a primeira ressonância transversal pode ser obtido modelando apenas o eixo e impondo condições de contorno de apoio



no local definido pelos centros de articulação das juntas. Este fato foi observado também por Leônidas [8], porém através de abordagem analítica (vide capítulo 6).

Esta observação gera uma justificativa teórica para a regra empírica proferida por Cheesman [62], o qual afirma que a frequência natural do semi-eixo montado no veículo é cerca da metade do valor obtido para o eixo em condição livre-livre uma vez que pode-se obter a seguinte fórmula [36](da equação de Euler para a viga sob vibração flexural):

$$F_n = 2\pi\beta^2 \sqrt{\frac{EI}{m_l}} \quad (7.1)$$

Onde:  $F_n$  é a frequência natural da viga.

$E$  é o módulo de elasticidade.

$I$  é o momento de inércia transversal.

$m_l$  é a massa linear da viga (massa por unidade de comprimento).

$\beta$  é dado pela condição de contorno.

-livre-livre:  $(\beta l)^2 = 22,4$

-biapoiado:  $(\beta l)^2 = 9,97$

O que indica uma relação de cerca de 2,27 entre os dois casos.

### 7.2.11) Explicação da influência do torque no autovalor.

O parâmetro externo que apresenta maior influência no comportamento dinâmico do semi-eixo, a aplicação de torque, pode ser explicado pela definição de um momento de articulação das juntas homocinéticas baseada na teoria de contato de corpos elásticos de Hertz (vide capítulo 4).

### 7.2.12) Influência do desgaste com o uso normal.

Em relação ao desgaste do componente devido ao seu uso normal no veículo, os ensaios efetivados após 22419 Km rodados indicam que não ocorreram alterações sensíveis nos parâmetros dinâmicos do semi-eixo homocinético (vide capítulo 4).

### **7.2.13) Desenvolvimento da bancada de testes.**

O projeto e a implementação da bancada de teste permitiram a aquisição de conhecimentos na área de projeto de dispositivos para ensaios dinâmicos, além de gerar resultados satisfatórios já com o nível atual do protótipo construído. A versatilidade e repetibilidade obtidas com a bancada demonstram as vantagens de substituir o veículo completo por ela, cujas perspectivas são de aprimoramento com a implementação das melhorias propostas (vide capítulo 5).

### **7.3) Novas perspectivas.**

O estudo sobre o comportamento dinâmico de semi-eixo homocinético apresentado neste trabalho certamente colabora, em alguma extensão, para elucidar os parâmetros envolvidos neste fenômeno e indica conceitos de projeto a serem observados. Porém, dada a complexidade do assunto enfocado, vários pontos ficam para serem investigados no futuro. Abaixo é apresentada uma listagem englobando alguns destes pontos.

#### **7.3.1) Aprimoramento da otimização de modelos teórico-experimental.**

A metodologia de otimização de modelos pela técnica da matriz de erro apresenta boas perspectivas de gerar melhores resultados se aplicada a um modelo teórico mais sofisticado que o usado neste trabalho.

Existe a pretensão de compatibilizar a abordagem teórica desenvolvida por Leônidas [8] utilizando o método da matriz de transferência com esta técnica, com o intuito de estabelecer um procedimento teórico-experimental que uma vez aplicado a um caso específico, permita simular alterações estruturais de forma mais confiável, reduzindo a necessidade de experimentos práticos e o tempo de desenvolvimento de produtos novos.

#### **7.3.2) Aprimoramento da bancada de teste.**

Apesar dos resultados obtidos com o primeiro protótipo da bancada de teste não ter atingido sucesso pleno, o seu conceito de projeto apresenta boas perspectivas de aprimoramento que deverão ser efetivadas em curto espaço de tempo.

Uma proposta de melhoria é apresentada neste trabalho e deverá ser implementada no futuro próximo.

### **7.3.3) Projeto de sistemas de controle de vibrações.**

As informações e metodologias desenvolvidas neste estudo permitem a aplicação direta deste conhecimento no projeto de sistemas de controle de vibrações para semi-eixos homocinéticos (neutralizadores dinâmicos, absorvedores de vibração ou dessintonizadores) ou na alteração estrutural do eixo para alterar o seu comportamento dinâmico frente às necessidades de cada aplicação (eixo maciço, tubular, trepanado ou monobloco).

Estes conceitos deverão ser traduzidos em diretrizes de projeto a serem utilizados de maneira mais corriqueira pelos analistas de produto no momento de definir novos projetos, transformando a performance dinâmica em um item de projeto ao lado da resistência mecânica.

### **7.3.4) Generalização dos resultados obtidos neste trabalho.**

Todos os resultados apresentados neste estudo foram obtidos com um específico semi-eixo usado como referência. A evolução natural deste trabalho compreende a análise de outros tipos de semi-eixo em outras aplicações veiculares (inclusive tração traseira) para avaliar as singularidades de cada caso e obter regras gerais de orientação no projeto de semi-eixos homocinéticos.

### REFERÊNCIAS.

- [1] Wagner, P.E.; "Basic Requirements for Constant Velocity Universal Joints - Universal Joint and Driveshaft Design Manual", SAE, 1979, U.S.A.
- [2] Orain, M.; "General Theory and Experiment of Homocinetic Joints", Thesis for the degree of Docteur - Ingenieur at the Université Pierre et Marie Curie, 1976, France.
- [3] Adams, D.; Relatórios internos de estudos dinâmicos em semi-eixos homocinéticos da GKN-Technology, Inglaterra.
- [4] Cheesman.D.; Relatórios internos de estudos dinâmicos em semi-eixos homocinéticos da GKN-AG, Alemanha.
- [5] Baron, E.; Relatórios internos de estudos dinâmicos em semi-eixos homocinéticos da GKN-GS, França.
- [6] Adams, D.; Contatos efetivos durante visita técnica à GKN-Technology, Inglaterra, novembro de 1991.
- [7] Ewins, D.J.; Contatos efetivados durante visita ao Imperial College of Science and Technology - University of London, Inglaterra, novembro de 1991.
- [8] Coutinho, L.F.; Dissertação de mestrado na área de dinâmica estrutural com conclusão prevista para 1994, UFRGS, Porto Alegre, Brasil.
- [9] Ewins, D.J., "Modal Testing: Theory and Practice", John Wiley & Sons Inc., 1984
- [10] Craig, R.R., "Structural Dynamics", John Wiley & Sons Inc., 1981.
- [11] Ewins, D.J., "Measurement and Application of Mechanical Impedance Data", The Journal of the Society of Environmental Engineers, december 1975-june 1979.
- [12] Ewins, D.J., "Whys and Wherefores of Modal Testing", SEE journal, september 1979.
- [13] Young, J.P.; An, F.J., "Mathematical Modeling Via Direct use of Vibration Data", SAE 690615, october 1969.
- [14] Zimmerman, R.; Allemang, R.J.; Brown, D.L., "Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis", SAE 790221, march 1979.

- [15] Klosterman, A.; Zimmerman, R.J., "Modal Survey Activity Via Frequency Response Functions", SAE 751068, november 1975.
- [16] Brown, D.; Carbon, G.; Ramsey, K., " Survey of Excitation Technics Applicable to the Testing of Automotive Structure", SAE 770029, march 1977.
- [17] Walgrave, I.C., Ehlbeck, J. M., " Understanding Modal Analysis", SAE 780695, august 1978.
- [18] Richardson, M.; Kniskern, J., "Identifying Modes of Large Structures from Multiple Input and Response Measurements", SAE 760895, december 1976
- [19] Allemang, R.J.; Rost R.W.; Brown, D., "Dual Input Estimation of Frequency Response Functions for Automotive Structures", SAE 820193, february 1982.
- [20] Richardson, M. H.; Formenti, D. L., "Parameter Estimation from Frequency Response Measurements using Rational Fraction Polynomials", V.E.C. - U.S.A., 1982.
- [21] Kurka, P.R.G.; "Curso de Análise Modal", curso ministrado durante o V DINAME, março 1993.
- [22] Dobson, B. J.; Lee, H. G., "The Direct Measurement of Structural Mass Stiffness and Damping Properties", Journal of Sound and Vibration, 1991.
- [23] Dobson, B.J., "A Straight-Line Technique for Extracting Modal Properties from Frequency Response Data", Mechanical Systems and Signal Processing, 1987
- [24] Ewins, D.J., "Estimation of Resonant Peak Amplitudes", Journal of Sound and Vibration, 1975.
- [25] Parkins, D. W.; Hodgetts, D., "Vibrations Modes of an Automobile Driveline", SAE 740952, october 1974.
- [26] Stroud, R.C.; Coppolina, R. N., "A Global Technique For Estimation of Modal Parameters from Measured Data", SAE 851926, october 1985
- [27] Ewins, D.J.; Griffin, J., "A State-of-the-Art Assessment of Mobility Measurement Techniques - Results for Mid-Range Structures (30-3000 Hz)", Journal of Sound and Vibration, 1981.
- [28] Ewins D.J.; Sainsbury, M.G., "Mobility Measurements for the Vibration Analysis of Connected Structures", The Shock and Vibration Bulletin, january 1972.

- [29] Berker, A.H.; "Description of Drivetrain Disturbances - Universal Joint and Driveshaft Design Manual", SAE - Advances in Engineering Series # 7, U.S.A., 1979.
- [30] Sturis, T., "Engine Unbalance Forces and Moments Due to Reciprocating Components", GKN Internal Report. february. 1984.
- [31] Sturis, T., "Front Wheel Drive Axle Related Vibration", GKN Internal Report, may, 1987.
- [32] Van Dest, J. C. ; "Front Wheel Drive Cars : A New Approach in C. V. Plunging Joint Design", SAE 885082, U.S.A., 1988.
- [33] Gomes, R. B.; Albertoni, M.; "Influência dos Sistemas de Suspensão e Esterçamento sobre Deslocamento da Junta Deslizante Homocinética", Anais do VI SIMEA, Brasil, 1991.
- [34] Gillespie, T. D.; "Fundamentals of Vehicle Dynamics," SAE R-114, U.S.A., 1992.  
SAE Advances in Engineering Series #7, U.S.A., 1979.
- [35] Eschmann; Hasbargen; Weigand; "Die Wälzlagerpraxis", R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1978.
- [36] Thompson, W.T.; "Teoria da Vibração com Aplicações", Editora Interciência, Rio de Janeiro, Brasil, 1978.
- [37] Ewins, D.J., "Structural Dynamic Model Updating - A Review", paper presented at V DINAME (1993), Caldas da Imperatriz, Santa Catarina.
- [38] Wright, R.S., Chiarito, V.P., "Comparison of Experimental and Analytical Structural Dynamics using a Modal Assurance Criterion", SAE paper # 851928
- [39] Sidhu, J.; "Reconciliation of Predicted and Measured Modal Properties of Structures"; PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, London, 1983.
- [40] Sidhu, J.; Ewins, D.J.; "Correlation of Theoretical and Measured Structural Models", Paper presented at the 2<sup>nd</sup> International Modal Analysis Conference, Orlando, february 1984.
- [41] Guyan, R.J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal, Vol.3, n°.2, pp380, february 1965.
- [42] Baruch, M, "Proportional Optimal Orthogonalisation of Measured Modes", AIAA Journal, Vol.18 n°.7 july 1980.

- [43] Targoff, W.P., "Orthogonal Check and Correction of Measured Modes", AIAA Journal, Vol.14 February 1976.
- [44] Ewins, D.J.; He, J. ; Lieven, N.; "A Review of the Error Matrix Method (EMM) for Structural Dynamic Model Comparison"; ESA SP-289, January 1989.
- [45] To, W.M.; Ewins, D.J.; "Structural Modification Analysis using Rayleigh Quotient Iteration"; Int. J. Mech. Sci., vol.32, n\_ 3, pp 169-179, 1990.
- [46] He, J.; "Identification of Structural Dynamic Characteristics"; PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, London, 1987.
- [47] Lin, R.M.; Ewins, D.J.; "Model Updating Using FRF Data"; Proceedings of The 15<sup>th</sup> International Seminar on Modal Analysis, September 1990, Katholieke Universiteit Leuven.
- [48] Urgueira, A.P.V.; "Complex Structure Analysis Using Incomplete Modes"; Internal Report 88012, Dynamic section, Department of Mechanic Engineering, Imperial College, London.
- [49] Lieven, N.A.J.; Ewins, D.J.; "Expansion of Modal Data for Correlation"; Internal Report, Department of Mechanic Engineering, Imperial College, London.
- [50] Lawrence, Charles; "Identification of Differences Between Finite Element Analysis and Experimental Vibration Data"; Journal of the Society of Environmental Engineers, June 1988; paper presented at IMAC 5, 1987.
- [51] Jordan, R.; Programas desenvolvidos em ATMATLAB para cálculo de autovalores de vigas homogêneas; LVA-UFSC.
- [52] Kniest, R. R.; "Estudo do Comportamento Dinâmico em Semi-Eixo Homocinético com o Uso de Análise Modal Experimental - 2ª Parte", publicado no II Congresso e Exposição Internacionais de Tecnologia da Mobilidade - SAE-B'92 (SAE 931699), novembro 1993, São Paulo.
- [53] Kniest, R.R.; "Estudo de Comportamento Dinâmico em Semi-Eixo Homocinético com o Uso de Análise Modal Experimental", apresentado no I Congresso e Exposição Internacionais de Tecnologia da Mobilidade - SAE-B'92 (SAE 921458), novembro 1992, São Paulo.

- [54] Coutinho, L. F.; Kniest, R. R.; "Determinação Teórica e Experimental das Características Vibratórias de Eixos e Semi-Eixos Homocinéticos" apresentado no I Congresso e Exposição Internacionais de Tecnologia da Mobilidade - SAE-B'92 (SAE 921468), novembro 1992, São Paulo.
- [55] Kniest, R. R.; "Análise Modal Aplicada a Semi-Eixo Homocinético", trabalho publicado no II SIBRAV - Simpósio Brasileiro de Acústica Veicular, agosto de 1993, São Paulo.
- [56] Kniest, R. R.; "Study on Dynamics of Half-Shaft using Experimental Modal Analysis", trabalho publicado para o GKN Technical Award'93, julho de 1993, Siegburg, Alemanha.
- [57] Kniest, R. R.; Gerges, S. N. Y.; "Study on Dynamics of Half-Shaft Using Experimental Modal Analysis", apresentado no V Simposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME 93, março de 1993, Santo Amaro da Imperatriz, Santa Catarina.
- [58] Kniest, R. R.; Gerges, S. N. Y.; "Desenvolvimento de Bancada de Teste Para Semi-Eixo Homocinético", a ser apresentado no 1º Congresso Brasil/Argentina - 15º Encontro da SOBRAC, abril de 1994, Florianópolis.
- [59] Kniest, R. R.; Gerges, S. N. Y.; "Método de Otimização Teórico - Experimental de Modelo Modal", a ser apresentado no 1º Congresso Brasil/Argentina - 15º Encontro da SOBRAC, abril de 1994, Florianópolis.
- [60] Kniest, R. R.; Gerges, S. N. Y.; "Experimental Modal Analysis Applied to Homocinetic Half-Shaft"; trabalho a ser apresentado no 5<sup>th</sup> International Conference on Structural Dynamics, julho de 1994, Southampton, Inglaterra.
- [61] Kniest, R. R.; Gerges, S. N. Y.; "Modal Updating Technic Applied to Jointed Structure", proposta de trabalho a ser apresentado no MOVIC - International Conference on Motion and Vibration Control, setembro de 1994, Yokohama, Japão.
- [62] Chessman, D.; "V W L T project", Relatório interno da GKN - AG apresentado no NVH Working Group Annual Meeting, abril de 1989, Lohmar, Alemanha.



## ANEXO 1

### Normalização de autovetor em relação à massa

A principal característica do modelo modal é que ele apresenta propriedades de ortogonalidade definidas como (vide prova apresentada a seguir):

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & m_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & k_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (2)$$

Onde:  $[\Psi]$  é a matriz de autovetores (composta de colunas de autovetores  $\{\Psi\}_r$ ).

$[M]$  é a matriz de massa do sistema.

$[K]$  é a matriz de rigidez do sistema.

$m_r$  é a massa generalizada (ou modal) de cada modo  $r$ .

$k_r$  é a rigidez generalizada (ou modal) de cada modo  $r$ .

Para cada modo, tem-se que  $\bar{w}_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$ . Portanto, tem-se a matriz diagonal de

autovalores dada por  $\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{w}_r^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & m_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & k_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix}$ . Atenção deve ser dada ao fato de

que a matriz de autovetores  $[\Psi]$ , ao contrário da matriz de autovalores  $\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{w}_r^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix}$  que é única,

não é determinada de forma única. Enquanto a frequência natural (autovalor) é uma quantidade fixa de valor absoluto, a forma do modo de vibração (autovetor) indica os deslocamentos dos

nodos da malha de discretização, em relação à posição de repouso de forma comparativa entre eles. Portanto, aplicando um fator de escala qualquer ao autovetor não altera a informação da sua forma, apenas a sua amplitude. O que determina o procedimento de escala adotado (ou normalização) para o cálculo dos valores dos autovetores depende do posterior uso desejado para esta informação.

Os métodos de normalização mais difundidos são os seguintes:

a) Máximo valor unitário: parametriza o autovetor de forma que o maior deslocamento presente adquira o valor de magnitude 1 e fase 0, referenciando todos os demais em relação a ele.

b) Normalização em relação à massa: neste caso os autovetores são representados por  $[\Phi]$  e apresentam as seguintes propriedades.

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & I & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \omega_r^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde  $\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & I & \\ & & \backslash \end{bmatrix}$  é a matriz identidade. Portanto, a relação existente entre os autovetores

normalizados em relação à massa  $\{\Phi\}_r$  e a sua forma genérica  $\{\Psi\}_r$  é simplesmente:

$$\{\Phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\Psi\}_r \quad (5)$$

ou seja:

$$[\Phi] = [\Psi] \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & m_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

**Prova das propriedades de ortogonalidade dos modos.**

Tem-se a equação de movimento de um sistema genérico de N graus de liberdade e não amortecido:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (7)$$

onde :  $[M]$  é a matriz de massa de dimensões N x N.

$[K]$  é a matriz de rigidez de dimensões N x N.

$\{x(t)\}$  é o vetor de deslocamento (variável com o tempo) de dimensões N x 1.

$\{\ddot{x}(t)\}$  é o vetor de acelerações (variável com o tempo) de dimensões N x 1.

$\{f(t)\}$  é o vetor de forças externas (variável com o tempo) de dimensões N x 1.

Considerando a solução de vibração livre ( $\{f(t)\} = \{0\}$ ) pode-se determinar as propriedades modais naturais (ou normais). Neste caso, assume-se que a solução existe na forma:

$$\{x(t)\} = \{x\}e^{i\omega t} \quad (8)$$

onde:  $\{x\}$  é um vetor de amplitudes de deslocamento dependente com o tempo de dimensões N x 1.

Neste caso, tem-se que :

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{x} \\ \dot{x} \\ x \end{array} \right\} = -\omega^2 \{x\}e^{i\omega t} \quad (9)$$

Substituindo esta solução ( a qual impõe que o sistema é capaz de vibrar em uma frequência isolada  $\omega$ ) na equação de movimento (7), tem-se:

$$([K] - \omega^2[M])\{x\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (10)$$

A única solução não trivial ocorre para:

$$\det|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (11)$$

Desta equação pode-se obter os N valores  $\bar{w}^2$  que definem as freqüências naturais não amortecidas (autovalores) do sistema:  $w_1^2, w_2^2, \dots, w_r^2, \dots, w_N^2$ .

Cada um dos autovalores acima pode ser substituído na equação (10) e obtêm-se os valores relativos de  $\{x\}$  que compõem o autovetor  $\{\Psi\}_r$  (forma real do modo de vibração) associado ao autovalor em questão.

A solução completa pode ser expressa em duas matrizes de dimensões N x N, ditas automatrizes:

$$\begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \bar{w}_r^2 & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \text{matriz diagonal de autovalores não amortecidos.}$$

$[\Psi]$  matriz de autovetores (matriz modal), composta por autovetores reais coluna  $\{\Psi\}_r$ , associados a cada freqüência natural  $w_r$ .

Para um particular modo r, tem-se da equação (10):

$$([K] - \bar{w}_r^2 [M])\{\Psi\}_r = \{0\} \quad (12)$$

Pré-multiplicando a equação pela transposta de um dado autovetor s:

$$\{\Psi\}_s^T ([K] - \bar{w}_r^2 [M])\{\Psi\}_r = 0 \quad (13)$$

Porém, tem-se da equação (10) aplicada para um dado modo s:

$$([K] - \bar{w}_s^2 [M])\{\Psi\}_s = \{0\} \quad (14)$$

A qual, transposta e pós-multiplicada por  $\{\Psi\}_r$  fornece:

$$\{\Psi\}_s^T ([K]^T - \bar{w}_s^2 [M]^T)\{\Psi\}_r = 0 \quad (15)$$

Devido ao fato de que  $[M]$  e  $[K]$  são simétricas, elas são idênticas às suas transpostas e as equações (2.45) e (2.47) podem ser combinadas para fornecer:

$$(\bar{w}_r^2 - \bar{w}_s^2) \{\Psi\}_s^T [M] \{\Psi\}_r = 0$$

(16)

- caso  $\bar{w}_r^2 \neq \bar{w}_s^2$ , tem-se que :

$$\{\Psi\}_s^T [M] \{\Psi\}_r = 0$$

(17)

que junto com as equações (2.45) e (2.47), significa que:

$$\{\Psi\}_s^T [K] \{\Psi\}_r = 0$$

(18)

- caso  $\bar{w}_r^2 = \bar{w}_s^2$ , tem-se de (2.45) que:

$$(\{\Psi\}_r^T [K] \{\Psi\}_r) = \bar{w}_r^2 (\{\Psi\}_s^T [M] \{\Psi\}_r)$$

(19)

de forma que  $\bar{w}_r^2 = \frac{k_r}{m_r}$ .

Portanto, as possíveis combinações de  $\bar{w}_r$  e  $\bar{w}_s$  fornecem o sistema de equações matriciais:

$$[\Psi]^T [M] [\Psi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & m_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix}$$

(20)

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & k_r & \\ & & \backslash \end{bmatrix}$$

(21)

## ANEXO 2

### Teoria de contato de corpos sólidos de Hertz.

De todos os parâmetros externos ao semi-eixo que foram identificados como influentes nas suas características dinâmicas (em especial no autovalor) o efeito do torque aplicado ao conjunto é o que apresenta maior importância. A relação entre o autovalor medido experimentalmente com o semi-eixo acoplado ao veículo e o torque aplicado ao sistema está representada graficamente na figura 4.17 e mostra uma lei de formação característica e peculiar.

Com o objetivo de esclarecer a causa deste fenômeno, vários mecanismos foram investigados, dos quais a melhor explicação obtida foi a de que o crescimento da frequência natural advém do aumento do momento (ou rigidez) de articulação das juntas homocinéticas em consequência do aumento do torque aplicado. Define-se como momento de articulação o momento necessário para articular a junta homocinética (movimento de rótula), a qual é proporcional à força de atrito entre as partes móveis internas da junta, cujos movimentos relativos permitem a articulação.

A relação entre a força de atrito e o torque aplicado à junta homocinética pode ser determinada pela teoria de contato de corpos sólidos de Hertz apresentada a seguir.

Inicialmente, deve-se definir como se distribuem os esforços internos em uma junta homocinética decorrentes da aplicação de torque. As juntas homocinéticas analisadas neste trabalho estão apresentadas no capítulo 1, onde pode-se visualizar os seus componentes internos.

Da geometria destes componentes, pode-se deduzir os esforços decorrentes da aplicação do torque que ocorrem na superfície de contato entre a esfera e o anel interno R e a ponta de eixo (no caso da junta fixa) e o anel interno V e o anel externo V (no caso da junta deslizante), obtendo a seguinte equação:

$$P_o = \frac{1000M_d}{nR \operatorname{sen} \delta \cos \gamma} \quad (1)$$

onde:  $P_o$  é a força normal à área de contato (N).

$M_d$  é o torque aplicado à junta (Nm).

R é o raio primitivo da junta (mm).

$\delta$  é o ângulo de contato transversal na pista ( $^{\circ}$ ).

n é o número de esferas da junta.

$\gamma$  é o ângulo de inclinação das pistas em relação ao eixo de simetria da junta ( $^{\circ}$ ).

Para facilitar a visualização, temos um desenho esquemático apresentando estes parâmetros para cada tipo de junta na figura 1, onde, além dos descritos acima, tem-se:

"e" é o deslocamento dos centros de curvatura longitudinal das pistas da ponta de eixo e do A.I.R. (mm).

$\alpha$  é o ângulo de deslocamento dos centros de curvatura dado por  $\tan \alpha = \frac{e}{R}$ .

Para o caso em análise, tem-se o seguinte dimensional:

Dimensão	Junta Fixa	Junta Deslizante
Curvatura da pista $\rho$ (mm).	7,95	10,0
Diâmetro da esfera $d_e$ (mm).	15,875	19,050
Raio Primitivo da junta R (mm).	26,964	26,500
Ângulo de contato esfera x pista $\delta$ ( $^{\circ}$ ).	50	65
Número de esferas "n".	6	6
Ângulo de inclinação das pistas $\gamma$ ( $^{\circ}$ ).	0	16
Deslocamento dos centros de curvatura "e" (mm).	4,52	0
Ângulo de deslocamento dos centros de curvatura $\alpha$ ( $^{\circ}$ ).	9,516068	0

Donde obtem-se a relação entre momento torçor aplicado à junta e a força normal na área de contato dada por:

$$\text{Junta Fixa: } P_o = 8,06883M_d(N) \quad (2)$$

$$\text{Junta Deslizante: } P_o = 7,21914M_d(N) \quad (3)$$

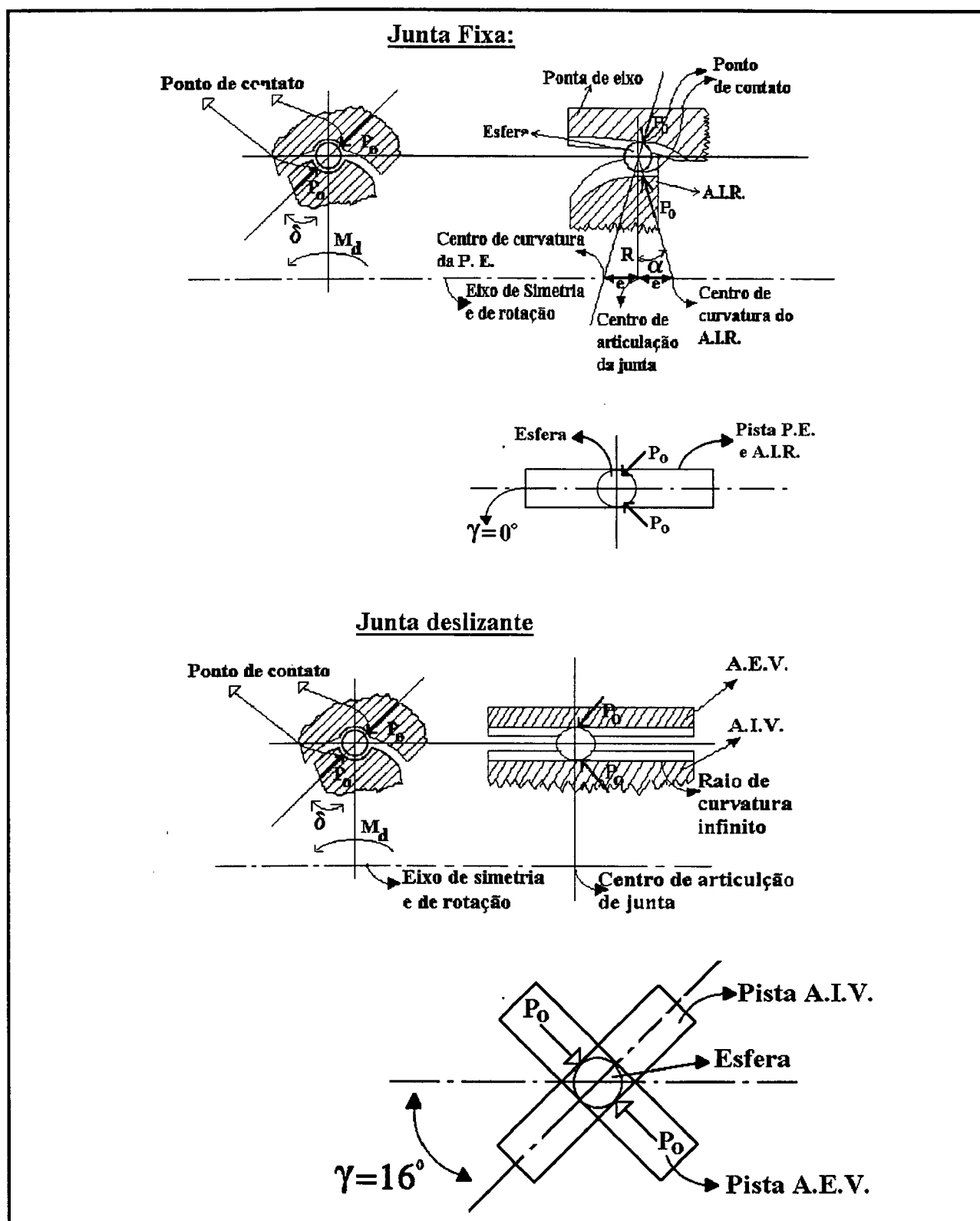


Figura 1: Representação esquemática da geometria das juntas homocinéticas.

Para o caso do contato existente entre a esfera e a gaiola da junta homocinética, deve-se analisar novamente cada tipo de junta em separado.



Para a junta fixa, tem-se o deslocamento dos centros de curvaturas "e" que propicia um efeito de cunha sobre as esferas, gerando uma força que tende a expulsá-las do interior da junta. Esta tendência deve ser impedida pela gaiola, a qual recebe a força de cada esfera dada por:

$$P_o = \frac{2000M_d \operatorname{sen} \alpha}{nR \operatorname{sen} \delta} \quad (4)$$

Aplicando o dimensional já apresentado:

$$P_o = 2,66794M_d(N) \quad (5)$$

Para a junta deslizante, tem-se que a inclinação relativa das pistas dos A.I.V. e A.E.V gera um efeito de cunha que tende a expulsar três esferas em cada direção da junta alternadamente (três para frente e três para trás). A gaiola cumpre a função de absorver estes esforços dados por:

$$P_o = \frac{2000M_d \tan \gamma}{nR \operatorname{sen} \delta} \quad (6)$$

Aplicando o dimensional já apresentado:

$$P_o = 3,979773M_d(N) \quad (7)$$

Uma vez definidos os esforços existentes em cada um dos componentes internos das juntas homocinéticas, pode-se usar a teoria do contato de corpos elásticos sólidos desenvolvida por Hertz [1] [35].

### **Corpos elásticos sólidos em contato.**

Quando dois corpos curvos, elásticos e sólidos são comprimidos juntos sob um carregamento, um certo achatamento ocorre no ponto de contato. Associado a esse achatamento, ali ocorre uma pressão elíptica na área de contato sobre a qual todo o carregamento é distribuído. As relações que comandam a forma e o tamanho da área de contato e a distribuição de esforços sobre essa área foi investigada matematicamente por Heinrich Hertz e publicado em Berlin em janeiro de 1881. As análises de Hertz estavam baseadas nas suposições do comportamento elástico e isotrópico do material, carregamento normal à superfície e uma área de contato cujas

dimensões eram relativamente pequenas em comparação com os raios de curvatura e com as dimensões dos corpos. Essas relações mostram-se de acordo com os resultados de testes práticos, exceto onde as dimensões da área de contato projetada são maiores em comparação com os raios de curvatura principais dos corpos de contato. Embora que o trabalho de Hertz estava limitado a uma análise da distribuição dos esforços na superfície de contato, investigadores mais recentes estenderam esta análise para incluir uma consideração dos estados de esforços abaixo da superfície, dentro dos limites da zona de contato, e tiveram comprovados seus resultados por testes foto-elásticos. Esses estudos revelaram a presença de importantes esforços de cisalhamento em adição aos esforços de compressão abaixo da superfície.

Considera-se os corpos serem representados por  $a$  e  $b$ , respectivamente, como aparece na figura 2 abaixo. Também são definidos os raios de curvatura no ponto de contato  $R_{a1}$  e  $R_{a2}$  para o corpo "a" e  $R_{b1}$  e  $R_{b2}$  para o corpo "b". Os raios de curvatura são medidos em dois planos, 1 e 2, perpendiculares entre si, como mostra a figura 2, a denotação 1 e 2 referem-se aos respectivos planos.

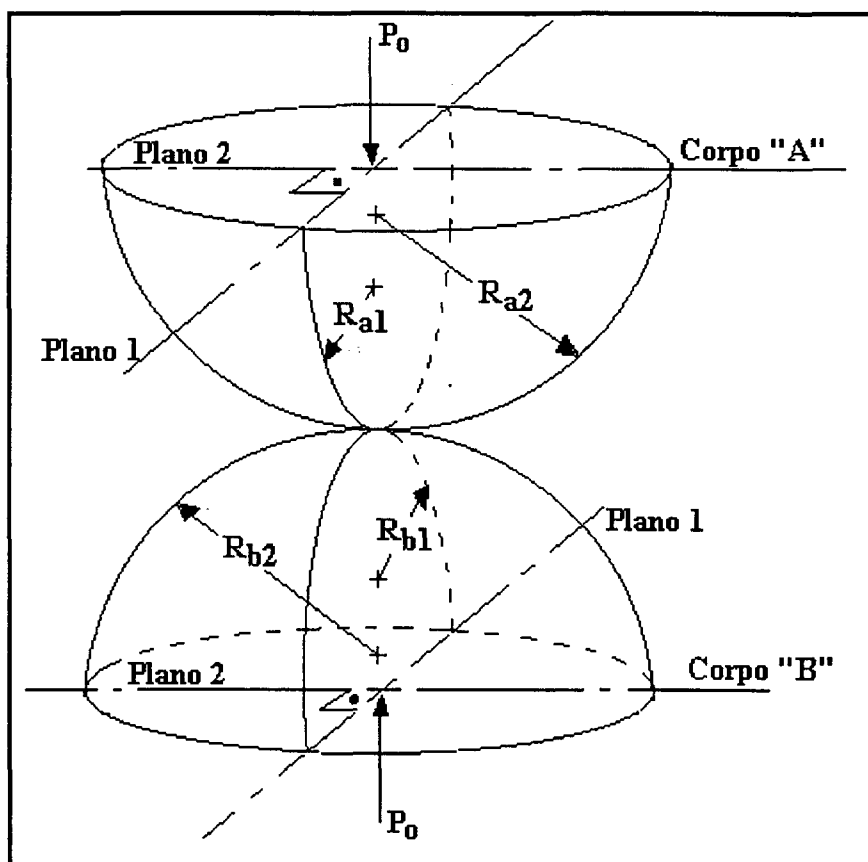


Figura 2: Caso genérico de contato entre dois corpos curvos.

Quando o corpo "a" e o corpo "b" são comprimidos pelo carregamento normal  $P_o$ , a área de contato resultante apresenta-se elíptica cujos semi-eixos a e b são mostrados na figura 3 abaixo.

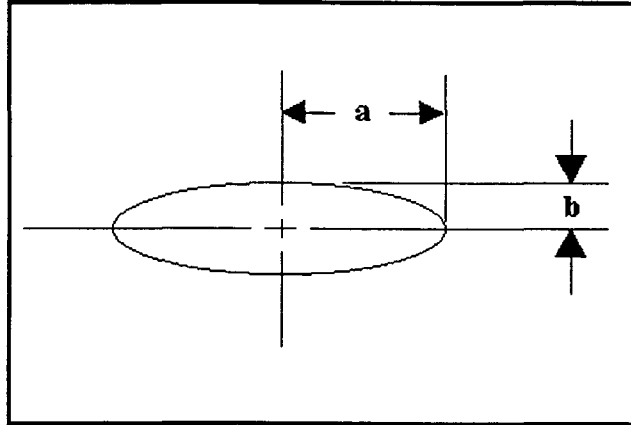


Figura 3: Área de contato elíptica.

Hertz dá as dimensões da área de contato em termos das funções transcendentais  $\mu$  e  $\nu$  seguintes:

$$a = \mu g \quad (8)$$

$$b = \nu g \quad (9)$$

onde:

$$g = \sqrt[3]{\frac{3P_o(\lambda_a + \lambda_b)}{8\left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}}\right)}} \quad (10)$$

$\lambda_a$  e  $\lambda_b$  são constantes elásticas dos dois corpos as quais dependem, por sua vez, dos respectivos valores do módulo de elasticidade E e gradiente Poisson  $\delta$ .

$$\lambda_a = \frac{4(1 - \delta_a^2)}{E_a} \quad (11)$$

$$\lambda_b = \frac{4(1 - \delta_b^2)}{E_b} \quad (12)$$

Se ambos os corpos são de aço com um módulo de elasticidade  $29 \times 10^6$  psi e com um gradiente de Poisson de 0,25, o valor de  $g$  da equação (10) é:

$$g = 0,0045944 \sqrt[3]{\frac{P_o}{\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}}}}$$
(13)

Os valores dos raios de curvatura principais,  $R_{a1}$ ,  $R_{a2}$ ,  $R_{b1}$  e  $R_{b2}$  são tomados de acordo com a figura 2.

Os raios principais de curvatura podem ser positivos ou negativos, dependendo se o centro de curvatura cai dentro ou fora do corpo, como mostra a figura 4 abaixo.

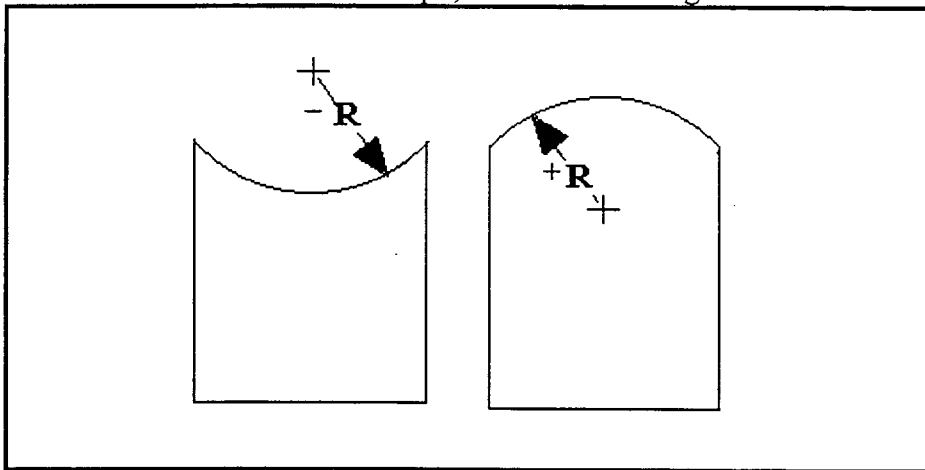


Figura 4: Convenção do sinal do raio de curvatura.

Além disso, os planos 1 e 2 devem ser adotados de forma a satisfazer a relação:

$$\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{b1}} > \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{b2}}$$
(14)

O plano 1 determina a direção do semi-eixo menor da área de contato e o plano 2 a direção do semi-eixo maior da área de contato.

Os valores das funções  $\nu$  e  $\mu$  para o uso nas equações (8) e (9) dependem da conformidade dos corpos de contato nas proximidades da área de contato, como determinado pelo ângulo auxiliar  $\gamma$ .

$$\cos \gamma = \frac{\frac{1}{R_{a1}} - \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{b1}} - \frac{1}{R_{b2}}}{\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}}} \quad (15)$$

Observa-se que o denominador da expressão para  $\cos \gamma$  é o mesmo que ocorre embaixo do radical na equação (10) e (13).  $\mu$  e  $\nu$  são relacionados por outro ângulo auxiliar  $\epsilon$ , o qual depende da forma da elipse de contato.

$$\cos \gamma = 1 - \frac{2[K(\epsilon) - E(\epsilon)] \cot^2 \epsilon}{E(\epsilon)} \quad (16)$$

$$\nu = \sqrt[3]{\frac{2E(\epsilon) \cos \epsilon}{\pi}} \quad (17)$$

onde:

$$\cos \epsilon = \frac{\nu}{\mu} = \frac{a}{b} \quad (18)$$

$K(\epsilon)$  e  $E(\epsilon)$  são integrais completas elípticas de primeira e segunda ordem, tendo o módulo  $\text{sen} \epsilon$

$$K(\epsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \epsilon \text{sen}^2 \phi}} \quad (19)$$

$$E(\epsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \epsilon \text{sen}^2 \phi} d\phi \quad (20)$$

Assumindo a série de valores dos módulos  $\text{sen} \epsilon$ , correspondentes valores de  $\cos \gamma, \mu$  e  $\nu$  podem ser calculados pelas equações (16), (17) e (18) e estão na tabela 1.

Deve ser enfatizado que os semi-eixos da elipse de contato,  $a$  e  $b$ , são os semi-eixos projetados e não são medidos ao longo da curvatura da superfície de contato.

cos $\gamma$	$\mu$	$\nu$	cos $\gamma$	$\mu$	$\nu$	cos $\gamma$	$\mu$	$\nu$
0,9995	23,95	0,163	0,9770	6,63	0,338	0,928	3,55	0,428
0,9990	18,53	0,185	0,9765	5,58	0,339	0,926	3,51	0,431
0,9985	15,77	0,201	0,9760	5,53	0,340	0,924	3,47	0,433
0,9980	14,25	0,212	0,9755	5,49	0,342	0,922	3,43	0,436
0,9975	13,15	0,220	0,9750	5,44	0,343	0,920	3,40	0,438
0,9970	12,26	0,228	0,9745	5,39	0,345	0,918	3,36	0,441
0,9965	11,58	0,235	0,9740	5,35	0,346	0,916	3,33	0,443
0,9960	11,02	0,241	0,9735	5,32	0,347	0,914	3,30	0,445
0,9955	10,53	0,246	0,9730	5,28	0,349	0,912	3,27	0,448
0,9950	10,15	2,510	0,9725	5,24	0,350	0,910	3,23	0,450
0,9945	9,77	0,256	0,9720	5,20	0,351	0,908	3,20	0,452
0,9940	9,46	0,260	0,9715	5,16	0,353	0,906	3,17	0,454
0,9935	9,17	0,264	0,9710	5,13	0,354	0,904	3,15	0,456
0,993	8,92	0,268	0,9705	5,09	0,355	0,902	3,12	0,459
0,9925	8,68	0,271	0,9700	5,05	0,357	0,900	3,09	0,461
0,9920	8,47	0,275	0,9690	4,98	0,359	0,895	3,03	0,466
0,9915	8,27	0,278	0,9680	4,92	0,361	0,890	2,97	0,471
0,9910	8,10	0,281	0,9670	4,86	0,363	0,885	2,92	0,476
0,9905	7,93	0,284	0,9660	4,81	0,365	0,880	2,86	0,481
0,9900	7,76	0,287	0,9650	4,76	0,367	0,875	2,82	0,485
0,9895	7,62	0,289	0,9640	4,70	0,369	0,870	2,77	0,490
0,9890	7,49	0,292	0,9630	4,65	0,371	0,865	2,72	0,494
0,9885	7,37	0,294	0,9620	4,61	0,374	0,860	2,68	0,498
0,9880	7,25	0,297	0,9610	4,56	0,376	0,855	2,64	0,502
0,9875	7,13	0,299	0,9600	4,51	0,378	0,850	2,60	0,507
0,9870	7,02	0,301	0,9590	4,47	0,380	0,840	2,53	0,515
0,9865	6,93	0,303	0,9580	4,42	0,382	0,830	2,46	0,523
0,9860	6,84	0,305	0,9570	4,38	0,384	0,820	2,40	0,530
0,9855	6,74	0,307	0,9560	4,34	0,386	0,810	2,35	0,537
0,9850	6,64	0,310	0,9550	4,30	0,388	0,800	2,30	0,544
0,9845	6,55	0,312	0,9540	4,26	0,390	0,750	2,07	0,577
0,9840	6,47	0,314	0,9530	4,22	0,391	0,700	1,91	0,607
0,9835	6,40	0,316	0,9520	4,19	0,393	0,650	1,77	0,637
0,9830	6,33	0,317	0,9510	4,15	0,394	0,600	1,66	0,664
0,9825	6,26	0,319	0,9500	4,12	0,396	0,550	1,57	0,690
0,9820	6,19	0,321	0,9480	4,05	0,399	0,500	1,48	0,718
0,9815	6,12	0,323	0,9460	3,99	0,403	0,450	1,41	0,745
0,9810	6,06	0,325	0,9440	3,94	0,406	0,400	1,35	0,771
0,9805	6,00	0,327	0,9420	3,88	0,409	0,350	1,29	0,796
0,9800	5,94	0,328	0,9400	3,83	0,412	0,300	1,24	0,924
0,9795	5,89	0,330	0,9380	3,78	0,415	0,250	1,19	0,850
0,9790	5,83	0,332	0,9360	3,73	0,418	0,200	1,15	0,879
0,9785	5,78	0,333	0,9340	3,68	0,420	0,150	1,11	0,908
0,9780	5,72	0,335	0,9320	3,63	0,423	0,100	1,07	0,938
0,9775	5,67	0,336	0,9300	3,59	0,426	0,050	1,03	0,969

Tabela 1: Valores das constantes para cálculo da elipse de pressão.

### Procedimento para análise do esforço de compressão (contato).

#### Caso de duas superfícies curvas quaisquer.

Agora é possível delinear os passos a serem seguidos na determinação do tamanho e forma da área de contato.

1- Determinar os raios de curvatura principais dos dois corpos como indicado na figura 2, procurando os sinais dos raios de curvatura de acordo com a figura 4.

Testar se a equação (14) é satisfeita.

2- Obter  $\cos\gamma$  da equação (15).

3- Obter  $\mu$  e  $\nu$  da tabela 1.

4- Determinar  $g$  da equação (13) se os corpos são de aço. Se os corpos são de materiais diferentes, usar as equações (10), (11) e (12).

5- Calcular  $a$  e  $b$  através das equações (8) e (9), respectivamente. Tendo determinado as dimensões  $a$  e  $b$  da área de contato, o valor do esforço de compressão médio na superfície  $S_m$  é:

$$S_m = \frac{P_o}{\pi ab} \quad (21)$$

ou, usando as equações (8), (9) e (13) para o aço:

$$S_m = \frac{15079 \left[ \frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}} \right]^{\frac{2}{3}} P_o^{\frac{1}{3}}}{\mu\nu} \quad (22)$$

A distribuição do esforço de compressão na superfície da área de contato elíptica é proporcional às ordenadas do semi-elipsóide de revolução construído tendo como base a área de contato (vide figura 5 abaixo).

O esforço de compressão que atua sobre um ponto genérico  $(x,y)$  é:

$$\sigma_z(x,y) = \frac{3P_o}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (23)$$

Através disso, é visível que o valor máximo para o esforço de compressão ocorre no centro da área de contato. Seu valor é:

$$\sigma_z(\text{máx}) = \frac{3P_o}{2\pi ab}$$

(24)

ou, tendo o valor do esforço médio de compressão  $S_m$  da equação (21) e (22).

$$\sigma_z(\text{máx}) = \frac{3S_m}{2}$$

(25)

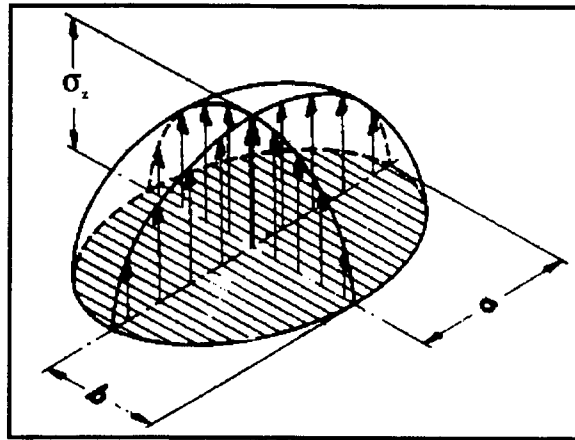


Figura 5: Elipse de pressão no contato.

### Aplicação da metodologia ao caso em análise.

Um programa foi desenvolvido em Basic para determinar o elipsóide de pressão existente em cada contato das partes móveis da junta. Um exemplo de aplicação para a junta fixa em questão está apresentado na figura 6 do anexo, e para a junta deslizante na figura 7.

Uma vez definida a geometria da elipse de pressão (dada pelos parâmetros  $\mu$  e  $\nu$ ), pode-se aplicar a equação (22) para obter a pressão média existente na área de contato. Introduzindo nesta equação a relação existente entre o torque aplicado e a força no contato, obtêm-se as equações abaixo para cada tipo de junta.

a) Junta fixa:

$$S_m = 30244,24 \left[ \frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}} \right]^{\frac{2}{3}} \frac{M_d^{\frac{1}{3}}}{\mu \nu}$$

(26)

b) Junta deslizante:



$$S_m = 29143,01 \left[ \frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_{a2}} + \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}} \right]^{\frac{2}{3}} \frac{M_d^{\frac{1}{3}}}{\mu \nu} \quad (27)$$

Foi implementada uma rotina em MATHCAD 4.0 (figura 8) onde pode-se visualizar a variação da pressão média  $S_m$ , da semi-diagonal maior "a" e da semi-diagonal menor "b" existente em cada contato interno da junta, decorrente da variação do torque de zero a 240 Nm. Fica visível a semelhança destas curvas com a apresentada pela variação do autovalor com o torque aplicado (figura 4.17).

Por fim, uma estimativa de rigidez de articulação da junta, devido a um torque aplicado a ela, pode ser calculado.

Segundo a bibliografia especializada [1], temos que pelo menos duas experiências práticas independentes foram executadas com o objetivo de quantificar o valor do coeficiente de atrito existente em rolamentos de esferas (caso similar à peça em análise).

Segundo Stribeck, este tipo de rolamento apresenta coeficiente de atrito próximo a 0,0015 e não apresenta variações sistemáticas desse valor decorrente de alterações nos parâmetros dos ensaios práticos.

Pesquisas realizadas por John Goodman relatam que o valor do coeficiente de atrito não é sensível a alterações nos parâmetros: velocidade da esfera, temperatura e mesmo à lubrificação (caso o projeto dos contatos seja bem concebido, de forma a evitar o deslizamento relativo entre a esfera e a pista), porém varia proporcionalmente com a carga aplicada no contato de 0,0007 a 0,0025, mostrando boa coerência com os dados obtidos por Stribeck. Infelizmente, Goodman não relata a lei de formação que rege a relação entre o coeficiente de atrito com a carga no contato.

Caso considere-se o caso mais simples de atrito seco de Coulomb, tem-se a relação linear:

$$F_a = P_o \mu_a \quad (28)$$

onde  $F_a$  é a força de atrito opoente ao movimento.

$P_o$  é a força normal existente no contato.

$\mu_a$  é o coeficiente de atrito de Coulomb.

Considerando o valor de  $\mu_a=0,0015$  e as relações desenvolvidas anteriormente entre o torque aplicado à junta  $M_d$  e a carga resultante no contato  $P_o$ , têm-se as seguintes equações para estimar a rigidez de articulação  $K_{art}$  da junta.

Considerando que ocorre apenas contato físico entre as partes móveis internas da junta fixa na esfera com a gaiola, o anel interno e a ponta de eixo (premissa válida para torques baixos onde ainda não ocorre deformação elástica elevada destes componentes), tem-se que o momento necessário para vencer o atrito resultante de todas estas interfaces é o somatório das seguintes parcelas:

$$\text{esfera x A.I.R:} \quad K_{art} = \frac{6M_d}{nR \text{sen } \delta \cos \gamma} \mu_a \left( R - \frac{d_e}{2} \cos \delta \right) \quad (29)$$

$$\text{esfera x P.E.:} \quad K_{art} = \frac{6M_d}{nR \text{sen } \delta \cos \gamma} \mu_a \left( R + \frac{d_e}{2} \cos \delta \right) \quad (30)$$

$$\text{esfera x gaiola:} \quad K_{art} = \frac{6M_d}{nR \text{sen } \delta \cos \gamma} \mu_a R \quad (31)$$

onde: " $d_e$ " é o diâmetro da esfera.

Somando as parcelas, tem-se:

$$K_{art} = \frac{12M_d \mu_a}{n \text{sen } \delta} \left( \frac{1}{\cos \gamma} + \text{sen } \alpha \right) \quad (32)$$

Para o dimensional da junta em análise:

$$K_{art} = \frac{12 \cdot 0,0015}{6 \text{sen } 50^\circ} \left( \frac{1}{\cos 0} + \text{sen } 9,516068 \right) \quad (33)$$

$$\text{ou seja:} \quad K_{art} = 0,00456 \cdot M_d \quad (34)$$

No caso de junta deslizante, procedendo uma análise similar obtêm-se:

$$K_{art} = \frac{12M_d\mu_a}{n \operatorname{sen} \delta} \left( \frac{1}{\cos \gamma} + \tan \gamma \right) \quad (35)$$

ou seja:

$$K_{art} = 0,00439 \cdot M_d \quad (36)$$

Aplicando esta relação linear aproximada em um modelo de um grau de liberdade, tem-se:

$$f_n = 2\pi \sqrt{\frac{K_{art}}{I}} \quad (37)$$

onde:  $I$  é o momento de inércia rotacional da junta.

A relação entre autovalor  $F_n$  e torque  $M_d$  pode ser visualizada na rotina construída em MATHCAD apresentada na figura 8, na qual pode-se constatar que mesmo considerando uma relação linear entre o torque e a rigidez de articulação (a qual na prática não deve ser completamente verdadeira) temos um efeito no autovalor similar ao obtido nas medições prática com o semi-eixo no veículo.

<p><b>Parâmetros da elipse de pressão no contato entre ponta de eixo e esfera:</b></p> <p>Diâmetro da esfera <math>D = 15,875</math>  Raio de curvatura transversal da pista no ponto de contato <math>ROT = 7,95</math>.  Diâmetro primitivo da junta <math>DP = 53,928</math>  Ângulo de contato da pista <math>AN = 50</math>  Schmiegung transversal <math>SOT = 1,001575</math>  Schmiegung Longitudinal <math>SOL = 6,284855</math>  Raio de curvatura efetivo longitudinal da pista <math>ROE = 49,88604</math>  Fator de conformidade de Stribeck <math>T = 2,374001</math>  Cosseno de Tau <math>Cotau = 0,9962674</math>  Fator de Hertz <math>M = 11,4</math>  Fator de Hertz <math>V = 0,243</math>  Cosseno Épsilon <math>COE = 2,131579E-02</math>  Integral elíptica completa <math>K = 5,2</math>  Momento tursor no eixo <math>M (Nm) = 100</math>  Carga no contato <math>(P) = 82,27956</math></p>	<p><b>Resultados práticos:</b></p> <p>Semi-eixo maior da elipse de pressão <math>A = 5,288373</math>  Semi-eixo menor da elipse de pressão <math>B = 0,1127259</math>  <math>Q = 0,4638924</math>  Deformação (afundamento) <math>DF = 3,316277E-03</math>  Pressão média na elipse de pressão <math>PM = 43,93346</math>  Fator de stribeck <math>(P=k(D)^k) k = 0,3264859</math>  Pressão máxima no centro da elipse de pressão <math>P_{MAX} = 65,9002</math>  Fator de conformidade relativa <math>CPM = 119,8105</math></p>
<p><b>Parâmetros da elipse de pressão no contato entre anel interno e esfera de junta fixa.</b></p> <p>Diâmetro da esfera <math>D = 15,875</math>  Raio de curvatura transversal da pista no ponto de contato <math>ROT = 7,95</math>.  Diâmetro primitivo da junta <math>DP = 53,928</math>  Ângulo de contato da pista <math>AN = 50</math>  Schmiegung transversal <math>SOT = 1,001575</math>  Schmiegung Longitudinal <math>SOL = 4,284855</math>  Raio de curvatura efetivo longitudinal da pista <math>RIE = 34,01104</math>  Fator de conformidade de Stribeck <math>T = 1,619496</math>  Cosseno de Tau <math>Cotau = 0,9974536</math>  Fator de Hertz <math>M = 13,5</math>  Fator de Hertz <math>V = 0,22</math>  Cosseno Épsilon <math>COE = 1,673004E-02</math>  Integral elíptica completa <math>K = 5,48</math>  Momento tursor no eixo <math>M (Nm) = 100</math>  Carga no contato <math>(P) = 82,27956</math></p>	<p><b>Resultados práticos:</b></p> <p>Semi-eixo maior da elipse de pressão <math>A = 5,370022</math>  Semi-eixo menor da elipse de pressão <math>B = 8,984066E-02</math>  <math>Q = 0,4083667</math>  Deformação (afundamento) <math>DF = 3,441709E-03</math>  Pressão média na elipse de pressão <math>PM = 54,28654</math>  Fator de stribeck <math>(P=k(D)^k) k = 0,3264858</math>  Pressão máxima no centro da elipse de pressão <math>P_{MAX} = 81,4298</math>  Fator de conformidade relativa <math>CPM = 66,50455</math></p>
<p><b>Parâmetros da elipse de pressão no contato entre gaiola e esfera de junta fixa.</b></p> <p>Diâmetro da esfera <math>D = 15,875</math>  Diâmetro primitivo da junta <math>DP = 53,928</math>  Ângulo de contato das pistas <math>AN</math> (em graus) <math>= 50</math>  Off Set (mm) <math>= 4,52</math>  Schmiegung = infinito  Fator de conformidade de Stribeck <math>(T) = 1</math>  Cosseno de Tau (Cotau) <math>= 0</math>  Fator de Hertz <math>(M) = 1</math>  Fator de Hertz <math>(V) = 1</math>  Cosseno épsilon <math>(COE) = 1</math>  <math>K = PI/2</math>  Momento tursor no eixo <math>M (Nm) = 100</math>  Carga no contato esfera/gaiola <math>F_k(Kg) = 27,2056</math></p>	<p><b>Resultados práticos:</b></p> <p>Semi-eixo maior da elipse de pressão <math>A = 0,2404616</math>  Semi-eixo menor da elipse de pressão <math>B = 0,2404616</math>  <math>Q = 0,2404616</math>  Deformação (afundamento) <math>DF = 7,284674E-03</math>  Pressão média na elipse de pressão <math>PM = 149,7669</math>  Fator de stribeck <math>(P=k(D)^k) k = 0,107952</math>  Pressão máxima no centro da elipse de pressão <math>P_{MAX} = 224,6504</math>  Fator de conformidade relativa <math>CPM = 1</math></p>

Figura 6: Exemplo de cálculo para junta fixa.

**Parâmetros da elipse de pressão entre anel externo e esfera.**

Diâmetro da esfera  $D = 19,05$   
 Raio de curvatura transversal da pista no ponto de contato  $ROT = 10$ .  
 Diâmetro primitivo da junta  $DP = 53$   
 Ângulo de contato da pista  $AN = 65$   
 Schmiegunng transversal  $SOT = 1,049869$   
 Fator de conformidade de Stribeck  $T = 1,909308$   
 Cosseno de Tau  $Cotau = 0,9093078$   
 Fator de Hertz  $M = 3,23$   
 Fator de Hertz  $V = 0,45$   
 Cosseno Épsilon  $COE = 0,1393189$   
 Integral elíptica completa  $K = 1,57874$   
 Momento torsor no eixo  $M (Nm) = 100$   
 Carga no contato  $(P) = 73,61513$

**Resultados práticos**

Semi-eixo maior da elipse de pressão  $A = 1,4268236$   
 Semi-eixo menor da elipse de pressão  $B = 0,1987834$   
 $Q = 0,441741$   
 Deformação (afundamento)  $DF = 3,338759E-03$   
 Pressão média na elipse de pressão  $PM = 82,61628$   
 Fator de stribeck  $(P=k(D)^2) k = 0,2028509$   
 Pressão máxima no centro da elipse de pressão  $P_{MAX} = 123,9244$   
 Fator de conformidade relativa  $CPM = 11,1943$

**Parâmetros da elipse de pressão no contato entre anel interno e esferas de junta deslizante.**

Diâmetro da esfera  $D = 19,05$   
 Raio de curvatura transversal da pista no ponto de contato  $RIT = 10$   
 Diâmetro primitivo da junta  $DP = 53$   
 Ângulo de contato da pista  $AN = 65$   
 Schmiegunng transversal  $SIT = 1,049869$   
 Fator de conformidade de Stribeck  $T = 1,909308$   
 Cosseno de Tau  $Cotau = 0,9093078$   
 Fator de Hertz  $M = 3,23$   
 Fator de Hertz  $V = 0,45$   
 Cosseno Épsilon  $COE = 0,1393189$   
 Integral elíptica completa  $K = 1,57874$   
 Momento torsor no eixo  $M (Nm) = 100$   
 Carga no contato  $(P) = 73,61513$

**Resultados práticos**

Semi-eixo maior da elipse de pressão  $A = 1,4268236$   
 Semi-eixo menor da elipse de pressão  $B = 0,1987834$   
 $Q = 0,441741$   
 Deformação (afundamento)  $DF = 3,338759E-03$   
 Pressão média na elipse de pressão  $PM = 82,61628$   
 Fator de stribeck  $(P=k(D)^2) k = 0,2028509$   
 Pressão máxima no centro da elipse de pressão  $P_{MAX} = 123,9244$   
 Fator de conformidade relativa  $CPM = 11,1943$

**Parâmetros da elipse de pressão no contato entre gaiola e esfera de junta deslizante.**

Diâmetro da esfera  $D = 19,05$   
 Diâmetro primitivo da junta  $DP = 53$   
 Ângulo de contato da pista  $AN$  (em graus)  $= 65$   
 Schmiegunng = infinito  
 Fator de conformidade de Stribeck  $T = 1$   
 Cosseno de Tau  $Cotau = 0$   
 Fator de Hertz  $M = 1$   
 Fator de Hertz  $V = 1$   
 Cosseno Épsilon  $COE = 1$   
 $K = \pi/2$   
 Momento torsor no eixo  $M (Nm) = 100$   
 Carga no contato  $(P) = 40,58216$

**Resultados práticos**

Semi-eixo maior da elipse de pressão  $A = 0,2919657$   
 Semi-eixo menor da elipse de pressão  $B = 0,2919657$   
 $Q = 0,2919657$   
 Deformação (afundamento)  $DF = 8,949541E-03$   
 Pressão média na elipse de pressão  $PM = 151,5377$   
 Fator de stribeck  $(P=k(D)^2) k = 0,1118266$   
 Pressão máxima no centro da elipse de pressão  $P_{MAX} = 227,3065$   
 Fator de conformidade relativa  $CPM = 1$

Figura 7: Exemplo de cálculo para junta deslizante.

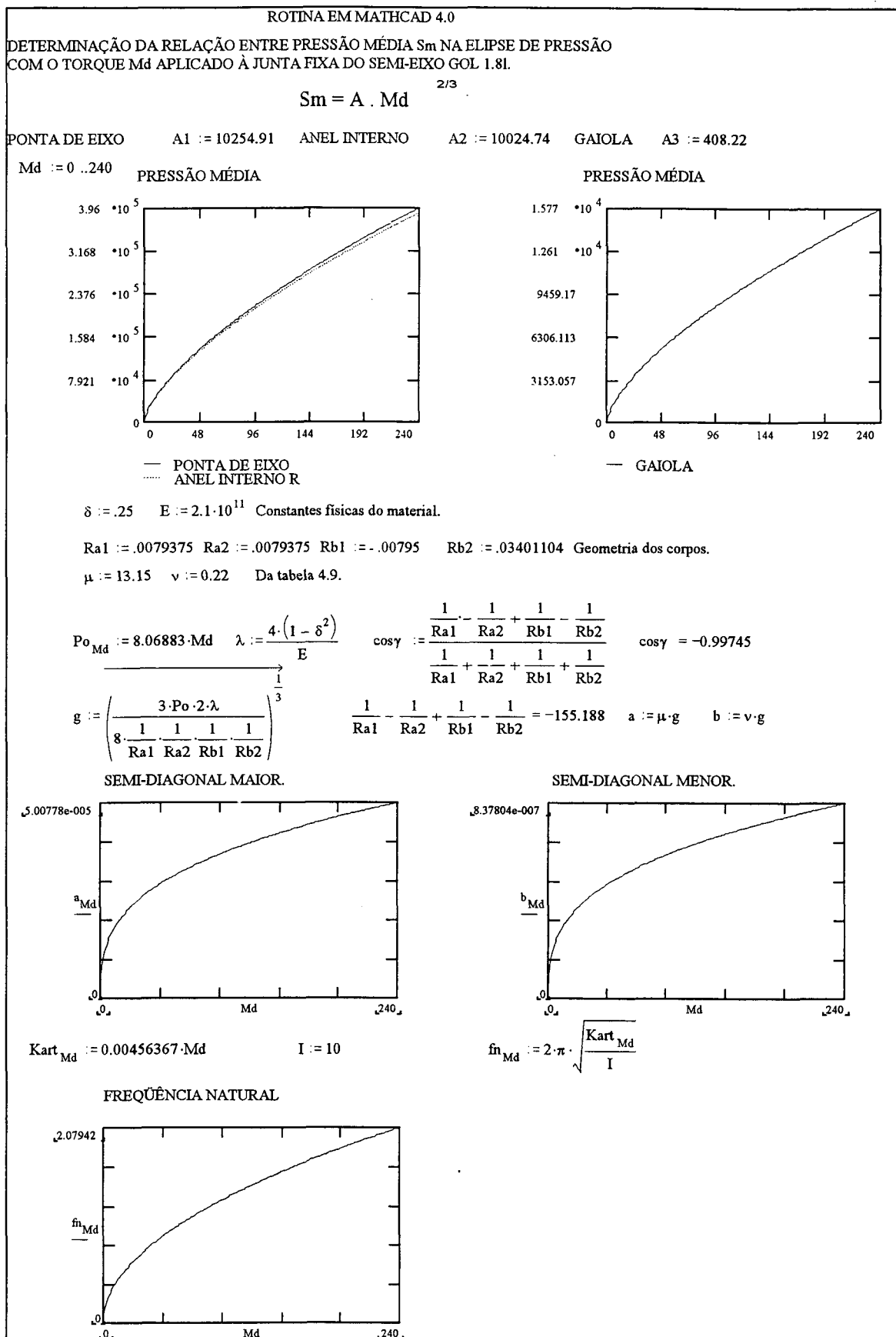


Figura 8: Rotina desenvolvida em MATHCAD 4.0.

### ANEXO 3

#### Memorial descritivo de bancada de teste de vibração em semi-eixos homocinéticos.

Este equipamento proporciona condições de fixação de semi-eixo homocinético (S.E.H.), de forma a simular a situação existente no veículo, onde o mesmo é utilizado. Com isto, têm-se condições de analisar o comportamento vibratório do semi-eixo em bancada de teste que permite controlar, de forma mais precisa e com maior repetibilidade, os parâmetros influentes no experimento e dispensa o uso de um veículo.

A excitação vibratória e os sensores necessários para o ensaio do componente já existem e serão acoplados diretamente ao semi-eixo, não sendo necessária a sua descrição aqui.

#### **Características.**

Para que o equipamento consiga representar satisfatoriamente o veículo, ele deve apresentar três características básicas:

- 1) Possibilidade de representar o lay-out existente em diferentes veículos e condições de suspensão.
- 2) Possibilidade de variar os parâmetros envolvidos no experimento, de forma precisa e confiável.
- 3) Apresentar comportamento dinâmico semelhante ao que ocorre em diferentes veículos (variar seus parâmetros dinâmicos).

#### **Descrição detalhada.**

- 1) Representação do lay-out de diferentes veículos.

Quando instalado em veículo, o semi-eixo homocinético deve se adequar ao lay-out existente entre a saída do diferencial até o cubo da roda (vide representação na figura 1).

A bancada deverá permitir a simulação deste lay-out existente em diferentes carros, sendo os parâmetros descritos a seguir (referentes à figura 2.).

a) Distância entre flanges de acoplamento A e B: controlado pelo deslocamento horizontal axial do suporte B (item 12). Valores na faixa de 0,3 a 1,3 metros com precisão de 0,01 metros.

b) Ângulo na junta fixa: controlado pela rotação do suporte B (item 14, simulando o esterçamento da roda do veículo). Valores na faixa de -60 a + 60 graus com precisão de 0,5 graus.

c) Inclinação vertical do S.E.H. (diferença de altura entre o diferencial e o cubo de roda): controlado pela posição vertical do suporte B (item 11). Valores na faixa de -0,5 a +0,10 metros de diferença de altura entre flanges A e B com precisão de 0,01 metros.

d) Inclinação horizontal do S.E.H. (distância de desalinhamento entre os flanges A e B no plano horizontal): controlado pelo deslocamento horizontal transversal do suporte B (item 13). Valores na faixa de -0,20 a +0,20 metros de desalinhamento com precisão de 0,01 metros.

## 2) Variação dos parâmetros envolvidos no experimento.

Além de controlar os parâmetros de lay-out apresentados em 1), com a precisão descrita e com sistema de trava para manter os valores escolhidos de forma a não se alterarem, mesmo sob ação de vibrações em níveis altos (o teste dinâmico usa a excitação de uma mesa vibratória), tem-se:

e) Aplicação de torque estático (defasagem angular entre os flanges A e B): controlado pelo giro do flange A sobre o seu eixo de simetria axial (item 4), com acionamento manual que pode ser destacável para não influenciar durante a execução do teste. Valores na faixa de -45 a +45 graus com variações de 0,01 graus.

f) Medição do torque estático: pode ser feita com o uso de célula de torque existente na ATH (colocação segundo item B) ou com dispositivo mais simples, como, por exemplo, o uso de torquímetro para acionar a aplicação de torque descrita em e) fornecendo o valor de torque simultaneamente. Valores na faixa de -300 a +300 com precisão de 1 Nm.

## 3) Controle do comportamento dinâmico dos berços A e B.

Este é o parâmetro mais importante neste equipamento. A idéia é de simular o comportamento dinâmico (definido pelos parâmetros de massa e rigidez da estrutura) existente no



diferencial e no cubo da roda no veículo. Para tanto, deverão haver recursos para variar a rigidez e a massa dos berços A e B, no plano vertical e no horizontal, de maneira independente.

g) Variação da rigidez dos berços A e B: os berços A e B deverão estar conectados nas respectivas bases, por meio de molas independentes (elementos elásticos), nos planos vertical e horizontal. Estas molas devem ser de fácil confecção e troca, agilizando o seu ajuste por avaliação experimental. Na figura 3 é apresentada uma opção onde a mola é uma barra de dimensões facilmente modificáveis. Neste exemplo, uma estrutura em "H" permite a aplicação de uma mola no plano vertical e duas no plano horizontal, permitindo o ajuste independente nestes dois planos. É crucial que a estrutura "H" e as bases A e B sejam de rigidez muito mais elevada que as molas, caso contrário as suas elasticidades irão influir nas das molas, tornando difícil o ajuste do comportamento dinâmico dos berços A e B.

h) Variação de massa dos berços A e B: os berços deverão permitir a colocação de pesos adicionais (ilustrados na figura 3 por discos) para ajustar o peso que simula a estrutura do veículo. Devido a isto, o berço deve ser o mais leve possível (para partir-se de uma massa relativamente pequena) e o ajuste final deverá ser feito por avaliação experimental, com a adição de peso tanto na estrutura "H" (que influi na direção vertical) como no berço (que influi na direção horizontal e vertical). Novamente, o ajuste independente da massa, nas direções vertical e horizontal, é importante.

#### **Observações:**

- Na figura 3, o berço apresenta alças para impor que o centro de gravidade (com o flange já acoplado) fique no mesmo plano que as molas vertical e horizontal, permitindo o equilíbrio do suporte como um todo.

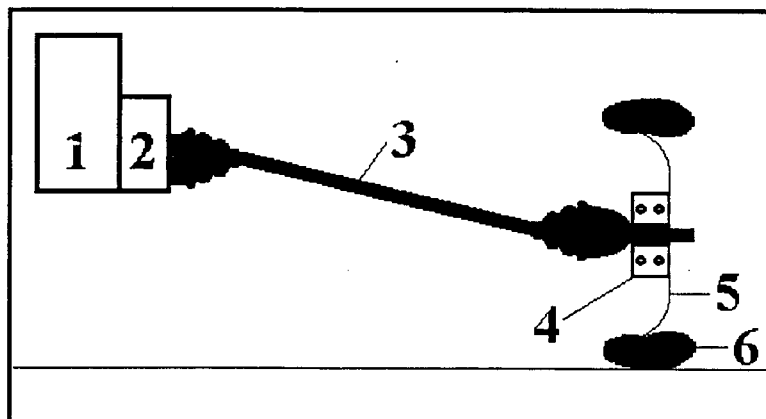
- Na figura 3, guias lineares no sentido horizontal e vertical são representados por filas de esferas. Estas ligações entre componentes da bancada, assim como todas as demais, deverão ser efetuadas sem presença de folgas (as quais seriam excitadas pela vibração durante a execução dos testes e tornariam os resultados errôneos e não aproveitáveis).

- Os flanges de acoplamento do S.E.H. já existem na ATH. Detalhes da furação serão fornecidos.

- As bases dos suportes A e B (itens 1 e 14 na figura 2) deverão ser móveis porém com sistema adequado para bases metálicas com rasgos "T" já existentes na ATH.

- É reforçada a orientação de que uma vez definidos os valores dos parâmetros descritos nos itens de a) a h), os mesmos são ajustados antes do ensaio e devem permanecer fixos durante a execução do teste, apesar dos níveis de vibração inerentes ao ensaio.

### FIGURAS DO MEMORIAL



1 - Diferencial

4 - Cubo de Roda

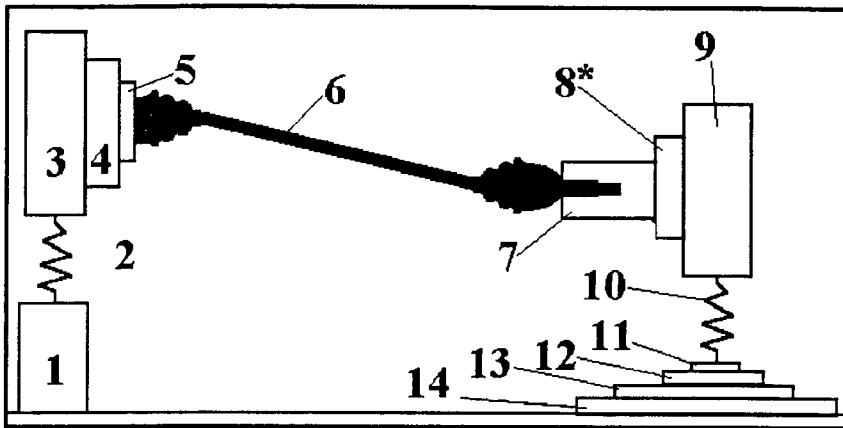
2 - Flange

5- Roda

3 - S.E.H.

6 - Pneu

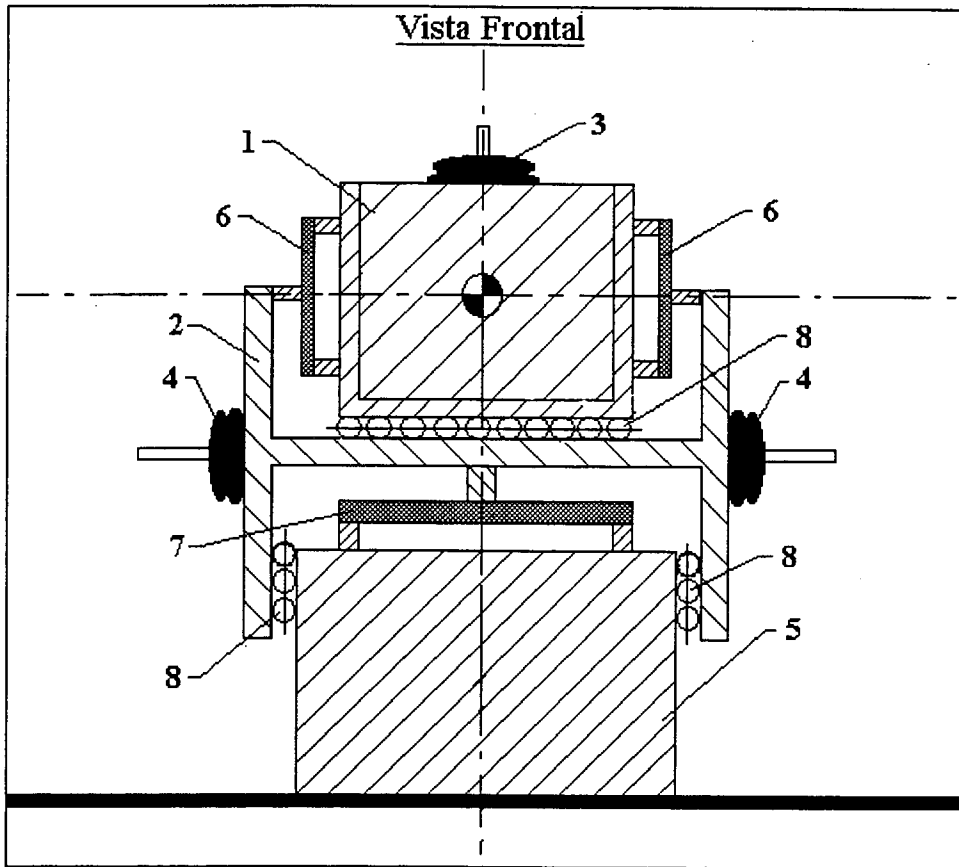
Figura1: Disposição de semi-eixo em veículo.



Nomenclatura:

- 1- Base do suporte A.
- 2 - Suspensão do suporte A.
- 3 - Berço do suporte A.
- 4 - Sistema para aplicação de torque estático.
- 5 - Flange de acoplamento A do S.E.H. (junta deslizante)
- 6 - S.E.H.
- 7 - Flange de acoplamento B do S.E.H. (junta fixa).
- 8 - Sistema para medir torque (\* pode ser incluído em 4).
- 9 - Berço do suporte B.
- 10 - Suspensão do suporte B.
- 11 - Sistema de deslocamento vertical do berço B.
- 12 - Sistema de deslocamento horizontal (axial) do berço B.
- 13 - Sistema de deslocamento horizontal (transversal) do berço B.
- 14 - Sistema de rotação (sobre o eixo vertical) do berço B.

Figura 2: Representação esquemática da bancada de teste.



Nomenclatura:

- 1) Flange para fixar sistema de torque e flange da peça (berço).
- 2) Subestrutura de desacoplamento.
- 3) Massas adicionais primárias.
- 4) Massas adicionais secundárias.
- 5) Fundação.
- 6) Molas horizontais (removíveis)
- 7) Mola vertical (removível)
- 8) Rolamentos lineares.

Figura 3: Detalhe esquemático dos suportes A & B.

## ANEXO 4

## PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO DE MODELO - EXEMPLO NUMÉRICO SIMPLES

MODELO ANALÍTICO PARA VIGA NO PLANO ( ref. J. He ) - REDUZIDO PARA 1 DOF !

L = comprimento total da viga (m)

I = módulo de inércia da seção homogênea (m<sup>4</sup>)

E = módulo de elasticidade (N/m<sup>2</sup>)

MT = massa total da viga (Kg)

NE = número de elementos no modelo

L1 = comprimento de um elemento homogêneo (m)

ML = massa por unidade de comprimento (Kg/m)

M1 = matriz de massa de um elemento genérico

K1 = matriz de rigidez de um elemento genérico

MG = matriz de massa global da viga

KG = matriz de rigidez global da viga

## 1) ENTRADA DE DADOS

$$L := 0.3 \quad MT := 0.45 \quad E := 2.1 \cdot 10^{11} \quad NE := 8 \quad L1 := \frac{L}{NE} \quad ML := \frac{MT}{L} \quad I := 1.6667 \cdot 10^{-9}$$

$$NN := NE + 1$$

MATRIZ DE MASSA E DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO GENÉRICO

$$r := 0, 1 \dots NE - 1 \quad MG := \frac{ML \cdot L1}{420} \quad KG := \frac{E \cdot I}{L1^3}$$

## MODELO TEÓRICO

$$M1_{r,r} := 156 \cdot MG \quad M1_{r+1,r} := 54 \cdot MG \quad M1_{r,r+1} := 54 \cdot MG \quad M1_{r+1,r+1} := 156 \cdot 2 \cdot MG \quad M1_{8,8} := 156 \cdot MG$$

$$K1_{r,r} := 12 \cdot KG \quad K1_{r+1,r} := -12 \cdot KG \quad K1_{r,r+1} := -12 \cdot KG \quad K1_{r+1,r+1} := 24 \cdot KG \quad K1_{8,8} := 0$$

$$K1_{0,1} := 0 \quad K1_{1,0} := 0 \quad K1_{0,0} := 0 \quad K1_{7,8} := 0 \quad K1_{8,7} := 0 \quad \text{Condição de contorno biapoiaada.}$$

## MODELO EXPERIMENTAL

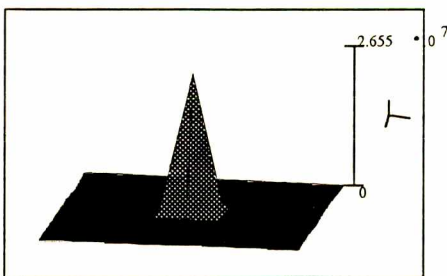
$$MIX_{r,r} := 156 \cdot MG \quad MIX_{r+1,r} := 54 \cdot MG \quad MIX_{r,r+1} := 54 \cdot MG \quad MIX_{r+1,r+1} := 156 \cdot 2 \cdot MG \quad MIX_{8,8} := 156 \cdot MG$$

$$KIX_{r,r} := 12 \cdot KG \quad KIX_{r+1,r} := -12 \cdot KG \quad KIX_{r,r+1} := -12 \cdot KG \quad KIX_{r+1,r+1} := 24 \cdot KG \quad KIX_{8,8} := 0$$

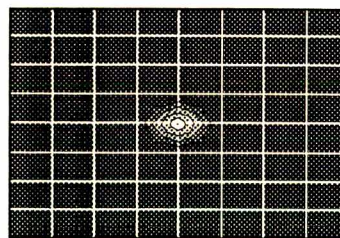
$$KIX_{0,1} := 0 \quad KIX_{1,0} := 0 \quad KIX_{0,0} := 0 \quad KIX_{7,8} := 0 \quad KIX_{8,7} := 0 \quad \text{Condição de contorno biapoiaada.}$$

$$KIX_{4,4} := 20 \cdot KG \quad \text{Singularidade imposta no nodo central do modelo " EXPERIMENTAL " .}$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DIFERENÇA REAL ENTRE OS MODELOS :



$\overline{KI - KIX}$



$\overline{KI - KIX}$

## 2) SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES

$$i := 0 \dots 8$$

$$B := K1 \cdot M1^{-1}$$

$$w_i := \text{eigenvals} (B)$$

$$A^{<i>} := \text{eigenvec} (B, w_i)$$

$$BX := KIX \cdot MIX^{-1}$$

$$wX_i := \text{eigenvals} (BX)$$

$$AX^{<i>} := \text{eigenvec} (BX, wX_i)$$

MATRIZ DIAGONAL DE AUTOVALORES

$$WA_{i,i} := w_i$$

$$WX_{i,i} := wX_i$$

MATRIZ DE AUTOVETORES

$$\Phi A := A$$

$$\Phi X := AX$$

3) CORREÇÕES NA FASE DOS AUTOVETORES

$$AX^{<3>} := -1 \cdot AX^{<3>}$$

$$AX^{<0>} := -1 \cdot AX^{<0>}$$

$$AX^{<1>} := -1 \cdot AX^{<1>}$$

$$AX^{<4>} := -1 \cdot AX^{<4>}$$

$$WA_{7,7} := 1$$

$$WA_{8,8} := 1$$

$$WX_{7,7} := 1$$

$$WX_{8,8} := 1$$

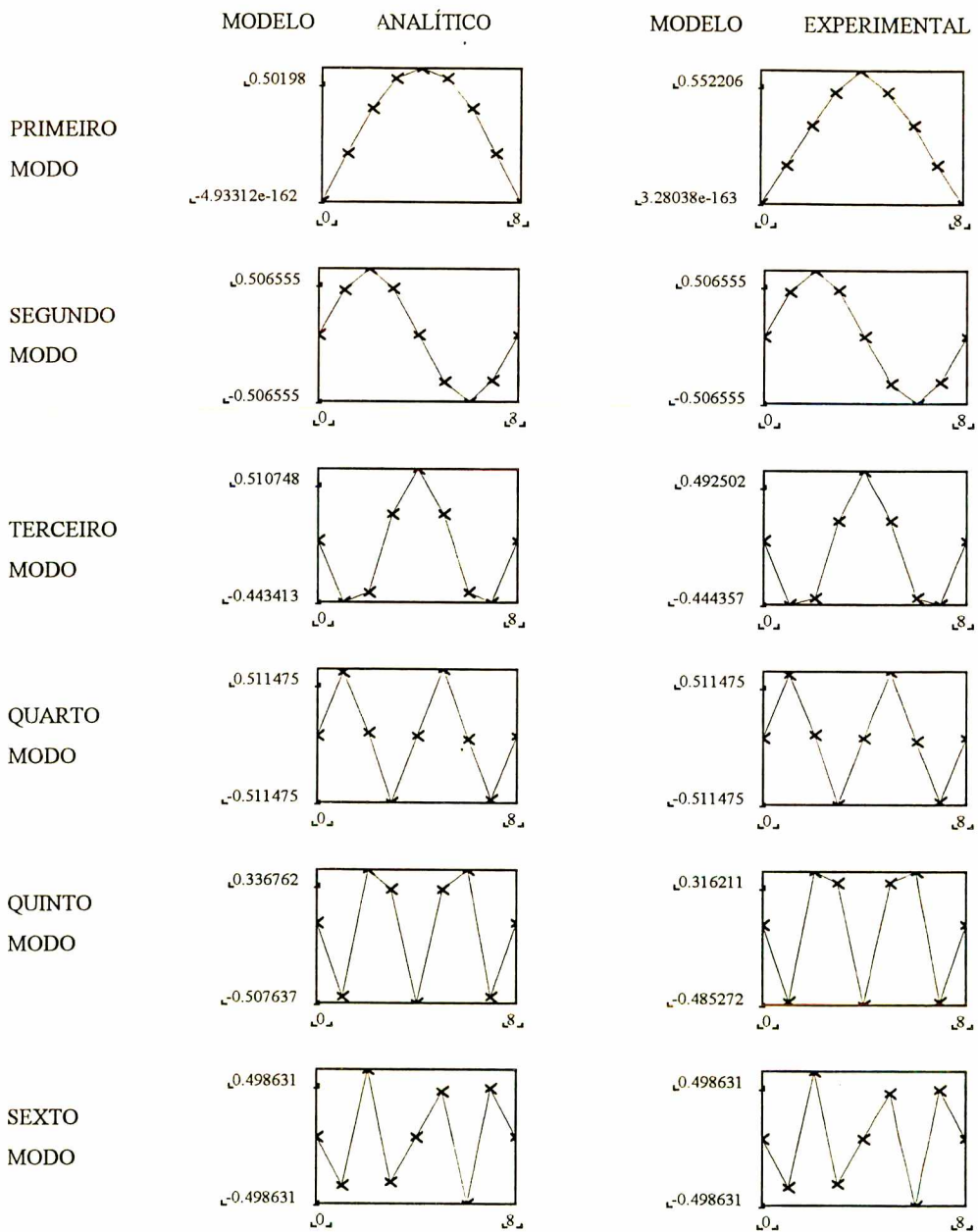
$$AX^{<6>} := -1 \cdot AX^{<6>}$$

$$n := 6$$

$$M := 8$$

$$N := 8$$

VISUALIZAÇÃO DOS MODOS



Comparação dos autovetores.

4) LOCALIZAÇÃO DE REGIÕES MAL MODELADAS COM O USO DE POUCOS MODOS

$$LK := WX_{6,6} \cdot M1 \cdot (\Phi X^{<6>} \cdot \Phi X^{<6>T}) - K1 \cdot (\Phi X^{<6>} \cdot \Phi X^{<6>T})$$

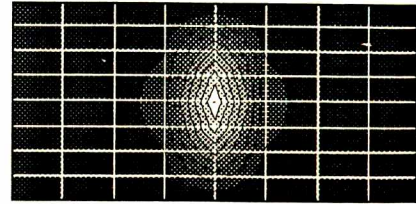
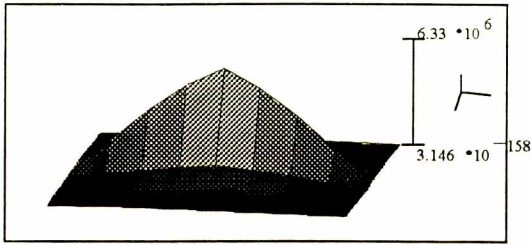
Linha da matriz.

$$CK := WX_{6,6} \cdot \Phi X^{<6>} \cdot \Phi X^{<6>T} \cdot M1 - (\Phi X^{<6>} \cdot \Phi X^{<6>T}) \cdot K1$$

Coluna da matriz.

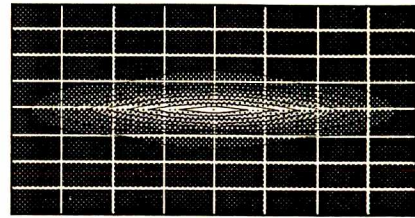
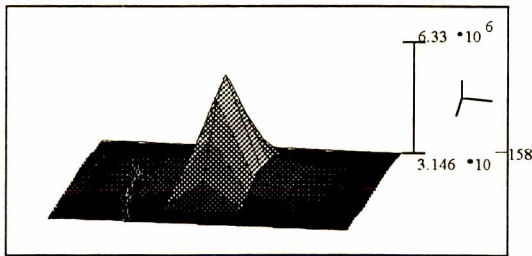
$$CT := \overline{CK \cdot LK}$$

Produto final.



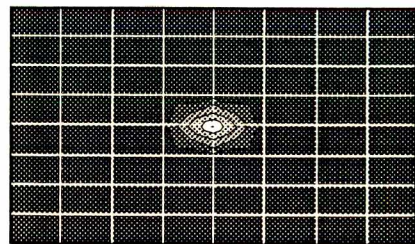
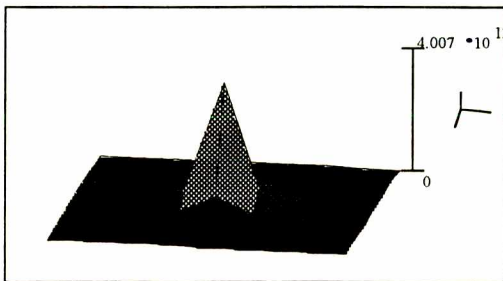
$\overline{LK}$

$\overline{LK}$



$\overline{CK}$

$\overline{CK}$



$\overline{CT}$

$\overline{CT}$

5) PROCESSO ITERATIVO USANDO UM MODO (m)

m := 6

$$EK1 := WX_{m,m} \cdot M1^{<4>T} \cdot \Phi X^{<m>} - K1^{<4>T} \cdot \Phi X^{<m>}$$

$$EK1 = 1.1 \cdot 10^7$$

$$EK2 := \frac{EK1}{(\Phi X^{<m>})_4}$$

$$EK2 = -2.07600393 \cdot 10^7$$

Valor da correção estimada nesta iteração.

$$K1_{4,4} = 1.6 \cdot 10^8$$

$$K1_{4,4} + EK2 = 1.4 \cdot 10^8$$

Novo valor para a matriz de rigidez analítica.

## 6) CÁLCULO DE INDICATIVOS DE COERÊNCIA ENTRE OS MODELOS.

A) Graficar autovalores em gráfico X - Y.

I := 0..M

WAI<sub>I</sub> := WA<sub>I,I</sub>WXI<sub>I</sub> := WX<sub>I,I</sub>WXV<sub>I</sub> := WX<sub>I,I</sub>WAV<sub>I</sub> := WA<sub>I,I</sub>

a := slope(WXV, WAV)      a = 1

b := intercept(WXV, WAV)      b = 4.2·10<sup>7</sup>

B) Graficar autovetores em gráfico X - Y.

J := 6      - MODO A SER COMPARADO

I := 0..N

a := slope(ΦA<sup><></sup>, ΦX<sup><></sup>)      a = -1b := intercept(ΦX<sup><></sup>, ΦA<sup><></sup>)      b = 0

a := |a|

C) Calcular MSF

$$MSF := \left[ \frac{\sum_{n=1}^N (\Phi X^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi A^{\langle \rangle})_n}}{\sum_{n=1}^N (\Phi A^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi X^{\langle \rangle})_n}} \right]$$

MSF = -1

PLOTAGEM

I := 0..M - 1

J := 0..M - 1

$$MSF_{I,J} := \frac{\Phi X^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi A^{\langle \rangle}}}{\Phi A^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi X^{\langle \rangle}}}$$

MSF<sub>I,J</sub> := |MSF<sub>I,J</sub>|

E) GRAFICAR Hx(f) &amp; Ha(f) :

W := 1·10<sup>7</sup>, 2·10<sup>7</sup> .. 5·10<sup>9</sup>      R := 0..6

$$YX \frac{W}{1 \cdot 10^6} := W \cdot \left[ \sum_R \frac{[(\Phi X)^{\langle R \rangle}] \cdot [(\Phi X)^{\langle R \rangle}]}{(WX_{R,R})^2 - W^2} \right]$$

$$YA \frac{W}{1 \cdot 10^6} := W \cdot \left[ \sum_R \frac{[(\Phi A)^{\langle R \rangle}] \cdot [(\Phi A)^{\langle R \rangle}]}{(WA_{R,R})^2 - W^2} \right]$$

D) Calcular MAC

$$MAC := \left[ \frac{\left[ \sum_{n=1}^N (\Phi X^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi A^{\langle \rangle})_n} \right]^2}{\sum_{n=1}^N (\Phi X^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi X^{\langle \rangle})_n} \cdot \sum_{n=1}^N (\Phi A^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi A^{\langle \rangle})_n}} \right]$$

MAC = 1

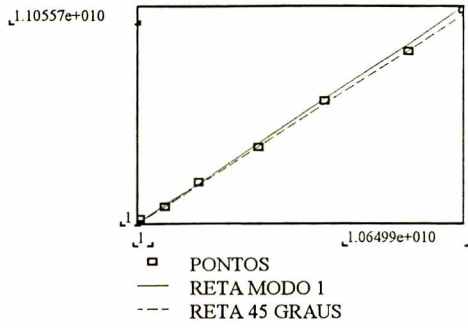
PLOTAGEM

$$MAC_{I,J} := \frac{(\Phi X^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi A^{\langle \rangle}})^2}{\Phi X^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi X^{\langle \rangle}} \cdot (\Phi A^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi A^{\langle \rangle}})}$$

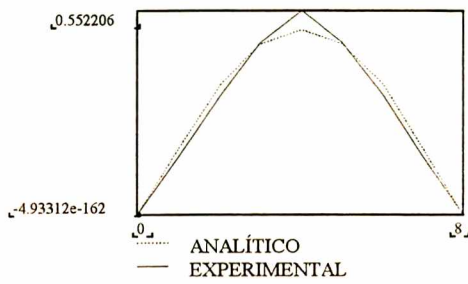
MAC<sub>I,J</sub> := |MAC<sub>I,J</sub>|



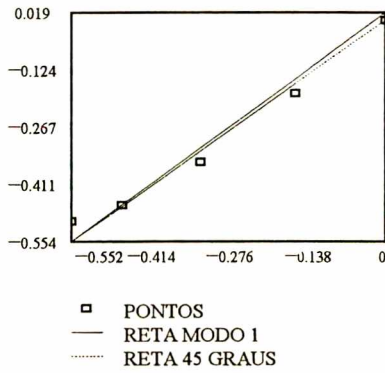
COMPARAÇÃO DOS AUTOVALORES.



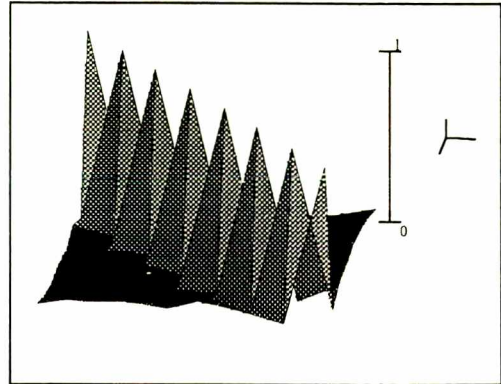
SOBREPOSIÇÃO DO PRIMEIRO MODO.



PLOTAGEM COMPARATIVA DO PRIMEIRO MODO.

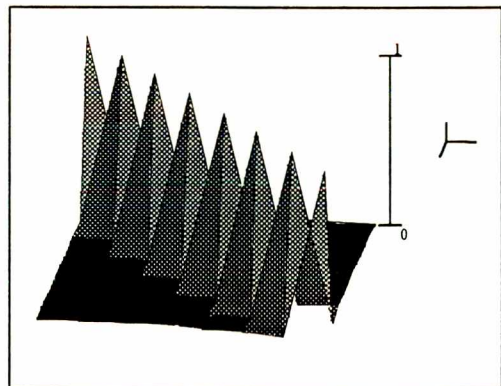


REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MSF



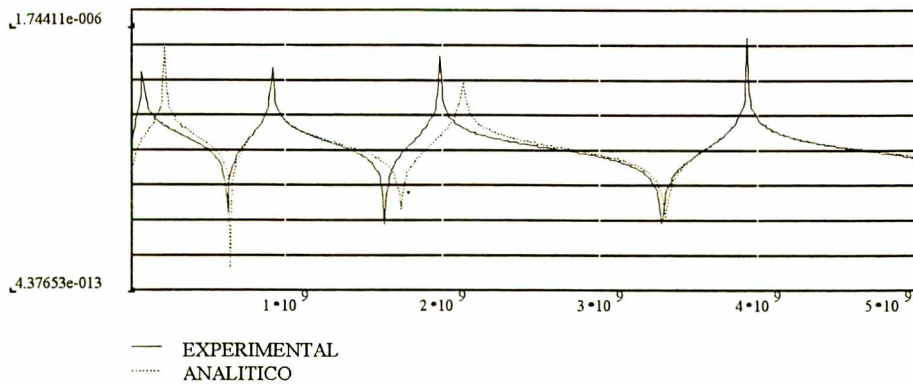
MSF

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MAC.



MAC

CURVAS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.



Indicativos de coerência dos modelos.

ANEXO 5

PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO DE MODELO - EXEMPLO NUMÉRICO SIMPLES

MODELO ANALÍTICO PARA VIGA NO PLANO ( ref. J. He ) - REDUZIDO PARA 1 DOF !

- L = comprimento total da viga (m)
- I = módulo de inércia da seção homogênea (m<sup>4</sup>)
- E = módulo de elasticidade (N/m<sup>2</sup>)
- MT = massa total da viga (Kg)
- NE = número de elementos no modelo
- L1 = comprimento de um elemento homogêneo (m)
- ML = massa por unidade de comprimento (Kg/m)
- M1 = matriz de massa de um elemento genérico
- K1 = matriz de rigidez de um elemento genérico
- MG = matriz de massa global da viga
- KG = matriz de rigidez global da viga

1) ENTRADA DE DADOS

$$L := 0.3 \quad MT := 0.45 \quad E := 2.1 \cdot 10^{11} \quad NE := 8 \quad L1 := \frac{L}{NE} \quad ML := \frac{MT}{L} \quad I := 1.6667 \cdot 10^{-9}$$

$$NN := NE + 1$$

MATRIZ DE MASSA E DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO GENÉRICO

$$r := 0, 1 \dots NE - 1 \quad MG := \frac{ML \cdot L1}{420} \quad KG := \frac{E \cdot I}{L1^3}$$

MODELO TEÓRICO

$$M1_{r,r} := 156 \cdot MG \quad M1_{r+1,r} := 54 \cdot MG \quad M1_{r,r+1} := 54 \cdot MG \quad M1_{r+1,r+1} := 156 \cdot 2 \cdot MG \quad M1_{8,8} := 156 \cdot MG$$

$$K1_{r+1,r} := -12 \cdot KG \quad K1_{r+1,r} := -12 \cdot KG \quad K1_{r,r+1} := -12 \cdot KG \quad K1_{r+1,r+1} := 24 \cdot KG \quad K1_{8,8} := 0$$

$$K1_{0,1} := 0 \quad K1_{1,0} := 0 \quad K1_{0,0} := 0 \quad K1_{7,8} := 0 \quad K1_{8,7} := 0 \quad \text{Condição de contorno biapoiaada.}$$

$$E := 2.076 \cdot 10^7 \quad \text{Correção proposta para o modelo analítico.}$$

$$K1_{4,4} := K1_{4,4} - E$$

MODELO EXPERIMENTAL

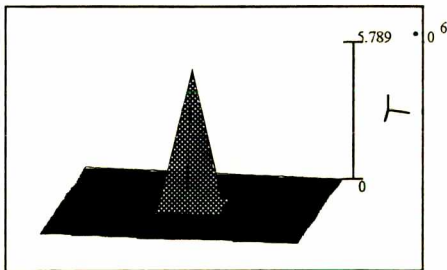
$$MIX_{r,r} := 156 \cdot MG \quad MIX_{r+1,r} := 54 \cdot MG \quad MIX_{r,r+1} := 54 \cdot MG \quad MIX_{r+1,r+1} := 156 \cdot 2 \cdot MG \quad MIX_{8,8} := 156 \cdot MG$$

$$K1X_{r,r} := 12 \cdot KG \quad K1X_{r+1,r} := -12 \cdot KG \quad K1X_{r,r+1} := -12 \cdot KG \quad K1X_{r+1,r+1} := 24 \cdot KG \quad K1X_{8,8} := 0$$

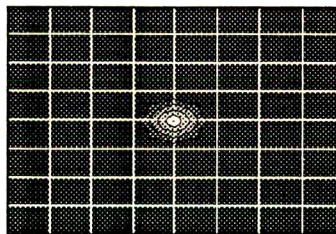
$$K1X_{0,1} := 0 \quad K1X_{1,0} := 0 \quad K1X_{0,0} := 0 \quad K1X_{7,8} := 0 \quad K1X_{8,7} := 0 \quad \text{Condição de contorno biapoiaada.}$$

$$K1X_{4,4} := 20 \cdot KG \quad \text{Singularidade imposta no nodo central do modelo " EXPERIMENTAL " .}$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA DIFERENÇA REAL ENTRE OS MODELOS :



$\overline{|K1 - K1X|}$



$\overline{|K1 - K1X|}$

2) SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES

$$i := 0 \dots 8$$

$$B := K1 \cdot M1^{-1}$$

$$w_i := \text{eigenvals} ( B )$$

$$A^{<i>} := \text{eigenvec} ( B, w_i )$$

$$BX := K1X \cdot MIX^{-1}$$

$$wX_i := \text{eigenvals} ( BX )$$

$$AX^{<i>} := \text{eigenvec} ( BX, wX_i )$$

MATRIZ DIAGONAL DE AUTOVALORES

MATRIZ DE AUTOVETORES

$$WA_{i,i} := w_i$$

$$WX_{i,i} := wX_i$$

$$\Phi A := A$$

$$\Phi X := AX$$

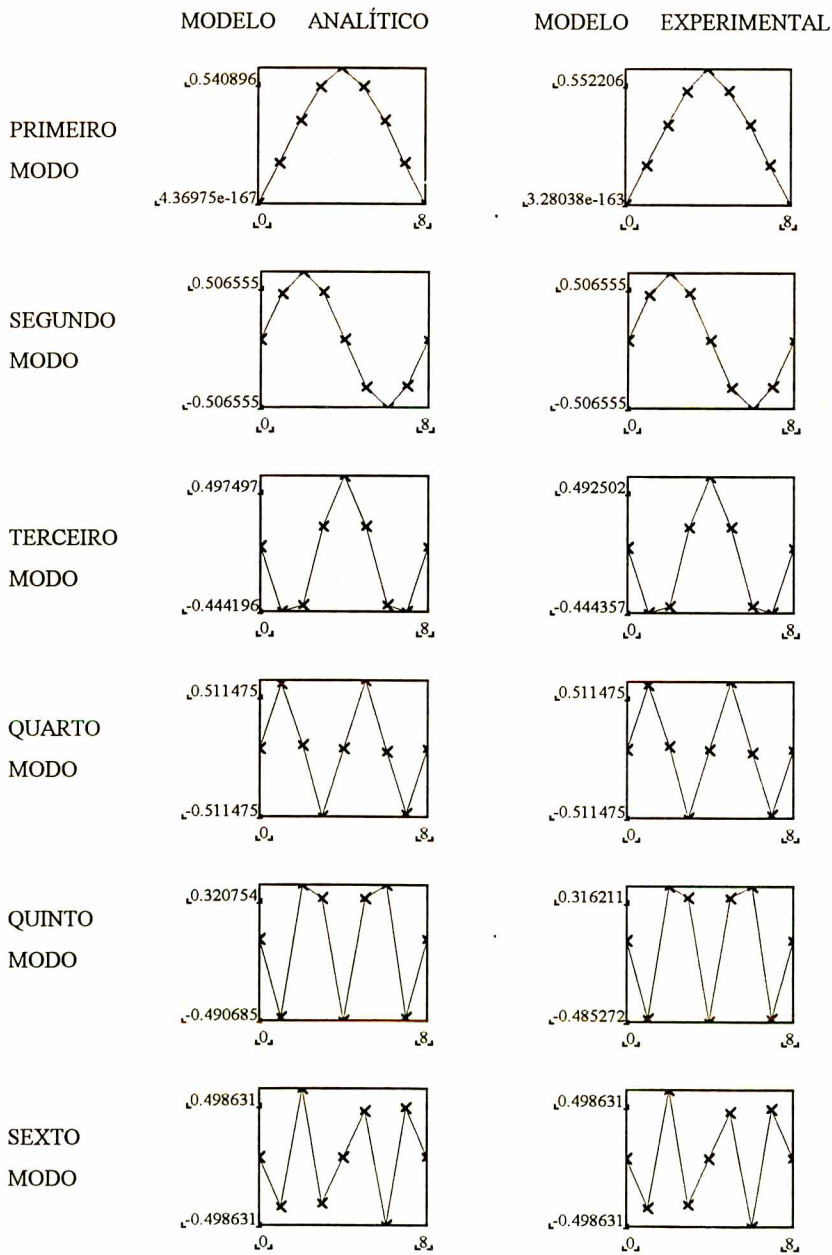
3) CORREÇÕES NA FASE DOS AUTOVETORES

$$AX^{<3>} := -1 \cdot AX^{<3>} \quad AX^{<0>} := -1 \cdot AX^{<0>} \quad AX^{<1>} := -1 \cdot AX^{<1>} \quad AX^{<4>} := -1 \cdot AX^{<4>} \quad AX^{<6>} := -1 \cdot AX^{<6>}$$

$$WA_{7,7} := 1 \quad WA_{8,8} := 1 \quad WX_{7,7} := 1 \quad WX_{8,8} := 1 \quad A^{<5>} := A^{<5>} - 1 \quad A^{<6>} := -1 \cdot A^{<6>} \quad A^{<4>} := -1 \cdot A^{<4>}$$

n := 6    M := 8    N := 8

VISUALIZAÇÃO DOS MODOS



Comparação dos autovetores.

4) LOCALIZAÇÃO DE REGIÕES MAL MODELADAS COM O USO DE POUCOS MODO

$$LK := WX_{6,6} \cdot M1 \cdot (\Phi X^{<6>} \cdot \Phi X^{<6>T}) - K1 \cdot (\Phi X^{<6>} \cdot \Phi X^{<6>T})$$

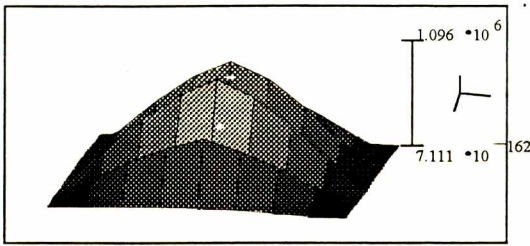
Linha da matriz.

$$CK := WX_{6,6} \cdot \Phi X^{<6>} \cdot \Phi X^{<6>T} \cdot M1 - (\Phi X^{<6>} \cdot \Phi X^{<6>T}) \cdot K1$$

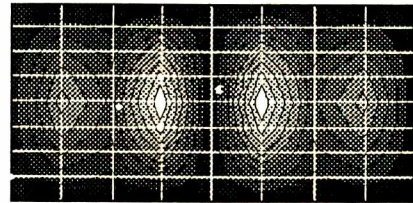
Coluna da matriz.

$$CT := \overrightarrow{|CK \cdot LK|}$$

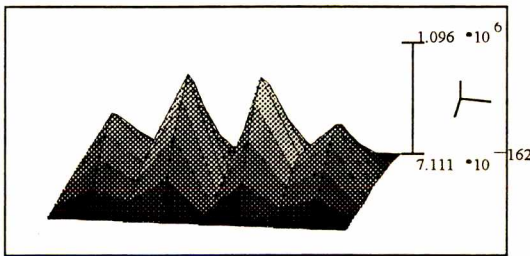
Produto final.



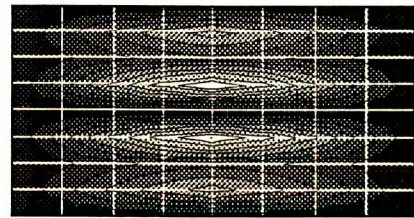
$\overrightarrow{|LK|}$



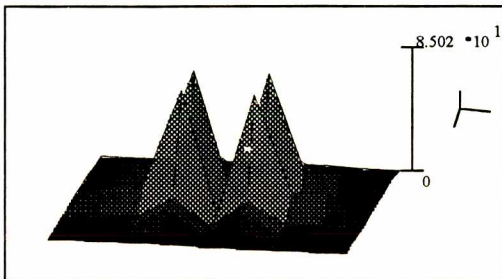
$\overrightarrow{|LK|}$



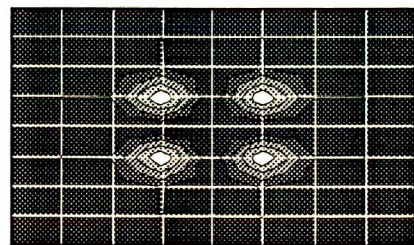
$\overrightarrow{|CK|}$



$\overrightarrow{|CK|}$



$\overrightarrow{|CT|}$



$\overrightarrow{|CT|}$

5) PROCESSO ITERATIVO USANDO UM MODO (m)

m := 6

$$EK1 := WX_{m,m} \cdot M1^{<4>T} \cdot \Phi X^{<m>} - K1^{<4>T} \cdot \Phi X^{<m>}$$

$$EK1 = 21.7$$

$$EK2 := \frac{EK1}{(\Phi X^{<m>})_4}$$

$$EK2 = -39.25394526$$

Valor da correção estimada nesta iteração.

$$K1_{4,4} = 1.4 \cdot 10^8$$

$$K1_{4,4} + EK2 = 1.4 \cdot 10^8$$

Novo valor para a matriz de rigidez analítica.

6) CÁLCULO DE INDICATIVOS DE COERÊNCIA ENTRE OS MODELOS.

A) Graficar autovalores em gráfico X - Y.

I := 0..M

WA1<sub>I</sub> := WA<sub>I,I</sub>

WX1<sub>I</sub> := WX<sub>I,I</sub>

WXV<sub>I</sub> := WX<sub>I,I</sub>

WAV<sub>I</sub> := WA<sub>I,I</sub>

a := slope(WXV, WAV)      a = 1

b := intercept(WXV, WAV)      b = 9,9·10<sup>6</sup>

B) Graficar autovetores em gráfico X - Y.

J := 6      -MODO A SER COMPARADO

I := 0..N

a := slope(ΦA<sup><></sup>, ΦX<sup><></sup>)      a = 1

b := intercept(ΦX<sup><></sup>, ΦA<sup><></sup>)      b = 0

a := |a|

C) Calcular MSF

$$MSF := \left[ \frac{\sum_{n=1}^N (\Phi X^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi A^{\langle \rangle})_n}}{\sum_{n=1}^N (\Phi A^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi A^{\langle \rangle})_n}} \right]$$

MSF = 1

PLOTAGEM

I := 0..M - 1

J := 0..M - 1

$$MSF_{I,J} := \frac{\Phi X^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi A^{\langle \rangle}}}{\Phi A^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi A^{\langle \rangle}}}$$

MSF<sub>I,J</sub> := |MSF<sub>I,J</sub>|

D) Calcular MAC

$$MAC := \left[ \frac{\left[ \sum_{n=1}^N (\Phi X^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi A^{\langle \rangle})_n} \right]^2}{\sum_{n=1}^N (\Phi X^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi X^{\langle \rangle})_n} \cdot \sum_{n=1}^N (\Phi A^{\langle \rangle})_n \cdot \overline{(\Phi A^{\langle \rangle})_n}} \right]$$

MAC = 1

PLOTAGEM

$$MAC_{I,J} := \frac{(\Phi X^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi A^{\langle \rangle}})^2}{\Phi X^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi X^{\langle \rangle}} \cdot (\Phi A^{\langle \rangle} \cdot \overline{\Phi A^{\langle \rangle}})}$$

MAC<sub>I,J</sub> := |MAC<sub>I,J</sub>|

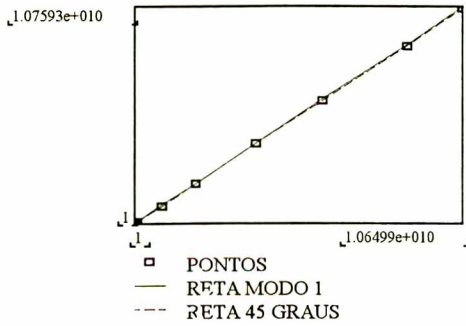
E) GRAFICAR Hx(f) & Ha(f) :

W := 1·10<sup>7</sup>, 2·10<sup>7</sup> .. 5·10<sup>9</sup>      R := 0..6

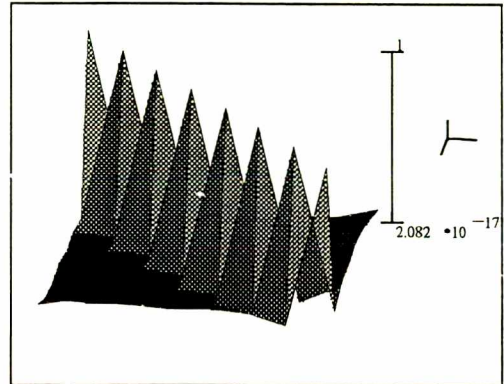
$$YX \frac{W}{1 \cdot 10^6} := W \cdot \left[ \sum_R \frac{[(\Phi X)^{\langle R \rangle}] \cdot [(\Phi X)^{\langle R \rangle}]}{(WX_{R,R})^2 - W^2} \right]$$

$$YA \frac{W}{1 \cdot 10^6} := W \cdot \left[ \sum_R \frac{[(\Phi A)^{\langle R \rangle}] \cdot [(\Phi A)^{\langle R \rangle}]}{(WA_{R,R})^2 - W^2} \right]$$

COMPARAÇÃO DOS AUTOVALORES.

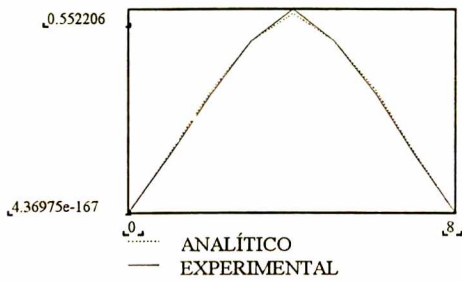


REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MSF

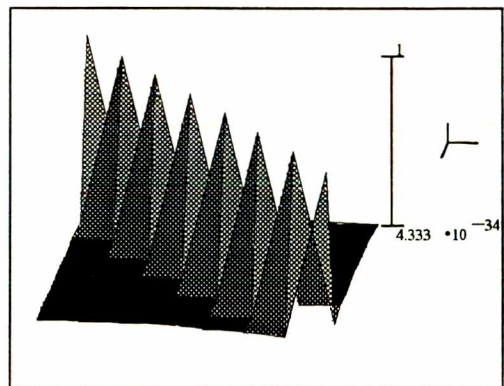


iMSF

SOBREPOSIÇÃO DO PRIMEIRO MODO.

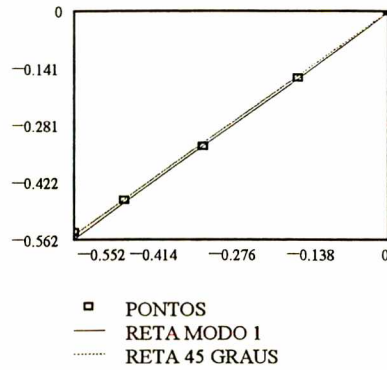


REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MAC.

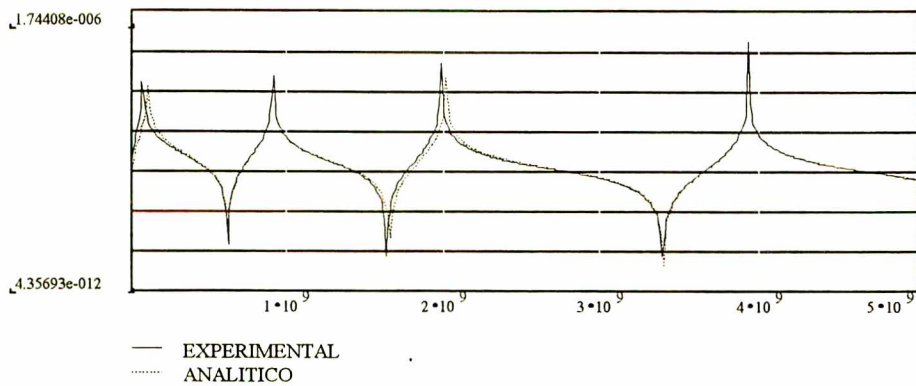


MAC

PLOTAGEM COMPARATIVA DO PRIMEIRO MODO.



CURVAS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.



Indicativos de coerência dos modelos.

## ANEXO 6

## PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO DE MODELO

EXEMPLO NUMÉRICO REAL SIMPLES »»» VIGA BIPARTIDA

MODELO ANALÍTICO PARA VIGA NO PLANO ( ref. J. He ) - 2 DOF ! - MATRIZ.MCD  
EXEMPLO LIVRE - LIVRE USANDO O PRIMEIRO MODO.

NOMENCLATURA

$K$  = matriz de rigidez analítica  
 $M$  = matriz de massa analítica  
 $W_a$  = matriz de autovalores analíticos  
 $W_x$  = matriz de autovalores experimentais  
 $\Phi_a$  = matriz de autovetores analíticos  
 $\Phi_x$  = matriz de autovetores experimentais

1) ENTRADA DE DADOS

MODELO TEÓRICO

MATRIZ DE MASSA E DE RIGIDEZ DO MODELO ANALÍTICO

 $K2 := \text{READPRN}(RIG2)$ 

MATRIZ DE RIGIDEZ CONSIDERANDO 2 DOF ( MATRIZ.MCD ) !

 $E := 0$ 

Fator de correção.

 $K2_{8,8} := K2_{8,8} - E$ 

Correção da matriz de rigidez.

Matrix of coefficients for a system of equations, with rows and columns labeled with numerical values and some 'K2' markers.

M2-READPR(MAS) MATRIZ DE MASSA CONSIDERANDO 2 DOF (MATRIZ.MCD) :

Large matrix of numerical values representing the mass matrix, with rows and columns labeled with numerical values and some 'M2' markers.

2) AUTOVALORES & AUTOVECTORES

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES

i = 0.17 B = K2M21

w = eigenv(B)

v^p = eigenv(B,w)

3) COMPATIBILIZAÇÃO DOS MODELOS: Matriz de autovetores.

wN1\_0 = wN1\_7, wN1\_1 = wN1\_6, wN1\_2 = wN1\_5, wN1\_3 = wN1\_4, wN1\_4 = wN1\_3

n = 0.8 wN1\_5 = wN1\_12, wN1\_6 = wN1\_11, wN1\_7 = wN1\_10, wN1\_8 = wN1\_9

V1 = (v^p)2n, V2 = (v^p)2n, V3 = (v^p)2n, V4 = (v^p)2n, V5 = (v^p)2n

V6 = (v^p)2n, V7 = (v^p)2n, V8 = (v^p)2n, V9 = (v^p)2n

VN1 = augmen(V1V2)

VN2 = augmen(VN1V3)

VN3 = augmen(VN2V4)

Leitura de [K1] e [M1] sem dof rotacional (MATR1C0.MCD) .

VN4 = augmen(VN3V5)

K1 = READPR(MG3)

VN5 = augmen(VN4V6)

K1\_4 = K1\_4 - E

VN6 = augmen(VN5V7)

M1 = READPR(MAS3)

VN7 = augmen(VN6V8)

VN = augmen(VN7V9)

Wa2 = wN Qa2 = VN



$$\frac{\sqrt{W a_2}}{2 \cdot \pi} = \begin{bmatrix} 1.2554i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1001i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 604.4139 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.6669 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2728 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4276 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.151 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1458 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5201 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES PARA 1 DOF :

$i := 0..8$        $B1 := K1 \cdot M1^{-1}$

$w1_i := \text{eigenvals}(B1)_i$

$V1^{<i>} := \text{eigenvec}(B1, w1_i)$

COMPATIBILIZAÇÃO DOS MODELOS » organizar matriz de autovetores.

$wN1_{0,0} := w1_8$     $wN1_{1,1} := w1_7$     $wN1_{2,2} := w1_6$     $wN1_{3,3} := w1_5$     $wN1_{4,4} := w1_4$

$n := 0..8$        $wN1_{5,5} := w1_0$     $wN1_{6,6} := w1_1$     $wN1_{7,7} := w1_2$     $wN1_{8,8} := w1_3$

$V11_n := (V1^{<8>})_n$     $V21_n := (V1^{<7>})_n$     $V31_n := (V1^{<6>})_n$     $V41_n := (V1^{<5>})_n$     $V51_n := (V1^{<4>})_n$

$V61_n := (V1^{<0>})_n$     $V71_n := (V1^{<1>})_n$     $V81_n := (V1^{<2>})_n$     $V91_n := (V1^{<3>})_n$

$VN11 := \text{augment}(V11, V21)$

$VN21 := \text{augment}(VN11, V31)$

$VN31 := \text{augment}(VN21, V41)$

$VN41 := \text{augment}(VN31, V51)$

$VN51 := \text{augment}(VN41, V61)$

$VN61 := \text{augment}(VN51, V71)$

$VN71 := \text{augment}(VN61, V81)$

$VN1 := \text{augment}(VN71, V91)$

$Wal := wN1$     $\Phi a1 := -1 \cdot VN1$

$T := \Phi a1^{<5>}$     $\Phi a1^{<5>} := \Phi a1^{<6>}$     $\Phi a1^{<6>} := T$

SOLUÇÃO EXATA: EQUAÇÃO DE EULER PARA VIGA  
(Thompson pág. 277)

$Et := 2.1 \cdot 10^{11}$     $Lt := .3$     $Mt := 1.5$     $It := 1.6667 \cdot 10^{-9}$

$\text{Freq1} := \frac{22.4}{2 \cdot \pi \cdot Lt^2} \cdot \sqrt{\frac{Et \cdot It}{Mt}}$        $\text{Freq1} = 605.08777139$

$\text{Freq2} := \frac{61.7}{2 \cdot \pi \cdot Lt^2} \cdot \sqrt{\frac{Et \cdot It}{Mt}}$        $\text{Freq2} = 1.6666926610^3$

$\text{Freq3} := \frac{121}{2 \cdot \pi \cdot Lt^2} \cdot \sqrt{\frac{Et \cdot It}{Mt}}$        $\text{Freq3} = 3.2685544810^3$

$\Phi a1 = \begin{bmatrix} -0.01311117 & 0.01311117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.00453901 & 0.00453901 & 0.1826869 & -0.33750722 & 0.44341043 & -0.36604387 & -0.20342473 & -0.46300657 & 0.48770135 \\ 0 & 0 & 0.35449311 & -0.50655545 & 0.37023081 & 0.49862947 & 0.35976408 & 0.3367576 & 0.02326247 \\ 0 & 0 & 0.46364569 & -0.35984782 & -0.18943203 & -0.34260843 & -0.45687908 & 0.20825955 & -0.51147459 \\ 0 & 0 & 0.50198168 & 0 & -0.51074817 & 0 & 0.49081502 & -0.50763608 & 0 \\ 0 & 0 & 0.46364569 & 0.35984782 & -0.18943203 & 0.34260843 & -0.45687908 & 0.20825955 & 0.51147459 \\ 0 & 0 & 0.35449311 & 0.50655545 & 0.37023081 & -0.49862947 & 0.35976408 & 0.3367576 & -0.02326247 \\ -0.32711325 & 0.32711325 & 0.1826869 & 0.33750722 & 0.44341043 & 0.36604387 & -0.20342473 & -0.46300657 & -0.48770135 \\ -0.94488328 & 0.94488328 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

MODELO EXPERIMENTAL

Considerando apenas o primeiro modo de vibração flexural da barra ( PCMODAL ).

$$F_x := \begin{bmatrix} 387.6 \\ 1492.8 \\ 2497 \\ 4436.5 \\ 6319.7 \end{bmatrix} \quad m := 0 \quad i := 0 \dots 8$$

$$\Phi_x := \begin{bmatrix} -2.84 & .474 & -.147 & 1.89 & -.886 \\ -1.32 & -.035 & .035 & -1.10 & .839 \\ .192 & -.528 & .126 & -.911 & -.194 \\ 1.4 & -.49 & -.006 & 1.68 & -.613 \\ 2.47 & .0185 & -.106 & -.172 & .819 \\ 1.39 & .453 & -.006 & -1.70 & -.613 \\ .131 & .481 & .126 & .956 & -.194 \\ -1.24 & -.035 & .035 & 1.16 & .839 \\ -2.53 & -.472 & -.147 & -1.91 & -.886 \end{bmatrix}$$

$$W_x := ((F_x \cdot 2 \cdot \pi)^2)$$

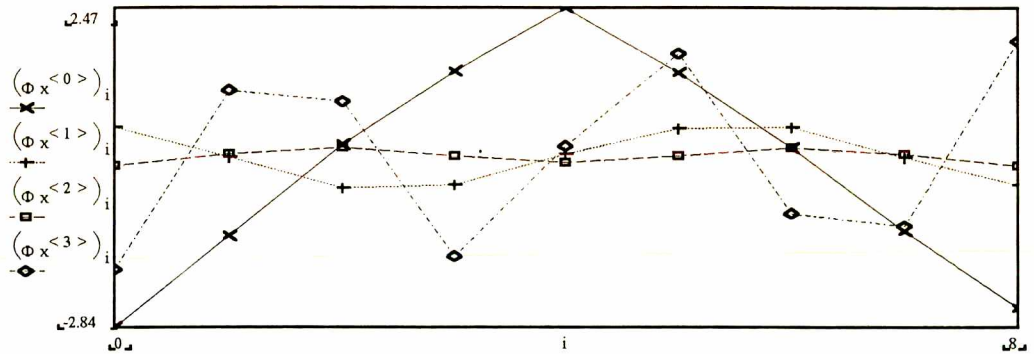
$$W_x = \begin{bmatrix} 5.93099112 \cdot 10^5 \\ 8.79757524 \cdot 10^7 \\ 2.46148289 \cdot 10^8 \\ 7.77035228 \cdot 10^8 \\ 1.57671305 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$$

Correção de fase :

$$\Phi_x^{<1>} := 1 \cdot \Phi_x^{<1>}$$

$$\Phi_x^{<3>} := -1 \cdot \Phi_x^{<3>}$$

VISUALIZAÇÃO DOS MODOS EXPERIMENTAIS.



COMPATIBILIZAÇÃO DA AMPLITUDE DOS AUTOVETORES.

$$n := 0 \dots 4$$

$$c1_n := \frac{\max(\Phi_{al}^{<n+2>}) - \min(\Phi_{al}^{<n+2>})}{\max(\Phi_x^{<n>}) - \min(\Phi_x^{<n>})}$$

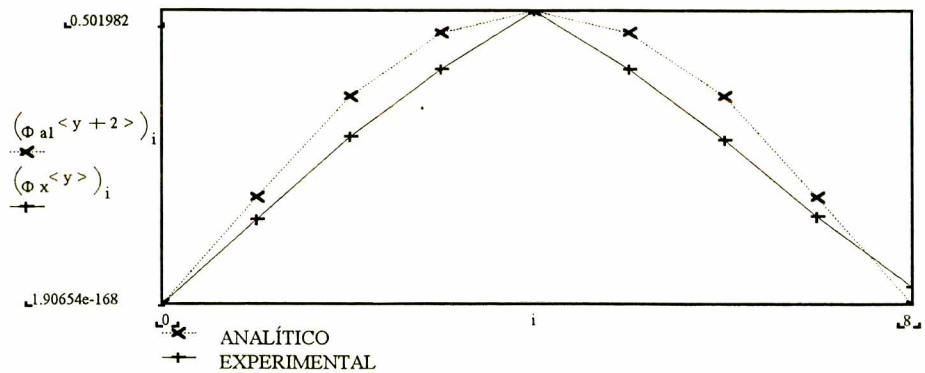
$$\Phi_x^{<n>} := \Phi_x^{<n>} \cdot c1_n$$

$$c2_n := \max(\Phi_{al}^{<n+2>}) - \max(\Phi_x^{<n>})$$

$$\Phi_x^{<n>} := (\Phi_x^{<n>} + c2_n)$$

VISUALIZAÇÃO SOBREPOSTA DOS MODOS

y := 0



## 4) LOCALIZAÇÃO DE REGIÕES MAL MODELADAS COM O USO DE POUCOS MODOS

$$LK_y := W_{x_y} \cdot M1 \cdot (\Phi_{x^{<y>}} \cdot \Phi_{x^{<y>}^T}) - K1 \cdot (\Phi_{x^{<y>}} \cdot \Phi_{x^{<y>}^T})$$

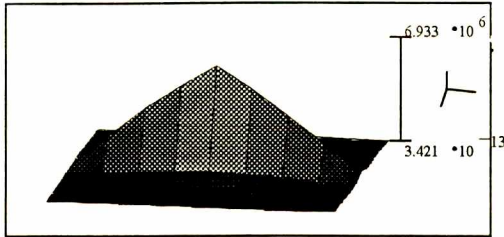
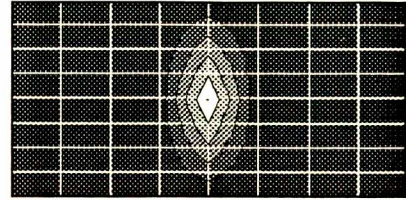
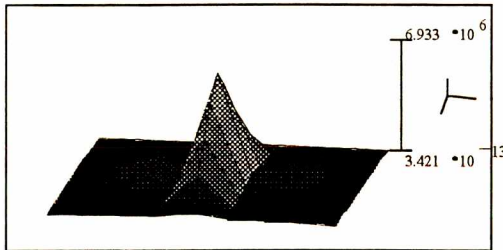
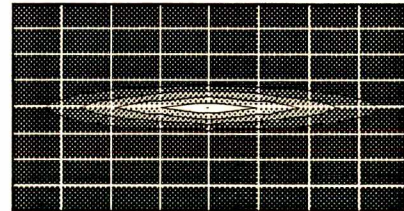
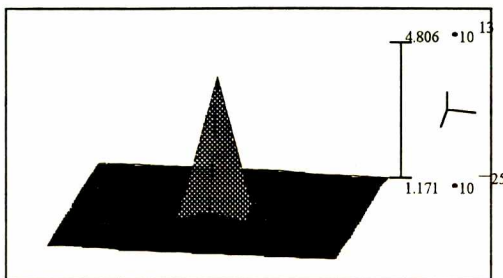
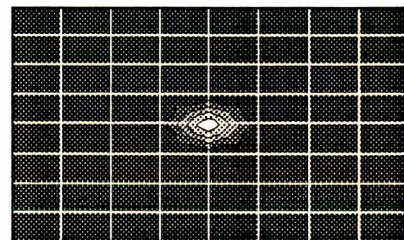
Linha da matriz.

$$CK_y := W_{x_y} \cdot \Phi_{x^{<y>}} \cdot \Phi_{x^{<y>}^T} \cdot M1 - (\Phi_{x^{<y>}} \cdot \Phi_{x^{<y>}^T}) \cdot K1$$

Coluna da matriz.

$$CT_y := \overrightarrow{|CK_y \cdot LK_y|}$$

Produto final.


 $\overrightarrow{|LK_y|}$ 

 $\overrightarrow{|LK_y|}$ 

 $\overrightarrow{|CK_y|}$ 

 $\overrightarrow{|CK_y|}$ 

 $\overrightarrow{|CT_y|}$ 

 $\overrightarrow{|CT_y|}$ 

## 5) PROCESSO ITERATIVO USANDO UM MODO (m)

$$EK1 := W_{x_y} \cdot M1^{<4>^T} \cdot \Phi_{x^{<y>}} - K1^{<4>^T} \cdot \Phi_{x^{<y>}}$$

$$EK1 = -1.38104029 \cdot 10^7$$

$$EK2 := \frac{EK1}{(\Phi_{x^{<y>}})_4}$$

$$EK2 = -2.75117667 \cdot 10^7$$

Valor da correção estimada nesta iteração.

$$K1_{4,4} = 1.373 \cdot 10^8$$

$$K1_{4,4} + EK2 = 1.09788233 \cdot 10^8$$

Novo valor para a matriz de rigidez analítica.

6) INDICADORES DE COERÊNCIA ENTRE OS MODELOS

A - COMPARAÇÃO GRÁFICA DOS AUTOVALORES

```

WaH := Wa22,2  WxH := Wx0,0  WxV1 := Wx0,0  WaV1 := Wa22,2
a := slope(WxV, WaV)      a = 2.43165155
b := intercept(WxV, WaV)  b = -3.0649971410-10
x := 0, .1·WaH.. 2·WaH
    
```

B - COMPARAÇÃO GRÁFICA DOS AUTOVETORES

```

M := 8  N := 8
J := 2  - MODO A SER COMPARADO
i := 0.. 8
a := slope(Φal<J>, Φx<0>)      a = 0.88238449
b := intercept(Φal<J>, Φx<0>)  b = -0.00163582
    
```

C - CALCULAR MSF PARA 1 MODO

$$MSF := \frac{\sum_{n=1}^N (\Phi x^{<0>})_n \cdot \overline{(\Phi al^{<J>})_n}}{\sum_{n=1}^N (\Phi al^{<J>})_n \cdot \overline{(\Phi al^{<J>})_n}}$$

MSF = 0.87828899

PLOTAGEM

```
I := 0.. 4
```

```
J := 2.. 6
```

$$MSF_{I,J} := \frac{\Phi x^{<0>} \cdot \overline{\Phi al^{<J>}}}{\Phi al^{<J>} \cdot \overline{\Phi al^{<J>}}}$$

$$MSF_{I,J} := |MSF_{I,J}|$$

D - CALCULAR MAC PARA 1 MODO

$$MAC := \frac{\left[ \sum_{n=1}^N (\Phi x^{<0>})_n \cdot \overline{(\Phi al^{<J>})_n} \right]^2}{\sum_{n=1}^N (\Phi x^{<0>})_n \cdot \overline{(\Phi x^{<0>})_n} \cdot \sum_{n=1}^N (\Phi al^{<J>})_n \cdot \overline{(\Phi al^{<J>})_n}}$$

MAC = 0.99152715

PLOTAGEM

$$MAC_{I,J} := \frac{(\Phi x^{<0>} \cdot \overline{\Phi al^{<J>}})^2}{\Phi x^{<0>} \cdot \overline{\Phi x^{<0>}} \cdot (\Phi al^{<J>} \cdot \overline{\Phi al^{<J>}})}$$

$$MAC_{I,J} := |MAC_{I,J}|$$

E) GRAFICAR Hx(f) & Ha(f)

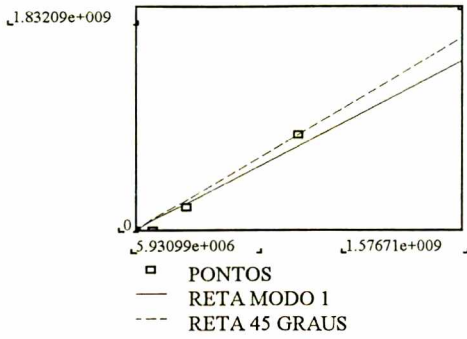
```

f := 1, 5.. 1·103  Fa21 :=  $\frac{\sqrt{Wa2_{i,i}}}{2 \cdot \pi}$ 
    
```

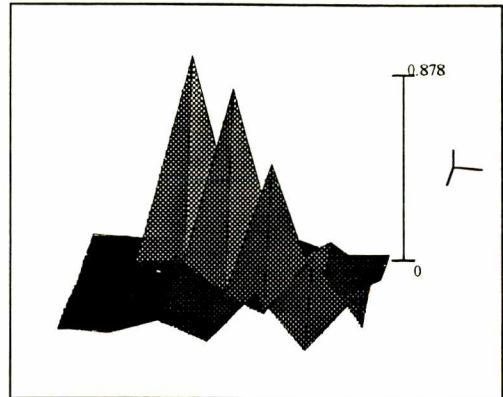
$$Y_X := f \left[ \frac{[(\Phi x)^{<0>}] \cdot [(\Phi x)^{<0>}]}{(F_x0)^2 - f^2} \right]$$

$$Y_a := f \left[ \frac{[(\Phi al)^{<2>}] \cdot [(\Phi al)^{<2>}]}{(Fa2_2)^2 - f^2} \right]$$

COMPARAÇÃO DOS AUTOVALORES.

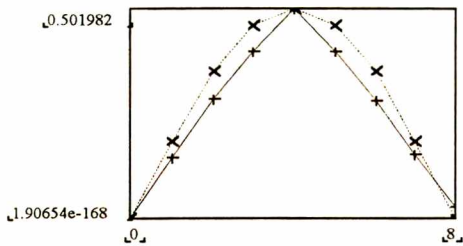


REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MSF.

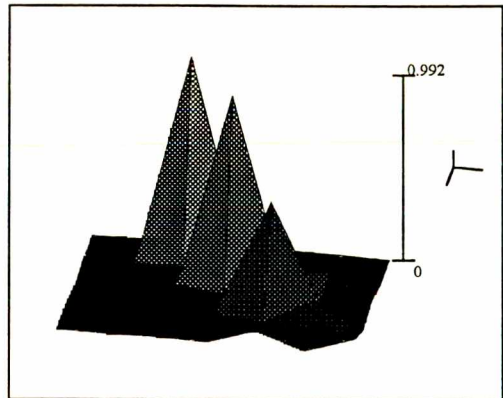


MSF

SOBREPOSIÇÃO DO PRIMEIRO MODO.

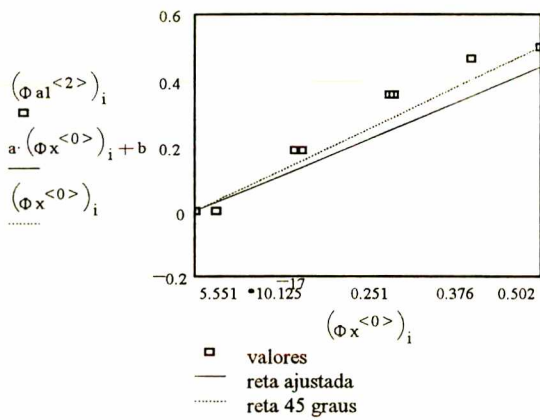


REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MAC.

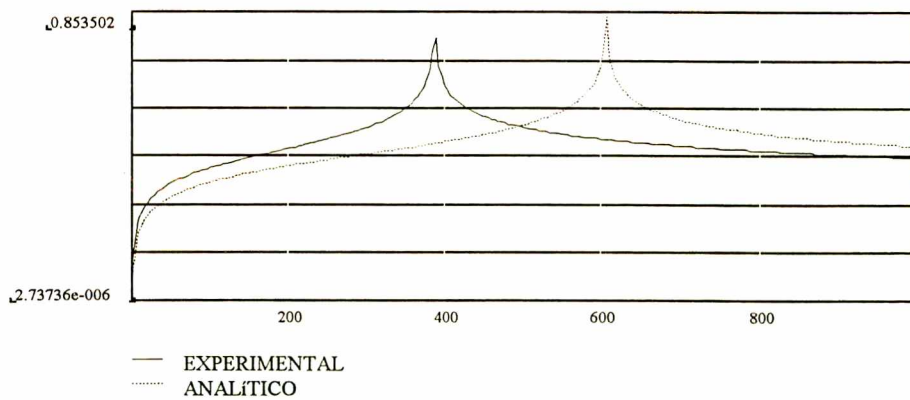


MAC

PLOTAGEM COMPARATIVA DO PRIMEIRO MODO.



CURVAS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.



Indicativos de coerência dos modelos.

## ANEXO 7

**PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO DE MODELO**

EXEMPLO NUMÉRICO REAL SIMPLES »»» VIGA BIPARTIDA

MODELO ANALÍTICO PARA VIGA NO PLANO ( ref. J. He ) - 2 DOF ! - MATRIZ.MCD  
EXEMPLO LIVRE - LIVRE USANDO O PRIMEIRO MODO.

NOMENCLATURA

K = matriz de rigidez analítica  
 M = matriz de massa analítica  
 Wa = matriz de autovalores analíticos  
 Wx = matriz de autovalores experimentais  
 Φa = matriz de autovetores analíticos  
 Φx = matriz de autovetores experimentais

1) ENTRADA DE DADOS

MODELO TEÓRICO

MATRIZ DE MASSA E DE RIGIDEZ DO MODELO ANALÍTICO

K2 := READPRN(RIG2)

MATRIZ DE RIGIDEZ CONSIDERANDO 2 DOF ( MATRIZ.MCD ) !

E := 2.75·10<sup>7</sup>

Fator de correção.

K<sub>2,8</sub> := K<sub>2,8</sub> - E

Correção da matriz de rigidez.



$$\frac{\sqrt{Wa2}}{2 \cdot \pi} = \begin{bmatrix} 1.6669 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1001i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 390.8285 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.2407 \cdot 10^3 i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.9048 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.4276 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.967 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1458 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5089 \cdot 10^4 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES PARA 1 DOF :

$i := 0..8$                        $B1 := KI \cdot M1^{-1}$

$w1_i := \text{eigenvals}(B1)_i$

$V1^{<i>} := \text{eigenvec}(B1, w1_i)$

COMPATIBILIZAÇÃO DOS MODELOS » organizar matriz de autovetores.

$wN1_{0,0} := w1_8$     $wN1_{1,1} := w1_7$     $wN1_{2,2} := w1_6$     $wN1_{3,3} := w1_5$     $wN1_{4,4} := w1_4$

$n := 0..8$                        $wN1_{5,5} := w1_0$     $wN1_{6,6} := w1_1$     $wN1_{7,7} := w1_2$     $wN1_{8,8} := w1_3$

$V11_n := (V1^{<8>})_n$     $V21_n := (V1^{<7>})_n$     $V31_n := (V1^{<6>})_n$     $V41_n := (V1^{<5>})_n$     $V51_n := (V1^{<4>})_n$

$V61_n := (V1^{<0>})_n$     $V71_n := (V1^{<1>})_n$     $V81_n := (V1^{<2>})_n$     $V91_n := (V1^{<3>})_n$

$VN11 := \text{augment}(V11, V21)$

$VN21 := \text{augment}(VN11, V31)$

$VN31 := \text{augment}(VN21, V41)$

$VN41 := \text{augment}(VN31, V51)$

$VN51 := \text{augment}(VN41, V61)$

$VN61 := \text{augment}(VN51, V71)$

$VN71 := \text{augment}(VN61, V81)$

$VN1 := \text{augment}(VN71, V91)$

$Wal := wN1$     $\Phi a1 := 1 \cdot VN1$

$T := \Phi a1^{<5>} \quad \Phi a1^{<5>} := \Phi a1^{<6>} \quad \Phi a1^{<6>} := T$

$$\Phi a1 = \begin{bmatrix} 0.01311117 & -0.01311117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00453901 & -0.00453901 & 0.15507191 & 0.33750722 & 0.44446458 & -0.36604387 & -0.22109133 & 0.47068338 & 0.48770135 \\ 0 & 0 & 0.31907428 & 0.50655545 & 0.40980574 & 0.49862947 & 0.38103979 & -0.31197291 & 0.02326247 \\ 0 & 0 & 0.46449807 & 0.35984782 & -0.1255019 & -0.34260843 & -0.46081906 & -0.25675828 & -0.51147459 \\ 0 & 0 & 0.56282475 & 0 & -0.48735975 & 0 & 0.43260396 & 0.48001092 & 0 \\ 0 & 0 & 0.46449807 & -0.35984782 & -0.1255019 & 0.34260843 & -0.46081906 & -0.25675828 & 0.51147459 \\ 0 & 0 & 0.31907428 & -0.50655545 & 0.40980574 & -0.49862947 & 0.38103979 & -0.31197291 & -0.02326247 \\ 0.32711325 & -0.32711325 & 0.15507191 & -0.33750722 & 0.44446458 & 0.36604387 & -0.22109133 & 0.47068338 & -0.48770135 \\ 0.94488328 & -0.94488328 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



MODELO EXPERIMENTAL

Considerando apenas o primeiro modo de vibração flexural da barra ( PCMODAL ).

$$F_x := \begin{bmatrix} 387.6 \\ 1492.8 \\ 2497 \\ 4436.5 \\ 6319.7 \end{bmatrix}$$

$$m := 0$$

$$i := 0 .. 8$$

$$\Phi_x := \begin{bmatrix} -2.84 & .474 & -.147 & 1.89 & -.886 \\ -1.32 & -.035 & .035 & -1.10 & .839 \\ .192 & -.528 & .126 & -.911 & -.194 \\ 1.4 & -.49 & -.006 & 1.68 & -.613 \\ 2.47 & .0185 & -.106 & -.172 & .819 \\ 1.39 & .453 & -.006 & -1.70 & -.613 \\ .131 & .481 & .126 & .956 & -.194 \\ -1.24 & -.035 & .035 & 1.16 & .839 \\ -2.53 & -.472 & -.147 & -1.91 & -.886 \end{bmatrix}$$

$$W_x := ((F_x \cdot 2 \cdot \pi)^2)$$

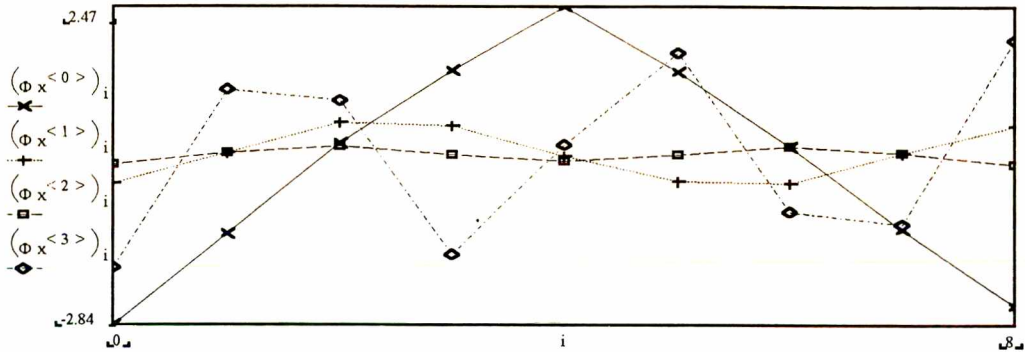
$$W_x = \begin{bmatrix} 5.93099112 \cdot 10^6 \\ 8.79757524 \cdot 10^7 \\ 2.46148289 \cdot 10^8 \\ 7.77035228 \cdot 10^8 \\ 1.57671305 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$$

Correção de fase :

$$\Phi_x^{<1>} := -1 \cdot \Phi_x^{<1>}$$

$$\Phi_x^{<3>} := -1 \cdot \Phi_x^{<3>}$$

VISUALIZAÇÃO DOS MODOS EXPERIMENTAIS.



COMPATIBILIZAÇÃO DA AMPLITUDE DOS AUTOVETORES.

$$n := 0 .. 4$$

$$c1_n := \frac{\max(\Phi_{al}^{<n+2>}) - \min(\Phi_{al}^{<n+2>})}{\max(\Phi_x^{<n>}) - \min(\Phi_x^{<n>})}$$

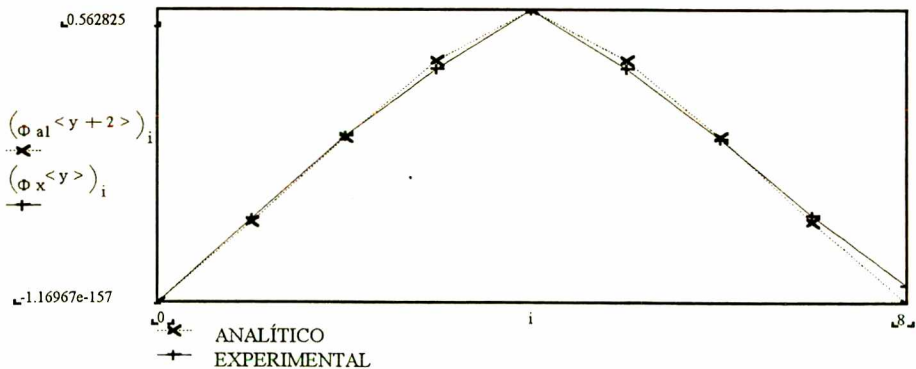
$$\Phi_x^{<n>} := \Phi_x^{<n>} \cdot c1_n$$

$$c2_n := \max(\Phi_{al}^{<n+2>}) - \max(\Phi_x^{<n>})$$

$$\Phi_x^{<n>} := (\Phi_x^{<n>} + c2_n)$$

VISUALIZAÇÃO SOBREPOSTA DOS MODOS

y := 0



## 4) LOCALIZAÇÃO DE REGIÕES MAL MODELADAS COM O USO DE POUCOS MODOS

$$LKy := Wx_y \cdot M1 \cdot (\Phi_x^{<y>} \cdot \Phi_x^{<y>T}) - K1 \cdot (\Phi_x^{<y>} \cdot \Phi_x^{<y>T})$$

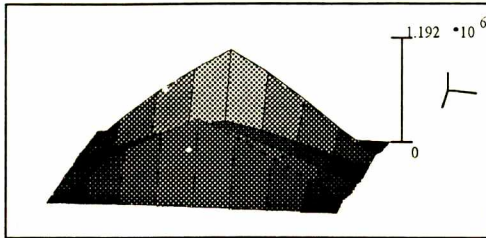
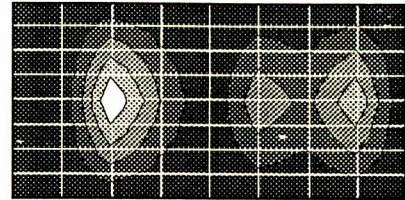
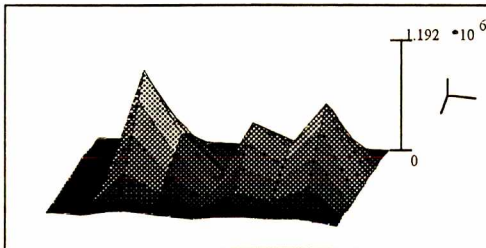
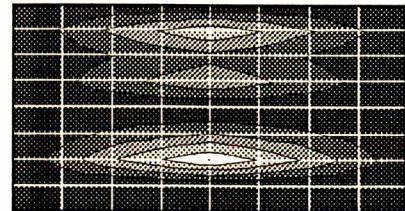
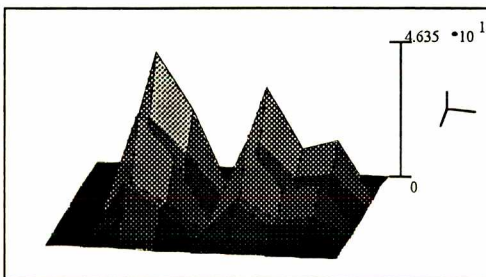
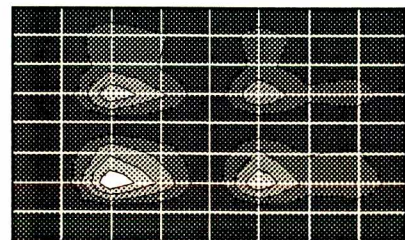
Linha da matriz.

$$CKy := Wx_y \cdot \Phi_x^{<y>} \cdot \Phi_x^{<y>T} \cdot M1 - (\Phi_x^{<y>} \cdot \Phi_x^{<y>T}) \cdot K1$$

Coluna da matriz.

$$CTy := \overrightarrow{|CKy \cdot LKy|}$$

Produto final.

 $\overrightarrow{|LKy|}$  $\overrightarrow{|LKy|}$  $\overrightarrow{|CKy|}$  $\overrightarrow{|CKy|}$  $\overrightarrow{|CTy|}$  $\overrightarrow{|CTy|}$ 

## 5) PROCESSO ITERATIVO USANDO UM MODO (m)

$$EK1 := Wx_y \cdot M1^{<4>T} \cdot \Phi_x^{<y>} - K1^{<4>T} \cdot \Phi_x^{<y>}$$

$$EK1 = -6.62256188 \cdot 10^3$$

$$EK2 := \frac{EK1}{(\Phi_x^{<y>})_4}$$

$$EK2 = -1.176665 \cdot 10^4$$

Valor da correção estimada nesta iteração.

$$K1_{4,4} = 1.098 \cdot 10^8$$

$$K1_{4,4} + EK2 = 1.09788233 \cdot 10^8$$

Novo valor para a matriz de rigidez analítica.

6) INDICADORES DE COERÊNCIA ENTRE OS MODELOS

A - COMPARAÇÃO GRÁFICA DOS AUTOVALORES

```

WaH := Wa22,2  WxH := Wx0,0  WxV1 := Wx0,0  WaV1 := Wa22,2
a := slope(WxV, WaV)      a = 1.01672811
b := intercept(WxV, WaV)  b = -1.8007995110-10
x := 0, .1·WaH.. 2·WaH
    
```

B - COMPARAÇÃO GRÁFICA DOS AUTOVETORES

```

M := 8  N := 8
J := 2  - MODO A SER COMPARADO
i := 0.. 8
a := slope(Φal<J>, Φx<0>)      a = 0.94851691
b := intercept(Φal<J>, Φx<0>)  b = 0.01621502
    
```

C - CALCULAR MSF PARA 1 MODO

$$MSF := \left[ \frac{\sum_{n=1}^N (\Phi x^{<0>})_n \cdot \overline{(\Phi al^{<J>})_n}}{\sum_{n=1}^N (\Phi al^{<J>})_n \cdot \overline{(\Phi al^{<J>})_n}} \right]$$

MSF = 0.98808341

PLOTAGEM

```

I := 0.. 4
J := 2.. 6
    
```

$$MSF_{I,J} := \frac{\Phi x^{<0>} \cdot \overline{\Phi al^{<J>}}}{\Phi al^{<J>} \cdot \overline{\Phi al^{<J>}}}$$

$$MSF_{I,J} := |MSF_{I,J}|$$

D - CALCULAR MAC PARA 1 MODO

$$MAC := \left[ \frac{\left[ \sum_{n=1}^N (\Phi x^{<0>})_n \cdot \overline{(\Phi al^{<J>})_n} \right]^2}{\sum_{n=1}^N (\Phi x^{<0>})_n \cdot \overline{(\Phi x^{<0>})_n} \cdot \sum_{n=1}^N (\Phi al^{<J>})_n \cdot \overline{(\Phi al^{<J>})_n}} \right]$$

MAC = 0.99826606

PLOTAGEM

$$MAC_{I,J} := \frac{(\Phi x^{<0>} \cdot \overline{\Phi al^{<J>}})^2}{\Phi x^{<0>} \cdot \overline{\Phi x^{<0>}} \cdot (\Phi al^{<J>} \cdot \overline{\Phi al^{<J>}})}$$

$$MAC_{I,J} := |MAC_{I,J}|$$

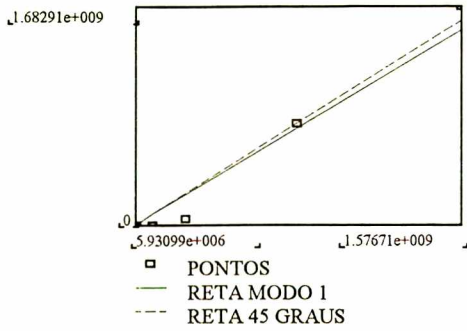
E) GRAFICAR Hx(f) & Ha(f) :

$$f := 1, 5.. 1 \cdot 10^3 \quad Fa2_i := \frac{\sqrt{Wa2_{i,i}}}{2 \cdot \pi}$$

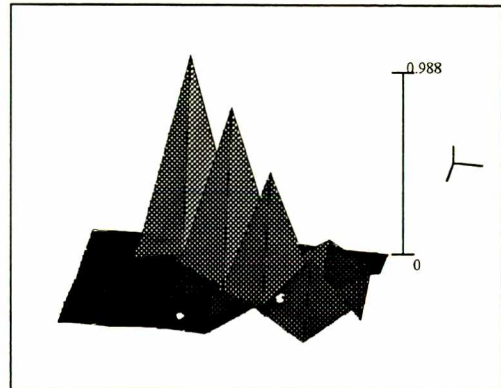
$$Yx_f := f \left[ \frac{[(\Phi x)^{<0>}] \cdot [(\Phi x)^{<0>}]}{(Fx_0)^2 - f^2} \right]$$

$$Ya_f := f \left[ \frac{[(\Phi al)^{<2>}] \cdot [(\Phi al)^{<2>}]}{(Fa2_2)^2 - f^2} \right]$$

COMPARAÇÃO DOS AUTOVALORES.

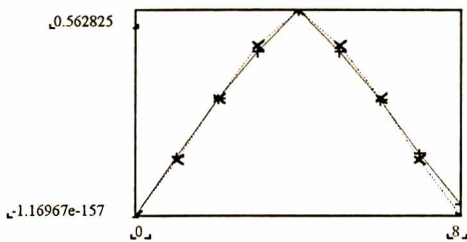


REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MSF.

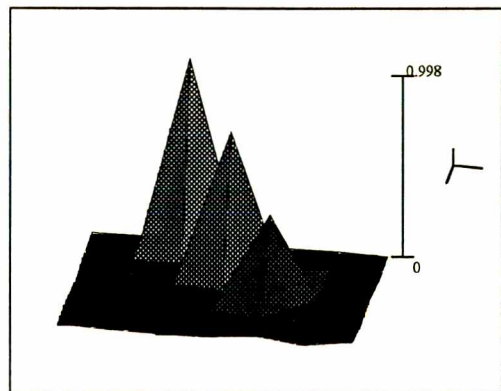


MSF

SOBREPOSIÇÃO DO PRIMEIRO MODO.

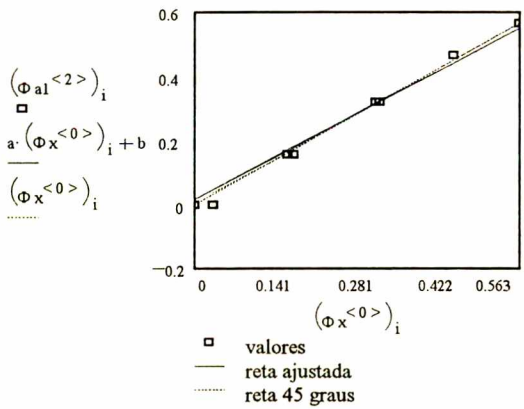


REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MAC.

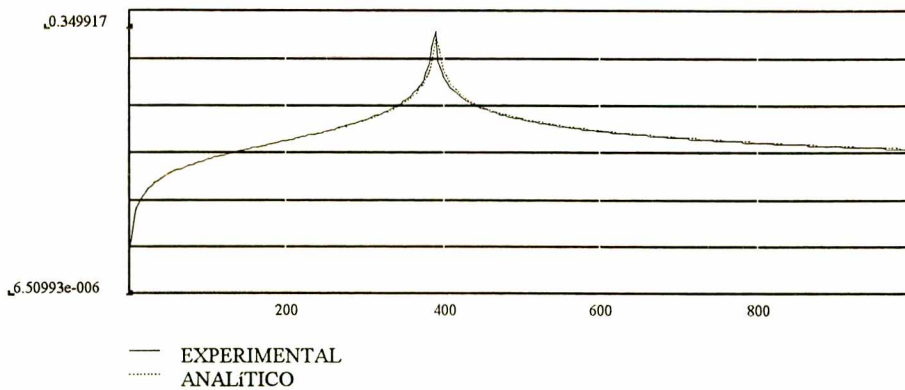


MAC

PLOTAGEM COMPARATIVA DO PRIMEIRO MODO.



CURVAS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.



Indicativos de coerência dos modelos.

## ANEXO 8

## PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO DE MODELO

EXEMPLO NUMÉRICO REAL »»» S.E.H. NO VEÍCULO, 100 Nm, VERTICAL, MESA VIBRATÓRIA

MODELO ANALÍTICO PARA VIGA NO PLANO ( ref. J. He ) - 2 DOF !

CONDIÇÃO DE CONTORNO BIAPOIADO.

NOMENCLATURA

K = matriz de rigidez analítica

M = matriz de massa analítica

Wa = matriz de autovalores analíticos

Wx = matriz de autovalores experimentais

Φa = matriz de autovetores analíticos

Φx = matriz de autovetores experimentais

## 1) ENTRADA DE DADOS

## MODELO TEÓRICO

## MATRIZ DE MASSA E DE RIGIDEZ DO MODELO ANALÍTICO

K2 := READPRN(RIGE)

MATRIZ DE RIGIDEZ CONSIDERANDO 2 DOF ( MATELEIX.MCD ) !

Introdução da junta fixa :

K2F := READPRN(RIGF)

$$K2_{14,14} := K2_{0,0} + K2F_{0,0} \quad K2_{15,15} := K2_{1,1} + K2F_{1,1} \quad K2_{14,15} := (-K2)_{0,1} + K2F_{0,1} \quad K2_{15,14} := (-K2)_{1,0} + K2F_{1,0}$$

$$K2_{17,17} := K2F_{3,3} \quad K2_{17,16} := K2F_{3,2} \cdot 0 \quad K2_{16,17} := K2F_{2,3} \cdot 0 \quad K2_{16,16} := K2F_{2,2} \cdot 0$$

$$K2_{17,15} := K2F_{3,1} \quad K2_{17,14} := K2F_{3,0} \quad K2_{16,15} := K2F_{2,1} \cdot 0 \quad K2_{16,14} := K2F_{2,0} \cdot 0$$

$$K2_{15,17} := K2F_{1,3} \quad K2_{15,16} := K2F_{1,2} \cdot 0 \quad K2_{14,17} := K2F_{0,3} \quad K2_{14,16} := K2F_{0,2} \cdot 0$$

Introdução da junta deslizante :

K2D := READPRN(RIGD)

$$K2_{2,2} := K2_{0,0} + K2D_{2,2} \quad K2_{3,3} := K2_{1,1} + K2D_{3,3} \quad K2_{2,3} := K2_{0,1} + K2D_{2,3} \quad K2_{3,2} := K2_{1,0} + K2D_{3,2}$$

$$K2_{0,0} := K2D_{0,0} \cdot 0 \quad K2_{1,0} := K2D_{1,0} \cdot 0 \quad K2_{0,1} := K2D_{0,1} \cdot 0 \quad K2_{1,1} := K2D_{1,1}$$

$$K2_{0,2} := K2D_{0,2} \cdot 0 \quad K2_{0,3} := K2D_{0,3} \cdot 0 \quad K2_{1,2} := K2D_{1,2} \quad K2_{1,3} := K2D_{1,3}$$

$$K2_{2,0} := K2D_{2,0} \cdot 0 \quad K2_{2,1} := K2D_{2,1} \quad K2_{3,0} := K2D_{3,0} \cdot 0 \quad K2_{3,1} := K2D_{3,1}$$

Correção da matriz de rigidez.

E1 := 0

Fator de correção na junta deslizante.

$$K2_{2,2} := (K2_{2,2} - E1)$$

E2 := 0

Fator de correção na junta fixa.

$$K2_{14,14} := (K2_{14,14} - E2)$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1.8210 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-3.45610 <sup>0</sup>	1.749610 <sup>0</sup>	0	-8.74810 <sup>0</sup>	3.45610 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	9.0990 <sup>0</sup>	0	3.6410 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	2.0990 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-8.74810 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	1.7510 <sup>0</sup>	0	-8.74810 <sup>0</sup>	3.45610 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K2=	0	3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	3.6410 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-8.74810 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	1.7510 <sup>0</sup>	0	-8.74810 <sup>0</sup>	3.45610 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	3.6410 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-8.74810 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	1.7510 <sup>0</sup>	0	-8.74810 <sup>0</sup>	3.45610 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	3.6410 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-8.74810 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	1.7510 <sup>0</sup>	0	-8.74810 <sup>0</sup>	3.45610 <sup>0</sup>	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	3.6410 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8.74810 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	1.7510 <sup>0</sup>	0	-8.74810 <sup>0</sup>	3.45610 <sup>0</sup>	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	3.6410 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8.74810 <sup>0</sup>	-3.45610 <sup>0</sup>	1.749610 <sup>0</sup>	0	0	3.45610 <sup>0</sup>	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	3.6410 <sup>0</sup>	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.45610 <sup>0</sup>	9.0990 <sup>0</sup>	0	1.8210 <sup>0</sup>	0

M2=READPR(MASF) MATRIZ DE MASSA CONSIDERANDO 2 DOF (MATELEIX.MCD)!

Introdução da junta fixa :

M2F=READPR(MASF)

$$\begin{aligned}
M2_{14,14} &:= M2_{0,0} + M2F_{0,0} & M2_{4,15} &:= (-M2)_{0,1} + M2F_{0,1} & M2_{14,16} &:= M2F_{0,2} & M2_{14,17} &:= M2F_{0,3} \\
M2_{15,14} &:= -M2_{1,0} + M2F_{1,0} & M2_{15,15} &:= M2_{1,1} + M2F_{1,1} & M2_{15,16} &:= M2F_{1,2} & M2_{15,17} &:= M2F_{1,3} \\
M2_{16,14} &:= M2F_{2,0} & M2_{16,15} &:= M2F_{2,1} & M2_{16,16} &:= M2F_{2,2} & M2_{16,17} &:= M2F_{2,3} \\
M2_{17,14} &:= M2F_{3,0} & M2_{17,15} &:= M2F_{3,1} & M2_{17,16} &:= M2F_{3,2} & M2_{17,17} &:= M2F_{3,3}
\end{aligned}$$

Introdução da junta deslizante :

M2D=READPR(MASD)

$$\begin{aligned}
M2_{2,0} &:= M2D_{2,0} & M2_{2,1} &:= M2D_{2,1} & M2_{2,2} &:= M2_{0,0} + M2D_{2,2} & M2_{2,3} &:= M2_{0,1} + M2D_{2,3} \\
M2_{3,0} &:= M2D_{3,0} & M2_{3,1} &:= M2D_{3,1} & M2_{3,2} &:= M2_{1,0} + M2D_{3,2} & M2_{3,3} &:= M2_{1,1} + M2D_{3,3} \\
M2_{0,0} &:= M2D_{0,0} & M2_{0,1} &:= M2D_{0,1} & M2_{0,2} &:= M2D_{0,2} & M2_{0,3} &:= M2D_{0,3} \\
M2_{1,0} &:= M2D_{1,0} & M2_{1,1} &:= M2D_{1,1} & M2_{1,2} &:= M2D_{1,2} & M2_{1,3} &:= M2D_{1,3}
\end{aligned}$$

0.1068	0.00119	0.03698	-7.03310 <sup>-4</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00119	1.7110 <sup>-5</sup>	7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.03698	7.03310 <sup>-4</sup>	0.2136	0	0.03698	-7.03310 <sup>-4</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	3.41910 <sup>-5</sup>	7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.03698	7.03310 <sup>-4</sup>	0.2137	0	0.03698	-7.03310 <sup>-4</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M2=	0	-7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	3.41910 <sup>-5</sup>	7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.03698	7.03310 <sup>-4</sup>	0.2137	0	0.03698	-7.03310 <sup>-4</sup>	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	3.41910 <sup>-5</sup>	7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.03698	7.03310 <sup>-4</sup>	0.2137	0	0.03698	-7.03310 <sup>-4</sup>	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	3.41910 <sup>-5</sup>	7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.03698	7.03310 <sup>-4</sup>	0.2137	0	0.03698	-7.03310 <sup>-4</sup>	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	3.41910 <sup>-5</sup>	7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03698	7.03310 <sup>-4</sup>	0.2137	0	0.03698	-7.03310 <sup>-4</sup>	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	3.41910 <sup>-5</sup>	7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03698	7.03310 <sup>-4</sup>	0.2136	0	0.03698	-7.03310 <sup>-4</sup>
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	0	3.41910 <sup>-5</sup>	7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.03698	7.03310 <sup>-4</sup>	0.1068	-0.00119
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-7.03310 <sup>-4</sup>	-1.28210 <sup>-5</sup>	-0.00119	1.7110 <sup>-5</sup>

## 2) AUTOVALORES &amp; AUTOVETORES

## SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES

i := 0 ..17      B := K2·M2<sup>-1</sup>

w<sub>i</sub> := eigenvals(B)

V<sup><A></sup> := eigenvec(B, w<sub>i</sub>)

## 3) COMPATIBILIZAÇÃO DOS MODOS

Definição da matriz de autovetores.

wN<sub>0,0</sub> := w<sub>17</sub>   wN<sub>1,1</sub> := w<sub>14</sub>   wN<sub>2,2</sub> := w<sub>16</sub>   wN<sub>3,3</sub> := w<sub>15</sub>   wN<sub>4,4</sub> := w<sub>13</sub>

n := 0 ..8      wN<sub>5,5</sub> := w<sub>12</sub>   wN<sub>6,6</sub> := w<sub>11</sub>   wN<sub>7,7</sub> := w<sub>10</sub>   wN<sub>8,8</sub> := w<sub>9</sub>

V<sub>1n</sub> := (V<sup><17></sup>)<sub>2n</sub>   V<sub>2n</sub> := (V<sup><14></sup>)<sub>2n</sub>   V<sub>3n</sub> := (V<sup><16></sup>)<sub>2n</sub>   V<sub>4n</sub> := (V<sup><15></sup>)<sub>2n</sub>   V<sub>5n</sub> := (V<sup><13></sup>)<sub>2n</sub>

V<sub>6n</sub> := (V<sup><12></sup>)<sub>2n</sub>   V<sub>7n</sub> := (V<sup><11></sup>)<sub>2n</sub>   V<sub>8n</sub> := (V<sup><10></sup>)<sub>2n</sub>   V<sub>9n</sub> := (V<sup><9></sup>)<sub>2n</sub>

VN1 := augment(V1, V2)

VN2 := augment(VN1, V3)

VN3 := augment(VN2, V4)

VN4 := augment(VN3, V5)

VN5 := augment(VN4, V6)

VN6 := augment(VN5, V7)

VN7 := augment(VN6, V8)

VN := augment(VN7, V9)

Wa2 := wN   Φa2 := VN

Φa2 := Φa2

$$\frac{\sqrt{Wa2}}{2\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4953 \cdot 10^{-4} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 135.25150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500.31110 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1346 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.046510^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2545 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.7794 \cdot 10^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.610510^3 \end{bmatrix}$$

Leitura de [K1] e [M1] sem dof rotacional ( MATR1CD0.MCD ).

K1 := READPRN(RIG6)

M1 := READPRN(MAS6)

M1<sub>0,0</sub> := M2<sub>0,0</sub>   M1<sub>1,0</sub> := M2<sub>2,0</sub>   M1<sub>0,1</sub> := M2<sub>0,2</sub>   M1<sub>1,1</sub> := M2<sub>2,2</sub>   M1<sub>7,7</sub> := M2<sub>14,14</sub>   M1<sub>8,8</sub> := M2<sub>16,16</sub>   M1<sub>8,7</sub> := M2<sub>16,14</sub>   M1<sub>7,8</sub> := M2<sub>14,16</sub>

K1<sub>0,0</sub> := K2<sub>0,0</sub>   K1<sub>1,0</sub> := K2<sub>2,0</sub>   K1<sub>0,1</sub> := K2<sub>0,2</sub>   K1<sub>1,1</sub> := K2<sub>2,2</sub>   K1<sub>7,7</sub> := K2<sub>14,14</sub>   K1<sub>8,8</sub> := K2<sub>16,16</sub>   K1<sub>8,7</sub> := K2<sub>16,14</sub>   K1<sub>7,8</sub> := K2<sub>14,16</sub>

K1<sub>0,0</sub> := 0   K1<sub>8,8</sub> := 0   Condição de contorno biapoada.

MODELO EXPERIMENTAL

Considerando apenas o primeiro modo de vibração flexural do S.E.H. ( PCMODAL ).

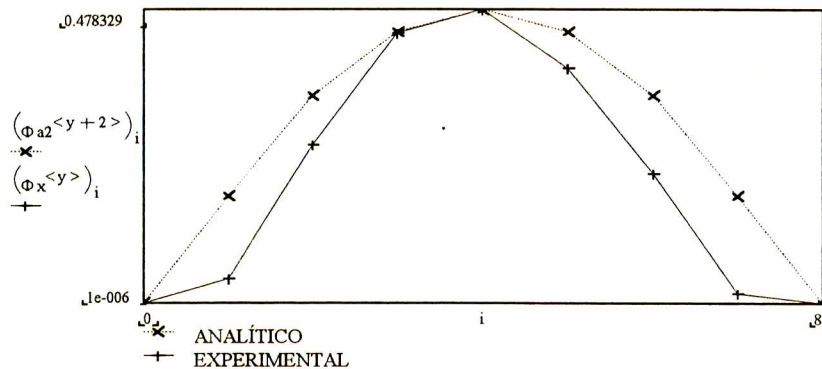
$$\begin{aligned}
 m &:= 0 \\
 i &:= 0..8 \\
 Fx &:= 251.78 \\
 Wx &:= ((Fx \cdot 2 \cdot \pi))^2 \\
 Wx &= 2.5026619754 \cdot 10^6
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 \Phi_{xi} &:= \begin{bmatrix} .015620 \\ .052750 \\ .271767 \\ .450511 \\ .489531 \\ .392705 \\ .218352 \\ .023320 \\ .000001 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 \Phi_x &:= \begin{bmatrix} .000001 \\ .038235 \\ .258356 \\ .438205 \\ .478329 \\ .382608 \\ .209359 \\ .015432 \\ .000001 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

COMPATIBILIZAÇÃO DA AMPLITUDE DOS AUTOVETORES .

$$\begin{aligned}
 n &:= 0 \\
 c1_n &:= \frac{\max(\Phi_x^{<n>}) - \min(\Phi_x^{<n>})}{\max(\Phi_{a2}^{<n+2>}) - \min(\Phi_{a2}^{<n+2>})} \\
 \Phi_{a2}^{<n+2>} &:= \Phi_{a2}^{<n+2>} \cdot c1_n \\
 c2_n &:= \max(\Phi_x^{<n>}) - \max(\Phi_{a2}^{<n+2>}) \\
 \Phi_{a2}^{<n+2>} &:= (\Phi_{a2}^{<n+2>} + c2_n)
 \end{aligned}$$

VISUALIZAÇÃO SOBREPOSTA DOS MODOS

y := 0



4) LOCALIZAÇÃO DE REGIÕES MAL MODELADAS COM O USO DE POUCOS MODOS

$$LKy := Wx \cdot M1 \cdot (\Phi_x \cdot \Phi_x^T) - K1 \cdot (\Phi_x \cdot \Phi_x^T)$$

Linha da matriz.

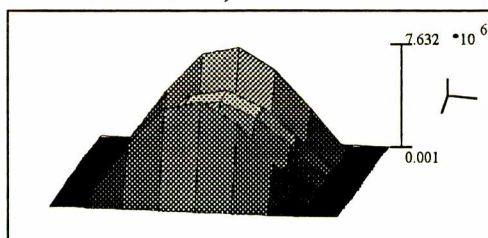
$$CKy := Wx \cdot \Phi_x \cdot \Phi_x^T \cdot M1 - (\Phi_x \cdot \Phi_x^T) \cdot K1$$

Coluna da matriz.

$$CTy := \overrightarrow{CKy^T} \cdot \overrightarrow{LKy^T}$$

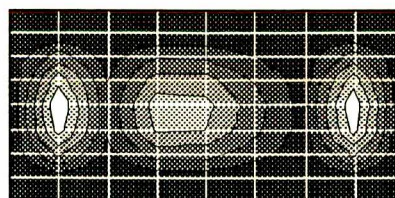
Produto final.

REPRESENTAÇÃO 3-D



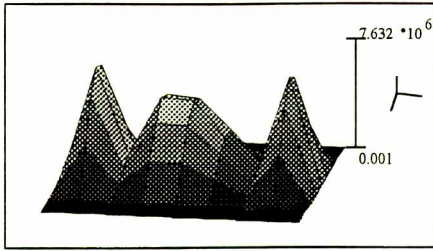
$\overrightarrow{LKy}$

LINHAS DE CONTORNO

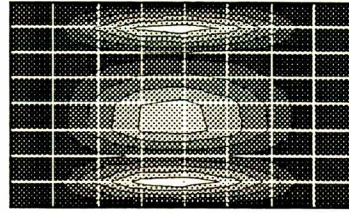


$\overrightarrow{LKy}$

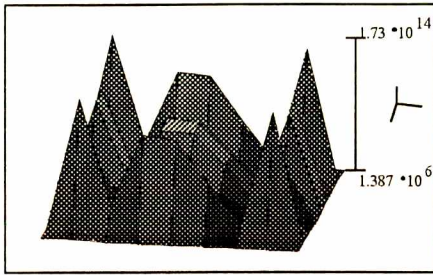




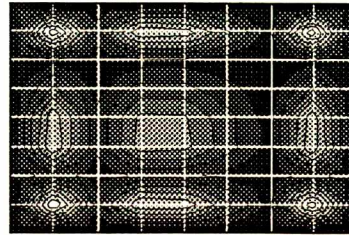
$\overline{CKy}$



$\overline{CKy}$



$\overline{CTy}$



$\overline{CTy}$

5) PROCESSO ITERATIVO USANDO UM MODO (m)

NODO # 2

NODO # 7

$$EK1 := Wx \cdot M1^{<1>T} \cdot \Phi x - K1^{<1>T} \cdot \Phi x$$

$$EK2 := Wx \cdot M1^{<7>T} \cdot \Phi x - K1^{<7>T} \cdot \Phi x$$

$$EK1 = 1.5955737048 \cdot 10^7$$

$$EK2 = 1.5642368004 \cdot 10^7$$

$$EK3 := \frac{EK1}{(\Phi x)_1}$$

$$EK4 := \frac{EK2}{(\Phi x)_7}$$

$$EK3 = 4.17307102 \cdot 10^8$$

$$EK4 = 1.01363193 \cdot 10^9$$

$$K1_{1,1} = 1.7496 \cdot 10^8$$

$$K1_{7,7} = 1.7496 \cdot 10^8$$

$$K1_{1,1} + EK3 = 5.9226710207 \cdot 10^8$$

$$K1_{7,7} + EK4 = 1.1885919339 \cdot 10^9$$

Cálculo da estimativa.

Valor da correção estimada nesta iteração.

Novo valor para a matriz de rigidez analítica.

6) INDICADORES DE COERÊNCIA ENTRE OS MODELOS

A - COMPARAÇÃO GRÁFICA DOS AUTOVALORES

$$Fa := \frac{\sqrt{Wa2_{2,2}}}{2 \cdot \pi}$$

$$FaH := Fa$$

$$FxH := Fx$$

$$FxV_1 := Fx$$

$$FaV_1 := Fa$$

$$a := \text{slope}(FxV, FaV)$$

$$a = 0.5371811325$$

$$Fa = 135.251465536$$

$$b := \text{intercept}(FxV, FaV)$$

$$b = -2.31065167 \cdot 10^{-15}$$

$$Fx = 251.78$$

$$x := 0, 100 \dots 1000$$

B - COMPARAÇÃO GRÁFICA DOS AUTOVETORES

$$M := 8 \quad N := 8$$

J := 2 - MODO A SER COMPARADO

$$i := 0 \dots 8$$

$$aV := \text{slope}(\Phi a2^{<j>}, \Phi x^{<0>})$$

$$aV = 1.0013826999$$

$$bV := \text{intercept}(\Phi a2^{<j>}, \Phi x^{<0>})$$

$$bV = -0.0631788674$$

## C - CALCULAR MSF PARA 1 MODO

$$\text{MSF} := \left[ \frac{\sum_{n=1}^N (\Phi_{x^{<0>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{a2^{<1>}})_n}}{\sum_{n=1}^N (\Phi_{a2^{<1>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{a2^{<1>}})_n}} \right]$$

$$\text{MSF} = 0.8354928716$$

## PLOTAGEM

$$I := 0$$

$$J := 0..4$$

$$\text{MSF}_j := \frac{\Phi_{x^{<0>}} \cdot \overline{\Phi_{a2^{<1>}}}}{\Phi_{a2^{<1>}} \cdot \overline{\Phi_{a2^{<1>}}}}$$

$$\text{MSF}_j := |\text{MSF}_j|$$

E) GRAFICAR H<sub>x</sub>(f) & H<sub>a</sub>(f) :

$$f := 1, 10.. 1 \cdot 10^3$$

$$Y_{X_f} := f \left[ \frac{[(\Phi_x)^{<0>}] \cdot [(\Phi_x)^{<0>}]}{(F_x)^2 - f^2} \right]$$

$$Y_{a_f} := f \left[ \frac{[(\Phi_{a2})^{<2>}] \cdot [(\Phi_{a2})^{<2>}]}{(Fa2_2)^2 - f^2} \right]$$

## D - CALCULAR MAC PARA 1 MODO

$$\text{MAC} := \left[ \frac{\left[ \sum_{n=1}^N (\Phi_{x^{<0>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{a2^{<1>}})_n} \right]^2}{\sum_{n=1}^N (\Phi_{x^{<0>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{x^{<0>}})_n} \cdot \sum_{n=1}^N (\Phi_{a2^{<1>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{a2^{<1>}})_n}} \right]$$

$$\text{MAC} = 0.9334587361$$

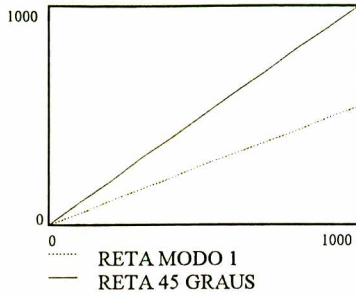
## PLOTAGEM

$$\text{MAC}_j := \frac{(\Phi_{x^{<0>}} \cdot \overline{\Phi_{a2^{<1>}}})^2}{\Phi_{x^{<0>}} \cdot \overline{\Phi_{x^{<0>}}} \cdot (\Phi_{a2^{<1>}} \cdot \overline{\Phi_{a2^{<1>}}})}$$

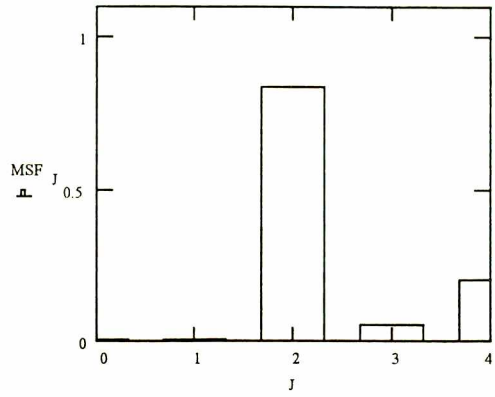
$$\text{MAC}_j := |\text{MAC}_j|$$

$$Fa2_i := \frac{\sqrt{Wa2_{i,i}}}{2 \cdot \pi}$$

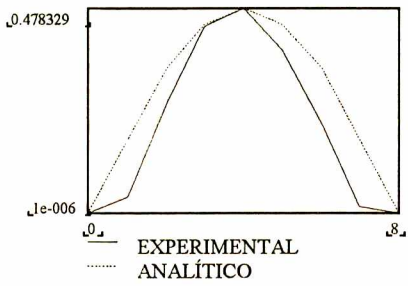
COMPARAÇÃO DOS AUTOVALORES.



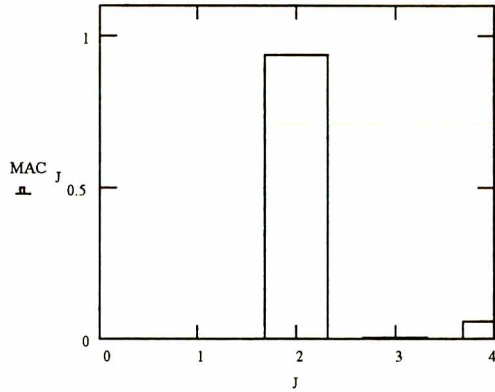
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MSF.



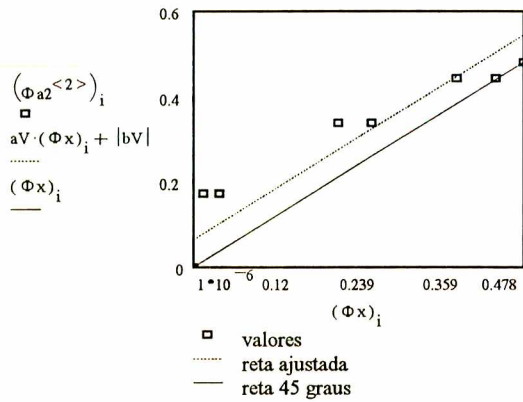
SOBREPOSIÇÃO DO PRIMEIRO MODO.



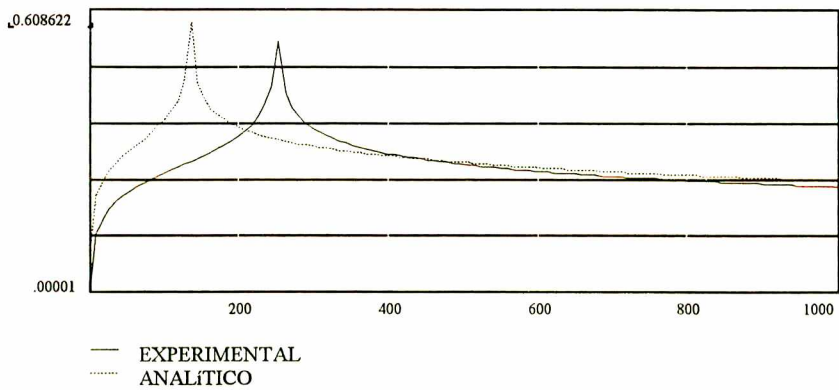
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MAC.



PLOTAGEM COMPARATIVA DO PRIMEIRO MODO.



CURVAS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.



Indicativos de coêrencia dos modelos.

## ANEXO 9

## PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO DE MODELO

EXEMPLO NUMÉRICO REAL »»» S.E.H. NO VEÍCULO, 100 Nm, VERTICAL, MESA VIBRATÓRIA

MODELO ANALÍTICO PARA VIGA NO PLANO ( ref. J. He ) - 2 DOF !

CONDIÇÃO DE CONTO RNO BIAPOLADO.

NOMENCLATURA

K = matriz de rigidez analítica

M = matriz de massa analítica

Wa = matriz de autovalores analíticos

Wx = matriz de autovalores experimentais

Φa = matriz de autovetores analíticos

Φx = matriz de autovetores experimentais

## 1) ENTRADA DE DADOS

## MODELO TEÓRICO

## MATRIZ DE MASSA E DE RIGIDEZ DO MODELO ANALÍTICO

K2 := READPRN(RIGE)

MATRIZ DE RIGIDEZ CONSIDERANDO 2 DOF ( MATELEIX.MCD ) !

Introdução da junta fixa :

K2F := READPRN(RIGF)

$$K2_{14,14} := K2_{0,0} + K2F_{0,0} \quad K2_{15,15} := K2_{1,1} + K2F_{1,1} \quad K2_{14,15} := (-K2)_{0,1} + K2F_{0,1} \quad K2_{15,14} := (-K2)_{1,0} + K2F_{1,0}$$

$$K2_{17,17} := K2F_{3,3} \quad K2_{17,16} := K2F_{3,2} \cdot 0 \quad K2_{16,17} := K2F_{2,3} \cdot 0 \quad K2_{16,16} := K2F_{2,2} \cdot 0$$

$$K2_{17,15} := K2F_{3,1} \quad K2_{17,14} := K2F_{3,0} \quad K2_{16,15} := K2F_{2,1} \cdot 0 \quad K2_{16,14} := K2F_{2,0} \cdot 0$$

$$K2_{15,17} := K2F_{1,3} \quad K2_{15,16} := K2F_{1,2} \cdot 0 \quad K2_{14,17} := K2F_{0,3} \quad K2_{14,16} := K2F_{0,2} \cdot 0$$

Introdução da junta deslizante :

K2D := READPRN(RIGD)

$$K2_{2,2} := K2_{0,0} + K2D_{2,2} \quad K2_{3,3} := K2_{1,1} + K2D_{3,3} \quad K2_{2,3} := K2_{0,1} + K2D_{2,3} \quad K2_{3,2} := K2_{1,0} + K2D_{3,2}$$

$$K2_{0,0} := K2D_{0,0} \cdot 0 \quad K2_{1,0} := K2D_{1,0} \cdot 0 \quad K2_{0,1} := K2D_{0,1} \cdot 0 \quad K2_{1,1} := K2D_{1,1}$$

$$K2_{0,2} := K2D_{0,2} \cdot 0 \quad K2_{0,3} := K2D_{0,3} \cdot 0 \quad K2_{1,2} := K2D_{1,2} \quad K2_{1,3} := K2D_{1,3}$$

$$K2_{2,0} := K2D_{2,0} \cdot 0 \quad K2_{2,1} := K2D_{2,1} \quad K2_{3,0} := K2D_{3,0} \cdot 0 \quad K2_{3,1} := K2D_{3,1}$$

Correção da matriz de rigidez.

$$E1 := -4.172 \cdot 10^8$$

Fator de correção na junta deslizante.

$$K2_{2,2} := (K2_{2,2} - E1)$$

$$E2 := -1.014 \cdot 10^9$$

Fator de correção na junta fixa.

$$K2_{14,14} := (K2_{14,14} - E2)$$



2) AUTOVALORES & AUTOVETORES

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALORES

i := 0 ..17                      B := k.2.M2^-1

w<sub>i</sub> := eigenvals(B)

V<sup><i></sup> := eigenvec(B, w<sub>i</sub>)

3) COMPATIBILIZAÇÃO DOS MODOS matriz de autovetores.

wN<sub>0,0</sub> := w<sub>17</sub>    wN<sub>1,1</sub> := w<sub>14</sub>    wN<sub>2,2</sub> := w<sub>16</sub>    wN<sub>3,3</sub> := w<sub>15</sub>    wN<sub>4,4</sub> := w<sub>13</sub>

n := 0 ..8                      wN<sub>5,5</sub> := w<sub>12</sub>    wN<sub>6,6</sub> := w<sub>11</sub>    wN<sub>7,7</sub> := w<sub>10</sub>    wN<sub>8,8</sub> := w<sub>9</sub>

V<sub>1n</sub> := (V<sup><17></sup>)<sub>2n</sub>    V<sub>2n</sub> := (V<sup><14></sup>)<sub>2n</sub>    V<sub>3n</sub> := (V<sup><16></sup>)<sub>2n</sub>    V<sub>4n</sub> := (V<sup><15></sup>)<sub>2n</sub>    V<sub>5n</sub> := (V<sup><13></sup>)<sub>2n</sub>

V<sub>6n</sub> := (V<sup><12></sup>)<sub>2n</sub>    V<sub>7n</sub> := (V<sup><11></sup>)<sub>2n</sub>    V<sub>8n</sub> := (V<sup><10></sup>)<sub>2n</sub>    V<sub>9n</sub> := (V<sup><9></sup>)<sub>2n</sub>

VN1 := augment(V1, V2)

VN2 := augment(VN1, V3)

VN3 := augment(VN2, V4)

VN4 := augment(VN3, V5)

VN5 := augment(VN4, V6)

VN6 := augment(VN5, V7)

VN7 := augment(VN6, V8)

VN := augment(VN7, V9)

Wa2 := wN    Phi2 := VN

Phi2 := - Phi2

$$\frac{\sqrt{Wa2}}{2\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5701 \cdot 10^{-5} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 416.72580 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1549 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2829 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7976 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.6758 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.6503 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.3623 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Leitura de [K1] e [M1] sem dof rotacional ( MATR1CD0.MCD ).

K1 := READPRN(RIG6)

M1 := READPRN(MAS6)

M1<sub>0,0</sub> := M2<sub>0,0</sub>    M1<sub>1,0</sub> := M2<sub>2,0</sub>    M1<sub>0,1</sub> := M2<sub>0,2</sub>    M1<sub>1,1</sub> := M2<sub>2,2</sub>    M1<sub>7,7</sub> := M2<sub>14,14</sub>    M1<sub>8,8</sub> := M2<sub>16,16</sub>    M1<sub>8,7</sub> := M2<sub>16,14</sub>    M1<sub>7,8</sub> := M2<sub>14,16</sub>

K1<sub>0,0</sub> := K2<sub>0,0</sub>    K1<sub>1,0</sub> := K2<sub>2,0</sub>    K1<sub>0,1</sub> := K2<sub>0,2</sub>    K1<sub>1,1</sub> := K2<sub>2,2</sub>    K1<sub>7,7</sub> := K2<sub>14,14</sub>    K1<sub>8,8</sub> := K2<sub>16,16</sub>    K1<sub>8,7</sub> := K2<sub>16,14</sub>    K1<sub>7,8</sub> := K2<sub>14,16</sub>

K1<sub>0,0</sub> := 0    K1<sub>8,8</sub> := 0    Condição de contorno biapoiaada.

MODELO EXPERIMENTAL

Considerando apenas o primeiro modo de vibração flexural do S.E.H. (PCMODAL).

$m := 0$   
 $i := 0..8$   
 $F_x := 251.78$   
 $W_x := ((F_x \cdot 2 \cdot \pi))^2$   
 $W_x = 2.5026619754 \cdot 10^6$

$\Phi_{xi} :=$	.015620
	.052750
	.271767
	.450511
	.489531
	.392705
	.218352
	.023320
	.000001

$\Phi_x :=$	.000001
	.038235
	.258356
	.438205
	.478329
	.382608
	.209359
	.015432
	.000001

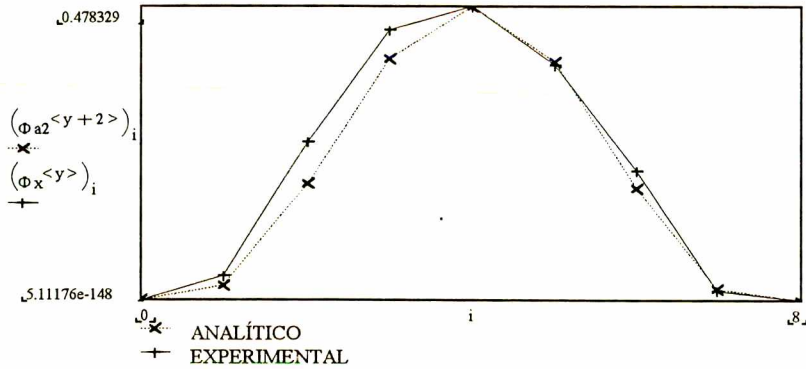
COMPATIBILIZAÇÃO DA AMPLITUDE DOS AUTOVETORES.

$n := 0$   
 $c1_n := \frac{\max(\Phi_x^{<n>}) - \min(\Phi_x^{<n>})}{\max(\Phi_{a2}^{<n+2>}) - \min(\Phi_{a2}^{<n+2>})}$   
 $\Phi_{a2}^{<n+2>} := \Phi_{a2}^{<n+2>} \cdot c1_n$

$\Phi_{a2}^{<n+2>} := (\Phi_{a2}^{<n+2>} + c2_n)$

VISUALIZAÇÃO SOBREPOSTA DOS MODOS

y = 0



4) LOCALIZAÇÃO DE REGIÕES MAL MODELADAS COM O USO DE POUCOS MODOS

$LKy := W_x \cdot M1 \cdot (\Phi_x \cdot \Phi_x^T) - K1 \cdot (\Phi_x \cdot \Phi_x^T)$

Linha da matriz.

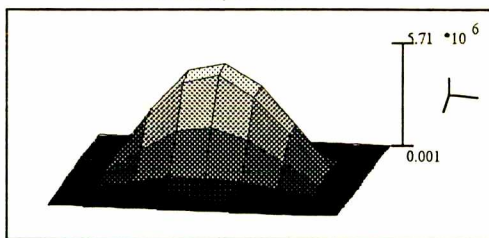
$CKy := W_x \cdot \Phi_x \cdot \Phi_x^T \cdot M1 - (\Phi_x \cdot \Phi_x^T) \cdot K1$

Coluna da matriz.

$CTy := \overrightarrow{CKy^T} \cdot \overrightarrow{LKy^T}$

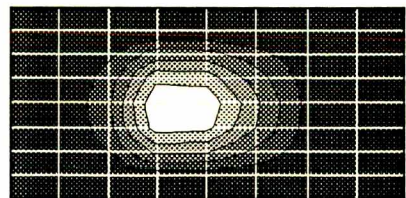
Produto final.

REPRESENTAÇÃO 3-D

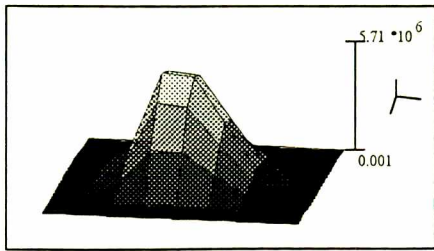


$\overrightarrow{LKy}$

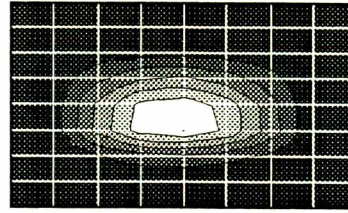
LINHAS DE CONTORNO



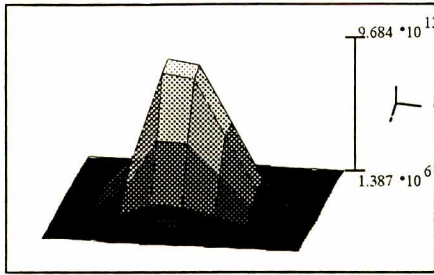
$\overrightarrow{LKy}$



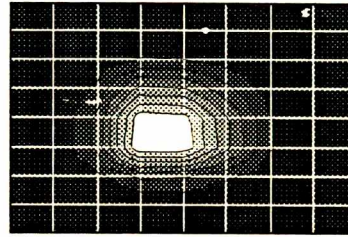
$|CKy|$



$|CKy|$



$|CTy|$



$|CTy|$

5) PROCESSO ITERATIVO USANDO UM MODO (m)

NODO # 2

NODO # 7

$$EK1 := Wx \cdot M1^{<1>T} \cdot \Phi x - K1^{<1>T} \cdot \Phi x$$

$$EK2 := Wx \cdot M1^{<7>T} \cdot \Phi x - K1^{<7>T} \cdot \Phi x$$

$$EK1 = 4.0950476161 \cdot 10^3$$

$$EK2 = -5.6799960299 \cdot 10^3$$

$$EK3 := \frac{EK1}{(\Phi x)_1}$$

$$EK4 := \frac{EK2}{(\Phi x)_7}$$

Cálculo da estimativa.

$$EK3 = 1.07102069 \cdot 10^5$$

$$EK4 = -3.68066098 \cdot 10^5$$

Valor da correção estimada nesta iteração.

$$K1_{1,1} = 5.9216 \cdot 10^8$$

$$K1_{7,7} = 1.18896 \cdot 10^9$$

$$K1_{1,1} + EK3 = 5.9226710207 \cdot 10^8$$

$$K1_{7,7} + EK4 = 1.1885919339 \cdot 10^9$$

Novo valor para a matriz de rigidez analítica.

6) INDICADORES DE COERÊNCIA ENTRE OS MODELOS

A - COMPARAÇÃO GRÁFICA DOS AUTOVALORES

$$Fa := \frac{\sqrt{Wa2_{2,2}}}{2 \cdot \pi}$$

$$FaH := Fa$$

$$FxH := Fx$$

$$FxV_1 := Fx$$

$$FaV_1 := Fa$$

$$a := \text{slope}(FxV, FaV)$$

$$a = 1.6551188231$$

$$Fa = 416.7258172815$$

$$b := \text{intercept}(FxV, FaV)$$

$$b = -1.2628786905 \cdot 10^{-15}$$

$$Fx = 251.78$$

$$x := 0, 100 \dots 1000$$

B - COMPARAÇÃO GRÁFICA DOS AUTOVETORES

$$M := 8 \quad N := 8$$

J := 2 - MODO A SER COMPARADO

$$i := 0 \dots 8$$

$$aV := \text{slope}(\Phi a2^{<J>}, \Phi x^{<0>})$$

$$aV = 1.0225621396$$

$$bV := \text{intercept}(\Phi a2^{<J>}, \Phi x^{<0>})$$

$$bV = 0.0123361512$$



## C - CALCULAR MSF PARA 1 MODO

$$\text{MSF} := \left[ \frac{\sum_{n=1}^N (\Phi_{x^{<0>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{a2^{<1>}})_n}}{\sum_{n=1}^N (\Phi_{a2^{<1>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{a2^{<1>}})_n}} \right]$$

$$\text{MSF} = 1.0567592387$$

## PLOTAGEM

$$I := 0$$

$$J := 0..4$$

$$\text{MSF}_J := \frac{\Phi_{x^{<1>}} \cdot \overline{\Phi_{a2^{<1>}}}}{\Phi_{a2^{<1>}} \cdot \overline{\Phi_{a2^{<1>}}}}$$

$$\text{MSF}_J := |\text{MSF}_J|$$

E) GRAFICAR  $H_x(f)$  &  $H_a(f)$ :

$$f := 1, 10.. 1 \cdot 10^3$$

$$Y_{X_f} := f \left[ \frac{[(\Phi_x)^{<0>}] \cdot [(\Phi_x)^{<0>}]}{(F_x)^2 - f^2} \right]$$

$$Y_{a_f} := f \left[ \frac{[(\Phi_{a2})^{<2>}] \cdot [(\Phi_{a2})^{<2>}]}{(F_{a2})^2 - f^2} \right]$$

## D - CALCULAR MAC PARA 1 MODO

$$\text{MAC} := \left[ \frac{\left[ \sum_{n=1}^N (\Phi_{x^{<0>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{a2^{<1>}})_n} \right]^2}{\sum_{n=1}^N (\Phi_{x^{<0>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{x^{<0>}})_n} \cdot \sum_{n=1}^N (\Phi_{a2^{<1>}})_n \cdot \overline{(\Phi_{a2^{<1>}})_n}} \right]$$

$$\text{MAC} = 0.9911488395$$

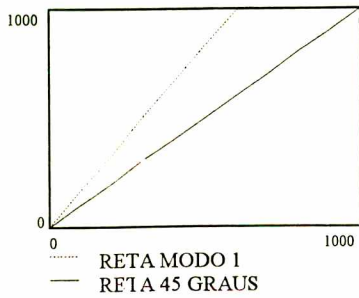
## PLOTAGEM

$$\text{MAC}_J := \frac{(\Phi_{x^{<1>}} \cdot \overline{\Phi_{a2^{<1>}}})^2}{\Phi_{x^{<0>}} \cdot \overline{\Phi_{x^{<0>}}} \cdot (\Phi_{a2^{<1>}} \cdot \overline{\Phi_{a2^{<1>}}})}$$

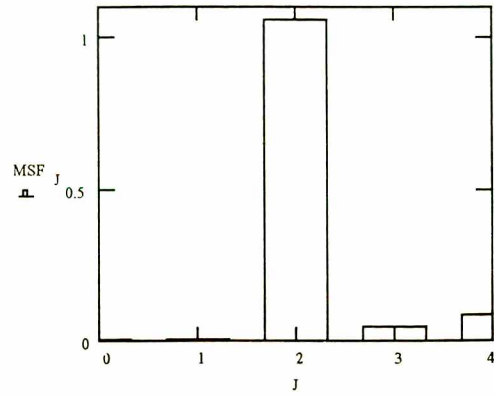
$$\text{MAC}_J := |\text{MAC}_J|$$

$$F_{a2_1} := \frac{\sqrt{W_{a2_{1,1}}}}{2 \cdot \pi}$$

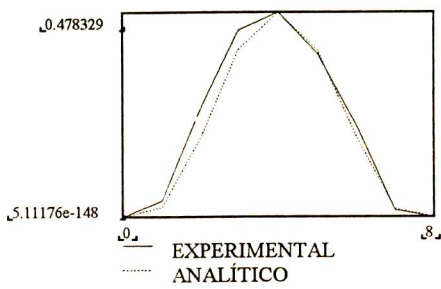
COMPARAÇÃO DOS AUTOVALORES.



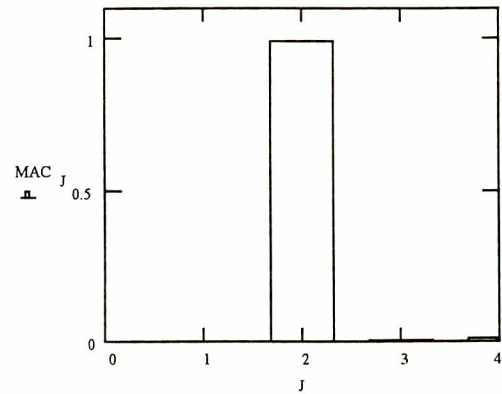
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MSF.



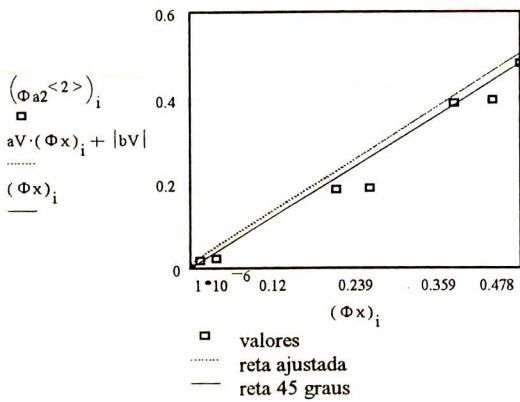
SOBREPOSIÇÃO DO PRIMEIRO MODO.



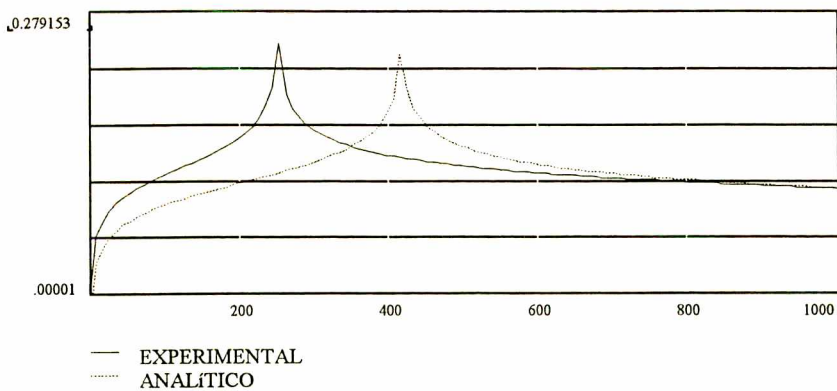
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MAC.



PLOTAGEM COMPARATIVA DO PRIMEIRO MODO.



CURVAS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA.



Indicativos de coêrencia dos modelos.